DIAGNOSTISCHE VRAGEN (BARTON) IN DE WISKUNDELES

Ontwerponderzoek bij integraalrekening

University of Twente

Student: Walter Winkel
Studievak: Onderzoek van onderwijs (10 EC)
Schoolvak: wiskunde
Begeleiders: T.J.M. Coenen & S. Firing-Pennings

Voorwoord

Mijn naam is Walter Winkel en dit is het verslag behorende bij mijn afstudeeronderzoek, van de *master Educatie en Communicatie in de Bètawetenschappen*, aan de Universiteit Twente.

Het onderzoek heet ''Diagnostische vragen (Barton) in de wiskundeles – Ontwerponderzoek bij integraalrekening''. In dit verslag presenteer ik elf diagnostische vragen die door docenten gebruikt kunnen worden in de les. Hiermee kunnen snel en inzichtelijk misvattingen en veelgemaakte fouten van leerlingen bij het thema integraalrekening geïdentificeerd worden. De doelgroep van dit afstudeeronderzoek zijn collega studenten, collega docenten en onderzoekers in het onderwijswerkveld. Enige wiskundige achtergrondkennis is noodzakelijk om de bevindingen in dit afstudeeronderzoek volledig te begrijpen.

Ik ben dankbaar voor de kans om een onderzoek uit te kunnen voeren dat bijdraagt aan het verbeteren van de lespraktijk van docenten op de middelbare school. Daarbij wil ik graag mijn begeleiders Tom Coenen en Susan Firing-Pennings bedanken voor de begeleiding gedurende dit afstudeeronderzoek. Ook wil ik mijn collega Elise Holubek bedanken voor de samenwerking gedurende het onderzoek, aangezien zij een parallelonderzoek m.b.t. differentiaalrekening heeft uitgevoerd. Verder wil ik het expert panel bedanken voor de waardevolle feedback op de ontworpen diagnostische vragen. Tot slot wil ik Ruben Liebe, mijn vakcoach, en de leerlingen uit vwo 5 van Het Stedelijk Lyceum Zuid bedanken voor de gelegenheid om de ontworpen diagnostische vragen uit te voeren in de praktijk.

Hopelijk zullen lezers de inhoud van dit onderzoek nuttig vinden en mag het waardevol zijn voor toekomstig onderzoek.

Samenvatting

Dit ontwerponderzoek heeft als onderzoeksdoel: **Diagnostische vragen ontwerpen a.d.h.v. opgestelde ontwerpeisen voor gebruik in de vwo 4/5 wiskunde B les bij differentiaal- en integraalrekening.** De acht ontwerpeisen zijn a.d.h.v. literatuur opgesteld in het theoretisch kader. De methode bij dit onderzoek bestaat uit vier fasen: een eerste ontwerp van de diagnostische vragen, review van expert panel op het eerste ontwerp, uitvoering van het eerste ontwerp in de klas en, o.b.v. de review van het expert panel en de uitvoering in de klas, een herontwerp. De resultaten bevatten elf herontworpen diagnostische vragen voor gebruik in de wiskunde B les bij het thema integraalrekening. Daarnaast zijn opmerkelijke frequenties, van antwoorden van leerlingen op diagnostische vragen, geanalyseerd. Uit evaluatie van het herontwerp, a.d.h.v. de ontwerpeisen, volgt dat het ontwerpdoel behaald is. Concluderend, diagnostische vragen zijn een aanbeveling voor gebruik in de les, aangezien veelgemaakte fouten en misvattingen snel en efficiënt inzichtelijk gemaakt kunnen worden.

Inhoudsopgave

1. Inleiding

Goed onderwijs verzorgen begint met leerlingen de lesstof te laten begrijpen en op den duur te laten toepassen. Om leerlingen de lesstof te laten begrijpen is een goede uitleg nodig, maar ook goede ondersteuning gedurende het zelfstandig werken. Deze ondersteuning vereist veel inspanning en tijd van docenten. Inspanning kan geleverd worden door enthousiaste docenten, maar de beschikbare tijd om leerlingen individueel te ondersteunen is voor alle docenten gelimiteerd. Deze limitaties worden opgelegd door de hoeveelheid lesuren die leerlingen toegewezen krijgen per vak maar ook door de andere activiteiten die gedurende de lesuren plaats moeten vinden, zoals het geven van klassikale uitleg. Door de gelimiteerde tijd voor individuele ondersteuning, kan het voorkomen dat bepaalde leerlingen de lesstof minder goed begrijpen en hierdoor uiteindelijk minder goed presterenop school. De identificatie van lastige leerstof en knelpunten van de leerlingen kan een goed startpunt leveren voor het bieden van individuele ondersteuning, echter kan deze identificatie voor zowel leraar als leerling veel tijd in beslag nemen. Dit heeft te maken met het aantal leerlingen dat in de klas zit en met verschillen tussen leerlingen, zoals de manier van communiceren. De ene leerling zal concreet en uit zichzelf aangeven welke stappen in een berekening hij of zij lastig vindt of niet begrijpt, terwijl de andere leerling erg onduidelijk is in het aangeven wat hij of zij niet begrijpt of überhaupt niets durft te zeggen of vragen. Als docent wordt daarop ingespeeld door o.a. bij leerlingen langs te lopen en te vragen of alle stof duidelijk is of dat zij tegen opdrachten aanlopen.

Als docent streven we er naar om iedere leerling voldoende te ondersteunen bij hun persoonlijke leerproces, maar dat komt niet altijd tot uiting in de les. De vereisten die horen bij het identificeren en behandelen van fouten bij leerlingen overschrijden namelijk vaak de capaciteiten van docenten. Docenten slagen er bijvoorbeeld niet altijd in om grip te krijgen op de aard van de fouten van de leerling (Sapire et al., 2016). Daarom zoeken we een manier waarop docenten snel en efficiënt in kaart kunnen brengen welke fouten door welke leerlingen gemaakt worden en welke misvattingen meerdere leerlingen hebben. Dit kan resulteren in betere en efficiëntere begeleiding van leerlingen. Ook komt hierdoor meer tijd beschikbaar voor andere lesactiviteiten, zoals een vakoverstijgend project of een praktische opdracht. Deze lesactiviteiten kunnen ten goede komen van de motivatie en de resultaten van de leerlingen.

Het snel en efficiënt in kaart brengen van knelpunten en lastige leerstof kan worden bevorderd door formatief te handelen in de les. Formatief handelen vormt namelijk de brug tussen onderwijzen en leren, door als docent de leerlingen actief te betrekken in de les om zo informatie te verzamelen waar de leerling staat ten opzichte van de gewenste doelen en vast te stellen wat er nodig is om de leerlingen te ondersteunen in het bereiken van de leerdoelen (Sluijsmans, 2020). Een voorbeeld hiervan is het stellen van diagnostische vragen. Diagnostische vragen zijn meerkeuzevragen, ontworpen om de fouten en misvattingen van leerlingen te identificeren en te begrijpen op een efficiente en accurate manier (Barton, 2020) (Wylie & William, 2006). De Engelse wiskunde docent Craig Barton heeft zich hierin verdiept en concrete handvaten gegeven om dit toe te passen in de wiskundeles op verschillende niveaus en voor verschillende wiskundige thema's (Barton, 2020).

De diagnostische vragen zijn toepasbaar bij verschillende onderwerpen in de wiskunde, zo ook bij het aanleren van de basisbeginselen van differentiaal- en integraalrekening. Aangezien deze lesstof bij de Calculusvakken op de technische opleidingen terugkomt is dit een relevant wiskundig concept om diagnostische vragen bij te ontwerpen. Dit leidt tot het ontwerpdoel van dit onderzoek: **Diagnostische vragen ontwerpen a.d.h.v. opgestelde ontwerpeisen voor gebruik in de vwo 4/5 wiskunde B les bij differentiaal- en integraalrekening.**

In dit onderzoek is een theoretisch kader opgesteld waar alle relevante begrippen voor dit onderzoek behandeld worden. Daarbij wordt theorie aangehaald uit de literatuur waaruit ontwerpeisen voor de diagnostische vragen volgen. Ook worden hier mogelijke misvattingen en veelgemaakte fouten beschreven. Vervolgens wordt de methode beschreven die in dit onderzoek gehanteerd wordt, bestaande uit vier stappen: eerste ontwerp, review, uitvoering, herontwerp. Na de methode worden de resultaten, namelijk de herontworpen diagnostische vragen, weergegeven. De diagnostische vragen omvatten een vraagstelling en antwoordmogelijkheden. Deze zullen gebaseerd zijn op verwachte misvattingen en veelgemaakte fouten bij leerlingen. Het ontwerpdoel zal na de resultaten geëvalueerd worden m.b.v. de opgestelde ontwerpeisen. Tot slot volgen een conclusie en discussie o.b.v. dit onderzoek.

Er is sprake van een parallel onderzoek. Het verslag van Elise Holubek gaat in op diagnostische vragen opgesteld voor het onderwerp differentiaalrekening en het verslag van Walter Winkel gaat in op diagnostische vragen opgesteld voor het onderwerp integraalrekening. De verslagen zullen overlappen wat betreft inleiding, theoretisch kader en methode. De resultaten, evaluatie, conclusie, discussie en aanbevelingen zullen verschillen wat betreft inhoud.

2. Theoretisch kader

Voor het uitvoeren van het onderzoek en het opstellen van de ontwerpeisen worden eerst een aantal relevante begrippen uitgelegd a.d.h.v. literatuur, die de ontwerpeisen en/of het onderzoek in zijn algemeen ondersteunen. Vervolgens wordt de toepassing van diagnostische vragen behandeld. Hier zal in meer detail gekeken worden naar de mogelijke doelen bij diagnostische vragen, de bijbehorende momenten van vragen stellen en de manier waarop antwoorden verzameld worden. Daarna worden mogelijke misvattingen en veelgemaakte fouten aangehaald uit literatuur die toepasselijk kunnen zijn voor de inhoud van hoofdstuk 6 (differentiaalrekening) en 11 (integraalrekening) uit Getal & Ruimte vwo wiskunde B. Tot slot zijn m.b.v. de relevante begrippen en literatuur ontwerpeisen opgesteld voor het ontwerp van diagnostische vragen.

2.1. Definities en begrippen

Formatief handelen

Zoals benoemd in de inleiding, is het belangrijk om snel en efficiënt in kaart te kunnen brengen wat lastige leerstof is en waar de knelpunten zitten. Formatief handelen is een didactisch proces, wat je kortcyclisch inzet als onderdeel van je lessen, om deze werkelijk zinvol en effectief te maken (Kneyber et al., 2022). Volgens Bloom (1969) is het doel van formatief handelen het geven van feedback en aanwijzingen op elk niveau binnen het onderwijs-leerproces. Barton (2020) geeft aan dat formatief handelen gaat om reageren in het moment. Het draait om het verzamelen van informatie over het begrip van leerlingen op de meest efficiënte manier en daarop gebaseerd beslissingen maken. Succesvolle formatieve evaluatie kan ons helpen om problemen te identificeren en deze in het hier en nu effectief en efficiënt op te lossen, wat aansluit bij de benoemde doelstelling aan het begin van deze paragraaf.

Diagnostische vragen

Diagnostische vragen zijn ontworpen om de knelpunten van leerlingen te identificeren en te begrijpen op een efficiënte en accurate manier (Barton, 2020). Een diagnostische vraag is een meerkeuzevraag met één correct antwoord en drie incorrecte antwoorden. Ieder incorrect antwoord bevat een veelgemaakte fout of misvatting. Een leerling geeft antwoord door één van de antwoordopties te kiezen. Foster et al. (2022) geven aan dat er daarnaast een leeg tekstvak beschikbaar is voor de leerling om een toelichting te geven op hun gekozen antwoord. Diagnostische vragen worden gebruikt om feiten, vaardigheden of concepten te beoordelen. De vragen zijn in het bijzonder geschikt om feiten te herhalen of simpele vaardigheden te toetsen. Echter, als de vragen goed ontworpen zijn, kunnen ze ook gebruikt worden om vaardigheden te beoordelen die uit meerdere stappen bestaan, door een enkele stap binnen deze vaardigheid te isoleren. De diagnostische vraag geeft de docent waardevolle informatie, die precies weergeeft waar in het proces een leerling moeilijkheden ervaart. Foster et al. (2022) zeggen dat diagnostische vragen zijn ontworpen met de intentie dat leerlingen niet langer dan een minuut bezig zijn om hun antwoord te formuleren. Als een feitjes- of vaardigheidsvraag langer dan een minuut duurt om te beantwoorden, dan is het waarschijnlijk dat een leerling meerdere deelstappen moet doorlopen, waardoor het lastig kan zijn om per antwoordmogelijkheid direct te zien welke misvatting hieraan ten grondslag ligt. Diagnostische vragen kunnen ook gebruikt worden om conceptueel begrip te toetsen, waarbij het langer kan duren om een antwoord te selecteren doordat leerlingen nadenken over verscheidene voorbeelden en non-voorbeelden om tot hun eindantwoord te komen (Foster et al., 2022). Dit kan resulteren in diagnostische vragen met een langere tijdsduur.

Misvattingen en veelgemaakte fouten

De antwoordmogelijkheden van de diagnostische vragen zijn gebaseerd op misvattingen en veelgemaakte fouten (Barton, 2020). Volgens Barton (2020) zijn misvattingen een gevolg van foutieve overtuigingen en incomplete kennis over bepaalde concepten. Misvattingen kunnen de verwerving van nieuwe kennis in de weg zitten. Dezelfde misvattingen duiken voortduren weer op bij leerlingen. Fouten daarentegen zijn eenmalig, meestal in de vorm van een rekenfout door slordigheid of cognitieve overbelasting. Veelgemaakte fouten volgen vaak uit slordigheid, ontbrekende wiskundige basisvaardigheden of verkeerde toepassing van een algoritme (Li et al., 2017). Volgens Muzangwa & Chifamba (2012) ontstaat er een misvatting wanneer een leerling gelooft in een concept dat objectief fout is. Het uitdagende aan misvattingen is dat het lastig is om misvattingen op te lossen, omdat het foutieve concept diep geworteld zit in het cognitief schema.

Dubbelzinnige vragen

Een belangrijk criterium bij het opstellen van diagnostische vragen is dat een vraag niet goed te beantwoorden moet zijn door een leerling die een misvatting in zijn of haar hoofd heeft. Een dergelijke vraag heet een dubbelzinnige vraag. Dit is een vraag waarbij verschillende manieren mogelijk zijn om aan het juiste antwoord te komen, maar slechts één hiervan de juiste is. Dubbelzinnige vragen kunnen leiden tot overgeneralisaties en misvattingen die vrijwel onmogelijk af te leren zijn bij leerlingen (Barton, 2020), daarom moet dubbelzinnigheid voorkomen worden.

Voorkennis en nieuwe vaardigheden

In dit onderzoek wordt onderscheid gemaakt tussen voorkennis en nieuwe vaardigheden. De nieuwe vaardigheden die aangeleerd worden vereisen voorkennis, die leerlingen al horen te bezitten. Volgens Barton (2020) en Foster et al. (2022) is het van belang om niet meer dan één nieuwe vaardigheid te toetsen met een diagnostische vraag. Het kan voorkomen dat bij het toetsen van een nieuwe vaardigheid, ook voorkennis toegepast dient te worden. Neem als voorbeeld het differentiëren van de functie $f(x) = 4x^3$ in een vwo 4 klas. Het toepassen van de machtsregel wordt hier als nieuwe vaardigheid verondersteld, terwijl het vermenigvuldigen van de factor met de exponent, dus $4 \cdot 3 = 12$, als voorkennis wordt gezien.

2.2. Toepassing van diagnostische vragen

Tijdstip van diagnostische vragen in de les

Een diagnostische vraag kan op verschillende momenten in de les gesteld worden, afhankelijk van het doel dat de vraag dient. Een diagnostische vraag kan aan het begin van de les ingezet worden om de volgende redenen (Barton, 2020):

1. Voorkennis evalueren
2. Langetermijngeheugen van leerlingen activeren
3. Alvast op nieuwe stof voorbereiden
4. Gebruikmaken van het testeffect (leerstof die al eerder is behandeld)
5. Gebruikmaken van het pretesteffect (leerstof die nog niet eerder behandeld is)

Een diagnostische vraag kan ook gedurende de les gesteld worden om als docent een geïnformeerde beslissing te maken of het juiste moment is aangebroken om met nieuwe leerstof aan de slag te gaan (Barton, 2020). Vaak is dit het geval wanneer de meeste leerlingen het vorige deel van de leerstof onder controle hebben en in kaart is gebracht bij welke leerlingen dit nog niet het geval is. Dit wordt getoetst a.d.h.v. de diagnostische vraag.

Diagnostische vragen kunnen ook aan het einde van de les ingezet worden. Op deze manier kan snel en accuraat inzicht verkregen worden m.b.t. het behalen van de leerdoelen door de leerlingen om te bepalen wat het startpunt zal zijn van de volgende les (Barton, 2020).

Uitvoering van diagnostische vragen in de les

Er zijn naast het moment van vragen ook verschillende manieren om de diagnostische vragen te stellen. Daarbij is het belangrijk dat de frequenties van oprechte antwoorden makkelijk en snel inzichtelijk gemaakt kunnen worden voor de docent (Wylie & William, 2006). Oprechte antwoorden zijn antwoorden die leerlingen zelf bedacht hebben. Leerlingen moeten dus ook niet bij elkaar af kunnen kijken. Barton (2020) stelt de volgende manieren voor:

- Stemmen in stilte waarbij het aantal vingers dat opgestoken wordt correspondeert met de antwoordmogelijkheden ($A = 1, B = 2$, etc.). Dit is een methode die altijd gebruikt kan worden en geen technologie vereist. Echter is het de vraag in welke mate deze antwoorden oprecht zullen zijn, aangezien het makkelijk is om van antwoord te wisselen op deze manier.
- Het gebruik van wisbordjes. Leerlingen noteren hun antwoord op het wisbordje en houden deze omhoog wanneer hierom gevraagd wordt. Dit is een goede manier om het denken van leerlingen uit te beelden en leerlingen kunnen hun antwoord meteen wegvegen, wat er voor zorgt dat leerlingen met minder zelfvertrouwen bereidwilliger zijn om mee te doen.
- Het gebruik van exittickets. Hierbij krijgen de leerlingen een papiertje waarop ze de vraag en de antwoordmogelijkheden te zien krijgen. Ze kruisen het juiste antwoord aan en leveren deze in bij de docent wanneer zij het lokaal verlaten. Het is zowel makkelijk uitvoerbaar voor de docent als voor de leerling. De docent kan deze kaartjes makkelijk nakijken en de leerling kan het antwoord gemakkelijk invullen op het kaartje.

Er zijn nog naast de suggesties van Barton (2020) meer manieren om diagnostische vragen te stellen in de les. Verschillende manieren die verschillende mogelijkheden bieden en bezwaren hebben. Voor het onderzoek zijn de volgende manieren functioneel:

- Kahoot kan gebruikt worden om meerkeuzevragen te laten beantwoorden door leerlingen. Het blijkt dat (online) spellen en competitieve elementen leerlingparticipatie bevorderen (Prieto et al., 2019). Daarmee zou dit een motiverende en geschikte tool kunnen zijn om diagnostische vragen mee af te nemen in de les. Leerlingen moeten hiervoor beschikking hebben tot een mobiel apparaat tijdens het afnemen van de vragen. Bij het gebruik van Kahoot is het van belang dat leerlingen echt op hetzelfde moment stemmen op hun antwoord. Wanneer dit niet gebeurt kan een leerling wachten tot degene naast hem of haar stemt en dit antwoord overnemen waardoor de docent onoprechte antwoorden krijgt en daarmee een vertekend beeld van de mate waarin de klas de getoetste nieuwe vaardigheid beheerst.
- Het gebruik van witte ABCD-kaartjes waarbij op elk kaartje de letters A, B, C of D, corresponderend met de antwoordmogelijkheden, staan (Wylie & William, 2006) of kleurenkaartjes waarbij ieder antwoordmogelijkheid met een kleur is aangeduid (Expertis Onderwijsadviseurs, n.d.). Hiermee kan je direct zien welke leerling welk antwoord heeft gegeven zodra de klas gezamenlijk hun keuzes kenbaar maakt, wat een

belangrijke voorwaarde is voor de docent (Wylie & William, 2006). Bij deze kaartjes krijgen de leerlingen tijd om na te denken over hun antwoord en wanneer de docent het aangeeft, moeten alle leerlingen tegelijkertijd hun gekozen antwoord omhoog houden. ABCD-kaarten kunnen goed ingezet worden bij meerkeuzevragen waarbij de antwoordmogelijkheden zijn gebaseerd op veelvoorkomende misvattingen (Expertis Onderwijsadviseurs, n.d.). Anderzijds, kleurenkaartjes geven het snelst een beeld van de antwoordfrequenties aan de docent. Echter hoort hier ook weer een nadeel bij: leerlingen kunnen makkelijk van elkaar zien wie waarop gestemd heeft en daardoor van kaartje wisselen, wat resulteert in onoprechte antwoorden. Dit kan het zelfvertrouwen en bereidwilligheid om mee te doen negatief beïnvloeden (Barton, 2020).

Naast het tijdstip van vragen en de manier van antwoord verzamelen, speelt ook de duratie van de vraag een rol. Onder de duratie van de vraag wordt de tijd verstaan die leerlingen nodig hebben om de vraag te lezen en te begrijpen en de tijd die ze nodig hebben om een antwoord te formuleren. Volgens Foster et al. (2022) is één minuut de maximale aanvaardbare denktijd voor het beantwoorden van een diagnostische vraag. Barton (2020) geeft daarentegen aan dat een goede diagnostische vraag, waarin één vaardigheid wordt getoetst, binnen tien seconden te beantwoorden moet zijn. Een vraag waar meerdere denkstappen bij betrokken zijn, zal leerlingen meer tijd kosten. Een goede denktijd vergroot de zichtbaarheid, interesse en veiligheid.

