UNIVERSITY OF TWENTE.

Onderzoek van Onderwijs – Wiskunde (10EC)
Educatie in de Bètawetenschappen

# Wiskunde leren door een primaire historische bron: motivatieverhogend voor leerlingen?

C.L. Grimberg BSc
s1804286

Eerste begeleider: Dr.ir. T.J.M. Coenen
Tweede begeleider: W.R. van der Meulen MSc

Datum: 13 november 2024

# Samenvatting

In dit onderzoek wordt het effect van het gebruik van een primaire historische bron voor het leren van wiskunde op de intrinsieke motivatie van middelbare scholieren onderzocht. Twee groepen 5VWO wiskunde D-leerlingen werkten aan werkbladen over de benadering van $\pi$ door Archimedes, waarbij de ene groep een werkblad kreeg met een primaire historische bron en de andere groep een werkblad zonder zo'n bron. Na afloop vulden de leerlingen een voor dit onderzoek ontworpen vragenlijst in, waarmee hun intrinsieke motivatie en kijk op wiskunde als wetenschap gemeten kon worden. De resultaten toonden geen significant verschil in intrinsieke motivatie tussen de twee groepen, wat suggereert dat het gebruik van een primaire bron op zichzelf geen direct effect heeft op de intrinsieke motivatie. De groep die met de historische bron werkte, ontwikkelde echter wel een significant positievere kijk op wiskunde als wetenschap. Dit wijst erop dat het gebruik van primaire bronnen meer bijdraagt aan een beter besef van de menselijke kant van wiskunde en grotere waardering voor de ontwikkeling van wiskundige ideeën, dan het niet gebruik maken ervan. Deze positievere kijk zou uiteindelijk de intrinsieke motivatie voor het vak kunnen verhogen. Met dit inzicht kunnen docenten weloverwogen afwegen hoe en met welke doelen zij geschiedenis willen inzetten in de wiskundeles.

# Inhoudsopgave

# 1 Introductie

## 1.1 Aanleiding

Wiskunde: een vak dat bij veel middelbare scholieren angst oproept en wordt ervaren als een soort 'abracadabra'. Een vak dat wordt gezien als een verzameling aan 'trucjes' die toegepast kunnen worden om voorgeschreven problemen op te lossen. Die 'trucjes', lees: wiskundige formules en regels, worden vaak aangeleerd zonder dieper begrip van de ontstaanswijze of afleiding erachter; dit zou alleen besteed zijn aan mensen met een aangeboren 'wiskundeknobbel'. Wiskunde wordt door veel leerlingen beschouwd als een 'afstandelijk' en 'statisch' vak. Alsof het een soort afgewerkt geheel is van kennis, dat weinig verband lijkt te houden met het echte leven. Dit beeld dat middelbare scholieren hebben van wiskunde is verontrustend, want het kan ze ontmoedigen en kan hun interesse voor het vak doen verminderen. Als toekomstig docent wil ik graag bijdragen aan een ander, positiever beeld van wiskunde. Ik geloof dat 'Geschiedenis van Wiskunde' hierbij een belangrijke rol kan spelen.

Eind februari 2022 begon ik met het volgen van het vak 'Geschiedenis van de Wiskunde', dat onderdeel is van het programma WISK4all voor toekomstige docenten. Van tevoren wist ik niet goed wat ik kon verwachten. Zouden we colleges krijgen waarin allerlei informatie over beroemde oud-wiskundigen op ons werd afgevuurd? Zouden we worden meegenomen in een reis door de tijd waarbij we leerden over de totstandkoming van wiskundige concepten? Achteraf kan ik zeggen dat het vak inderdaad antwoorden op deze vragen gaf, maar ook dat het veel verder ging dan dat. Niet alleen leerden we *over* de geschiedenis van wiskunde, we leerden ook *door middel van* geschiedenis wiskunde. Door het leren *over* de geschiedenis van wiskunde ben ik mij veel bewuster van hoe de wiskunde vroeger was en hoe het zich tot de huidige wiskunde heeft kunnen ontwikkelen. Welke cruciale ideeën en ook misvattingen hier aan bij hebben gedragen. Ook het leren van wiskunde *door middel van* geschiedenis vond ik waardevol: bekende wiskundige concepten vanuit een vroeger en ander oogpunt zien gaf nieuwe inzichten en verdieping van bestaande kennis. Door geschiedenis is mijn enthousiasme en waardering voor wiskunde alleen maar gestegen.

Door mijn positieve ervaringen en inzichten die ik heb opgedaan uit het vak 'Geschiedenis van de Wiskunde' ben ik steeds meer gaan beseffen hoe jammer het is dat de geschiedenis van de wiskunde nauwelijks aan bod komt in de wiskundeles. Ik ben ervan overtuigd dat wiskundelessen nog veel rijker en betekenisvoller kunnen worden wanneer leerlingen een inkijkje in de geschiedenis krijgen. Tegelijkertijd ben ik me bewust van de uitdagingen, zoals het volle curriculum, die het integreren van geschiedenis in het lesprogramma bemoeilijken. Toch geloof ik dat het belangrijk is om te onderzoeken hoe geschiedenis effectief kan worden ingezet in de wiskundeles. Ik hoop met dit onderzoek bij te dragen aan een breder begrip rondom dit thema, waardoor het gebruik van geschiedenis in de wiskundeles wellicht nog meer wordt gestimuleerd.

## 1.2 Probleemstelling & Hoofdvraag

Al decennia lang wordt er onderzoek gedaan naar het integreren van de geschiedenis van wiskunde in de wiskundeles. Over de vele positieve effecten hiervan op leerlingen is in de literatuur veelvuldig geschreven. Zo zou geschiedenis bij leerlingen interesse wekken en hun motivatie verhogen, leren ze de 'menselijke kant' van wiskunde kennen, zien ze de optimistische kant van het maken van fouten, wordt de link tussen wiskunde en andere disciplines duidelijker, worden ze zich bewust van het belang van wiskunde in de maatschappij én helpt het hen wiskunde beter te begrijpen (Doz, 2021; Fauvel, 1991; Jankvist, 2009a; Lim & Chapman, 2015; Tzanakis e.a., 2000). Ondanks deze goede redenen om geschiedenis te integreren in de wiskundeles komt er in de praktijk maar weinig van terecht. Het is niet opgenomen in het huidige curriculum en lesmethoden besteden er, anders dan hier en daar een informatieblokje, vrijwel geen aandacht aan (Noordhoff Uitgevers, n.d. Uitgeversgroep Noordhoff, n.d.). De keuze of geschiedenis van wiskunde wordt ingezet in de les, ligt dus voornamelijk bij docenten zelf. Helaas maken velen van hen de veilige keuze om geschiedenis vrijwel geen rol te laten spelen in hun lessen. Drie begrijpelijke oorzaken hiervan zijn: er is te weinig tijd en ruimte in het wiskundecurriculum, er zijn niet genoeg geschikte materialen beschikbaar en er is een gebrek aan kennis over geschiedenis van de wiskunde bij docenten (Berlinghoff, 2016; Gulikers & Blom, 2001; Panasuk & Horton, 2012; Tzanakis e.a., 2000).

Vooral het gebruik van *primaire historische bronnen* in de les is wat betreft voorbereiding voor docenten veeleisend en tijdrovend. Er is een gedetailleerd en diep begrip nodig van de tijd en ontwikkeling van het wiskundige concept waarover in de historische bron is geschreven (Jahnke e.a., 2000). Ook het doorgronden van oude tekst en bijbehorende notaties is niet makkelijk. Toch zou juist het inzetten van deze originele historische bronnen lonend zijn voor leerlingen en hun wiskundig begrip verbeteren en verdiepen (Gulikers & Blom, 2001; Jahnke e.a., 2000; Jankvist, 2009a).

Wat betreft het effect van het leren van wiskunde door primaire bronnen op de motivatie bij leerlingen is er concreet nog niet veel bekend. Geschiedenis zou sowieso motivatieverhogend zijn (Doz, 2021; Fauvel, 1991; Jankvist, 2009a; Lim & Chapman, 2015; Tzanakis e.a., 2000), maar wellicht kunnen wat betreft motivatie dezelfde effecten worden bereikt zonder gebruik te maken van originele bronnen. In dat geval hoeven docenten zich, met het oog op het verhogen van de motivatie bij leerlingen, niet per se te wenden tot originele bronnen. Óf misschien wekken juist die originele bronnen interesse en een positieve(re) houding tegenover wiskunde bij leerlingen op. In dat geval zijn er nog meer redenen om juist met primaire bronnen te werken. Dit is wat er onderzocht gaat worden in deze studie. De hoofdvraag van het onderzoek luidt daarom:

*"Wat is het specifieke effect van het gebruik van een primaire historische bron bij het leren van wiskunde op de intrinsieke motivatie van middelbare scholieren?"*

Met een antwoord op deze vraag zouden docenten een meer weloverwogen beslissing kunnen nemen op welke manier zij, rekening houdend met hun lesdoelen, geschiedenis willen inzetten in de les.

# 2 Theoretisch kader

In dit hoofdstuk wordt een uiteenzetting gegeven van de relevante theorie voor dit onderzoek. Het is opgedeeld in verschillende onderdelen, ook wel de deelvragen. De antwoorden op deze deelvragen zullen helpen met het richting geven aan de uitvoering van het onderzoek en uiteindelijk het beantwoorden van de hoofdvraag. Deelvraag 1 gaat in op de verschillende manieren waarop een docent wiskunde kan gebruiken in de les. Hierbij zal de focus liggen op het gebruiken van geschiedenis als middel om wiskunde te leren, met in het bijzonder het gebruik van primaire historische bronnen. Deelvraag 2 gaat over het begrip motivatie: wat is de definitie ervan en wat voor concepten hangen er nauw mee samen? In dit onderdeel zal vooral aandacht gegeven worden aan intrinsieke motivatie. In deelvraag 3 wordt er onderzocht welke mogelijkheden er zijn voor het meten van intrinsieke motivatie en worden deze uiteengezet.

## 2.1 Deelvraag 1: Op welke manieren kan geschiedenis van de wiskunde worden ingezet in de les?

Er zijn ontzettend veel manieren waarop men geschiedenis kan laten terugkomen in de wiskundeles. Denk aan het vertellen van anekdotes, het lezen van historische biografieën of verhalen, het maken van een project over geschiedenis van de wiskunde, het onderzoeken van oude wiskundige instrumenten en het doorgronden van primaire bronnen. Daarnaast zijn er ook heel wat doelen die de docent voor ogen kan hebben bij het gebruiken van geschiedenis. Zo kan het een doel zijn om interesse te wekken, leerlingen bewust te maken van hoe de wiskunde zich heeft geëvolueerd of om het begrip bij leerlingen van een wiskundig concept te verdiepen. De vele mogelijkheden die er zijn en keuzes die een docent moet maken vraagt om een gestructureerde aanpak bij het kiezen hoe geschiedenis ingezet gaat worden in de les. Dit begint met het duidelijk krijgen van wat de docent precies wil bereiken met geschiedenis in haar les.

### 2.1.1 Geschiedenis als 'doel' of als 'tool'

Over het algemeen kan geschiedenis volgens Jankvist (2009b) conform twee ideeën worden ingezet in de wiskundeles. Ten eerste kan het een *doel* zijn. Een doel om leerlingen iets te leren over de geschiedenis van de wiskunde en ze bewust te maken van de evolutionaire aspecten van het vak. Ten tweede kan geschiedenis gebruikt worden als *tool*, oftewel als hulpmiddel. Een hulpmiddel voor docenten en leerlingen om bijvoorbeeld leerlingen te motiveren of wiskunde (aan) te leren. Deze twee ideeën worden hieronder nog eens nader toegelicht.

Bij het gebruik van geschiedenis in de les als *doel* heeft de docent niet per se voor ogen om leerlingen wiskundige concepten en methodes te onderwijzen, maar eerder om leerlingen *over* wiskunde te laten leren. Jankvist kaart aan dat dit niet verward moet worden met het geven van 'Geschiedenis van de Wiskunde' als een soort apart vak. Tussen deze twee benaderingen zit een dunne scheidslijn. Hoewel het zeker waardevol kan zijn om leerlingen over oud-wiskundigen, jaartallen en gebeurtenissen te laten leren, is het de vraag in hoeverre het dan nog een wiskundeles blijft als dat het doel is (Jankvist, 2009a). Ook Fauvel (1991) benadrukt dat er niet een 'nieuw' vak 'geschiedenis van de wiskunde' moet ontstaan. Volgens Jankvist (2009b) ligt bij het gebruik van geschiedenis als *doel* de focus op de ontwikkeling van de wiskunde als wetenschap. Leerlingen leren hier onder andere door dat wiskunde niet zomaar uit het niets is ontstaan, maar dat dat aan menselijke activiteit te danken is. Ook worden ze zich ervan bewust welke plaats en noodzaak wiskunde had in de maatschappij. Bij het inzetten van geschiedenis als *doel* gaat het er dus om dat leerlingen vanuit een metaperspectief naar wiskunde gaan kijken (Jankvist, 2009b). Een positief bijeffect kan zijn dat ze wiskundige onderwerpen beter gaan begrijpen, alleen is dat bij deze manier van geschiedenis inzetten niet het primaire doel.

Zoals gezegd dient bij het gebruik van geschiedenis als *tool* de geschiedenis als hulpmiddel om, direct of indirect, leerlingen wiskunde te leren. Hierbij gaat het om het leren *van* wiskunde: wiskundige theorieën, concepten en methodes. Met 'direct of indirect' wordt het volgende bedoeld. Direct kan geschiedenis helpen bij het leren van wiskunde, door het vak vanuit een ander perspectief of via een andere route aan te bieden. Ook kan geschiedenis helpen om onderlinge relaties tussen verschillende wiskundige concepten te herkennen (Lim & Chapman, 2015). In deze context wordt geschiedenis gezien als *cognitieve* tool: een middel waarmee leerlingen hun wiskundige kennis en vaardigheden verbreden en/of verdiepen. Indirect kan geschiedenis ook bijdragen aan het leren van wiskunde door het als *motivationele* tool te laten dienen. Het kan helpen om de interesse te wekken en leerlingen enthousiast te maken voor het vak, oftewel: het kan de motivatie voor wiskunde verhogen. Het verhogen van motivatie voor het vak wiskunde is niet alleen op zichzelf staand al een mooie opbrengst. Een hogere motivatie zorgt ook voor meer inzet en doorzettingsvermogen, wat bijdraagt aan het leren van wiskunde (OECD, 2017). Daarnaast is het voor de docent prettig om met gemotiveerde leerlingen te werken en heeft dit een positieve invloed op het functioneren van de docent. Geschiedenis kan ook worden gezien en ingezet als *affectieve* tool. Het kan gebruikt worden om te laten zien dat oud-wiskundigen ook onzeker waren over hun bevindingen en fouten maakten. En dat het soms eeuwenlang heeft geduurd voordat sommige onderdelen begrepen werden. Door deze inzichten zou het vak voor leerlingen minder beangstigend kunnen worden en kan het ze helpen niet te snel ontmoedigd te raken. Dit soort effecten zouden bij het inzetten van geschiedenis als *doel* ook kunnen worden bereikt, maar is daar, in tegenstelling tot bij het inzetten van geschiedenis als *tool*, niet het primaire doel.

### 2.1.2 Het leren van geschiedenis, het leren van wiskundige onderwerpen en het ontwikkelen van een dieper bewustzijn

Het onderscheid dat Jankvist maakt wat betreft het inzetten van geschiedenis als *doel* of *tool* heeft gelijkenissen met het onderscheid dat Tzanakis en Arcavi (2000) maken in hun analytische onderzoek naar het integreren van geschiedenis in de les, dat ze hebben uitgevoerd voor de ICMI studie (Tzanakis e.a., 2000). In dat onderzoek onderscheiden ze drie verschillende visies van waaruit geschiedenis kan worden ingezet in de les, namelijk: *het leren van geschiedenis*, *het leren van wiskundige onderwerpen* en *het ontwikkelen van een dieper bewustzijn*.

De eerste visie, *het leren van geschiedenis*, kan worden ingevuld door het rechtstreeks, mondeling of schriftelijk, aanbieden van directe historische informatie. Hieronder valt het geven van geïsoleerde, feitelijke informatie zoals namen, jaartallen, beroemde werken en gebeurtenissen. Ook (fragmenten uit) boeken over de geschiedenis van wiskunde kunnen worden gebruikt. Op deze benaderingswijze, die een sterke focus heeft op geschiedenis en minder op wiskunde, gaat Jankvist niet in en behoort volgens hem niet in een van de categorieën geschiedenis inzetten als *doel* of *tool* (Jankvist, 2009a).

De tweede visie, *het leren van wiskundige onderwerpen*, valt onder Jankvists idee van het gebruiken van geschiedenis als *tool*, specifieker: als *cognitieve* tool. Arcavi en Tzanakis leggen bij deze visie sterk de nadruk op het volgen van een aanpak die geïnspireerd is door hoe de ontwikkeling van de wiskunde vroeger is gegaan. Dit kan bijvoorbeeld door een wiskundig concept pas te behandelen nadat duidelijk is geworden waarom daar ooit behoefte aan is geweest. Arcavi en Tzanakis stellen dat, bij het inzetten van geschiedenis vanuit de visie om *wiskundige onderwerpen te leren*, de 'genetic approach' van onderwijzen en leren gevolgd kan worden. Deze benadering gebruikt de evolutie van de wiskunde als leidraad voor het onderwijs. Leerlingen worden dus begeleidt door de historische ontwikkeling van wiskundige concepten. Dit kan worden gedaan door vraagstukken te presenteren zoals ze oorspronkelijk werden ervaren door oud-wiskundigen. Deze vraagstukken kunnen gereconstrueerd worden in een moderne context en notatie om ze zo toegankelijker te maken voor middelbare scholieren. Jankvist vergelijkt deze 'genetic approach', oorspronkelijk bedacht door Toeplitz (Fried & Jahnke, 2015), met het 'guided reinvention' van Freudenthal (Freudenthal, 2005). Deze twee verschillende aanpakken kunnen complementair aan elkaar zijn: bij beide staat de manier hoe wiskundige concepten zijn bedacht centraal, terwijl bij de 'genetic approach' leerlingen de historische ontwikkeling volgen en bij 'guided reinvention' leerlingen wiskunde gaan herontdekken op basis van hun kennis, ervaringen en talenten (Jankvist, 2009a).

Bij de derde visie, *het ontwikkelen van een dieper bewustzijn*, wordt geschiedenis gebruikt om leerlingen bewuster te maken van wiskunde als ontwikkelende discipline en van de sociale en culturele invloeden die het heeft gekend. Dit kan bijvoorbeeld gedaan worden door vroegere notaties, terminologieën en methodes aan bod te laten komen die laten zien dat de huidige notaties, terminologieën en methodes niet altijd vanzelfsprekend waren en beïnvloed zijn geweest door verschillende factoren. Deze visie, waarbij leerlingen wiskunde meer van de 'menselijke kant' gaan zien, heeft dus sterke gelijkenissen met het inzetten van geschiedenis als *doel*.

### 2.1.3 Verlichtingsbenadering, modulebenadering en geschiedenis-gebaseerde benadering

Geschiedenis kan dus vanuit verschillende visies of doeleinden worden ingezet. Jankvist onderscheid naast deze benaderingswijzen ook ietwat concretere manieren om geschiedenis in te zetten in de les. Zo is er als eerste de *illumination approach*, de verlichtingsbenadering, waarbij de 'standaard' les en het 'normale' boek worden aangevuld met historische informatie, variërend in grootte en diepgang. Deze historische informatie zou de 'gewone' wiskundeles kunnen opfleuren. In kleine, niet-diepgaande vorm is de verlichtingsbenadering het meest geschikt wanneer de docent geschiedenis als *motivationele tool* of *affectieve tool* wil gebruiken. In grotere vorm kan de verlichtingsbenadering ook gebruikt worden om leerlingen vanuit een metaperspectief naar wiskunde te laten kijken, oftewel wanneer de docent geschiedenis als *doel* voor ogen heeft. Voor het gebruik van geschiedenis als *cognitieve tool* lijkt de verlichtingsbenadering ongeschikt.

Als tweede is er de *modules approach*, de modulebenadering, waarbij specifieke lesmodules, variërend van korte pakketten tot volledige cursussen, worden gewijd aan geschiedenis. Vaak zijn ze gebaseerd op casestudy's, waarbij een specifiek onderwerp tot in detail wordt bestudeerd. De modulebenadering kan op verschillende manieren worden ingevuld, bijvoorbeeld met werkbladen, projecten, het analyseren van oude wiskundige instrumenten, maar ook het lezen van primaire bonnen. Volgens Jankvist kan de modulebenadering gebruikt worden voor geschiedenis-als-*cognitieve-tool* en geschiedenis-als-*doel* doeleinden. Hij benoemt hierbij expliciet dat primaire bronnen een centrale rol kunnen spelen in het bereiken van deze doeleinden.

Als laatste is er nog de *history-based approach*, de geschiedenis-gebaseerde benadering, waarbij niet per se expliciete aandacht aan geschiedenis wordt gegeven, maar onderwerpen wel vanuit historisch oogpunt worden onderwezen. De zojuist besproken 'genetic approach' hangt hier nauw mee samen. De geschiedenis-gebaseerde benadering richt zich met name op het leren van wiskunde, oftewel het gebruiken van geschiedenis als *cognitieve tool*. Positieve effecten van het inzetten van geschiedenis als *doel* kunnen ook optreden, maar zijn niet de primaire focus.

### 2.1.4 Primaire historische bronnen gebruiken

Vanaf nu wordt de focus gelegd op het gebruik van *primaire historische bronnen*. Bij het effectief inzetten van primaire bronnen in de les komt veel kijken. Allereerst moet een docent zélf de gekozen bron lezen en analyseren, wat vaak niet gemakkelijk is. Daarnaast is het noodzakelijk dat de docent kennis en begrip heeft van de tijd waarin de bron is geschreven; zonder die kennis kunnen er misvattingen ontstaan over waarom de auteur bepaalde keuzes heeft gemaakt (Gulikers & Blom, 2001; Jahnke e.a., 2000). Als het voor een docent al lastig kan zijn om een primaire bron volledig te begrijpen, dan moet dat voor leerlingen nog sterker gelden. Bij het inzetten van primaire bronnen is het dan ook belangrijk dat het materiaal toegankelijk wordt gemaakt voor leerlingen. Ook moeten ze voor én tijdens het werken met de primaire bron voldoende worden begeleid. Om een primaire bron namelijk goed te kunnen begrijpen, moeten leerlingen zich bewust worden van het perspectief van de auteur en moeten ze zich kunnen inleven in een andere tijd en denkwereld (J. H. Barnett e.a., 2014; Jahnke e.a., 2000). Jahnke (2000) noemt dit proces het "denken in een andere persoon en in een andere wereld". Volgens hem is dat essentieel bij het lezen van primaire bronnen, want hij zegt hierbij "zij die zichzelf inbeeldt als een wetenschapper die wiskunde bedrijft in een andere tijd, moet de wiskunde zelf doen". Oftewel, leerlingen leren wiskunde door zich in te leven in de gedachtegang van de oud-wiskundige die de bron schreef. Het "denken in een andere persoon en in een andere wereld"gebeurt niet vanzelf. Hierbij is ondersteuning nodig. Leerlingen moeten bijvoorbeeld op de hoogte worden gebracht van welke wiskundige concepten en methodes de auteur op de hoogte was toen die de tekst schreef en van welke juist nog niet. Op die manier kunnen leerlingen zich beter verplaatsen in de gedachtegang van de oud-wiskundige en de keuzes die die maakte.

Jankvist (2013) onderscheidt voor het inzetten van primaire historische bronnen in de wiskundeles zes verschillende benaderingswijzen, waarvan de eerste drie meer filosofisch zijn, en de laatste drie concretere methodes zijn. Als eerste beschrijft hij de 'genetic approach', waarover eerder in dit theoretisch kader al een en ander is verteld. Met deze benadering worden wiskundige onderwerpen aan de hand van geschiedenis gemotiveerd en, specifiek met het inzetten van primaire bronnen, ook geïntroduceerd en behandeld. Fried (2016) is sceptisch over het gebruik van deze benadering bij het inzetten van originele bronnen. Hij betwijfelt of het effectief is om nieuwe wiskundige concepten aan te leren met originele bronnen. De eerste verschijning van een wiskundig concept in een originele bron is namelijk vaak wat onhandig opgeschreven en hiermee lastig te begrijpen. Dit zou een modern begrip van dat concept bij leerlingen kunnen bemoeilijken.

Een tweede benaderingswijze wat betreft het inzetten van primaire bronnen is de 'hermeneutic approach'. Deze benadering richt zich op het interpreteren van de originele wiskundige bron door een diepgaande analyse van de inhoud ervan en door de contrasten tussen de wiskunde van toen en van nu te bestuderen (J. H. Barnett e.a., 2014; Jankvist, 2013). Hierbij wordt er systematisch onderscheid gemaakt tussen het perspectief van de auteur van de bron en de lezer (Fried e.a., 2016). Er wordt met deze benadering dus niet alleen vanuit een meta-perspectief naar wiskunde gekeken, maar leerlingen proberen wiskundige redeneringen ook zelf te volgen en te begrijpen. Het grote verschil met de 'genetic approach' is dat bij de 'hermeneutic approach' leerlingen al bekend moeten zijn met een wiskundig onderwerp, voordat ze er een historische tekst over gaan lezen (Jankvist, 2013). Op deze manier kunnen leerlingen de informatie uit de bron relateren aan wat Fried noemt 'ankerpunten': bestaande kennis die ze al hebben over een onderwerp (Fried e.a., 2016). In de vakdidactiek staat dit ook wel bekend als het 'uitbreiden van cognitieve schema's'. Door nieuwe informatie te relateren aan een bestaand referentiekader blijft deze nieuwe kennis beter hangen en is het beter bereikbaar (Drijvers e.a., 2021). Geschiedenis, en in het bijzonder primaire bronnen, kan ook helpen met het leggen van verbanden tussen *verschillende* wiskundige onderwerpen. Op die manier ontstaan er verbindingen tussen verschillende cognitieve schema's, waardoor ze een meer samenhangend geheel vormen. Met rijke, samenhangende schema's zijn leerlingen flexibeler in het herkennen van situaties en het oplossen van problemen (Drijvers e.a., 2021). Door primaire bronnen via de 'hermeneutic approach' in te zetten, worden er dus onderwerpen behandeld die leerlingen al kennen, maar op een heel andere manier dan ze gewend zijn. Het vertrouwde wordt vreemd gemaakt. Volgens Glaubitz (2011) verloopt de 'hermeneutic approach' doorgaans in drie stappen. Eerst wordt het wiskundige onderwerp op een gebruikelijke manier, zonder geschiedenis, geïntroduceerd.

