DIAGNOSTISCHE VRAGEN (BARTON) IN DE WISKUNDELES

Ontwerponderzoek bij differentiaalrekening

University of Twente

Student: Elise Holubek
Studievak: Onderzoek van Onderwijs (10 EC)
Schoolvak: wiskunde
Begeleiders: T.J.M. Coenen & S. Firing-Pennings

Voorwoord

In dit verslag presenteer ik de resultaten van van mijn afstudeeronderzoek voor de master *Educatie en Communicatie in de Bètawetenschappen* aan de Universiteit Twente.

Het onderzoek heet ‘’Diagnostische vragen (Barton) in de wiskundeles – Ontwerponderzoek bij differentiaalrekening’’. In dit verslag presenteer ik tien diagnostische vragen die door docenten gebruikt kunnen worden in de les. Hiermee kunnen snel en inzichtelijk misvattingen en veelgemaakte fouten van leerlingen bij het thema differentiaalrekening geïdentificeerd worden. De doelgroep van dit afstudeeronderzoek zijn collega studenten, collega docenten en onderzoekers in het onderwijswerkveld. Enige wiskundige achtergrondkennis is noodzakelijk om de bevindingen in dit afstudeeronderzoek volledig te begrijpen.

Ik ben dankbaar voor de kans om een onderzoek uit te kunnen voeren dat bijdraagt aan het verbeteren van de lespraktijk van docenten op de middelbare school. Hierbij wil ik graag Susan Firing-Pennings en Tom Coenen bedanken voor de begeleiding tijdens het onderzoek. Ook wil ik mijn collega Walter Winkel bedanken voor de samenwerking gedurende het onderzoek, aangezien hij een parallelonderzoek m.b.t. integraalrekening heeft uitgevoerd. Ook wil ik Aafke Elschot, Bram Leferink en de leerlingen van vwo 4 van het Bonhoeffer College bedanken. Jullie hulp heeft de uitvoering van de diagnostische vragen mogelijk gemaakt. Tot slot wil ik het expert panel bedanken voor het feeback leveren op de diagnostische vragen. Dit heeft mijn onderzoek goed geholpen.

Hopelijk zullen lezers de inhoud van dit onderzoek nuttig vinden en mag het waardevol zijn voor toekomstig onderzoek.

Samenvatting

Dit ontwerponderzoek heeft als onderzoeksdoel: **Diagnostische vragen ontwerpen a.d.h.v. opgestelde ontwerpeisen voor gebruik in de vwo 4/5 wiskunde B les bij differentiaal- en integraalrekening.** De acht ontwerpeisen zijn a.d.h.v. literatuur opgesteld in het theoretisch kader. De methode bij dit onderzoek bestaat uit vier fasen: een eerste ontwerp van de diagnostische vragen, review van expert panel op het eerste ontwerp, uitvoering van het eerste ontwerp in de klas en, o.b.v. de review van het expert panel en de uitvoering in de klas, een herontwerp. De resultaten bevatten tien herontworpen diagnostische vragen voor gebruik in de wiskunde B les bij het thema differentiaalrekening. Daarnaast zijn opmerkelijke frequenties, van antwoorden van leerlingen op diagnostische vragen, geanalyseerd. Uit evaluatie van het herontwerp, a.d.h.v. de ontwerpeisen, volgt dat het ontwerpdoel behaald is. Concluderend, diagnostische vragen zijn een aanbeveling voor gebruik in de les, aangezien veelgemaakte fouten en misvattingen snel en efficiënt inzichtelijk gemaakt kunnen worden.

Inhoudsopgave

1. Inleiding

Goed onderwijs verzorgen begint met leerlingen de lesstof te laten begrijpen en op den duur te laten toepassen. Om leerlingen de lesstof te laten begrijpen is een goede uitleg nodig, maar ook goede ondersteuning gedurende het zelfstandig werken. Deze ondersteuning vereist veel inspanning en tijd van docenten. Inspanning kan geleverd worden door enthousiaste docenten, maar de beschikbare tijd om leerlingen individueel te ondersteunen is voor alle docenten gelimiteerd. Deze limitaties worden opgelegd door de hoeveelheid lesuren die leerlingen toegewezen krijgen per vak maar ook door de andere activiteiten die gedurende de lesuren plaats moeten vinden, zoals het geven van klassikale uitleg. Door de gelimiteerde tijd voor individuele ondersteuning, kan het voorkomen dat bepaalde leerlingen de lesstof minder goed begrijpen en hierdoor uiteindelijk minder goed presteren op school. De identificatie van lastige leerstof en knelpunten van de leerlingen kan een goed startpunt leveren voor het bieden van individuele ondersteuning, echter kan deze identificatie voor zowel leraar als leerling veel tijd in beslag nemen. Dit heeft te maken met het aantal leerlingen dat in de klas zit en met verschillen tussen leerlingen, zoals de manier van communiceren. De ene leerling zal concreet en uit zichzelf aangeven welke stappen in een berekening hij of zij lastig vindt of niet begrijpt, terwijl de andere leerling erg onduidelijk is in het aangeven wat hij of zij niet begrijpt of überhaupt niets durft te zeggen of vragen. Als docent wordt daarop ingespeeld door o.a. bij leerlingen langs te lopen en te vragen of alle stof duidelijk is of dat zij tegen opdrachten aanlopen.

Als docent streven we er naar om iedere leerling voldoende te ondersteunen bij hun persoonlijke leerproces, maar dat komt niet altijd tot uiting in de les. De vereisten die horen bij het identificeren en behandelen van fouten bij leerlingen overschrijden namelijk vaak de capaciteiten van docenten. Docenten slagen er bijvoorbeeld niet altijd in om grip te krijgen op de aard van de fouten van de leerling (Sapire et al., 2016). Daarom zoeken we een manier waarop docenten snel en efficiënt in kaart kunnen brengen welke fouten door welke leerlingen gemaakt worden en welke misvattingen meerdere leerlingen hebben. Dit kan resulteren in betere en efficiëntere begeleiding van leerlingen. Ook komt hierdoor meer tijd beschikbaar voor andere lesactiviteiten, zoals een vakoverstijgend project of een praktische opdracht. Deze lesactiviteiten kunnen ten goede komen van de motivatie en de resultaten van de leerlingen.

Het snel en efficiënt in kaart brengen van knelpunten en lastige leerstof kan worden bevorderd door formatief te handelen in de les. Formatief handelen vormt namelijk de brug tussen onderwijzen en leren, door als docent de leerlingen actief te betrekken in de les om zo informatie te verzamelen waar de leerling staat ten opzichte van de gewenste doelen en vast te stellen wat er nodig is om de leerlingen te ondersteunen in het bereiken van de leerdoelen (Sluijsmans, 2020). Een voorbeeld hiervan is het stellen van diagnostische vragen. Diagnostische vragen zijn meerkeuzevragen, ontworpen om de fouten en misvattingen van leerlingen te identificeren en te begrijpen op een efficiente en accurate manier (Barton, 2020) (Wylie & William, 2006). De Engelse wiskunde docent Craig Barton heeft zich hierin verdiept en concrete handvaten gegeven om dit toe te passen in de wiskundeles op verschillende niveaus en voor verschillende wiskundige thema's (Barton, 2020).

De diagnostische vragen zijn toepasbaar bij verschillende onderwerpen in de wiskunde, zo ook bij het aanleren van de basisbeginselen van differentiaal- en integraalrekening. Aangezien deze lesstof bij de Calculusvakken op de technische opleidingen terugkomt is dit een relevant wiskundig concept om diagnostische vragen bij te ontwerpen. Dit leidt tot het ontwerpdoel van dit onderzoek:
Diagnostische vragen ontwerpen a.d.h.v. opgestelde ontwerpeisen voor gebruik in de vwo 4/5 wiskunde B les bij differentiaal- en integraalrekening.

In dit onderzoek is een theoretisch kader opgesteld waar alle relevante begrippen voor dit onderzoek behandeld worden. Daarbij wordt theorie aangehaald uit de literatuur waaruit ontwerpeisen voor de diagnostische vragen volgen. Ook worden hier mogelijke misvattingen en veelgemaakte fouten beschreven. Vervolgens wordt de methode beschreven die in dit onderzoek gehanteerd wordt, bestaande uit vier stappen: eerste ontwerp, review, uitvoering, herontwerp. Na de methode worden de resultaten, namelijk de herontworpen diagnostische vragen, weergegeven. De diagnostische vragen omvatten een vraagstelling antwoordmogelijkheden. De antwoordmogelijkheden zullen gebaseerd zijn op verwachte misvattingen en veelgemaakte fouten bij leerlingen. Het ontwerpdoel zal na de resultaten geëvalueerd worden, m.b.v. de opgestelde ontwerpeisen. Tot slot volgen een conclusie, discussie en aanbevelingen o.b.v. dit onderzoek.

Er is sprake van een parallel onderzoek. Het verslag van Elise Holubek gaat in op diagnostische vragen opgesteld voor het onderwerp differentiaalrekening en het verslag van Walter Winkel gaat in op diagnostische vragen opgesteld voor het onderwerp integraalrekening. De verslagen zullen overlappen wat betreft inleiding, theoretisch kader en methode. De resultaten, evaluatie, conclusie en discussie zullen verschillen wat betreft inhoud.

2. Theoretisch kader

Voor het uitvoeren van het onderzoek en het opstellen van de ontwerpeisen worden eerst een aantal relevante begrippen uitgelegd a.d.h.v. literatuur, die de ontwerpeisen en/of het onderzoek in zijn algemeen ondersteunen. Vervolgens wordt de toepassing van diagnostische vragen behandeld. Hier zal in meer detail gekeken worden naar de mogelijke doelen bij diagnostische vragen, de bijbehorende momenten van vragen stellen en de manier waarop antwoorden verzameld worden. Daarna worden mogelijke misvattingen en veelgemaakte fouten aangehaald uit de literatuur die toepasselijk kunnen zijn voor de inhoud van hoofdstuk 6 (differentiaalrekening) en hoofdstuk 11 (integraalrekening) uit Getal & Ruimte vwo wiskunde B. Tot slot zijn m.b.v. de relevante begrippen en literatuur ontwerpeisen opgesteld voor het ontwerp van diagnostische vragen.

2.1. Definities en begrippen

Formatief handelen

Zoals benoemd in de inleiding, is het belangrijk om snel en efficiënt in kaart te kunnen brengen wat lastige leerstof is en waar de knelpunten zitten. Formatief handelen is een didactisch proces, wat je kortcyclisch inzet als onderdeel van je lessen, om deze werkelijk zinvol en effectief te maken (Kneyber et al., 2022). Volgens Bloom (1969) is het doel van formatief handelen het geven van feedback en aanwijzingen op elk niveau binnen het onderwijs-leerproces. Barton (2020) geeft aan dat formatief handelen gaat om reageren in het moment. Het draait om het verzamelen van informatie over het begrip van leerlingen op de meest efficiënte manier en daarop gebaseerd beslissingen maken. Succesvolle formatieve evaluatie kan ons helpen om problemen te identificeren en deze in het hier en nu effectief en efficiënt op te lossen, wat aansluit bij de benoemde doelstelling aan het begin van deze paragraaf.

Diagnostische vragen

Diagnostische vragen zijn ontworpen om de knelpunten van leerlingen te identificeren en te begrijpen op een efficiënte en accurate manier (Barton, 2020). Een diagnostische vraag is een meerkeuzevraag met één correct antwoord en drie incorrecte antwoorden. Ieder incorrect antwoord bevat een veelgemaakte fout of misvatting. Een leerling geeft antwoord door één van de antwoordopties te kiezen. Foster et al. (2022) geven aan dat er daarnaast een leeg tekstvak beschikbaar is voor de leerling om een toelichting te geven op hun gekozen antwoord. Diagnostische vragen worden gebruikt om feiten, vaardigheden of concepten te beoordelen. De vragen zijn in het bijzonder geschikt om feiten te herhalen of simpele vaardigheden te toetsen. Echter, als de vragen goed ontworpen zijn, kunnen ze ook gebruikt worden om vaardigheden te beoordelen die uit meerdere stappen bestaan, door een enkele stap binnen deze vaardigheid te isoleren. De diagnostische vraag geeft de docent waardevolle informatie, die precies weergeeft waar in het proces een leerling moeilijkheden ervaart. Foster et al. (2022) zeggen dat diagnostische vragen zijn ontworpen met de intentie dat leerlingen niet langer dan een minuut bezig zijn om hun antwoord te formuleren. Als een feitjes- of vaardigheidsvraag langer dan een minuut duurt om te beantwoorden, dan is het waarschijnlijk dat een leerling meerdere deelstappen moet doorlopen, waardoor het lastig kan zijn om per antwoordmogelijkheid direct te zien welke misvatting hieraan ten grondslag ligt. Diagnostische vragen kunnen ook gebruikt worden om conceptueel begrip te toetsen, waarbij het langer kan duren om een antwoord te selecteren doordat leerlingen nadenken over verscheidene voorbeelden en non-voorbeelden om tot hun eindantwoord te komen (Foster et al., 2022). Dit kan resulteren in diagnostische vragen met een langere tijdsduur.

Misvattingen en veelgemaakte fouten
De antwoordmogelijkheden van de diagnostische vragen zijn gebaseerd op misvattingen en veelgemaakte fouten (Barton, 2020). Volgens Barton (2020) zijn misvattingen een gevolg van foutieve overtuigingen en incomplete kennis over bepaalde concepten. Misvattingen kunnen de verwerving van nieuwe kennis in de weg zitten. Dezelfde misvattingen duiken voortduren weer op bij leerlingen. Fouten daarentegen zijn eenmalig, meestal in de vorm van een rekenfout door slordigheid of cognitieve overbelasting. Veelgemaakte fouten volgen vaak uit slordigheid, ontbrekende wiskundige basisvaardigheden of verkeerde toepassing van een algoritme (Li et al., 2017). Volgens Muzangwa & Chifamba (2012) ontstaat er een misvatting wanneer een leerling gelooft in een concept dat objectief fout is. Het uitdagende aan misvattingen is dat het lastig is om misvattingen op te lossen, omdat het foutieve concept diep geworteld zit in het cognitief schema.

Dubbelzinnige vragen
Een belangrijk criterium bij het opstellen van diagnostische vragen is dat een vraag niet goed te beantwoorden moet zijn door een leerling die een misvatting in zijn of haar hoofd heeft. Een dergelijke vraag heet een dubbelzinnige vraag. Dit is een vraag waarbij verschillende manieren mogelijk zijn om aan het juiste antwoord te komen, maar slechts één hiervan de juiste is. Dubbelzinnige vragen kunnen leiden tot overgeneralisaties en misvattingen die vrijwel onmogelijk af te leren zijn bij leerlingen (Barton, 2020), daarom moet dubbelzinnigheid voorkomen worden.

Voorkennis en nieuwe vaardigheden
In dit onderzoek wordt onderscheid gemaakt tussen voorkennis en nieuwe vaardigheden. De nieuwe vaardigheden die aangeleerd worden vereisen voorkennis, die leerlingen al horen te bezitten. Volgens Barton (2020) en Foster et al. (2022) is het van belang om niet meer dan één nieuwe vaardigheid te toetsen met een diagnostische vraag. Het kan voorkomen dat bij het toetsen van een nieuwe vaardigheid, ook voorkennis toegepast dient te worden. Neem als voorbeeld het differentiëren van de functie $f(x) = 4x^3$ in een vwo 4 klas. Het toepassen van de machtsregel wordt hier als nieuwe vaardigheid verondersteld, terwijl het vermenigvuldigen van de factor met de exponent, dus $4 \cdot 3 = 12$, als voorkennis wordt gezien.

2.2. Toepassing van diagnostische vragen

Tijdstip van diagnostische vragen in de les
Een diagnostische vraag kan op verschillende momenten in de les gesteld worden, afhankelijk van het doel dat de vraag dient. Een diagnostische vraag kan aan het begin van de les ingezet worden om de volgende redenen (Barton, 2020):

1. Voorkennis evalueren
2. Langetermijngeheugen van leerlingen activeren
3. Alvast op nieuwe stof voorbereiden
4. Gebruikmaken van het testeffect (leerstof die al eerder is behandeld)
5. Gebruikmaken van het pretesteffect (leerstof die nog niet eerder behandeld is)

Een diagnostische vraag kan ook gedurende de les gesteld worden om als docent een geïnformeerde beslissing te maken of het juiste moment is aangebroken om met nieuwe leerstof aan de slag te gaan (Barton, 2020). Vaak is dit het geval wanneer de meeste leerlingen het vorige deel van de leerstof onder controle hebben en in kaart is gebracht bij welke leerlingen dit nog niet het geval is. Dit wordt getoetst a.d.h.v. de diagnostische vraag.

Diagnostische vragen kunnen ook aan het einde van de les ingezet worden. Op deze manier kan snel en accuraat inzicht verkregen worden m.b.t. het behalen van de leerdoelen door de leerlingen om te bepalen wat het startpunt zal zijn van de volgende les (Barton, 2020).

Uitvoering van diagnostische vragen in de les

Er zijn naast het moment van vragen ook verschillende manieren om de diagnostische vragen te stellen. Daarbij is het belangrijk dat de frequenties van oprechte antwoorden makkelijk en snel inzichtelijk gemaakt kunnen worden voor de docent (Wylie & William, 2006). Oprechte antwoorden zijn antwoorden die leerlingen zelf bedacht hebben. Leerlingen moeten dus ook niet bij elkaar af kunnen kijken. Barton (2020) stelt de volgende manieren voor:

- Stemmen in stilte waarbij het aantal vingers dat opgestoken wordt correspondeert met de antwoordmogelijkheden ($A = 1$, $B = 2$, etc.). Dit is een methode die altijd gebruikt kan worden en geen technologie vereist. Echter is het de vraag in welke mate deze antwoorden oprecht zullen zijn, aangezien het makkelijk is om van antwoord te wisselen op deze manier
- Het gebruik van wisbordjes. Leerlingen noteren hun antwoord op het wisbordje en houden deze omhoog wanneer hierom gevraagd wordt. Dit is een goede manier om het denken van leerlingen uit te beelden en leerlingen kunnen hun antwoord meteen wegvegen, wat er voor zorgt dat leerlingen met minder zelfvertrouwen bereidwilliger zijn om mee te doen.
- Het gebruik van exittickets. Hierbij krijgen de leerlingen een papiertje waarop ze de vraag en de antwoordmogelijkheden te zien krijgen. Ze kruisen het juiste antwoord aan en leveren deze in bij de docent wanneer zij het lokaal verlaten. Het is zowel makkelijk uitvoerbaar voor de docent als voor de leerling. De docent kan deze kaartjes makkelijk nakijken en de leerling kan het antwoord gemakkelijk invullen op het kaartje.