Denktijd is opgedeeld in denktijd 1 en denktijd 2. Denktijd 1 gaat over de tijd waarin kennis hervonden en gereconstrueerd wordt en een antwoord geformuleerd wordt. Denktijd 2 betreft de tijd na het geven van een antwoord door een leerling en voor het geven van een goed-fout reactie door de docent (van Ast et al., 2021). Denktijd 2 is minder relevant bij diagnostische vragen aangezien alle leerlingen hier tegelijk antwoord geven en niet meer mogen wisselen van antwoord. Denktijd 1 is daarentegen een belangrijke factor bij het bepalen van de duratie van de vraag. Bij het ontwerpen van een vraag, kan een inschatting gemaakt worden van de tijd die een leerling nodig heeft om kennis te hervinden, te construeren en een antwoord te formuleren.

2.3. Voorbeelden van misvattingen en veelgemaakte fouten

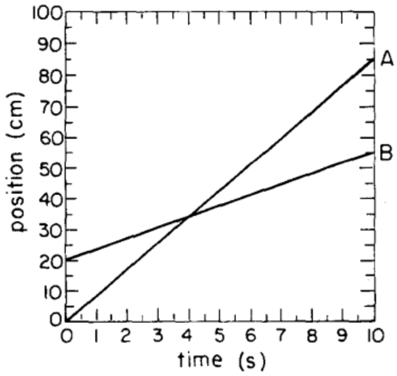
In hoofdstuk 6 van Getal & Ruimte voor vwo 4 wiskunde B komt differentiaalrekening aan bod. In hoofdstuk 11 van Getal & Ruimte voor vwo 5 wiskunde B komt integraalrekening aan bod. In Tabel 14 en Tabel 15 in bijlage A wordt de inhoud van deze beide hoofdstukken kort beschreven. Deze inhoud legt de basis voor het kiezen van vaardigheden die getoetst worden met de diagnostische vragen binnen dit onderzoek.

Bij de inhoud van deze hoofdstukken uit Getal & Ruimte zouden een aantal misvattingen en veelgemaakte fouten op kunnen treden bij leerlingen. Een aantal voorbeelden van misvattingen en veelgemaakte fouten die volgen uit literatuur zijn hieronder voor zowel differentiaal- als integraalrekening uitgewerkt. Deze opsomming omvat niet alle mogelijke veelgemaakte fouten en misvattingen bij deze onderwerpen.

Differentiaalrekening

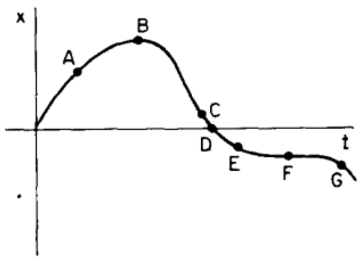
McDermott et al. (1987) benoemt een aantal voorbeelden van misvattingen die relevant zijn bij differentiaalrekening. Deze misvattingen ontstaan bij het maken van connecties tussen grafieken en fysieke concepten uit de wiskunde, zoals de helling en hoogte bij grafieken.

De eerste twee misvattingen van McDermott et al. (1987) hebben te maken met het onderscheidingsvermogen tussen hoogte en helling bij de grafiek van een lineaire functie. In Figuur 1 zijn de grafieken van twee verschillende lineaire functies weergegeven. Een foutief onderscheidingsvermogen tussen hoogte en helling zal kunnen leiden tot de misvatting dat de grootte van de helling afhangt van de hoogte van de grafiek. Dit zou er toe kunnen leiden dat de leerling ervan overtuigd is dat lijn B een grotere helling heeft dan lijn A voor $s = 2$. Daarnaast kan het ook voorkomen dat een leerling de misvatting heeft dat twee lijnen een even grote helling hebben in het snijpunt, zoals het geval is voor $s = 4$.



Figuur 1 – Grafieken gebruikt als toelichting van onderscheidingsvermogen helling en hoogte. Overgenomen uit Student Difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics (p. 504) door McDermott et al. (1987).

De volgende twee misvattingen van McDermott et al. (1987) zijn gerelateerd aan het interpretatievermogen van hoogte en helling bij een kromme. McDermott et al. (1987) gebruikt Figuur 2 ter ondersteuning bij deze misvattingen. Zo kan het voorkomen dat een leerling de misvatting heeft dat de helling groter wordt wanneer de grafiek zelf ook toeneemt. In dit geval zal de leerling ervan overtuigd zijn dat de helling toeneemt tussen punt A en B. Een andere mogelijke misvatting is dat een leerling ervan overtuigd is dat de helling gelijk is aan 0 in het snijpunt van de grafiek met de x-as, bijvoorbeeld in punt D.



Figuur 2 – Kromme gebruikt als toelichting van interpretatie helling en hoogte. Overgenomen uit Student Difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics (p. 504) door McDermott et al. (1987).

Luneta & Makonye (2010) benoemen ook een aantal misvattingen gerelateerd aan differentiaalrekening. Een dergelijke misvatting betreft de foutieve overtuiging dat extreme waarden de snijpunten van de normale functie met de assen voorstellen (Luneta & Makonye, 2010). Een andere misvatting is de foutieve overtuiging dat je in een functie bestaande uit een product van twee functies, deze twee functies onafhankelijk van elkaar kan differentiëren zonder de productregel te gebruiken. Een voorbeeld hiervan is het differentiëren van $y =$

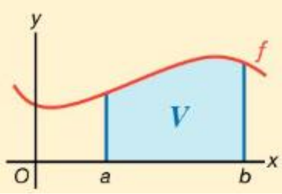
$(x^3 + 1)(x^2 - 2)$ naar x, waarbij de leerling enkel in de haakjes zelf zal differentiëren, resulterend in $\frac{dy}{dx} = 3x^2 \cdot 2x$.

Integraalrekening

Bezuidenhout & Olivier (2000) maken onderscheid tussen procedurele en conceptuele aspecten bij integraalrekening. Leerlingen hebben voornamelijk moeite met een specifiek conceptueel aspect van integraalrekening, namelijk het beeld bij de oppervlakte. Dit komt door het specifieke voorbeeld waarmee integraalrekening vaak geïntroduceerd wordt (Bezuidenhout & Olivier, 2000), zoals zichtbaar in Figuur 3, waarbij binnen de grenzen geldt dat $f(x) \geq 0$. Dit leidt bij leerlingen vaak tot twee misvattingen m.b.t. oppervlakten:

- Leerlingen denken dat een oppervlakte, die berekend is d.m.v. een integraal, altijd positief is en zijn zich hierdoor niet bewust dat er ook negatieve oppervlakten berekend kunnen worden met integralen en dat hier rekening mee gehouden dient te worden (Orton, 1983).
- Leerlingen denken dat oppervlakte tussen een grafiek en de x-as altijd correct berekend kan worden door $O(V) = \int_a^b f(x)\, dx$ uit te rekenen, ook wanneer de grafiek onder de x-as, of deels boven en onder de x-as ligt. Hierbij houden ze er geen rekening mee dat de integraal opgesplitst zal moeten worden bij het snijpunt tussen de functie en de x-as (Orton, 1983).

De oppervlakte van het vlakdeel V dat boven de x-as ligt en wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$ is $O(V) = \int_a^b f(x)\,dx$.



Figuur 3 - Deel van theorieblok C ''Integralen'' uit paragraaf 11.1 van Getal & Ruimte Wiskunde B vwo deel 3

Daarnaast noemt Orton (1983) nog een misvatting. Leerlingen weten vaak niet waarom een integraal de oppervlakte onder een grafiek geeft. Zij zien niet in dat het integraalteken de limiet is van de som van de oppervlakten behorende bij oneindig kleine deelintervallen (Orton, 1983). Dit hoeft echter geen probleem te zijn voor het aanleren van de procedurele vaardigheid integreren.

Ook Kiat (2005) heeft een analyse uitgevoerd naar fouten binnen integraalrekening op de middelbare school. Er wordt hier geen onderscheid gemaakt tussen misvattingen en veelgemaakte fouten, maar fouten worden geclassificeerd als conceptuele, procedurele en technische fouten (Orton, 1983). Conceptuele fouten betreffen fouten in het begrijpen van concepten die gerelateerd zijn aan het probleem in kwestie. Procedurele fouten zijn fouten in het uitvoeren van manipulaties of algoritmes ondanks het begrijpen van de achterliggende concepten. Technische fouten refereren naar fouten door een tekort aan andere inhoudelijke wiskunde kennis of vaardigheden en slordigheidsfouten (Kiat, 2005). In dit onderzoek zullen conceptuele fouten als misvattingen beschouwd worden en procedurele en technische fouten als veelgemaakte fouten. Voorbeelden van deze drie typen fouten zijn hieronder beschreven.

- Conceptuele fouten (misvattingen):
    - De oppervlakte niet kunnen vinden wanneer een grafiek de x-as snijdt binnen het gevraagde interval (Kiat, 2005)

    - Moeilijkheden bij het realiseren dat een raaklijn geïntegreerd moet worden om de formule van de functie te verkrijgen die bij de raaklijn hoort (Kiat, 2005)
- Procedurele fouten (veelgemaakte fouten):
    - Vergeten om de integratieconstante toe te voegen bij het berekenen van een primitieve of het evalueren van de integratieconstante wanneer nodig (Kiat, 2005)
    - Verwarring tussen differentiatie en integratie (Kiat, 2005)
    - Verwisselen van grenzen bij het opstellen van een integraal (Cornelissen, 1994)
    - Haakjes vergeten bij het integreren of differentiëren van een samengestelde functie of bij het berekenen van een bepaalde integraal (Orton, 1983)
    - Vergeten te primitiveren bij het berekenen van een bepaalde integraal
    - Bij het berekenen van de oppervlakte de verkeerde functies kiezen als ''bovenste'' en ''onderste''
    - Bij het berekenen van de inhoud van een omwentelingslichaam de verkeerde functies kiezen als ''binnenste'' en ''buitenste''
- Technische fouten (veelgemaakte fouten):
    - Coördinaatmeetkunde, kinematica, algebra, goniometrie (Kiat, 2005)
    - Slordigheid (Kiat, 2005)
    - Rekenfouten met negatieve en gebroken exponenten (Orton, 1983)

In het onderzoek van Kiat (2005) kwamen procedurele fouten en technische fouten beiden twee keer zo vaak naar voren als conceptuele fouten. De drie fouten die het meest gemaakt werden zijn verwarring tussen integreren en differentiëren, de oppervlakte niet goed berekenen wanneer de functie de x-as snijdt en het vergeten toe te voegen van de integratieconstante bij het berekenen van een primitieve.

Volgens Yee & Lam (2008) zijn het negeren van de coëfficient voor x bij het integreren van een functie waarbij de kettingregel een rol speelt en het negeren van de teller bij het integreren van een rationale functie ook veelgemaakte fouten bij integraalrekening op de middelbare school.

2.4. Ontwerpeisen diagnostische vragen

De ontwerpeisen voor het ontwerpen van diagnostische vragen voor differentiaal- en integraalrekening voor dit onderzoek zijn gebaseerd op de literatuur. Dit resulteert in acht ontwerpeisen in totaal. Per ontwerpeis wordt er een toelichting gegeven.

1. *De diagnostische vragen bestaan uit een vraagstelling en uit drie of vier antwoordmogelijkheden, waarvan één correct antwoord, met de overige foute antwoorden gebaseerd op één misvatting of veelgemaakte fout per antwoord, die volgt uit literatuur, eigen verwachtingen en/of expert feedback.*

Door drie of vier meerkeuze antwoorden aan te bieden, kunnen meerdere misvattingen of veelgemaakte fouten geïdentificeerd worden. Hiermee zullen niet alle mogelijke misvattingen of veelgemaakte fouten op tafel komen, maar verdwalen de leerlingen ook niet in de antwoordmogelijkheden. Volgens Vyas & Supe (2008) gaat de kwaliteit van de diagnostische vragen niet achteruit wanneer gekozen wordt voor drie i.p.v. vier of vijf antwoordmogelijkheden. Het bedenken van drie antwoordmogelijkheden is minder tijdrovend voor de docent en het geven van drie antwoordmogelijkheden maakt de vraag mogelijk overzichtelijker voor de leerling. Volgens Barton (2020) zijn vier antwoordmogelijkheden juist een goede middenweg bij diagnostische vragen. Om deze redenen is er gekozen voor drie of vier antwoordmogelijkheden in de ontwerpeis.

2. *Bij iedere diagnostische vraag is er een extra antwoordmogelijkheid: ''het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: …''.*

D.m.v. deze antwoordmogelijkheid kunnen inzichten verzameld worden omtrent misvattingen en veelgemaakte fouten die de auteurs en de experts niet bedacht hebben of niet gevonden is in literatuur. Deze eis is specifiek voor dit onderzoek opgesteld, maar het is niet noodzakelijk om een extra antwoordmogelijkheid te geven bij diagnostische vragen in het algemeen, wanneer men niet geïnteresseerd is in het verzamelen van nieuwe inzichten m.b.t. tot misvattingen en veelgemaakte fouten.

3. *Van elk onjuist antwoord moet je iets kunnen opsteken zonder dat de leerling het nader hoeft toe te lichten* (Barton, 2020) (Wylie & William, 2006)*, m.u.v. de extra antwoordmogelijkheid: ''het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk…''.*

Een diagnostische vraag verschilt van niet-diagnostische multiplechoicevragen doordat de incorrecte antwoorden heel zorgvuldig zijn gekozen en specifieke misvattingen aan het licht brengen. Ieder antwoord komt voort uit een specifieke misvatting of veelgemaakte fout. Hierdoor kan uit ieder onjuist antwoord iets opgestoken worden zonder dat de leerling nadere toelichting hoeft te geven.

4. *Het moet niet mogelijk zijn om op het juiste antwoord uit te komen met behulp van een misvatting* (Barton, 2020).

Om zeker te weten dat een leerling de getoetste nieuwe vaardigheid begrijpt, moet het niet mogelijk zijn om uit te komen op het goede antwoord, terwijl er een misvatting of veelgemaakte fout aan de uitwerking ten grondslag ligt. Er wordt getest of het juiste antwoord gevonden kan worden door de geïdentificeerde misvattingen en veelgemaakte fouten toe te passen. Bijvoorbeeld: een diagnostische vraag waarbij gevraagd wordt naar 2^2 kan zowel het juiste antwoord 4 opleveren doordat een leerling $2 \cdot 2 = 4$ berekent of doordat een leerling $2 + 2 = 4$ berekent. Echter is het niet de bedoeling dat een leerling middels die laatste berekening op het juiste antwoord uitkomt. Het kan wel voorkomen dat een leerling het antwoord goed gokt, hier is geen remedie voor binnen de ontwerpeisen.

5. *De vraagstelling van diagnostische vragen moet duidelijk en ondubbelzinnig zijn* (Barton, 2020).

De vraagstelling moet zodanig zijn dat de vraag beantwoord kan worden zonder verdere toelichting.

6. *Bij de gebruikte vraagstelling moeten de randzaken zo eenvoudig mogelijk gehouden worden om alleen de nieuwe vaardigheid te toetsen waarover je inzicht wil krijgen.*

De randzaken bepalen deels de vereiste voorkennis die nodig is voor het beantwoorden van de vraag. Door de randzaken simpel te houden, kan dus de hoeveelheid noodzakelijke voorkennis gereduceerd worden. Op die manier ligt de nadruk van de diagnostische vraag op de nieuwe vaardigheid. Bijvoorbeeld: overweeg de nieuwe vaardigheid differentiëren met de machtsregel van de functie $f(x) = ax^n$. Neem bij het toetsen hiervan voor a en n een natuurlijk getal i.p.v. een breuk. Op deze manier wordt voorkomen dat fouten worden gemaakt in randzaken zoals het breukrekenen, terwijl het toetsen van de nieuwe vaardigheid differentiëren met de machtsregel hier centraal staat. Door a en n in dit voorbeeld niet als breuk te kiezen, worden de randzaken in dit voorbeeld simpel gehouden, en wordt de noodzakelijke voorkennis in deze vraag gereduceerd. De vereiste voorkennis is toegevoegd aan de diagnostische vraag.

7. *Diagnostische vragen moeten niet meer dan één nieuwe vaardigheid toetsen* (Barton, 2020).

Het doel van een diagnostische vraag is dat het inzoomt op precies dat punt waar een leerling moeite mee heeft en precies laat zien hoe. Als er te veel nieuwe vaardigheden in het spel zijn, neemt de accuraatheid van diagnose onvermijdelijk af. Echter, het toetsen van een nieuwe vaardigheid in een diagnostische vraag mag wel gebruik maken van voorkennis.Hierbij is het dan wel van belang dat de docent hiervan op de hoogte is en weet welke nieuwe vaardigheid en voorkennis getoetst worden.. Als voorbeeld wordt de volgende nieuwe vaardigheid getoetst: de toepassing van de machtsregel op een functie $f(x) = \frac{1}{ax^n}$. De leerling zal de functie $f(x) = \frac{1}{a}x^{-n}$ moeten differentiëren. Hierbij neemt de exponent een negatieve waarde aan, wat kennis van de getallenlijn/getallenvolgorde vereist. Deze kennis wordt beschouwd als voorkennis, alhoewel dit dus wel getoetst wordt en mis kan gaan. Een voorbeeld waarbij wel twee nieuwe vaardigheden getoetst worden, is wanneer gevraagd wordt, na de behandeling van de hoofdstelling van de integraalrekening, om de oppervlakte tussen de grafiek van de functie $f(x) = x^2 - 5$ en de x-as te berekenen tussen de grenzen $x = -\sqrt{5}$ en $x = \sqrt{5}$. Hier worden twee nieuwe vaardigheden getoetst: de hoofdstelling van de integraalrekening toepassen en inzicht in welke functies de bovenste en de onderste zijn binnen de integraal. De nieuwe vaardigheid die getoetst wordt, is toegevoegd aan de diagnostische vraag.

8. *Leerlingen moeten binnen maximaal één minuut antwoord kunnen geven.*

Er wordt geadviseerd om binnen 10 seconden de vraag te laten beantwoorden door leerlingen (Barton, 2020), omdat de kans anders groot is dat er meer dan één vaardigheid betrokken is bij de vraag. Bij thema's als differentiëren en integreren in klas 4 en 5 van het vwo bij wiskunde B zijn de vragen van een hoger niveau, met meer denkstappen, dan de voorbeeldvragen van Barton gericht op de onderbouw. Hierbij lijkt 10 seconden te kort om een vraag goed en volledig te kunnen beantwoorden. Vaardigheden passend bij differentiaal- en integraalrekening vereisen vaak meer denkstappen dan in 10 seconden mogelijk is waardoor leerlingen meer tijd nodig hebben om tot een antwoord te komen. Dit heeft ermee te maken dat er veel voorkennis betrokken is bij vaardigheden bij deze thema's. Verder geldt ook dat denktijd 1 voor leerlingen lang genoeg moet zijn om zichtbaarheid, interesse en veiligheid te garanderen (van Ast et al., 2021). Maximaal 1 minuut (Foster et al., 2022) lijkt daarom realistischer. Als het denkproces meerdere minuten in beslag neemt, gaat er veel om in de hoofden van leerlingen. Het belangrijkste doel van diagnostische vragen is om specifieke misvattingen op te sporen, en dat is hier ingewikkeld, omdat de leerlingen zoveel denkstappen en cognitieve sprongen moeten nemen om tot het uiteindelijke antwoord te komen (Barton, 2020).

3. Methode

Bij dit onderzoek horen vier fasen. In dit hoofdstuk wordt per fase beschreven wat deze fase inhoudt en hoe de fase uitgevoerd wordt. De fasen zijn als volgt:

- Fase 1: eerste ontwerp. Hier is een eerste ontwerp gemaakt van diagnostische vragen, o.b.v. de ontwerpeisen zoals beschreven in paragraaf 2.4 van het theoretisch kader.
- Fase 2: review expert panel. Het eerste ontwerp is opgestuurd naar een expert panel ter review. Het expert panel heeft feedback gegeven op het eerste ontwerp.
- Fase 3: uitvoering. Het eerste ontwerp is uitgevoerd in de lessen. Hierbij zijn antwoordfrequenties verzameld door de auteurs aangevuld met nieuwe inzichten.
- Fase 4: herontwerp. Op basis van de review door het expert panel en de uitvoering van het eerste ontwerp in de lessen, is een herontwerp van de diagnostische vragen gemaakt.

De bijbehorende ethiekaanvragen van dit onderzoek zijn 240305 (integraalrekening) en 240363 (differentiaalrekening).

3.1. Eerste ontwerp

Het streven is om in totaal 20 diagnostische vragen te ontwerpen: tien vragen over differentiaalrekening en tien vragen over integraalrekening. Het ontwerp van een diagnostische vraag bestaat volgens de ontwerpeisen uit paragraaf 2.4 van het theoretisch kader uit:

- Een vraagstelling en eventueel een ondersteunende figuur (ontwerpeis 1)
- Drie of vier antwoordmogelijkheden met onderbouwing (ontwerpeis 1)
- Een toelichting van de mogelijke misvattingen die een leerling zou kunnen hebben en veelgemaakte fouten die een leerling zou kunnen maken (ontwerpeis 3)
- Een extra antwoordmogelijkheid ''het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk…'' (ontwerpeis 2)
- Vereiste voorkennis voor het beantwoorden van de diagnostische vraag (ontwerpeis 6)
- De nieuwe vaardigheid die getoetst wordt (ontwerpeis 7)

De ontwerpeisen uit het theoretisch kader zijn gebruikt als fundering om de diagnostische vragen te ontwerpen. De doorlopende leerlijn van Getal & Ruimte wordt gebruikt als leidraad voor de nieuwe vaardigheden die in de vragen getoetst worden, specifiek hoofdstuk 6: *Differentiaalrekening* en hoofdstuk 11: *Integraalrekening*, zoals zichtbaar in bijlage A, Tabel 14 en Tabel 15. Dit zijn de hoofdstukken die ook gegeven worden op het moment van uitvoering van de diagnostische vragen in de lessen. De nieuwe vaardigheden vereisen voorkennis. Deze voorkennis wordt benoemd bij de diagnostische vragen. Verdere inspiratie voor de vorm van de vragen zijn de opdrachten uit Getal & Ruimte en bestaande diagnostische vragen van het internet (Diagnostic Questions, sd) (Diagnostische vragen, sd). De diagnostische vragen zijn ontworpen in Powerpoint waarbij eventuele ondersteunende figuren met GeoGebra geconstrueerd zijn, of uit de Getal & Ruimte boeken en literatuur zijn gehaald. De antwoordmogelijkheden zijn bij iedere vraag gebaseerd op mogelijke misvattingen en veelgemaakte fouten die leerlingen zouden kunnen maken, zoals beschreven in het theoretisch kader in paragraaf 2.3, aangevuld met inzichten van de auteurs. De antwoordmogelijkheden zijn aangevuld met een onderbouwing, deels o.b.v. het theoretisch kader, en toelichting, waarbij beschreven wordt hoe de mogelijke misvattingen en veelgemaakte fouten tot uiting komen in de betreffende vraag.