Daarna lezen leerlingen globaal, vanuit een soort helikopterview, de primaire bron over dat onderwerp. Deze stap heeft als doel leerlingen nieuwsgierig te maken. In de derde stap wordt de primaire bron gedetailleerd gelezen en denken leerlingen na over vragen die hierbij ontstaan. Naast deze globale opzet van de 'hermeneutic approach', definieert Fried zes richtlijnen waaraan deze benaderingswijze idealiter voldoet (Fried e.a., 2016):

1. Leerlingen bestuderen een historische bron nádat ze een goed begrip hebben verworven van het wiskundige onderwerp in de moderne vorm en vanuit een modern perspectief.
2. Leerlingen vergaren en bestuderen informatie over de context en de biografie van de auteur.
3. De authenticiteit van de historische primaire bron blijft zo veel mogelijk intact.
4. Leerlingen worden aangemoedigd om vrije associaties te produceren (creatief te denken).
5. De leraar stimuleert leerlingen om met onderbouwde argumenten tot een interpretatie te komen, die niet per se door iedereen gedeeld hoeft te worden.
6. Het wiskundig concept uit het verleden wordt vergeleken met hoe we er tegenwoordig naar kijken.

Een derde benaderingswijze die Jankvist noemt is de 'multiple-perspective approach' (Jankvist, 2013). Hierbij wordt wiskunde vanuit verschillende invalshoeken en contexten bekeken. Voorbeelden van dit soort verschillende perspectieven zijn de subdisciplines zoals algebra en meetkunde, bewijstechnieken zoals inductief en deductief, toepassingsgebieden zoals natuurwetenschappen en techniek, en culturele contexten zoals gender en religieuze opvattingen (Kjeldsen & Blomhøj, 2012). Primaire bronnen helpen leerlingen om deze perspectieven te kunnen begrijpen. De focus van deze benaderingswijze wordt gelegd op een probleem-gestuurde aanpak, waarbij de wiskunde vanuit een bepaalde invalshoek wordt verkend. De 'multiple-perspective approach' lijkt vooral waarde te hechten aan het ontwikkelen van een dieper begrip van de aard en evolutie van wiskunde. Hiermee wordt de geschiedenis dus vooral ingezet als *doel* (Jankvist, 2009a). In tegenstelling tot bij de 'hermeneutic approach', is het hebben van voorkennis van datgene wat bestudeerd wordt in de primaire bron bij de 'multiple-perspective approach' minder van belang.

De laatste drie benaderingswijzen die Jankvist noemt zijn ietwat specifieker en methodologischer van aard. De eerste hiervan is het inzetten van primaire bronnen met als bedoeling de inhoud van deze bronnen te vergelijken met die van secundaire bronnen over de geschiedenis van wiskunde, of zelfs met moderne leerboeken. Dit benaderingswijze wordt ook wel aangeduid als 'comparative readings'. Door originele bronnen te vergelijken met een ander type bron worden leerlingen gestimuleerd om zowel historische als hedendaagse concepten en notaties te begrijpen. Dit vergelijken kan leiden tot een dieper begrip van de onderliggende concepten. Echter, bij deze methode lijkt de nadruk vooral te liggen op het ontwikkelen van meer bewustzijn over de ontwikkeling van wiskunde, oftewel: op het gebruiken van geschiedenis als *doel*.

Een andere specifieke methode voor het inzetten van primaire bronnen, zijn de zogenaamde 'guided readings' (Jankvist, 2013). Dit is een gestructureerde methode die het lezen van primaire bronnen toegankelijker maakt voor leerlingen. Leerlingen worden namelijk tijdens het lezen van de historische tekst begeleid aan de hand van geschreven commentaar en uitleg. Terwijl leerlingen bezig zijn met het doorgronden van de bron, worden ze meermaals gedurende dit proces onderbroken door verklarende opmerkingen en illustratieve taken (J. Barnett, 2016; J. H. Barnett e.a., 2014; Jankvist, 2013). De verklarende tekst is bedoeld om de leerlingen voldoende historische context bij te brengen, zodat ze succesvol de bron kunnen lezen. Daarnaast kan hierin informatie over de auteur en de relevantie van de wiskundige inhoud in de te lezen bron aangestipt worden. De taken van de ‘guided readings’ worden niet aan het einde van een sectie geplaatst, maar zijn geïntegreerd in de tekst. Deze taken zijn typisch opdrachten die leerlingen aansporen om de wiskundige inhoud en werkwijze uit de primaire bron te begrijpen (J. H. Barnett e.a., 2014). Op deze manier blijven leerlingen actief bezig met wiskunde terwijl ze de bron doorspitten. Mogelijke typen opdrachten kunnen zijn om ontbrekende details van een wiskundig bewijs aan te vullen of om te reflecteren op de stijl van het bewijs. De nadruk bij de ‘guided readings’ ligt op de *wiskundige* concepten en technieken uit de bron. De historische context en het leren over de ontwikkeling van wiskunde heeft een ondersteunende rol (J. Barnett, 2016).

Als laatste worden ‘essay assignments’ door Jankvist genoemd als specifieke manier voor het inzetten van primaire bronnen. Hierbij is het de bedoeling dat groepjes leerlingen een essay schrijven aan de hand van informatie die ze hebben opgedaan uit primaire bronnen. Deze essays bevatten vooral informatie over de aard van wiskunde en de ontwikkeling ervan. Er wordt bijvoorbeeld gereflecteerd op historische, filosofische en/of toepassingsgerichte aspecten van de wiskunde die leerlingen hadden bestudeerd aan de hand van originele bronnen. Bij deze methode leren leerlingen vooral vanuit meta-perspectief naar de wiskunde te kijken en wordt geschiedenis dus ingezet als *doel* (Jankvist, 2009a).

### 2.1.5 Beschikbaar lesmateriaal

Zoals in hoofdstuk 1 al werd genoemd is het aanbod aan lesmateriaal dat geschiedenis van wiskunde gebruikt beperkt. Online, voor iedereen toegankelijk, zijn de volgende materialen te vinden.

Allereerst is het wiskundetijdschrift voor jongeren ‘Pythagoras’ online te vinden (Pythagoras, 2016). Het gehele archief, vanaf de oprichting in 1961, is beschikbaar gesteld. Hoewel dit tijdschrift niet standaard gericht is op de geschiedenis van wiskunde, zitten er zo nu en dan artikelen tussen waarbij de geschiedenis centraal staat. Bijvoorbeeld in nummer 5 van de 54e jaargang, waarin de schijf van Phaistos wordt ontcijferd (Swaen, 2015). Of in nummer 5 van de 36e jaargang, waarin een korte biografie wordt gegeven over Frans van Schooten (van Maanen, 1997). De geschiedenis in de artikelen uit ‘Pythagoras’ wordt voornamelijk gebruikt als ‘doel’. Ze bevatten nauwelijks wiskundige opgaven gebaseerd op geschiedenis. Wel kan men uit de artikelen inspiratie halen om zelf materiaal te maken waar leerlingen actiever mee aan de slag kunnen.

Ook online toegankelijk is de serie ‘Wortels van de Wiskunde’ (Van den Boogaart & Daems, 2015). Deze serie bestaat uit zeventien artikelen. In elk artikel wordt ingegaan op een ander onderwerp van de geschiedenis van wiskunde én wordt (een fragment uit) een bijbehorende primaire historische bron gegeven. Hoewel ook deze artikelen nauwelijks kant-en-klare opgaven bevatten, is het zeer geschikt om hieruit inspiratie te halen voor het gebruiken van primaire historische bronnen in de les.

Ten slotte is er de kant-en-klare lesmodule ‘Geschiedenis van wiskunde’ gemaakt door Rogier Bos (Bos, 2020). Deze lesmodule is bedoeld als keuze-onderwerp voor wiskunde D en behandelt een viertal belangrijke onderwerpen uit de geschiedenis van wiskunde, zoals de kleitabletten uit Babylonië en de Elementen van Euclides. De focus van de lesmodule ligt voornamelijk op het leren van wiskunde; alle opgaven zijn wiskundig van aard. Geschiedenis dient in deze lesmodule dus vooral als ‘tool’ om wiskunde te leren. Toch zal er bij leerlingen ook een dieper bewustzijn over wiskunde worden ontwikkeld, door de begeleidende teksten over de geschiedenis die de module kent.

Hoewel de bovengenoemde materialen nuttig kunnen zijn, is het aanbod van Nederlandstalig materiaal dat de geschiedenis van wiskunde integreert dus zeer beperkt. Ook het aanbod in het Engels is klein. Er zijn hier en daar losse werkbladen of opgaven te vinden, zoals in het artikel van Jahnke (2000), maar er is weinig uitgebreid of gebundeld materiaal beschikbaar dat zowel de historische context als concrete, wiskundige opgaven biedt.

## 2.2 Deelvraag 2: Wat is motivatie?

'Motivatie' is een veelgehoorde term in het onderwijs. Volgens Marzano en Miedema (2018) heeft het begrip motivatie alles te maken met 'een positieve houding ten aanzien van school en leren'. Een leerling die deze positieve houding heeft, oftewel een 'gemotiveerde leerling', zal actiever deelnemen aan de lessen, meer doorzettingsvermogen hebben en doorgaans betere schoolresultaten behalen (Marzano, 2018; van Ast e.a., 2021).

### 2.2.1 Zelf-determinatietheorie

Om te begrijpen hoe motivatie werkt en hoe deze positieve houding gestimuleerd kan worden, is het belangrijk om te weten wat motivatie precies inhoudt en welke factoren er mee te maken hebben. Een van de meest bekende theorieën over motivatie is de 'zelf-determinatietheorie' van Ryan & Deci (2000). Volgens hen is motivatie een 'innerlijk proces dat iemand aanzet tot actie'. Ze onderscheiden twee soorten motivatie, namelijk *intrinsieke motivatie* en *extrinsieke motivatie*. Intrinsieke motivatie komt van binnenuit (Hornstra e.a., 2016; Ryan & Deci, 2000; van Ast e.a., 2021). Een leerling die intrinsiek gemotiveerd is wil leren omdat die plezier heeft in het uitvoeren van de leertaak. De taak wordt door de leerling als interessant gezien en geeft voldoening. Intrinsiek gemotiveerde leerlingen leren sneller, makkelijker en kunnen dit langer volhouden (van Ast e.a., 2021). Extrinsieke motivatie komt niet van binnenuit, maar van buitenaf. Leerlingen ervaren hierbij externe prikkels, zoals een beloning of indruk willen maken op iemand anders, als drijfveren om te leren. Niet de leertaak zelf, maar de uitkomsten of gevolgen van het uitvoeren van die leertaak vormen de bron van motivatie (Van den Broeck e.a., 2009).

In de zelf-determinatietheorie worden de twee soorten motivatie, extrinsieke en intrinsieke motivatie, op een continuüm geplaatst (Van den Broeck e.a., 2009; van Ast e.a., 2021). Hierbij staat extrinsieke motivatie links en intrinsieke motivatie rechts. Extrinsieke motivatie kan nog verder worden opgedeeld in vier verschillende typen. Deze vier typen kenmerken zich door de verschillende mate waarin extrinsiek gemotiveerd gedrag gecontroleerd dan wel autonoom gereguleerd is. Helemaal links bevindt zich *externe regulatie*: het uitvoeren van bepaalde leertaken zijn extern gereguleerd. Hierbij wordt het gedrag van een leerling met name van buiten gestuurd en is er sprake van gecontroleerde motivatie. Een voorbeeld is dat een leerling huiswerk maakt, omdat die anders moet nablijven. Na externe regulatie komt *regulatie door introjectie*, waarbij leerlingen hun eigenwaarde koppelen aan het uitvoeren van een bepaalde taak. Een leerling leert bijvoorbeeld voor een proefwerk om niet weer het laagste cijfer te halen. Bij deze vorm is nog steeds veel gecontroleerde motivatie aanwezig, omdat de leerling in kwestie het persoonlijk niet erg belangrijk vind om goed te leren. Bij *regulatie door identificatie* vindt een leerling het uitvoeren van leertaken wél persoonlijk belangrijk en waardevol. Hoewel de motivatie meer autonoom is dan bij regulatie door introjectie, is er nog steeds externe sturing nodig om het gewenste gedrag te behouden. Denk hierbij aan een leerling die extra zijn best doet bij LO, omdat hij indruk wil maken op zijn vriendjes. Bij het laatste type van extrinsieke motivatie, namelijk *regulatie door integratie* is het gedrag van de leerling autonoom gereguleerd. Hij voert een taak uit omdat hij het zelf belangrijk vind en hoewel er geen externe sturing nodig is, hoort het nog wel bij extrinsieke motivatie. Er wordt een externe eis verbonden met een eigen doel of ambitie. De taak wordt dus niet per se gedaan omdat diegene dat de taak op zichzelf als leuk of voldoeningsgevend ervaart. Een voorbeeld is een leerling die haar wiskunde maakt omdat zij weet dat dit in haar vervolgopleiding veel gebruikt gaat worden. Helemaal rechts van het continuüm staat intrinsieke motivatie, die ook autonoom gereguleerd is.

Intrinsieke motivatie wordt als kwalitatief de hoogst staande motivatie gezien (Van den Broeck e.a., 2009). Elke docent zou graag zien dat leerlingen intrinsiek gemotiveerd zijn voor hun vak. Intrinsieke motivatie is echter niet eenvoudig te beïnvloeden; het kan niet van buitenaf worden opgelegd (van Ast e.a., 2021). Niet iedereen heeft immers dezelfde passies en interesses. Wat wel mogelijk is, is dat de juiste omstandigheden worden gecreëerd die intrinsieke motivatie kunnen stimuleren en ondersteunen (Ryan & Deci, 2000; van Ast e.a., 2021). Dit kan de docent doen door rekening te houden met de drie basisbehoeften van leren: autonomie, relatie en competentie. In het artikel van Deci & Ryan Ryan en Deci (2000) worden met name competentie en autonomie uitgelicht als belangrijke factoren om intrinsieke motivatie te faciliteren. Zo stellen zij dat gebeurtenissen die leerlingen gevoelens van competentie geven de intrinsieke motivatie bij die leerlingen kunnen verhogen. Een voorbeeld hiervan is het geven van positieve feedback en het bieden van succeservaringen. Het bieden van succeservaringen wil echter niet zeggen dat voornamelijk makkelijke taken moeten worden gegeven. Dit ligt genuanceerder. Bij het geven van te veel makkelijke taken kunnen komen leerlingen namelijk volgens Liljedahl Liljedahl (2021) in de 'boredom zone' terecht. Ze raken verveeld. Volgens Liljedahl bevat een goede opdracht voldoende uitdaging en ligt deze tegelijkertijd binnen het bereik van de capaciteiten van de leerling. Hij pleit voor taken die een 'productive struggle' opleveren. Hierbij worden leerlingen uitgedaagd om problemen op te lossen die net buiten hun comfortzone liggen, maar die ze met de juiste inspanning en strategieën kunnen bereiken. Op die manier komen leerlingen in de 'flow zone' terecht, waar ze het beste leren en waar ruimte is om intrinsiek gemotiveerd te zijn. In deze zone ervaren leerlingen namelijk zowel geen verveeldheid van te makkelijke opgaven als geen frustratie van te uitdagende opgaven (Liljedahl, 2021). Naast competentie is autonomie een tweede belangrijke voorwaarde voor het faciliteren van intrinsieke motivatie. Sterker nog, Deci & Ryan stellen dat gevoelens van competentie de intrinsieke motivatie niet zullen versterken, tenzij ze worden vergezeld door een gevoel van autonomie (Ryan & Deci, 2000). De docent kan leerlingen gevoelens van autonomie laten ervaren door ze onder andere keuzevrijheid te geven, creativiteit toe te staan en ze te stimuleren om zelf regie te nemen over hun eigen leerproces. Minder prominent volgens Deci en Ryan is de rol van de derde basisbehoefte, relatie, bij intrinsieke motivatie. Een respectvolle relatie tussen docent en leerling kan het gevoel van verbondenheid en betrokkenheid vergroten, wat op zijn beurt kan bijdragen aan het versterken van intrinsieke motivatie.

### 2.2.2 Invloed van affectieve aspecten op motivatie

Wat tot nu toe nog niet aan bod is gekomen is de invloed van affectieve aspecten op de motivatie voor wiskunde. Onder affectieve aspecten vallen bijvoorbeeld overtuigingen, motieven, gedachten en gevoelens bij het vak. Het klinkt logisch dat dit soort aspecten nauw verbonden zijn met motivatie, en dat zijn ze ook (Arthur e.a., 2022; Kapofu & Kapofu, 2020; Kloosterman, 2002; Mazana e.a., 2019; Pedersen & Haavold, 2023; Rojo Robas e.a., 2020).

In de literatuur komen in het bijzonder drie begrippen naar voren die verwant lijken te zijn aan de affectieve aspecten en 'motivatie'. Die begrippen zijn 'belief', 'perception' en 'attitude', oftewel de overtuiging over wiskunde, de perceptie van wiskunde en houding ten opzichte van wiskunde respectievelijk. Deze begrippen worden vaak in één adem genoemd en zijn allemaal redelijk vaag en breed gedefinieerd. Daarnaast moet er vermeld worden dat er in de literatuur geen duidelijke scheidslijn tussen te vinden en noch is het duidelijk welke precieze relatie er tussen deze begrippen is. Elk begrip zal verder worden toegelicht en zal gerelateerd worden aan 'motivatie'.

Allereerst de overtuiging over wiskunde. De overtuiging van een leerling wat betreft wiskunde kan betrekking hebben op verschillende gebieden. Het kan gegroepeerd worden tot overtuigingen wat betreft de wiskunde als wetenschap, het leren van wiskunde en het onderwijzen van wiskunde (Pedersen & Haavold, 2023). Bij de overtuigingen wat betreft het onderwijzen van wiskunde gaat het over hoe leerlingen zouden willen dat wiskunde wordt onderwezen. Bij de overtuiging wat betreft het leren van wiskunde gaat het om de opvatting over het leren van wiskunde. Voorbeelden hierbij zijn of het leren van wiskundig als nuttig wordt gezien en of iedereen wiskunde kan leren of dat dat iets is dat voornamelijk aangeboren is. Bij de overtuiging wat betreft de wiskunde als wetenschap gaat het om de kijk van leerlingen op het vak wiskunde. Voorbeelden hierbij zijn in hoeverre ze de wiskunde als wetenschap kunnen waarderen en in hoeverre ze het zien als een creatieve en 'menselijke' discipline. Uit onderzoek van Pedersen en Haavold (2023) blijkt dat leerlingen die positiever tegen wiskunde aan kijken, dat wil zeggen die het als creatief vak beschouwen en vinden dat competentie erin niet per se aangeboren is, meer plezier beleven in het uitvoeren ervan. Oftewel, het blijkt een positieve invloed te hebben op de intrinsieke motivatie. Kloosterman (2002) en Robas (2020) bevestigen dit nog eens.

Ten tweede, de perceptie van wiskunde, een begrip dat sterk lijkt op de 'overtuiging' over wiskunde. Het wordt gedefinieerd als de mentale voorstelling, ook wel kijk, op wiskunde als discipline en is door leerlingen gevormd door onder andere ervaringen met wiskunde op school, sociale interacties en invloeden van leraren of ouders (Arthur e.a., 2022). De perceptie die leerlingen van wiskunde hebben blijkt van invloed te zijn op de interesse voor het vak (Arthur e.a., 2022; Salifu & Bakari, 2022). Deze interesse zorgt er op haar beurt voor dat leerlingen meer plezier hebben in het leren van het vak, oftewel dat de intrinsieke motivatie voor wiskunde stijgt (Arthur e.a., 2022; Kapofu & Kapofu, 2020; Salifu & Bakari, 2022). Zoals onder deelvraag 1 is beschreven kan het inzetten van geschiedenis van de wiskunde ook affectieve aspecten beïnvloeden, bijvoorbeeld de kijk op of de waardering voor wiskunde. Met andere woorden: geschiedenis heeft een positieve invloed op de perceptie van wiskunde bij leerlingen (Arthur e.a., 2022; Kapofu & Kapofu, 2020). Dit plaatst 'perceptie' in een bemiddelende positie tussen het gebruik van geschiedenis in de wiskundeles en het verhogen van intrinsieke motivatie. Op deze manier kan het gebruik van geschiedenis van de wiskunde indirect de motivatie van leerlingen beïnvloeden.

Als laatste het begrip 'attitude', oftewel de houding tegenover wiskunde. Dit begrip wordt vaak gebruikt als plaatsvervanger voor 'perception' en 'belief', maar ook voor 'motivatie' (Arthur e.a., 2022; Kapofu & Kapofu, 2020; Kloosterman, 2002; Mazana e.a., 2019; Pedersen & Haavold, 2023; Rojo Robas e.a., 2020; Schoenfeld, 1989). Logischerwijs is de houding van een leerling tegenover wiskunde direct verwant aan de overtuigingen van een leerling over (het leren van) wiskunde en de kijk die ze hebben op het vak. Geschiedenis van wiskunde heeft dan ook een positieve invloed op de houding van leerlingen tegenover wiskunde (Arthur e.a., 2022; Kapofu & Kapofu, 2020).

## 2.3 Deelvraag 3: Hoe kan intrinsieke motivatie worden gemeten?

Intrinsieke motivatie kan op verschillende manieren worden gemeten, bijvoorbeeld door gedrag te observeren, leerlingen te interviewen, of vragenlijsten af te nemen. Voor dit onderzoek is het meten van intrinsieke motivatie met vragenlijsten het meest geschikt, aangezien er twee groepen moeten worden vergeleken. In de methode wordt dit uitgebreider toegelicht. Bij het beantwoorden van deze deelvraag wordt daarom verder alleen ingegaan op het meten van motivatie met behulp van vragenlijsten. Een Likert-schaal vragenlijst is een veelgebruikt instrument in de sociale wetenschappen en het onderwijs voor het meten van subjectieve, vaak motivationele of affectieve, variabelen (Joshi e.a., 2015; van der Donk & van Lanen, 2020). Zo'n vragenlijst bestaat uit een reeks stellingen, ook wel items genoemd. Respondenten kunnen op een metrische schaal van een aantal punten, variërend van "sterk mee oneens"tot "sterk mee eens", de mate van overeenstemming met elke uitspraak aangeven.

### 2.3.1 Drie motivatie-vragenlijsten: de IMI, MMQ en ATMI

Drie veelgebruikte en valide vragenlijsten die relevant zijn voor dit onderzoek zijn de Intrinsic Motivation Inventory (IMI), de Mathematics Motivation Questionnaire (MMQ) en de Attitude Towards Mathematics Inventory (ATMI). Alle drie de vragenlijsten maken gebruik van Likert-schalen, waarbij respondenten op een schaal aangeven in hoeverre zij het eens of oneens zijn met bepaalde stellingen.

De IMI is een vragenlijst die gebaseerd is op de zelf-determinatietheorie van Deci & Ryan (Monteiro e.a., 2015). Het meet met name de *intrinsieke* motivatie, zoals de naam al doet vermoeden. Echter, niet alleen het aspect 'interesse/plezier' wordt met dit instrument gemeten. Hoewel dit de meest directe maatstaf van intrinsieke motivatie is komen ook andere aspecten, zoals 'ervaren keuze' en 'ervaren competentie' aan bod. Deze hebben te maken met de basisbehoeften autonomie en competentie en worden hiermee beschouwd als positieve voorspellers van intrinsieke motivatie (Ryan & Deci, 2000; van Ast e.a., 2021). Verder meet de IMI ook het aspect 'waarde/gebruik', wat aangeeft in hoeverre een persoon iets als belangrijk of nuttig ziet. Dit aspect valt niet per se onder intrinsieke motivatie, maar onder extrinsieke motivatie waarbij de zelfregulatie hoog is, dat wil zeggen onder de typen 'regulatie door identificatie' of 'regulatie door integratie'. Hoewel de IMI dus gericht is op het meten van intrinsieke motivatie, neemt het ook de meer autonoom gereguleerde vormen van motivatie mee. De IMI is al vertaald naar het Nederlands en wordt breed ingezet in diverse domeinen zoals onderwijs en sport (Peeters, 2015). Het instrument kan aangepast worden naar verschillende vormen, waarbij sommige subschalen al dan niet worden gebruikt, afhankelijk van de specifieke situatie waarin het wordt toegepast (Monteiro e.a., 2015).