Er zijn nog naast de suggesties van Barton (2020) meer manieren om diagnostische vragen te stellen in de les. Verschillende manieren die verschillende mogelijkheden bieden en bezwaren hebben. Voor het onderzoek zijn de volgende manieren functioneel:

- Kahoot kan gebruikt worden om meerkeuzevragen te laten beantwoorden door leerlingen. Het blijkt dat (online) spellen en competitieve elementen leerlingparticipatie bevorderen (Prieto et al., 2019). Daarmee zou dit een motiverende en geschikte tool kunnen zijn om diagnostische vragen mee af te nemen in de les. Leerlingen moeten hiervoor beschikking hebben tot een mobiel apparaat tijdens het afnemen van de vragen. Bij het gebruik van Kahoot is het van belang dat leerlingen echt op hetzelfde moment stemmen op hun antwoord. Wanneer dit niet gebeurt kan een leerling wachten tot degene naast hem of haar stemt en dit antwoord overnemen waardoor de docent onoprechte antwoorden krijgt en daarmee een vertekend beeld van de mate waarin de klas de getoetste nieuwe vaardigheid beheerst.
- Het gebruik van ABCD-kaartjes waarbij op elk kaartje de letters A, B, C of D, corresponderend met de antwoordmogelijkheden, staan (Wylie & William, 2006) of kleurenkaartjes waarbij ieder antwoordmogelijkheid met een kleur is aangeduid (Expertis Onderwijsadviseurs, n.d.). Hiermee kan je direct zien welke leerling welk antwoord heeft gegeven zodra de klas gezamenlijk hun keuzes kenbaar maakt, wat een belangrijke voorwaarde is voor de docent (Wylie & William, 2006). Bij deze kaartjes krijgen de leerlingen tijd om na te denken over hun antwoord en wanneer de docent het aangeeft, moeten alle leerlingen tegelijkertijd hun gekozen antwoord omhoog houden. ABCD-kaarten kunnen goed ingezet worden bij meerkeuzevragen waarbij de antwoordmogelijkheden zijn gebaseerd op veelvoorkomende misvattingen (Expertis Onderwijsadviseurs, n.d.).

Anderzijds, kleurenkaartjes geven het snelst een beeld van de antwoordfrequenties aan de docent. Echter hoort hier ook weer een nadeel bij: leerlingen kunnen makkelijk van elkaar zien wie waarop gestemd heeft en daardoor van kaartje wisselen, wat resulteert in onoprechte antwoorden. Dit kan het zelfvertrouwen en bereidwilligheid om mee te doen negatief beïnvloeden (Barton, 2020).

Naast het tijdstip van vragen en de manier van antwoord verzamelen, speelt ook de duratie van de vraag een rol. Onder de duratie van de vraag wordt de tijd verstaan die leerlingen nodig hebben om de vraag te lezen en te begrijpen en de tijd die ze nodig hebben om een antwoord te formuleren. Volgens Foster et al. (2022) is één minuut de maximale aanvaardbare denktijd voor het beantwoorden van een diagnostische vraag. Barton (2020) geeft daarentegen aan dat een goede diagnostische vraag, waarin één vaardigheid wordt getoetst, binnen tien seconden te beantwoorden moet zijn. Een vraag waar meerdere denkstappen bij betrokken zijn, zal leerlingen meer tijd kosten. Een goede denktijd vergroot de zichtbaarheid, interesse en veiligheid.

Denktijd is opgedeeld in denktijd 1 en denktijd 2. Denktijd 1 gaat over de tijd waarin kennis hervonden en gereconstrueerd wordt en een antwoord geformuleerd wordt. Denktijd 2 betreft de tijd na het geven van een antwoord door een leerling en voor het geven van een goed-fout reactie door de docent (van Ast et al., 2021). Denktijd 2 is minder relevant bij diagnostische vragen aangezien alle leerlingen hier tegelijk antwoord geven en niet meer mogen wisselen van antwoord. Denktijd 1 is daarentegen een belangrijke factor bij het bepalen van de duratie van de vraag. Bij het ontwerpen van een vraag, kan een inschatting gemaakt worden van de tijd die een leerling nodig heeft om kennis te hervinden, te construeren en een antwoord te formuleren.

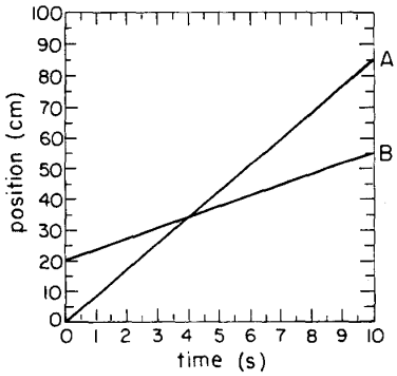
2.3. Voorbeelden van misvattingen en veelgemaakte fouten

In hoofdstuk 6 van Getal & Ruimte voor vwo 4 wiskunde B komt differentiaalrekening aan bod. In hoofdstuk 11 van Getal & Ruimte voor vwo 5 wiskunde B komt integraalrekening aan bod. In tabel 13 en 14 in bijlage A wordt de inhoud van deze beide hoofdstukken kort beschreven. Deze inhoud legt de basis voor het kiezen van vaardigheden die getoetst worden met de diagnostische vragen binnen dit onderzoek.

Bij de inhoud van deze hoofdstukken uit Getal & Ruimte zouden een aantal misvattingen en veelgemaakte fouten op kunnen treden bij leerlingen. Een aantal voorbeelden van misvattingen en veelgemaakte fouten die volgen uit literatuur zijn hieronder voor zowel differentiaal- als integraalrekening uitgewerkt. Deze opsomming omvat niet alle mogelijke veelgemaakte fouten en misvattingen bij deze onderwerpen.

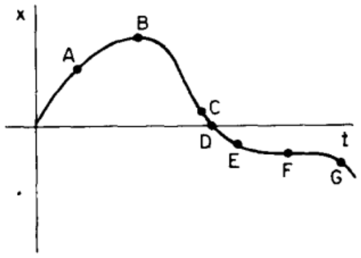
Differentiaalrekening
McDermott et al. (1987) benoemt een aantal voorbeelden van misvattingen die relevant zijn bij differentiaalrekening. Deze misvattingen ontstaan bij het maken van connecties tussen grafieken en fysieke concepten uit de wiskunde, zoals de helling en hoogte bij grafieken.

De eerste twee misvattingen van McDermott et al. (1987) hebben te maken met het onderscheidingsvermogen tussen hoogte en helling bij de grafiek van een lineaire functie. In figuur 1 zijn de grafieken van twee verschillende lineaire functies weergegeven. Een foutief onderscheidingsvermogen tussen hoogte en helling zal kunnen leiden tot de misvatting dat de grootte van de helling afhangt van de hoogte van de grafiek. Dit zou er toe kunnen leiden dat de leerling ervan overtuigd is dat lijn B een grotere helling heeft dan lijn A voor $s = 2$. Daarnaast kan het ook voorkomen dat een leerling de misvatting heeft dat twee lijnen een evengrote helling hebben in het snijpunt, zoals het geval is voor $s = 4$.



FIGUUR 1: GRAFIEKEN GEBRUIKT ALS TOELICHTING VAN ONDERSCHEIDINGSVERMOGEN HELLING EN HOOGTE. OVERGENOMEN UIT STUDENT DIFFICULTIES IN CONNECTING GRAPHS AND PHYSICS: EXAMPLES FROM KINEMATICS (P. 504) DOOR MCDERMOTT ET AL. (1987).

De volgende twee misvattingen van McDermott et al. (1987) zijn gerelateerd aan het interpretatievermogen van hoogte en helling bij een kromme. McDermott et al. (1987) gebruikt Figuur 2 ter ondersteuning bij deze misvattingen. Zo kan het voorkomen dat een leerling de misvatting heeft dat de helling groter wordt wanneer de grafiek zelf ook toeneemt. In dit geval zal de leerling ervan overtuigd zijn dat de helling toeneemt tussen punt A en B. Een andere mogelijke misvatting is dat een leerling ervan overtuigd is dat de helling gelijk is aan 0 in het snijpunt van de grafiek met de x-as, bijvoorbeeld in punt D.



FIGUUR 2: KROMME GEBRUIKT ALS TOELICHTING VAN INTERPRETATIE HELLING EN HOOGTE. OVERGENOMEN UIT STUDENT DIFFICULTIES IN CONNECTING GRAPHS AND PHYSICS: EXAMPLES FROM KINEMATICS (P. 504) DOOR MCDERMOTT ET AL. (1987).

Luneta & Makonye (2010) benoemen ook een aantal misvattingen gerelateerd aan differentiaalrekening. Een dergelijke misvatting betreft de foutieve overtuiging dat extreme waarden de snijpunten van de normale functie met de assen voorstellen (Luneta & Makonye, 2010). Een andere misvatting is de foutieve overtuiging dat je in een functie bestaande uit een product van twee functies, deze twee functies onafhankelijk van elkaar kan differentiëren zonder de productregel te gebruiken. Een voorbeeld hiervan is het differentiëren van $y = (x^3 + 1)(x^2 - 2)$ naar x, waarbij de leerling enkel in de haakjes zelf zal differentiëren, resulterend in $\frac{dy}{dx} = 3x^2 \cdot 2x$.

Uit de literatuur volgen ook een aantal veelgemaakte fouten passend bij differentiaalrekening, die ingedeeld zijn a.d.h.v. de classificatie van Schnepper & McCoy (2013).

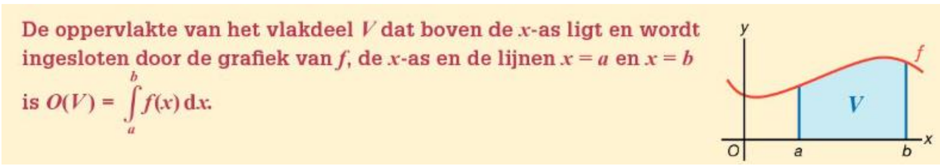
- Onvolledig eindantwoord: de leerling heeft de vraag deels beantwoord, maar een verplicht onderdeel van het eindantwoord mist (Schnepper & McCoy, 2013).
- Misbruikte wiskundige gegevens: de leerling trekt een conclusie uit de wiskundige data die niet correct is. Bijvoorbeeld, de leerling herleidt $\frac{2a+3}{8a^2}$ naar $\frac{3}{4a}$ (Schnepper & McCoy, 2013).

- Technische fout: de leerling maakt een rekenfout, een slordigheidsfout of een fout in het gebruik van wiskundige symbolen. Bijvoorbeeld, de leerling berekent $-3(s+4) = -3s + 12$ i.p.v. $-3(s+4) = -3s - 12$ (Schnepper & McCoy, 2013). Verder geldt bij differentiaalrekening dat er rekenfouten worden gemaakt met negatieve en gebroken exponenten (Orton, 1983). Daarnaast komt het vaak voor dat leerlingen de haakjes vergeten bij het differentiëren (Orton, 1983).
- Verdraaide definitie: het verdraaien van een definitie die onmisbaar is voor het correct beantwoorden van de vraag. Bijvoorbeeld, de leerling moet het domein bepalen van de functie $f(x) = \frac{2x}{x-5}$. Door een verdraaide definitie van van het domein kan de leerling stellen dat $\frac{2x}{x-5} \neq 0$, in plaats van $x \neq 5$ (Schnepper & McCoy, 2013).

Integraalrekening

Bezuidenhout & Olivier (2000) maken onderscheid tussen procedurele en conceptuele aspecten bij integraalrekening. Leerlingen hebben moeite met een conceptueel aspect van integraalrekening, namelijk het beeld bij de oppervlakte. Dit komt door het specifieke voorbeeld waarmee integraalrekening vaak geïntroduceerd wordt (Bezuidenhout & Olivier, 2000), zoals zichtbaar in Figuur 3, waarbij binnen de grenzen geldt dat $f(x) \geq 0$. Dit leidt bij leerlingen vaak tot twee misvattingen m.b.t. oppervlakten:

- Leerlingen denken dat een oppervlakte, die berekend is d.m.v. een integraal, altijd positief is en zijn zich hierdoor niet bewust dat er ook negatieve oppervlakten berekend kunnen worden met integralen en dat hier rekening mee gehouden dient te worden (Orton, 1983).
- Leerlingen denken dat oppervlakte tussen een grafiek en de x-as altijd correct berekend kan worden door $O(V) = \int_a^b f(x)\,dx$ uit te rekenen, ook wanneer de grafiek onder de x-as, of deels boven en onder de x-as ligt. Hierbij houden ze er geen rekening mee dat de integraal opgesplitst zal moeten worden bij het snijpunt tussen de functie en de x-as (Orton, 1983).



Figuur 3: Deel van theorieblok C ''Integralen'' uit paragraaf 11.1 van Getal & Ruimte Wiskunde B vwo deel 3

Daarnaast noemt Orton (1983) nog een misvatting. Leerlingen weten vaak niet waarom een integraal de oppervlakte onder een grafiek geeft. Zij zien niet in dat het integraalteken de limiet is van de som van de oppervlakten behorende bij oneindig kleine deelintervallen (Orton, 1983). Dit hoeft echter geen probleem te zijn voor het aanleren van de procedurele vaardigheid integreren.

Ook Kiat (2005) heeft een analyse uitgevoerd naar fouten binnen integraalrekening op de middelbare school. Er wordt hier geen onderscheid gemaakt tussen misvattingen en veelgemaakte fouten, maar de belangrijke fouten worden geclassificeerd als conceptuele, procedurele en technische fouten (Orton, 1983). In dit onderzoek zullen conceptuele fouten als misvattingen beschouwd worden en procedurele en technische fouten als veelgemaakte fouten. Conceptuele fouten betreffen fouten in het begrijpen van concepten die gerelateerd zijn aan het probleem in kwestie. Procedurele fouten zijn fouten in het uitvoeren van manipulaties of algoritmes ondanks het begrijpen van de achterliggende concepten. Technische fouten refereren naar fouten door een tekort aan andere inhoudelijke wiskunde kennis of vaardigheden en slordigheidsfouten (Kiat, 2005).

- Conceptuele fouten (misvattingen):
    - De oppervlakte niet kunnen vinden wanneer een grafiek de x-as snijdt binnen het gevraagde interval (Kiat, 2005)
    - Moeilijkheden bij het realiseren dat een raaklijn geïntegreerd moet worden om de formule van de functie te verkrijgen die bij de raaklijn hoort (Kiat, 2005)
- Procedurele fouten (veelgemaakte fouten):
    - Vergeten om de integratieconstante toe te voegen bij het berekenen van een primitieve of het evalueren van de integratieconstante wanneer nodig (Kiat, 2005)
    - Verwarring tussen differentiatie en integratie (Kiat, 2005)
    - Verwisselen van grenzen bij het opstellen van een integraal (Cornelissen, 1994)
    - Haakjes vergeten bij het integreren van een samengestelde functie of bij het berekenen van een bepaalde integraal (Orton, 1983)
    - Vergeten te primitiveren bij het berekenen van een bepaalde integraal
    - Bij het berekenen van de oppervlakte de verkeerde functies kiezen als ''bovenste'' en ''onderste''
    - Bij het berekenen van de inhoud van een omwentelingslichaam de verkeerde functies kiezen als ''binnenste'' en ''buitenste''
- Technische fouten (veelgemaakte fouten):
    - Coördinaatmeetkunde, kinematica, algebra, goniometrie (Kiat, 2005)
    - Slordigheid (Kiat, 2005)
    - Rekenfouten met negatieve en gebroken exponenten (Orton, 1983)

Procedurele fouten en technische fouten kwamen beiden twee keer zo vaak naar voren als conceptuele fouten. De drie fouten die het meest gemaakt werden zijn verwarring tussen integreren en differentiëren, de oppervlakte niet goed berekenen wanneer de functie de x-as snijdt en het vergeten toe te voegen van de integratieconstante bij het berekenen van een primitieve (Kiat, 2005).

Volgens Yee & Lam (2008) zijn het negeren van de coëfficient voor x bij het integreren van een functie waarbij de kettingregel een rol speelt en het negeren van de teller bij het integreren van een rationale functie ook veelvoorkomende fouten bij integraalrekening op de middelbare school.

2.4. Ontwerpeisen diagnostische vragen

De ontwerpeisen voor het ontwerpen van diagnostische vragen voor differentiaal- en integraalrekening voor dit onderzoek zijn gebaseerd op de literatuur. Dit resulteert in acht ontwerpeisen in totaal. Per ontwerpeis wordt er een toelichting gegeven.

1. *De diagnostische vragen bestaan uit een vraagstelling en uit drie of vier antwoordmogelijkheden, waarvan één correct antwoord, met de overige foute antwoorden gebaseerd op één misvatting of veelgemaakte fout per antwoord, die volgt uit literatuur, eigen verwachtingen en/of expert feedback.*

Door drie of vier meerkeuze antwoorden aan te bieden, kunnen meerdere misvattingen of veelgemaakte fouten geïdentificeerd worden. Hiermee zullen niet alle mogelijke misvattingen of veelgemaakte fouten op tafel komen, maar verdwalen de leerlingen ook niet in de antwoordmogelijkheden. Volgens Vyas & Supe (2008) gaat de kwaliteit van de diagnostische vragen niet achteruit wanneer gekozen wordt voor drie i.p.v. vier of vijf antwoordmogelijkheden. Het bedenken van drie antwoordmogelijkheden is minder tijdrovend voor de docent en het geven van drie antwoordmogelijkheden maakt de vraag mogelijk overzichtelijker voor de leerling. Volgens Barton (2020) zijn vier antwoordmogelijkheden juist een goede middenweg bij diagnostische vragen. Om deze redenen is er gekozen voor drie of vier antwoordmogelijkheden in de ontwerpeis.

2. *Bij iedere diagnostische vraag is er een extra antwoordmogelijkheid: ''het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...''.*

D.m.v. deze antwoordmogelijkheid kunnen inzichten verzameld worden omtrent misvattingen en veelgemaakte fouten die de auteurs en de experts niet bedacht hebben of niet gevonden is in literatuur. Deze eis is specifiek voor dit onderzoek opgesteld, maar het is niet noodzakelijk om deze extra antwoordmogelijkheid te geven bij diagnostische vragen in het algemeen, wanneer men niet geïnteresseerd is in het verzamelen van nieuwe inzichten m.b.t. tot misvattingen en veelgemaakte fouten.

3. *Van elk onjuist antwoord moet je iets kunnen opsteken zonder dat de leerling het nader hoeft toe te lichten* (Barton, 2020) (Wylie & William, 2006)*, m.u.v. de extra antwoordmogelijkheid ''het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...''.*

Een diagnostische vraag verschilt van niet-diagnostische multiplechoicevragen doordat de incorrecte antwoorden heel zorgvuldig zijn gekozen en specifieke misvattingen aan het licht brengen. Ieder antwoord komt voort uit een specifieke misvatting of veelgemaakte fout. Hierdoor kan uit ieder onjuist antwoord iets opgestoken worden zonder dat de leerling nadere toelichting hoeft te geven.

4. *Het moet niet mogelijk zijn om op het juiste antwoord uit te komen met behulp van een misvatting* (Barton, 2020).