3.2. Review expert panel

Goede diagnostische vragen zijn breed inzetbaar en helpen de consistentie van lesgeven en evalueren te verbeteren (Barton, 2020). Daarnaast wordt het aangeraden om met meerdere leerkrachten diagnostische vragen te ontwerpen (Barton, 2020). Om deze vragen zo goed mogelijk te ontwerpen, is ervoor gekozen om een expert panel in te schakelen. Dit expert panel bestaat uit bevoegde wiskunde docenten van het Bonhoeffer College, Het Stedelijk Zuid, vakdidactici aan de Universiteit Twente en docenten uit de werkgroep diagnostische vragen binnen de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVVW). Het eerste ontwerp van de diagnostische vragen is als twee verzamelingen ter review opgestuurd naar het expert panel via e-mail.

De diagnostische vragen zijn zodanig ontworpen dat zij naar inzicht van de auteurs voldoen aan de ontwerpeisen, echter is dit subjectief. Daarom wordt feedback gevraagd op de volgende aspecten van het eerste ontwerp van de diagnostische vragen:

- De vraagstelling en de eventuele ondersteunende figuren
- De antwoordmogelijkheden met de onderbouwing over mogelijke misvattingen en veelgemaakte fouten
- De duratie van een diagnostische vraag (ontwerpeis 8). Hier wordt specifiek feedback op gevraagd aangezien de duratie lastig is om in te schatten. Deels omdat dit per diagnostische vraag verschilt en omdat hier voor differentiaal- en integraalrekening weinig over te vinden is in de literatuur.

Het expert panel krijgt daarom een feedbackformulier toegestuurd in aanvulling op het eerste ontwerp, bestaande uit zes feedbackvragen per diagnostische vraag:

- Missen we belangrijke misconcepties of veelgemaakte fouten?
- Is de vraagstelling eenduidig?
- Hoelang schat je in dat de leerling bezig is met de vraag?
- Suggesties voor "betere antwoordmogelijkheden" bij bepaalde misconcepties/veelgemaakte fouten.
- Suggesties voor verbetering van de vraagstelling.
- Overige opmerkingen.

3.3. Uitvoering

Het eerste ontwerp van de diagnostische vragen wordt toegepast in de lessen, parallel aan het verzamelen van de feedback via het expert panel. De diagnostische vragen worden gesteld op de data die aangeduid zijn in Tabel 16 in bijlage B. Hier is ook het moment en het doel van de vraag in de les weergegeven, zoals uitgelegd in paragraaf 2.2 van het theoretisch kader. De tien diagnostische vragen over differentiaalrekening worden gebruikt in de vwo 4 wiskunde B klas (24 leerlingen) bij hoofdstuk 6 van Getal & Ruimte op het Bonhoeffer College Bruggertstraat. De tien diagnostische vragen over integraalrekening worden gebruikt in de vwo 5 wiskunde B klas (16 leerlingen) bij hoofdstuk 11 van Getal & Ruimte op het Stedelijk Lyceum Zuid. De stappen die tijdens de uitvoering van de diagnostische vragen worden ondernomen zijn hieronder weergegeven:

1. Vooraf aan het stellen van de diagnostische vraag deelt de docent vijf kaartjes uit per leerling, waarbij ieder kaartje correspondeert met een antwoordmogelijkheid. Er wordt verteld dat leerlingen hun antwoord na de denktijd moeten noteren op het

antwoordkaartje wanneer zij gebruik maken van de extra antwoordmogelijkheid (ontwerpeis 2). Leerlingen die gebruik maken van de extra antwoordmogelijkheid hebben al geconcludeerd dat hun bedachte antwoord niet tussen de andere antwoordmogelijkheden zit. Het zal daarom niet noemenswaardig meer tijd kosten om dit antwoord tijdens het ophalen te noteren op het antwoordkaartje.

2. Vervolgens worden de diagnostische vraag en de bijbehorende antwoordmogelijkheden getoond op het scherm voorin de klas. De leerlingen krijgen maximaal één minuut om na te denken, corresponderend met ontwerpeis 8. Gedurende deze denktijd geeft de docent aan dat het stil moet zijn en dat de leerlingen zelf een antwoord moeten bedenken. De tijd wordt bijgehouden d.m.v. een digitale klok die uitsluitend zichtbaar is voor de docent op de laptop (differentiaalrekening) of door een timer in Powerpoint te implementeren, die ook zichtbaar is voor de leerlingen (integraalrekening).
3. Wanneer de denktijd voorbij is, telt de docent af en maken de leerlingen hun antwoord kenbaar door het kaartje met hun gekozen antwoord in de lucht te steken. De leerlingen mogen het kaartje pas pakken wanneer de docent dit aangeeft en ook gedurende dit proces wordt benadrukt dat het stil moet zijn.
4. De docent haalt de antwoordkaartjes op om zodoende achteraf de frequenties van verschillende antwoorden te kunnen noteren. Tijdens het ophalen worden de bedachte antwoorden, behorende bij de extra antwoordmogelijkheid, door de leerlingen in kwestie opgeschreven op het antwoordkaartje. Deze bedachte antwoorden worden ook genoteerd door de docent.

De extra antwoordmogelijkheid geeft leerlingen de optie om zelf een antwoord op te schrijven wanneer zij denken dat het juiste antwoord niet tussen de antwoordopties staat. Deze antwoordmogelijkheid wordt bij elke vraag toegevoegd (ontwerpeis 2), om mogelijke nieuwe misvattingen of veelgemaakte fouten te achterhalen. Van tevoren wordt aan de klassen verteld dat de extra antwoordmogelijkheid ook een reële optie is, om ervoor te zorgen dat leerlingen deze optie ook serieus overwegen en hier mogelijk gebruik van maken.

Bij differentiaalrekening zijn de antwoordkaartjes, die gebruikt worden bij het beantwoorden van de diagnostische vragen, gekleurd, waarbij iedere kleur voor een antwoordmogelijkheid (A, B, C, D of E) staat. De docent vraagt voorafgaand aan de lessenserie waarin de diagnostische vragen gesteld worden of er leerlingen zijn die kleurenblind zijn. Zo ja, dan schrijft de docent A, B, C, D en E op de gekleurde kaartjes zodat deze leerling(en) ook antwoord kunnen geven. Bij integraalrekening zijn ABCD-kaartjes gebruikt, waarbij op iedere set witte kaartjes de letters A, B, C, D en E geschreven zijn. Het gebruik van kleurenkaartjes en ABCD-kaartjes is verder toegelicht in paragraaf 2.2 van het theoretisch kader. De verschillen in methode qua antwoordkaartjes en manier van tijdmeting zijn ontstaan door persoonlijke voorkeuren qua lesstijl. De beide methoden worden geëvalueerd in de discussie.

3.4. Herontwerp

Het herontwerp van de diagnostische vragen betreft mogelijke aanpassingen aan antwoordmogelijkheden en de vraagstelling. Na eventuele aanpassingen, wordt opnieuw gecontroleerd of de herontworpen diagnostische vragen nog steeds voldoen aan de ontwerpeisen. De controle van deze ontwerpeisen is toegelicht en uitgevoerd in hoofdstuk 5, de evaluatie.

Het herontwerp van antwoordmogelijkheden wordt geleid door feedback van het expert panel, eigen inzichten en de verzamelde kaartjes met de extra antwoordmogelijkheid. Hierdoor komen er mogelijk misvattingen of veelgemaakte fouten naar boven die niet van tevoren in kaart gebracht waren. Deze misvattingen of veelgemaakte fouten kunnen ter inspiratie dienen voor vernieuwde antwoordmogelijkheden. Dit kan ertoe leiden dat een antwoordmogelijkheid uit het eerste ontwerp vervangen wordt. De keuze voor welke antwoordmogelijkheid vervangen wordt, is gebaseerd op eventuele suggesties voor vervanging van antwoordmogelijkheden door het expert panel.

Het herontwerp van de vraagstelling wordt geleid door feedback van het expert panel en eigen inzicht. Dit betekent dat reacties of gedrag van leerlingen tijdens de uitvoering niet worden meegenomen in het herontwerp van de vraagstelling. In het feedbackformulier wordt aan de experts gevraagd om suggesties voor verbetering van de vraagstelling. Deze suggesties worden bekeken en vergeleken, waarmee een nieuwe vraagstelling geformuleerd wordt.

Het zou kunnen voorkomen dat in de tijd tussen het eerste ontwerp en het herontwerp door de auteurs nieuwe ideeën of verbeterpunten voor de diagnostische vragen bedacht worden. Deze veranderingen zullen ook in het herontwerp van de vraagstelling en de antwoordmogelijkheden geïmplementeerd en toegelicht worden.

4. Resultaten

De resultaten van dit onderzoek bevatten een set van tien bruikbare diagnostische vragen over integraalrekening en daarnaast de verzamelde frequenties van de gegeven antwoorden tijdens de uitvoering. Het eerste ontwerp van de diagnostische vragen o.b.v. de ontwerpeisen is te vinden in bijlage C. Na de feedback verzameling van de experts en de uitvoering in de klas zijn de vragen uit het eerste ontwerp aangepast, resulterend in het herontwerp. De feedback van het expert panel is te vinden in bijlage D en een toelichting van de verwerking hiervan is ook te vinden in bijlage E. De herontworpen diagnostische vragen zijn gepresenteerd in dit hoofdstuk. Eerst wordt telkens de vraag weergegeven met de antwoordmogelijkheden en de fout die gemaakt is wanneer deze optie gekozen is. Vervolgens wordt in een tabel de getoetste nieuwe vaardigheid, de benodigde voorkennis en de onderbouwing van de antwoordopties weergegeven. Hierbij zijn de veelgemaakte fouten en misvattingen aangeduid m.b.v. de classificatie van Orton (1983). Wiskundige kennis uit de onderbouw en uit de wiskunde B hoofdstukken die in de bovenbouw behandeld zijn voorafgaand aan hoofdstuk 11 ‘’Integraalrekening’’ uit Getal & Ruimte worden als voorkennis beschouwd.

In bijlage D is te lezen dat vraag 10 over de booglengte door het expert panel als ongeschikt is aangemerkt. Deze vraag is wel herontworpen en als vraag 11 toegevoegd aan de set, maar toetst in essentie geen vaardigheid m.b.t. primitiveren of inzicht omtrent integreren. Daarom is er besloten om een nieuwe vraag te ontwerpen die aan de basisset van tien vragen is toegevoegd. Dit is de derde vraag geworden in het herontwerp. Dit heeft ermee te maken dat het aandeel vragen dat vaardigheden m.b.t. primitiveren toetst laag is in verhouding tot het aandeel vragen dat inzicht omtrent oppervlakten en inhouden toetst. Deze nieuwe vraag is opgesteld om de vaardigheid van het primitiveren zelf te toetsen. Hierbij worden verschillende typen functies en hun primitieven gegeven en moet de leerling aanwijzen welke correct is. Er is voor gekozen om een ‘moeilijke’ primitieve als correcte te nemen, zodat leerlingen ook de andere opties zullen moeten overwegen, wanneer zij de rekenregel voor het primitiveren van een logaritme niet meer weten. Op die manier zullen ze de andere opties af moeten strepen. Er is geen feedback meer verzameld van het expert panel, noch is deze vraag in de les toegepast. Antwoordmogelijkheid C is gebaseerd op een misvatting die werd voorgesteld door een expert bij vraag 1. De andere veelgemaakte fouten heb ik in de praktijk langs zien komen.

4.1. Herontwerp diagnostische vragen

<u>Vraag 1: primitiveren met de machtsregel.</u>

Gegeven de functie $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. Wat zijn de primitieven van $f(x)$?

- A. $F(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{x}$
  - De leerling is de integratieconstante vergeten toe te voegen.
- B. $F(x) = \frac{3}{4}x\sqrt{x} + c$
  - De leerling heeft geïntegreerd maar vermenigvuldigd met $\frac{3}{2}$ i.p.v. $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$.
- C. $F(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{x} + c$
  - Goed.
- D. $F(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}} + c$
  - De leerling heeft gedifferentieerd i.p.v. geïntegreerd.
- E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: …

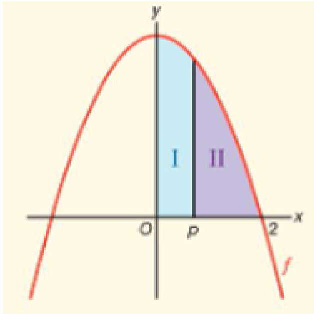
Tabel 1 – Onderbouwing bij diagnostische vraag 1.

Vaardigheid: een functie op juiste wijze primitiveren m.b.v. de machtsregel.	
Voorkennis: algebraïsche vaardigheden.	
Tijdsduur: 30 seconden	
A.	Procedurele fout: de leerling vergeet de integratieconstante toe te voegen (Kiat, 2005).
B.	Procedurele fout: de leerling primitiveert de functie maar zet de factor a voor de functie i.p.v. de factor $\frac{1}{a}$, als bij het differentiëren m.b.v. de machtsregel (Kiat, 2005). Daardoor komt de leerling uit op $\frac{1}{2} * \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$ i.p.v. $\frac{1}{2} * \frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
C.	Correct.
D.	Procedurele fout: de leerling heeft de functie gedifferentieërd i.p.v. geprimitiveerd (Kiat, 2005).

Vraag 2: een uitdrukking vinden om de oppervlakte onder een grafiek te berekenen.

Gegeven de functie $f(x) = 4 - x^2$. Welke berekening moet uitgevoerd worden om oppervlakte $O(II)$ te vinden?

- A. $\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_p^2$
  - Goed.
- B. $[-2x]_p^2$
  - De leerling differentieërt i.p.v. integreert.
- C. $\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_2^p$
  - De leerling draait de grenzen om.
- D. $[4x - x^3]_p^2$
  - De leerling past de machtsregel voor integreren verkeerd toe.
- E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...



Tabel 2 – Onderbouwing bij diagnostische vraag 2.

Vaardigheid: de hoodstelling van de integraalrekening toepassen om een uitdrukking voor de oppervlakte te vinden.	
Voorkennis: functies primitiveren m.b.v. de machtsregel, algebraïsche vaardigheden.	
Tijdsduur: 30 seconden	
A.	Correct.
B.	Procedurele fout: de leerling differentieërt de functie (Kiat, 2005).
C.	Procedurele fout: de leerling vult de grenzen verkeerd om in en plaatst de p als bovengrens en 2 als ondergrens i.p.v. andersom (Cornelissen, 1994).
D.	Procedurele fout: de leerling vergeet dat bij het berekenen van een primitieve de factor $\frac{1}{a}$ toegevoegd moet worden.

Vraag 3: het primitiveren van functies zonder kettingregel.

Welke primitieve is correct opgesteld?

- A. $f(x) = 3\ln(x) \qquad F(x) = \frac{3}{x} + c$
  - Leerling haalt differentieër- en integreerregels door elkaar
- B. $g(x) = 3\log(x) \qquad G(x) = \frac{1}{\ln(10)}(3x\ln(x) - 3x) + c$
  - Goed.
- C. $h(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} \quad H(x) = \frac{1}{4x \cdot \sqrt[3]{x}} + c$
  - Leerling trekt één af van de negatieve exponent i.p.v. dat één wordt opgeteld.
- D. $i(x) = 3e^x \qquad I(x) = 3e^x$
  - Leerling vergeet de constante toe te voegen aan de primitieve
- E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

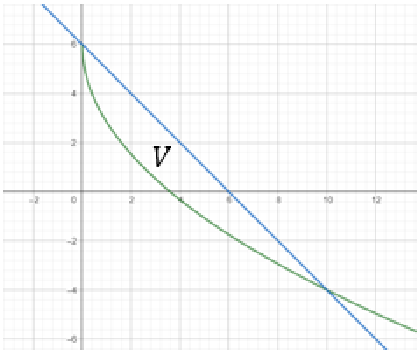
Tabel 3 – Onderbouwing bij diagnostische vraag 3.

Vaardigheid: primitiveerregels toepassen om functies correct te integreren.	
Voorkennis: primitiveren met de machtsregel, algebraïsche vaardigheden.	
Tijdsduur: 120 seconden	
A.	Procedurele fout: de leerling haalt de differentieër en integreerregel van het natuurlijke logaritme door de war (Kiat, 2005).
B.	Correct.
C.	Technische fout: de leerling ziet niet in dat het integreren van een negatieve exponent impliceert dat de negatieve exponent positief kan worden. De leerling wil $-\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$ berekenen maar maakt er $-1\frac{1}{3}$ van aangezien hij denkt dat $\frac{1}{3} + 1 = 1\frac{1}{3}$ berekend moet worden. Dit is een fout bij rekenen met negatieve en gebroken exponenten (Orton, 1983).
D.	Procedurele fout: de leerling vergeet de integratieconstante toe te voegen aan de primitieve. Deze veelgemaakte fout is specifiek bij deze functie toegepast omdat in het hoofd van leerlingen vaak het idee speelt dat er bij het integreren van e^x 'niets' verandert (Kiat, 2005).
E.	De leerling kent de regel voor het integreren van een logaritme niet en ziet niet in dat antwoordoptie B correct is. Dit kan voorkomen, aangezien dit één van de moeilijkere integreerregels is die de leerlingen moeten kennen. Bij het geven van een antwoord bij optie E kan een leerling een goede primitieve opstellen van een willekeurige functie (alhoewel dit naar verwachting één van de vier gegeven functies zal zijn). Wanneer een leerling hier een incorrecte primitieve opstelt, komt op die manier een nieuwe misvatting of veelgemaakte fout aan het licht.

Vraag 4: een uitdrukking vinden om de oppervlakte van een vlakdeel tussen twee grafieken van functies te berekenen.

Gegeven de functie $f(x) = 6 - \sqrt{10x}$ en de lijn $l: y = -x + 6$.
Welke uitdrukking geeft de oppervlakte weer van het vlakdeel V dat ingesloten wordt door de grafiek van de functie $f(x)$ en de lijn l?

- A. $O(V) = \int_0^{10} (12 - x - \sqrt{10x}) dx$
  - De leerling telt de functie $f(x)$ en de lijn l bij elkaar op.
- B. $O(V) = \int_{-4}^{6} (\sqrt{10x} - x) dx$
  - De leerling kiest de y-waarden van de snijpunten van $f(x)$ en lijn l als grenzen.
- C. $O(V) = \int_0^{10} (x - \sqrt{10x}) dx$
  - De leerling heeft de lijn l van functie $f(x)$ afgetrokken i.p.v. andersom.
- D. $O(V) = \int_0^{10} (\sqrt{10x} - x) dx$
  - Goed.
- E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...



Tabel 4 – Onderbouwing bij diagnostische vraag 4.

Vaardigheid: de oppervlakte van een vlakdeel tussen twee gegeven functies te berekenen.	
Voorkennis: de hoofdstelling van de integraalrekening, algebraïsche vaardigheden.	
Tijdsduur: 60 seconden	
A.	Conceptuele fout: de leerling telt de functie $f(x)$ en de lijn l bij elkaar op. De leerling krijgt $O(V) = \int_a^b (l + f(x))\, dx$ i.p.v. $O(V) = \int_a^b (l - f(x))\, dx$.
B.	Procedurele fout: de leerling kiest de y-waarden van de snijpunten tussen de twee functies als grenzen voor de integraalberekening.
C.	Procedurele/technische fout: De leerling heeft de lijn l van functie $f(x)$ afgehaald en krijgt $O(V) = \int_a^b (f(x) - l)\, dx$ i.p.v. $O(V) = \int_a^b (l - f(x))\, dx$. Wanneer de leerling niet in heeft gezien dat de bovenste functie als $f(x)$ gekozen moet worden is er sprake van een procedurele fout. Wanneer de leerling dit wel weet, maar de onderste functie als bovenste kiest, is er sprake van een technische fout m.b.t. coördinaatmeetkunde.
D.	Correct.

Vraag 5: primitiveren met de machtsregel en de kettingregel.

Gegeven de functie $f(x) = 4\sqrt{4x-1}$. Wat zijn de primitieven van $f(x)$?

- A. $F(x) = \frac{2}{3}(4x-1)\sqrt{4x-1} + c$
  - Goed.
- B. $F(x) = 10\frac{2}{3}(4x-1)\sqrt{4x-1} + c$
  - De leerling past de kettingregel toe als bij het differentiëren.
- C. $F(x) = 2\frac{2}{3}(4x-1)\sqrt{4x-1} + c$
  - De leerling past de kettingregel niet toe.
- D. $F(x) = 1\frac{1}{2}(4x-1)\sqrt{4x-1} + c$
  - De leerling heeft geïntegreerd maar vermenigvuldigd met $\frac{3}{2}$ i.p.v. $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$.
- E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

Tabel 5 – Onderbouwing bij diagnostische vraag 5.

Vaardigheid: een functie primitiveren waarbij de kettingregel toegepast moet worden.	
Voorkennis: primitiveren met de machtsregel, algebraïsche vaardigheden.	
Tijdsduur: 60 seconden	
A.	Correct.
B.	Procedurele fout: bij het toepassen van de kettingregel vergeet de leerling de factor $\frac{1}{4}$ te gebruiken. In plaats daarvan vermenigvuldigt de leerling met een factor 4, als bij het differentiëren (Kiat, 2005).
C.	Conceptuele/procedurele fout: de leerling past de kettingregel niet toe en mist dus de factor $\frac{1}{4}$ (Yee & Lam, 2008). Wanneer de leerling de kettingregel vergeten is toe te passen, is er sprake van een procedurele fout. Wanneer de leerling niet inziet dat de kettingregel gebruikt moet worden bij deze functie is er sprake van een conceptuele fout.
D.	Procedurele fout: de leerling primitiveert de functie maar zet de factor a voor de functie i.p.v. de factor $\frac{1}{a}$ als bij het differentiëren m.b.v. de machtsregel (Kiat, 2005). Daardoor komt de leerling uit op $4 * \frac{1}{4} * \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ i.p.v. $4 * \frac{1}{4} * \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$. De leerling heeft de kettingregel wel goed toegepast.