De MMQ is een vragenlijst gebaseerd op de Science Motivation Questionnaire (SMQ), die op haar beurt weer is geïnspireerd door de zelfdeterminatietheorie van Deci en Ryan (Fiorella e.a., 2021). De MMQ is dus specifiek ontworpen om de motivatie van leerlingen *voor wiskunde* te meten. Het instrument meet verschillende dimensies van motivatie, zowel intrinsiek als extrinsiek. Bijvoorbeeld de mate van interesse en plezier in wiskunde komt aan bod (intrinsieke motivatie), maar ook in hoeverre leerlingen het een nuttig vak vinden (regulatie door identificatie en/of integratie). Ook komt de mate van zelfregulatie expliciet als meetfactor terug in de vragenlijst. Daarnaast wordt de mate van angst voor wiskunde, met name wiskundetoetsen, gemeten. Door de verschillende dimensies van motivatie die worden gemeten is de vragenlijst is nuttig voor het verkrijgen van inzicht in de verschillende redenen waarom leerlingen zich inzetten voor wiskunde. Deze redenen kunnen bijvoorbeeld vergeleken worden tussen twee groepen. De MMQ is goed gevalideerd en wordt veel gebruikt in onderzoek naar wiskundemotivatie (Fiorella e.a., 2021).

De ATMI is een betrouwbare en valide vragenlijst die is ontworpen om inzicht te verkrijgen in verschillende dimensies van 'attitude': oftewel houding naar wiskunde (Abosalem, 2015; Afari, 2013). Met de ATMI kunnen vier verschillende factoren de nauw verwant zijn aan de houding naar wiskunde onderzocht worden. De eerste factor 'plezier' komt ook wel overeen met de intrinsieke motivatie voor wiskunde. De tweede factor die onderzocht wordt heet 'motivatie'. Waar met de factor 'plezier' een specifiek type motivatie wordt gemeten, wordt met de factor 'motivatie' in deze vragenlijst de 'wil om wiskunde te doen' in brede zin gemeten. Hiervoor kunnen er zowel interne als externe redenen zijn, maar wordt er gefocust op de meer autonoom gereguleerde motivatie. Een voorbeeld van een stelling behorend bij deze factor is vertaald namelijk: "Ik ben van plan om zo veel mogelijk wiskunde te volgen tijdens mijn schooltijd/opleiding."(Afari, 2013). Een leerling kan het hiermee eens zijn omdat zij wiskunde nu eenmaal een leuk vak vindt, maar kan het er ook mee eens zijn omdat zij het belangrijk vindt voor haar vervolgplannen. De derde factor die onderzocht wordt is de 'waarde' van wiskunde. Deze factor biedt inzicht in hoeverre leerlingen wiskunde over het algemeen een nuttig en belangrijk vak vinden. De laatste factor is 'zelfvertrouwen', waarbij wordt vastgesteld in welke mate leerlingen worden afgeschrikt door wiskunde en geloven in hun capaciteiten bij dit vak. Concluderend meet de ATMI dus verschillende aspecten die nauw verwant zijn met 'de houding naar wiskunde', waaronder motivatie en de overtuiging of perceptie van leerlingen wat betreft de waarde van het vak en hun eigen kunnen. De MMQ en de ATMI overlappen enigszins in wat ze meten. Het verschil lijkt er echter in de zitten dat de MMQ specifieker inzicht biedt in de redenen achter motivatie en de ATMI een breder beeld geeft van de algemene houding van leerlingen ten opzichte van het vak wiskunde.

# 3 Methode

In dit hoofdstuk wordt de onderzoeksmethode uiteengezet. Allereerst zal er worden ingegaan op de globale onderzoeksopzet. Hierbij zal het algemene plan voor de uitvoering van dit onderzoek beschreven worden en zullen een aantal belangrijke gemaakte keuzes daarna verantwoord worden. Daarna zal het ontwerpen van de werkbladen aan bod komen. Aandacht gaat hierbij uit naar hoe geschiedenis op een verantwoorde manier, onderbouwd vanuit de literatuur, ingezet kan worden met een werkblad. Vervolgens wordt de procedure van het ontwerpen van de vragenlijst toegelicht. Er wordt afgesloten met de methode voor de dataverwerking. Hierbij zal de uitvoering van de statistische toetsen verduidelijkt worden.

## 3.1 Onderzoeksopzet

Voor dit onderzoek worden er twee werkbladen gemaakt: werkblad A en B. Werkblad A focust zich op een primaire (vertaalde) bron, namelijk de benadering van $\pi$ door Archimedes. Bij werkblad B staat ditzelfde onderwerp centraal en is de opbouw en vraagstelling soortgelijk aan werkblad A. Werkblad B bevat daarentegen géén originele bron. Een 5VWO wiskunde D groep van ongeveer vijftien leerlingen wordt in tweeën gesplitst. Na de splitsing blijven deze twee groepen in hetzelfde lokaal. De ene groep krijgt werkblad A, de andere werkblad B. Na een korte klassikale introductie over het onderwerp en over Archimedes werken beide groepen ongeveer 1,5 uur aan het werkblad. Leerlingen mogen hiervoor in tweetallen overleggen. Achteraf krijgen leerlingen een vragenlijst die stellingen bevat over hoe ze het maken van het werkblad hebben ervaren. Deze vragen zullen gericht zijn om intrinsieke motivatie van leerlingen na en tijdens het maken van het werkblad te weten te komen. Daarnaast wordt er ook gevraagd naar de kijk op en de waardering voor wiskunde van leerlingen. Deze aspecten hangen immers nauw samen met het begrip motivatie. De antwoordmogelijkheden in de enquêtes zijn van een Likertschaal vorm. Bij het analyseren van de data wordt er onderzocht of er tussen de twee groepen een verschil is in intrinsieke motivatie. Idealiter zal dit gedaan worden met een onafhankelijke t-toets. Om uit deze toets betrouwbare resultaten te krijgen moet de verkregen data echter aan bepaalde voorwaarden voldoen. Wanneer tijdens de analyse blijkt dat aan de voorwaarden voor een onafhankelijke t-toets niet is voldaan zal de Mann-Whitney U toets gebruikt worden.

### 3.1.1 Verantwoording keuze: 5VWO wiskunde D leerlingen

Hoewel de hoofdvraag gaat over de gehele populatie middelbare scholieren, is de omvang van dit onderzoek te klein om een representatieve steekproef met leerlingen uit verschillende jaarlagen en niveaus te onderzoeken. Op de school waar het onderzoek wordt uitgevoerd is gekeken naar wat praktisch gezien kon en voor welke groep leerlingen het onderzoek het minst 'belastend' zou zijn. Hieruit kwam de 5VWO wiskunde D groep. Tegen de tijd dat het onderzoek wordt uitgevoerd op de school hebben zij net de toetsweek achter de rug en, hoewel er nog wel wiskunde D lessen ingeroosterd staan, hebben ze alle wiskunde D stof van het betreffende schooljaar al gehad. Door deze groep als steekproef te nemen wordt er geen kostbare voorbereidingstijd voor toetsen afgenomen van de leerlingen en kunnen de laatste lessen betekenisvol worden ingericht.

### 3.1.2 Verantwoording keuze: twee groepen vergelijken

Dit onderzoek heeft als doel om erachter te komen wat voor effect een primaire bron heeft op de intrinsieke motivatie van leerlingen. Er wordt dus onderzocht of de aanwezigheid van een *originele historische bron* impact heeft op de intrinsieke motivatie. Om juist en alleen dít element te onderzoeken, is het nodig dat de groep wordt opgesplitst in twee groepen. Gebeurt dit niet en wordt de groep intact gehouden om vervolgens kwalitatief onderzoek te doen in de vorm van interviews naar aanleiding van het werken met een primaire bron, dan is het effect van de primaire bron niet genoeg geïsoleerd. Leerlingen kunnen in deze situatie bijvoorbeeld ook intrinsiek gemotiveerd raken doordat er überhaupt aandacht is geweest voor de geschiedenis van wiskunde, ongeacht dat dit met een primaire bron is gebeurd. Om juist de impact van die primaire bron te isoleren en te onderzoeken, is het nodig dat er twee groepen worden gemaakt met als essentiële verschil het al dan niet werken met een primaire bron.

### 3.1.3 Verantwoording keuze: werkbladen

De keuze is gemaakt om geschiedenis aan bod te laten komen met *werkbladen*. Dit heeft een aantal redenen. Ten eerste zijn er twee groepen die, in hetzelfde lokaal, met iets anders bezig zijn. Wat de ene groep doet, moet zo min mogelijk invloed hebben op wat de andere groep doet. Daarom is het klassikaal behandelen van de stof geen goede optie. Leerlingen moeten grotendeels zelfstandig aan de slag kunnen en blijven. Werkbladen bieden die mogelijkheid, omdat leerlingen hiermee op een gestructureerde en gestuurde manier in hun eigen tempo kunnen werken.

Ten tweede is het, met name bij het lezen van een primaire bron, heel belangrijk dat leerlingen voldoende begeleid worden en dat het materiaal toegankelijk wordt gemaakt, zoals te lezen was in hoofdstuk 2. 'Guided readings' werd daar ook wel aangedragen als geschikte methode om leerlingen wiskunde te laten leren aan de hand van een primaire bron. Werkbladen zijn bij uitstek geschikt om volgens deze methode geschiedenis in te zetten met als doel om wiskunde te leren, en om het lezen van een primaire bron toegankelijker te maken door middel van onder andere begeleidende stukken tekst.

Men kan zich echter afvragen of werkbladen leerlingen voldoende gevoel van autonomie kunnen geven. Immers, leerlingen moeten het werkblad volgen op de manier zoals die is opgebouwd. Ze hebben bijvoorbeeld niet de mogelijkheid om zelf opgaven te kiezen die ze willen maken. Bovendien wordt leerlingen ook niet de keuze gegeven welke van de twee werkbladen ze maken. Dit wordt voor hen bepaald. Werkbladen bieden echter op een andere manieren wel ruimte voor autonomie. Zo kunnen leerlingen in hun eigen tempo werken, zonder dat tijdsindeling vast is komen te staan vanuit de docent. Daarnaast mogen leerlingen in tweetallen of, in geval van een oneven aantal, in drietallen werken. Ze mogen zelf bepalen of en met wie ze binnen hun groep samenwerken. Verder is de gestructureerde opzet van de werkbladen bedoeld om leerlingen te ondersteunen bij het begrijpen van de stof, maar neemt dit niet weg dat er binnen deze structuur ruimte is voor eigen interpretatie en aanpak van de opdrachten. Kortom, het is voor discussie vatbaar of werkbladen de autonomie van leerlingen daadwerkelijk beperken. Zelfs als ze dat wel doen is het belangrijk om het doel van het onderzoek in gedachten te houden: het meten van een *verschil* in intrinsieke motivatie *tussen* de twee groepen. Omdat beide groepen met werkbladen werken, worden ze op dezelfde manier begeleid en hebben ze vergelijkbare autonomie binnen de gegeven structuur. Eventuele beperkingen in de autonomie die werkbladen met zich meenemen zijn dus gelijk verdeeld over beide groepen, waardoor het *verschil* in intrinsieke motivatie eerlijk vergeleken kan worden.

### 3.1.4 Verantwoording keuze: onderwerp

Een andere keuze die gemaakt is, is het onderwerp waarin beide groepen zich gaan verdiepen, namelijk de benadering van $\pi$ door Archimedes. De keuze van het onderwerp hangt samen met het kiezen van een methode waarmee geschiedenis wordt ingezet in de les. Zoals in hoofdstuk 2 te lezen was, zijn er in de literatuur twee ideeën die elkaar nogal tegenspreken, namelijk de 'genetic approach' en de 'hermeneutic approach'. Bij de 'genetic approach' wordt een voor leerlingen nog onbekend wiskundig onderwerp vanuit de geschiedenis gemotiveerd en geïntroduceerd, terwijl bij de 'hermeneutic approach' historische bronnen 'met terugwerkende kracht' worden geanalyseerd en deze over een al bekend wiskundig onderwerp gaan. De 'hermeneutic approach' is minder ontvankelijk geweest voor kritiek dan de 'genetic approach' en biedt concretere handvatten bij het inzetten van primaire bronnen. Daarom wordt getracht de 'hermeneutic approach' te volgen, wat betekent dat het onderwerp dat bestudeerd gaat worden bij leerlingen al bekend moet zijn.

Het getal $\pi$ is zo'n onderwerp dat bij elke leerling van een 5VWO wiskunde D klas bekend moet zijn. Sterker nog, ze hebben hier in de onderbouw al mee te maken gehad bij bijvoorbeeld het berekenen van de omtrek of oppervlakte van een cirkel. In de bovenbouw is het getal $\pi$ ook al meermaals in verschillende settingen naar voren gekomen, bijvoorbeeld bij goniometrie en bij complexe getallen, waar het getal bij de formule van Euler is gebruikt. Door het onderwerp nog eens vanuit een ander oogpunt te bekijken kan het cognitieve schema over dat onderwerp worden aangevuld en ontstaan er wellicht verbindingen met andere cognitieve schema's, zoals te lezen was in hoofdstuk 2. Dit resulteert erin dat de kennis over dit onderwerp beter bereikbaar en flexibeler te gebruiken is, wat nuttig is voor leerlingen in het vervolg bij het vak wiskunde.

Verder heeft $\pi$ een rijke geschiedenis, die ontzettend veel jaren terug gaat. Archimedes was, voor zover we weten, de eerste die, met een theoretisch bewijs een nauwkeurige benadering van $\pi$ gaf. Voor leerlingen kan het interessant zijn om te beseffen dat het getal $\pi$ al in het verre verleden bekend was, en dat met beperkte middelen Archimedes het toch voor elkaar kreeg om $\pi$ nauwkeurig te benaderen. Bovendien wordt door verschillende experts dit onderwerp aangedragen als geschikt onderwerp voor een les waarin geschiedenis van wiskunde wordt gebruikt, met in het bijzonder primaire bronnen (Lim & Chapman, 2015; Massa-Esteve, 2023).

### 3.1.5 Verantwoording keuze: vragenlijsten

Zoals aangegeven is in hoofdstuk 2 zijn Likert-schaal vragenlijsten een populair type instrument om variabelen zoals motivatie en attitude te meten. Met dit soort vragenlijsten kunnen de ervaringen van de twee groepen op een objectieve en kwantitatieve manier met elkaar vergeleken worden. Een vraag die wellicht opkomt is: "Waarom moet dit onderzoek kwantitatief van aard zijn?". Kunnen verschillen in motivatie tussen de twee groepen niet met kwalitatief onderzoek, bijvoorbeeld met interviews of open vragen, worden aangetoond? Hoewel kwalitatieve methoden diepgaander inzicht kunnen bieden in het waarom achter bepaalde meningen of gevoelens, leveren ze geen harde data op waarover cijfermatige conclusies kunnen worden getrokken. De kwantitatieve data die de Likert-schaal vragenlijsten opbrengen kunnen worden onderworpen aan statistische methoden, zoals een onafhankelijke t-toets, waarover meer wordt uitgelegd in de volgende paragraaf. Deze statistische analyses kunnen aantonen of er significante verschillen zijn tussen de twee groepen. Dit is cruciaal om te kunnen concluderen of het werken met een primaire bron daadwerkelijk een toegevoegde waarde heeft wat betreft de intrinsieke motivatie van leerlingen.

### 3.1.6 Verantwoording keuze: onafhankelijke t-toets

In dit onderzoek worden twee groepen vergeleken: een groep die werkblad A (met een primaire bron) maakt en een groep die werkblad B (zonder primaire bron) maakt. Hoewel de groepen zich in hetzelfde lokaal bevinden, werken ze afzonderlijk aan de werkbladen en overleggen ze alleen met personen binnen hun eigen groep. Hierdoor kunnen de groepen als onafhankelijk van elkaar worden beschouwd.

Met de kwantitatieve data uit de vragenlijsten kan per groep een gemiddelde score van onder andere intrinsieke motivatie worden berekend. Op die manier ontstaat er een situatie waarbij de gemiddelden van twee onafhankelijke groepen met elkaar vergeleken kunnen worden. Om te bepalen of het verschil tussen de gemiddelden significant is, biedt een onafhankelijke t-toets uitkomst.

Twee terechte vragen die naar aanleiding van het vorige op kunnen komen zijn: "Is het wel gegrond om van Likert-schaal responsen gemiddelden te berekenen?". En: "Is het uitvoeren van parametrische statistische methoden wel toegestaan voor data uit Likert-schaal vragenlijsten?". Voor het beantwoorden van de eerste vraag moet er kritisch gekeken worden naar het meetniveau van Likert-schaal vragenlijsten: is dit een ordinaal of interval meetniveau? In de literatuur is dit een bekend punt van discussie. In de antwoordopties van een Likert-schaal vragenlijst zit in ieder geval een ordening. Er kunnen aan die antwoordopties ook wel nummers worden toegekend. Bij een schaal met vijf antwoordmogelijkheden krijgt de optie "Sterk mee oneens" bijvoorbeeld het nummer 1 en krijgt de optie "Sterk mee eens" het nummer 5. De vraag is nu of het betekenisvol is om een gemiddelde te berekenen bij een afzonderlijk item uit de antwoorden van meerdere respondenten. Hoewel dit soms wel door onderzoekers wordt gedaan om makkelijker met de data te kunnen omgaan, wordt het als controversieel gezien om zo'n gemiddelde te berekenen (Joshi e.a., 2015). Immers, er wordt dan verondersteld dat de verschillen tussen twee antwoordopties gelijk verdeeld zijn en er dus op intervalniveau gemeten wordt. Bijvoorbeeld, er wordt vanuit gegaan dat het verschil tussen "Sterk mee oneens" en "Oneens" even groot is als het verschil tussen "Oneens" en Neutraal". Het doen van deze aanname is enigszins gevaarlijk, omdat respondenten de afstanden tussen de antwoordopties subjectief ervaren. Voor een respondent kan de afstand tussen "Sterk mee oneens" en "Oneens" bijvoorbeeld kleiner aanvoelen dan de afstand tussen "Oneens" en "Neutraal". Dit kan voor andere respondenten weer anders zijn. Hierdoor kan het misleidend zijn om een gemiddelde van afzonderlijke Likert-items te berekenen, omdat dit gemiddelde mogelijk niet goed laat zien wat de centrale mening van de groep is. Vanuit de algemene opvatting dat de afstand tussen de antwoordopties niet per se gelijk zijn, worden antwoorden op afzonderlijke Likert-items als ordinale data gezien in plaats van als intervaldata (Allen & Seaman, 2007; Boone Jr & Boone, 2012; Joshi e.a., 2015).

Men vindt dus over het algemeen dat *afzonderlijke* Likert-schaal items van ordinaal meetniveau zijn. Echter, wanneer van elke respondent antwoorden op *meerdere* items die samen een bepaald thema dekken, bijvoorbeeld intrinsieke motivatie, worden gecombineerd tot een *samengestelde* score, kunnen deze scores benaderd worden als intervaldata (Allen & Seaman, 2007; Boone Jr & Boone, 2012; Joshi e.a., 2015). Door meerdere items te combineren, worden verschillen in interpretaties van respondenten op afzonderlijke items als het ware 'vereffend'. Daarnaast wordt gezegd dat wanneer een gemiddelde of som wordt genomen van meerdere Likert-items, de data 'continuer' van aard wordt (Sauro, 2015). Dat klinkt vrij aannemelijk. De bij elkaar opgetelde scores van meerdere items geven per respondent een totaalbeeld over een bepaald onderwerp dat getest wordt met die items. De totaalscores kunnen grotere en ook subtielere verschillen aangeven tussen respondenten dan de afzonderlijke scores op items. Joshi (2015) stelt in zijn veelgelezen artikel het volgende: wanneer het doel van de onderzoeker is om alle items te combineren tot een samengestelde score voor een individu, in plaats van afzonderlijke analyses van elk item die door alle individuen zijn beantwoord, dan laat deze samengestelde score van een deelnemer een zinvolle en realistische afstand zien tot de samengestelde score van een ander individu. Daarom kunnen deze samengestelde scores worden aangeduid als intervaldata en is het gebruik van parametrische toetsen zoals de onafhankelijke t-toets verantwoord (Allen & Seaman, 2007; Boone Jr & Boone, 2012; Joshi e.a., 2015).

Voor dit onderzoek kan er per groep een gemiddelde score per thema worden berekend. De vraag is of die gemiddelde scores tussen de onafhankelijke groepen significant van elkaar verschillen. Dit is precies wat met een onafhankelijke t-toets kan worden onderzocht. Een voorwaarde voor het uitvoeren van een onafhankelijke t-toets is dat, bij erg kleine steekproeven ($<30$), de data normaal verdeeld moeten zijn (Ghasemi & Zahediasl, 2012; Kim & Park, 2019). Dit moet dus eerst aangetoond worden. Mocht de data niet normaal verdeeld zijn, dan is de niet-parametrische Mann-Whitney U toets een geschikt alternatief. Bij deze is een normale verdeling van de data namelijk niet vereist (Kim & Park, 2019). Met de Mann-Whitney U toets wordt het verschil in de verdelingen van twee groepen onderzocht. Omdat het bij deze toets gaat over verdelingen in plaats van gemiddelden kan de uitkomst wat lastiger te interpreteren zijn. Daarnaast is deze toets minder krachtig in het detecteren van significante verschillen dan parametrische toetsen zoals de onafhankelijke t-toets (Leech e.a., 2014). Vanwege deze redenen heeft de onafhankelijke t-toets de voorkeur.

## 3.2 Ontwerpen van de werkbladen

Er worden twee werkbladen gemaakt. Werkblad A maakt gebruik van een primaire historische bron, werkblad B niet. Om het effect van het werken met een primaire historische bron goed te kunnen onderzoeken, is het cruciaal dat beide werkbladen zo veel mogelijk vergelijkbaar zijn wat betreft vormgeving, opbouw, vraagstelling, lengte en niveau. Op deze manier kan het verschil in effect, veroorzaakt door de aanwezigheid van een primaire bron, onderzocht worden, zonder dat andere factoren de resultaten beïnvloeden. Een voor de hand liggende aanpak zou kunnen zijn om werkblad B simpelweg te baseren op een moderne 'vertaling' van de primaire bron. Hierdoor zouden werkblad A en werkblad B vrijwel identiek zijn, met dezelfde vragen, waarbij alleen het gebruik van de primaire bron verschilt. Dit is echter niet de juiste benadering. Het werken met een primaire bron brengt specifieke elementen en methodes met zich mee, die niet simpelweg kunnen worden overgenomen in een werkblad zonder primaire bron. Een concreet voorbeeld is het feit dat oude Griekse wiskundigen, ook Archimedes, geen getallen toekenden aan bijvoorbeeld de grootte van een hoek of de lengte van een lijnstuk. Zij beschreven dit in termen van verhoudingen. Bij het werken met primaire bronnen worden leerlingen hier gelijk mee geconfronteerd en moeten ze hier mee leren werken. Het zou echter onnatuurlijk en geforceerd zijn om direct diezelfde benadering, het werken met verhoudingen in plaats van getallen, op te leggen aan leerlingen die niet met de primaire bron werken. Om geschiedenis effectief terug te laten komen in een werkblad zonder primaire bron is een andere aanpak vereist. Door voor beide werkbladen een passende aanpak te kiezen, waarin de inzet van geschiedenis op de juiste manier tot zijn recht komt, kan het werkelijke effect van het gebruik van een primaire bron worden onderzocht, inclusief de elementen die voortkomen uit deze aanpak.

Tijdens het ontwerpproces van de werkbladen is er allereerst nagedacht over de voorwaarden waaraan de werkbladen moeten voldoen, ook wel de ontwerpeisen. In deze paragraaf zullen eerst deze ontwerpeisen worden gespecificeerd en onderbouwd. Daarna zal de uitwerking van de uiteindelijke werkbladen aan bod komen en zullen gemaakte keuzes hierbij worden verantwoord.

### 3.2.1 Opstellen van de ontwerpeisen

Er zijn een aantal ontwerpeisen waaraan *beide* werkbladen moeten voldoen. Allereerst moeten de werkbladen passen bij de doelgroep. De werkbladen worden gemaakt aan het eind van het schooljaar door leerlingen uit een 5VWO wiskunde D klas. De eerste ontwerp-eis is dan ook:

- De werkbladen sluiten aan op het eind-5VWO wiskunde D niveau van leerlingen.

Vanuit praktische overwegingen moet dit onderzoek binnen twee lessen van 50 minuten uitgevoerd kunnen worden. Er wordt geschat dat van de in totaal 100 minuten, er ongeveer 90 overblijven voor het doorlopen van het werkblad. Natuurlijk zou het mooi zijn als alle leerlingen de werkbladen helemaal af kunnen krijgen. Echter, het belangrijkste is dat ze ervaren hebben hoe het is om vanuit geschiedenis wiskunde te leren, al dan niet door middel van een primaire bron. Dit brengt de volgende, ietwat minder strikte, ontwerp-eis met zich mee:

- De werkbladen zijn in anderhalf uur grotendeels uit te voeren.

De volgende ontwerp-eis komt voort vanuit welk idee geschiedenis ingezet wordt. In dit onderzoek ligt de focus op het leren van wiskunde door middel van geschiedenis. Zoals Jankvist zou zeggen wordt geschiedenis ingezet als *cognitieve tool* om wiskunde te leren. De volgende ontwerp-eis luidt dus:

- Bij de werkbladen wordt geschiedenis ingezet als cognitieve tool om wiskunde te leren.