Om zeker te weten dat een leerling de getoetste nieuwe vaardigheid begrijpt, moet het niet mogelijk zijn om uit te komen op het goede antwoord, terwijl er een misvatting of veelgemaakte fout aan de uitwerking ten grondslag ligt. Er wordt getest of het juiste antwoord gevonden kan worden door de geïdentificeerde misvattingen en veelgemaakte fouten toe te passen. Bijvoorbeeld: een diagnostische vraag waarbij gevraagd wordt naar 2^2 kan zowel het juiste antwoord 4 opleveren doordat een leerling $2 \cdot 2 = 4$ berekent of doordat een leerling $2 + 2 = 4$ berekent. Echter is het niet de bedoeling dat een leerling middels die laatste berekening op het juiste antwoord uitkomt. Het kan wel voorkomen dat een leerling het antwoord goed gokt, hier is geen remedie voor binnen de ontwerpeisen.

5. *De vraagstelling van diagnostische vragen moet duidelijk en ondubbelzinnig zijn* (Barton, 2020).

De vraagstelling moet zodanig zijn dat de vraag beantwoord kan worden zonder verdere toelichting.

6. *Bij de gebruikte vraagstelling moeten de randzaken zo eenvoudig mogelijk gehouden worden om alleen de nieuwe vaardigheid te toetsen waarover je inzicht wil krijgen.*

De randzaken bepalen deels de vereiste voorkennis die nodig is voor het beantwoorden van de vraag. Door de randzaken simpel te houden, kan dus de hoeveelheid noodzakelijke voorkennis gereduceerd worden. Op die manier ligt de nadruk van de diagnostische vraag op de nieuwe vaardigheid. Bijvoorbeeld: overweeg de nieuwe vaardigheid differentiëren met de machtsregel van de functie $f(x) = ax^n$. Neem bij het toetsen hiervan voor a en n een natuurlijk getal i.p.v. een breuk. Op deze manier wordt voorkomen dat fouten worden gemaakt in randzaken zoals het breukrekenen, terwijl het toetsen van de nieuwe vaardigheid differentiëren met de machtsregel hier centraal staat. Door a en n in dit voorbeeld niet als breuk te kiezen, worden de randzaken in dit voorbeeld simpel gehouden, en wordt de noodzakelijke voorkennis in deze vraag gereduceerd. De vereiste voorkennis is toegevoegd aan de diagnostische vraag.

7. Diagnostische vragen moeten niet meer dan één nieuwe vaardigheid toetsen (Barton, 2020).

Het doel van een diagnostische vraag is dat het inzoomt op precies dat punt waar een leerling moeite mee heeft en precies laat zien hoe. Als er te veel nieuwe vaardigheden in het spel zijn, neemt de accuraatheid van diagnose onvermijdelijk af. Echter, het toetsen van een nieuwe vaardigheid in een diagnostische vraag mag wel gebruik maken van voorkennis. Hierbij is het dan wel van belang dat de docent hiervan op de hoogte is en weet welke nieuwe vaardigheid en voorkennis getoetst worden. Als voorbeeld wordt de volgende nieuwe vaardigheid getoetst: de toepassing van de machtsregel op een functie $f(x) = \frac{1}{ax^n}$. De leerling zal de functie $f(x) = \frac{1}{a}x^{-n}$ moeten differentiëren. Hierbij neemt de exponent een negatieve waarde aan, wat kennis van de getallenlijn/getallenvolgorde vereist. Deze kennis wordt beschouwd als voorkennis, alhoewel dit dus wel getoetst wordt en mis kan gaan. Een voorbeeld waarbij wel twee nieuwe vaardigheden getoetst worden, is wanneer gevraagd wordt, na de behandeling van de hoofdstelling van de integraalrekening, om de oppervlakte tussen de grafiek van de functie $f(x) = x^2 - 5$ en de x-as te berekenen tussen de grenzen $x = -\sqrt{5}$ en $x = \sqrt{5}$. Hier worden twee nieuwe vaardigheden getoetst: de hoofdstelling van de integraalrekening toepassen en inzicht in welke functies de bovenste en de onderste zijn binnen de integraal. De nieuwe vaardigheid die getoetst wordt, is toegevoegd aan de diagnostische vraag.

8. Leerlingen moeten binnen maximaal één minuut antwoord kunnen geven.

Er wordt geadviseerd om binnen 10 seconden de vraag te laten beantwoorden door leerlingen (Barton, 2020), omdat de kans anders groot is dat er meer dan één vaardigheid betrokken is bij de vraag. Bij thema's als differentiëren en integreren in klas 4 en 5 van het vwo bij wiskunde B zijn de vragen van een hoger niveau, met meer denkstappen, dan de voorbeeldvragen van Barton gericht op de onderbouw. Hierbij lijkt 10 seconden te kort om een vraag goed en volledig te kunnen beantwoorden. Vaardigheden passend bij differentiaal- en integraalrekening vereisen vaak meer denkstappen dan in 10 seconden mogelijk is waardoor leerlingen meer tijd nodig hebben om tot een antwoord te komen. Dit heeft ermee te maken dat er veel voorkennis betrokken is bij vaardigheden bij deze thema's. Verder geldt ook dat denktijd 1 voor leerlingen lang genoeg moet zijn om zichtbaarheid, interesse en veiligheid te garanderen (van Ast et al., 2021). Maximaal 1 minuut (Foster et al., 2022) lijkt daarom realistischer.. Als het denkproces meerdere minuten in beslag neemt, gaat er veel om in de hoofden van leerlingen. Het belangrijkste doel van diagnostische vragen is om specifieke misvattingen op te sporen, en dat is hier ingewikkeld, omdat de leerlingen zoveel denkstappen en cognitieve sprongen moeten nemen om tot het uiteindelijke antwoord te komen (Barton, 2020).

3. Methode

Bij dit onderzoek horen vier fasen. In dit hoofdstuk wordt per fase beschreven wat deze fase inhoudt en hoe de fase uitgevoerd wordt. De fasen zijn als volgt:

- Fase 1: eerste ontwerp. Hier is een eerste ontwerp gemaakt van diagnostische vragen, o.b.v. de ontwerpeisen zoals beschreven in paragraaf 2.4 van het theoretisch kader.
- Fase 2: review expert panel. Het eerste ontwerp is opgestuurd naar een expert panel ter review. Het expert panel heeft feedback gegeven op het eerste ontwerp.
- Fase 3: uitvoering. Het eerste ontwerp is uitgevoerd in de lessen. Hierbij zijn antwoordfrequenties verzameld door de auteurs aangevuld met nieuwe inzichten.
- Fase 4: herontwerp. Op basis van de review door het expert panel en de uitvoering van het eerste ontwerp in de lessen, is een herontwerp van de diagnostische vragen gemaakt.

De bijbehorende ethiekaanvragen van dit onderzoek zijn 240305 (integraalrekening) en 240363 (differentiaalrekening).

3.1. Eerste ontwerp

Het streven is om in totaal 20 diagnostische vragen te ontwerpen: tien vragen over differentiaalrekening en tien vragen over integraalrekening. Het ontwerp van een diagnostische vraag bestaat volgens de ontwerpeisen uit paragraaf 2.4 van het theoretisch kader uit:

- Een vraagstelling en eventueel een ondersteunende figuur (ontwerpeis 1)
- Drie of vier antwoordmogelijkheden met onderbouwing (ontwerpeis 1)
- Een toelichting van de mogelijke misvattingen die een leerling zou kunnen hebben en veelgemaakte fouten die een leerling zou kunnen maken (ontwerpeis 3)
- Een extra antwoordmogelijkheid ‘’het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk...’’ (ontwerpeis 2)
- De vereiste voorkennis voor het beantwoorden van de diagnostische vraag (ontwerpeis 6)
- De nieuwe vaardigheid die getoetst wordt (ontwerpeis 7)

De ontwerpeisen uit het theoretisch kader zijn gebruikt als fundering om de diagnostische vragen te ontwerpen. De doorlopende leerlijn van Getal & Ruimte wordt gebruikt als leidraad voor de nieuwe vaardigheden die in de vragen getoetst worden, specifiek hoofdstuk 6: *Differentiaalrekening* en hoofdstuk 11: *Integraalrekening*, zoals zichtbaar in bijlage A, tabel 13 en tabel 14. Dit zijn de hoofdstukken die ook gegeven worden op het moment van uitvoering van de diagnostische vragen in de lessen. De nieuwe vaardigheden vereisen voorkennis. Deze voorkennis wordt benoemd bij de diagnostische vragen. Verdere inspiratie voor de vorm van de vragen zijn de opdrachten uit Getal & Ruimte en bestaande diagnostische vragen van het internet (Diagnostic Questions, sd) (Diagnostische vragen, sd). De diagnostische vragen zijn ontworpen in Powerpoint waarbij eventuele ondersteunende figuren met GeoGebra geconstrueerd zijn, of uit de Getal & Ruimte boeken en literatuur zijn gehaald. De antwoordmogelijkheden zijn bij iedere vraag gebaseerd op mogelijke misvattingen en veelgemaakte fouten die leerlingen zouden kunnen maken, zoals beschreven in het theoretisch kader in paragraaf 2.3, aangevuld met inzichten van de auteurs. De antwoordmogelijkheden zijn aangevuld met een onderbouwing, deels o.b.v. het theoretisch kader, en toelichting, waarbij beschreven wordt hoe de mogelijke misvattingen en veelgemaakte fouten tot uiting komen in de betreffende vraag.

3.2. Review expert panel

Goede diagnostische vragen zijn breed inzetbaar en helpen de consistentie van lesgeven en evalueren te verbeteren (Barton, 2020). Daarnaast wordt het aangeraden om met meerdere leerkrachten diagnostische vragen te ontwerpen (Barton, 2020). Om deze vragen zo goed mogelijk te ontwerpen, is ervoor gekozen om een expert panel in te schakelen. Dit expert panel bestaat uit bevoegde wiskunde docenten van het Bonhoeffer College, Het Stedelijk Zuid, vakdidactici aan de Universiteit Twente en docenten uit de werkgroep diagnostische vragen binnen de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVVW). Het eerste ontwerp van de diagnostische vragen is als twee verzamelingen ter review opgestuurd naar het expert panel via e-mail.

De diagnostische vragen zijn zodanig ontworpen dat zij naar inzicht van de auteurs voldoen aan de ontwerpeisen, echter is dit subjectief. Daarom wordt feedback gevraagd op de volgende aspecten van het eerste ontwerp van de diagnostische vragen:

- De vraagstelling en de eventuele ondersteunende figuren
- De antwoordmogelijkheden met de onderbouwing over mogelijke misvattingen en veelgemaakte fouten
- De duratie van een diagnostische vraag (ontwerpeis 8). Hier wordt specifiek feedback op gevraagd aangezien de duratie lastig is om in te schatten. Deels omdat dit per diagnostische vraag verschilt en omdat hier voor differentiaal- en integraalrekening weinig over te vinden is in de literatuur.

Het expert panel krijgt daarom een feedbackformulier toegestuurd in aanvulling op het eerste ontwerp, bestaande uit zes feedbackvragen per diagnostische vraag:

- Missen we belangrijke misconcepties of veelgemaakte fouten?
- Is de vraagstelling eenduidig?
- Hoelang schat je in dat de leerling bezig is met de vraag?
- Suggesties voor ''betere antwoordmogelijkheden'' bij misconcepties/veelgemaakte fouten.
- Suggesties voor verbetering van de vraagstelling.
- Overige opmerkingen.

3.3. Uitvoering

Het eerste ontwerp van de diagnostische vragen wordt toegepast in de lessen, parallel aan het verzamelen van de feedback via het expert panel. De diagnostische vragen worden gesteld op de data die aangeduid zijn in tabel 15 in bijlage B. Hier is ook het moment en het doel van de vraag in de les weergegeven, zoals uitgelegd in paragraaf 2.2 van het theoretisch kader. De tien diagnostische vragen over differentiaalrekening worden gebruikt in de vwo 4 wiskunde B klas (24 leerlingen) bij hoofdstuk 6 van Getal & Ruimte op het Bonhoeffer College Bruggertstraat. De tien diagnostische vragen over integraalrekening worden gebruikt in de vwo 5 wiskunde B klas (16 leerlingen) bij hoofdstuk 11 van Getal & Ruimte op het Stedelijk Lyceum Zuid. De stappen die tijdens de uitvoering van de diagnostische vragen worden ondernomen zijn hieronder weergegeven:

1. Vooraf aan het stellen van de diagnostische vraag deelt de docent vijf kaartjes uit per leerling, waarbij ieder kaartje correspondeert met een antwoordmogelijkheid. Er wordt verteld dat leerlingen hun antwoord na de denktijd moeten noteren op het antwoordkaartje wanneer zij gebruik maken van de extra antwoordmogelijkheid (ontwerpeis 2). Leerlingen die gebruik maken van de extra antwoordmogelijkheid hebben al geconcludeerd dat hun bedachte antwoord niet tussen de andere antwoordmogelijkheden zit. Het zal daarom niet noemenswaardig meer tijd kosten om dit antwoord tijdens het ophalen te noteren op het antwoordkaartje.

2. Vervolgens worden de diagnostische vraag en de bijbehorende antwoordmogelijkheden getoond op het scherm voorin de klas. De leerlingen krijgen maximaal één minuut om na te denken, corresponderend met ontwerpeis 8. Gedurende deze denktijd geeft de docent aan dat het stil moet zijn en dat de leerlingen zelf een antwoord moeten bedenken. De tijd wordt bijgehouden d.m.v. een digitale klok die uitsluitend zichtbaar is voor de docent op de laptop (differentiaalrekening) of door een timer in Powerpoint te implementeren, die ook zichtbaar is voor de leerlingen (integraalrekening).
3. Wanneer de denktijd voorbij is, telt de docent af en maken de leerlingen hun antwoord kenbaar door het kaartje met hun gekozen antwoord in de lucht te steken. De leerlingen mogen het kaartje pas pakken wanneer de docent dit aangeeft en ook gedurende dit proces wordt benadrukt dat het stil moet zijn.
4. De docent haalt de antwoordkaartjes op om zodoende achteraf de frequenties van verschillende antwoorden te kunnen noteren. Tijdens het ophalen worden de bedachte antwoorden, behorende bij de extra antwoordmogelijkheid, door de leerlingen in kwestie opgeschreven op het antwoordkaartje. Deze bedachte antwoorden worden ook genoteerd door de docent.

De extra antwoordmogelijkheid geeft leerlingen de optie om zelf een antwoord op te schrijven wanneer zij denken dat het juiste antwoord niet tussen de antwoordopties staat. Deze antwoordmogelijkheid wordt bij elke vraag toegevoegd (ontwerpeis 2), om mogelijke nieuwe misvattingen of veelgemaakte fouten te achterhalen. Van tevoren wordt aan de klassen verteld dat de extra antwoordmogelijkheid ook een reële optie is, om ervoor te zorgen dat leerlingen deze optie ook serieus overwegen en hier mogelijk gebruik van maken.

Bij differentiaalrekening zijn de antwoordkaartjes, die gebruikt worden bij het beantwoorden van de diagnostische vragen, gekleurd, waarbij iedere kleur voor een antwoordmogelijkheid (A, B, C, D of E) staat. De docent vraagt voorafgaand aan de lessenserie waarin de diagnostische vragen gesteld worden of er leerlingen zijn die kleurenblind zijn. Zo ja, dan schrijft de docent A, B, C, D en E op de gekleurde kaartjes zodat deze leerling(en) ook antwoord kunnen geven. Bij integraalrekening zijn ABCD-kaartjes gebruikt, waarbij op iedere set witte kaartjes de letters A, B, C, D en E geschreven zijn. Het gebruik van kleurenkaartjes en ABCD-kaartjes is verder toegelicht in paragraaf 2.2 van het theoretisch kader. De verschillen in methode qua antwoordkaartjes en manier van tijdmeting zijn ontstaan door persoonlijke voorkeuren qua lesstijl. De beide methoden worden geëvalueerd in de discussie.

3.4. Herontwerp

Het herontwerp van de diagnostische vragen betreft mogelijke aanpassingen aan antwoordmogelijkheden en de vraagstelling. Na eventuele aanpassingen, wordt opnieuw gecontroleerd of de herontworpen diagnostische vragen nog steeds voldoen aan de ontwerpeisen. De controle van deze ontwerpeisen is toegelicht en uitgevoerd in hoofdstuk 5, de evaluatie.

Het herontwerp van antwoordmogelijkheden wordt geleid door feedback van het expert panel, eigen inzichten en de verzamelde kaartjes met de extra antwoordmogelijkheid. Hierdoor komen er mogelijk misvattingen of veelgemaakte fouten naar boven die niet van tevoren in kaart gebracht waren. Deze misvattingen of veelgemaakte fouten kunnen ter inspiratie dienen voor vernieuwde antwoordmogelijkheden. Dit kan ertoe leiden dat een antwoordmogelijkheid uit het eerste ontwerp vervangen wordt. De keuze voor welke antwoordmogelijkheid vervangen wordt, is gebaseerd op eventuele suggesties voor vervanging van antwoordmogelijkheden door het expert panel.

Het herontwerp van de vraagstelling wordt geleid door feedback van het expert panel en eigen inzicht. Dit betekent dat reacties of gedrag van leerlingen tijdens de uitvoering niet worden meegenomen in het herontwerp van de vraagstelling. In het feedbackformulier wordt aan de experts gevraagd om suggesties voor verbetering van de vraagstelling. Deze suggesties worden bekeken en vergeleken, waarmee een nieuwe vraagstelling geformuleerd wordt.

Het zou kunnen voorkomen dat in de tijd tussen het eerste ontwerp en het herontwerp door de auteurs nieuwe ideeën of verbeterpunten voor de diagnostische vragen bedacht worden. Deze veranderingen zullen ook in het herontwerp van de vraagstelling en de antwoordmogelijkheden geïmplementeerd en toegelicht worden.

4. Resultaten

De resultaten van dit onderzoek bevatten tien diagnostische vragen voor het onderwerp differentiaalrekening en de verzamelde frequenties van de antwoordmogelijkheden. Het eerste ontwerp van de diagnostische vragen is te vinden in bijlage C. Na de feebackverzameling van experts en de uitvoering in de klas zijn de vragen uit het eerste ontwerp verbeterd, resulterend in het herontwerp. De expert feedback en een toelichting van de verwerking hiervan is te vinden in bijlage D. Het herontwerp is gepresenteerd in dit hoofdstuk. De veelgemaakte fouten zijn geclassificeerd m.b.v. Schnepper & McCoy (2013).