Vraag 6: een oppervlakte deels boven en onder de x-as berekenen.

Gegeven de functie $f(x) = x^3$. Wat is de oppervlakte tussen de grafiek van $f(x)$ en x-as tussen de grenzen $x = -2$ en $x = 2$?

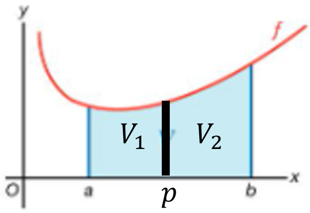
- A. 0
  - Leerling integreert, maar ziet niet in dat oppervlakten positief zijn.
- B. 8
  - Goed.
- C. 16
  - Leerling vergeet te primitiveren en vult de grenzen in in $f(x)$.
- D. 24
  - Leerling ziet in dat oppervlakten positief zijn, maar differentieërt.
- E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

Tabel 6 – Onderbouwing bij diagnostische vraag 6.

Vaardigheid: een oppervlakte boven- en onder de x-as berekenen m.b.v. de hoofdstelling van de integraalrekening.	
Voorkennis: de hoofdstelling van de integraalrekening, de oppervlakte van een vlakdeel tussen twee gegeven functies te berekenen, algebraïsche vaardigheden..	
Tijdsduur: 120 seconden	
A.	Conceptuele fout: de leerling integreert van -2 tot 2 en trekt daarmee de oppervlakten van elkaar af om zo op 0 uit te komen ($4 - 4 = 0$). De leerling ziet niet in dat bij $x = 0$ de functie de x-as snijdt en links en rechts van de y-as dus sprake is van een andere bovenste functie (Orton, 1983).
B.	Correct.
C.	Conceptuele/procedurele fout: de leerling vult de grenzen in de functie $f(x)$ in i.p.v. eerst deze functie te integreren. Zo komt er $2^3 - (-2)^3 = 16$ uit. Wanneer de integreerstap vergeten wordt is het een procedurele fout. Wanneer een leerling daadwerkelijk niet weet dat de functie eerst geïntegreerd moet worden om de oppervlakte te bepalen, zou het als conceptuele fout beschouwd moeten worden.
D.	Procedurele fout: de leerling differentieërt de functie en komt zo op $3x^2$. Vervolgens telt de leerling de oppervlakten goed bij elkaar op maar komt zo bij $12 + 12 = 24$ (Kiat, 2005).

Vraag 7: een grens vinden om de oppervlakte van een vlakdeel naar een verhouding te verdelen.

Gegeven een functie $f(x)$, welke uitdrukking moet berekend worden om p te vinden die het blauw gearceerde oppervlak V in twee gelijke oppervlaktes V_1 en V_2 verdeelt?



- A. $p = \frac{a+b}{2}$
  - De leerling denkt dat de functie constant is en kiest voor p het midden van het interval $[a, b]$.
- B. $\int_p^a f(x)dx = \int_b^p f(x)dx$
  - De leerling draait de grenzen om.
- C. $\int_a^p f(x)dx = \int_p^b f(x)dx$
  - Goed.
- D. $[f(x)]_a^p = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx$
  - De leerling vergeet dat de functie eerst geprimitiveerd moet worden.
- E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

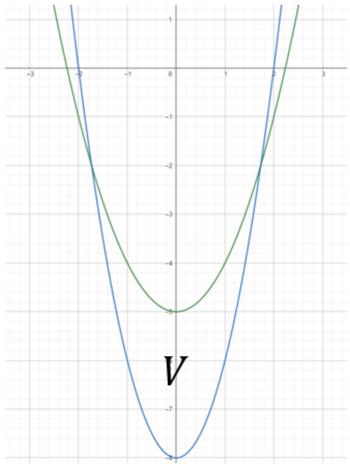
Tabel 7 – Onderbouwing bij diagnostische vraag 7.

Vaardigheid: een grens vinden waarmee de oppervlakte onder een grafiek verdeeld kan worden in twee oppervlakten met een bepaalde verhouding.	
Voorkennis: de hoofdstelling van de integraalrekening.	
Tijdsduur: 60 seconden	
A.	Conceptuele fout: de leerling denkt dat oppervlakten evenredig zijn met de afstanden van de bijbehorende intervallen (wat alleen geldt bij een constante functie) en kiest daarom het midden van het interval als p.
B.	Procedurele fout: de leerling draait de grenzen om en zet de hoogste waarde als ondergrens neer en de laagste waarde als bovengrens (Cornelissen, 1994).
C.	Correct.
D.	Procedurele fout: de leerling vergeet dat bij de hoofdstelling van de integraalrekening geprimitiveerd moet worden.

Vraag 8: een vlakdeel wentelen om de x-as en hier de inhoud bij berekenen.

Gegeven zijn functies $f(x) = x^2 - 5$ in groen en $g(x) = 2x^2 - 8$ in blauw. Welke uitdrukking geeft de inhoud L weer, die ontstaat als het vlakdeel V, ingesloten door de functies $f(x)$ en $g(x)$, wentelt om de x-as?

- A. $I(L) = \pi \cdot \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left((2x^2 - 8) - (x^2 - 5)\right)^2 dx$
  - De leerling neemt $(g(x) - f(x))^2$ i.p.v. $(g(x))^2 - (f(x))^2$.
- B. $I(L) = \pi \cdot \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left((x^2 - 5)^2 - (2x^2 - 8)^2\right) dx$
  - De leerling kiest de hoogste functie i.p.v. de buitenste functie.
- C. $I(L) = \pi \cdot \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left((2x^2 - 8) - (x^2 - 5)\right) dx$
  - De leerling vergeet de kwadraten om de functies te zetten.
- D. $I(L) = \pi \cdot \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left((2x^2 - 8)^2 - (x^2 - 5)^2\right) dx$
  - Goed.
- E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

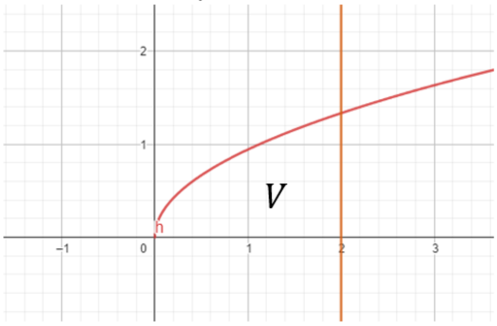


Tabel 8 – Onderbouwing bij diagnostische vraag 8.

Vaardigheid: de inhoud van een omwentelingslichaam van een vlakdeel, dat om de x-as gewenteld is, berekenen.	
Voorkennis: de hoofdstelling van de integraalrekening, de oppervlakte tussen twee grafieken berekenen, algebraïsche vaardigheden.	
Tijdsduur: 120 seconden	
A.	Procedurele fout: de leerling trekt eerst de functies van elkaar af en neemt hier vervolgens het kwadraat van, i.p.v. andersom.
B.	Conceptuele/technische fout: de leerling kiest de functie aan de bovenkant van het vlakdeel i.p.v. de functie aan de buitenkant van het vlakdeel. Wanneer de leerling niet inziet dat de buitenste functie de grootste inhoud genereert en dat de kleinste inhoud daarvan afgetrokken moet worden, is er sprake van een conceptuele fout. Wanneer de leerling dit wel inziet, maar toch de verkeerde functie als buitenste kiest, is er sprake van een technische fout m.b.t. coördinaatmeetkunde.
C.	Procedurele fout: de leerling vergeet het kwadraat om de functies $f(x)$ en $g(x)$ te zetten.
D.	Correct.

Vraag 9: een vlakdeel wentelen om de y-as en hier de inhoud bij berekenen.

Gegeven de functie $h(x) = \frac{2}{3}\sqrt{2x}$. Beschouw het vlakdeel V, ingesloten door de grafiek van $h(x)$, de x-as, en de lijn $x = 2$. Welke uitdrukking geeft de inhoud van lichaam L wanneer vlakdeel V om de y-as wentelt?



- A. $I(L) = \pi \int_0^2 \left(\frac{2}{3}\sqrt{2x}\right)^2 dx$
  - De leerling heeft vlakdeel V om de x-as gewenteld.
- B. $I(L) = 5\frac{1}{3}\pi - \pi \int_0^{1\frac{1}{3}} \left(1\frac{1}{8}y^2\right)^2 dy$
  - Goed.
- C. $I(L) = 5\frac{1}{3}\pi - \pi \int_0^{1\frac{1}{3}} \left(1\frac{1}{8}y^2\right) dy$
  - De leerling is het kwadraat om de functie $x = \cdots$ vergeten.
- D. $I(L) = \pi \int_0^{1\frac{1}{3}} \left(1\frac{1}{8}y^2\right)^2 dy$
  - De leerling wil vlakdeel V direct om de y-as wentelen.
- E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

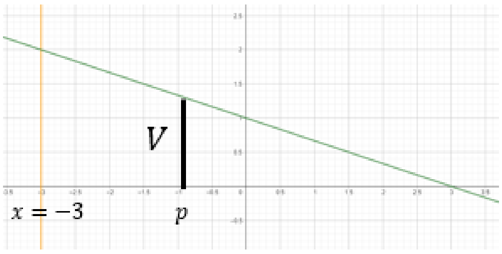
Tabel 9 – Onderbouwing bij diagnostische vraag 9.

<table>
<tr><td colspan="2">Vaardigheid: de inhoud van een omwentelingslichaam van een vlakdeel, dat om de y-as gewenteld is, berekenen.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Voorkennis: de hoofdstelling van de algebra, de inhoud van een cilinder, de inhoud van een omwentelingslichaam van een vlakdeel, dat om de x-as gewenteld is, berekenen, algebraïsche vaardigheden.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tijdsduur: 120 seconden</td></tr>
<tr><td>A.</td><td>Procedurele fout: de leerling wentelt het vlakdeel V om de x-as en berekent de inhoud van dat omwentelingslichaam.</td></tr>
<tr><td>B.</td><td>Correct.</td></tr>
<tr><td>C.</td><td>Procedurele fout: de leerling vergeet het kwadraat om de omgeschreven functie te zetten ($x = 1\frac{1}{8}y^2$).</td></tr>
<tr><td>D.</td><td>Conceptuele fout: de leerling denkt dat de inhoud van het omwentelingslichaam van vlakdeel V direct gevonden kan worden door het om de y-as te wentelen. Echter wordt de inhoud bepaald van het omwentelingslichaam van het vlakdeel dat ingesloten wordt door de lijn $y = 1\frac{1}{3}$, de y-as en $h(x)$.</td></tr>
</table>

<u>Vraag 10: het splitsen van een kegel in twee delen met even grote inhoud</u>

Beschouw het vlakdeel V ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$, de x-as en $x = -3$. Welke vergelijking moet opgelost worden om p met $-3 < p < 3$ te vinden waarvoor de inhoud van het omwentelingslichaam V in twee gelijke delen verdeeld wordt?

- A. $\int_{-3}^{p} \left(-\frac{1}{3}x + 1\right)^2 dx = \frac{1}{2} * 8\pi$
  - De leerling vergeet dat π voor de integraal hoort.
- B. $\pi \int_{-3}^{p} \left(-\frac{1}{3}x + 1\right)^2 dx = 8\pi$
  - De leerling kiest de volledige kegelinhoud.
- C. $\pi \int_{-3}^{p} \left(-\frac{1}{3}x + 1\right)^2 dx = \frac{1}{2} * 8\pi$
  - Goed.
- D. $\pi \int_{-3}^{p} \left(-\frac{1}{3}x + 1\right) dx = \frac{1}{2} * 8\pi$
  - De leerling vergeet dat de functie in de integraal in het kwadraat moet.
- E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

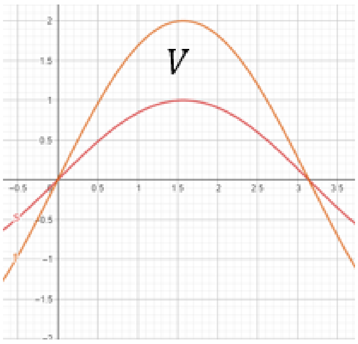


Tabel 10 – Onderbouwing bij diagnostische vraag 10.

Vaardigheid: een grens vinden waarmee de inhoud van een omwentelingslichaam verdeeld kan worden in twee delen met een bepaalde verhouding.	
Voorkennis: de hoofdstelling van de integraalrekening, de inhoud van een kegel, de inhoud van een omwentelingslichaam van een vlakdeel, dat om de x-as gewenteld is, berekenen, algebraïsche vaardigheden.	
Tijdsduur: 120 seconden	
A.	Procedurele fout: de leerling vergeet dat er een π voor de integraal hoort.
B.	Technische fout: de leerling stelt de inhoud van het gekozen kegelstuk gelijk aan de inhoud van de totale kegel. Dit is een slordigheidsfout.
C.	Correct.
D.	Procedurele fout: de leerling vergeet dat de functie $f(x)$ in het kwadraat hoort binnen de integraal.

Vraag 11: het bepalen van de omtrek van een vlakdeel m.b.v. de booglengte.

Gegeven zijn de functies $s(x) = \sin(x)$ en $t(x) = 2\sin(x)$. Wat is de omtrek van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door $s(x)$ en $t(x)$ voor $0 < x < \pi$?



- A. $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2(x)}\,dx + \int_0^{\pi} \sqrt{1+2\cos^2(x)}\,dx$
  - De leerling ziet niet in dat $\left(t'(x)\right)^2 = (2\cos(x))^2$.
- B. $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2(x)}\,dx + \int_0^{\pi} \sqrt{1+4\cos^2(x)}\,dx$
  - Goed.
- C. $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin^2(x)}\,dx + \int_0^{\pi} \sqrt{1+4\sin^2(x)}\,dx$
  - De leerling heeft niet de afgeleide van $f(x)$ genomen.
- D. $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos(x)}\,dx + \int_0^{\pi} \sqrt{1+2\cos(x)}\,dx$
  - De leerling heeft niet het kwadraat van $f'(x)$ genomen.
- E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

Tabel 11 – Onderbouwing bij diagnostische vraag 11.

Vaardigheid: de omtrek van een vlakdeel berekenen m.b.v. de booglengte.	
Voorkennis: differentiëren, goniometrische functies, algebraïsche vaardigheden.	
Tijdsduur: 120 seconden	
A.	Conceptuele fout: de leerling denkt dat bij $\left(t'(x)\right)^2$ alleen de term met x erin in het kwadraat genomen moet worden en niet de gehele functie (Orton, 1983).
B.	Correct.
C.	Procedurele fout: de leerling vergeet dat de afgeleide van $f(x)$ genomen moet worden binnen de wortel in de integraal.
D.	Procedurele fout: de leerling vergeet dat de functie $f'(x)$ in het kwadraat hoort binnen de wortel in de integraal.

4.2. Overzicht antwoorden leerlingen

In Tabel 12 zijn de gegeven antwoorden op de diagnostische vragen overzichtelijk weergegeven. De groen gearceerde vakken zijn de correcte antwoorden en de rood gearceerde vakken zijn de misvattingen en veelgemaakte fouten die frequent (>25%) voorkomen in de klas van uitvoering. De gokkans op een antwoord bij een meerkeuzevraag met vier opties is 0,25 (Sabbe & Lesage, 2012). Wanneer een fout antwoord door meer dan 25% van de leerlingen gegeven is, zou er een aanleiding kunnen zijn om te denken dat dit antwoord niet willekeurig gekozen is, maar dat hier een misvatting of veelgemaakte fout aan ten grondslag ligt die mogelijk in deze klas speelt. Deze misvattingen en veelgemaakte fouten worden onder de aandacht gebracht in Tabel 13 met de bijbehorende relatieve frequenties en toegelicht in paragraaf 6.3 van het hoofdstuk conclusies & discussie.

Tabel 12 – Frequenties van gegeven antwoorden op de diagnostische vragen.

Vraag	Onderwerp	Tijd	A	B	C	D	E	Ratio
1	Primitiveren met machtsregel	00:30	1	3	4	5		4/13
2	De oppervlakte onder een grafiek met de hoofdstelling van de integraalrekening	00:30	7		6			7/13
3	Primitiveren zonder kettingregel							
4	De oppervlakte van een vlakdeel tussen twee grafieken van functies	00:30	1	3	7	4		4/15
5	Primitiveren met machtsregel en kettingregel	00:30	12		2	1		12/15
6	De oppervlakte van een vlakdeel onder en boven de x-as	01:00	7	7				7/14
7	Een oppervlakte naar verhouding verdelen	00:40		7	3	4		7/14
8	De inhoud van een omwentelingslichaam (x-as)	01:00	7	1	3	3		3/14
9	De inhoud van een omwentelingslichaam (y-as)	01:00	2	8	1	3		8/14
10	Een inhoud naar verhouding verdelen	00:50	8	6		1		8/15
11	De omtrek van een vlakdeel bepalen m.b.v. de booglengte	01:30	1	13	1			13/15

Tabel 13 – Toelichting van de misvattingen en veelgemaakte fouten met een relatieve frequentie (F) hoger dan 25%.

Vraag	Veelgemaakte fout/misvatting	F
1	Procedurele fout: het vergeten om de integratieconstante toe te voegen na het primitiveren (Kiat, 2005).	38%
2	Procedurele fout: het omdraaien van grenzen bij het opstellen van een integraal.	46%
4	Conceptuele fout: het identificeren van de bovenste functie bij het opstellen van de integraal voor het berekenen van de oppervlakte van een vlakdeel.	47%
6	Conceptuele fout: integreren zonder in te zien dat oppervlakten die deels boven en onder de x-as vallen, los van elkaar geïntegreerd dienen te worden omdat de bovenste en onderste functie veranderen (Orton, 1983).	50%
7	Procedurele fout: vergeten om de functie te primitiveren bij het toepassen van de hoofdstelling van de integraalrekening.	29%
8	Procedurele fout: bij het berekenen van een inhoud m.b.v. integraalgrekening gebruikmaken van $\left(g(x)-f(x)\right)^2$ i.p.v. $\left(g(x)\right)^2-\left(f(x)\right)^2$ binnen de integraal.	50%
10	Technische fout (slordigheid): de integraal behorende bij een afgeknotte kegel gelijkstellen aan de inhoud van een gehele kegel, i.p.v. aan het gewenste deel van deze gehele kegel.	40%

5. Evaluatie

De diagnostische vragen zijn ontworpen met de ontwerpeisen als ruggengraat, echter kunnen niet alle eisen van tevoren gecontroleerd worden, zoals een juiste duratie van de diagnostische vraag (ontwerpeis 8). Verder is er een herontwerp gemaakt van de diagnostische vragen op basis van feedback van het expert panel, inzichten van de auteurs en de extra antwoordmogelijkheid. Daarom wordt het ontwerpdoel geëvalueerd door te controleren of het herontwerp nog steeds voldoet aan de gestelde ontwerpeisen. Hieronder wordt per ontwerpeis beschreven hoe deze gecontroleerd is. Wanneer aan alle ontwerpeisen voldaan wordt, is het ontwerpdoel behaald. Wanneer niet aan alle ontwerpeisen voldaan wordt, wordt onderbouwd waarom dit het geval is.

1. *De diagnostische vragen bestaan uit een vraagstelling en uit drie of vier antwoordmogelijkheden, waarvan één correct antwoord, met de overige foute antwoorden gebaseerd op één misvatting of veelgemaakte fout per antwoord, die volgt uit literatuur, eigen verwachtingen en/of expert feedback.*

Deze ontwerpeis is direct geïmplementeerd bij het (her)ontwerpen van de diagnostische vragen. In het resultaten hoofdstuk is de onderbouwing voor de verschillende antwoordmogelijkheden weergegeven en is zichtbaar dat er per antwoordmogelijkheid slechts één misvatting of veelgemaakte fout aan het licht komt.

2. *Bij iedere diagnostische vraag is er een extra antwoordmogelijkheid: ''het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ….*

Deze ontwerpeis is direct geïmplementeerd bij het (her)ontwerpen van de diagnostische vragen. Bij vraag 3 van het herontwerp lijkt antwoordoptie E wellicht vreemd. In de toelichting op de antwoordmogelijkheden is uitgelegd waarom er toch voor gekozen is om deze antwoordoptie op te nemen in de vraag. Daarmee voldoet ook de nieuwe vraag aan ontwerpeis 3.

3. *Van elk onjuist antwoord moet je iets kunnen opsteken zonder dat de leerling het nader hoeft toe te lichten* (Barton, 2020) (Wylie & William, 2006)*, m.u.v. de extra antwoordmogelijkheid: ''het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk…''.*

In de resultaten is per vraag beschreven welke expliciete fouten in denkstappen/uitvoering de leerling maakt bij het kiezen van een onjuist antwoord.

4. *Het moet niet mogelijk zijn om op het juiste antwoord uit te komen met behulp van een misvatting* (Barton, 2020).

Of aan deze ontwerpeis voldaan wordt, is gecontroleerd door verwachte en nieuwe misvattingen en veelgemaakte fouten toe te passen op de diagnostische vragen. De controle van deze ontwerpeis is beperkt, aangezien niet alle mogelijke veelgemaakte fouten en misvattingen toegepast zijn op de vragen. Voor alle bedachte misvattingen en veelgemaakte fouten voldoen de diagnostische vragen aan deze ontwerpeis.

5. *De vraagstelling van diagnostische vragen moet duidelijk en ondubbelzinnig zijn* (Barton, 2020).

Deze ontwerpeis is direct geïmplementeerd bij het (her)ontwerpen. Het expert panel is gevraagd in het feedbackformulier of de vraagstelling eenduidig is en of er suggesties ter verbetering zijn. Wanneer er suggesties gegeven worden, zijn deze waar passend meegenomen in het herontwerp. Of aan de ontwerpeis wordt voldaan, is bepaald door de subjectieve meningen van het expert panel en de auteurs. De figuren in vragen 4 en 7 t/m 11 van het herontwerp zijn bijvoorbeeld verduidelijkt door de vlakdelen en zaken die berekend moeten worden aan te geven met een label. Daarnaast is de vraagstelling bij vraag 7 en 10 n.a.v. expert panel feedback versimpeld zodat deze beter leesbaar en daarmee duidelijker is voor de leerling.