De hierboven benoemde eisen gelden voor beide werkbladen. Laat ik me nu richten op specifiek werkblad A. Bij dit werkblad staat de primaire bron centraal. Uit de literatuur zijn er verschillende mogelijke benaderingswijzen voor het inzetten van de primaire bron. Zoals beschreven in hoofdstuk 2 richt de 'hermeneutic approach' zich op het diepgaand analyseren van een primaire bron. Met deze benaderingswijze kan de focus worden gelegd op het leren van wiskunde, net als met de 'genetic approach'. Echter, de 'hermeneutic approach' is minder ontvankelijk geweest voor kritiek dan de 'genetic approach'. Bovendien wordt bij de 'hermeneutic approach' een bij leerlingen al bekend onderwerp vanuit een ander oogpunt bekeken, in tegenstelling tot bij de 'genetic approach', waarbij leerlingen een nieuw concept leren aan de hand van primaire bronnen. Met het oog op het al overvolle curriculum, is het voor leerlingen wellicht voordeliger om hun kennis van een bepaald onderwerp uit te diepen, in plaats van te leren over een nieuw onderwerp. Vanuit deze overwegingen wordt er geprobeerd bij werkblad A zo goed mogelijk de 'hermeneutic approach' te volgen. Een specifieke ontwerp-eis voor werkblad A is dan ook:

- Werkblad A voldoet aan de richtlijnen van de 'hermeneutic approach'.

In hoofdstuk twee zijn ook specifiekere methodes aan bod gekomen om primaire bronnen effectief in te zetten. Eén daarvan focust zich op het inzetten van geschiedenis als *cognitieve tool*, namelijk de 'guided readings'. Daarnaast bieden deze 'guided readings' leerlingen voldoende begeleiding om een primaire bron succesvol door te spitten. Deze begeleiding bij het begrijpen van de historische context is van essentieel belang de tekst te begrijpen en misvattingen te voorkomen. Het inzetten van primaire bronnen volgens de 'guided readings' aanpak lijkt zeer geschikt te zijn voor werkblad A. De volgende specifieke ontwerp-eis voor werkblad A is dus:

- Werkblad A stimuleert leerlingen de primaire bron te begrijpen door middel van 'guided reading'.

Primaire bronnen inzetten om wiskunde te leren is op zichzelf al een concrete methode van het inzetten van geschiedenis. Waar hierover in de literatuur écht concrete richtlijnen en benaderingswijzen te vinden waren, ontbreekt dit bij het leren van wiskunde door middel van geschiedenis, zónder primaire bronnen. Dit kan natuurlijk op allerlei verschillende manieren ingevuld worden, óók wanneer specifiek werkbladen worden gebruikt. Omdat kaders vanuit de literatuur voor het ontwerpen van werkblad B ontbraken, zijn er minder van tevoren vaststaande specifieke ontwerpeisen aan verbonden. Er is voornamelijk zelf kritisch nagedacht over hoe dit werkblad ingericht moet worden. Hierbij is het belangrijk dat leerlingen met wiskunde bezig zijn, *wiskunde leren*, door ze kennis te laten maken met Archimedes' methode voor het benaderen van $\pi$. Een goede aanpak kan zijn door leerlingen de methode van Archimedes zelf te laten uitvoeren en waar dat kan misschien zelfs zelf te laten ontdekken. Op die manier zijn leerlingen sowieso actief met wiskunde bezig. Ook komt hiermee misschien wel het meest essentiële verschil in het al dan niet werken met primaire bronnen naar voren: bij het werken met primaire bronnen draait het namelijk meer op het *begrijpen* van geschreven wiskunde, terwijl leerlingen in andere gevallen voornamelijk wiskunde leren door het te *doen*. Vanuit deze overwegingen is de volgende specifieke ontwerp-eis voor werkblad B dus:

- Werkblad B begeleidt leerlingen bij het benaderen van $\pi$ aan de hand van de methode van Archimedes.

Concluderend zijn er dus vijf ontwerpeisen voor werkblad A en vier voor werkblad B:

Werkblad A:

1. Het werkblad sluit aan op het eind-5VWO wiskunde D niveau van leerlingen.
2. Het werkblad is in anderhalf uur grotendeels uit te voeren.
3. Bij het werkblad wordt geschiedenis ingezet als cognitieve tool om wiskunde te leren.
4. Het werkblad voldoet aan de richtlijnen van de ‘hermeneutic approach’.
5. Het werkblad stimuleert leerlingen de primaire bron te begrijpen door middel van ‘guided reading’.

Werkblad B:

1. Het werkblad sluit aan op het eind-5VWO wiskunde D niveau van leerlingen.
2. Het werkblad is in anderhalf uur grotendeels uit te voeren.
3. Bij het werkblad wordt geschiedenis ingezet als cognitieve tool om wiskunde te leren.
4. Het werkblad begeleidt leerlingen bij het benaderen van $\pi$ aan de hand van de methode van Archimedes.

Naast deze ontwerpeisen moet er, zoals eerder is aangekaart, voor worden gezorgd dat de werkbladen vergelijkbaar zijn op onderdelen zoals vormgeving, opbouw, taalgebruik, vraagstelling, lengte en niveau.

### 3.2.2 Realisatie van de werkbladen

Met de ontwerpeisen in gedachten zijn werkblad A en werkblad B ontworpen. In bijlage A1 is werkblad A in zijn volledigheid opgenomen. In bijlage A2 is de oude primaire bron behorend bij dit werkblad opgenomen. In bijlage B is werkblad B in zijn volledigheid opgenomen. Ook de uitwerkingen van werkbladen A en B zijn opgenomen in bijlage C respectievelijk D. In de paragrafen verderop zal de inhoud van beide werkbladen nader worden toegelicht.

In hoofdstuk 2.1 is beschreven dat bij het effectief gebruiken van geschiedenis in de les leerlingen genoeg begeleid moeten worden. Bij het bestuderen van oude wiskunde moeten leerlingen zich bewust worden van de andere tijd waarin die wiskunde werd gedaan. Zeker bij het doorgronden van een primaire bron, is het belangrijk dat leerlingen zich kunnen inleven in de denkwereld van de auteur. Dit gebeurt niet vanzelf. De werkbladen bevatten daarom stukken begeleidende tekst die hierbij helpen, maar ook vóórdat leerlingen aan de slag gaan met de werkbladen worden de eerste stappen gezet in het proces van het "denken in een andere persoon en in een andere wereld". Dit gebeurt door een korte introductie van het onderwerp, aan *beide* groepen, door de docent aan de hand van twee PowerPoint-slides, zie bijlage E. Deze introductie duurt enkele minuten. Op de eerste slide wordt voorkennis over het getal $\pi$ geactiveerd: ‘Wat betekent dit getal ook alweer?’. Essentieel is dat iedere leerling dit weer helder heeft. Op de tweede slide wordt een kort inkijkje gegeven in de ontwikkelingen rondom $\pi$ tegen de tijd dat Archimedes dit getal benaderde. Er wordt verteld dat zo’n 4000 jaar geleden de Babyloniërs én Egyptenaren al wisten dat de omtrek van een cirkel gedeeld door zijn diameter altijd uit komt op hetzelfde getal. Ze hadden verschillende benaderingen voor dat getal, de Babyloniërs 3,125 en de Egyptenaren ongeveer 3,1605, die ze waarschijnlijk door te meten aan een cirkel hebben gevonden. Rond 240 voor Christus zette Archimedes een grote stap, door de waarde van $\pi$ nauwkeuriger én op een theoretische manier mét bewijs te benaderen. Ter afsluiting van deze klassikale introductie wordt bondig ingegaan op wie Archimedes was. Met deze informatie vooraf wordt dus niet alleen voorkennis opgehaald, maar leren leerlingen ook iets meer over de tijd en de oud-wiskundige die in het werkblad naar voren komen. Het zet hiermee de eerste stappen voor het "denken in een andere persoon en in een andere wereld".

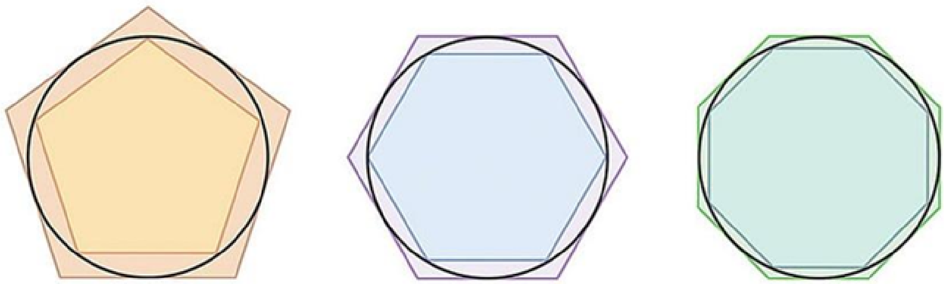
Werkblad A

De inhoud van werkblad A en de belangrijkste keuzes hierin zullen stap voor stap worden toegelicht. In figuur 1 is het eerste gedeelte van het werkblad te zien. Dit gedeelte fungeert als een soort inleiding, vooral wiskundig van aard. Het globale idee van Archimedes' methode voor het benaderen van $\pi$ wordt uitgelegd. Hierbij helpt het plaatje, die overigens niet geheel juist is voor het illustreren van Archimedes' methode van het benaderen van $\pi$, waarover later meer. Door deze inleiding worden leerlingen alvast voorbereid op wat ze in de oude bron gaan tegenkomen. Kennis van het globale idee van Archimedes kan als ankerpunt dienen: leerlingen kunnen de informatie uit de oude bron hieraan relateren.

## Werkblad A: Archimedes' benadering van $\pi$

Al voordat Archimedes (287-212 v. Chr.) leefde observeerde men dat de verhouding tussen de omtrek en de diameter van een cirkel ($\boldsymbol{\pi}$) constant is. Archimedes was de eerste (van wie we het weten) die de grootte van deze verhouding nauwkeurig wist te benaderen. In tegenstelling tot zijn voorgangers deed hij dit niet door te meten aan een cirkel. Archimedes deed dit op een theoretische manier, inclusief wiskundig bewijs. Aan de hand van de vertaalde originele oude tekst en dit werkblad ga je leren hoe Archimedes aan zijn benadering van $\boldsymbol{\pi}$ kwam.

Het bewijs komt neer op het volgende idee. Een cirkel wordt *in*geschreven door een regelmatige veelhoek en *om*geschreven door een regelmatige veelhoek, zie figuur 1.



*Figuur 1: Schets ter illustratie van de methode van het inschrijven en omschrijven met regelmatige veelhoeken.*

De verhouding tussen de omtrek van de ingeschreven veelhoek en de diameter van de cirkel geeft een *onder*grens van $\boldsymbol{\pi}$. De verhouding tussen de omtrek van de omgeschreven veelhoek en de diameter van de cirkel geeft een *boven*grens van $\boldsymbol{\pi}$. Dit principe kan worden weergegeven door de vergelijking:

$$\frac{\textit{omtrek ingeschreven veelhoek}}{\textit{diameter cirkel}} < \boldsymbol{\pi} < \frac{\textit{omtrek omgeschreven veelhoek}}{\textit{diameter cirkel}} \qquad \textbf{(1)}$$

Hoe meer zijden de regelmatige veelhoek heeft, hoe beter de omtrek van die veelhoek de omtrek van de cirkel benadert, zie figuur 1. De onder- en bovengrens komen hiermee steeds dichter bij de daadwerkelijke waarde van $\boldsymbol{\pi}$ te liggen. Als het ware wordt $\boldsymbol{\pi}$ steeds meer ingesloten door de steeds nauwkeuriger wordende onder- en bovengrens.

Dit werkblad bestaat uit een aantal fases. In fase 1, de inleidende fase, zul je met de huidige wiskundige middelen die beschikbaar zijn (zoals de goniometrische functies sinus, cosinus en tangens) een onder- en bovengrens voor $\boldsymbol{\pi}$ vinden. In fase 2 en 3 zul je de oude vertaalde tekst gebruiken en doorgronden om te leren hoe Archimedes in zijn tijd met heel beperkte middelen toch een zeer nauwkeurige benadering van $\boldsymbol{\pi}$ heeft gevonden.

Figuur 1

Fase 1: goniometrische functies gebruiken

Met de vergevorderde wiskundige kennis en 'hulpmiddelen' die we vandaag de dag tot onze beschikking hebben is het benaderen van $\boldsymbol{\pi}$ met in- en omgeschreven veelhoeken goed te doen. Zo kunnen de goniometrische functies (sinus, cosinus en tangens) gebruikt worden bij deze benadering.

*Opdracht 1a*

Stel je voor dat we een cirkel met diameter = 1 en haar *in*geschreven regelmatige achthoek beschouwen. Wat is op basis van deze ingeschreven regelmatige achthoek een ondergrens van $\boldsymbol{\pi}$? Rond af op 5 decimalen.
Tip: maak een schets in figuur 1.

*Opdracht 1b*

We beschouwen nu bij dezelfde cirkel haar *om*geschreven regelmatige achthoek. Wat is op basis van deze omgeschreven regelmatige achthoek een bovengrens van $\boldsymbol{\pi}$? Rond af op 5 decimalen.

Figuur 2

Zie figuur 2. In fase 1 berekenen leerlingen volgens Archimedes' globale idee met veelhoeken een onder- en bovengrens voor $\pi$. Ze mogen hiervoor de bij hun bekende goniometrische functies gebruiken en hoeven zich nog niet te verdiepen in de oude bron. Ondanks dat de oude bron niet voorkomt in deze fase, is dit stukje toch waardevol in werkblad A. Door $\pi$ te benaderen met goniometrische functies, zijn leerlingen alvast bezig met het wat gedetailleerder ontdekken van Archimedes' methode, wat ze zal helpen tijdens het lezen van de oude bron. Bovendien ervaren ze dat goniometrische functies het mogelijk maken om $\pi$ snel en eenvoudig te benaderen—een contrast dat des te duidelijker wordt wanneer ze dit later vergelijken met Archimedes' methode, die deze functies nog niet tot zijn beschikking had.

Zie figuur 3. Dit is het eerste gedeelte van fase 2. In de tekst voorafgaand aan opdrachten 2a en 2b wisselen leerlingen af met het lezen van kleine stukjes uit de oude en stukjes begeleidende tekst. In de begeleidende tekst worden leerlingen op de hoogte gebracht van welke kennis er nog niet beschikbaar was in de tijd dat Archimedes $\pi$ benaderde en welke wel. Op deze manier kunnen leerlingen zich beter inleven in de denkwereld van Archimedes ten tijde dat hij dit bewijs schreef en begrijpen ze beter waarom hij welke keuzes heeft gemaakt. Hiertoe worden leerlingen ook gestimuleerd na te denken in opgave 2b. Aandacht besteden aan het perspectief van de auteur en zijn redeneringen zijn typisch aspecten die horen bij de 'hermeneutic approach', wat te lezen was in hoofdstuk 2.1.

Fase 2: Archimedes' bewijs voor de bovengrens

Lees propositie 3 (alleen de schuingedrukte zin) uit de oude bron. *Propositie* is een ander woord voor *stelling.*

In het resterende deel van dit werkblad ga je Archimedes' bewijs voor propositie 3 doorgronden. In deze fase zul je leren hoe Archimedes aan de *boven*grens $3\frac{1}{7}$ van $\boldsymbol{\pi}$ kwam. Vóórdat je in de bron duikt is goed om je bewust te zijn van in hoeverre de Griekse wiskunde in Archimedes' tijd ontwikkeld was.

In Archimedes' tijd waren de goniometrische functies sinus, tangens en cosinus nog niet ontdekt en kon hij deze dus niet gebruiken om lengtes van driehoekszijden te berekenen. Wel had Archimedes weet van een aantal meetkundige stellingen zoals de stelling van Pythagoras, die zo'n 300 jaar vóór Archimedes was uitgevonden. Naast en mogelijk dóór deze stelling waren bij Archimedes ook drie speciale driehoeken bekend:

- De 60°-60°-60°-driehoek (gelijkzijdige driehoek), waarbij tussen de zijdes uiteraard de verhouding $1:1:1$ geldt.
- De 45°-45°-90°-driehoek (ook wel de gelijkbenige rechthoekige driehoek), waarbij tussen de zijdes de verhouding $1:1:\sqrt{2}$ geldt.
- De 30°-60°-90°-driehoek (eigenlijk de helft van een gelijkzijdige driehoek), waarbij tussen de zijdes de verhouding $1:2:\sqrt{3}$ geldt.

*Overkoepelende opgave (is op dit moment nog niet uit te voeren)*

De stelling van Pythagoras wordt veelvuldig gebruikt voor het bewijzen van propositie 3. Wanneer je stukken tekst leest, markeer dan in de oude bron telkens díe regels waar de stelling van Pythagoras rechtstreeks wordt toegepast. Hou deze overkoepelende opgave dus de rest van dit werkblad in gedachten.

Lees het blauwe aangegeven deel tekst. In dit begin van het bewijs stelt Archimedes zijn eerste regelmatige veelhoek op. De helft van een zijde van die veelhoek (lijnstuk AC) is te zien in de tekening op blz. 94.

*Opdracht 2a*

Met wat voor soort omgeschreven regelmatige veelhoek begint Archimedes zijn bewijs en hoe zie je dat?

*Opdracht 2b*

Wat is waarschijnlijk de reden dat Archimedes juist deze veelhoek als startpunt koos?

Figuur 3

Zie figuur 4. In dit stukje wordt uitgelegd dat het uitrekenen van wortels in de tijd van Archimedes nog niet gemakkelijk was. Ook dit is essentieel voor leerlingen om te weten. Weten ze dat niet, dan is het voor hen waarschijnlijk onlogisch waarom wortels benaderd worden met een

In de oude vertaalde bron komen veel vierkante haken voor, zo ook in het blauwe aangegeven deel tekst waar bijvoorbeeld tussen haken staat dat $OA : AC$ gelijk is aan $\sqrt{3} : 1$. De tekst binnen dit soort vierkante haken komen niet van Archimedes, maar van een andere geroemde oud-Griekse wiskundige genaamd Eutocius (480 – 520 n. Chr.). Hij heeft deze toegevoegd ten behoeve van de leesbaarheid. Archimedes zelf schreef namelijk maar weinig tussenstappen op.

Omdat men in Archimedes' tijd nog niet goed wist hoe met wortels moest worden gerekend, werden wortels door Archimedes benaderd met een breuk. Hiervoor gebruikte hij een tijdrovend algoritme. Aan dit algoritme zullen we geen aandacht besteden in dit werkblad.

*Opdracht 2c*

De breuk $265 : 153$ is een onderschatting van de werkelijke verhouding $\sqrt{3} : 1$ tussen $OA$ en $AC$, maar benadert de verhouding behoorlijk nauwkeurig. Tot en met de hoeveelste decimaal komt deze breuk overeen met de werkelijke verhouding tussen $OA$ en $AC$?

Wat je verder wellicht opvalt is dat Archimedes tot nu toe nog helemaal geen getalswaarde heeft gegeven aan bepaalde 'objecten', zoals de grootte van een hoek of de lengte van een lijnstuk (bijv. de diameter van de cirkel). Het is tegenwoordig misschien lastig voor te stellen, maar in de Oudheid werd dit in de Griekse theoretische wiskunde niet gedaan. Griekse meetkundigen kenden niet rechtstreeks getalswaarden toe aan de objecten die zij bestudeerden:

*"Een lijnstuk was een lijnstuk. Er bestaan gelijke lijnstukken, langere en kortere lijnstukken en een lijnstuk kan gelijk zijn aan twee andere lijnstukken samen, maar op geen enkel moment sprak een Griekse wiskundige over de lengte van een lijnstuk." ('Wortels van de Wiskunde', door Berlinghoff & Gouvêa, 2019)*

In het dagelijkse praktische leven werd overigens net zo goed met lengte gerekend en gemeten als elders, maar in de theoretische wiskunde werd dit dus vermeden. Griekse wiskundigen probeerden alles vanuit een *relatief* oogpunt te zien. *Verhoudingen* speelden dus in de theoretische Griekse wiskunde een zeer belangrijke rol. Dit is waarom Archimedes bijv. schrijft dat hoek $AOC$ één derde is van een rechte hoek, in plaats van 30°. En dat hij bijv. schrijft dat $OA : AC$ gelijk is aan $\sqrt{3} : 1$, in plaats van dat hij de diameter lengte 1 geeft en lijnstuk $OA$ lengte $\sqrt{3}$. Op deze manier benadert Archimedes $\boldsymbol{\pi}$ zonder ook maar één lijnstuk of hoek een getal te geven. Hij gebruikt alleen maar verhoudingen, die wel een getalswaarde kregen.

Figuur 4

breuk. Nog zo iets essentieels voor leerlingen om beter te kunnen begrijpen waarom Archimedes doet wat hij doet, is dat ze weten dat in de oude Griekse theoretische wiskunde geen lengtes werden toegekend aan lijnstukken. Ook dit wordt in dit stukje uitgelegd. Weten leerlingen dit niet, dan zullen ze Archimedes' manier waarschijnlijk onnodig gecompliceerd vinden. Dit neemt niet weg dat ze zelfs met inzicht in de reden achter het gebruik van verhoudingen, zijn methode nog steeds als onnodig moeilijk kunnen ervaren, maar het zal in ieder geval helpen met het inleven in de denkwereld van Archimedes.

Zie figuur 5. In het voorafgaande stukje begeleidende tekst worden leerlingen voorbereid op wat er in het volgende stuk tekst in de oude bron gebeurt. Op die manier wordt de tekst uit de oude bron wat toegankelijker en hopelijk makkelijker begrijpbaar gemaakt. Leerlingen lezen aan de hand van de opgaven dit stuk tekst uit de oude bron. Opdracht 2e is belangrijk en biedt ondersteuning om te begrijpen hoe Archimedes aan de verhouding OA:AD $>$ 571:153 komt. Beide opgaven in dit stuk zijn wiskundig van aard en helpen de de stappen in de oude bron te

Met de omgeschreven regelmatige zeshoek zou Archimedes in principe al een bovengrens van $\pi$ kunnen geven. Immers, de verhouding $OA : AC$, dat is de straal van de cirkel ten opzichte van de helft van een zijde van de veelhoek, is bekend. Vanuit deze verhouding kan redelijk eenvoudig de verhouding $\frac{omtrek\ regelmatige\ zeshoek}{diameter\ cirkel}$ worden berekend, die een bovengrens van $\pi$ geeft. Echter, Archimedes was op zoek naar een nauwkeurigere bovengrens en verdubbelt daarom telkens het aantal zijden van de veelhoek, zodat die veelhoek steeds meer op de cirkel gaat lijken. Dit doet hij eerst door hoek $AOC$ door midden te delen, waardoor zijde $AD$ ontstaat. Zijde $AD$ is de helft van een zijde van de omgeschreven regelmatige twaalfhoek.

Lees aan de hand van opdrachten 2d en 2e het met rood aangegeven stuk tekst.

*Opdracht 2d*
Archimedes stelt dat $CO : OA$ gelijk is aan $CD : DA$. Deze gelijkheid komt voort uit een stelling die de oud-Griekse wiskundige Euclides (± 300 v. Chr.) had opgeschreven in zijn boek 'de Elementen'. De stelling luidt:

*'Als een lijnstuk een hoek van een driehoek doormidden deelt, deelt dit lijnstuk de overstaande zijde in stukken die zich verhouden als de zijden die de hoek insluiten.'*

Deze stelling wordt de $\boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$-stelling genoemd.

Vul in het vak de wiskundige naam in voor een lijnstuk dat een hoek precies doormidden deelt.

Vervolgens leidt Archimedes de ongelijkheid $OA : AD > 571 : 153$ af. Hij schrijft hierbij maar weinig tussenstappen op.

*Opdracht 2e*
Laat zien hoe Archimedes tot deze ongelijkheid is gekomen. Vul daartoe hieronder eerst in de lege vakjes de juiste getallen of letters in. De laatste stappen om tot deze ongelijkheid te komen moet je zelf zetten.

$$\frac{CO}{OA} = \frac{CD}{DA}$$

$$\frac{CO}{OA} + 1 = \frac{CD}{DA} + \boxed{\phantom{x}}$$

$$\frac{CO}{OA} + \boxed{\phantom{x}} = \frac{CD}{DA} + \boxed{\phantom{x}}$$

$$\frac{CO + OA}{OA} = \frac{CD + \boxed{\phantom{x}}}{DA}$$

$$\frac{CO + OA}{OA} = \frac{\boxed{\phantom{x}}}{DA}$$

$$\frac{CO + OA}{OA} \cdot \boxed{\phantom{x}} = \frac{\boxed{\phantom{x}}}{DA} \cdot \boxed{\phantom{x}}$$

$$\frac{CO + OA}{CA} = \frac{OA}{AD}$$

$$\boxed{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxxx}}$$

Lees het resterende rode deel. In dit laatste stuk rode tekst komt Archimedes tot een benadering (een kleine onderschatting) voor de verhouding $OD : DA$.

Figuur 5

verklaren en begrijpen.

Scan het met geel aangegeven stuk tekst. Hou de overkoepelende opgave hierbij in gedachten. In dit stuk wordt het proces dat beschreven was in het rode deel tekst drie keer herhaald. Eerst wordt de hoek AOD in tweeën gedeeld, oftewel er wordt weer een nieuwe veelhoek gecreëerd met twee keer zo veel zijdes als de vorige veelhoek. Ook van deze gecreëerde veelhoek wordt het aantal zijdes verdubbeld en daarna (zie 'fourthly') wordt dit proces een laatste keer gedaan. Archimedes schrijft echter steeds minder tussenstappen op. Merk op dat het doel van het herhalende proces is om telkens een tweetal verhoudingen te berekenen, namelijk (vanuit punt O gezien) de verhoudingen:

1. $straal\ cirkel : helft\ zijde\ veelhoek$ (bijv. $OA : AE$). Zoals eerder vermeld kan met deze verhouding een bovengrens van $\boldsymbol{\pi}$ worden gevonden voor die betreffende veelhoek.
2. $lijnstuk\ middelpunt\ cirkel\ naar\ hoekpunt\ veelhoek : helft\ zijde\ veelhoek$ (bijv. $OE : EA$).

*Opdracht 2f*
Met welk doel berekende Archimedes deze tweede verhouding? Tip: zoek in het gele deel tekst op waar de benadering voor $OD : DA$ wordt gebruikt.