Vraag 1: Onderscheiding tussen hoogte en helling bij de grafiek van een lineaire functie

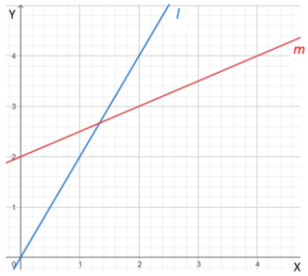
Gegeven is x = 1. Vul in:
De helling van lijn *l* is ……. de helling van lijn *m*

A. Groter dan

B. Gelijk aan

C. Kleiner dan

D. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: …



TABEL 1: ONDERBOUWING BIJ DIAGNOSTISCHE VRAAG 1

Vaardigheid: onderscheid kunnen maken tussen hoogte en helling bij de grafiek van een lineaire functie.	
Voorkennis: de begrippen lineaire functies, stijgen, dalen, snijpunt.	
A.	Correct: de leerling kan correct onderscheid maken tussen de helling en de hoogte van de grafiek van een lineaire functie.
B.	Misvatting: de leerling heeft de foutieve overtuiging dat twee lijnen een gelijke helling hebben zodra deze lijnen een snijpunt hebben (McDermott et al., 1987).
C.	Misvatting: de leerling heeft de foutieve overtuiging dat de grootte van de helling afhangt van de hoogte van de grafiek (McDermott et al., 1987).

Vraag 2: Toepassing quotiëntregel bij differentiëren

Gegeven $f(x) = \frac{x+5}{x^2+3}$

Differentieer $f(x)$

A. $f'(x) = \frac{-x^2+10x+3}{(x^2+3)^2}$

B. $f'(x) = \frac{3x^2+10x+3}{(x^2+3)^2}$

C. $f'(x) = \frac{x^2+10x-3}{(x^2+3)^2}$

D. $f'(x) = \frac{-x^2-10x+3}{(x^2+3)^2}$

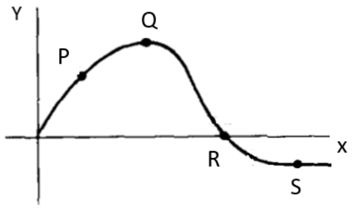
E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: …

TABEL 2: ONDERBOUWING BIJ DIAGNOSTISCHE VRAAG 2

Vaardigheid: toepassen van de quotiëntregel bij het differentiëren.	
Voorkennis: afgeleide opstellen van lineaire en kwadratische functies, algebraïsche vaardigheden, herleiden	
A.	Veelgemaakte fout (technische fout): de leerling is de min vergeten in het stukje *tan*, oftewel $f'(x) = \frac{(x^2+3)\cdot 1 - 2x\cdot(x+5)}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2+3-2x^2+10x}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+10x+3}{(x^2+3)^2}$
B.	Veelgemaakte fout (verdraaide definitie): de leerling heeft een plus-teken gebruikt op de plek van een min-teken in de quotiëntregel, namelijk $\frac{nat+tan}{n^2}$ i.p.v. $\frac{nat-tan}{n^2}$.
C.	Veelgemaakte fout (verdraaide definitie): de leerling heeft de verkeerde volgorde toegepast in de quotiëntregel in de teller, namelijk $\frac{tan-nat}{n^2}$ i.p.v. $\frac{nat-tan}{n^2}$.
D.	Correct: de leerling kan de quotiëntregel correct toepassen bij het differentiëren.

Vraag 3: Interpretatie van hoogte en helling bij een kromme

Welke uitspraak is correct over de punten van de grafiek?



A.
De helling van de grafiek neemt toe tussen punt P en punt Q

B.
De helling van de grafiek in punt Q is gelijk aan 0

C.
De helling van de grafiek in punt R is gelijk aan 0

D.
De grafiek heeft een toenemende daling van punt R naar punt S

E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

TABEL 3: ONDERBOUWING BIJ DIAGNOSTISCHE VRAAG 3

Vaardigheid: onderscheid kunnen maken tussen de hoogte en helling bij een kromme.	
Voorkennis: de begrippen kromme, toenemend/afnemend stijgend, toenemend/afnemend dalend	
A.	Misvatting: de leerling heeft de foutieve overtuiging dat de helling stijgt wanneer de grafiek toeneemt (McDermott et al., 1987).
B.	Correct: de leerling kan correcte verbanden leggen tussen de helling en hoogte bij een kromme.
C.	Misvatting: de leerling heeft de foutieve overtuiging dat de helling gelijk is aan 0 bij een snijpunt van grafiek met de x-as (McDermott et al., 1987).
D.	Veelgemaakte fout (verdraaide definitie): de leerling houdt toenemende daling door de war met afnemende daling.

Vraag 4: Interpretatie van de grafieken van de eerste en tweede afgeleide functie

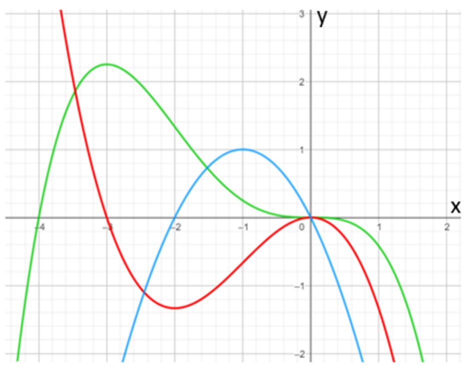
Drie functies zijn gegeven. Benoem $f(x), f'(x)$ en $f"(x)$

A. $f(x) =$ blauw
$f'(x) =$ rood
$f"(x) =$ groen

B. $f(x) =$ rood
$f'(x) =$ blauw
$f"(x) =$ groen

C. $f(x) =$ groen
$f'(x) =$ rood
$f"(x) =$ blauw

D. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...



TABEL 4: ONDERBOUWING BIJ DIAGNOSTISCHE VRAAG 4

Vaardigheid: onderscheid kunnen maken tussen de grafieken van een vierdegraads functie en de bijbehorende eerste en tweede afgeleide functie.	
Voorkennis: de begrippen extreme waarden, buigpunten.	
A.	Misvatting: de leerling heeft de foutieve overtuiging dat een extreme waarde in de afgeleide functie impliceert dat de normale functie in ditzelfde punt de x-as snijdt (Luneta & Makonye, 2010)
B.	Veelgemaakte fout (verdraaide definitie): de leerling denkt dat de rode functie (in dit geval $f(x)$) een buigpunt heeft in x = 0 i.p.v. een maximum, aangezien de groene functie (in dit geval $f"(x)$) hier de x-as snijdt. Naar de verdere verloop van de groene functie is niet gekeken. Ook heeft de leerling niet gekeken naar extreme waarden in de blauwe functie (in dit geval $f'(x)$) en zo het buigpunt in x = -1 over het hoofd gezien.
C.	Correct: de leerling kan correcte interpretaties maken over de grafieken van de eerste en tweede afgeleide functie ($f'(x) = 0$ geeft extreme waarden van $f(x)$ en $f(x)$ heeft buigpunt als $f'(x)$ een extreme waarde heeft)

Vraag 5: Berekenen van de afgeleide bij een functie van de vorm $f(x) = \frac{1}{ax^n}$

Gegeven is $f(x) = \frac{1}{2x^4}$

Bereken de afgeleide van $f(x)$

A. $f'(x) = -\frac{4}{x^5}$

B. $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

C. $f'(x) = -\frac{2}{x^5}$

D. $f'(x) = -\frac{1}{8x^5}$

E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

TABEL 5: ONDERBOUWING BIJ DIAGNOSTISCHE VRAAG 5

Vaardigheid: afgeleide opstellen van de functie van de vorm $f(x) = \frac{1}{ax^n}$ met $a, n \in \mathbb{N}$	
Voorkennis: omschrijven van negatieve exponenten, de machtsregel	
A.	Veelgemaakte fout (onvolledig eindantwoord): de leerling vergeet om de afgeleide van $\frac{1}{x^4}$ te vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$.
B.	Veelgemaakte fout (technische fout): de leerling differentieert $f(x) = \frac{1}{2}x^{-4}$ naar $f'(x) = -2x^{-3}$ i.p.v. $f'(x) = -2x^{-5}$. De leerling bepaalt de nieuwe exponent van de afgeleide via $4 - 1 = 3$ ("1 van de exponent afhalen") in plaats van $-4 - 1 = -5$ (rekenen volgens de getallenlijn).
C.	Correct: de leerlingen kan op correcte wijze de afgeleide bepalen van de functie van de vorm $f(x) = \frac{1}{ax^n}$ met $a, n \in \mathbb{N}$.
D.	Veelgemaakte fout (technische fout): de leerling verwart $f(x) = \frac{1}{2x^4}$ met $f(x) = \frac{2}{x^4}$ waaruit volgt $f(x) = \frac{1}{2x^4} = 2x^{-4}$ en $f'(x) = -8x^{-5} = -\frac{1}{8x^5}$

Vraag 6: Differentiëren van een wortelfunctie van de vorm $f(x) = a\sqrt{x}$

Gegeven is $f(x) = 4\sqrt{x}$

Differentieer $f(x)$

A. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

B. $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$

C. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

D. $f'(x) = 4\sqrt{1}$

E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

TABEL 6: ONDERBOUWING BIJ DIAGNOSTISCHE VRAAG 6

Vaardigheid: differentiëren van een wortelfunctie van de vorm $f(x) = a\sqrt{x}$ met $a \in \mathbb{N}$	
Voorkennis: omschrijven van gebroken en negatieve exponenten, de machtsregel	
A.	Veelgemaakte fout (technische fout): de leerling schrijft $f(x) = 4\sqrt{x}$ om naar $f(x) = 4^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$, oftewel verheft zowel de variabele x als het getal 4 met ½. Vervolgens differentieert de leerling $f(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$.
B.	Correct: de leerling kan op correcte wijze een wortelfunctie van de vorm $f(x) = a\sqrt{x}$ met $a \in \mathbb{N}$ differentiëren.
C.	Veelgemaakte fout (technische fout): de leerling verwart $2x^{-\frac{1}{2}}$ met $(2x)^{-\frac{1}{2}}$ en schrijft vervolgens $f'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}}$ om naar $f'(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$
D.	Misvatting: de leerling heeft de foutieve overtuiging dat alleen hetgene wat in de wortel staat gedifferentieerd moet worden. De leerling differentieert dus alleen binnen in de wortel zelf.

Vraag 7: Toepassing kettingregel bij differentiëren

Gegeven is $f(x) = (x^2 + 3x)^4$

Differentieer $f(x)$

A. $f'(x) = 4(x^2 + 3x)^3 \cdot (2x + 3)$

B. $f'(x) = 4(x^2 + 3x)^3 \cdot 2x + 3$

C. $f'(x) = 4(x^2 + 3x)^3 + 2x + 3$

D. $f'(x) = 4(x^2 + 3x)^3$

E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

TABEL 7: ONDERBOUWING BIJ DIAGNOSTISCHE VRAAG 7

Vaardigheid: toepassen van de kettingregel bij het differentiëren.	
Voorkennis: de machtsregel, afgeleide opstellen van kwadratische functie	
A.	Correct: de leerling kan de kettingregel correct toepassen bij het differentiëren.
B.	Veelgemaakte fout (technische fout): de leerling is de haakjes vergeten bij de vermenigvuldiging met $(2x + 3)$
C.	Veelgemaakte fout (verdraaide definitie): de leerling heeft een plusteken gebruikt i.p.v. een vermenigvuldigingsteken bij de vermenigvuldiging met $(2x + 3)$, oftewel $f'(x) = 4(x^2 + 3x)^3 + 2x + 3$. Mogelijk verwart de leerling de kettingregel met de productregel.
D.	Veelgemaakte fout (onvolledig eindantwoord): de leerling is vergeten de kettingregel toe te passen.

Vraag 8: Toepassing combinatie van productregel en kettingregel bij differentiëren

Gegeven is de functie:

$$f(x) = x\sqrt{2x + 1}$$

$f'(x)$ is gelijk aan...

A. $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x + 1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$

B. $f'(x) = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

C. $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x + 1} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

D. $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x + 1} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

TABEL 8: ONDERBOUWING BIJ DIAGNOSTISCHE VRAAG 8

Vaardigheid: toepassen van de productregel in combinatie met de kettingregel bij een functie die het product is van twee factoren.	
Voorkennis: kettingregel, productregel, machtsregel, omschrijven van negatieve en gebroken exponenten.	
A.	Veelgemaakte fout (onvolledig eindantwoord): de leerling is vergeten de kettingregel toe te passen bij het differentiëren van $\sqrt{2x + 1}$.
B.	Misvatting: de leering heeft de foutieve overtuiging dat je in een functie bestaande uit een product van twee functies, deze twee functies onafhankelijk van elkaar kan differentiëren zonder de productregel te gebruiken (Luneta & Makonye, 2010).
C.	Correct: de leerling kan correct de productregel in combinatie met de kettingregel toepassen.
D.	Veelgemaakte fout (verdraaide definitie): de leerling gebruikt een vermenigvuldigingsteken i.p.v. een plusteken bij de productregel.

Vraag 9: Herleiden van de formule van de afgeleide met een wortel in de noemer van de breuk.

Gegeven is de functie:

$$f(x) = x\sqrt{2x+1}$$

Het berekenen van de afgeleide $f'(x)$ geeft het volgende:

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

Herleid de formule van $f'(x)$ tot de meest eenvoudige vorm.

A. $f'(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$

B. $f'(x) = (2x+1)^{\frac{1}{2}} + x(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$

C. $f'(x) = \frac{\sqrt{2x+1} \cdot \sqrt{2x+1} + x}{\sqrt{2x+1}}$

D. $f'(x) = \frac{\sqrt{2x+1}+x}{\sqrt{2x+1}}$

E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

TABEL 9: ONDERBOUWING BIJ DIAGNOSTISCHE VRAAG 9

Vaardigheid: herleiden van een functie bestaande uit twee termen tot één breuk waarvan één term een gebroken functie is met een wortel in de noemer.	
Voorkennis: rekenen met breuken, algebraïsche vaardigheden, wortels kwadrateren	
A.	Veelgemaakte fout (onvolledig eindantwoord): de leerling heeft de eerste tussenstap gezet voor het herleiden van de formule, maar heeft de formule niet volledig herleid tot één breuk.
B.	Misvatting: de leerling heeft de foutieve overtuiging dat ‘herleiden’ betekent dat je de formule moet schrijven in een vorm met gebroken en negatieve exponenten, dus zonder variabelen in een wortel en in de noemer van een breuk.
C.	Veelgemaakte fout (onvolledig eindantwoord): de leerling heeft de twee termen wel succesvol tot één breuk samengevoegd, maar heeft de teller van deze breuk nog niet volledig herleid.
D.	Veelgemaakte fout (technische fout): de leerling heeft $\sqrt{2x+1}$ opgeteld bij de teller van $\frac{x}{\sqrt{2x+1}}$.
E.	Correct: het juiste antwoord, namelijk $f'(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$, staat niet tussen de andere antwoordmogelijkheden. Als de leerling dit antwoord voor antwoordmogelijkheid E heeft ingevuld, dan kan gesteld worden dat de leerling correct de formule bestaande uit twee termen kan herleiden waarvan één term een gebroken functie met een wortel in de noemer.

Vraag 10: Berekenen van de afgeleide bij functies met een parameter

Gegeven is de functie $f_p(x) = p^3x^4 + 2p$

Bereken de afgeleide van $f_p(x)$

A. $f_p{}'(x) = 12p^2x^3 + 2$

B. $f_p{}'(x) = 4p^3x^3 + 2$

C. $f_p{}'(x) = 3p^2x^4 + 4p^3x^3 + 2$

D. $f_p{}'(x) = 4p^3x^3$

E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

TABEL 10: ONDERBOUWING BIJ DIAGNOSTISCHE VRAAG 10

Vaardigheid: berekenen van de afgeleide van functies met een parameter.	
Voorkennis: machtsregel, het begrip parameter	
A.	Veelgemaakte fout (verdraaide definitie): de leerling weet niet goed welke stappen hij moet zetten om een functie met een parameter te differentiëren. Hij haalt verschillende differentieerregels door elkaar, voornamelijk geleid door de exponenten: $f_p{}'(x) = 3p^2 \cdot 4x^3 + 2 = 12p^2x^3 + 2$
B.	Misvatting: de leerling heeft de foutieve overtuiging dat je een term van de vorm ax, met a een getal en x een variabele of parameter, altijd moet differentiëren naar a. In dit geval differentieert de leerling $2p$ dus naar 2.
C.	Misvatting: de leerling heeft de foutieve overtuiging dat je zowel de variabele x als de parameter p moet differentiëren. De leerling ziet p^3x^4 als een product van twee functies en past daarom de productregel toe, waaruit antwoord C volgt.
D.	Correct: de leerling kan correct de afgeleide berekenen van functies met een parameter.

In tabel 11 zijn de gegeven antwoorden op de diagnostische vragen van het eerste ontwerp overzichtelijk weergegeven. De groen gearceerde vakken zijn de correcte antwoorden en de rode de misvattingen en veelgemaakte fouten die zijn gekozen in de klas van uitvoering. In tabel 12 zijn de misvattingen en veelgemaakte fouten die een relatieve frequentie hoger dan 25% hebben, weergegeven. De gokkans op een antwoord bij een meerkeuzevraag met vier opties is 0,25 (Sabbe & Lesage, 2012). Wanneer een fout antwoord door meer dan 25% van de leerlingen gegeven is, zou er een aanleiding kunnen zijn om te denken dat dit antwoord niet willekeurig gekozen is, maar dat hier een misvatting of veelgemaakte fout aan ten grondslag ligt die mogelijk in deze klas speelt. Deze misvattingen en veelgemaakte fouten worden onder de aandacht gebracht in de paragraaf 6.3 in hoofdstuk 6 omdat deze, in ieder geval in de klas van uitvoering, frequent (>25%) voorkomen. Hierbij is de kans behorende bij het kiezen van de extra antwoordmogelijkheid E buitenwege gelaten.

TABEL 11 – FREQUENTIES VAN GEGEVEN ANTWOORDEN OP DE DIAGNOSTISCHE VRAGEN.