6. *Bij de gebruikte vraagstelling moeten de randzaken zo eenvoudig mogelijk gehouden worden om alleen de nieuwe vaardigheid te toetsen waarover je inzicht wil krijgen.*

Deze ontwerpeis is zo goed als mogelijk nageleefd en gecontroleerd door inzicht van de auteurs. Daarnaast heeft het expert panel ruimte gehad om aan te geven of er wel of niet voldaan wordt aan deze ontwerpeis middels het feedbackformulier. Waar van toepassing, is o.b.v. de feedback van het expert panel de vraag aangepast om de randvoorwaarden zo eenvoudig mogelijk te maken. Bij deze ontwerpeis is beoordeeld of de vereiste voorkennis geminimaliseerd kon worden door de vraagstelling of antwoordmogelijkheden aan te passen, dit is ook een manier om randzaken te vereenvoudigen. Bij vragen 8, 9 en 10 van het herontwerp zijn bijvoorbeeld de antwoordmogelijkheden aangepast zodat de algebraïsche vaardigheden in mindere mate getoetst worden en de focus ligt op de nieuwe vaardigheid omtrent integraalrekening. Bij vraag 4 is ook een figuur toegevoegd zodat de leerlingen de grafieken van functies niet eerst hoeven te schetsen, maar uitsluitend bezig zijn met het opstellen van een integraal.

7. *Diagnostische vragen moeten niet meer dan één nieuwe vaardigheid toetsen* (Barton, 2020).

Welke nieuwe vaardigheid getoetst wordt en wat de bijbehorende voorkennis is, is bij iedere diagnostische vraag beschreven, welke terug te vinden zijn in het hoofdstuk resultaten. Deze ontwerpeis is getoetst door te beoordelen of de diagnostische vraag in twee vragen opgesplitst kan worden, indien het twee nieuwe vaardigheden betreft die beiden getoetst dienen te worden. Vereiste voorkennis wordt niet beschouwd als nieuwe vaardigheid die getoetst wordt binnen deze ontwerpeis. In lijn met ontwerpeis 6 is echter wel getracht de vereiste voorkennis te minimaliseren. Het succesvol kunnen primitiveren zonder kettingregel zou opgedeeld kunnen worden in aparte vaardigheden voor de toepassing van iedere primitiveerregel. Op die manier kan beargumenteerd worden dat in de derde herontworpen diagnostische vraag meerdere vaardigheden getoetst worden. Aangezien Getal & Ruimte alle primitiveerregels in één theorieblok behandelt, wordt in dit onderzoek aangenomen dat dit als één vaardigheid behandeld mag worden. Op die manier voldoet vraag 3 wel aan deze ontwerpeis.

8. *Leerlingen moeten binnen maximaal één minuut antwoord kunnen geven.*

Deze ontwerpeis is vooraf lastig te beoordelen, aangezien het moeilijk in te schatten is hoelang leerlingen met een vraag bezig zijn. Deze schatting is gebaseerd op het inzicht van de auteurs en daarbij is aan het expert panel gevraagd om hun inschatting te geven van de duratie van de diagnostische vragen. Op de schattingen van de auteurs en de experts is gebaseerd of de duratie van iedere vraag onder de minuut ligt. Wanneer dit niet het geval is, is de vraag aangepast om de duratie (hopelijk) voldoende te verkorten. Dit kan niet meer getoetst worden aangezien de uitvoering al plaatsvindt voor het herontwerp van de vragen, zoals beschreven in de methode. Hieronder is per herontworpen vraag weergegeven of deze ontwerpeis behaald is.

- Vraag 1: Ja, deze vraag is binnen één minuut te beantwoorden. Dit blijkt uit de uitvoering en uit 4 van de 4 meningen van het expert panel.
- Vraag 2: Ja, deze vraag is binnen één minuut te beantwoorden. Eén expert verwacht dat leerlingen hier twee minuten mee bezig zullen zijn, maar dit is tijdens de uitvoering niet zo ervaren. Verder gaven drie experts aan dat de tijdsduur van 1 minuut voldoende is.

- Vraag 3: Het is lastig om van de nieuwe vraag een inschatting te maken. Hier zouden twee minuten voor gegeven kunnen worden aangezien de leerlingen alle antwoordopties moeten overwegen wanneer ze de regels voor het primitiveren niet uit hun hoofd kennen. Het berekenen van vier relatief ‘’simpele’’ primitieven zal al gauw twee minuten duren. Leerlingen die de regels wel kennen zullen snel inzien dat optie B correct is.
- Vraag 4: Het is twijfelachtig of deze vraag binnen één minuut te beantwoorden is. Twee experts verwachten dat dit 4 of meer minuten kost aangezien er een schets gemaakt moet worden. Er is nu een afbeelding aan de vraag toegevoegd zodat er geen schets meer gemaakt hoeft te worden en de leerlingen de snijpunten kunnen aflezen, waardoor ze alleen nog maar op het opstellen van de integraal hoeven te focussen.
- Vraag 5: Ja, deze vraag is binnen één minuut te beantwoorden. Twee experts geven aan dat deze vraag respectievelijk 3 en 4 minuten zal kosten om te beantwoorden. Op basis van de uitvoering is geconcludeerd dat het niet nodig is om de tijdsduur te verlengen aangezien binnen één minuut 12 van de 15 antwoorden correct waren.
- Vraag 6: Nee, deze is vraag is niet binnen één minuut te beantwoorden. De experts zijn verdeeld over de tijdsduur. Twee van hen geven aan dat 1 minuut zal volstaan terwijl de andere twee experts 3 minuten aangeven. Bij de uitvoering leek het erop dat niet de gehele klas hun antwoord na één minuut paraat had. Daarnaast geeft een langere denktijd (van Ast et al., 2021) meer mogelijkheid om na te denken over het conceptuele begrip van oppervlakte bij integraalrekening. Daarom lijkt twee minuten hier gepast.
- Vraag 7: Ja, deze vraag is binnen één minuut te beantwoorden. Drie van de vier experts geven dit aan en daarbij zijn geen problemen ondervonden gedurende de uitvoering. Aangezien de vraagstelling versimpeld is en labels aan de afbeelding zijn toegevoegd, wordt verwacht dat, ondanks dat één expert twee minuten noemt, één minuut gepast is.
- Vraag 8, 9 en 10: Nee, deze vragen zijn niet binnen één minuut te beantwoorden. Bij de uitvoering bleek dat één minuut onvoldoende was om de klas een antwoord te laten formuleren. De experts zijn verdeeld over de tijdsduur, namelijk 3-5 minuten voor vraag 8 en 10 en 4-7 minuten voor vraag 9. De vragen zijn verduidelijkt door labels toe te voegen aan de bijbehorende figuren. De antwoordopties zijn versimpeld door de algebraïsche bewerkingen, die oorspronkelijk uitgevoerd dienden te worden, achterwege te laten. De inschatting van een geschikte tijdsduur voor deze vragen zijn dan ook twee minuten.
- Vraag 11: Nee, deze vraag is niet binnen één minuut te beantwoorden. De experts zijn namelijk verdeeld over de tijdsduur, 2-5 minuten. Gedurende de uitvoering bleken echter 13 van de 15 antwoorden correct te zijn, binnen één minuut. Hier moet vermeld worden dat de formule van de booglengte op het bord is geschreven, terwijl het idee is dat leerlingen deze vraag beantwoorden zonder de formule erbij te hebben. Wanneer de formule gereproduceerd moet worden, kost dit meer tijd. De vraag is verder inhoudelijk niet aangepast, daarom is ervoor gekozen om de tijdsduur naar 2 minuten te verhogen.

Concluderend, voor vraag 1, 2, 4, 5 en 7 wordt een tijdsduur van één minuut aangeraden en voor vraag 3, 6, 8, 9, 10 en 11 wordt een tijdsduur van twee minuten aangeraden. Het toetsen van vaardigheden m.b.t. toepassingen van integraalrekening vereist meer denktijd dan het toetsen van vaardigheden die te maken hebben met het primitiveren zelf. Wanneer de vragen kleiner gemaakt zouden worden, worden de vragen zodanig versimpeld dat het lastig is om de gewenste vaardigheden van leerlingen te toetsen. Ondanks dat zes vragen niet voldoen aan deze ontwerpeis, blijven het geschikte diagnostische vragen om toe te passen in de les.

6. Conclusies en discussie

In dit hoofdstuk wordt een conclusie getrokken m.b.t. het gestelde ontwerpdoel. Hierna volgt een discussie over de gebruikte methode, de resultaten en de kwaliteit en beperkingen van het onderzoek. Er wordt afgesloten met aanbevelingen over de diagnostische vragen, die volgen uit de conclusie en discussie, en aanbevelingen voor verder onderzoek.

6.1. Ontwerpdoel

Diagnostische vragen ontwerpen a.d.h.v. opgestelde ontwerpeisen voor gebruik in de vwo 4/5 wiskunde B les bij differentiaal- en integraalrekening.

Er zijn tien diagnostische vragen ontworpen m.b.v. de opgestelde ontwerpeisen die volgen uit het theoretisch kader. Volgens de methode zijn na review van een expert panel en uitvoering in de les deze vragen herontworpen, resulterend in elf diagnostische vragen. Deze diagnostische vragen zijn gemaakt voor het het vak wiskunde B in vwo 5, passend bij het thema integraalrekening van hoofdstuk 11 uit Getal & Ruimte. Uit de evaluatie blijkt dat zes van de elf vragen (3, 6, 8, 9, 10 en 11) een tijdsduur hebben van twee minuten, waarmee ze de gestelde limiet van één minuut in ontwerpeis 8 overschrijden. Dit is te verantwoorden door te stellen dat de inzichten die nodig zijn om deze nieuwe vaardigheid te toetsen niet binnen één minuut te genereren zijn. Er zijn geen plausibele mogelijkheden om deze vragen te versimpelen zonder dat afgedaan wordt aan het toetsen van de nieuwe vaardigheid. Deze vragen zijn wel geschikt voor gebruik in de les en het toetsen van de gewenste nieuwe vaardigheden. Daarom kan gesteld worden dat het ontwerpdoel behaald is, ondanks dat ontwerpeis 8 niet gewaarborgd is.

6.2. Methode

Review van diagnostische vragen door het expert panel

In de methode is beschreven dat er een expert panel is gevraagd om het eerste ontwerp van de diagnostische vragen te reviewen en om hier feedback op te geven. Uiteindelijk is voor iedere vraag viermaal het feedbackformulier ingevuld. Het valt op dat de feedback zeer gevarieerd is maar soms ook tegenstrijdig. Voornamelijk bij het inschatten van de tijdsduur van vragen zijn in sommige gevallen verschillen van 3 minuten te vinden, wat erg veel is. Dit maakt het lastig om een goed beargumenteerde keuze te maken voor een specifieke tijdsduur bij iedere vraag. De gevarieerde feedback op de vraagstelling en de antwoordmogelijkheden vulden elkaar goed aan. Hier is veel van geleerd en op die manier zijn de vragen in het herontwerp van aanzienlijk hogere kwaliteit. Het zou fijn geweest zijn om de diagnostische vragen door meer experts te laten reviewen. Om dit te bewerkstelligen hadden meer mogelijke experts in een eerder stadium van het onderzoek benaderd moeten worden.

Het expert panel heeft een planning ontvangen waarin aan is gegeven wanneer de vragen toegestuurd zouden worden en wanneer de feedback verwacht werd. In deze planning is telkens een week opgenomen tussen het toesturen van de vragen en het ontvangen van de feedback. Dit is te weinig tijd om van alle benaderde experts feedback te ontvangen. Zij zijn immers zelf ook docenten en hebben een drukke planning met toetsweken, waarbij het geven van feedback op diagnostische vragen voor een afstudeeronderzoek niet de hoogste prioriteit heeft. Daarom is het beter om het expert panel meer tijd te geven voor het reviewen van de diagnostische vragen. Met die planning hadden wellicht ook meer experts gereageerd op het review verzoek.

De vragenlijst voor de experts, zoals zichtbaar in de methode van dit onderzoek, is met enige spoed geconstrueerd. Het was prettiger geweest om langer bij deze vragenlijst stil te staan en nog specifiekere feedback te vragen. Op die manier hadden meer ontwerpeisen door het expert panel gecontroleerd kunnen worden. De evaluatie van ontwerpeis 4 is bijvoorbeeld volledig gebaseerd op het inzicht van de auteurs. Feedback van het expert panel had hier kunnen helpen om de diagnostische vragen nog sterker te maken gedurende het herontwerp.

Tijdstip en frequentie van diagnostische vragen in de les

Uit het theoretisch kader bleek dat de vragen op verschillende momenten in de les gesteld konden worden, afhankelijk van het doel van de vraag. Gedurende de uitvoering zijn vijf vragen aan het begin van de les gesteld (1, 2, 6, 9 en 10) twee vragen in het midden van de les (vraag 5 en 7) en drie vragen aan het einde van de les (4, 8 en 11). Details over de uitvoering van de diagnostische vragen zijn zichtbaar in Tabel 16 in bijlage B.

Van de vijf vragen die aan het begin van de les gesteld zijn, zijn drie vragen gesteld met het doel om gebruik te maken van het testeffect en twee vragen met het doel om voorkennis te evalueren (Barton, 2020). Het gebruikmaken van het testeffect werkt prettig, omdat op die manier goed in kaart gebracht kan worden of leerlingen de lesstof van de voorgaande les(sen) nog scherp op het netvlies hebben, en of zij klaar zijn om verder te gaan met de nieuwe lesstof of dat de eerdere theorie nogmaals onder de aandacht gebracht moet worden. Het evalueren van voorkennis werkt ook goed, zo is vraag 1 (primitiveren met een machtsfunctie) gesteld voorafgaand aan de uitleg over het integreren van samengestelde machtsfuncties met de kettingregel en vraag 2 (gebruik van de hoofdstelling van integraalrekening) voorafgaand aan de uitleg over het berekenen van de oppervlakte van een vlakdeel tussen twee grafieken van functies. Dit geeft de docent meer vertrouwen en handvaten voor het behandelen van de nieuwe lesstof met de leerlingen. Ook geeft dit leerlingen een kapstok om de nieuw te vergaren kennis aan op te hangen. Het stellen van diagnostische vragen aan het begin van de les werkt prettig omdat leerlingen dan veel concentratie hebben en gemotiveerd zijn.

Het gebruik van diagnostische vragen in het midden van de les heeft als voordeel dat het een herstart stimuleert bij de leerlingen. Na het stellen van de vraag kan, mits de vraag door het merendeel correct beantwoord wordt, een nieuw onderwerp aangesneden worden (Barton, 2020). Het valt op dat na het stellen van de diagnostische vraag, leerlingen meer aandacht op kunnen brengen voor nieuwe theorie dan wanneer ze van het zelfstandig werken onderbroken worden om direct met een nieuw onderwerp te starten.

Er zijn ook drie vragen aan het eind van de les gesteld om te kijken of de leerdoelen behaald zijn (Barton, 2020). Dit werkte minder goed. Het valt op dat leerlingen aan het einde van de les moe of minder gefocust zijn en het lokaal willen verlaten, waardoor zij minder aandacht aan de vraag besteden. Dit resulteert vaak in minder goede antwoorden, zoals zichtbaar in Tabel 12 bij vraag 4 en 8, wat kan leiden tot een vertekend beeld van de daadwerkelijke situatie. Een oplossing zou kunnen zijn om de uitvoering te veranderen, wellicht door exittickets te gebruiken i.p.v. de witte ABCD-kaartjes met antwoordopties A t/m E.

In de meeste gevallen is er één vraag per les gesteld, m.u.v. twee lessen waarbij twee vragen per les gesteld zijn. Beide manieren zijn haalbaar, alhoewel het wel een drukkere les wordt door het stellen van twee diagnostische vragen. Hierbij dient de tijdsplanning goed in de gaten gehouden te worden en wordt ook van de leerlingen een actieve houding gevraagd.

Uitvoering van de diagnostische vragen in de les

Volgens het theoretisch kader zijn er verschillende manieren om diagnostische vragen te stellen. In de methode is beschreven dat er bij de klas waar integraalrekening behandeld wordt, gebruik wordt gemaakt van witte ABCD-kaartjes. Na uitvoering blijkt dat deze methode een aantal voor- en nadelen heeft.

- Een voordeel van deze methode is dat snel inzichtelijk gemaakt wordt welke antwoorden gegeven zijn waardoor de docent snel een oordeel kan vellen over het begrip van de leerstof dat de klas als geheel heeft (Wylie & William, 2006). De klas van uitvoering bestaat uit zestien leerlingen. Het zou kunnen dat het gebruik van witte ABCD-kaartjes onoverzichtelijker wordt wanneer deze methode in grotere klassen toegepast wordt.
- Een tweede voordeel is dat leerlingen niet bij de gehele klas kunnen spieken. Wanneer gevraagd wordt om in stilte een antwoord te formuleren kunnen ze niet met elkaar overleggen en zullen ze zelf over een antwoord na moeten denken. Op die manier is de kans groter dat de gegeven antwoorden oprecht zijn.
- Een nadeel bij deze methode is dat leerlingen, wanneer zij het antwoord (nog) niet weten als de denktijd om is, wel bij hun buurman of buurvrouw kunnen kijken welk kaartje zij pakken om omhoog te houden. Op die manier kunnen leerlingen wel bij hun directe buurman of buurvrouw afkijken. Het is daarom belangrijk dat leerlingen bij deze methode voldoende tijd hebben om zelf een antwoord te bedenken.
- Een ander nadeel van deze methode is dat wanneer de vragen aan het einde van de les gesteld worden, leerlingen zich er vanaf kunnen maken door niet meer na te denken over de vraag en een willekeurig kaartje omhoog kunnen houden. Wanneer bijvoorbeeld gebruik gemaakt wordt van exittickets, zou het kunnen dat leerlingen meer moeite steken in het beantwoorden van de vraag aan het einde van de les.
- Een laatste nadeel van deze methode is dat het verzamelen en uitdelen van de kaartjes zorgvuldig moet plaatsvinden, anders kost het veel tijd en moeite om de kaartsetjes opnieuw te sorteren voor toekomstig gebruik.

Ontwerpeis 2 geeft aan dat er bij iedere vraag een optie E beschikbaar is, waarbij leerlingen de mogelijkheid krijgen om zelf een juiste antwoord te formuleren wanneer zij denken dat het juiste antwoord niet tussen de opties A t/m D staat. In de praktijk blijkt dat leerlingen in de klas van uitvoering deze optie niet kiezen. Leerlingen kiezen deze optie van nature minder snel omdat ze verwachten dat het juiste antwoord er wel tussen staat. Daarom is het belangrijk om bij tijden gebruik te maken van optie E als het juiste antwoord. Zo blijven leerlingen scherp en zullen ze sneller geneigd zijn om optie E te kiezen als ze vermoeden dat het juiste antwoord niet tussen opties A t/m D staat. Dit is in de uitvoering niet tot uiting gekomen, daarom is het ook niet zeker of het gebruik van antwoordoptie E een goede toevoeging is aan de diagnostische vragen.

Ontwerpeis 8 geeft aan dat diagnostische vragen niet langer dan een minuut mogen duren. Dit betekent dat de beschikbare tijd voor de vraag ook bijgehouden is tijdens de uitvoering van de diagnostische vragen. De tijd is bijgehouden d.m.v. een timer plug-in van Powerpoint, wat een makkelijke en handige manier hiervoor is. Dit vereist wel dat gebruik gemaakt wordt van Powerpoint voor het uitvoeren van de diagnostische vragen. Een nadeel van deze is dat leerlingen gestrest kunnen raken bij het zien van de teruglopende timer waardoor zij hun focus verliezen, wat kan leiden tot gehaaste antwoorden en daarmee een vertekend beeld.

6.3. Resultaten

In het resultaten hoofdstuk zijn in Tabel 12 de antwoordfrequenties bij iedere diagnostische vraag weergegeven. Per vraag wordt besproken wat er ten grondslag zou kunnen liggen aan het ratio correcte antwoorden en de incorrecte antwoorden die door meer dan 25% van de leerlingen gekozen zijn, zoals zichtbaar in Tabel 13. Ook worden suggesties voor mogelijke vervolgacties aangedragen o.b.v. de veelgemaakte fouten en misvattingen.

Bij vraag 1 is door 31% van de klas het correcte antwoord gekozen. Alhoewel dit een van de makkelijkere vragen was uit de serie, is deze vraag ook aan het begin van het hoofdstuk gesteld, wanneer het thema integraalrekening net geïntroduceerd is. Dit zou een aanleiding kunnen zijn voor de verdeeldheid van de antwoorden, aangezien leerlingen nog niet goed bekend zijn met het nieuwe onderwerp. Zeker de hoge relatieve frequentie (38%) van optie D, waarbij de integratieconstante vergeten is bij het bepalen van de primitieve, suggereert dat leerlingen het primitiveren nog niet geautomatiseerd hebben. Naar aanleiding van deze diagnostische vraag is nogmaals stilgestaan bij de machtsregel en is laten zien dat zowel het differentiëren van $f(x) = x^2 + 3$ als $g(x) = x^2 + 4$ leidt tot de afgeleide $f'(x) = g'(x) = 2x$. Hiermee is getracht de relevantie aan te tonen van de integratieconstante. Er kan immers bij het primitiveren van de functie $f'(x) = g'(x) = 2x$ niet zonder extra informatie bepaald worden of dit leidt tot de functie $f(x)$ of $g(x)$. Daarom wordt altijd de integratieconstante c toegevoegd aan een primitieve.