In de laatste regel van het met geel aangegeven deel staat een belangrijk resultaat van al het harde werk: namelijk (een benadering van) de verhouding tussen de straal van de cirkel (OA) en de helft van een zijde van de laatste omgeschreven veelhoek (AG).

*Opdracht 2g*
Met wat voor soort omgeschreven regelmatige veelhoek was Archimedes blijkbaar tevreden genoeg om hiermee een bovengrens van $\boldsymbol{\pi}$ te geven?

Zoom nog eens uit van wat je net allemaal hebt gelezen, gescand en berekend en kijk nog eens naar figuur 1 op dit werkblad. Deze figuur wordt online veel gebruikt om Archimedes' idee voor het benaderen van $\boldsymbol{\pi}$ intuïtief logisch te maken, maar komt strikt gezien niet overeen met Archimedes zijn werkwijze.

*Opdracht 2h*
Geef twee redenen waarom figuur 1 niet geschikt is voor het weergeven van Archimedes' bewijs.

Figuur 6

Zie figuur 6. In dit gedeelte wordt het gele stuk tekst uit de oude bron behandeld. In dit stuk tekst wordt het proces van het verdubbelen van de veelhoeken om vervolgens de relevante verhoudingen te berekenen een aantal keren herhaald. Dit is een extra lastig stuk tekst om te begrijpen, omdat er steeds minder tussenstappen worden opgeschreven. Omdat in de vorige opgave al uitvoerig aandacht is besteed aan hoe Archimedes precies de relevante verhoudingen afleid, en dat in de herhalingen niet anders is, worden leerlingen in dit gedeelte van het werkblad gestimuleerd zich te richten op de grote lijnen. Dit wordt onder andere met het begeleidende stuk tekst gedaan door de twee relevante verhoudingen per herhaling uit te lichten en door aan te geven dat ze het gele stuk tekst moeten *scannen* in plaats van *lezen*. Daar waar in het vorige gedeelte dus ingezoomd werd in een stuk uit de oude bron en de redeneringen erachter, wordt in dit gedeelte meer uitgezoomd gekeken worden naar een stuk uit de oude bron. De laatste opgave in dit gedeelte, opgave 2h, vraagt van leerlingen om in grote lijnen te evalueren wat ze hebben gelezen, en dit te vergelijken met wat hen eerder in het werkblad is voorgeschoteld.

Zie figuur 7. In dit gedeelte komt het bewijs van de benaderde bovengrens van $\pi$ ten einde. De opdrachten helpen ze om de stappen die Archimedes impliciet zet te begrijpen.

<u>Lees</u> het met groen aangegeven deel tekst. In dit stuk wordt een bovengrens gevonden voor de verhouding tussen de omtrek van de omgeschreven veelhoek en de diameter van de cirkel en dús ook voor $\boldsymbol{\pi}$.

*Opdracht 2i*

Er wordt gesteld dat hoek $AOG = \frac{1}{48}$ van een rechte hoek. Geef een berekening waaruit blijkt dat dit inderdaad zo is.

*Opdracht 2j*

Op een gegeven moment wordt er gesteld dat $\frac{AB}{omtrek\ omgeschreven\ 96\_hoek} > \frac{4673{,}5}{14688}$. Ook wordt afgeleid dat $\frac{14688}{4673{,}5} < 3\frac{1}{7}$. Hoe volgt hieruit dat $\boldsymbol{\pi} < 3\frac{1}{7}$? Schrijf zo veel mogelijk tussenstappen op.

Hint: de volgende regel bestaat:

*"Als $\frac{A}{B} > 0$ en $\frac{C}{D} > 0$, dan volgt uit $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ dat $\frac{B}{A} < \frac{D}{C}$."*

Figuur 7

Zie figuur 8. In dit gedeelte begint de derde fase van werkblad A. In de derde fase verdiepen leerlingen zich in hoe de *onder*grens voor $\pi$ door Archimedes is benaderd. Het doorgronden van het bewijs voor de bovengrens was al een hele klus op zich. De derde fase is toegevoegd voor de compleetheid van het werkblad. De zeer snelle leerlingen zullen waarschijnlijk een begin kunnen maken met deze fase. Als leerlingen echter alleen fase twee hebben kunnen voltooien, is dit ook al een mooi resultaat. In het paarse stuk tekst uit de oude bron begint Archimedes, net als bij het benaderen van de bovengrens, met het definiëren van de eerste veelhoek. De begeleidende tekst en opgave in dit gedeelte van het werkblad hebben als doel om de leerlingen te helpen begrijpen waarom en hoe Archimedes deze eerste veelhoek als startpunt koos.

Fase 3: Archimedes' bewijs voor de ondergrens

Nu je iets meer gewend bent geraakt aan de wiskundige stijl van Archimedes, bekijken we als laatst ook nog even in grote lijnen zijn bewijs voor de *onder*grens van $\boldsymbol{\pi}$, namelijk $3\frac{10}{71}$.

Lees het met paars aangegeven stuk tekst. In de vorige fase heb je gezien dat Archimedes telkens op zoek was naar de verhouding tussen de straal van de cirkel en de helft van een zijde van de veelhoek. Voor de ondergrens doet hij het anders: meer rechttoe rechtaan. Hij begint nu met een *in*geschreven zeshoek en zoekt gelijk naar de verhouding tussen de diameter en de zijde van de veelhoek. Die verhouding is $BA : BC = 2 : 1$ en schrijft hij in het paarse stuk tekst niet op, maar komt later wel terug (hij had er dus wel weet van).

Hoek $CAB$ is één derde van een rechte hoek. Hieruit concludeert Archimedes dat $AC : CB = \sqrt{3} : 1$. Hiervoor gebruikt hij impliciet een eeuwenoude meetkundige stelling die in zijn bewijs nog niet eerder is verschenen.

*Opdracht 3a*

Welke stelling wordt impliciet gebruikt bij het afleiden van de verhouding $AC : CB = \sqrt{3} : 1$.

Figuur 8

Zie figuur 9. In dit gedeelte verdiepen leerlingen zich aan de hand van opgaven en begeleidende tekst, zich in het eerste verdubbel-proces van de ingeschreven veelhoek en de verhouding die hier uit komt. Ook om deze stappen te kunnen volgen worden leerlingen ondersteund door middel van het werkblad. De opdrachten sporen leerlingen aan om de wiskundige inhoud en werkwijze uit de primaire bron te begrijpen.

Zie figuur 10. Dit is het laatste gedeelte van werkblad A. Er wordt niet veel aandacht besteed aan het herhalende proces van het verdubbelen van de veelhoeken, omdat dit bij één zo'n herhaling in detail al is bestudeerd in de vorige opgaven, en de herhalingen vergelijkbaar zijn. Wel wordt het doen van de conclusie nog even uitgelicht. Hoewel leerlingen hierbij maar een kleine stap zelf hoeven te zetten (namelijk $\pi > \frac{omtrek\ ingeschreven\ 96-hoek}{AB}$) , vereist deze opgave dat ze weer even uitzoomen en de grote lijnen overzien om vervolgens de conclusie te maken. Als afsluitende zinnen is nog even onderstreept dat wiskunde niet altijd zo ver ontwikkeld is als nu en dat dat vroeger van mensen vereiste om extra creatief te zijn. Deze zinnen zijn bedoeld om bij leerlingen een grotere waardering voor de wiskunde en haar ontwikkeling op te wekken.

Lees aan de hand van opgaven 3b t/m 3d het met roze aangegeven stuk tekst.

Net zoals bij de het berekenen van een bovengrens, wordt de 'verdubbelingsstrategie' ook bij het berekenen van een nauwkeurige ondergrens toegepast. Hiertoe wordt eerst hoek $BAC$ doormidden gedeeld, waardoor een zijde $BD$ van de ingeschreven twaalfhoek ontstaat.

*Opdracht 3b*
Archimedes stelt dat hoek $dAC$ gelijk is aan hoek $dBD$, maar geeft geen uitleg. Beredeneer waarom deze hoeken gelijk zijn.

Met behulp van de gelijkvormigheid tussen driehoeken $ADB$, $ACd$ en $BDd$ leidt Archimedes de gelijkheid $\frac{BA+AC}{BC} = \frac{AD}{DB}$ af. De eerste stappen: $AD : DB = BD : Dd = AC : Cd$ volgen rechtstreeks uit de gelijkvormigheid van deze driehoeken (ga dit na!).

*Opdracht 3c*
Welke stelling gebruikt Archimedes voor het vinden van de stap $AC : Cd = AB : Bd$ ?

De volgende stap is wellicht een lastige. Hiervoor moet je weten dat de volgende regel geldt:
*'Als er geldt* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *dan geldt ook* $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$.*'*

*Opdracht 3d*
Maak het bewijs van deze regel compleet door hieronder de lege vakjes in te vullen.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad geeft \;\; ad = \square$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \square = \frac{a}{b} \cdot \frac{\square}{b+d} = \frac{ab + \square}{b(b+d)} = \frac{\square}{b(b+d)} + \frac{\square}{b(b+d)} = \frac{\square}{b+d} + \frac{\square}{b(b+d)} = \frac{\square}{b+d} + \frac{\square}{b+d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Nu je deze regel hebt aangetoond is het duidelijk dat $\frac{AC}{Cd} = \frac{AB}{Bd} = \frac{AC+AB}{Cd+Bd}$. De laatste twee stappen voor het aantonen van de gelijkheid $\frac{BA+AC}{BC} = \frac{AD}{DB}$ zijn vrij rechttoe-rechtaan.

Lees het resterende roze deel. In dit laatste stuk roze tekst komt Archimedes tot een benadering (een kleine overschatting) voor de verhouding $AB : BD$, de diameter van de cirkel ten opzichte van een zijde van de twaalfhoek.

Figuur 9

<u>Scan</u> het met oranje aangegeven stuk tekst. Hou de overkoepelende opgave hierbij in gedachten. In dit stuk wordt het proces dat beschreven was in het roze deel tekst drie keer herhaald. Hierbij vindt Archimedes telkens, na elke verdubbeling van het aantal zijden van de ingeschreven regelmatige veelhoek, een benadering voor de verhouding tussen de diameter van de cirkel en de lengte van de 'nieuwe' zijde. Hoewel Archimedes steeds minder stappen opschrijft, zijn de stappen die hij zet zijn totaal overeenkomstig met wat je in de vorige opgaven betreffende het roze deel hebt gezien.

In de laatste regel van het met oranje aangegeven deel staat een belangrijk resultaat van al het harde werk: namelijk (een benadering van) de verhouding tussen de diameter van de cirkel $AB$ en een zijde van de *in*geschreven regelmatige 96-hoek $BG$.

<u>Lees</u> het met bruin aangegeven stuk tekst.

*Opdracht 3d*

Er wordt geconcludeerd dat $\frac{omtrek\ ingeschreven\ 96\_hoek}{AB} > \frac{6336}{2017,25}$. Hoe volgt hieruit dat $\boldsymbol{\pi} > 3\frac{10}{71}$ ?

Merk op dat Archimedes met de breuken $\frac{6336}{2017,25}$ en $\frac{14688}{4673,5}$ eigenlijk een nog nauwkeurigere ondergrens respectievelijk bovengrens te pakken had. Echter, deze breuken zijn onhandig. Zeker in Archimedes' tijd. Daarom besloot Archimedes de ondergrens $3\frac{10}{71}$ en bovengrens $3\frac{1}{7}$ te hanteren. Conclusie: $\boldsymbol{3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}}$

Zo zie je maar: met alle 'wiskundige tools' die we vandaag de dag tot onze beschikking hebben lijkt het benaderen van $\boldsymbol{\pi}$ vrij eenvoudig. Dat heb je in fase 1 gezien, waarin je gebruik kon maken van goniometrische functies. Ontdekking van die tools heeft echter eeuwenlang geduurd. Wiskunde werd opgebouwd vanuit het niets. Met zeer beperkte middelen werd $\boldsymbol{\pi}$ door Archimedes benaderd.

Wie niet sterk is moet slim zijn. ☺
Bedankt voor het meedoen met het onderzoek!

**EINDE**

Figuur 10

Werkblad A moest aan een aantal ontwerpeisen voldoen. Per ontwerpeis zal worden toegelicht in hoeverre hieraan naar verwachting is voldaan.

1. *Het werkblad sluit aan op het eind-5VWO wiskunde D niveau van leerlingen.*
   De wiskundige onderwerpen die terug komen in het werkblad, bijvoorbeeld de verschillende meetkundige stellingen waar naar gevraagd wordt en het omschrijven van gelijkheden en ongelijkheden, moeten bekend zijn bij de betreffende 5VWO wiskunde D klas. Op die manier is er dus rekening mee gehouden dat het niveau van het werkblad aansluit bij de doelgroep. Dit neemt echter niet weg dat het werkblad in zijn geheel perfect past bij het niveau van de doelgroep. Het doorspitten en volledig begrijpen van Archimedes' werkwijze is nu eenmaal vrij complex. Aan de hand van begeleidende, soms verklarende en samenvattende tekst in het werkblad is geprobeerd de primaire bron zo toegankelijk

mogelijk te maken voor de doelgroep. Ondanks dit zal het niveau van het werkblad naar verwachting aan de hoge kant zijn.

2. *Het werkblad is in anderhalf uur grotendeels uit te voeren.*
   Zoals eerder vermeld is deze ontwerp-eis minder strikt. Naar verwachting is het mogelijk in ieder geval fase 1 en 2 van het werkblad grotendeels af te krijgen. De derde fase is toegevoegd voor de snelle leerlingen, maar ook voor de compleetheid van Archimedes' bewijs.

3. *Bij het werkblad wordt geschiedenis ingezet als cognitieve tool om wiskunde te leren.*
   De primaire bron is ingezet op zo'n manier dat leerlingen gestimuleerd worden om de wiskundige inhoud ervan te begrijpen. Dit wordt bijvoorbeeld gedaan met opdrachten waarbij leerlingen ontbrekende stappen in het bewijs moeten aanvullen. Leerlingen zijn onder andere bezig met het werken met breuken/verhoudingen en gelijkvormigheid van driehoeken, en er wordt een beroep gedaan op hun kennis van meetkundige stellingen. Hoewel leerlingen niet iets nieuws op wiskundig gebied leren, zijn ze bezig met het ophalen van het gebruiken van bestaande wiskundige kennis en vaardigheden. Uiteindelijk restulteert dit mogelijk in een nog beter begrip van het getal $\pi$.

4. *Het werkblad voldoet aan de richtlijnen van de 'hermeneutic approach'.*
   In hoofdstuk 2.1 is beschreven wat de 'hermeneutic approach' inhoudt. Aan de eerste richtlijn-'Leerlingen bestuderen een historische bron nádat ze een goed begrip hebben verworven van het wiskundige onderwerp in de moderne vorm en vanuit een modern perspectief'-is vanzelfsprekend voldaan. Door middel van de klassikale introductie én de stukken begeleidende tekst is ook aan de tweede richtlijn-'Leerlingen vergaren en bestuderen informatie over de context en de biografie van de auteur.'-voldaan. Natuurlijk wordt er niet uitvoerig stilgestaan bij bijvoorbeeld het leven van Archimedes. Geschiedenis van de wiskunde moest immers gebruikt worden als *tool* om wiskunde te leren. Ook aan de derde richtlijn-'De authenticiteit van de historische primaire bron blijft zo veel mogelijk intact.'-is gedacht. Er is er namelijk voor gekozen om de primaire bron als één geheel te behouden, dat wil zeggen: er zijn geen losse fragmenten ervan 'geknipt' en 'geplakt' in het werkblad. Natuurlijk zijn er stukken tekst met een kleur aangegeven in de primaire bron ten behoeve van het verwijzen ernaar, maar verder is de primaire bron intact gebleven. De laatste twee richtlijnen-'Leerlingen worden aangemoedigd om vrije associaties te produceren (creatief te denken)' en 'De leraar stimuleert leerlingen om met onderbouwde argumenten tot een interpretatie te komen, die niet per se door iedereen gedeeld hoeft te worden'-waren wat lastiger te implementeren binnen het specifieke doel van dit werkblad. Het primaire doel was om leerlingen bezig te laten zijn met wiskundige inhoud, specifiek door hen te laten begrijpen hoe Archimedes $\pi$ benaderde. Het analyseren van een werkwijze van één persoon beperkt op zichzelf al de ruimte voor creatief denken en het formuleren van persoonlijke interpretaties. Er is nagedacht over het implementeren van opdrachten waarbij leerlingen vanuit een meta-perspectief naar wiskunde moeten kijken. Een voorbeeld van zo'n opdracht zou kunnen zijn: 'Welke notaties van Archimedes vind je handig of juist niet, en waarom?'. Met zo'n opdracht zou meer aan deze twee laatste richtlijnen zijn voldaan. Echter was dit werkblad niet gericht op het kijken vanuit metaperspectief naar wiskunde, maar juist op het overbrengen van wiskundige concepten. Om deze reden zijn de laatste twee richtlijnen niet volledig geïntegreerd in dit werkblad.

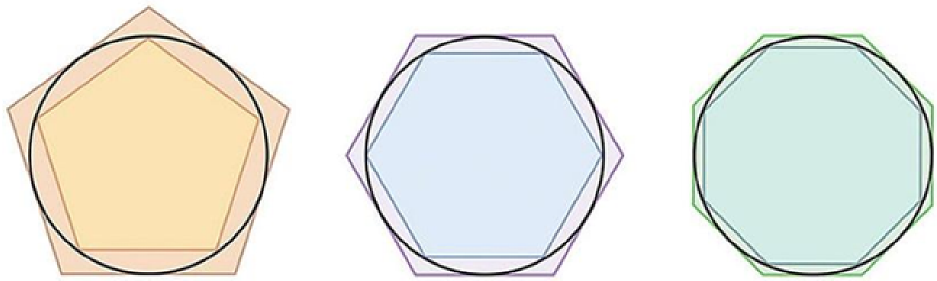
5. *Het werkblad stimuleert leerlingen de primaire bron te begrijpen door middel van 'guided reading'.* Werkblad A voldoet aan de kenmerken van een 'guided reading', zie hoofdstuk 2.1. Zo worden leerlingen aan de hand van het werkblad gestructureerd door de oude tekst begeleidt, worden er tussendoor opdrachten uitgevoerd die aansporen de inhoud en werkwijze te begrijpen en zijn de nodige verklarende opmerkingen ten behoeve van het

bijbrengen van historische context toegevoegd, wat ondersteunend is voor het begrijpen van de bron.

## Werkblad B: Archimedes' benadering van $\pi$

Al voordat Archimedes (287-212 v. Chr.) leefde observeerde men dat de verhouding tussen de omtrek en de diameter van een cirkel ($\boldsymbol{\pi}$) constant is. Archimedes was de eerste (van wie we het weten) die de grootte van deze verhouding nauwkeurig wist te benaderen. In tegenstelling tot zijn voorgangers deed hij dit niet door te meten aan een cirkel. Archimedes deed dit op een theoretische manier, inclusief wiskundig bewijs. Aan de hand van dit werkblad ga je leren hoe Archimedes aan zijn benadering van $\boldsymbol{\pi}$ kwam.

Het bewijs komt neer op het volgende idee. Een cirkel wordt *in*geschreven door een regelmatige veelhoek en *om*geschreven door een regelmatige veelhoek, zie figuur 1.



*Figuur 1: Schets ter illustratie van de methode van het inschrijven en omschrijven met regelmatige veelhoeken.*

De verhouding tussen de omtrek van de ingeschreven veelhoek en de diameter van de cirkel geeft een *onder*grens van $\boldsymbol{\pi}$. De verhouding tussen de omtrek van de omgeschreven veelhoek en de diameter van de cirkel geeft een *boven*grens van $\boldsymbol{\pi}$. Dit principe kan worden weergegeven door de vergelijking:

$$\frac{\textbf{omtrek ingeschreven veelhoek}}{\textbf{diameter cirkel}} < \boldsymbol{\pi} < \frac{\textbf{omtrek omgeschreven veelhoek}}{\textbf{diameter cirkel}} \qquad \textbf{(1)}$$

Hoe meer zijden de regelmatige veelhoek heeft, hoe beter de omtrek van die veelhoek de omtrek van de cirkel benadert, zie figuur 1. De onder- en bovengrens komen hiermee steeds dichter bij de daadwerkelijke waarde van $\boldsymbol{\pi}$ te liggen. Als het ware wordt $\boldsymbol{\pi}$ steeds meer ingesloten door de steeds nauwkeuriger wordende onder- en bovengrens.

Dit werkblad bestaat uit een aantal fases. In elke fase verdiepen jullie je in Archimedes' methode voor het benaderen van $\boldsymbol{\pi}$ met in- en omgeschreven regelmatige veelhoeken. Per fase zal je hierbij steeds preciezer Archimedes' werkwijze gaan volgen.

Figuur 11

<u>Werkblad B</u>
De inhoud van werkblad B en de belangrijkste keuzes hierin zullen stap voor stap worden toegelicht. In figuur 11 is het eerste gedeelte van het werkblad te zien. Dit gedeelte fungeert als een soort inleiding, wiskundig van aard, en komt overeen met het eerste gedeelte van werkblad A.

Zie figuren 12, 13 en 14. In dit gedeelte van het werkblad worden, net als bij werkblad A, eerst de grote lijnen van Archimedes' methode van het benaderen van $\pi$ onderzocht. Het gebruik van de goniometrische functies hierbij is toegestaan. Er wordt nog niet gedetailleerd ingegaan op de precieze stappen die Archimedes heeft gezet in zijn bewijs, om dezelfde redenen die bij werkblad A bij fase 1 zijn aangegeven. Door eerst goniometrische functies te gebruiken, krijgen

Fase 1: goniometrische functies gebruiken

Met de vergevorderde wiskundige kennis en 'hulpmiddelen' die we vandaag de dag tot onze beschikking hebben is het benaderen van $\pi$ met in- en omgeschreven veelhoeken goed te doen. Zo kunnen de goniometrische functies (sinus, cosinus en tangens) gebruikt worden voor het vinden van een formule voor de omtrek van een in- en omgeschreven regelmatige veelhoek. Hiermee kan vervolgens $\pi$ benaderd worden volgens vergelijking (1).

Als startpunt voor het benaderen van $\pi$ is het handig om uit te gaan van een cirkel met diameter = 1.

*Opdracht 1a*
Waarom is de aanname diameter = 1 een handige keuze?

*Opdracht 1b*
Druk de omtrek P (van: perimeter) van een regelmatige veelhoek met n zijden (vanaf nu: regelmatige n-hoek) uit in het aantal zijden n en de lengte van zo'n zijde L.

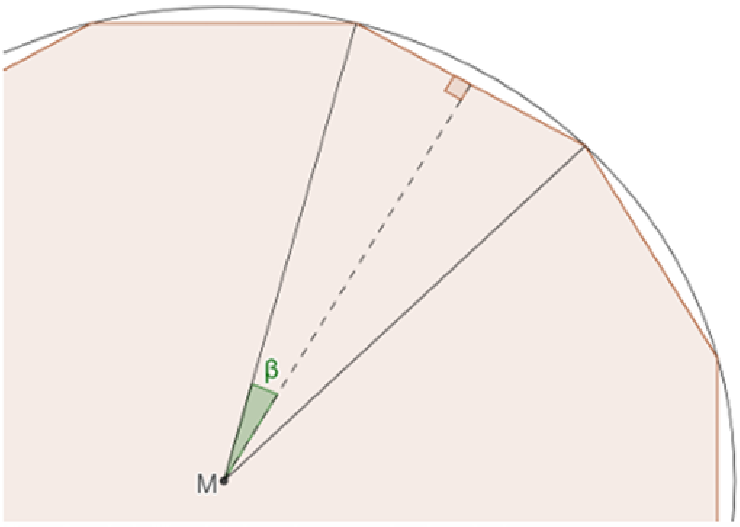
Figuur 12

leerlingen al enig inzicht in de werkelijke methode en beseffen ze later beter de uitdaging waar Archimedes voor stond in de tijd dat deze functies nog niet waren uitgevonden. Wellicht valt het op dat leerlingen in dit werkblad iets langer stilstaan bij het benaderen van $\pi$ met gebruik van goniometrische functies. Aan de hand van de opgaven worden ze gestimuleerd om in dit werkblad iets meer tussenstappen op te schrijven.

Zie figuur 15. In dit gedeelte van het werkblad begint fase 2, waarin alleen gewerkt wordt met de middelen die Archimedes in zijn tijd voor handen had. Vanaf hier komt de geschiedenis component dus echt duidelijk terug. Ook al wordt er niet met een primaire bron gewerkt, om Archimedes' methode te begrijpen en te appreciëren is het nodig dat leerlingen weten welke middelen Archimedes' tot zijn beschikking had en welke niet. Net als bij werkblad A worden leerlingen ook in dit werkblad bij opgave 2a gestimuleerd na te denken over waarom Archimedes koos voor de zeshoek als startpunt.

Zie figuur 16. In dit gedeelte berekenen leerlingen de lengte van een zijde van de ingeschreven twaalfhoek, die voortkomt uit het verdubbelen van het aantal zijdes van de ingeschreven zeshoek. Dit doen ze zónder de goniometrische functies te gebruiken. Hiermee berekenen ze ook een ondergrens die de ingeschreven twaalfhoek voor $\pi$ geeft. Hoewel hun berekening misschien niet precies Archimedes' werkwijze volgt, wordt de stelling van Pythagoras wel gebruikt, de stelling die Archimedes ook telkens gebruikte bij het verdubbel-proces.

In figuur 2 zie je een gedeeltelijke schets van een ingeschreven regelmatige n-hoek. Hierbij is M het middelpun van de cirkel en van de n-hoek.