Vraag	Onderwerp	A	B	C	D	E: ander antwoord…
1	Helling en hoogte bij de grafiek van lineaire functies	22	-	-		-
2	Quotiëntregel	-	-	-	21	1: $f'(x) = \frac{(x^2+3)\cdot 1 - 2x\cdot(x+5)}{(x^2+3)^2}$ $f'(x) = \frac{x^2+3-2x^2+10x}{(x^2+3)^2}$ $f'(x) = \frac{-x^2+10x+3}{(x^2+3)^2}$
3	Helling en hoogte bij een kromme	-	23	-	-	-
4	Grafieken bij de eerste en tweede afgeleide functie	-	-	24		-
5	Differentiëren van de vorm $f(x) = \frac{1}{ax^n}$	-	-	8	9	2: $f'(x) = -\frac{4}{x^5}$ 1: $f'(x) = \frac{8}{x^5}$
6	Differentiëren van een wortelfunctie van de vorm $f(x) = a\sqrt{x}$	4	7	10	-	-
7	Kettingregel	3	-	20	-	-
8	Combinatie productregel en kettingregel	19	-	5	-	-
9	Herleiden van afgeleide met een wortel in de noemer van de breuk	-	24	-	-	-
10	Afgeleide van functies met een parameter	1	4	-	17	-

TABEL 12 – TOELICHTING VAN MISVATTINGEN EN VEELGEMAAKTE FOUTEN MET EEN HOGE RELATIEVE FREQUENTIE (>25%)

Vraag	Veelgemaakte fout/misvatting	Relatieve frequentie
5	Technische fout: de leerling verwart mogelijk $f(x) = \frac{1}{2x^4}$ met $f(x) = \frac{2}{x^4}$ waaruit volgt $f(x) = \frac{1}{2x^4} = 2x^{-4}$	53%
6	Technische fout: de leerling verwart mogelijk $2x^{-\frac{1}{2}}$ met $(2x)^{-\frac{1}{2}}$ en schrijft vervolgens $2x^{-\frac{1}{2}}$ om naar $\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$	48%
7	Verdraaide definitie: de leerling heeft een plusteken gebruikt i.p.v. een vermenigvuldigingsteken bij de toepassing van de kettingregel	87%
8	Onvolledig eindantwoord: de leerling is vergeten de kettingregel toe te passen bij het differentiëren van $\sqrt{2x+1}$.	80%

5. Evaluatie

De diagnostische vragen zijn ontworpen met de ontwerpeisen als ruggengraat, echter kunnen niet alle eisen van tevoren gecontroleerd worden, zoals een juiste duratie van de diagnostische vraag (ontwerpeis 8). Verder is er een herontwerp gemaakt van de diagnostische vragen op basis van feedback van het expert panel, inzichten van de auteurs en de extra antwoordmogelijkheid. Daarom wordt het ontwerpdoel geëvalueerd door te controleren of het herontwerp van tien diagnostische vragen nog steeds voldoet aan de gestelde ontwerpeisen. Hieronder wordt per ontwerpeis beschreven hoe deze gecontroleerd zal worden. Wanneer aan alle ontwerpeisen voldaan wordt, is het ontwerpdoel behaald. Wanneer er niet aan alle ontwerpeisen voldaan wordt, dan wordt onderbouwd waarom dit het geval is.

1. *De diagnostische vragen bestaan uit een vraagstelling en uit drie of vier antwoordmogelijkheden, waarvan één correct antwoord, met de overige foute antwoorden gebaseerd op één misvatting of veelgemaakte fout per antwoord, die volgt uit literatuur, eigen verwachtingen en/of expert feedback.*

Deze ontwerpeis is direct geïmplementeerd bij het (her)ontwerpen van de diagnostische vragen. In het resultaten hoofdstuk is de onderbouwing voor de verschillende antwoordmogelijkheden uitgewerkt.

2. *Bij iedere diagnostische vraag is er een extra antwoordmogelijkheid: ''het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ....''*

Deze ontwerpeis is direct geïmplementeerd bij het (her)ontwerpen van de diagnostische vragen.

3. *Van elk onjuist antwoord moet je iets kunnen opsteken zonder dat de leerling het nader hoeft toe te lichten* (Barton, 2020) (Wylie & William, 2006)*, m.u.v. de extra antwoordmogelijkheid ''het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...''.*

In de resultaten is per vraag beschreven welke expliciete fouten in denkstappen/uitvoering de leerling maakt bij het kiezen van een onjuist antwoord.

4. *Het moet niet mogelijk zijn om op het juiste antwoord uit te komen met behulp van een misvatting* (Barton, 2020).

Of aan deze ontwerpeis voldaan wordt, is gecontroleerd door verwachte en nieuwe misvattingen en veelgemaakte fouten toe te passen op de diagnostische vragen.

5. *De vraagstelling van diagnostische vragen moet duidelijk en ondubbelzinnig zijn* (Barton, 2020).

Deze ontwerpeis is direct geïmplementeerd bij het (her)ontwerpen. Het expert panel is gevraagd in het feedbackformulier of de vraagstelling eenduidig is en of er suggesties ter verbetering zijn. Wanneer er suggesties gegeven worden, zijn deze waar passend meegenomen in het herontwerp. Een voorbeeld hiervan is het herontwerp van vraag 9 (herleiden afgeleide): de vraagstelling 'herleid de formule van de afgeleide' was niet duidelijk en is aangepast door een logische vraagstructuur toe te passen: eerst de functie zelf geven, vervolgens de afgeleide en tot slot de vraag om deze afgeleide te herleiden tot de meest eenvoudige vorm. Of de diagnostische vragen aan ontwerpeis 5 voldoen, is bepaald door de subjectieve meningen van het expert panel en de auteurs.

6. *Bij de gebruikte vraagstelling moeten de randzaken zo eenvoudig mogelijk gehouden worden om alleen de nieuwe vaardigheid te toetsen waarover je inzicht wil krijgen.*

Deze ontwerpeis is zo goed als mogelijk nageleefd en is gecontroleerd door inzicht van de auteurs. Daarnaast heeft het expert panel ruimte gehad om aan te geven of er wel of niet voldaan wordt aan deze ontwerpeis middels het feedbackformulier. Waar van toepassing is o.b.v. de feedback van het expert panel de vraag aangepast om de randvoorwaarden zo eenvoudig mogelijk te maken. Een voorbeeld van een keuze voor eenvoudige randzaken is bijvoorbeeld het gebruik van $f(x) = \frac{x+5}{x^2+3}$ bij vraag 2 (quotiëntregel), waarbij het opstellen van de afgeleide van zowel de teller als noemer eenvoudig is. Een ander voorbeeld is het gebruik van $f_p(x) = p^3x^4 + 2p$ bij vraag 10 (afgeleide functie met parameter), waarbij er eenvoudige getallen voor exponenten zijn gekozen. Tot slot zijn bij vraag 7 (kettingregel) de randzaken versimpeld door in het herontwerp de algebraïsche bewerkingen buiten beschouwing te laten in de antwoordmogelijkheden.

7. *Diagnostische vragen moeten niet meer dan één nieuwe vaardigheid toetsen* (Barton, 2020).

Welke nieuwe vaardigheid getoetst wordt en wat de bijbehorende voorkennis is, is bij iedere diagnostische vraag beschreven, welke terug te vinden zijn in het hoofdstuk resultaten. Indien er meer dan één nieuwe vaardigheid getoetst dient te worden, is er beoordeeld of de diagnostische vraag in twee of meer vragen opgesplitst kan worden. Dit is het geval bij vraag 8 en 9 bij het differentiëren en herleiden van $f(x) = x\sqrt{2x+1}$.

8. *Leerlingen moeten binnen maximaal één minuut antwoord kunnen geven.*

Deze ontwerpeis is vooraf lastig te beoordelen, aangezien het moeilijk in te schatten is hoelang leerlingen met een vraag bezig zijn. Deze schatting is gebaseerd op inzicht van de auteurs en daarbij is aan het expert panel gevraagd om hun inschatting te geven van de duratie van de diagnostische vragen. Op de schattingen van ons en de experts zal gebaseerd worden of de duratie van iedere vraag onder de minuut ligt. Wanneer dit niet het geval is, is de vraag aangepast om de duratie hopelijk voldoende te verkorten. Dit kan helaas niet meer getoetst worden aangezien de uitvoering al plaatsvindt voor het herontwerp van de vragen.

Vraag 1 (hoogte & helling lineaire functie) en vraag 3 (hoogte & helling kromme) zijn volgens de experts en de auteurs binnen één minuut te beantwoorden, wat ook bleek tijdens de uitvoering. De duratie van de overige vragen waren discutabel:

- **Vraag 2 (quotiëntregel):** één expert zei dat het mogelijk is om de vraag te beantwoorden binnen één minuut, de rest van de experts hadden een inschatting van 1 tot 3 minuten. Tijdens de uitvoering bleek dat er inderdaad langer dan 1 minuut nodig was. Een verdere versimpeling van de randzaken, zoals een lineaire functie in zowel de teller als de noemer, zal veelgemaakte fout A van het herontwerp (verkregen uit extra antwoordmogelijkheid E) doen verdwijnen en is dus niet wenselijk. Hetzelfde geldt voor het weglaten van algebraïsche bewerkingen. Om de nieuwe vaardigheid van toepassing van de quotiëntregel volledig te toetsen, zijn er meerdere inzichten nodig wat dus ook mogelijk een langere duratie vergt.

- **Vraag 4 (grafiek eerste en tweede afgeleide):** deze vraag is volgens de experts net wel of net niet binnen een minuut te beantwoorden, voornamelijk geleid door mogelijke verwarring bij de leerlingen om de vraagstelling. Tijdens de uitvoering was dit ook het geval. De vraag is aangepast in zowel visualisatie als vraagstelling om zo de verwarring te verminderen, waarmee de verwachting is dat de vraag nu wel te beantwoorden is binnen één minuut.

- **Vraag 5 (afgeleide van $\frac{1}{ax^n}$):** experts hadden een verwachting van 1-3 minuten. Tijdens de uitvoering was één minuut voldoende. Dit kan komen doordat 'omschrijven van negatieve exponenten' als voorkennis wordt beschouwd bij deze vraag en hierover nadenken dus minder tijd zal kosten. Om deze reden lijkt één minuut voldoende.

- **Vraag 6 (differentiëren van $a\sqrt{x}$):** deze vraag had een wisselende inschatting van de experts, van 30 seconden tot 3 minuten. Tijdens de uitvoering bleek één minuut voldoende te zijn. Net zoals bij vraag 5, worden de vaardigheden 'omschrijven van gebroken en negatieve exponenten' als voorkennis beschouwd.

- **Vraag 7 (kettingregel):** de experts hadden een duratie inschatting van 1 tot 3 minuten. Tijdens de uitvoering was één minuut net niet genoeg tijd. In het herontwerp zijn de algebraïsche bewerkingen achterwege gelaten, waardoor de verwachting is dat het nu wel mogelijk is om binnen één minuut te antwoorden.

- **Vraag 8 (combinatie productregel & kettingregel):** ook hier weer wisselende feedback van experts: 30 seconden tot 5 minuten. Tijdens de uitvoering bleek één minuut genoeg te zijn, mogelijk deels omdat de randzaken dusdanig simpel zijn gehouden. De verwachting is dat dit voor het herontwerp ook geldt.

- **Vraag 9 (herleiden afgeleide):** experts hadden een inschatting van 1 tot 3 minuten. In de praktijk is deze vraag direct gesteld als vervolg op vraag 8, waardoor de afgeleide die herleid moet worden niet compleet uit de lucht valt. Tijdens de uitvoering bleek 1 minuut dan ook voldoende te zijn. Om hier helemaal zeker van te zijn, is de vraagstelling in het herontwerp dusdanig veranderd om meer duidelijkheid te creëeren, ook als vraag 8 en 9 niet achter elkaar gesteld worden.

- **Vraag 10 (afgeleide functie met parameter):** de experts gaven een duratie van 30 seconden tot 3 minuten. Tijdens de uitvoering bleek één minuut lang genoeg te zijn. Hierbij is het belangrijk dat het begrip parameter als voorkennis wordt beschouwd en de leerlingen functies met parameters dus ook kunnen herkennen.

6. Conclusies & discussie

In dit hoofdstuk wordt een conclusie getrokken m.b.t. het gestelde ontwerpdoel. Hierna volgt een discussie over de gebruikte methode, de resultaten en de kwaliteit en beperkingen van het onderzoek. Er wordt afgesloten met aanbevelingen over de diagnostische vragen, die volgen uit de conclusie en discussie, en aanbevelingen voor verder onderzoek.

6.1 Ontwerpdoel

Het ontwerpdoel van dit onderzoek luidt als volgt:

Diagnostische vragen ontwerpen a.d.h.v. opgestelde ontwerpeisen voor gebruik in de vwo 4/5 wiskunde B les bij differentiaal- en integraalrekening

Er zijn tien diagnostische vragen ontworpen voor differentiaalrekening m.b.v. de opgestelde ontwerpeisen die volgen uit het theoretisch kader. Volgens de methode zijn na review van een expert panel en uitvoering in de les deze vragen herontworpen. De diagnostische vragen zijn toepasbaar bij het thema differentiaalrekening in vwo 4 en volgen in het specifiek de leerlijn van hoofdstuk 6 'Differentiaalrekening' van Getal & Ruimte vwo 4 wiskunde B. Zoals toegelicht in de evaluatie, voldoen alle diagnostische vragen aan de ontwerpeisen m.u.v. vraag 2 (quotiëntregel). Deze vraag overschrijdt namelijk de duratie van één minuut, waardoor er niet is voldaan aan ontwerpeis 8. Dit is te verantwoorden door te stellen dat de inzichten die nodig zijn om deze nieuwe vaardigheid te toetsen niet binnen één minuut te genereren zijn. Er zijn geen plausibele mogelijkheden om vraag 2 te versimpelen zonder dat afgedaan wordt aan het toetsen van de aan te leren nieuwe vaardigheid. Deze vraag is alsnog wel geschikt voor gebruik in de les en het toetsen van de gewenste nieuwe vaardigheid. Daarom kan gesteld worden dat het ontwerpdoel behaald is, ondanks dat ontwerpeis 8 niet volledig gewaarborgd is.

6.2 Methode

Review van diagnostische vragen door het expert panel

In de methode is beschreven dat er een expert panel is gevraagd om het eerste ontwerp van de diagnostische vragen te reviewen en om hier feedback op te geven. Uiteindelijk is voor iedere vraag viermaal het feedbackformulier ingevuld. Het valt op dat de feedback zeer gevarieerd is maar soms ook tegenstrijdig. Voornamelijk bij het inschatten van de tijdsduur van vragen zijn in sommige gevallen verschillen van 3 minuten te vinden, wat erg veel is. Dit maakt het lastig om een goed beargumenteerde keuze te maken voor een specifieke tijdsduur bij iedere vraag. De gevarieerde feedback op de vraagstelling en de antwoordmogelijkheden vulde elkaar goed aan. Hier is veel van geleerd en op die manier zijn de vragen in het herontwerp van aanzienlijk hogere kwaliteit. Het zou fijn geweest zijn om de diagnostische vragen door meer experts te laten reviewen, om dit te bewerkstelligen hadden meer mogelijke experts in een eerder stadium van het onderzoek benaderd moeten worden.

Het expert panel heeft een planning ontvangen waarin aan is gegeven wanneer de vragen toegestuurd zouden worden en wanneer de feedback verwacht werd. In deze planning is telkens een week opgenomen tussen het toesturen van de vragen en het ontvangen van de feedback. Dit is te weinig tijd om van alle benaderde experts feedback te ontvangen. Zij zijn immers zelf ook docenten en hebben een drukke planning met toetsweken, waarbij het geven van feedback op diagnostische vragen voor een afstudeeronderzoek niet de hoogste prioriteit heeft. Daarom is het beter om het expert panel meer tijd te geven voor het reviewen van de diagnostische vragen. Met die planning hadden wellicht ook meer experts gereageerd op het review verzoek.

De vragenlijst voor de experts, zoals zichtbaar in de methode van dit onderzoek, is met enige spoed geconstrueerd. Het was prettiger geweest om langer bij deze vragenlijst stil te staan en nog specifiekere feedback te vragen. Op die manier hadden meer ontwerpeisen door het expert panel gecontroleerd kunnen worden. De evaluatie van ontwerpeis 4 is bijvoorbeeld volledig gebaseerd op het inzicht van de auteurs. Feedback van het expert panel had hier kunnen helpen om de diagnostische vragen nog sterker te maken gedurende het herontwerp.

Tijdstip en frequentie van diagnostische vragen in de les
In het theoretisch kader zijn er verschillende momenten beschreven wanneer een diagnostische vraag gesteld kan worden in de les: aan het begin, in het midden en aan het einde (Barton, 2020). Tijdens de uitvoering zijn acht van de tien diagnostische vragen aan het begin van de les uitgevoerd. Barton (2020) benoemt vijf doelen die horen bij dit moment in de les, waarvan er twee zijn toegepast in dit onderzoek. Het eerste doel bevat het evalueren van voorkennis (Barton, 2020). Een voorbeeld hiervan is vraag 4 (grafiek eerste en tweede afgeleide), welke werd gesteld in een les waarin de buigraaklijk geïntroduceerd werd. Door deze diagnostische vraag werd gelijk de voorkennis over extreme waarden en buigpunten naar boven gehaald. Het inzetten van de diagnostische vraag om voorkennis te evalueren is een nuttige aanpak voor zowel de docent als de leerling. De docent krijgt een duidelijk overzicht van het niveau van de klas over dit onderwerp en kan de diagnostische vraag ook als brug gebruiken naar de nieuwe theorie. De leerlingen hebben een actieve start van de les en halen tegelijkertijd relevante voorkennis op.

Het tweede doel van vragen stellen aan het begin van de les die toegepast is in de praktijk is om gebruik te maken van het testeffect (Barton, 2020). Dit is het geval bij vraag 6 (differentiëren van $a\sqrt{x}$). Deze nieuwe vaardigheid is in de vorige les geïntroduceerd en wordt in de huidige les getest bij de leerlingen. Na het stellen van de vraag vervolgde de les zich met de introductie van een nieuw stuk theorie, niet direct gelinkt aan het differentiëren van een functie zoals $f(x) = a\sqrt{x}$. Ook deze combinatie van moment in de les en doel was nuttig: het was, net zoals het vorig doel, een actieve start van de les en zowel de docent als de leerlingen kunnen testen of de nieuwe vaardigheid geïntroduceerd in vorige les is begrepen en blijven hangen.

Vraag 2 (quotiëntregel) is aan het eind van de les gesteld met als doel om inzichten te verkrijgen in hoeverre de leerdoelen van de les zijn behaald (Barton, 2020). Een voordeel van deze toepassing is dat er automatisch een gezamenlijke lesafsluiting gecreëerd wordt waarin de docent de aandacht van de leerlingen heeft. Echter kwam er ook een nadeel aan het licht, namelijk dat er geen tijd meer over was om de vraag uitgebreid te bespreken aan het einde van de les, zowel individueel, in een groepje of klassikaal. De docent kan daarbij ook niet direct onthouden welke leerling welk antwoord heeft gegeven voor volgende les. Een alternatieve methode die hiervoor mogelijk passender zou zijn is het gebruik van exit tickets (Barton, 2020), waarbij de docent de antwoorden van de leerlingen overzichtelijk op papier ingeleverd krijgt en in alle rust in een volgende les op terug kan komen.

Vraag 5 (afgeleide van $\frac{1}{ax^n}$) is gesteld in het midden van de les, met als doel om informatie te verzamelen waarmee een geïnformeerde beslissing gemaakt kan worden of het juiste moment is aangebroken om met nieuwe leerstof aan de slag te gaan (Barton, 2020). In de eerste helft van de les kwam de theorie aan bod over differentiëren van $f(x) = x^n$ voor $n \in \mathbb{N}$ en in de tweede helft het differentiëren van $f(x) = x^n$ voor $n \in \mathbb{R}$. Het stellen van vraag 5 (afgeleide van $\frac{1}{ax^n}$) zorgde voor een mooie en nuttige overgang tussen deze twee onderdelen. Ten eerste wordt hiermee getest in hoeverre de stof van het eerste deel van de les door de leerlingen is begrepen en ten tweede heeft de docent direct de aandacht van alle leerlingen voor het volgende klassikale deel van de les.