Bij vraag 2 zijn uitsluitend antwoorden A en C gegeven. 54% van de klas heeft het correcte antwoord gegeven en 46% van de klas heeft de grenzen omgedraaid bij het opstellen van de integraal. Ook hier is n.a.v. de resultaten besloten om eerst opnieuw bij de hoofdstelling van de integraalrekening stil te staan alvorens te starten met de uitleg over het berekenen van de oppervlakte van een vlakdeel tussen twee grafieken van functies. Er is uitgelegd dat de kleinste (laagste) grens altijd als laagste ingevuld wordt achter de blokhaken en andersom dat de grootste (hoogste) grens het hoogste in wordt gevuld. Bij het uitwerken van een voorbeeld is benadrukt dat de primitieve waarbij de kleinste grens is ingevuld, afgetrokken wordt van de primitieve waarbij de grootste grens is ingevuld. Dit is vervolgens ook gevisualiseerd door te laten zien dat de oppervlakte van 0 tot de laagste grens afgetrokken wordt van de oppervlakte van 0 tot de hoogste grens om zo de gewenste oppervlakte tussen de twee grenzen te krijgen. Ook is het voorbeeld behandeld met twee negatieve grenzen, hier geldt namelijk hetzelfde.

Vraag 4 is door 27% van de klas goed beantwoord. Dit zou er mee te maken kunnen hebben dat deze vraag aan het einde van de les gesteld is, wanneer de leerlingen onrustig worden omdat het uur bijna afgelopen is. Anderzijds is het een lastige vraag, zeker wanneer er geen afbeelding aanwezig is van de situatie met de twee grafieken en leerlingen maar 30 seconden de tijd hebben om een antwoord te formuleren. Dit zal ook zeker een rol gespeeld hebben bij het geringe aantal correcte antwoorden. 47% van de klas heeft hier de functie $f(x)$ als bovenste functie gekozen en de lijn l als onderste functie. Dit kan gekomen zijn door het gebrek aan tijd i.c.m. de afwezigheid van een situatieschets. Los daarvan kan ook de formule zoals deze in het boek gegeven is een oorzaak zijn: $O(V) = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx$. Dit suggereert dat de functie $f(x)$ uit de diagnostische vraag als eerste ingevuld moet worden terwijl het er juist om gaat dat de leerling identificeert welke functies de bovenste en onderste zijn, ongeacht de naam van de functie. In de volgende les is deze formule gerectificeerd: $O(V) = \int_a^b (bovenste - onderste)\, dx$.

Vraag 5 is door 80% van de klas goed beantwoord, wat impliceert dat leerlingen het principe achter de kettingregel bij integreren begrijpen. Weliswaar was de gegeven functie een relatief simpele uit het spectrum van functies waarbij de kettingregel gebruikt moet worden bij het primitiveren. De machtsregel wordt namelijk als eerste behandeld in het boek en zal daarom het snelst geautomatiseerd zijn. Aan deze vraag is geen vervolgactie gekoppeld. Het zou interessant zijn om de vaardigheid primitiveren met de kettingregel nogmaals te toetsen met een andere functie, waarbij een andere primitiveerregel toegepast moet worden.

Vraag 6 is door 50% van de leerlingen goed beantwoord. De andere 50% heeft niet ingezien dat de integraal opgesplitst moet worden om de juiste oppervlakte te vinden. Hier is uitgebreid stilgestaan bij de tweede misvatting van Orton (1983) uit het theoretisch kader. Het voornaamste leerpunt voor de leerlingen hier was dat de x-as ook als de functie $y = 0$ beschouwd kan worden en dat dit bij een oppervlakte onder de x-as dus de bovenste functie is terwijl dit bij een oppervlakte boven de x-as de onderste functie is.

Bij vraag 7 heeft 50% van de klas het juiste antwoord gegeven. 29% is vergeten om de functie te primitiveren binnen de hoofdstelling van de integraalrekening. Bij benadering van de motivatie achter de antwoorden bleek dat leerlingen voornamelijk slordig zijn geweest door niet op de notatieverschillen tussen f en F te letten en dat er geen sprake was van een bewuste fout. Daarom is er niet uitgebreid stilgestaan bij deze fout.

Vraag 8 is slechts door 21% van de klas correct beantwoord. Daarnaast heeft 50% van de klas de formule voor de inhoud van het omwentelingslichaam verkeerd onthouden en $\left(g(x) - f(x)\right)^2$ i.p.v. $\left(g(x)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2$ binnen de integraal gebruikt. Hierdoor ontstaat het vermoeden dat het stellen van een diagnostische vraag aan het einde van de les echt afdoet aan de focus van de leerlingen. Daarnaast kan het ook zijn dat de formule nog niet bij alle leerlingen geland is en dat dit leidt tot deze fout. Los hiervan is gebleken dat leerlingen het wentelen om de x-as een lastig concept vinden omdat hier veel algebraïsche bewerkingen bij komen kijken.

Vraag 9 is door acht van de veertien leerlingen correct beantwoord. Geen van de andere antwoordopties is door meer dan 25% van de leerlingen gekozen. Leerlingen hebben slechts één minuut de tijd gehad om deze vraag te beantwoorden terwijl in het eerste ontwerp verscheidene stappen ondernomen moesten worden om tot het juiste antwoord te komen, zoals het inzicht welk vlakdeel om de y-as gewenteld kan worden, het berekenen van de cilinder inhoud en algebraïsche bewerkingen toepassen. Door het herontwerp en de tijdsduur van deze vraag te verlengen naar twee minuten worden wellicht meer correcte antwoorden gegeven.

Vraag 10 is door 53% van de klas correct beantwoord. 40% van de klas heeft een correcte integraal opgesteld voor de inhoud van de afgeknotte kegel, maar hebben deze gelijkgesteld aan de inhoud van de totale kegel i.p.v. de helft van deze inhoud. Toen dit is toegelicht bij de bespreking van de vraag, bleek dat veel leerlingen niet verder gekomen waren dan het opstellen van de integraal. Bij deze fout is niet uitgebreid stilgestaan. De verlenging van de tijdsduur van deze vraag biedt ruimte voor de leerlingen om deze fout te voorkomen.

Bij vraag 11 heeft 87% van de klas het goede antwoord gegeven. Deze vraag is aan het einde van de les gesteld waarin de booglengte behandeld is. De leerlingen hebben daarom nog niet de kans gehad om de formule voor de booglengte te memoriseren. Om deze reden is de formule voor de booglengte op het bord geschreven bij de vraag. Dit maakt de vraag een invulvraag, i.p.v. een nadenkvraag, de verwachting is dat hier het hoge aantal goede antwoorden vandaan komt. Er is verder niet uitgebreid stilgestaan bij de andere antwoordopties.

In het algemeen geldt bij de diagnostische vragen dat het belangrijk is om van tevoren in kaart te hebben welke typen fouten er gemaakt kunnen worden: conceptueel, procedureel of technisch

(Orton, 1983). Bij ieder type fout zou namelijk adequaat ingespeeld moeten worden. Bij de uitvoering van de diagnostische vragen is hier helaas geen aandacht aan besteed. Het zou kunnen lonen om bij procedurele fouten bijvoorbeeld meer in te spelen op het betreffende algoritme in de vervolgacties, terwijl het bij conceptuele fouten wellicht meer zin heeft om als vervolgactie in te gaan op de achterliggende theorie. Bij technische fouten zou per keer beoordeeld moeten worden wat een gepaste handeling is qua vervolgactie.

6.4. Kwaliteit en beperkingen van het onderzoek

Kwaliteit

Er is een eerste ontwerp gemaakt van twintig diagnostische vragen voor gebruik in de wiskundeles. De vragen zijn ontworpen door de auteurs met de ontwerpeisen als uitgangspunt. Deze ontwerpeisen zijn gebaseerd op de literatuur. De auteurs zijn docenten in opleiding met geringe ervaring in het lesgeven in het onderwijs. Om de kwaliteit van de vragen te bevorderen, zijn experts gevraagd om de vragen te evalueren en hier feedback op te geven. Verder zijn de vragen in de les uitgevoerd, waarmee de docent in opleiding nieuwe inzichten verkregen heeft om de vragen beter te maken. Dit heeft samen geleid tot het herontwerp zoals gepresenteerd in de resultaten. De vragen van het herontwerp zijn niet uitgevoerd in de praktijk. Hierdoor is er niet vastgesteld in hoeverre de kwaliteit van de diagnostische vragen verbeterd is in de praktijk. In het oorspronkelijke plan was het streven om eerst de feedback te verzamelen, toe te passen en vervolgens de herontworpen vragen uit te voeren in de klas. Hierdoor was er wel de mogelijkheid geweest om de kwaliteit van het herontwerp in de praktijk te beoordelen.

Zoals aangegeven in de methode, is het eerste ontwerp van de vragen eenmalig uitgevoerd bij één klas. Hier zijn antwoordfrequenties en bevindingen van de auteurs uitgekomen. In de discussie wordt ingegaan op de antwoordfrequenties en worden hiervoor mogelijke verklaringen aangedragen. Deze verklaringen zijn dus gebaseerd op één uitvoeringsmoment. Dat maakt de verklaringen niet algemeen geldend, hier dient rekening mee gehouden te worden bij het meenemen van de bevindingen voor de eigen lespraktijk.

Het feedbackformulier van de experts is vier keer ingevuld per vraag. Dit geeft aanleiding tot verbetering van de vraag, echter bleek deze feedback gevarieerd van aard. De verbeterpunten zijn regelmatig door een individu aangehaald, welke we vervolgens hebben toegepast. Echter zijn dit subjectieve oordelen waardoor het niet zeker is of het verbeterpunt toegevoegde waarde heeft. Wanneer hetzelfde verbeterpunt meermaals wordt aangedragen, dan is er meer grond om keuzes in het herontwerp te beargumenteren. Dit had bewerkstelligd kunnen worden door van meer experts feedback te krijgen.

In de evaluatie wordt toegelicht of het herontwerp voldoet aan de ontwerpeisen. Dit is grotendeels gebaseerd op de mening van de auteurs en experts. Echter dient hierbij rekening te worden gehouden dat dit subjectieve oordelen betreft. Dit zou er toe kunnen leiden dat andere experts een andere conclusie zouden trekken m.b.t. het behalen van het ontwerpdoel.

Beperkingen

Zoals benoemd in de discussie, was de periode voor feedbackverzameling niet realistisch. Dit had te maken met de lengte van de periode, namelijk één week, en de timing van de periode, namelijk rond de toetsweken op de middelbare school. Idealiter was er meer tijd geweest voor de feedbackverzameling, echter was dit niet mogelijk door de vastgestelde planning van het onderzoek voor de feedbackverzamelingsperiode. Een andere beperking na de feedbackverzamelingsperiode hierbij was dat lessen op de middelbare school voor het hele jaar vaststaan en de uitvoering hierdoor niet verplaatst kon worden.

Als tweede was er een beperking m.b.t. de uitvoering. Voor zowel de uitvoering van de vragen van differentiaal- en integraalrekening was er op moment van uitvoering één klas beschikbaar. Dit limiteert de hoeveelheid data die verzameld kan worden.

Er is gelimiteerde hoeveelheid literatuur te vinden omtrent specifieke misvattingen en veelgemaakte fouten gekoppeld aan de thema's differentiaal- en integraalrekening, die relevant zijn voor dit onderzoek. Dit heeft ertoe geleid dat er veel misvattingen en veelgemaakte fouten bedacht zijn door de auteurs, welke opnieuw voortkomen uit een subjectief oordeel. Daarbovenop is een tweede beperking de gelimiteerde ervaring van docenten in opleiding. Zij hebben het betreffende thema nog niet eerder gedoceerd, wat het lastig maakt om relevante misvattingen en veelgemaakte fouten te bedenken.

6.5. Aanbevelingen

Zijn diagnostische vragen een toevoeging aan de wiskunde les?

Ja. Het ontwerpen van diagnostische vragen maakt de docent bewust van mogelijke veelgemaakte fouten die leerlingen kunnen maken en alert op misvattingen die leerlingen kunnen hebben. Verder brengt de uitvoering van diagnostische vragen veelgemaakte fouten en misvattingen bij leerlingen aan het licht, die anders niet zo snel opgemerkt zouden worden wanneer leerlingen hier niet zelf mee komen of vragen bij stellen. Dit geeft de docent een snel overzicht van de gegeven antwoorden waarop het vervolg van de les gebaseerd kan worden.

Aanbevelingen m.b.t. de herontworpen diagnostische vragen bij integraalrekening

De elf herontworpen vragen zijn klaar voor gebruik in de wiskunde les bij de lesmethode Getal & Ruimte in vwo 5. Vraag 1, 2, 3 en 7 kunnen ingezet worden bij het toetsen van vaardigheden uit paragraaf 11.1 Primitieven en integralen. Vraag 4, 5 en 6 kunnen ingezet worden bij het toetsen van vaardigheden uit paragraaf 11.2 Oppervlakten. Vraag 8 en 9 kunnen ingezet worden bij paragraaf 11.3 Inhouden. Vraag 10 en 11 kunnen ingezet worden bij paragraaf 11.4 Toepassingen van integralen. Het wordt aangeraden om vraag 7 dan ook eerder te stellen in de lessenreeks, bij voorkeur tussen vraag 3 en 4, om zo alle vaardigheden uit paragraaf 11.1 te toetsen voordat gestart wordt met paragraaf 11.2. De rest van de vragen past qua volgorde goed bij de opbouw van het Getal & Ruimte boek. De vaardigheden m.b.t. het primitiveren zelf worden niet volledig gedekt door de diagnostische vragen. Voor de volledigheid zou nog een extra diagnostische vraag ontworpen kunnen worden waarbij ook de primitiveerregels getoetst worden die hier achterwege gelaten zijn, zoals het primitiveren van exponentiële of goniometrische functies. Ook qua toepassing zouden er nog twee extra diagnostische vragen toegevoegd kunnen worden aan de vragenserie. Deze zouden het berekenen van de inhoud van bolschijven of bolsegmenten en het verbanden tussen versnelling, snelheid en afstand kunnen toetsen. Na het toevoegen van deze drie diagnostische vragen zou de vragenserie alle theorieblokken uit hoofdstuk 11 van Getal & Ruimte beslaan. De suggesties voor vervolgacties bij vragen 1, 2, 4 en 6 uit de discussie kunnen gebruikt worden wanneer de benoemde misvattingen en veelgemaakte fouten uit Tabel 13 veelvuldig voorkomen. Verder heeft het toegevoegde waarde om te realiseren op welk type fout (conceptueel, procedureel en technisch) (Orton, 1983) er wordt ingegaan bij het bedenken van een passende vervolgactie. Als laatste wordt het aangeraden om de tijdsduur van iedere vraag aan te houden als richtlijn, maar dat hiervanaf geweken kan worden wanneer de situatie hierom vraagt, aangezien de gekozen tijdsduur niet sterk beargumenteerd is.

Aanbevelingen m.b.t. de uitvoering van diagnostische vragen in de les

Het gebruik van witte ABCD-kaartjes met de antwoordopties A t/m E werkt goed. Echter zou het tijd besparen wanneer de kaartsetjes bij binnenkomst aan de deur al uitgedeeld worden en bij vertrek ook weer netjes ingeleverd worden aan de deur. Verder moet er rekening meegehouden worden dat buren bij elkaar kunnen spieken doordat zij in sommige gevallen al kunnen zien van elkaar welk kaartje ze gaan opsteken voordat dat moment is aangebroken. Bij het stellen van een diagnostische vraag aan het einde van de les zouden, zoals benoemd in de discussie, beter exittickets gebruikt kunnen worden. Het gebruik van een timer om de tijd bij te houden werkt goed, of dit nu via een plug-in van Powerpoint gaat of via een horloge of een mobiele telefoon. Als laatste wordt het aangeraden om antwoordoptie E alleen te gebruiken bij de diagnostische vragen wanneer dit af en toe ook daadwerkelijk het juiste antwoord is, zodat leerlingen hier daadwerkelijk gebruik van maken. Anders is de toegevoegde waarde van optie E minimaal.

Aanbevelingen voor verder onderzoek

Mocht een vergelijkbaar onderzoek m.b.t. diagnostische vragen worden uitgevoerd door anderen, dan zijn daar een aantal aanbevelingen voor.

- Er wordt aangeraden om meer tijd te nemen voor de feedback verzameling en om een grotere groep aan experts te benaderen om zo meer feedback te verzamelen.
- Een alternatieve methode die aangeraden wordt voor het ontwerpen is als volgt: het eerste ontwerp laten reviewen door experts en deze feedback gebruiken om een herontwerp te maken. Dan kan dit herontwerp in meerdere klassen uitgevoerd worden.
- Een aangrenzend onderzoeksonderwerp is het uitvoeren van een effectiviteitsanalyse op het gebruik van diagnostische vragen. Hierbij is het interessant om naast het docentenperspectief ook het leerlingperspectief mee te nemen.
- Het zou waardevol kunnen zijn om verschillende methodes m.b.t. het stellen van diagnostische vragen in de les te vergelijken naast degenen in dit onderzoek.

7. Bibliografie

Barton, C. (2020). *Volgens Barton.* Uitgeverij Phronese.

Bezuidenhout, J., & Olivier, A. (2000). Students' conceptions of the integral. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 2* (pp. 73-80). Hiroshima: Hiroshima University.

Bloom, B. S. (1969). Some theoretical issues relating to educational evaluation. In R. W. Tyler, *Educational evaluation: New roles, new means. The 63rd yearbook of the National Society for the Study of Educaction, part 2* (pp. 26-50). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Cornelissen, J. (1994). *Aansluitingspoblemen met wiskunde bij eerstejaarsstudenten van de TUE.* Eindhoven: TU/e Eindhoven University of Technology.

Diagnostic Questions. (sd). *Diagnostic Questions*. diagnosticquestions.com. https://diagnosticquestions.com/

Diagnostische vragen. (sd). *Diagnostische vragen*. diagnostischevragen.nl. https://www.diagnostischevragen.nl/

Expertis Onderwijsadviseurs. (sd). *Zo stel je vragen waar je leerlingen echt beter van worden!* expertis.nl. https://expertis.nl/nieuwsoverzicht/zo-stel-je-vragen-waar-je-leerlingen-echt-beter-van-worden/

Foster, C., Woodhead, S., Barton, C., & Clark-Wilson, A. (2022). School students’ confidence when answering diagnostic questions online. *Educational Studies in Mathematics volume 109*, pp. 491-521.

Kiat, S. E. (2005). Analysis of Students' Difficulties in Solving Integration Problems. *The Mathematics Educator, 9*(1), 39-59.

Kneyber, R., Sluijsmans, D., Devid, V., & Wilde López, B. (2022). *Formatief handelen: van instrument naar ontwerp.* Uitgeverij Phronese.

Li, V. L., Julaihi, N. H., & Eng, T. H. (2017). Misconceptions and Errors in Learning Integral Calculus. *Asian Journal of University Education Vol. 13 (No. 1)*, 17-39.

Luneta, K., & Makonye, P. J. (2010). Learner errors and misconceptions in elementary analysis: a case study of a grade 12 class in South Africa. *Acta Didactica Napocensia v3 n3*, pp. 35-46.

McDermott, L. C., Rosenquist, M. L., & Van Zee, E. H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. *American Journal Physics 55 (6)*, pp. 503-513.

Muzangwa, J., & Chifamba, P. (2012). Analysis of errors and misconceptions in the learning of Calculus by undergraduate students. *Acta Didactica Naposcensia*, 1-10.

Orton, A. (1983). Student's Understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics Vol. 14 (No. 1)*, 1-18.

Prieto, M. C., Palma, L. O., Tobías, P. B., & León, F. M. (2019). Student Assessment of the Use of Kahoot in the Learning Process of Science and Mathematics. *Education Sciences*, 1-13.

Sabbe, E., & Lesage, E. (2012). *Meerkeuzetoetsen: praktische handleiding voor leerkrachten en doctenten.* Antwerpen: Garant.

Sapire, I., Shalem, Y., Wilson-Thompson, B., & Paulsen, R. (2016). Engaging with learners' errors when teaching mathematics. *Pythagoras - Journal of the Association for Mathematics Education of South Africa, 37*(1), 1-11. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v37i1.331

Schnepper, L. C., & McCoy, L. P. (2013). Analysis of Misconceptions in High School Mathematics. *Networks: An Online Journal for Teacher Research v15 issue 1 article 7*.

Sluijsmans, D. (2020). Toetsing als motor voor leren: naar succeservaringen voor alle leerlingen. *Remediaal 2020 - 2-3*, pp. 6-12.

van Ast, M., de Loor, O., & Spijkerboer, L. (2021). *Effectief leren, de docent als regisseur.* Groningen: Noordhoff.

Vyas, R., & Supe, A. (2008). Multiple choice questions: A literature review on the optimal number of options. *The National Medical Journal of India Vol. 21, No. 3*, pp. 130-133.

Wylie, E. C., & William, D. (2006). *Diagnostic questions: is there value in just one.* San Fransisco, CA: Annual Meeting of the National Council on Measurement in Education.

Yee, N. K., & Lam, T. T. (2008). Pre-university Students' Errors in Integration of Rational Functions and Implications for Classroom Teaching. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia, 31*(2), 100-116.