*Figuur 2: gedeeltelijke schets ingeschreven regelmatige n-hoek*

*Opdracht 1c*

Laat zien dat de lengte L van een zijde van een regelmatige n-hoek gelijk is aan $sin\left(\frac{180}{n}\right)$. Ga uit van een cirkel met diameter = 1.

*Opdracht 1d*

Geef met behulp van opdracht 1b en 1c een benadering van $\boldsymbol{\pi}$ met een ingeschreven regelmatige 96-hoek. Rond af op 6 decimalen.

Figuur 13

Op ongeveer dezelfde manier kan met een andere goniometrische functie ook de formule voor de omtrek van een *om*geschreven regelmatige n-hoek worden uitgedrukt in n.

*Opdracht 1e*

Druk de omtrek van een omgeschreven regelmatige n-hoek (om een cirkel met diameter = 1) uit in n. Maak eventueel een schets in figuur 1 of 2.

*Opdracht 1f*

Geef met behulp van opdracht 1e een benadering van $\pi$ met een omgeschreven regelmatige 96-hoek. Rond af op 6 decimalen.

Figuur 14

Fase 2: ondergrens berekenen met beperkte middelen

In Archimedes' tijd waren de goniometrische functies sinus, tangens en cosinus nog niet ontdekt en kon hij deze dus niet gebruiken om lengtes van driehoekszijden te berekenen. Wel had Archimedes weet van de stelling van Pythagoras, die zo'n 300 jaar vóór Archimedes was uitgevonden. Naast en mogelijk dóór deze stelling waren bij Archimedes ook drie speciale driehoeken bekend, namelijk:

- De 60°-60°-60°-driehoek (gelijkzijdige driehoek), waarbij tussen de zijdes uiteraard de verhouding $1:1:1$ geldt.
- De 45°-45°-90°-driehoek (ook wel de gelijkbenige rechthoekige driehoek), waarbij tussen de zijdes de verhouding $1:1:\sqrt{2}$ geldt.
- De 30°-60°-90°-driehoek (eigenlijk de helft van een gelijkzijdige driehoek), waarbij tussen de zijdes de verhouding $1:2:\sqrt{3}$ geldt.

In deze fase van het werkblad gaan jullie de *ondergrens* van $\pi$ benaderen met beperkte middelen, namelijk alleen met díe stellingen die voor Archimedes toentertijd bekend waren. De goniometrische functies sinus, cosinus en tangens mogen dus niet meer gebruikt worden.

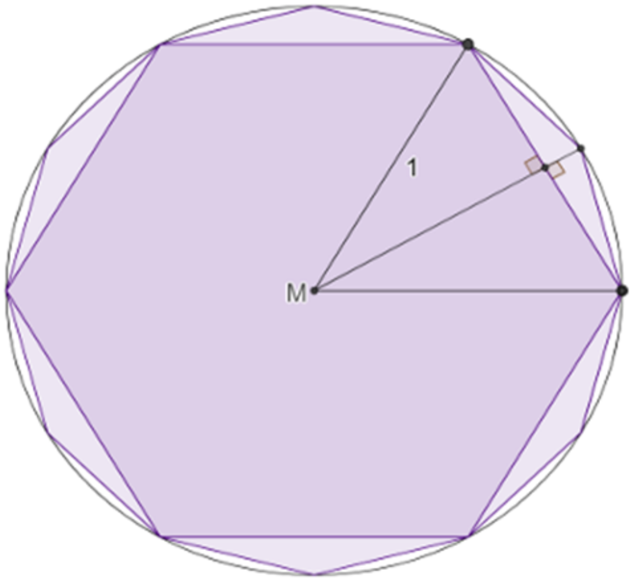
Neem aan dat we nu een cirkel beschouwen met diameter = 2. Als startpunt voor het vinden van een ondergrens van $\pi$ met regelmatige veelhoeken, koos Archimedes voor de ingeschreven regelmatige *zes*hoek.

*Opdracht 2a*

Wat maakt de keuze voor een *zes*hoek zo geschikt als startpunt?

Figuur 15

Om tot een nauwkeurigere ondergrens van $\pi$ te komen kan het aantal zijdes van de ingeschreven regelmatige zeshoek verdubbeld worden, waardoor een twaalfhoek ontstaat, zie figuur 3.




*Figuur 3: van ingeschreven zeshoek naar ingeschreven twaalfhoek bij cirkel met diameter = 2.*

Met de bekende lengte $L_0$ van een zijde van de ingeschreven zeshoek, kan de nieuwe lengte $L_1$ van een zijde van de ingeschreven twaalfhoek berekend worden.

*Opdracht 2b*
Bereken de lengte $L_1$ van de ingeschreven regelmatige twaalfhoek bij een cirkel met diameter = 2.

*Opdracht 2c*
Welke ondergrens van $\pi$ geeft de ingeschreven regelmatige twaalfhoek? Gebruik je antwoord van 2b.

Figuur 16

Het proces van het verdubbelen van het aantal zijdes van de ingeschreven veelhoek en het telkens berekenen van de omtrek van zo'n ontstane veelhoek kan steeds maar weer herhaald worden. Laten we de lengte van een zijde van een ingeschreven zeshoek (bij een cirkel met diameter = 2) $L_0$ noemen. De lengte van een zijde van de 'verdubbelde zeshoek' (dus twaalfhoek) noemen we $L_1$. De lengte van een zijde van de 'verdubbelde twaalfhoek' (dus 24-hoek) noemen we $L_2$, enzovoorts. Tussen $L_n$ en $L_{n-1}$ bestaat een recursief verband:

$$\boldsymbol{L_n = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2}}} \qquad \textbf{(2)}$$

*Opdracht 2d*

Leid de recursieve formule (2) af. Je mag de formule ook afleiden voor één gekozen n, waarmee je bijvoorbeeld $L_1$ uitdrukt in $L_0$. Hint: kijk nog eens naar de stappen die je bij 2b hebt gezet en voeg deze samen.

*Opdracht 2e*

Bereken met de recursieve formule de ondergrens van $\boldsymbol{\pi}$ met een ingeschreven regelmatige 96-hoek. Tip: gebruik de NumWorks. Probeer tussentijds <u>niet</u> af te ronden. Je hoeft niet alle stappen op te schrijven.

Figuur 17

Zie figuur 17. In dit gedeelte van het werkblad wordt verder gebouwd op wat leerlingen in de vorige opgaven in deze fase hebben gedaan. Toen zijn ze echter tot een ondergrens met de ingeschreven *twaalf*hoek gekomen. Met een 'grotere' veelhoek kan tot een preciezere ondergrens worden gekomen. Daartoe moet de ingeschreven veelhoek nog een aantal keren meer 'verdubbeld worden', wat Archimedes ook in zijn methode doet. Dit proces van verdubbelden en de resulterende zijde berekenen komt echter telkens op hetzelfde neer en om de leerlingen ditzelfde proces nog een aantal keren te laten herhalen is dus niet heel waardevol. De recursieve formule uit dit gedeelte van het werkblad geeft net even een andere invulling aan het telkens 'verdubbelen' van de veelhoek. Bovendien kan door deze recursieve formule te gebruiken met minder stappen worden gekomen tot de ondergrens van $\pi$ die Archimedes met een ingeschreven 96-hoek heeft gevonden.

Zie figuur 18. Opgave 2f komt ook in werkblad A voor, en vraagt van leerlingen weer iets meer vanuit helikopterview te kijken naar de werkwijze van Archimedes. Het is een goede opgave voor leerlingen om, nadat ze ingezoomd hebben op Archimedes' methode, te checken of ze de grote lijnen van zijn werkwijze nog helder hebben en begrijpen.

Zoom nog eens uit van wat je net allemaal hebt berekend en kijk nog eens naar figuur 1 op de eerste bladzijde. Deze figuur wordt online veel gebruikt om Archimedes' idee voor het benaderen van $\boldsymbol{\pi}$ intuïtief logisch te maken, maar komt strikt gezien niet overeen met Archimedes zijn werkwijze.

*Opdracht 2f*
Geef twee redenen waarom figuur 1 niet geschikt is voor het weergeven van Archimedes' bewijs.

Figuur 18

Fase 3: verhoudingen in plaats van absolute lengtes

In de vorige twee fases heb je lengtes van lijnstukken, zoals bijvoorbeeld een zijde van een veelhoek of de straal van een cirkel, berekend. Je hebt die 'objecten' een getal gegeven. Het is tegenwoordig misschien lastig voor te stellen, maar in de Oudheid werd dit in de Griekse theoretische wiskunde niet gedaan. Griekse meetkundigen kenden niet rechtstreeks getalswaarden toe aan de objecten die zij bestudeerden:

*"Een lijnstuk was een lijnstuk. Er bestaan gelijke lijnstukken, langere en kortere lijnstukken en een lijnstuk kan gelijk zijn aan twee andere lijnstukken samen, maar op geen enkel moment sprak een Griekse wiskundige over de lengte van een lijnstuk." ('Wortels van de Wiskunde', door Berlinghoff & Gouvêa, 2019)*

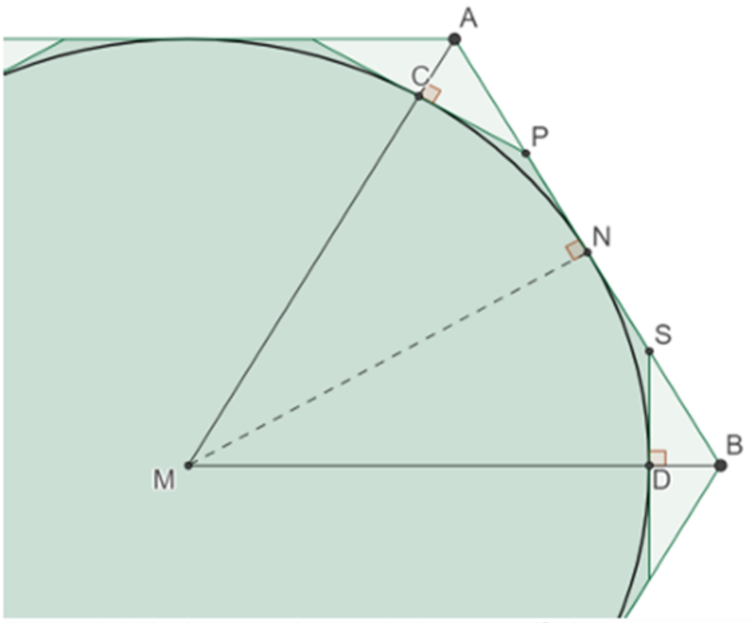
In het dagelijkse praktische leven werd overigens net zo goed met lengte gerekend en gemeten als elders, maar in de theoretische wiskunde werd dit dus vermeden. Griekse wiskundigen probeerden alles vanuit een *relatief* oogpunt te zien. *Verhoudingen* speelden dus in de theoretische Griekse wiskunde een zeer belangrijke rol. Ook Archimedes heeft $\boldsymbol{\pi}$ benaderd zonder ook maar één lijnstuk een getal te geven. In zijn bewijs heeft hij alleen maar gebruikgemaakt van verhoudingen tussen bijvoorbeeld lijnstukken of tussen hoeken. Deze verhoudingen kregen wel een getalswaarde. In deze fase gaan jullie een bovengrens van $\boldsymbol{\pi}$ opstellen door alleen gebruik te maken van verhoudingen.

Figuur 19

Zie figuren 19 en 20. In dit gedeelte wordt fase 3 geïntroduceerd. Om nog iets meer de geschiedenis naar voren te laten komen en recht te doen aan hoe Archimedes in werkelijkheid $\pi$ heeft benaderd, is het de bedoeling dat in deze fase lengtes van lijnstukken geen getalswaarde meer krijgen. Er wordt alleen met verhoudingen gewerkt, net zoals in de vroegere Griekse theoretische wiskunde ook werd gedaan. Het werken met verhoudingen biedt nieuwe uitdagingen voor leerlingen om $\pi$ te kunnen benaderen. In opgaven 3a en 3b focussen leerlingen zich op hoe de 'startverhouding' werd bepaald en hoe daarmee verder gerekend kan worden naar een bovengrens van $\pi$.

Als startpunt nemen we nu een *om*geschreven regelmatige zeshoek. De verhouding waarin we uiteindelijk geïnteresseerd zijn is die tussen de omtrek van de omgeschreven regelmatige n-hoek (waarbij n het liefst heel groot is) en de diameter van de cirkel.

Zie figuur 4. Hier zie je een gedeeltelijke tekening van een omgeschreven regelmatige zeshoek (lichtgroen) met een zijde genaamd AB en een omgeschreven regelmatige twaalfhoek (donkerder groen) met een zijde genaamd PS. Zijde PS is vanuit de zeshoek geconstrueerd door aan de punten C en D die op de cirkel liggen de raaklijn te tekenen. Deze raaklijnen snijden zijde AB in punt P en punt S respectievelijk.




*Figuur 4: gedeeltelijke tekening omgeschreven regelmatige zes- en twaalfhoek*

*Opdracht 3a*

Wat is de verhouding $\frac{AN}{MN}$? Gebruik de kennis die Archimedes had van speciale driehoeken (zie begin fase 2).

*Opdracht 3b*

Neem als startpunt de verhouding $\frac{AN}{MN}$. Hoe ga je vanaf hier naar de verhouding $\frac{\text{omtrek regelmatige zeshoek}}{\text{diameter cirkel}}$? Geef op die manier een bovengrens van $\boldsymbol{\pi}$ afgeleid met een omgeschreven regelmatige zeshoek.

Figuur 20

Zie figuur 21. In dit gedeelte wordt het 'verdubbelen' van de veelhoek en het berekenen van de nieuwe relevante verhouding PC : MN onderzocht. Het is voor leerlingen waarschijnlijk wat onnatuurlijk om hier met verhoudingen te moeten werken. Ze worden daarom zo veel mogelijk ondersteund aan de hand van de begeleidende tekst en de opgaven.

Zoals je eerder hebt gezien zal de benadering van $\boldsymbol{\pi}$ nauwkeuriger worden bij een veelhoek met een groot aantal zijden. Daarom passen we ook hier het proces van verdubbeling steeds toe. In fase twee heb je na elke verdubbeling de lengte $L_n$ van een zijde van die verdubbelde veelhoek berekend. In deze fase zijn we telkens geïnteresseerd in de *verhouding* tussen de (helft van de) lengte van een zijde van de verdubbelde veelhoek en de straal van de cirkel. Wanneer die verhouding bekend is, kan je namelijk op dezelfde manier als bij 3b $\boldsymbol{\pi}$ benaderen. De volgende stap is dus het vinden van de verhouding $\frac{PN}{MN}$, of omdat $PN = PC$, $\frac{PC}{MN}$. Hiervoor maken we gebruik van gelijkvormigheid van driehoeken.

*Opdracht 3c*
Zie figuur 4. Toon aan dat driehoek $ACP$ gelijkvormig is met driehoek $ANM$.

*Opdracht 3d*
Uit deze gelijkvormigheid volgt de gelijkheid: $\frac{PC}{MN} = \frac{\boxed{\phantom{x}}}{AN}$ (Vul in wat in het vierkantje hoort te staan.)

*Opdracht 3e*
Leid vervolgens af dat er geldt: $\frac{PC}{MN} = \frac{2}{1} - \frac{\sqrt{3}}{1}$. Schrijf zo veel mogelijk tussenstappen op.

*Opdracht 3f*
Bereken een bovengrens van $\boldsymbol{\pi}$ door middel van de omgeschreven regelmatige twaalfhoek.

Figuur 21

Zie figuur 22. Dit is het laatste gedeelte van werkblad B. Leerlingen worden hier uitgedaagd om de omgeschreven twaalfhoek nu te verdubbelen naar de omgeschreven 24-hoek, om vervolgens weer de relevante verhouding te berekenen, nu met minder uitgeschreven hulp. Deze opgave wordt waarschijnlijk alleen gemaakt voor de uitermate snelle leerlingen of door leerlingen die zin hebben om het werkblad in eigen tijd af te maken. De opgave is voor dit soort leerlingen toegevoegd. Het laatste stukje afsluitende tekst is vergelijkbaar met dat van werkblad A.

De procedure van opdracht 3c tot en met 3f kan telkens herhaald worden om zo de verhouding tussen de (helft van) een zijde van de verdubbelde veelhoek en de straal van de cirkel te vinden.

*Opdracht 3g*

Probeer, door dezelfde procedure te volgen als bij 3c tot en met 3f, een bovengrens van $\pi$ te vinden met een omgeschreven regelmatige 24-hoek. Tip: maak een schets (eventueel in figuur 4).

Hint: op een gegeven moment zul je stuiten op de onbekende verhouding $\frac{MP}{PN}$. Op dat moment kan de stelling van Pythagoras je verder helpen om deze verhouding uit te drukken in twee verhoudingen die je wel weet.

Vergeleken met wat je gezien hebt in fase 1 en fase 2 is de procedure met verhoudingen een tijdrovend en intensief proces. In werkelijkheid was dit nog ingewikkelder, omdat men in Archimedes' tijd nog niet goed wist hoe met wortels moest worden gerekend en deze door Archimedes ook nog moesten worden benaderd met een breuk. Daarnaast bestonden rekenmachines natuurlijk nog niet. Archimedes besloot te stoppen toen hij een boven- en ondergrens van $\pi$ had gevonden met een om- en ingeschreven regelmatige 96-hoek. De benadering die hij op deze manier had gevonden voor $\pi$ was in zijn tijd namelijk goed genoeg voor de situaties waarin hij $\pi$ nodig zou hebben.

Zo zie je maar: met alle 'wiskundige tools' die we vandaag de dag tot onze beschikking hebben lijkt het benaderen van $\pi$ vrij eenvoudig. Ontdekking van die tools heeft echter eeuwenlang geduurd. Wiskunde werd opgebouwd vanuit het niets. Met zeer beperkte middelen werd $\pi$ door Archimedes benaderd.

Wie niet sterk is moet slim zijn. ☺

Bedankt voor het meedoen met het onderzoek!

**EINDE**

Figuur 22

Onderstreept wordt dat wiskunde niet altijd zo ver ontwikkeld is als tegenwoordig het geval is en dat dat vroeger extra creativiteit vereiste. Wellicht wordt door dit inzicht, wiskunde door leerlingen nog iets meer gewaardeerd.

Werkblad B moest aan een aantal ontwerpeisen voldoen. Per ontwerpeis zal worden toegelicht in hoeverre hieraan naar verwachting is voldaan.

1. *Het werkblad sluit aan op het eind-5VWO wiskunde D niveau van leerlingen.*
   Net als bij werkblad A zijn de onderwerpen die terugkomen in dit werkblad, bijvoorbeeld het vereenvoudigen van vergelijkingen, gelijkvormigheid van driehoeken, recursieve formules, en het werken met breuken/verhoudingen, bekend bij de 5VWO wiskunde D klas. Op die manier is er dus rekening mee gehouden dat het niveau van het werkblad aansluit bij de doelgroep. Dit neemt, net zoals bij werkblad A, echter niet weg dat het werkblad in zijn geheel perfect past bij het niveau van de doelgroep. De precieze werkwijze van het benaderen van $\pi$ door Archimedes in nou eenmaal niet eenvoudig. Aan de hand van voldoende begeleidende tekst in het werkblad en illustratieve opgaven is geprobeerd Archimedes' werkwijze zo toegankelijk mogelijk te maken voor leerlingen om te begrijpen en te kunnen uitvoeren.

2. *Het werkblad is in anderhalf uur grotendeels uit te voeren.*
   Zoals eerder vermeld is deze ontwerp-eis minder strikt. Naar verwachting is het mogelijk in ieder geval fase 1, 2 en een gedeelte van fase 3 te maken. Of deze verwachting juist is moet blijken in de praktijk.

3. *Bij het werkblad wordt geschiedenis ingezet als cognitieve tool om wiskunde te leren.*
   In dit werkblad leren leerlingen het getal $\pi$ te benaderen volgens Archimedes' werkwijze. Door telkens iets preciezer terug te vallen op Archimedes' werkwijze, zijn leerlingen telkens met andere wiskundige kennis en vaardigheden bezig. De ene keer gebruiken ze bijvoorbeeld goniometrische functies en de andere keer moeten ze breuken omschrijven. Daarnaast komt een recursieve formule aan bod en moeten leerlingen een beroep doen op hun kennis van meetkundige stellingen. De geschiedenis, die hier vanzelfsprekend minder expliciet aan bod komt dan in werkblad A, wordt hier dus zeker ingezet als cognitieve tool om wiskunde te leren.

4. *Het werkblad begeleidt leerlingen bij het benaderen van $\pi$ aan de hand van de methode van Archimedes.*
   Essentieel bij deze laatste ontwerpeis was dat leerlingen zelf $\pi$ gingen benaderen. Dit is een belangrijk verschil met de insteek van werkblad A, die leerlingen aanspoort om stappen in het 'echte' bewijs te *begrijpen* maar niet zozeer zelf uit te voeren. Op dat zelf uitvoeren moest in dit werkblad dus meer de nadruk liggen. Bij het grootste gedeelte van de opgaven uit dit werkblad moeten leerlingen daadwerkelijk die stappen zetten om $\pi$ te benaderen. Hierbij is geprobeerd een juiste balans te vinden tussen het geven van voldoende begeleidende tekst en het leerlingen zelf laten bedenken van de te nemen stappen.

## 3.3 Ontwerpen van de vragenlijst

Net als bij het ontwerpen van de werkbladen, is er bij het ontwerpen van de vragenlijst eerst nagedacht over aspecten waaraan deze vragenlijst moet voldoen. De ontwerp-eisen komen dus allereerst aan bod. Daarna zal de uitwerking van de uiteindelijke vragenlijst worden toegelicht en verantwoord.

### 3.3.1 Opstellen van de ontwerpeisen

Voor dit onderzoek moet er een vragenlijst ontworpen worden die als primaire doel heeft om de intrinsieke motivatie te meten die leerlingen tijdens het maken van het werkblad hebben ervaren. Een voor de hand liggende eerste ontwerp-eis is dus:

- De vragenlijst bevat stellingen die gericht zijn op het meten van de intrinsieke motivatie van leerlingen tijdens het maken van het werkblad.

Hoewel intrinsieke motivatie het te onderzoeken aspect is, is in hoofdstuk 2 beschreven dat het gevoel van competentie een belangrijke rol speelt bij intrinsieke motivatie, net als het gevoel van autonomie en, in iets mindere mate, het gevoel van verbondenheid met de docent. Voor de twee groepen zullen de aspecten autonomie en verbondenheid met de docent grofweg hetzelfde zijn. Immers, de docent, ook wel de onderzoeker, kent de leerlingen nog niet en zal zich naar beide groepen hetzelfde opstellen. Wat betreft autonomie krijgen beide groepen een werkblad, waarvan eerder is uitgelegd hoe dit bij beide groepen op dezelfde manier hun gevoel van autonomie kan beïnvloeden. Het gevoel van competentie daarentegen is wel een aspect dat tussen beide groepen zeker kan verschillen. In hoofdstuk 2 was namelijk te lezen dat het doorgronden van een primaire bron voor leerlingen allerminst eenvoudig is. Hoewel er is gestreefd om de werkbladen zodanig te maken dat ze beiden geschikt zijn voor de doelgroep en qua niveau vergelijkbaar zijn, kan het zijn dat werkblad A, meer dan werkblad B, als (te) moeilijk wordt ervaren. Een gevolg hiervan is dat, zoals beschreven in hoofdstuk 2, leerlingen gefrustreerd kunnen raken, wat de intrinsieke motivatie niet bevordert. Om te onderzoeken of de moeilijkheidsgraad, voor leerlingen ook wel het gevoel van competentie in het maken van het werkblad, een rol kan hebben gespeeld in een mogelijk verschil in intrinsieke motivatie, moet het aspect competentie ook meegenomen worden in de vragenlijst. Daarom is de tweede ontwerp-eis:

- De vragenlijst bevat stellingen die gericht zijn op het meten van de competentie die leerlingen tijdens het maken van het werkblad hebben ervaren.

In hoofdstuk 2 is er ook aandacht uitgegaan naar affectieve aspecten, zoals 'belief', 'perception' en 'attitude', en hun relatie tot het begrip 'intrinsieke motivatie'. Er is beschreven dat een positieve overtuiging van en kijk op wiskunde, een positieve invloed heeft op de intrinsieke motivatie. Zoals in de inleiding en in hoofdstuk 2 ook is beschreven kan het inzetten van geschiedenis in de wiskundeles ervoor zorgen dat leerlingen affectief positiever tegenover wiskunde gaan staan. Vooral het beeld van de wetenschap wiskunde kan met geschiedenis worden bevorderd. Gezien deze relatie is het waardevol als tussen de twee groepen ook de opvattingen over de, om het maar te duiden als, 'kijk op wiskunde als wetenschap' te onderzoeken. Wellicht blijkt dat groep A door het lezen van de primaire bron een positievere 'kijk op wiskunde als wetenschap' heeft ontwikkeld dan groep B. Dit zou (op termijn) dan bij kunnen dragen aan de mate van intrinsieke motivatie. Om te onderzoeken of er verschillen zijn wat betreft relevante affectieve aspecten tussen de twee groepen, is de volgende ontwerp-eis:

- De vragenlijst bevat stellingen die gericht zijn op het meten van de 'kijk op wiskunde als wetenschap' die leerlingen hebben ontwikkeld naar aanleiding van het werkblad.