Er werden één of twee diagnostische vragen per les gesteld, wat een goed en haalbaar aantal bleek te zijn. Eenmalig werd er één vraag aan het begin en één aan het eind van dezelfde les gesteld, waardoor er genoeg tijd tussendoor beschikbaar was om de kaartjes te verzamelen, herstructureren en opnieuw uit te delen. Echter is het stellen van twee vragen achter elkaar minder praktisch, aangezien dit problemen kan opleveren met het verzamelen van de antwoordfrequenties. Het is daarom aan te raden om in dit geval de frequenties van de eerst gestelde vraag kort te noteren i.p.v. de kaartjes op te halen zoals beschreven in de methode.

Uitvoering van de diagnostische vragen in de les
Volgens het theoretisch kader zijn er verschillende manieren om diagnostische vragen te stellen. In de methode is beschreven dat er bij de klas waar differentiaalrekening behandeld wordt, gebruik wordt gemaakt van kleurenkaartjes waarvan elke kleur overeenkomt met één van de antwoordmogelijkheden A, B, C, D en E. Na uitvoering blijkt dat deze methode een aantal voor- en nadelen heeft, die mogelijk overeenkomen met de besproken punten uit het theoretisch kader.

- Een voordeel van het gebruik van kleurenkaartjes is dat je als docent direct een duidelijk overzicht krijgt welke leerling welk antwoord heeft gekozen zodra de klas gezamenlijk hun keuze kenbaar maakt. Dit is in lijn met het voordeel benoemd door Wylie & William (2006).

- Een ander voordeel is de efficiëntie van dataverzameling. In dit onderzoek werden de antwoordfrequenties verzameld door de gekozen kaartjes op te halen en ze achteraf te tellen. Echter was het overzicht van de klas dusdanig duidelijk door de kleurtjes, dat deze data ook snel verzameld kon worden door de antwoorden te tellen en te noteren.

- Een voordeel van kleurenkaartjes dat ook naar boven kwam tijdens de uitvoering, is het enthousiasme van de leerlingen. In de klas waar het onderzoek is uitgevoerd voor differentiaalrekening, leken de leerlingen het leuk te vinden als de kleurenkaartjes er weer bij gepakt werden en deden ze enthousiast mee.

- Een groot nadeel van het gebruik van kleurenkaartjes is de bekostiging van tijd, voornamelijk in de voorbereiding. Voordat de les begon moeten alle kaartjes geordend worden op kleur en moeten hiervan kaartenpakketjes worden gemaakt. Dit kostte meer tijd dan verwacht, voornamelijk omdat na elke les de kaartjes weer opnieuw geordend moesten worden. Vervolgens werden de kaartenpakketjes tijdens de les uitgedeeld aan de leerlingen. Hierbij moet je goed opletten dat je de leerlingen de goede kaarten geeft, waardoor er weinig aandacht over was voor het houden van overzicht in de klas. Dit resulteerde in wachtende leerlingen die gingen spelen met kaartjes: een potje kwartetten en er is zelfs een kaartenhuis gebouwd. Dit probleem kan natuurlijk verminderd worden door een sterkere klassenmanagement, maar er zijn ook andere mogelijkheden. Zo kunnen de kaartjes van tevoren klaargelegd worden op de tafels van de leerlingen in het geval dat de vraag aan het begin van de les gesteld wordt. Daarnaast kan er voor gekozen worden om de kaartjes uit te delen tijdens het moment dat de leerlingen de vraag zien en aan het nadenken zijn. Dit brengt meer rust voor de docent, maar kan mogelijk wel als storend worden ervaren door de leerlingen zelf.

- In het theoretisch kader wordt het volgende nadeel benoemd van kleurenkaartjes: leerlingen kunnen makkelijk van elkaar zien wie waarop gestemd heeft, wat kan resulteren in niet oprechte antwoorden en wat het zelfvertrouwen en bereidwilligheid van leerlingen om mee te doen negatief kan beïnvloeden (Barton, 2020). Uit de praktijk blijkt dat je als docent niet constant in de gaten kan houden of leerlingen van kaartjes wisselen zodra er gezamenlijk gestemd is. Echter is dit niet als storende factor ervaren tijdens de uitvoering van de vragen van differentiaalrekening. Zoals ook te zien is in de resultaten in tabel 11, zijn er bij de meeste vragen gevarieerde antwoorden gegeven en zitten er waarschijnlijk genoeg leerlingen in de klas die bereid zijn om hun eigen hoofd te volgen en niet altijd mee gaan met de menigte.

Ontwerpeis 2 geeft aan dat er bij iedere vraag een extra antwoordmogelijkheid beschikbaar is, waarbij leerlingen de mogelijkheid krijgen om zelf een juiste antwoord te formuleren wanneer zij denken dat het juiste antwoord niet tussen de opties A t/m D staat. Zoals te zien in tabel 11, hebben meerdere leerlingen van extra antwoordmogelijkheid E gebruik gemaakt. De leerling kan het als een voordeel beschouwen om van deze optie gebruik te maken, aangezien ze hierdoor alsnog hun denkwijze kunnen delen en eventueel achter hun mogelijke fout kunnen komen. Tegelijkertijd is het ook voordelig voor de docent, aangezien hiermee nieuwe misvattingen of veelgemaakte fouten gevonden kunnen worden. Ook kan de extra antwoordmogelijkheid worden ingezet als de correcte antwoordmogelijkheid, zoals het geval is bij vraag 9 (herleiden afgeleide). Deze vraag is helaas niet getest in de praktijk. Zodra de leerlingen hebben ervaren dat de extra antwoordmogelijkheid ook een reële optie is als correct antwoord, zullen hopelijk nog meer leerlingen gebruik maken van deze mogelijkheid.

Ontwerpeis 8 geeft aan dat diagnostische vragen niet langer dan een minuut mogen duren. Dit betekent dat de beschikbare tijd voor de vraag ook bijgehouden is tijdens de uitvoering van de diagnostische vragen. De tijd is bijgehouden m.b.v. de digitale klok op de laptop. Dit betekent dat alleen de docent zelf zicht heeft op de tijd maar de leerlingen niet. Een voordeel hiervan is dat de docent de benodigde tijd eventueel korter of langer kan maken zonder dat de leerlingen dit direct doorhebben. Als de leerlingen wel zicht hadden op de precieze tijd, zoals een timer op het bord, dan is deze flexibiliteit minder aanwezig. De leerlingen kunnen zich met de gebruikte methode enkel focussen op de vraag en raken niet afgeleid door andere zaken zoals de aflopende tijd.

6.3 Resultaten

In tabel 11 van de resultaten zijn de verzamelde frequenties van de antwoordmogelijkheden van de eerste ontwerpen gepresenteerd. Hieruit valt af te lezen dat een aantal diagnostische vragen door de hele klas volledig goed zijn beantwoord. Dit is bijvoorbeeld het geval voor **vraag 1 (hoogte & helling lineaire functie)** en **vraag 3 (hoogte & helling kromme)**. Dit is een verwacht resultaat, aangezien deze vraag net onder het niveau ligt van vwo 4 wiskunde B. Echter zijn de misvattingen m.b.t. onderscheidingsvermogen tussen helling en hoogte die in deze vragen aan bod komen, wel belangrijk voor differentiaalrekening, zoals benoemd door McDermott et al. (1987).

Verder is **vraag 4 (grafiek eerste en tweede afgeleide)** ook volledig goed beantwoord. Een verklaring hiervoor kan zijn dat de leerlingen de begrippen extreme waarden en buigpunten goed hebben begrepen, maar mogelijk ook dat leerlingen bij elkaar af hebben gekeken.

Als laatste hadden alle leerlingen **vraag 9 (herleiden afgeleide)** goed beantwoord. Dit is opmerkelijk, aangezien mijn verwachting was dat veel leerlingen deze herleiding erg lastig zouden vinden. Een mogelijke verklaring voor nul fout is dat leerlingen gokten op de breuk die er het meest eenvoudig uit zag, namelijk antwoord B van het eerste ontwerp. Om dit mogelijke probleem te omzeilen, is in het herontwerp antwoord B vervangen door een misvatting en extra antwoordmogelijkheid E als het correcte antwoord bestempeld. Op deze manier kan de docent alsnog achterhalen welke leerlingen de herleiding echt volledig begrijpen, welke leerlingen niet en waar deze leerlingen mogelijk vastlopen.

Naast het kiezen van correcte antwoorden, werden er ook verkeerde antwoordmogelijkheden gekozen. In tabel 12 van de resultaten zijn de misvattingen en veelgemaakte fouten te vinden van de antwoordmogelijkheden waarvan de relatieve frequentie hoger was dan 25%. Dit betreft ook **vraag 5 (afgeleide van $\frac{1}{ax^n}$)**. 53% van de leerlingen had gekozen voor de foutieve antwoordmogelijkheid met de volgende achterliggende technische fout: $\frac{1}{2x^4} = 2x^{-4}$. Dit is een veelvoorkomende fout die ik zelf ook had verwacht bij een deel van de leerlingen. De aanbeveling voor in de les is dan ook om deze veelgemaakte fout direct klassikaal aan te pakken na het uitvoeren van deze diagnostische vraag, bijvoorbeeld door duidelijk het verschil te laten zien tussen $\frac{1}{2x^4}$ en $\frac{2}{x^4}$.

Bij **vraag 6 (differentiëren van $a\sqrt{x}$)** had 48% van de leerlingen gekozen voor het foutieve antwoord met de volgende technische fout: $2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$. Deze fout is de inverse van de technische fout benoemd in vraag 5. Ik had zelf deze fout daarom ook verwacht in de praktijk, maar het opmerkelijke is dat twee experts juist hadden aangegeven dat ze de misvattingen en fouten bij deze vraag niet vaak tegenkomen. Ook bij deze vraag geldt dezelfde aanbeveling als bij vraag 5. Het is dan van belang om duidelijk te maken dat deze fout dus twee kanten op werkt, wat waarschijnlijk nog niet helemaal over was gekomen op de leerlingen na de klassikale bespreking van vraag 5.

Vraag 7 (kettingregel) heeft met 87% de hoogste relatieve frequentie bij een fout antwoord van alle vragen. De achterliggende fout omvat een verdraaide definitie van de kettingregel: het gebruik van een plusteken i.p.v. een vermenigvuldigingsteken, resulterend in $(x^2 + 3x)^4$ gedifferentieerd naar $4(x^2 + 3x)^3 + 2x + 3$. Een opmerkelijk resultaat, aangezien in de feedback van de experts juist naar voren kwam dat specifiek deze fout nooit voorkomt. Ook ikzelf had verwacht dat de andere foutieve antwoordmogelijkheden eerder gekozen zouden worden door leerlingen dan deze. Een mogelijke verklaring voor dit resultaat kan te maken hebben me de timing van deze vraag: de kettingregel is voor het eerst geïntroduceerd aan de klas tijdens het 5e uur op de laatste vrijdag voor de meivakantie. Deze diagnostische vraag over de kettingregel is vervolgens gesteld op de eerste maandag na de meivakantie, direct aan het begin van de les. Dit zal kunnen verklaren waarom de definitie van de kettingregel nog niet helemaal correct was overgekomen bij de leerlingen. Als aanbeveling wil ik meegeven om in dit geval deze diagnostische vraag klassikaal te bespreken na de uitvoering, de definitie van de kettingregel opnieuw toe te lichten en hierbij duidelijk onderscheid te maken tussen de kettingregel, productregel en somregel.

Tot slot bevatte **vraag 8 (combinatie productregel & kettingregel)** een veelgemaakte fout met een bijbehorende relatieve frequentie van 80%. De fout komt voort uit een onvolledig eindantwoord: de leerling is vergeten de kettingregel toe te passen bij het differentiëren van $\sqrt{2x+1}$. Dit is een fout die ik zelf ook had verwacht in deze klas, aangezien de samengestelde functie in kwestie een wortel betreft en niet een samengestelde functie van de vorm $(ax^p + b)^q$ met $p, q \in \mathbb{N}$. Bij dit tweede kan ik me voorstellen dat het makkelijker is om te herkennen dat je de kettingregel moet toepassen. De aanbeveling die ik hierbij wil geven is om deze vraag direct klassikaal te bespreken na uitvoering en de leerlingen er op te wijzen dat ook in dit geval de kettingregel toegepast dient te worden.

6.4 Kwaliteit en beperkingen van het onderzoek

Kwaliteit

Er is een eerste ontwerp gemaakt van twintig diagnostische vragen voor gebruik in de wiskundeles. De vragen zijn ontworpen door de auteurs met de ontwerpeisen als uitgangspunt. Deze ontwerpeisen zijn gebaseerd op de literatuur. De auteurs zijn docenten in opleiding met geringe ervaring in het lesgeven in het onderwijs. Om de kwaliteit van de vragen te bevorderen, zijn experts gevraagd om de vragen te evalueren en hier feedback op te geven. Verder zijn de vragen in de les uitgevoerd, waarmee de docent in opleiding nieuwe inzichten verkregen heeft om de vragen beter te maken. Dit heeft samen geleid tot het herontwerp zoals gepresenteerd in de resultaten. De vragen van het herontwerp zijn niet uitgevoerd in de praktijk. Hierdoor is er niet vastgesteld in hoeverre de kwaliteit van de diagnostische vragen verbeterd is in de praktijk. In het oorspronkelijke plan was het streven om eerst de feedback te verzamelen, toe te passen en vervolgens de herontworpen vragen uit te voeren in de klas. Hierdoor was er wel de mogelijkheid geweest om de kwaliteit van het herontwerp in de praktijk te beoordelen.

Zoals aangegeven in de methode, is het eerste ontwerp van de vragen eenmalig uitgevoerd bij één klas. Hier zijn antwoordfrequenties en bevindingen van de auteurs uitgekomen. In de discussie wordt ingegaan op de antwoordfrequenties en worden hiervoor mogelijke verklaringen aangedragen. Deze verklaringen zijn dus gebaseerd op één uitvoeringsmoment. Dat maakt de verklaringen niet algemeen geldend, hier dient rekening mee gehouden te worden bij het meenemen van de bevindingen voor de eigen lespraktijk.

Het feedbackformulier van de experts is vier keer ingevuld per vraag. Dit geeft aanleiding tot verbetering van de vraag, echter bleek deze feedback gevarieerd van aard. De verbeterpunten zijn regelmatig door een individu aangehaald, welke we vervolgens hebben toegepast. Echter zijn dit subjectieve oordelen waardoor het niet zeker is of het verbeterpunt toegevoegde waarde heeft. Wanneer hetzelfde verbeterpunt meermaals wordt aangedragen, dan is er meer grond om keuzes in het herontwerp te beargumenteren. Dit had bewerkstelligd kunnen worden door van meer experts feedback te krijgen.

In de evaluatie wordt toegelicht of het herontwerp voldoet aan de ontwerpeisen. Dit is grotendeels gebaseerd op de mening van de auteurs en experts. Echter dient hierbij rekening te worden gehouden dat dit subjectieve oordelen betreft. Dit zou er toe kunnen leiden dat andere experts een andere conclusie zouden trekken m.b.t. het behalen van het ontwerpdoel.

Beperkingen
Zoals benoemd in de discussie, was de periode voor feedbackverzameling niet realistisch. Dit had te maken met de lengte van de periode, namelijk één week, en de timing van de periode, namelijk rond de toetsweken op de middelbare school. Idealiter was er meer tijd geweest voor de feedbackverzameling, echter was dit niet mogelijk door de vastgestelde planning van het onderzoek voor de feedbackverzamelingsperiode. Een andere beperking na de feedbackverzamelingsperiode hierbij was dat lessen op de middelbare school voor het hele jaar vaststaan en de uitvoering hierdoor niet verplaatst kon worden.

Als tweede was er een beperking m.b.t. de uitvoering. Voor zowel de uitvoering van de vragen van differentiaal- en integraalrekening was er op moment van uitvoering één klas beschikbaar. Dit limiteert de hoeveelheid data die verzameld kan worden.

Er is gelimiteerde hoeveelheid literatuur te vinden omtrent specifieke misvattingen en veelgemaakte fouten gekoppeld aan de thema's differentiaal- en integraalrekening, die relevant zijn voor dit onderzoek. Dit heeft ertoe geleid dat er veel misvattingen en veelgemaakte fouten bedacht zijn door de auteurs, welke opnieuw voortkomen uit een subjectief oordeel. Daarbovenop is een tweede beperking de gelimiteerde ervaring van docenten in opleiding. Zij hebben het betreffende thema nog niet eerder gedoceerd, wat het lastig maakt om relevante misvattingen en veelgemaakte fouten te bedenken.

6.5 Aanbevelingen

Zijn diagnostische vragen een toevoeging aan de wiskundeles?
Het gebruik van diagnostische vragen zijn een goede toevoeging aan de wiskundelessen. Het stellen van de vragen nam weinig tijd in beslag. De duratie van de vraag zelf is één minuut en met de dataverzameling en bespreking van de vraag erbovenop duurt het in totaal niet meer dan 5 minuten. De diagnostische vragen brengen veelgemaakte fouten en misvattingen aan het licht die spelen bij de individuele leerling, welke direct aangepakt kunnen worden. De vragen kunnen ook een positieve bijdrage leveren aan het enthousiasme van de leerlingen.

Aanbevelingen m.b.t. de herontworpen diagnostische vragen bij differentiaalrekening
Alle tien diagnostische vragen van differentiaalrekening zijn klaar voor gebruik in de vwo 4 wiskunde B les. Vraag 1 (hoogte & helling lineaire functie) en vraag 3 (hoogte & helling kromme) worden aangeraden om al te gebruiken in de onderbouw, echter zijn ze nog steeds nuttig bij vwo 4 om eventuele belangrijke misvattingen te onderscheppen. Daarnaast vormen deze vragen een goede introductie tot diagnostische vragen zelf. Vraag 8 (combinatie productregel & kettingregel) en vraag 9 (afgeleide herleiden) worden aangeraden om achter elkaar te stellen. Ondanks dat vraag 2 (quotiëntregel) niet voldoet aan ontwerpeis 8 (duratie één minuut), wordt aanbevolen om deze vraag alsnog te gebruiken in de les met een aangepaste duratie van twee minuten. De volgorde van de vragen is gebaseerd op de doorlopende lijn van hoofdstuk 6 'Differentiaalrekening' van Getal & Ruimte vwo 4. Indien de doorlopende leerlijn van Getal & Ruimte gevolgd wordt, zal worden aangeraden om vraag 10 (afgeleide functie met parameter) eerder te stellen aan de klas, bijvoorbeeld tussen vraag 3 (hoogte & helling kromme) en 4 (grafiek eerste en tweede afgeleide) in. Functies met parameters komen namelijk al eerder aan bod in hoofdstuk 6 dan in de eerste instantie gedacht door de auteur.