8. Bijlagen

8.1. Bijlage A: inhoud wiskunde B hoofdstukken 6 en 11 Getal & Ruimte

Tabel 14 – Inhoud wiskunde B hoofdstuk 6 Getal & Ruimte differentiaalrekening

Paragraaf	**Inhoud**
Voorkennis ''Afgeleide en raaklijn''	Definitie en regels bij de afgeleide (som-, verschil-, product- en quotiëntregel) Het opstellen van de formule van een raaklijn
6.1 ''Toppen en buigpunten''	Algebraïsch berekenen en aantonen van extreme waarden Buigpunten berekenen Het opstellen van de formule bij een buigraaklijn
6.2 ''De afgeleide van machtsfuncties''	Machtsregel met n een reëel getal
6.3 ''De kettingregel''	Afgeleide van een samengestelde functie Kettingregel gecombineerd met product- of quotiëntregel
6.4 ''Functies met parameters''	Raaklijnproblemen bij functies met een parameter Kromme door toppen Rakende grafieken Loodrecht snijdende grafieken

Tabel 15 – Inhoud wiskunde B hoofdstuk 11 Getal & Ruimte integraalrekening

Paragraaf	**Inhoud**
Voorkennis ''Herleiden''	Herleiden van machten Herleiden van afgeleiden Herleiden van functiewaarden
11.1 ''Primitieven en integralen''	Definitie van een primitieve functie Primitiveren en primitiveerregels Integralen en oppervlakte onder een grafiek berekenen
11.2 ''Oppervlakten''	Primitieven en de kettingregel Oppervlakte van een vlakdeel tussen grafieken
11.3 ''Inhouden''	De inhoud van een omwentelingslichaam Vlakdelen wentelen om de x-as Vlakdelen wentelen om de y-as
11.4 ''Toepassingen van integralen''	Kegel en bol Afgelegde weg, snelheid en versnelling Integralen numeriek benaderen Booglengte

8.2. Bijlage B: overzicht uitvoering diagnostische vragen

Tabel 16 – Onderwerp, doel, moment in de les en uitvoeringsdatum diagnostische vragen bij integraalrekening

Vraag	Onderwerp	Doel	Moment in de les	Uitvoeringsdatum
1	Primitiveren met machtsregel	Voorkennis evalueren	Begin	05-04-2024 2e uur
2	De oppervlakte onder een grafiek met de hoofdstelling van de integraalrekening	Voorkennis evalueren	Begin	10-04-2024 3e uur
3	Primitiveren zonder kettingregel	-	-	-
4	De oppervlakte van een vlakdeel tussen twee grafieken van functies	Inzicht in behaalde leerdoelen	Eind	10-04-2024 3e uur
5	Primitiveren met machtsregel en kettingregel	Geïnformeerde beslissing maken om verder te gaan	Midden	12-04-2024 2e uur
6	De oppervlakte van een vlakdeel onder en boven de x-as	Gebruikmaken van het test-effect	Begin	12-04-2024 5e uur
7	Een oppervlakte naar verhouding verdelen	Geïnformeerde beslissing maken om verder te gaan	Midden	17-04-2024 1e uur
8	De inhoud van een omwentelingslichaam (x-as)	Inzicht in behaalde leerdoelen	Eind	17-04-2024 3e uur
9	De inhoud van een omwentelingslichaam (y-as)	Gebruikmaken van het test-effect	Begin	26-04-2024 2e uur
10	Een inhoud naar verhouding verdelen	Gebruikmaken van het test-effect	Begin	26-04-2024 5e uur
11	De omtrek van een vlakdeel bepalen m.b.v. de booglengte	Inzicht in behaalde leerdoelen	Eind	26-04-2024 5e uur

8.3. Bijlage C: eerste ontwerp vragen

<u>Vraag 1: primitiveren met de machtsregel</u>

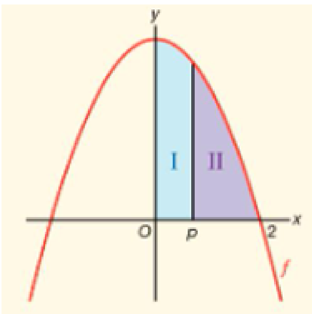
Gegeven een functie $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. Wat is de primitieve $F(x)$?

- A. $F(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}} + c$
  - De leerling heeft gedifferentieerd i.p.v. geïntegreerd.
- B. $F(x) = \frac{3}{4}x\sqrt{x} + c$
  - De leerling heeft geïntegreerd maar vermenigvuldigd met $\frac{3}{2}$ i.p.v. $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$.
- C. $F(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{x} + d$
  - Goed.
- D. $F(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{x}$
  - De leerling is de integratieconstante vergeten toe te voegen.
- E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

Doel: de leerling kan een functie met de machtsregel op juiste wijze primitiveren.	
Tijdsduur: 30 seconden	
A.	Veelgemaakte fout: de leerling heeft de functie gedifferentieërd i.p.v. geprimitiveerd.
B.	Veelgemaakte fout: de leerling primitiveert de functie maar zet de factor a voor de functie i.p.v. de factor $\frac{1}{a}$.
C.	Correct.
D.	Veelgemaakte fout: de leerling vergeet de integratieconstante toe te voegen.

<u>Vraag 2: een uitdrukking vinden om een oppervlakte onder een grafiek te berekenen</u>

Gegeven $f(x) = 4 - x^2$, welke vergelijking moet opgelost worden om $O(II)$ te vinden?



- A. $\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_p^2$
  - Goed.
- B. $\int_0^p 4x - x^2\, dx$
  - De leerling kiest de verkeerde oppervlakte.
- C. $\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_2^p$
  - De leerling draait de grenzen om.
- D. $[4x - x^3]_p^2$
  - De leerling past de machtsregel voor integreren verkeerd toe.
- E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

Doel: de leerling begrijpt de hoodstelling van de integraalrekening en kan deze toepassen om een oppervlakte te vinden.	
Tijdsduur: 30 seconden	
A.	Correct.
B.	Veelgemaakte fout: de leerling vult verkeerde grenzen in, in dit geval de grenzen 0 en p waarmee $O(I)$ bepaald wordt en niet $O(II)$.
C.	Veelgemaakte fout: de leerling vult de grenzen verkeerd om in.
D.	Veelgemaakte fout: de leerling vergeet dat bij het berekenen van een primitieve de factor $\frac{1}{a}$ toegevoegd moet worden.

Vraag 3: een uitdrukking vinden om de oppervlakte van een vlakdeel te berekenen.

Gegeven een functie $f(x) = 6 - \sqrt{10x}$ en een lijn $l: y = -x + 6$.
Welke expressie geeft de oppervlakte weer van het vlakdeel V dat ingesloten wordt door de grafiek van $f(x)$ en lijn l?

- A. $O(V) = \int_{-4}^{6} \left(x - \sqrt{10x}\right) dx$
  - De leerling kiest de y-waarden van de snijpunten van $f(x)$ en lijn l als grenzen en heeft daarnaast de lijn l van functie $f(x)$ afgetrokken i.p.v. andersom.
- B. $O(V) = \int_{-4}^{6} \left(\sqrt{10x} - x\right) dx$
  - De leerling kiest de y-waarden van de snijpunten van $f(x)$ en lijn l als grenzen.
- C. $O(V) = \int_{0}^{10} \left(x - \sqrt{10x}\right) dx$
  - De leerling heeft de lijn l van functie $f(x)$ afgetrokken i.p.v. andersom.
- D. $O(V) = \int_{0}^{10} \left(\sqrt{10x} - x\right) dx$
  - Goed.
- E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

Doel: de leerling kan de oppervlakte vinden tussen twee functies.	
Tijdsduur: 30 seconden	
A.	Misconceptie: de leerling kiest de y-waarden van de snijpunten tussen de twee functies als grenzen voor de integraalberekening. Daarnaast heeft de leerling de lijn l van functie $f(x)$ afgehaald i.p.v. andersom.
B.	Misconceptie: de leerling kiest de y-waarden van de snijpunten tussen de twee functies als grenzen voor de integraalberekening.
C.	Veelgemaakte fout: De leerling heeft de lijn l van functie $f(x)$ afgehaald.
D.	Correct.

Vraag 4: primitiveren met de machtsregel en de kettingregel.

Gegeven een functie $f(x) = 4\sqrt{4x-1}$. Wat is de primitieve $F(x)$?

- A. $F(x) = \frac{2}{3}(4x-1)\sqrt{4x-1} + c$
  - Goed.
- B. $F(x) = 10\frac{2}{3}(4x-1)\sqrt{4x-1} + c$
  - De leerling past de kettingregel toe als bij het differentiëren.
- C. $F(x) = 2\frac{2}{3}(4x-1)\sqrt{4x-1} + c$
  - De leerling past de kettingregel niet toe.
- D. $F(x) = 1\frac{1}{2}(4x-1)\sqrt{4x-1} + c$
  - De leerling heeft geïntegreerd maar vermenigvuldigd met $\frac{3}{2}$ i.p.v. $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$.
- E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

Doel: de leerling kan een functie primitiveren waarbij de kettingregel toegepast moet worden.	
Tijdsduur: 30 seconden	
A.	Correct.
B.	Veelgemaakte fout: bij het toepassen van de kettingregel vergeet de leerling de factor $\frac{1}{4}$ te gebruiken. In plaats daarvan vermenigvuldigt de leerling met een factor 4, als bij het differentiëren.
C.	Veelgemaakte fout: de leerling vergeet de kettingregel toe te passen en dus de factor $\frac{1}{4}$.
D.	Veelgemaakte fout: de leerling primitiveert de functie maar zet de factor a voor de functie i.p.v. de factor $\frac{1}{a}$. De leerling heeft wel de kettingregel goed toegepast.

Vraag 5: een oppervlakte deels boven en onder de x-as berekenen.

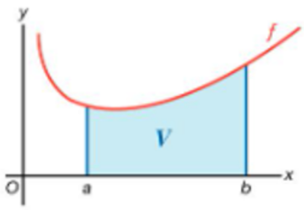
Gegeven een functie $f(x) = x^3$. Wat is de oppervlakte tussen de grafiek van $f(x)$ en x-as binnen grenzen $x = -2$ en $x = 2$?

- A. 0
  - Leerling integreert, maar ziet niet in dat oppervlakten positief zijn.
- B. 8
  - Goed.
- C. 16
  - Leerling vergeet te primitiveren en vult de grenzen in in $f(x)$.
- D. 24
  - Leerling ziet in dat oppervlakten positief zijn, maar differentieërt.
- E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

Doel: de leerling kan de netto oppervlakte vinden m.b.v. de hoofdstelling van de integraalrekening.	
Tijdsduur: 60 seconden	
A.	Misconceptie: de leerling trekt de oppervlakten van elkaar af en komt daardoor op 0 uit ($4 - 4 = 0$).
B.	Correct.
C.	Veelgemaakte fout: de leerling vult de grenzen in de functie $f(x)$ in i.p.v. eerst deze functie te integreren.
D.	Veelgemaakte fout: de leerling differentieert de functie en komt zo op $3x^2$. Vervolgens telt de leerling de oppervlakten goed bij elkaar op maar komt zo bij $12 + 12 = 24$.

Vraag 6: een grens vinden om de oppervlakte van een vlakdeel naar een verhouding te verdelen

Gegeven een functie $f(x)$, welke vergelijking moet opgelost worden om lijn $x = p$ te vinden waarvoor geldt dat $V_1 = V_2$ met V_1 begrensd door $x = a$ en $x = p$ en V_2 begrensd door $x = p$ en $x = b$?

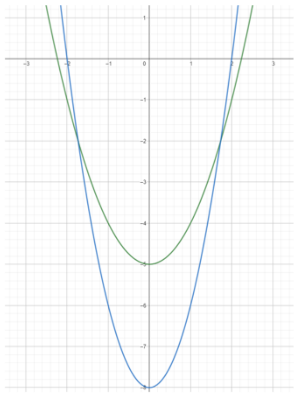


- A. $p = \frac{a+b}{2}$
  - De leerling denkt dat de functie constant is en kiest voor p het midden van het interval $[a, b]$.
- B. $\int_a^p f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx$
  - Goed.
- C. $\frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx$
  - De leerling denkt dat de oppervlakte gevonden moet worden.
- D. $[f(x)]_a^p = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx$
  - De leerling vergeet dat de functie eerst geprimitiveerd moet worden.
- E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

Doel: de leerling is in staat om een grens te vinden waarmee de oppervlakte onder een grafiek verdeeld kan worden in twee oppervlakten met een bepaalde verhouding.	
Tijdsduur: 60 seconden	
A.	Misconceptie: de leerling denkt dat de oppervlakten evenredig zijn met de afstanden van de bijbehorende intervallen (wat alleen het geval is bij een constante functie) en kiest daarom het midden van het interval als p.
B.	Correct.
C.	Veelgemaakte fout: de leerling denkt dat de totale oppervlakte gevonden moet worden.
D.	Veelgemaakte fout: de leerling vergeet dat bij de stap van het integraalteken naar de blokhaken geprimitiveerd moet worden.

Vraag 7: een vlakdeel wentelen om de x-as en hier de inhoud bij berekenen.

Gegeven zijn functies $f(x) = x^2 - 5$ en $g(x) = 2x^2 - 8$. Welke expressie geeft de inhoud L weer, die ontstaat als het vlak V, ingesloten door de functies $f(x)$ in het groen en $g(x)$ in het blauw, wentelt om de x-as?



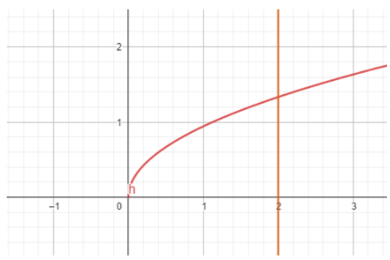
- A. $I(L) = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^4 - 6x^2 + 9)dx$
  - De leerling neemt $(g(x) - f(x))^2$ i.p.v. $(g(x))^2 - (f(x))^2$.
- B. $I(L) = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (-3x^4 + 22x^2 - 39)dx$
  - De leerling kiest de hoogste functie i.p.v. de buitenste functie.
- C. $I(L) = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)dx$
  - De leerling vergeet de kwadraten om de functies te zetten.
- D. $I(L) = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3x^4 - 22x^2 + 39)dx$
  - Goed.
- E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

Doel: de leerling kan de formule toepassen om de inhoud van een omwentelingslichaam van een vlakdeel, dat om de x-as gewenteld is, te bepalen en herkent daarbij de binnenste en buitenste functie.	
Tijdsduur: 60 seconden	
A.	Veelgemaakte fout: de leerling trekt eerst de functies van elkaar af en neemt hier vervolgens het kwadraat van, i.p.v. andersom.
B.	Misconceptie: de leerling kiest de functie aan de bovenkant van het vlakdeel in plaats van de functie aan de buitenkant van het vlakdeel en ziet dus niet in dat de buitenste functie de grootste inhoud genereert en dat de kleinste inhoud daarvanaf getrokken moet worden.
C.	Veelgemaakte fout: de leerling vergeet het kwadraat om de functies $f(x)$ en $g(x)$ te zetten.
D.	Correct.

Vraag 8: een vlakdeel wentelen om de y-as en hier de inhoud bij berekenen.

Gegeven een functie $h(x) = \frac{2}{3}\sqrt{2x}$. Beschouw het vlakdeel V, ingesloten door $f(x)$, de x-as, en de lijn $x = 2$. Welke expressie geeft de inhoud weer van het lichaam L wanneer vlakdeel V om de y-as wentelt?

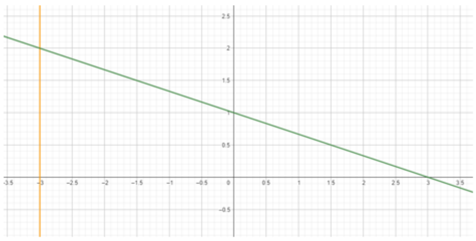
- A. $I(L) = 5\frac{1}{3}\pi - \pi \int_0^{1\frac{1}{3}} \left(1\frac{1}{8}y^2\right) dy$
  - De leerling is het kwadraat om de functie $x = \cdots$ vergeten.
- B. $I(L) = 5\frac{1}{3}\pi - \pi \int_0^{1\frac{1}{3}} \left(1\frac{17}{64}y^4\right) dy$
  - Goed.
- C. $I(L) = \pi \int_0^{1\frac{1}{3}} \left(1\frac{17}{64}y^4\right) dy$
  - De leerling wil vlakdeel V direct om de y-as wentelen.
- D. $I(L) = \pi \int_0^{2} \left(\frac{8}{9}x\right) dx$
  - De leerling heeft vlakdeel V om de x-as gewenteld.
- E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...



Doel: de leerling kan de formule toepassen om de inhoud van een omwentelingslichaam van een vlakdeel, dat om de y-as gewenteld is, te bepalen en heeft het inzicht dat het gevraagde vlakdeel niet direct te berekenen is maar dat ook de inhoud van de cilinder nodig is.	
Tijdsduur: 60 seconden	
A.	Veelgemaakte fout: de leerling vergeet het kwadraat om de omgeschreven functie te zetten ($x = \frac{9}{8}y^2$).
B.	Correct.
C.	Misconceptie: de leerling denkt dat de inhoud van het omwentelingslichaam van vlakdeel V direct gevonden kan worden door het om de y-as te wentelen. Echter wordt de inhoud bepaald van het omwentelingslichaam van het vlakdeel dat ingesloten wordt door de lijn $y = 1\frac{1}{3}$, de y-as en $h(x)$.
D.	Veelgemaakte fout: de leerling wentelt het vlakdeel V om de x-as en berekent de inhoud van dat omwentelingslichaam.

Vraag 9: het splitsen van een kegel in twee delen met even grote inhoud

Beschouw het vlakdeel V ingesloten door de x-as, de lijnen $x = p$, $x = -3$ en de functie $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$. Welke vergelijking moet opgelost worden om p te vinden waarvoor geldt dat de inhoud van de afgeknotte kegel en het bovenste deel van de kegel gelijk zijn?

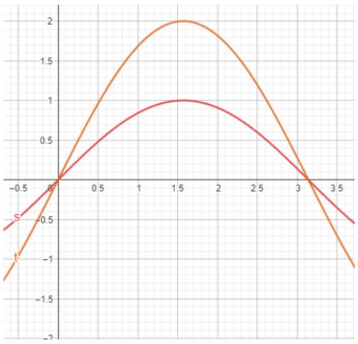


- A. $\pi \int_{-3}^{p} \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1\right) dx = 4\pi$
  - Goed.
- B. $\pi \int_{p}^{3} \left(-\frac{1}{3}x + 1\right)^2 dx = 8\pi$
  - De leerling kiest de volledige kegelinhoud.
- C. $\int_{p}^{3} \left(-\frac{1}{3}x + 1\right)^2 dx = 4\pi$
  - De leerling vergeet dat π voor de integraal hoort.
- D. $\pi \int_{-3}^{p} \left(-\frac{1}{3}x + 1\right) dx = 4\pi$
  - De leerling vergeet dat de functie in de integraal in het kwadraat moet.
- E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

Doel: de leerling kan de formule toepassen om de inhoud van een (deel van een) kegel te bepalen.	
Tijdsduur: 60 seconden	
A.	Correct.
B.	Veelgemaakte fout: de leerling stelt de inhoud van het gekozen kegelstuk gelijk aan de inhoud van de totale kegel.
C.	Veelgemaakte fout: de leerling vergeet dat er een π voor de integraal hoort.
D.	Veelgemaakte fout: de leerling vergeet dat de functie $f(x)$ in het kwadraat hoort binnen de integraal.

Vraag 10: het bepalen van de omtrek van een vlakdeel m.b.v. de booglengte.

Gegeven zijn de functies $s(x) = \sin(x)$ en $t(x) = 2\sin(x)$. Wat is de omtrek van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door $s(x)$ en $t(x)$?



- A. $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2(x)}\,dx + \int_0^{\pi} \sqrt{1+2\cos^2(x)}\,dx$
  - De leerling ziet niet in dat $\left(t'(x)\right)^2 = (2\cos(x))^2$.
- B. $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2(x)}\,dx + \int_0^{\pi} \sqrt{1+4\cos^2(x)}\,dx$
  - Goed.
- C. $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin^2(x)}\,dx + \int_0^{\pi} \sqrt{1+4\sin^2(x)}\,dx$
  - De leerling heeft niet de afgeleide van $f(x)$ genomen.
- D. $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos(x)}\,dx + \int_0^{\pi} \sqrt{1+2\cos(x)}\,dx$
  - De leerling heeft niet het kwadraat van $f'(x)$ genomen.
- E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

Doel: de leerling kan de formule toepassen om de booglengte van een functie te bepalen.	
Tijdsduur: 60 seconden	
A.	Misconceptie: de leerling denkt dat bij $\left(t'(x)\right)^2$ alleen de term met een x erin in het kwadraat genomen moet worden en niet de gehele functie.
B.	Correct.
C.	Veelgemaakte fout: de leerling vergeet dat de afgeleide van $f(x)$ genomen moet worden binnen de wortel in de integraal.
D.	Veelgemaakte fout: de leerling vergeet dat de functie $f'(x)$ in het kwadraat hoort binnen de wortel in de integraal.

8.4. Bijlage D: feedback expert panel

<u>Vraag 1: primitiveren met de machtsregel</u>

Commentaar bij misvattingen, veelgemaakte fouten en antwoordmogelijkheden

- In dit geval is de exponent bij $x^{1,5}$ positief, maar als deze negatief is kunnen leerlingen ook de fout maken dat ze er per ongeluk 1 aftrekken in plaats van bij op tellen.
- Waarom is de integratieconstante bij mogelijkheid A en B allebei c genoemd, en waarom is deze bij mogelijkheid C dan d genoemd?
- Bij C: de integratieconstante moet ook hier c heten. En ik zou A met D verwisselen.
- Misschien handig om $x^{1,5}$ ergens te laten staan. Is een klein foutje, maar wordt veel gemaakt.
- Waarom +d en niet +c bij optie C

Commentaar bij vraagstelling

- In getal en ruimte worden deze vragen specifiek gesteld als: Wat zijn de primitieven (dus meervoud) van f(x)? Dit omdat f(x) oneindig veel primitieven heeft door de integratieconstante.
- ‘Gegeven de functie’ in plaats van ‘Gegeven een functie’

Is de vraag binnen één minuut te beantwoorden?

- 4x ja

<u>Vraag 2: een uitdrukking vinden om een oppervlakte onder een grafiek te berekenen</u>

Commentaar bij misvattingen, veelgemaakte fouten en antwoordmogelijkheden

- Ja. Bij B worden twee fouten gemaakt. Naastdat de verkeerde oppervlakte berekend wordt, moeten er ook haakjes om 4x-x^2. De integraal wordt namelijk over de hele functie f genomen. Dus daar zou je een aparte antwoordmogelijkheid voor bij kunnen maken.
- Bij B : ‘het verkeerde oppervlak’ in plaats van ‘de verkeerde oppervlakte’
- Zou er geen leerling zijn die differentieert in plaats van integreert?
- Haakjes om 4x – x^2

Commentaar bij vraagstelling

- Dit is geen vergelijking. De vraag moet zijn: Hoe bereken je de oppervlakte O_II? Daarnaast: Bij antwoord B wordt de eerste stap van de berekening gegeven. Bij de andere antwoorden zijn het steeds vervolgstappen. Wat wordt er van de leerlingen verwacht aan te geven?
- ‘uitdrukking’ in plaats van ‘vergelijking’
- ‘’Welke berekening moet opgelost worden om O(II) te vinden?’’

Is de vraag binnen één minuut te beantwoorden?

- 3x ja
- Nee in 2 minuten

Vraag 3: een uitdrukking vinden om de oppervlakte van een vlakdeel te berekenen.