Hoewel de twee groepen willekeurig zijn gemaakt, kan het zo zijn dat de ene groep beduidend intrinsiek gemotiveerder in wiskunde is dan de andere groep. Zeker omdat de groepen klein zijn is de kans aanwezig dat dit optreedt. Deze intrinsieke motivatie voor wiskunde in het algemeen vertaalt zich dan waarschijnlijk ook naar de antwoorden in de vragenlijst betreffende het werkblad. Idealiter wordt de groep zo gesplitst dat de twee resulterende groepen ongeveer gelijk scoren op intrinsieke motivatie voor het vak wiskunde. Praktisch gezien was dit niet mogelijk om te doen. Wel kan in de vragenlijst de intrinsieke motivatie voor wiskunde in het algemeen worden meegenomen. Op die manier kan worden gecontroleerd of de twee groepen ongeveer even intrinsiek gemotiveerd zijn voor wiskunde, en, zo niet, kunnen er nuances in de interpretatie van de resultaten worden aangebracht. Om deze reden is de volgende ontwerp-eis:

- De vragenlijst bevat stellingen die gericht zijn op het meten van de intrinsieke motivatie voor wiskunde in het algemeen.

Naast het meten van de competentie die leerlingen specifiek ervaren tijdens het maken van het werkblad, is het van belang om ook hun algemene gevoel van competentie in wiskunde mee te nemen. Een verschil in algemene competentie tussen de twee groepen kan namelijk leiden tot een vertekening van de resultaten. Wanneer de ene groep veel beter is in wiskunde dan de andere groep, kan dit ertoe leiden dat de minder competente groep een werkblad moeilijk vindt omdat zij over het algemeen moeite hebben met wiskunde, terwijl de competentere groep een ander werkblad moeilijk vindt omdat dat werkblad daadwerkelijk moeilijker is. Hierdoor kan het lijken alsof beide werkbladen qua moeilijkheidsgraad gelijk zijn, terwijl dit in werkelijkheid niet zo is. Door de algemene competentie van de leerlingen in wiskunde te meten, kan er gecontroleerd worden of eventuele verschillen in ervaren competentie tijdens het maken van het werkblad daadwerkelijk te wijten zijn aan de moeilijkheidsgraad van het werkblad, of ook aan het gevoel van algemene competentie van de leerlingen kan liggen. Dit helpt om een volledigere interpretatie van de resultaten te krijgen. Daarom is de volgende ontwerp-eis:

- De vragenlijst bevat stellingen die gericht zijn op het meten van de competentie die leerlingen voor wiskunde in het algemeen ervaren.

De laatste ontwerp-eis is veel praktischer van aard. Vanwege de beperkte beschikbare tijd, waarin leerlingen voldoende tijd moeten hebben om de werkbladen te kunnen maken, blijven er naar schatting ongeveer tien minuten over voor het invullen van de vragenlijst. Dit leidt tot de laatste ontwerp-eis:

- De vragenlijst moet binnen 10 minuten door alle leerlingen ingevuld kunnen worden.

Concluderend zijn er dus zes ontwerp-eisen opgesteld waar de vragenlijst aan moet voldoen:

1. De vragenlijst bevat stellingen die gericht zijn op het meten van de intrinsieke motivatie van leerlingen voor het maken van het werkblad.
2. De vragenlijst bevat stellingen die gericht zijn op het meten van de competentie die leerlingen tijdens het maken van het werkblad hebben ervaren.
3. De vragenlijst bevat stellingen die gericht zijn op het meten van de 'kijk op wiskunde als wetenschap' die leerlingen hebben ontwikkeld naar aanleiding van het werkblad.
4. De vragenlijst bevat stellingen die gericht zijn op het meten van de intrinsieke motivatie voor wiskunde in het algemeen.
5. De vragenlijst bevat stellingen die gericht zijn op het meten van de competentie die leerlingen voor wiskunde in het algemeen ervaren.
6. De vragenlijst moet in ongeveer 10 minuten door alle leerlingen ingevuld kunnen worden.

### 3.3.2 Realisatie van de vragenlijst

In bijlage F is de ontworpen vragenlijst opgenomen. Een belangrijke keuze die gemaakt moest worden voor de vragenlijst was de soort schaal dat gebruikt zou worden. Voor wetenschappelijk onderzoek wordt vaak een vijf- of een zevenpuntsschaal gebruikt. Hoewel een vragenlijst met een zevenpuntsschaal voor leerlingen wat tijdrovender en lastiger kan zijn, ze hebben immers meer antwoordmogelijkheden, is hier toch voor gekozen. Met de zevenpuntsschaal kunnen leerlingen beter aangeven wat ze echt ervaren of vinden; ze kunnen meer nuances in de antwoorden kwijt en dat is voor dit onderzoek zeker relevant. Daarnaast wordt de zevenpuntsschaal gezien als een schaal die in staat is om nauwkeurig en consistent de metingen uit te voeren die nodig zijn voor het onderzoek (Allen & Seaman, 2007). Deze schaal biedt over het algemeen een hogere betrouwbaarheid dan een vijfpuntsschaal (Joshi e.a., 2015). Verder blijkt uit onderzoek dat een grotere schaal, zoals een elfpuntsschaal, ervoor kan zorgen dat de gegevens dichter bij een onderliggende normale verdeling komen, waardoor ze beter als intervaldata kunnen worden beschouwd (Wu & Leung, 2017). Dit proces wordt ook wel gezien als 'continuizing the data', het continu maken van de data en helpt om aan de voorwaarden van een normale verdeling en intervaldata te voldoen, wat essentieel is voor het uitvoeren van parametrische toetsen. Echter, een elfpuntsschaal wordt geacht in dit onderzoek niet haalbaar te zijn vanwege tijdsbeperkingen en de complexiteit voor de leerlingen. Daarom is de zevenpuntsschaal een geschikte compromis tussen nauwkeurigheid en praktische toepasbaarheid.

In paragraaf 3.1.5 is uitgelegd dat data uit Likert-schaal vragenlijsten als intervaldata beschouwd kan worden als antwoorden op individuele items behorend bij een bepaald thema (bijvoorbeeld 'algemene intrinsieke motivatie voor wiskunde') opgeteld worden tot een samengestelde score. De samengestelde score biedt een kwantitatieve indicator voor dat thema. Boone & Boone (2012) hebben in hun artikel gespecificeerd dat er vier of meer items nodig zijn voor het berekenen van een betrouwbare samengestelde score. Joshi (2015) benoemt in zijn artikel dat, voor het gebruiken van een samengestelde score, het belangrijk is dat de items van een bepaald thema onderling met elkaar verbonden moeten zijn, zodat er enige voorspelbaarheid is tussen de antwoorden, maar dat ieder item ook individuele informatie moet bieden. Daarnaast moeten de items in een logische volgorde staan (Joshi e.a., 2015). Deze aandachtspunten zijn meegenomen bij het construeren van de items per thema.

Volgens de ontwerpeisen moeten er in ieder geval vijf thema's aan bod komen in de vragenlijst. Twee van de vijf thema's gaan in op hoe leerlingen wiskunde in het algemeen ervaren, namelijk 'algemene competentie' en 'algemene intrinsieke motivatie'. De overige drie thema's dienen om inzicht te krijgen in hoe leerlingen de les en met name het maken van de werkbladen hebben ervaren. Deze thema's zijn: 'specifieke competentie', waarmee de competentie in het maken van het werkblad wordt bedoeld, 'specifieke intrinsieke motivatie', waarmee de intrinsieke motivatie voor het maken van het werkblad wordt bedoeld, en 'kijk op wiskunde als wetenschap'. Voor het maken van de items van een thema zijn drie, zoals in hoofdstuk 2 vermeld, goed gevalideerde en betrouwbare bestaande vragenlijsten geraadpleegd, namelijk de IMI, de MMQ en de ATMI. Per thema wordt toegelicht hoe deze vragenlijsten zijn gebruikt:

- Algemene competentie:
  Het gevoel van competentie in wiskunde in het algemeen komt vooral voor in de ATMI als factor 'zelfvertrouwen'. In de IMI komt dit terug als factor 'ervaren competentie', maar zijn stellingen niet gespecificeerd voor het vak wiskunde. Uit de ATMI zijn bijvoorbeeld stellingen gehaald als: "I have a lot of self-confidence when it comes to mathematics" en "Mathematics does not scare me at all" en vertaald naar respectievelijk "Ik heb veel zelfvertrouwen als het om wiskunde gaat" en "Wiskunde schrikt mij helemaal niet af". In de IMI komt de stelling "Ik denk dat ik best wel goed ben in deze activiteit" voor, die is aangepast naar "Meetkunde is normaalgesproken een onderwerp waar ik goed in ben". Op die manier wordt de algemene competentie iets meer gespecificeerd naar het wiskundige onderwerp waar ze mee bezig zijn geweest. In totaal heeft het thema 'algemene competentie' vier items.

- Algemene intrinsieke motivatie:
  Intrinsieke motivatie gaat, zoals uitgelegd is in hoofdstuk 2, over de mate van interesse en plezier dat men ervaart in een bepaalde taak. Dit komt de IMI terug als factor 'interesse/plezier', in de MMQ als factor 'intrinsic value' en in de ATMI als factor 'plezier'. Uit de MMQ, ATMI en IMI hebben stellingen als "I find learning math interesting", "Mathematics is a very interesting subject" respectievelijk "Ik vond de activiteit interessant" geleid tot het item "Wiskunde vind ik over het algemeen een interessant vak"Ėen ander voorbeeld zijn de stellingen "I enjoy learning math" uit de MMQ en "I like to do new experiments in mathematics" uit de ATMI, die hebben geleid tot het item "Normaalgesproken kijk ik ernaar uit nieuwe dingen over wiskunde te leren". Ook het item "Het onderwerp meetkunde vind ik over het algemeen erg boeiend" is gemaakt om zo de intrinsieke motivatie voor dit onderwerp specifiek mee te nemen. In totaal heeft het thema

'algemene intrinsieke motivatie' vier items.

- Specifieke competentie:
  De IMI bevat vooral stellingen die worden gesteld naar aanleiding van een bepaalde activiteit die is uitgevoerd, in plaats van een ervaring of mening die al verontwikkeld is in een lange periode. Daarom heeft voor dit thema en het volgende thema vooral de IMI als gids gediend. Wat betreft specifieke competentie in het maken van het werkblad hebben uit de ATMI en de IMI stellingen als "I believe I am good at mathematics" respectievelijk "Ik denk dat ik best wel goed ben in deze activiteit" geleid tot het item "Ik denk dat ik best wel goed was in het doorlopen van het werkblad". zoals het geval is in dit onderzoek aanleiding van een activiteit Een ander voorbeeld is de stelling uit de IMI "Ik voelde mij competent bij deze activiteit", die is 'vertaald' naar het item "Ik voelde mij competent in het doorlopen van het werkblad". In totaal heeft het thema 'specifieke competentie' vier items.

- Specifieke intrinsieke motivatie:
  Uit de ATMI is een stelling als "I get a great deal of satisfaction out of mathematics experiments" aangepast tot het item "Ik heb veel voldoening gehaald uit het werken aan het werkblad". Uit de IMI zijn stellingen als "Het was een leuke activiteit om te doen", "Ik vond de activiteit erg interessant" en "Ik zou de activiteit als 'erg leuk' omschrijven", gebruikt om de items "Het was leuk om een antwoord te zoeken op de vraagstukken uit het werkblad" respectievelijk "Ik zou deze wiskundeles omschrijven als: 'erg interessant'" te maken. Wat opvalt in de IMI is dat er veel stellingen zijn die bijna identiek zijn aan elkaar, zoals de stellingen "Ik vond deze activiteit erg leuk om te doen" en "Ik vond het erg leuk om deze activiteit te doen". Omdat volgens Joshi de items ook individuele informatie moeten bieden, is er iets meer afgeweken van deze vragenlijst. Items zoals "Bij de meeste vragen/opdrachten die in het werkblad stonden was ik benieuwd naar wat het antwoord was", "De informatieve stukken tekst die ik heb gelezen in het werkblad (en in de oude bron) vond ik boeiend" en "Ik kijk met een enthousiast gevoel terug op het werkblad" zijn geconstrueerd met de gedachte dat ze individueel iets andere informatie bieden, maar er nog wel enige voorspelbaarheid tussen deze items is. Alle items samen geven een volledig beeld van hoe leuk en interessant leerlingen de lessen vonden. In totaal heeft het thema 'specifieke intrinsieke motivatie' zeven items.

- Kijk op wiskunde als wetenschap:
  Zoals is toegelicht kan geschiedenis bij leerlingen de 'kijk op wiskunde als wetenschap' beïnvloeden. Hoewel dit, zoals te lezen was in hoofdstuk 2, veel te maken heeft met de perceptie van het vak wiskunde als geheel en hiermee ook de houding naar wiskunde, komt de 'kijk op wiskunde als wetenschap' niet voor in de vragenlijst die de houding van leerlingen naar wiskunde beoogt te onderzoeken: de ATMI. Om deze reden zijn er voor dit thema zelf items opgesteld, waarbij in gedachten is gehouden welke effecten van geschiedenis op de 'kijk naar wiskunde als wetenschap' in de literatuur worden genoemd. Zo'n benoemd effect van geschiedenis is bijvoorbeeld dat leerlingen de 'menselijke' kant van wiskunde gaan beseffen. Vandaar dat het item "Afgelopen lessen hebben mij meer dan voorheen doen inzien dat wiskunde een menselijke activiteit is" is opgesteld. Nog een effect van geschiedenis zou zijn dat leerlingen door middel van geschiedenis meer waardering of bewondering voor wiskunde krijgen. Een item dat naar aanleiding hiervan is opgesteld is "Mijn bewondering voor het getal $\pi$ is na het maken van het werkblad groter geworden". In totaal heeft het thema 'kijk op wiskunde als wetenschap' vijf items.

Naast deze thema's zijn er nog enkele overige items toegevoegd. Drie items hiervan hebben betrekking op de 'mening over geschiedenis van wiskunde', waarbij het doel is om te peilen wat leerlingen ervan vonden dat er een keer aandacht werd besteed over geschiedenis van wiskunde en of ze dit vaker zouden willen. Twee items gaan over het 'nut van de les'. Hiermee kan gepeild worden of de groepen het maken van het werkblad even nuttig en leerzaam vonden. Als laatste is er nog een item "Ik had zin om aan het werkblad te gaan werken" waarmee vergeleken kan worden in hoeverre de twee groepen qua 'starthouding' van elkaar verschillen. Deze overige items zijn minder belangrijk, maar zouden informatie kunnen geven die de resultaten helpen te interpreteren of te verklaren. Deze items worden verder niet meegenomen in de statistische significantie-analyse.

Naast de stellingen zijn er aan het eind van de vragenlijst nog twee open vragen opgenomen, namelijk: "Wat maakte dat je het werkblad leuk vond?" en "Wat maakte dat je het werkblad *niet* leuk vond?". Hoewel de antwoorden op deze open vragen niet worden meegenomen in de kwantitatieve data-analyse, kunnen ze wel enig inzicht bieden over de redenen achter de ervaringen van de leerlingen. Als laatste is er een optioneel veld waarin leerlingen overige opmerkingen kunnen achterlaten.

Aan de hand van het voorgaande is duidelijk geworden dat aan de eerste vijf ontwerpeisen van de vragenlijst is voldaan. Van alle vijf de thema's zijn tenminste vier vragen opgenomen in de vragenlijst, zodat er bij elk thema tussen de groepen getoetst kan worden op significante verschillen. De zesde ontwerp-eis was dat de vragenlijst in ongeveer 10 minuten door alle leerlingen kan worden ingevuld. Er is besloten dat de vragenlijst uit 30 items bestaat, exclusief de open vragen. Ervan uitgaande dat de leerlingen in ongeveer een minuut de open vragen kunnen beantwoorden, blijven er gemiddeld per item 18 seconden over voor leerlingen om deze te beantwoorden. Dit zou naar verwachting genoeg moeten zijn.

Na het formuleren van alle items zijn keuzes gemaakt wat betreft de volgorde van deze items in de vragenlijst. Een mogelijkheid zou zijn om alle items te groeperen per thema. Uit de literatuur blijkt dat dit resulteert in een hogere Cronbach's alpha: een maat voor interne consistentie tussen enquete-items Goodhue en Loiacono, 2002. Dit suggereert dat het groeperen van items de betrouwbaarheid van de vragenlijst verhoogt. Echter, dit effect kan ook zijn ontstaan doordat respondenten *door* de groepering van items de samenhang zien en dus vergelijkbare antwoorden geven. Ze kunnen als het ware 'lui' worden en hun antwoorden baseren op hun vorige antwoorden. Op die manier kan de interne consistentie tussen items van een bepaald thema dus 'opgeblazen' worden: deze kan hoger lijken dan dat die in werkelijkheid is (Goodhue & Loiacono, 2002). Het groeperen kan er dus voor zorgen dat de daadwerkelijke meningen of gedachten bij specifieke items minder accuraat worden weergegeven met de vragenlijst. Om dit te voorkomen kan het beter zijn om items van verschillende thema's te mengen. Een willekeurige volgorde kan worden gebruikt, maar dit heeft ook nadelen. Respondenten moeten dan namelijk vaak van thema wisselen, wat verwarrend en frustrerend kan zijn en op haar beurt de kwaliteit van de antwoorden negatief kan beïnvloeden (Goodhue & Loiacono, 2002). Bij het opstellen van de vragenlijst is gestreefd naar een juiste balans. De thema's 'Algemene competentie' en 'Algemene intrinsieke motivatie' zijn samen in één sectie geplaatst en bovenaan gezet, gescheiden van de overige thema's. Op die manier is het voor leerlingen duidelijk dat die stellingen gaan over hoe ze wiskunde *over het algemeen* ervaren, los van de gegeven lessen waarin geschiedenis aan bod kwam. Er is ervoor gekozen om de items tussen verschillende thema's, zowel bij de algemene thema's als de specifieke thema's, zorgvuldig met elkaar af te wisselen om een logische volgorde te waarborgen. Zo wordt voorkomen dat de interne consistentie 'opgeblazen' wordt, en wordt verwarring en frustratie bij respondenten tot een minimum beperkt. Onder logische volgorde wordt bijvoorbeeld verstaan dat eerst wordt gevraagd naar het gehele vak wiskunde, en daarna naar specifiek het onderwerp meetkunde. Ook zijn de meer reflecterende items aan het eind van de vragenlijst opgenomen.

Nog een manier om te voorkomen dat respondenten 'lui' worden en niet meer goed over elke stelling nadenken, is door zowel positief als negatief geformuleerde stellingen op te nemen.

Naast het afwisselen van items van bepaalde thema's zorgt ook dit ervoor dat respondenten alert blijven en niet routinematig antwoorden. In de vragenlijst zijn dan ook een aantal negatief geformuleerde stellingen opgenomen, bijvoorbeeld: "Ik zag het nut van de les *niet* in." en "De stukjes geschiedenis van de wiskunde die in afgelopen twee lessen naar voren kwamen konden mij niet echt boeien.".

Alle afwegingen en keuzes hebben uiteindelijke geleid tot de uiteindelijke vragenlijst, die is opgenomen in Bijlage F. In tabel 1 is te vinden welke items bij welk thema horen.

| | | |
|---|---|---|
| *Algemeen* | Competentie | 2, 4, 5, 7 |
| | Intrinsieke Motivatie | 1, 3, 6, 8 |
| *Naar aanleiding van de lessen* | Competentie | 13, 17, 22, 26 |
| | Intrinsieke Motivatie | 10, 11, 12, 16, 20, 24, 25 |
| | Kijk op wiskunde | 15, 23, 27, 28, 30 |
| *Overig* | Mening over geschiedenis | 14, 19, 29 |
| | Nut van de les | 18, 21 |
| | Zin in de les | 9 |

Tabel 1

Als laatste moest er besloten worden hoe de vragenlijst zou worden afgenomen: op papier of digitaal. Bij een digitale afname is het noodzakelijk dat leerlingen een opgeladen mobieltje of laptop bij zich hebben in het lokaal. Omdat dit niet altijd het geval is, is er gekozen voor een papieren vragenlijst. Op die manier is het zeker dat iedereen de vragenlijst invult, wat vanwege de kleine groepen van groot belang is. Hoewel een papieren vragenlijst administratief minder handig is, wordt dit, gezien het geringe aantal deelnemers, voor lief genomen.

## 3.4 Data-analyse

In deze paragraaf wordt beschreven hoe de data is geanalyseerd. Het invoeren van de data, het onderzoeken van normaliteit van de data en het kiezen van de statistische methodes worden verder toegelicht. Voordat enige data verzameld kon worden, is er van elke leerling toestemming nodig. Hiertoe is een informatiebrief (Bijlage G) en een toestemmingsformulier (Bijlage H) gemaakt, welke voorafgaand aan het onderzoek door de leerlingen zijn gelezen en ondertekend.

### 3.4.1 Data-invoer

De data-analyse is uitgevoerd met behulp van het programma SPSS. In dit programma is de verzamelde ruwe data (ingevulde vragenlijsten) gestructureerd neergezet en uiteindelijk geanalyseerd. Voor elke leerling is diens antwoord op elk item ingevoerd als een numerieke waarde, variërend van 1 voor 'sterk mee oneens' tot 7 voor 'sterk mee eens'. Met deze data is per leerling een samengestelde score berekend voor elk thema door de antwoorden op de relevante items bij elkaar op te tellen en te delen door het aantal items binnen dat thema. Als samengestelde score is er dus gewerkt met een *gemiddelde* in plaats van een *som* van de antwoorden op de items behorend bij een thema. Een gemiddelde score geeft een makkelijker te interpreteren beeld van hoe een leerling een bepaald thema ervaart.

Van de ingevulde vragenlijsten zat er één tussen, die kruisjes bevatte die op verschillende posities *binnen* de antwoordmogelijkheden. Ook bevatte deze vragenlijst een kruisje precies op de scheidslijn tussen 'beetje mee oneens' en 'neutraal'. Klaarblijkelijk heeft de betreffende leerling dit bewust gedaan om nog meer nuance te kunnen geven in diens antwoorden. Eigenlijk heeft de leerling met diens antwoorden de schaal waarop gemeten is 'continuer' gemaakt, wat, zoals eerder is vermeld, bijdraagt aan rechtvaardigen van het beschouwen van de data als intervaldata en dat de data een normale verdeling volgt (Allen & Seaman, 2007; Wu & Leung, 2017). Om deze reden zijn de nuances in het positioneren van de kruisjes meegenomen bij het toekennen van numerieke waarden aan de data. Zo is een kruisje op de scheidslijn tussen 'beetje mee oneens' en 'neutraal' vertaald naar de numerieke waarde 3,5 en een kruisje aan de linkerkant van het vakje 'Mee eens' naar de numerieke waarde 5,75. Er is gekozen om numerieke waarden toe te kennen aan de positie van de kruisjes met stappen van 0,25. Meer gedetailleerde subcategorieën in de positionering van de kruisjes waren namelijk moeilijk te onderscheiden en kunnen bovendien onbedoeld zijn geweest door de leerling.

Bij de data-invoer is er rekening gehouden met het toekennen van de juiste numerieke waarden aan de negatief geformuleerde items in de vragenlijst. Voor deze items (item 14, 21 en 22) geldt dat het antwoord 'sterk mee oneens' als de meest positieve respons wordt beschouwd, terwijl 'sterk mee eens' de minst positieve respons is. Daarom zijn de numerieke waarden voor deze items 'omgekeerd' toegekend: 'sterk mee oneens' wordt vertaald naar waarde 7 en 'sterk mee eens' naar waarde 1.

### 3.4.2 Normaliteit van de data onderzoeken

Zoals vermeld in paragraaf 3.1.5, is een voorwaarde voor het betrouwbaar gebruiken van een onafhankelijke t-toets dat de data binnen kleine groepen normaal verdeeld is (Ghasemi & Zahediasl, 2012). De data die gebruikt wordt bij de statistische toetsen zijn de gemiddelde scores van leerlingen op een bepaald thema. Om te bepalen of deze gemiddelde scores binnen elke groep normaal verdeeld zijn, worden zowel visuele als statistische methoden toegepast. Statistisch wordt de normaliteit getoetst met de Shapiro-Wilk toets. Op basis van de resultaten van de Shapiro-Wilk toets wordt geconcludeerd of de data als normaal verdeeld kan worden beschouwd. Voor het verkrijgen van een vollediger beeld worden histogrammen gemaakt die de verdeling van de data visueel weergeven.

Bij de histogrammen is gezocht naar de juiste bin-breedte (de breedte van de staven), die het gedrag en de verdeling van de data goed laat zien. Bij een te grote bin-breedte gaan details van de data verloren en een te kleine bin-breedte resulteert een grafiek met te veel details. Wanneer een van deze situaties zich voor doet geeft het histogram niet goed de bepaalde kenmerken of patronen van de verdeling van de data weer. Er is ervoor gekozen om handmatig een juiste bin-breedte in te stellen die het gedrag van de data zo goed mogelijk weergeeft.

Om te concluderen of de dataverdeling als normaal wordt beschouwd of niet, biedt de Shapiro-Wilk toets uitsluitsel. Deze toets is, meer dat andere normaliteitstoetsen, geschikt voor kleine steekproeven (Mishra e.a., 2019). Met de Shapiro-Wilk toets wordt de nulhypothese 'de data is normaal verdeeld' getest. Hierbij wordt de W-waarde berekend, die aangeeft hoe dicht de data bij een normale verdeling ligt. Een W-waarde dicht bij 1 suggereert dat de data normaal verdeeld is. De p-waarde, die ook wordt berekend, geeft de kans aan dat de geobserveerde afwijking van normaliteit het resultaat is van toeval, als de data daadwerkelijk normaal verdeeld zijn. Als significantieniveau wordt 0,05 genomen. Een p-waarde kleiner dan 0,05 is de afwijking van normaliteit significant en wordt de nulhypothese verworpen. Bij een p-waarde groter dan 0,05 kan de nulhypothese niet worden verworpen en wordt verondersteld dat deze waar is.