Aanbevelingen m.b.t. de uitvoering van diagnostische vragen in de les
Het gebruik van kleurenkaartjes als methode had zowel voordelen als nadelen, zoals beschreven in dit hoofdstuk. Om de nadelen te limiteren, wordt aangeraden om de kleurenkaartjes van tevoren klaar te leggen op de tafels van de leerlingen vóórdat de les begint. Hierbij wordt dan ook aangeraden om de vraag aan het begin van de les te stellen. Uit de discussie blijkt dat het stellen van een vraag midden in de les ook voordelen biedt, in dit geval wordt aangeraden om de kaartjes uit te delen tijdens de denktijd van de leerlingen. Voor het stellen van een diagnostische vraag aan het eind van de les wordt aangeraden om exit tickets te gebruiken i.p.v. kleurenkaartjes.

Aanbevelingen voor verder onderzoek
Mocht een vergelijkbaar onderzoek m.b.t. diagnostische vragen worden uitgevoerd door anderen, dan zijn daar een aantal aanbevelingen voor.

- Er wordt aangeraden om meer tijd te nemen voor de feedback verzameling en om een grotere groep aan experts te benaderen.
- Een alternatieve methode die aangeraden wordt is als volgt: het eerste ontwerp laten reviewen door experts, deze feedback gebruiken om een herontwerp te maken. Vervolgens kan dit herontwerp in meerdere klassen uitgevoerd worden.
- Een aangrenzend onderwerp is het uitvoeren van een effectiviteitsanalyse op het gebruik van diagnostische vragen. Hierbij is het interessant om ook het leerlingperspectief mee te nemen.
- Het zou waardevol kunnen zijn om verschillende methodes m.b.t. het stellen van diagnostische vragen in de les te vergelijken.

7. Bronnenlijst

Barton, C. (2020). *Volgens Barton.* Uitgeverij Phronese.

Bezuidenhout, J., & Olivier, A. (2000). Students' conceptions of the integral. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 2* (pp. 73-80). Hiroshima: Hiroshima University.

Bloom, B. S. (1969). Some theoretical issues relating to educational evaluation. In R. W. Tyler, *Educational evaluation: New roles, new means. The 63rd yearbook of the National Society for the Study of Educaction, part 2* (pp. 26-50). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Cornelissen, J. (1994). *Aansluitingspoblemen met wiskunde bij eerstejaarsstudenten van de TUE.* Eindhoven: TU/e Eindhoven University of Technology.

Diagnostic Questions. (sd). *Diagnostic Questions*. diagnosticquestions.com. https://diagnosticquestions.com/

Diagnostische vragen. (sd). *Diagnostische vragen*. diagnostischevragen.nl. https://www.diagnostischevragen.nl/

Expertis Onderwijsadviseurs. (sd). *Zo stel je vragen waar je leerlingen echt beter van worden!* expertis.nl. https://expertis.nl/nieuwsoverzicht/zo-stel-je-vragen-waar-je-leerlingen-echt-beter-van-worden/

Foster, C., Woodhead, S., Barton, C., & Clark-Wilson, A. (2022). School students’ confidence when answering diagnostic questions online. *Educational Studies in Mathematics volume 109*, pp. 491-521.

Kiat, S. E. (2005). Analysis of Students' Difficulties in Solving Integration Problems. *The Mathematics Educator, 9*(1), 39-59.

Kneyber, R., Sluijsmans, D., Devid, V., & Wilde López, B. (2022). *Formatief handelen: van instrument naar ontwerp.* Uitgeverij Phronese.

Li, V. L., Julaihi, N. H., & Eng, T. H. (2017). Misconceptions and Errors in Learning Integral Calculus. *Asian Journal of University Education Vol. 13 (No. 1)*, 17-39.

Luneta, K., & Makonye, P. J. (2010). Learner errors and misconceptions in elementary analysis: a case study of a grade 12 class in South Africa. *Acta Didactica Napocensia v3 n3*, pp. 35-46.

McDermott, L. C., Rosenquist, M. L., & Van Zee, E. H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. *American Journal Physics 55 (6)*, pp. 503-513.

Muzangwa, J., & Chifamba, P. (2012). Analysis of errors and misconceptions in the learning of Calculus by undergraduate students. *Acta Didactica Naposcensia*, 1-10.

Orton, A. (1983). Student's Understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics Vol. 14 (No. 1)*, 1-18.

Prieto, M. C., Palma, L. O., Tobías, P. B., & León, F. M. (2019). Student Assessment of the Use of Kahoot in the Learning Process of Science and Mathematics. *Education Sciences*, 1-13.

Sabbe, E., & Lesage, E. (2012). *Meerkeuzetoetsen: praktische handleiding voor leerkrachten en doctenten.* Antwerpen: Garant.

Sapire, I., Shalem, Y., Wilson-Thompson, B., & Paulsen, R. (2016). Engaging with learners' errors when teaching mathematics. *Pythagoras - Journal of the Association for Mathematics Education of South Africa, 37*(1), 1-11. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v37i1.331

Schnepper, L. C., & McCoy, L. P. (2013). Analysis of Misconceptions in High School Mathematics. *Networks: An Online Journal for Teacher Research v15 issue 1 article 7*.

Sluijsmans, D. (2020). Toetsing als motor voor leren: naar succeservaringen voor alle leerlingen. *Remediaal 2020 - 2-3*, pp. 6-12.

van Ast, M., de Loor, O., & Spijkerboer, L. (2021). *Effectief leren, de docent als regisseur.* Groningen: Noordhoff.

Vyas, R., & Supe, A. (2008). Multiple choice questions: A literature review on the optimal number of options. *The National Medical Journal of India Vol. 21, No. 3*, pp. 130-133.

Wylie, E. C., & William, D. (2006). *Diagnostic questions: is there value in just one.* San Fransisco, CA: Annual Meeting of the National Council on Measurement in Education.

Yee, N. K., & Lam, T. T. (2008). Pre-university Students' Errors in Integration of Rational Functions and Implications for Classroom Teaching. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia, 31*(2), 100-116.

8. Bijlagen

Bijlage A – Inhoud wiskunde B hoofdstukken 6 en 11 Getal & Ruimte

TABEL 13 – INHOUD WISKUNDE B HOOFDSTUK 11 GETAL & RUIMTE INTEGRAALREKENING

Paragraaf	Inhoud
Voorkennis ''Afgeleide en raaklijn''	Definitie en regels bij de afgeleide (som-, verschil-, product- en quotiëntregel) Het opstellen van de formule van een raaklijn
6.1 ''Toppen en buigpunten''	Algebraïsch berekenen en aantonen van extreme waarden Buigpunten berekenen Het opstellen van de formule bij een buigraaklijn
6.2 ''De afgeleide van machtsfuncties''	Machtsregel met n een reëel getal
6.3 ''De kettingregel''	Afgeleide van een samengestelde functie Kettingregel gecombineerd met product- of quotiëntregel
6.4 ''Functies met parameters''	Raaklijnproblemen bij functies met een parameter Kromme door toppen Rakende grafieken Loodrecht snijdende grafieken

TABEL 14 – INHOUD WISKUNDE B HOOFDSTUK 6 GETAL & RUIMTE DIFFERENTIAALREKENING

Paragraaf	Inhoud
Voorkennis ''Herleiden''	Herleiden van machten Herleiden van afgeleiden Herleiden van functiewaarden
11.1 ''Primitieven en integralen''	Definitie van een primitieve functie Primitiveren en primitiveerregels Integralen en oppervlakte onder een grafiek berekenen
11.2 ''Oppervlakten''	Primitieven en de kettingregel Oppervlakte van een vlakdeel tussen grafieken
11.3 ''Inhouden''	De inhoud van een omwentelingslichaam Vlakdelen wentelen om de x-as Vlakdelen wentelen om de y-as
11.4 ''Toepassingen van integralen''	Kegel en bol Afgelegde weg, snelheid en versnelling Integralen numeriek benaderen Booglengte

Bijlage B - Onderwerp, doel, moment en uitvoeringsdatum eerste ontwerp diagnostische vragen differentiaalrekening

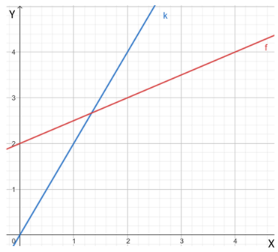
TABEL 15 – ONDERWERP, DOEL, MOMENT, UITVOERINGSDATUM EERSTE ONTWERP DIAGNOSTISCHE VRAGEN

Vraag	Onderwerp	Doel	Moment in de les	Uitvoeringsdatum
1	Helling en hoogte bij de grafiek van lineaire functies	Voorkennis evalueren	Begin	Maandag 15 april
2	Quotiëntregel	Inzichten verkrijgen in leerdoelen	Eind	Maandag 15 april
3	Helling en hoogte bij een kromme	Voorkennis evalueren	Begin	Dinsdag 16 april
4	Grafieken bij de eerste en tweede afgeleide functie	Voorkennis evalueren	Begin	Vrijdag 19 april
5	Differentiëren van de vorm $f(x) = \frac{1}{ax^n}$	Beslissing maken voor vordering leerstof	Midden	Dinsdag 23 april
6	Differentiëren van een wortelfunctie van de vorm $f(x) = a\sqrt{x}$	Gebruik maken van testeffect	Begin	Vrijdag 26 april
7	Kettingregel	Voorkennis evalueren	Begin	Maandag 13 mei
8	Combinatie productregel en kettingregel	Gebruik maken van testeffect	Begin	Dinsdag 14 mei
9	Herleiden van afgeleide met een wortel in de noemer van de breuk	Gebruik maken van testeffect	Begin	Dinsdag 14 mei
10	Afgeleide van functies met een parameter	Voorkennis evalueren	Begin	Vrijdag 17 mei

Bijlage C – Eerste ontwerp diagnostische vragen differentiaalrekening

Vraag 1: Onderscheiding tussen hoogte en helling bij de grafiek van een lineaire functie

Vul in:
Op punt x = 1, de helling van lijn k is .... de helling van lijn f



A. Groter dan

B. Gelijk aan

C. Kleiner dan

D. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

Doel: het testen van het onderscheidingsvermogen tussen hoogte en helling bij de grafiek van een lineaire functie.	
A. Groter dan	Correct: de leerling kan correct onderscheid maken tussen de helling en hoogte bij de grafiek van een lineaire functie
B. Gelijk aan	Misvatting: de leerling heeft de foutieve overtuiging dat twee lijnen een gelijke helling hebben zodra deze lijnen een raakpunt hebben.
C. Kleiner dan	Misvatting: de leerling heeft de foutieve overtuiging dat de grootte van de helling afhangt van de hoogte van de grafiek.

Vraag 2: Toepassing quotiëntregel bij differentiëren

Differentieer:

$$f(x) = \frac{x+5}{x^2+3}$$

A. $f'(x) = \frac{-x^2-10x+3}{(x^2+3)}$

B. $f'(x) = \frac{3x^2+10x+3}{(x^2+3)^2}$

C. $f'(x) = \frac{x^2+10x-3}{(x^2+3)^2}$

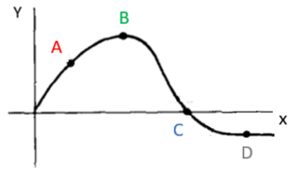
D. $f'(x) = \frac{-x^2-10x+3}{(x^2+3)^2}$

E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

Doel: testen of de leerlingen de quotiëntregel correct toe kunnen passen bij het differentiëren.	
A.	Veelgemaakte fout: de leerling is het kwadraat vergeten in de noemer van de afgeleide.
B.	Veelgemaakte fout: de leerling heeft een plus-teken gebruikt in de plek van een min-teken in de quotiëntregel, namelijk $\frac{nat+tan}{n^2}$ i.p.v. $\frac{nat-tan}{n^2}$
C.	Veelgemaakte fout: de leerling heeft de verkeerde volgorde toegepast in de quotiëntregel in de teller, namelijk $\frac{tan-nat}{n^2}$ i.p.v. $\frac{nat-tan}{n^2}$
D.	Correct: de leerling kan de quotiëntregel correct toepassen bij het differentiëren.

Vraag 3: Interpretatie van hoogte en helling bij een kromme

Welke uitspraak is correct over de punten van de grafiek?



A.
De helling van de grafiek neemt toe tussen punt A en B

B.
De helling van de grafiek in punt B is gelijk aan 0

C.
De helling van de grafiek in punt C is gelijk aan 0

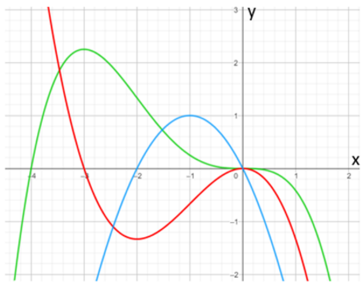
D.
De grafiek heeft een toenemende daling van punt C naar D

E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: …

Doel: het testen van het interpretatievermogen van de hoogte en helling bij een kromme.	
A.	Misvatting: de leerling heeft de foutieve overtuiging dat de helling stijgt wanneer de grafiek toeneemt.
B.	Correct: de leerling kan correcte interpretaties maken van de helling en hoogte bij een kromme.
C.	Misvatting: de leerling heeft de foutieve overtuiging dat de helling gelijk is aan 0 bij een hoogte van y = 0.
D.	Veelgemaakte fout: de leerling houdt toenemende daling door de war met afnemende daling.

Vraag 4: Interpretatie van de grafieken van de eerste en tweede afgeleide functie

Drie functies zijn gegeven. Zet ze op volgorde, geordend op kleur, als $f(x), f'(x)$ en $f"(x)$



A. blauw, rood, groen

B. rood, blauw, groen

C. groen, rood, blauw

D. (ik kan zelf niet zo snel nog een 4e bedenken)

E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: …

Doel: het testen van het interpretatievermogen van de grafieken behorende bij de eerste en tweede afgeleide functie.	
A.	Misvatting: de leerling heeft de foutieve overtuiging dat een extreme waarde in de afgeleide functie impliceert dat de normale functie in ditzelfde punt de x-as snijdt.
B.	Veelgemaakte fout: de leerling denkt dat de rode functie (in dit geval $f(x)$) een buigpunt heeft in x = 0 i.p.v. een maximum, aangezien de groene functie (in dit geval $f"(x)$) hier de x-as snijdt. Naar de verdere verloop van de groene functie is niet gekeken. Ook heeft de leerling niet gekeken naar extreme waarden in de blauwe functie (in dit geval $f'(x)$) en zo het buigpunt in x = -1 over het hoofd gezien.
C.	Correct: de leerling kan correcte interpretaties maken over de grafieken van de eerste en tweede afgeleide functie ($f'(x) = 0$ geeft extreme waarden van $f(x)$ en $f(x)$ heeft buigpunt als $f'(x)$ een extreme waarde heeft)

Vraag 5: Berekenen van de afgeleide bij een functie van de vorm $f(x) = \frac{1}{ax^n}$

Bereken de afgeleide:

$$f(x) = \frac{1}{2x^4}$$

A. $f'(x) = \frac{1}{8x^3}$

B. $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

C. $f'(x) = -\frac{2}{x^5}$

D. $f'(x) = -\frac{1}{8x^5}$

E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

<table>
<tr><td colspan="2">Doel: testen of de leerlingen correct de afgeleide kunnen bepalen van de functie van de vorm $f(x) = \frac{1}{ax^n}$</td></tr>
<tr><td>A.</td><td>Misvatting: de leerling heeft de foutieve overtuiging dat je de noemer van de breuk los kan differentiëren.</td></tr>
<tr><td>B.</td><td>Veelgemaakte fout: de leerling differentieert $f(x) = \frac{1}{2}x^{-4}$ naar

$f'(x) = -2x^{-3}$ i.p.v. $f'(x) = -2x^{-5}$. De leerling bepaalt de nieuwe exponent van de afgeleide via $4 - 1 = 3$ (“1 van de exponent afhalen”) in plaats van $-4 - 1 = -5$ (rekenen volgens de getallenlijn)</td></tr>
<tr><td>C.</td><td>Correct: de leerlingen kan op correcte wijze de afgeleide bepalen van de functie van de vorm $f(x) = \frac{1}{ax^n}$</td></tr>
<tr><td>D.</td><td>Veelgemaakte fout: de leerling verwart $f(x) = \frac{1}{2x^4}$ met $f(x) = \frac{2}{x^4}$
Waaruit volgt
$$f(x) = \frac{1}{2x^4} = 2x^{-4} \; en \; f'(x) = -8x^{-5} = -\frac{1}{8x^5}$$</td></tr>
</table>

Vraag 6: Differentiëren van een wortelfunctie van de vorm $f(x) = a\sqrt{x}$

Differentieer:

$$f(x) = 4\sqrt{x}$$

A. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

B. $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$

C. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

D. $f'(x) = 16$

E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

<table>
<tr><td colspan="2">Doel: testen of de leerlingen correct een wortelfunctie van de vorm $f(x) = a\sqrt{x}$ kunnen differentiëren.</td></tr>
<tr><td>A.</td><td>Veelgemaakte fout: de leerling schrijft $f(x) = 4\sqrt{x}$ om naar $f(x) = 4^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$, oftewel verheft zowel de variabele x als het getal 4 met ½. Vervolgens differentieert de leerling $f(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$.</td></tr>
<tr><td>B.</td><td>Correct: de leerling kan op correcte wijze een wortelfunctie van de vorm $f(x) = a\sqrt{x}$ differentiëren.</td></tr>
<tr><td>C.</td><td>Veelgemaakte fout: de leerling verwart $2x^{-\frac{1}{2}}$ met $(2x)^{-\frac{1}{2}}$ en schrijft vervolgens $f'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}}$ om naar $\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$</td></tr>
<tr><td>D.</td><td>Veelgemaakte fout: de leerling verwart de regels van differentiëren van een wortelfunctie met het oplossen van wortelvergelijkingen. De leerling kwadrateert $4\sqrt{x}$ wat uit komt op $16x$. Differentiëren van $16x$ geeft 16.</td></tr>
</table>

Vraag 7: Toepassing kettingregel bij differentiëren

Differentieer:

$$f(x) = (x^2 + 3x)^4$$

A. $f'(x) = (8x + 12)(x^2 + 3x)^3$

B. $f'(x) = 8x(x^2 + 3x)^3 + 3$

C. $f'(x) = 4(x^2 + 3x)^3 + 2x + 3$

D. $f'(x) = 4(x^2 + 3x)^3$

E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

Doel: testen of de leerlingen de kettingregel correct toe kunnen passen bij het differentiëren.	
A.	Correct: de leerling kan de kettingregel correct toepassen bij het differentiëren.
B.	Veelgemaakte fout: de leerling is de haakjes vergeten bij de vermenigvuldiging met $(2x + 3)$, oftewel $f'(x) = 4(x^2 + 3x)^3 \cdot 2x + 3$ $f'(x) = 8x(x^2 + 3x)^3 + 3$
C.	Veelgemaakte fout: de leerling heeft een plusteken gebruikt i.p.v. een vermenigvuldigingsteken bij de vermenigvuldiging met $(2x + 3)$, oftewel $f'(x) = 4(x^2 + 3x)^3 + 2x + 3$ Mogelijk verwart de leerling de kettingregel met de productregel.
D.	Veelgemaakte fout: de leerling is vergeten de kettingregel toe te passen.