Commentaar bij misvattingen, veelgemaakte fouten en antwoordmogelijkheden

- Wij vinden antwoordmogelijkheid A niet goed, want deze bevat twee gemaakte fouten die beiden apart terugkomen bij antwoordmogelijkheid B en C. Wat is dan de toegevoegde waarde van antwoordmogelijkheid A?
- Onjuistheden bij het primitiveren komen niet echt in de antwoorden terug. De twee misconcepties bij A splitsen.

Commentaar bij vraagstelling

- Het woord expressie wordt door ons nooit gebruikt. Wellicht komt het voor jullie van het Engels (expression)? Wij noemen dit wel eens een uitdrukking.
- Totaal niet eenduidig.

Is de vraag binnen één minuut te beantwoorden?

- Nee, want hier is een schets nodig en dat kost tijd.
- 2x ja
- Nee, in 4 minuten.

Vraag 4: primitiveren met de machtsregel en de kettingregel.

Commentaar bij misvattingen, veelgemaakte fouten en antwoordmogelijkheden

Commentaar bij vraagstelling

- Dezelfde als een eerdere vraag, over dat f(x) meerdere primitieven F(x) heeft.
- ‘Gegeven de functie’ in plaats van ‘Gegeven een functie’

Is de vraag binnen één minuut te beantwoorden?

- Nee, deze kan langer duren. Minstens 3 minuten denken wij.
- 2x ja
- Nee, in 4 minuten

Vraag 5: een oppervlakte deels boven en onder de x-as berekenen.

Commentaar bij misvattingen, veelgemaakte fouten en antwoordmogelijkheden

Commentaar bij vraagstelling

- ‘Gegeven de functie’ in plaats van ‘Gegeven een functie’
  ‘tussen de grenzen’ in plaats van ‘binnen de grenzen’ (?)
- Weet je zeker dat je hier de antwoorden belangrijker vindt dan de berekening? Je zou ook de berekening voor de oppervlakte in je antwoorden kunnen zetten

Is de vraag binnen één minuut te beantwoorden?

- Nee, minstens 3 minuten.
- 2x ja
- Nee, in 3 minuten.

<u>Vraag 6: een grens vinden om de oppervlakte van een vlakdeel naar een verhouding te verdelen</u>

Commentaar bij misvattingen, veelgemaakte fouten en antwoordmogelijkheden

- A, C, en D komen eigenlijk (zo goed als) nooit voor. C is ook geen vergelijking, dus zou die ook niet als antwoordmogelijkheid gegeven moeten worden. Bij dit onderdeel bestaan volgens ons eigenlijk nauwelijks misconcepties.

Commentaar bij vraagstelling

- ‘ Gegeven een functie f. Welke vergelijking/uitdrukking moet worden opgelost om de lijn x=p te vinden die het blauw gearceerde oppervlak V in twee gelijke oppervlaktes verdeelt?’
- Ik vind de vraagstelling hier wat onduidelijk. Zou de schets niet wat aangepast kunnen worden zodat je kan zien wat de situatie is?
- Lijn x=p vervangen door p

Is de vraag binnen één minuut te beantwoorden?

- 3x ja
- Nee, in 2 minuten

<u>Vraag 7: een vlakdeel wentelen om de x-as en hier de inhoud bij berekenen.</u>

Commentaar bij misvattingen, veelgemaakte fouten en antwoordmogelijkheden

- Ik zou de algebraïsche bewerkingen niet uitvoeren in de antwoordmogelijkheden. Je krijgt dan:

$$I(L) = \pi \cdot \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2-5)^2 - (2x^2-8)^2 \, dx$$
$$I(L) = \pi \cdot \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left((x^2-5) - (2x^2-8)\right)^2 dx$$
$$I(L) = \pi \cdot \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2-5) - (2x^2-8) \, dx$$
$$I(L) = \pi \cdot \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (2x^2-8)^2 - (x^2-5)^2 dx$$

Commentaar bij vraagstelling

- Het is handig om een V in het figuur te plaatsen.
- De vraagstelling is niet eenduidig. Het moet zijn het begrensde vlakdeel V (of je moet in de tekening een V zetten).

Is de vraag binnen één minuut te beantwoorden?

- Met alleen het opstellen van de integraal, 5 minuten.
- 3 minuten.
- 5 minuten.
- Een paar minuten.

<u>Vraag 8: een vlakdeel wentelen om de y-as en hier de inhoud bij berekenen.</u>

Commentaar bij misvattingen, veelgemaakte fouten en antwoordmogelijkheden

- Ik zou beginnen met het antwoord waar het lichaam om de x-as gewenteld wordt. Nu geven A en B eigenlijk al weg dat dit niet de bedoeling is.
- Kies een eenvoudiger functie, zodat een leerling onmiddellijk weet wat de inverse is, dus bijvoorbeeld $y = \sqrt{x}$ en dus $x = y^2$.
  Ook hier zou ik de algebraïsche vaardigheden niet uitvoeren, maar de niet-herleide vorm laten staan.

Commentaar bij vraagstelling

- Ja de vraagstelling is eenduidig. Handig om een V in het vlakdeel te plaatsen.
- Neen, het moet zijn 'grafiek van h(x)' ipv f(x). Ook in antwoord C moet staan grafiek van h(x) ipv h(x). Plaats een V in de tekening.

Is de vraag binnen één minuut te beantwoorden?

- 5 minuten
- 4 minuten
- 6 a 7 minuten.
- Een paar minuten

<u>Vraag 9: het splitsen van een kegel in twee delen met even grote inhoud</u>

Commentaar bij misvattingen, veelgemaakte fouten en antwoordmogelijkheden

- Je gaat hier wat meer op basale fouten in. Ik mis geen misconcepties, maar ben wel bang dat de misconcepties die hier behandeld worden al zijn behandeld door voorgaande vragen. De fout dat π voor de integraal moet, is bij de vragen hiervoor niet teruggekomen. Ik zou die fout dan bij de eerste integraal terug laten komen. Leerlingen gaan die fout hier niet meer maken namelijk. Ik zie dat jullie verschillende waarden voor de grenzen gebruiken, maar hier worden geen fouten bij gezet. Hebben deze andere waarden nog een doel?
- Het verbaast me dat jullie hier de π vergeten als mogelijkheid kiezen, terwijl jullie dat in de eerste twee vragen niet deden. Dit is inderdaad iets dat wel fout gaat, maar of het een misconceptie is, weet ik niet. Het is vooral slordigheid, vermoed ik. Waarom kiezen jullie ervoor om in antwoordmogelijkheid 1 de haakjes weg te werken en in de antwoordenmogelijkheden niet. Ik zou het nergens doen. Dat scheelt tijd. Hetzelfde zou ik doen met de inhoud van de kegel. Gewoon de berekening laten staan. Waarom kiezen jullie ervoor om niet elke keer dezelfde integratiegrenzen te kiezen. Dat werkt hier verwarrend. Leerlingen zullen daar over na gaan denken, terwijl dat volgens mij niet jullie bedoeling is. Zorg voor kleine verschillen in de antwoordmogelijkheden en ook alleen zaken die in de misconcepties terugkomen.

- stel int p tot 3 gelijk aan int -3 tot p als het om andersoortige inhoudsverhoudingen gaat.

Commentaar bij vraagstelling

- X = -3 aan figuur toevoegen.
- Neen, verre van eenduidig. Ten eerste moet je aangeven dat $-3 < p < 3$ anders is het onduidelijk. Wederom moet je spreken over de grafiek van de functie. De integrand zou ik in antwoord A dezelfde nemen als in B en C.
- Ik zou diagnostische vragen inzetten bij het checken van basisvaardigheden. Dit is voor mij een opgave in de categorie probleem oplossen en daardoor niet erg geschikt. Het is veel te ingewikkeld.

Is de vraag binnen één minuut te beantwoorden?

- 5 minuten
- 3 minuten
- 3 minuten
- Meerdere minuten

<u>Vraag 10: het bepalen van de omtrek van een vlakdeel m.b.v. de booglengte.</u>

Commentaar bij misvattingen, veelgemaakte fouten en antwoordmogelijkheden

- Zou er geen leerling zijn die per ongeluk met de oppervlakte aan de haal gaat?
- Ik vraag me af of er hier sprake is van misconcepties. Het gaat meer om het onthouden van de formule. Het verkeerd kwadrateren door de 2 te vergeten te kwadrateren is wel een misconceptie, maar heeft niets met dit onderwerp te maken.

Commentaar bij vraagstelling

- Ja, V toevoegen aan het vlakdeel.
- Toevoegen voor het vraagteken: voor $0 < x < \pi$
- Dit behoort niet de examenstof, dus ik zou deze vraag niet gebruiken.

Is de vraag binnen één minuut te beantwoorden?

- 5 minuten.
- 2 minuten
- 4 minuten
- Enkele minuten

8.5. Bijlage E: onderbouwing herontwerp

Vraag 1: primitiveren met de machtsregel

Ik heb ervoor gekozen om antwoordmogelijkheden A en D te verwisselen. Het vergeten om de integratieconstante toe te voegen is een veelgemaakte fout (Kiat, 2005), maar die zal minder snel voorkomen wanneer leerlingen eerst andere antwoordmogelijkheden zien waarbij deze wel is toegevoegd. Daarom heb ik ervoor gekozen om dit antwoord vooraan te plaatsen. Ook heb ik de integratieconstante d veranderd naar c. Het leek me initieël goed dat leerlingen beseffen dat de integratieconstante een willekeurige letter kan zijn. Echter, wanneer een leerling daarom niet antwoordmogelijkheid C kiest, kan ik a.d.h.v. de antwoorden niet weten welke leerlingen dit niet inzien. Verder is de vraagstelling aangepast n.a.v. de feedback van het expert panel.

De tijdsduur van 30 seconden lijkt prima, aangezien iedere leerling antwoord heeft kunnen geven en het expert panel ook aangeeft dat de vraag binnen een minuut te beantwoorden is.

Het idee om $x^{1,5}$ als antwoordmogelijkheid te geven heb ik niet meegenomen omdat dit strict gezien ook een correct antwoord is. Dat leerlingen het antwoord in dezelfde vorm moeten geven als de gegeven functie vind ik hier minder relevant om te toetsen en zou wat mij betreft niet in lijn zijn met ontwerpeis 6, omdat de randzaken dan onnodig moeilijk worden gemaakt. De suggestie om een exponent te kiezen die negatief is, vind ik erg goed. Echter worden er dan meerdere nieuwe vaardigheden getoetst en wordt ontwerpeis 7 dan niet gewaarborgd. Ik heb een aparte diagnostische vraag (zie vraag 11 in eerste ontwerp en vraag 3 in herontwerp) ontworpen voor een negatieve exponent, die gebruikt kan worden wanneer het primitiveren m.b.v. de machtsregel voor positieve exponenten als voorkennis beschouwd wordt.

Vraag 2: een uitdrukking vinden om een oppervlakte onder een grafiek te berekenen

Met behulp van de feedback van het expert panel is de vraagstelling aangepast. Verder is antwoordmogelijkheid B aangepast. Het kiezen van de verkeerde oppervlakte is namelijk geen gevolg van een wiskundige, maar een begrijpend leesfout. Los daarvan heeft geen enkele leerling dit antwoord gekozen, dus die fout komt in de klas van uitvoering ook niet voor. De suggestie van een expert dat leerlingen in het begin differentiëren en integreren door elkaar halen lijkt mij een meer voordehandliggende gedachtegang en wordt ook bevestigd door Kiat (2005). Daarom is antwoordmogelijkheid B zodanig aangepast dat een leerling die per ongeluk differentieërt i.p.v. integreert dit antwoord zal kiezen.

Vraag 3: een uitdrukking vinden om de oppervlakte van een vlakdeel te berekenen.

De vraagstelling is o.b.v. de feedback van het expert panel aangepast om de leesbaarheid te verbeteren. Verder kost het veel tijd om deze vraag te beantwoorden aangezien eerst een schets gemaakt dient te worden van de situatie. Dit zorgt er ook voor dat je als docent niet zeker kan weten of leerlingen die antwoordoptie A of C kiezen bewust de lijn l van functie $f(x)$ aftrekken of dat zij niet weten welke van deze twee de bovenste en onderste zijn. Om deze redenen is er een afbeelding van de situatie toegevoegd aan de vraag. Het berekenen van de snijpunten is vereiste voorkennis en het bepalen van de uitdrukking die in de integraal moet komen te staan is een nieuwe vaardigheid. Daarom is 30 seconden niet voldoende voor het beantwoorden van deze vraag. 60 seconden lijkt een betere tijdsduur voor deze vraag, twee van de vier experts geven dit ook aan. Onjuistheden bij het primitiveren komen in deze vraag niet aan bod, maar het opstellen van een integraal is op zichzelf ook een vaardigheid die leerlingen moeten beheersen, daarom is er besloten om hier niets aan te veranderen. Antwoordmogelijkheid A is inderdaad een combinatie van fouten die ook al in antwoordmogelijkheden B en C aan bod komen. Daarom is er voor gekozen om een nieuwe antwoordmogelijkheid A te introduceren. Deze is gebaseerd op het optellen van de twee functies i.p.v. het van elkaar afhalen van de twee functies. Er zou ook voor gekozen kunnen worden om de grenzen 0 en 10 te verwisselen bij antwoordmogelijkheid A, maar aangezien dit al getoetst werd in de tweede diagnostische vraag, lijkt dit een betere keuze.

Vraag 4: primitiveren met de machtsregel en de kettingregel.

Bij deze diagnostische vraag is de vraagstelling aangepast o.b.v. feedback van het expert panel. Eén minuut zou volgens de helft van het expert panel wel volstaan en volgens de andere helft niet. Daarom is ervoor gekozen om de tijdsduur van 30 naar 60 seconden te verlengen. Veel leerlingen hadden deze vraag goed, wellicht dat ervoor gekozen kan worden om een iets moeilijkere functie te kiezen, bijvoorbeeld met een negatieve gebroken exponent. Dit zou echter afdoen aan het toetsen van de nieuwe vaardigheid integreren m.b.v. de kettingregel en is daarom tegenstrijdig met ontwerpeis 6. Er is voor gekozen om dit niet mee te nemen in het herontwerp.

Vraag 5: een oppervlakte deels boven en onder de x-as berekenen.

Bij deze vraag is uitsluitend de vraagstelling aangepast voor de leesbaarheid. Er is bewust voor gekozen om geen afbeelding toe te voegen bij deze vraag aangezien de leerling dan makkelijk een schatting kan maken van de oppervlakte terwijl ik als docent wil toetsen of de leerling in staat is om te integreren en inziet dat de oppervlakte onder de x-as ook positief is. De tijdsduur is ook één minuut gebleven omdat de functie hier een standaardvorm betreft.

Vraag 6: een grens vinden om de oppervlakte van een vlakdeel naar een verhouding te verdelen

De vraagstelling is aangepast a.d.h.v. de gegeven suggesties door het expert panel. Ook is de afbeelding verduidelijkt door p en vlakdelen V_1 en V_2 toe te voegen. De tijdsduur is niet aangepast aangezien de meerderheid van de experts denkt dat de vraag binnen één minuut is uit te voeren en ik hier zelf ook geen problemen mee heb ervaren tijdens de uitvoering. Ik ben het ermee eens dat antwoordmogelijkheid C vergezocht en geen misvattingen of veelgemaakte fout is. Het blijkt echter wel dat leerlingen daadwerkelijk wel voor optie C hebben gekozen. Aangezien antwoordmogelijkheid C meer de begrijpend leesvaardigheid toetst dan wiskundige vaardigheden, heb ik ervoor gekozen om het goede antwoord anders te formuleren. I.p.v. V_1 gelijk te stellen aan de helft van V, kies ik ervoor om V_1 gelijk te stellen aan V_2. Dat biedt de mogelijkheid om bij C een nieuwe veelgemaakte fout als antwoordmogelijkheid aan te bieden, namelijk het verwisselen van de grenzen (Cornelissen, 1994). Antwoordmogelijkheden B en C worden omgewisseld, zodat leerlingen in ieder geval het antwoord met de omgedraaide grenzen overwegen.

Vraag 7: een vlakdeel wentelen om de x-as en hier de inhoud bij berekenen.

De vraagstelling is enigszins aangepast en daarbij is de letter V toegevoegd aan het vlakdeel in de afbeelding, om duidelijker te maken welk vlakdeel bedoeld wordt. De schatting van het expert panel is dat de vraag een aantal minuten kost om te beantwoorden. Aangezien ontwerpeis 8 aangeeft dat de vraag binnen één minuut te beantwoorden moet zijn, is ervoor gekozen om de vraag te versimpelen. Hierbij is de suggestie uit het expert panel gebruikt om de algebraïsche bewerkingen buiten beschouwing te laten. Dit is ook in lijn met ontwerpeis 6, die aangeeft dat de randzaken eenvoudig gehouden moeten worden. De algebraïsche vaardigheden worden hier als voorkennis beschouwd. Echter is de diagnostische vraag er niet op gericht om algebraïsche vaardigheden te toetsen, maar vaardigheden bij integraalrekening. Bij de vernieuwde antwoordmogelijkheden zijn de achterliggende misvattingen en veelgemaakte fouten nog steeds van toepassing. De uitdrukkingen zijn aangepast zodat uitsluitend nagedacht hoeft te worden over de binnenste en buitenste functie en wat de formule is voor de inhoud van een omwentelingslichaam maar geen algebraïsche bewerkingen aan bod komen. Ondanks de versimpelingen, zal de vraag alsnog veel inzicht en nadenken van leerlingen vereisen. Daarom is ervoor gekozen om de tijdsduur van deze vraag bij te stellen naar twee minuten.

<u>Vraag 8: een vlakdeel wentelen om de y-as en hier de inhoud bij berekenen.</u>

Er is voor gekozen om de vraagstelling a.d.h.v. de feedback van het expert panel aan te passen. Verder is de letter V toegevoegd aan de afbeelding om het vlakdeel aan te duiden. Ook is de suggestie meegenomen om het wentelen om de x-as als eerste antwoordmogelijkheid te plaatsen. Anders wordt inderdaad gesuggereerd dat dit niet de bedoeling is. Omdat verwacht wordt dat het lang duurt om deze vraag te beantwoorden is de algebraïsche vaardigheid achterwege gelaten. I.p.v. het berekenen van de kwadraten, zijn de antwoordmogelijkheden nu als $(\dots)^2$ beschreven. Toch moet er voor deze vraag nog steeds veel berekend worden, zoals de grenzen en de totale inhoud van de cilinder. Daarom is er voor gekozen om de tijdsduur aan te passen naar 2 minuten. Hiermee voldoet de vraag niet meer aan ontwerpeis 8. Het is nog steeds een interessante vraag die belangrijke misvattingen en veelgemaakte fouten aan het licht brengt, daarom blijft deze vraag behouden.

<u>Vraag 9: het splitsen van een kegel in twee delen met even grote inhoud</u>

De vraagstelling en de figuur zijn aangepast m.b.v. de gegeven feedback door het expert panel. Ter verduidelijking is het label $x = -3$ toegevoegd aan de figuur en is de leesbaarheid van de vraagstelling verbeterd. Verder zijn de antwoordopties zodanig aangepast dat de algebraïsche bewerkingen die uitgevoerd dienden te worden door de leerlingen achterwege zijn gelaten. Op deze manier wordt gefocusd op de nieuwe vaardigheid van het opstellen van een integraal om een grens te vinden die de kegel in een bepaalde inhoudsverhouding verdeelt. Dit is lijn met ontwerpeis 6, namelijk dat de randzaken simpel gehouden worden en dus de benodigde voorkennis geminimaliseerd wordt. Ook is ervoor gekozen om 4π te vervangen door $\frac{1}{2} * 8\pi$. Zo zal het voor de leerlingen duidelijker zijn dat dit antwoord de helft van de inhoud van de kegel voorstelt. Ook de grenzen zijn alemaal aangepast naar -3 en p om verwarring bij de leerlingen te voorkomen. De antwoordmogelijkheid waarbij π vergeten wordt is verplaatst van C naar A , om te voorkomen dat leerlingen het goede antwoord eerst zien en daardoor deze optie niet meer overwegen. Tweemaal is het commentaar naar voren gekomen dat het niet logisch is dat deze veelgemaakte fout pas bij de derde diagnostische vraag over inhouden berekenen naar voren komt. Ik sluit me hier bij aan, echter zie ik in de twee vragen hiervoor geen mogelijkheden om deze antwoordmogelijkheid toe te voegen aangezien de antwoorden daar allemaal al misvattingen en veelvoorkomende fouten representeren. De tijdsduur van deze vraag zal omhoog aangepast moeten worden, kijkende naar de schattingen van het expert panel. De vraag is nu echter wel versimpeld, daarom zal de nieuwe tijdsduur 2 minuten betreffen. Dit is een middenweg tussen de gestelde 1 minuut en de adviezen.

Vraag 10: het bepalen van de omtrek van een vlakdeel m.b.v. de booglengte.

Bij deze diagnostische vraag is de vraagstelling aangepast zodat deze wiskundig correct is en is de letter V toegevoegd om in de figuur om het betreffende vlakdeel te verduidelijken. Ondanks de suggesties van het expert panel dat één minuut niet zal volstaan om deze vraag te beantwoorden hadden de leerlingen hier klaarblijkelijk geen moeite mee en hebben ze ook het correcte antwoord gevonden. Daarom wordt de tijdsduur van deze vraag iets omhoog aangepast, naar twee minuten. Hiermee voldoet deze vraag niet meer aan ontwerpeis 8. Wel is het zo dat deze vraag voornamelijk beroep doet op het onthouden van de formule van de booglengte, terwijl die nu juist gegeven zal worden wanneer de booglengte terugkomt op het schoolexamen. Verder komen er in deze vraag geen veelgemaakte fouten of misvattingen aan bod die te maken hebben met vaardigheden omtrent integraalrekening. Wegens deze redenen is ervoor gekozen om deze diagnostische vraag als extra elfde vraag toe te voegen aan de set van tien diagnostische vragen. Er is dan ook een nieuwe diagnostische vraag opgesteld die meer ingaat op misvattingen en veelgemaakte fouten bij de nieuwe vaardigheden omtrent het primitiveren zelf, zoals genoemd bij de onderbouwing van vraag 1. In het herontwerp is deze vraag te vinden als vraag 3.