Vraag 8: Toepassing cominatie van productregel en kettingregel bij differentiëren

Gegeven is de functie:

$$f(x) = x\sqrt{2x + 1}$$

$f'(x)$ is gelijk aan...

A. $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x + 1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$

B. $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x + 1} \cdot x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$

C. $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x + 1} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

D. $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x + 1} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

Doel: testen of de leerlingen correct de productregel in combinatie met de kettingregel kunnen toepassen bij een functie die het product is van twee factoren.	
A.	Veelgemaakte fout: de leerling is vergeten de kettingregel toe te passen bij het differentiëren van $\sqrt{2x + 1}$.
B.	Veelgemaakte fout: de leerling is vergeten de kettingregel toe te passen bij het differentiëren van $\sqrt{2x + 1}$ en de leerling gebruikt een vermenigvuldigingsteken i.p.v. een plusteken bij de productregel.
C.	Correct: de leerling kan correct de productregel in combinatie met de kettingregel toepassen.
D.	Veelgemaakte fout: de leerling gebruikt een vermenigvuldigingsteken i.p.v. een plusteken bij de productregel.

Vraag 9: Herleiden van de formule van de afgeleide met een wortel in de noemer van de breuk.

Gegeven is de afgeleide van functie f:

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

Herleid de formule van de afgeleide.

A. $f'(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$

B. $f'(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$

C. $f'(x) = x$

D. $f'(x) = \frac{\sqrt{2x+1}+x}{\sqrt{2x+1}}$

E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

Doel: testen of de leerlingen correct de formule van een afgeleide kunnen herleiden met een wortel in de noemer.	
A.	Veelgemaakte fout: de leerling heeft de eerste tussenstap gezet voor het herleiden van de formule, maar heeft de formule niet volledig herleid tot één breuk.
B.	Correct: de leerling kan correct de formule van een afgeleide herleiden met een wortel in de noemer van de breuk.
C.	Veelgemaakte fout: de leerling heeft het plusteken verward met een vermenigvuldigingsteken, oftewel $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x+1} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}} = \sqrt{2x+1} \cdot \frac{x}{\sqrt{2x+1}} = x$
D.	Veelgemaakte fout: de leerling heeft $\sqrt{2x+1}$ direct opgeteld bij de teller van de breuk $\frac{x}{\sqrt{2x+1}}$.

Vraag 10: Berekenen van de afgeleide bij functies met een parameter

Bereken de afgeleide:

$$f_p(x) = p^3x^4 + 2p$$

A. $f_p{}'(x) = 12p^2x^3 + 2$

B. $f_p{}'(x) = 4p^3x^3 + 2$

C. $f_p{}'(x) = 3p^2x^4 + 4p^3x^3 + 2$

D. $f_p{}'(x) = 4p^3x^3$

E. Het juiste antwoord staat er niet tussen, dat is namelijk: ...

Doel: testen of de leerlingen correct de afgeleide kunnen berekenen van functies met een parameter.	
A.	Veelgemaakte fout: de leerling weet niet goed welke stappen hij moet zetten om een functie met een parameter te differentiëren. Hij haalt verschillende differentieerregels door elkaar, voornamelijk geleid door de exponenten: $f_p{}'(x) = 3p^2 \cdot 4x^3 + 2 = 12p^2x^3 + 2$
B.	Misvatting: de leerling heeft de foutieve overtuiging dat je een term van de vorm ax, met a een getal en x een variablele of parameter, altijd moet differentiëren naar a. In dit geval differentieert de leerling $2p$ dus naar 2.
C.	Misvatting: de leerling heeft de foutieve overtuiging dat je zowel de variabele x als de parameter p moet differentiëren. De leerling ziet p^3x^4 als een product van twee functies en past daarom de productregel toe, waaruit deze antwoordmogelijkheid volgt.
D.	Correct: de leerling kan correct de afgeleide berekenen van functies met een parameter.

Bijlage D – Feedbackverwerking expert panel differentiaalrekening

Vraag 1: Onderscheiding tussen hoogte en helling bij de grafiek van een lineaire functie

- Suggesties verbetering vraagstelling:
  - Zet de formules er bij *-> past niet bij het doel van de diagnostische vraag en de bijbehorende gebruikte literatuur, dus niet toegepast*
  - ‘Gegeven is x = 1. Vul in:...’ *-> toegepast*
  - Gebruik l of m voor de lijn *-> toegepast*
  - ‘functiewaarde’ ipv ‘hoogte’ *-> dit komt niet in de vraag zelf voor, alleen in de onderbouwing. Hierin volg ik de verwoording van de literatuur.*
- Suggesties antwoordmogelijkheden:
  - Bij A: ...tussen de helling en de hoogte van de grafiek... *-> toegepast*
  - Bij B: ‘snijpunt’ i.p.v. ‘raakpunt’ *-> toegepast*
- Eigen aanpassing:
  - Antwoordmogelijkheden links onder elkaar neergezet.
- Tijdsduur:
  - Binnen 1 minuut
  - Binnen 1 minuut
  - Binnen 1 minuut
  - Binnen 1 minuut

Vraag 2: Toepassing quotiëntregel bij differentiëren

- Suggesties verbetering vraagstelling:
  - ‘Bereken de afgeleide van’ i.p.v. ‘Differentieer’, maar ‘Differentieer’ is ook prima direct. *-> beide vraagstellingen komen aan bod in de reeks diagnostische vragen, dus niet veranderd.*
  - Haakjes weglaten bij noemer van antwoord A *-> deze antwoordmogelijkheid is verwisseld, dus niet meer nodig.*
- Suggesties antwoordmogelijkheden:
  - Leerlingen vergeten de min te gebruiken bij het stukje *tan* en komen uit op $f'(x) = \frac{-x^2+10x+3}{(x^2+3)^2}$. *-> toegepast, dit was ook één van de antwoorden gekregen bij antwoord E tijdens de uitvoering. Om die reden verwisseld voor A, aangezien A niet gekozen is bij de uitvoering. Daarnaast zullen door deze verwisseling alle antwoorden dezelfde noemer hebben en wordt huidig antwoord A dus niet direct weggestreept door leerlingen omdat dit het afwijkende antwoord is.*
  - Leerlingen zullen misschien de noemer zelf differentiëren, wat uitkomt op $f'(x) = \frac{-x^2-10x+3}{2x}$ *-> goede aanvulling, maar niet toegepast aangezien dan niet meer de tellers van alle antwoordmogelijkheden verschillend zijn (na de verwisseling van antwoord A). Ik verwacht dat de leerlingen dit antwoord dan al direct weg zouden strepen.*
  - Afgeleide quotiëntfunctie is at/an in dit geval 1/2x *-> verwachting dat deze minder voorkomt dan andere antwoordmogelijkheden, dus niet toegepast*
  - $f'(x) = \frac{-x^2-10x+3}{x^4+9}$ *-> goede optie maar toetst een extra vaardigheid naast de nieuwe vaardigheid die getoetst wordt in deze vraag (het wegwerken van haakjes in de noemer). Voldoet dan niet aan ontwerpeis 7.*
- Eigen aanpassing:

- Vraagstelling veranderd naar: gegeven is f(x)... differentieer f(x). Deze feedback heb ik gekregen in de tweede feedbackronde.

- Tijdsduur:
  - Max 2 minuten
  - Langer dan 1 minuut
  - Binnen 1 minuut
  - Binnen 3 minuten

Vraag 3: Interpretatie van hoogte en helling bij een kromme

- Suggestie verbetering vraagstelling:
  - Een grafiek én zijn hellingsgrafiek geven en daarover vragen stellen *-> dit is vraag 4, dus niet toegepast*
  - Punten op de grafiek moeten anders gelabeld worden om verwarring met de keuzes te vermijden, bijvoorbeeld P, Q, R, S. *-> toegepast*
  - 'grafiek' ipv 'kromme' *-> dit komt niet in de vraag zelf voor, alleen in de onderbouwing. Hierin volg ik de verwoording van de literatuur.*
- Suggesties antwoordmogelijkheden:
  - Bij B: 'verband leggen tussen' in plaats van 'interpretaties maken van de' *-> toegepast*
  - Bij C: …helling in een punt van de grafiek gelijk is aan 0 bij een snijpunt van de grafiek met de x-as *-> toegepast*
  - Bij D : 'daling van de grafiek' in plaats van 'afnemende daling' *-> niet in overeenkomst met terminologie van G&R, dus niet toegepast*
  - Bij A & D: ...punt C en punt B *-> toegepast*
  - Er worden veel misvattingen in één vraag getoetst**.** Misschien handiger om hier te splitsen tussen positieve/negatieve afgeleide en tussen stijgende/dalende afgeleide *-> deze vraag is gebaseerd op literatuur, waar juist werd aangeraden om deze misvattingen samen in één vraag te toetsen. Om deze reden is deze feedback niet toegepast.*
- Tijdsduur:
  - Binnen 1 minuut
  - Binnen 1 minuut
  - Binnen 1 minuut
  - Binnen 1 minuut

Vraag 4: Interpretatie van de grafieken van de eerste en tweede afgeleide functie

- Suggestie verbetering vraagstelling:
  - Antwoordmogelijkheden weglaten en leerlingen de volgorde op laten schrijven *-> voldoet niet aan ontwerpeis 1 van diagnostische vragen dus niet toegepast*
  - De misconcepties zijn ook met 3e, 2e en 1e graads functie te tesen, maakt het overzichtelijker. *-> uitgeprobeerd voor $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2$, maar dan voldoen de bijbehorende misvattingen en veelgemaakte fouten niet meer. Dus niet toegepast.*

- Suggestie antwoordmogelijkheden:

- Drie antwoordmogelijkheden zijn genoeg. *-> ik hou het op A, B, C en D*

- Eigen aanpassing:
  - Antwoordmogelijkheden links onder elkaar neergezet.
- Tijdsduur:
  - Te beantwoorden binnen 1 minuut, maar als de leerling in de war raakt niet meer. *-> vraagstelling en antwoordmogelijkheden anders geformuleerd om verwarring te voorkomen*
  - Langer dan 1 minuut, geen tijd voor checken van het antwoord
  - Binnen 1 minuut
  - Langer dan 1 minuut, lastig

Vraag 5: Berekenen van de afgeleide bij een functie van de vorm $f(x) = \frac{1}{ax^n}$

- Suggestie verbetering vraagstelling:
  - Beetje onduidelijk welke functie gedifferentieerd moet worden. Zet neer f(x)=... en daarna de opdracht: Differentieer f. *-> toegepast*
- Suggestie antwoordmogelijkheden:
  - Mogelijke fout bij antwoord D: $-8x^{-5} \neq -\frac{1}{8x^5}$. Is dit een eigen fout of fout die we van leerlingen verwachten? *-> fout die de leerling naar verwachting zal maken*
  - Antwoord -8/x^5 via differentiatie van 2 x^-4 *-> dit komt deels al terug in antwoord D, waarbij de leerlingen consistent deze fout maken. Antwoord D is ook vaak gekozen door leerlingen bij de uitvoering, dus deze antwoordmogelijkheid pas ik niet aan.*
- Eigen aanpassing:
  - *Antwoordmogelijkheid heeft de volgende antwoorden opgeleverd: tweemaal $f'(x) = -\frac{4}{x^5}$ en eenmaal $f'(x) = \frac{8}{x^5}$. De eerste vervang ik voor A, aangezien A niet is gekozen bij de uitvoering en mij het minst waarschijnlijke mogelijkheid lijkt uit alle antwoorden die leerlingen zullen kiezen. De tweede pas ik niet toe, aangezien deze grotendeels verwerkt is in antwoord D.*
- Tijdsduur:
  - 1-2 minuten
  - 2 minuten
  - 3 minuten

Vraag 6: Differentiëren van een wortelfunctie van de vorm $f(x) = a\sqrt{x}$

- Suggestie verbetering vraagstelling:
  - Zet neer f(x)=... en daarna de opdracht: Differentieer f. *-> toegepast*
- Suggestie antwoordmogelijkheden:
  - Zijn de veelgemaakte fouten ook echt veelgemaakt hier? *-> blijkbaar wel, voornamelijk C want deze is 10x gekozen bij de uitvoering.*
  - Genoemde misvattingen komen zelden voor. Misschien $4\sqrt{1}$ nog *-> toegepast, vervangen voor D aangezien dit antwoord niet was gekozen door leerlingen bij de uitvoering. Ook lijkt mij $4\sqrt{1}$ waarschijnlijker om gekozen te worden dan 16.*

- Tijdsduur:
  - 2 minuten
  - 30 seconden

- 1 minuut
- 3 minuten

Vraag 7: Toepassing kettingregel bij differentiëren

- Suggestie antwoordmogelijkheden:
  - Leerling die vergeet de kettingregel te gebruiken en alleen de macht voor de functie haalt en 1 kleiner maakt *-> dit is al optie D*
  - B en D komen voor, C eigenlijk nooit. Wat wel gebeurt: $f(x) = (2x + 3)^4$ *-> C is juist vaak gekozen tijdens de uitvoering, en deze fout lijkt me minder waarschijnlijk dan B en D. Om deze reden gebruik ik deze suggestie niet.*
  - Laat uitvoeren van algebraïsche bewerkingen achterwege, dus de niet-herleide vorm als antwoordmogelijkheid geven -> *dit is een goed punt en sluit aan bij de ontwerpeisen, namelijk om de randzaken zo eenvoudig mogelijk te laten (ontwerpeis 6). De nieuwe vaardigheid is het toepassen van de kettingregel en het uitvoeren van de algebraïsche bewerkingen kan gezien worden als voorkennis. Om deze reden is dit aangepast in de antwoordmogelijkheden.*
- Eigen aanpassing:
  - Aanpassing aan de vraagstelling: gegeven is f(x)=... en daarna de opdracht: Differentieer f.
- Tijdsduur:
  - Binnen 1 minuut
  - Meerdere minuten
  - 2 minuten, voornamelijk door herkenning
  - 3 minuten

Vraag 8: Toepassing combinatie van productregel en kettingregel bij differentiëren

- Suggestie verbetering vraagstelling:
  - Misschien handig om iets lastigere functie in de wortel te zetten *-> niet toegepast, aangezien dit niet overeenkomt met de ontwerpeis waarin wordt vermeld dat randzaken zo eenvoudig mogelijk gehouden moeten worden (ontwerpeis 6).*
- Suggestie antwoordmogelijkheden:
  - Bij B alleen testen op eerstgenoemde fout. Het vermenigvuldigingsteken toets je al bij antwoord D *-> de eerstgenoemde fout wordt getest in antwoord A. De suggestie zelf vind ik goed en om deze reden, in combinatie met het feit dat antwoord B niet gekozen is bij de uitvoering, zal ik antwoord B vervangen als er een betere suggestie gegeven wordt.*
  - Plus i.p.v. vermenigvuldigingsteken komt bijna nooit voor. Volgende suggesties wel: kettingregel vergeten & beide factoren onafhankelijk van elkaar differentiëren *-> kettingregel vergeten komt voor in antwoord A. Beide factoren onafhankelijk van elkaar differentiëren is een goede suggestie, daarom heb ik deze fout vervangen voor antwoord B, om de reden benoemd in de vorige comment.*
- Tijdsduur:
  - 1 minuut
  - 30 seconden

    - 3 minuten
    - 5 minuten

Vraag 9: Herleiden van de formule van de afgeleide met een wortel in de noemer van de breuk.

- Suggestie verbetering vraagstelling:
    - Blijkbaar is de instructie ‘herleid’ een bekende voor leerlingen, ze moeten één breuk antwoorden. In dat geval zou ik kiezen voor de formulering ‘Herleid deze formule’ en niet meer het woord afgeleide gebruiken. *-> goed punt, om deze reden heb ik de hele vraagstelling aangepast om zo de vraagstelling veel duidelijker te krijgen voor iedereen.*
    - Het is niet een differentieer-vaardigheid toetsen -> *het herleiden van functies is ook een vaardigheid die leerlingen moeten kunnen beheersen binnen het hoofdstuk ‘Differentiaalrekening’ van G&R*
- Suggestie antwoordmogelijkheden:
    - Ik zou tussenstappen opschrijven. Nu is het veel te veel in één keer. Op die manier kun je vragen waar het mis gaat. Dan lukt het wel binnen een normale hoeveelheid tijd. Mijn ervaring met dit soort vragen is dat leerlingen hier meer dan 1 fout in maken, dus dan werkt dit niet. *-> goed punt, om deze reden antwoordmogelijkheid C vervangen door een van de tussenstappen. Zo kan ik uit deze vraag beter opmaken hoe ver de leerlingen komen met de herleiding en bij welke stap de leerling dan vastloopt.*
- Eigen aanpassing:
    - Tijdens de uitvoering hadden alle leerlingen het goede antwoord gekozen. Dit kan natuurlijk zijn omdat ze het echt weten, maar het kan ook zijn dat ze keken naar de meest eenvoudige vorm en deze gegokt hadden. Om dit te voorkomen heb ik extra antwoordmogelijkheid E ingezet als het correcte antwoord. Antwoord B is vervangen door een misvatting. Op deze manier kan de docent nog duidelijker inzien wie de vaardigheid van herleiden bij deze vraag echt kan en bij wie dit nog niet het geval blijkt te zijn.
- Tijdsduur:
    - 1 minuut
    - 3 minuten
    - 3 minuten

Vraag 10: Berekenen van de afgeleide bij functies met een parameter

- Suggestie verbetering vraagstelling:
    - Hoe eenduidig is afgeleide als ik twee variabelen (p en x) zie? Bereken d/dx zou de zaakl verhelderen, of de afgeleide naar x *-> dit is naar mijn mening al duidelijk door het gebruik van $f_p(x)$.*
- Suggestie antwoordmogelijkheden:
    - Twee misconcepties erin stoppen, dus 2p wordt 2 en kettingregel gebruiken en dan 1 goed, 1 waar beide in fout gaan en 1 antwoord waar één goed en één fout gaat. *-> volgens de ontwerpeisen moeten de antwoordmogelijkheden zo ontworpen zijn dat ze één misvatting/veelgemaakte fout per antwoord bevatten, dus ik pas deze suggestie niet toe (ontwerpeis 1).*
- Eigen aanpassing:
    - Aanpassing aan de vraagstelling: gegeven is f(x)=... en daarna de opdracht: Differentieer f.
- Tijdsduur:
    - 1 minuut
    - 30 seconden
    - 1 minuut
    - 3 minuten