### 3.4.3 Verschillen tussen groepen onderzoeken

Waar het in dit onderzoek om gaat is het onderzoeken van verschillen tussen beide groepen. Deze verschillen zullen zowel visueel als statistisch in kaart worden gebracht. Statistisch gezien worden er toetsen gebruikt om te kunnen concluderen of eventuele verschillen significant zijn. Zoals in paragraaf 3.1.5 is toegelicht hangt het van de verdeling van de data af welke toets gebruikt wordt. Zijn de individuele gemiddelde scores op een bepaald thema binnen beide groepen normaal verdeeld, dan wordt er een onafhankelijke t-toets uitgevoerd. Is er geen sprake van een normale verdeling bij een van de twee groepen, dan zal de Mann-Whitney U toets worden gebruikt. Naast de statistische toetsen worden de verschillen visueel inzichtelijk gemaakt door middel van boxplots, welke een vollediger en genuanceerder beeld kunnen geven dan de statistische toetsen over mogelijke verschillen. Echter, voor het trekken van conclusies wordt hoofdzakelijk gekeken naar de uitkomsten van de statistische toetsen.

De onafhankelijke t-toets test of de gemiddelde score van groep A op een bepaald thema, bijvoorbeeld 'Specifieke Intrinsieke Motivatie', significant verschilt van de gemiddelde score van groep B op dat thema. Hierbij is de nulhypothese steeds: 'er is geen verschil tussen de gemiddelden van de twee groepen'. De toets berekent een t-waarde, die aangeeft hoe groot het verschil tussen de groepen is, relatief aan de spreiding van de data binnen de groepen. Een hoge t-waarde duidt op een groot verschil tussen de gemiddelden van de groepen. Uit de t-waarde wordt de p-waarde berekend. De p-waarde geeft de kans aan dat het waargenomen verschil tussen de groepen het resultaat is van toeval, gegeven dat de nulhypothese waar is. Als significantieniveau wordt 0,05 genomen. Bij een p-waarde kleiner dan 0,05 wordt de nulhypothese verworpen en wordt geconcludeerd dat er een significant verschil is tussen de gemiddelden van de twee groepen. Bij een p-waarde groter dan 0,05 kan de nulhypothese niet worden verworpen en wordt deze als juist verondersteld.

De Mann-Whitney U toets wordt gebruikt wanneer de data in een van de groepen niet normaal verdeeld is. Deze niet-parametrische toets test of er een verschil is in de rangen van de scores tussen de twee groepen. Rangen zijn de posities die de individuele scores innemen wanneer ze, samen met de scores van de andere groep, worden gerangschikt van laag naar hoog. De nulhypothese stelt dat de rangen in beide groepen gelijk zijn. De toets berekent een U-waarde, die aangeeft hoe de rangen van de ene groep zich verhouden tot die van de andere groep. Een lage U-waarde suggereert een significant verschil in rangen tussen de groepen, terwijl een hoge U-waarde juist duidt op weinig verschil. Met behulp van de U-waarde wordt vervolgens een p-waarde berekend. Deze p-waarde geeft aan hoe groot de kans is dat het waargenomen verschil in rangen het resultaat is van toeval, gegeven dat de nulhypothese waar is. Een significantieniveau van 0,05 wordt gebruikt. Als de berekende p-waarde kleiner is dan 0,05, wordt de nulhypothese verworpen en is de conclusie dat er een significant verschil is in rangen tussen de groepen. Als de p-waarde groter is dan 0,05, kan de nulhypothese niet worden verworpen en wordt aangenomen dat er geen significant verschil is.

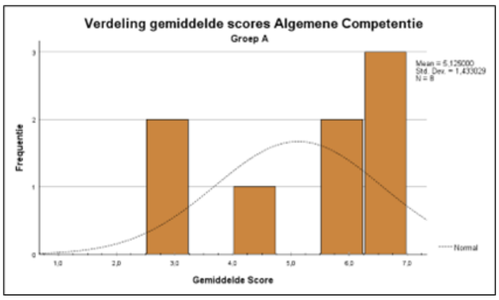
# 4 Resultaten

In dit hoofdstuk zullen de resultaten worden weergegeven. Dit betreft de resultaten van de normaliteitsanalyse en de verschillen op de thema's tussen beide groepen. Voor de volledigheid en interpreteerbaarheid van de resultaten worden de thema's, die zijn ontstaan uit het opstellen van de ontwerpeisen, te lezen in hoofdstuk 3.3.1, nog eens herhaald.

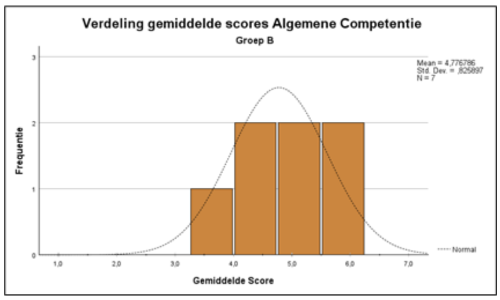
- 'Algemene competentie': de mate waarin leerlingen zich over het algemeen competent voelen in wiskunde. Dit thema helpt om te bepalen of een groep gemiddeld sterker of zwakker is in wiskunde, wat bijdraagt aan een beter begrip van de resultaten rond competentie bij het maken van het werkblad.
- 'Algemene Intrinsieke Motivatie': de mate waarin leerlingen gemotiveerd zijn voor het vak wiskunde in het algemeen. Dit thema helpt eventuele bestaande verschillen in intrinsieke motivatie tussen de groepen te ontdekken, wat belangrijk is om de specifieke motivatie bij het maken van het werkblad te interpreteren.
- 'Specifieke Competentie': de mate waarin leerlingen zich competent voelden bij het maken van het werkblad. Verschillen tussen groepen op dit thema kunnen een verschil in ervaren moeilijkheidsgraad van het werkblad aanduiden.
- 'Specifieke Intrinsieke Motivatie': de mate van intrinsieke motivatie die leerlingen specifiek tijdens het maken van het werkblad ervaarden. Dit thema is de focus van dit onderzoek.
- 'Kijk Op Wiskunde': het beeld dat leerlingen hebben van wiskunde, vooral in de context van het vak als wetenschap. Zoals in hoofdstuk 2 is beschreven blijkt dat een positief beeld de intrinsieke motivatie voor wiskunde versterkt.

## 4.1 Normaliteit

Zoals beschreven in hoofdstuk 3 is normaliteit van data een belangrijke voorwaarde voor het kiezen van de juiste statistische toets. De normaliteit wordt eerst visueel geïnspecteerd door middel van histogrammen. De bin-breedte is ingesteld op 0,75 of 1. Deze waarden leverden een goede visuele representatie van de dataverdeling op. Als voorbeeld is in figuur 23a het histogram te zien voor groep A op het thema 'Algemene Competentie' en in figuur 23b die van groep B. De overige histogrammen zijn te zien in Bijlage I. In elke figuur is een schets van de normale verdeling erbij getekend.




Figuur 23a




Figuur 23b

Door het beperkte aantal samples volgen de histogrammen niet nauwkeurig de vorm van een normale verdeling. Dit resulteert in een afwijking van de normale verdelingsvorm bij alle histogrammen. Eén histogram springt er echter in het bijzonder uit. Terwijl bij de andere histogrammen kenmerken te ontdekken zijn van een normale verdeling, zoals (grofweg) een enkele piek in het midden met symmetrisch lagere frequenties aan beide zijden, vertoont het histogram in figuur 23a dit niet. Dit histogram laat namelijk twee duidelijke pieken zien. Dit wijst erop dat er sprake lijkt te zijn van een bimodale verdeling bij het thema 'Algemene Competentie' in groep A.

Zoals beschreven is in hoofdstuk 3 kan met een Shapiro-Wilk toets met (enige) zekerheid worden geconcludeerd of van elke groep de individuele gemiddelde scores per thema normaal verdeeld zijn. Hiertoe is deze toets per thema, per groep uitgevoerd. In tabel 2 zijn de uitkomsten te zien. Hierbij staat 'df' voor 'degrees of freedom', wat in dit geval gelijk is aan de groepsgroottes.

| | | W-waarde | df | p-waarde |
|---|---|---|---|---|
| **Algemene Competentie** | Groep A | ,764 | 8 | ,012 |
| | Groep B | ,949 | 7 | ,724 |
| **Algemene Intrinsieke Motivatie** | Groep A | ,859 | 8 | ,118 |
| | Groep B | ,892 | 7 | ,287 |
| **Specifieke Competentie** | Groep A | ,939 | 8 | ,597 |
| | Groep B | ,960 | 7 | ,818 |
| **Specifieke Intrinsieke Motivatie** | Groep A | ,919 | 8 | ,425 |
| | Groep B | ,879 | 7 | ,222 |
| **Kijk Op Wiskunde** | Groep A | ,894 | 8 | ,256 |
| | Groep B | ,960 | 7 | ,818 |

Tabel 2

Op het thema 'Algemene Competentie' bij groep A bleek de verdeling van de gemiddelde scores significant af te wijken van normaliteit ($W = 0.764$, $p = 0.012$). Op basis van dit resultaat werd voor het analyseren van de verschillen op 'Algemene Competentie' tussen groep A en B de niet-parametrische Mann-Whitney U toets uitgevoerd. Op de overige thema's bleek bij elke groep de verdeling van de gemiddelde scores *niet* significant af te wijken van normaliteit. Hoewel de W-waarden varieerden in hoe dicht ze bij de 1 lagen, waren de p-waarden allemaal groter dan 0,05. Op basis van deze resultaten werd aangenomen dat er bij deze thema's sprake is van normaliteit van de data, en werden onafhankelijke t-toetsen uitgevoerd om de verschillen tussen de groepen te beoordelen.

## 4.2 Verschillen tussen groepen

Naar aanleiding van de resultaten van de normaliteitsanalyse werd bij het thema 'Algemene Competentie' de Mann-Whitney U toets uitgevoerd om verschillen tussen groep A en B op significantie te onderzoeken. Bij de overige thema's werd de onafhankelijke t-toets gebruikt.

### 4.2.1 Resultaten Mann-Whitney U toets

Een Mann-Whitney U toets werd uitgevoerd om te beoordelen of er tussen groep A en groep B een verschil is in 'Algemene Competentie' voor het vak wiskunde. De uitkomsten van deze toets zijn te zien in tabel 3.

| Aantal samples | Gemiddelde rangnummer groep A | Gemiddelde rangnummer groep B | U-waarde | p-waarde |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 9,19 | 6,64 | 18,5 | 0,281 |

Tabel 3

Verschil in 'Algemene Competentie'
Op het thema 'Algemene Competentie' is er tussen groep A (*gemiddelde rangnummer* = 9,19) en groep B (*gemiddelde rangnummer* = 6,64) **geen significant verschil** ($U$ = 18,5, $p$ = 0,281). Oftewel, er is geen significant verschil tussen de groepen in de ervaren competentie voor het vak wiskunde in het algemeen.

### 4.2.2 Resultaten onafhankelijke t-toets

Meerdere onafhankelijke t-toetsen werden uitgevoerd om te beoordelen of er op de thema's 'Algemene Intrinsieke Motivatie', 'Specifieke Competentie', 'Specifieke Intrinsieke Motivatie' en 'Kijk Op Wiskunde' verschillen zijn tussen groep A en groep B. De uitkomsten zijn te zien in tabel 4. SPSS berekent met de Levene's test automatisch of de varianties van de twee groepen als gelijk kunnen worden beschouwd. Mocht dit niet zo zijn, dan produceert de 'Welch's t-test', een aangepaste versie van de onafhankelijke t-toets, betrouwbaardere resultaten.

| | *Levene's test voor gelijkheid van varianties* | | *Onafhankelijke t-test voor gelijkheid van gemiddelden* | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **F-waarde** | **p-waarde** | **t-waarde** | **df** | **(Tweezijdige) p-waarde** |
| **Algemene Intrinsieke Motivatie** | 1,616 | ,226 | ,942 | 13 | ,364 |
| **Specifieke Competentie** | 1,003 | ,335 | -,025 | 13 | ,981 |
| **Specifieke Intrinsieke Motivatie** | ,484 | ,499 | ,745 | 13 | ,470 |
| **Kijk Op Wiskunde** | ,702 | ,417 | 3,222 | 13 | ,007 |

Tabel 4

Uit de uitkomsten van de Levene's test is te zien dat, bij een significantieniveau van 0,05, de varianties tussen de groepen op elk thema als gelijk kunnen worden beschouwd. De uitkomsten van de onafhankelijke t-toets zijn per thema als volgt:

Verschil in 'Algemene Intrinsieke Motivatie'
Groep A ($M = 5,375; SD = 1,369$) scoorde gemiddeld hoger op 'Algemene Intrinsieke Motivatie' dan groep B ($M = 4,830$; $SD = 0,721$). Dit verschil was **niet significant** ($t(13) = 0,942$, $p = 0,364$). Oftewel, er is geen significant verschil tussen de groepen in de mate van intrinsieke motivatie voor het vak wiskunde in het algemeen.

Verschil in 'Specifieke Competentie'
Groep A ($M = 3,781$; $SD = 0,725$) scoorde gemiddeld lager op 'Specifieke Competentie' dan groep B ($M = 3,795$; $SD = 1,314$). Dit verschil was **niet significant** ($t(13) = -0,025$, $p = 0,981$). Oftewel, er is geen significant verschil tussen de groepen in de mate van de ervaren competentie in het maken van het werkblad.

Verschil in 'Specifieke Intrinsieke Motivatie'
Groep A ($M = 4,429$; $SD = 1,039$) scoorde gemiddeld hoger op 'Specifieke Intrinsieke Motivatie' dan groep B ($M = 4,056$; $SD = 0,874$). Dit verschil was **niet significant** ($t(13) = 0,745$, $p = 0,470$). Oftewel, er is geen significant verschil tussen de groepen in de mate van intrinsieke motivatie tijdens het maken van het werkblad.

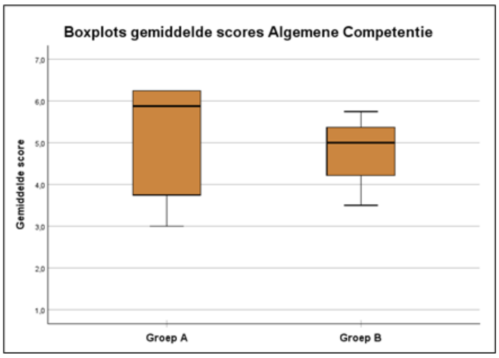
Verschil in 'Kijk Op Wiskunde'
Groep A ($M = 4,550$; $SD = 0,521$) scoorde gemiddeld hoger op 'Kijk Op Wiskunde' dan groep B ($M = 3,336$; $SD = 0,912$). Dit verschil was **significant** ($t(13) = 3,222$, $p = 0,007$).

Oftewel, er is een significant verschil tussen de groepen in het beeld dat ze hebben van wiskunde als wetenschap.

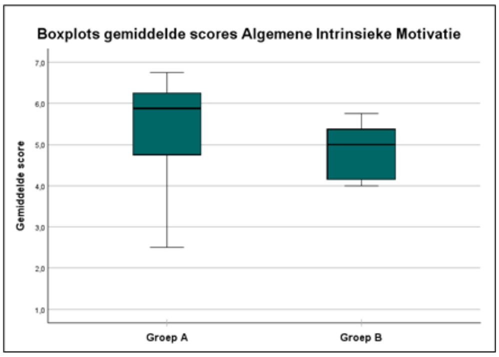
Uit deze resultaten blijkt dus dat het verschil tussen groep A en groep B in de 'Kijk Op Wiskunde' significant is, terwijl de groepen op de andere thema's niet significant van elkaar verschillen.

Om een vollediger beeld te geven van de verschillen op de thema's tussen de twee groepen werden er boxplots gemaakt, zie figuur 24a t/m 24h Ook de categorie 'overig', dat wil zeggen de thema's 'Mening Over Geschiedenis', 'Nut Van De Les' en 'Zin In De Les', zijn hierbij meegenomen.

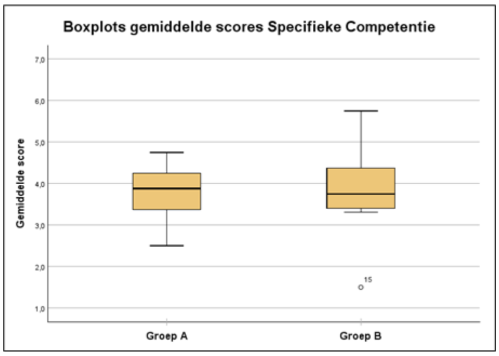
Uit de boxplots kunnen de volgende zaken worden gehaald. Zie figuur 24a . In deze figuur is te zien dat de mediaan van groep A buiten de box van groep B valt. Hoewel er dus statistisch geen *significant* verschil is tussen de twee groepen wat betreft 'Algemene Competentie', is het verschil tussen de twee groepen op dit thema wel degelijk *middelmatig*, waarbij groep A zich over het algemeen competenter voelt dan groep B. Zie figuur 24b . In deze figuur valt ook de mediaan van groep A buiten de box van groep B. Hoewel er dus statistisch geen *significant* verschil is tussen de twee groepen wat betreft 'Algemene Intrinsieke Motivatie', is het verschil tussen de twee groepen op dit thema wel degelijk *middelmatig*, waarbij groep A zich over het algemeen meer intrinsiek gemotiveerd voelt dan groep B. Ook valt op dat de spreiding groter is bij groep A; vooral het minimum bij groep A ligt beduidend lager dan bij groep B. Zie figuur 24c . De centrale tendens tussen de twee groepen is vergelijkbaar. De spreiding is bij groep B echter groter; er is een flinke uitschieter naar onder en het maximum ligt hoger dan bij groep A. Zie figuur 24d . Bij groep B liggen de individuele gemiddelde scores iets lager dan bij groep A, maar dit verschil wordt nog steeds aangeduid als *klein*. Zie figuur 24e . Op dit thema, 'Kijk Op Wiskunde', werd een significant verschil tussen de twee groepen gevonden. De boxplots illustreren dit verschil goed; de boxen overlappen namelijk helemaal niet. Wel zijn er twee uitschieters bij groep B, een aan elke kant van de boxplot. Zie figuren 24f t/m 24h . Vanwege het beperkte aantal items bij deze thema's was het niet verantwoord om op deze thema's statistische toetsen los te laten. In figuur 24f is te zien dat de mediaan van groep B buiten de box van groep A valt; deze ligt lager dan het eerste kwartiel van groep A. Het verschil in 'Mening Over Geschiedenis' is dus middelmatig waarbij groep A een positievere mening heeft dan groep B. In figuur 24g is te zien dat de mediaan van groep A buiten de box van groep B valt; deze ligt lager dan het eerste kwartiel van groep B en is zelfs gelijk met het minimum van groep B. Het verschil in 'Nut Van De Les' is dus middelmatig, waarbij groep B de net als nuttiger heeft ervaren dan groep A. In figuur 24h is te zien dat de centrale tendens tussen de twee groepen wat betreft 'Zin In De Les' vergelijkbaar is. Wel bevat groep B een uitschieter naar onderen, wat betekent dat er één leerling beduidend minder zin in de les had dan de rest van de leerlingen.



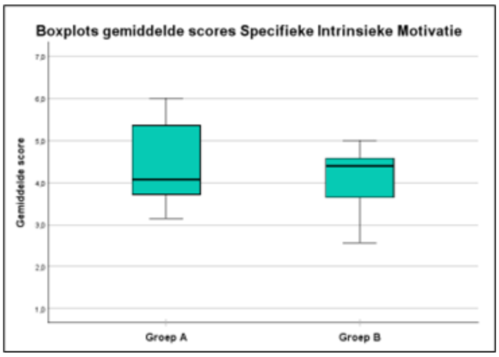

Figuur 24a



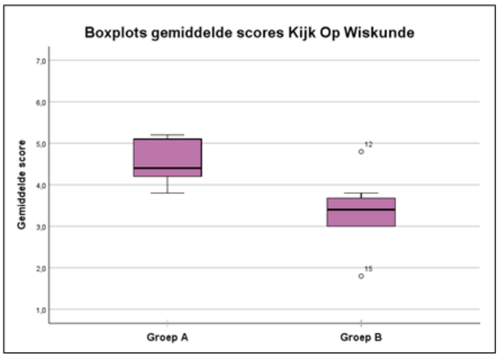

Figuur 24b



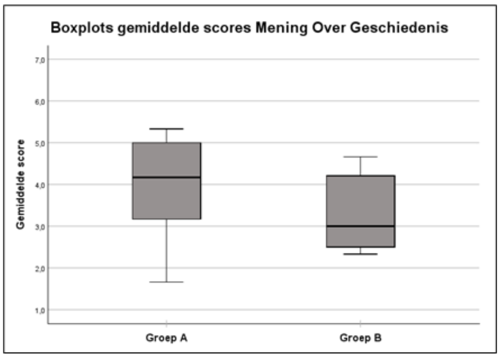

Figuur 24c



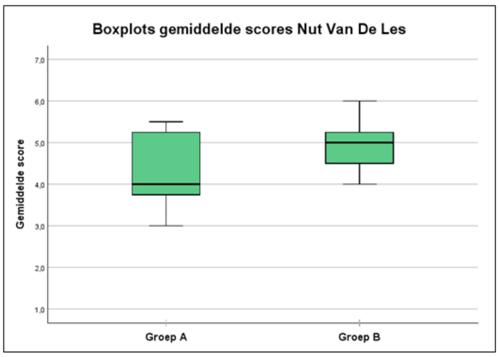

Figuur 24d



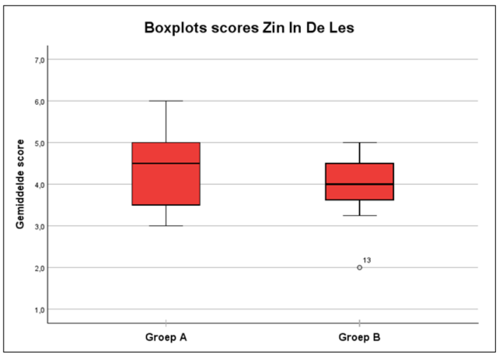

Figuur 24e




Figuur 24f




Figuur 24g




Figuur 24h

### 4.2.3 Resultaten open vragen

In de vragenlijst stonden ook enkele open vragen, die meer inzicht kunnen bieden achter de gegeven scores van leerlingen. De antwoorden op de open vragen zijn te lezen in tabellen 5, 6 en 7.

| *Wat maakte dat je het werkblad leuk vond?* | |
|---|---|
| **Groep A** | **Groep B** |
| Leerling 1: “Het was interessant.”<br>Leerling 2: “Het is een hele andere manier/kijk op wiskunde.”<br>Leerling 3: “Het onderwerp, $\pi$ is een interessant getal.”<br>Leerling 4: “Het interactief herbeleven van geschiedenis.”<br>Leerling 5: “Interessant onderwerp, goede lastige vragen waar je echt over na moest denken.”<br>Leerling 6: “Het was uitdagend.”<br>Leerling 7: “Sommige geschiedenis dingen waren interessant.”<br>Leerling 8: - | Leerling 9: “Het is iets anders dan normaal.”<br>Leerling 10: “Als de vragen lukten dan was dat leuk en dat gaf ook vertrouwen.”<br>Leerling 11: “Probleemoplossend te werk gaan, in opbouwende stappen is goed.”<br>Leerling 12: “Heb er nog nooit op deze manier naar gekeken. Ik wist niet dat $\pi$ ook te benaderen was en hoe dat zou moeten.”<br>Leerling 13: -<br>Leerling 14: “Het was uitdagend en leuk om te maken. Een keer iets anders.”<br>Leerling 15: “Het was een keer wat anders dan wat we normaal in de les doen.” |

Tabel 5

| *Wat maakte dat je het werkblad niet leuk vond?* | |
|---|---|
| **Groep A** | **Groep B** |
| Leerling 1: “De teksten waren heel lang.”<br>Leerling 2: “Ik vond het vaak lastige vragen.”<br>Leerling 3: “Wat het ietsjes minder maakte was dat het bewijs van Archimedes nogal lastig is.”<br>Leerling 4: -<br>Leerling 5: “Soms waren de vragen net iets té lastig.”<br>Leerling 6: “Het was te veel tekst.”<br>Leerling 7: “Ik heb wel bewondering voor de wiskunde en in dit geval $\pi$, maar ik vind het niet leuk om iets te achterhalen wat al achterhaald is.”<br>Leerling 8: - | Leerling 9: “Te weinig tijd.”<br>Leerling 10: “Sommige vragen waren te moeilijk.”<br>Leerling 11: -<br>Leerling 12: “Sommige dingen waren vrij lastig, dus je zat er wel even mee. Dit was echter ook wel leuk, want ik wilde achter het antwoord komen.”<br>Leerling 13: “Stress na toetsweek/uitputting van toetsweek.”<br>Leerling 14: “Het begin over de geschiedenis van $\pi$ was saai.”<br>Leerling 15: “Ik vond het niet erg interessant.” |

Tabel 6

| *Eventuele overige opmerkingen* | |
|---|---|
| **Groep A** | **Groep B** |
| Leerling 1: -<br>Leerling 2: -<br>Leerling 3: “Werkblad is goed gemaakt!”<br>Leerling 4: -<br>Leerling 5: -<br>Leerling 6: -<br>Leerling 7: -<br>Leerling 8: - | Leerling 9: -<br>Leerling 10: “Sommige ‘makkelijke’ vragen waren moeilijk geformuleerd, waardoor het moeilijk was ze te maken.”<br>Leerling 11: -<br>Leerling 12: n.v.t.<br>Leerling 13: -<br>Leerling 14: “Leuke les. En positieve uitstraling.”<br>Leerling 15: - |

Tabel 7

Samengevat gaven de antwoorden op de open vragen de volgende resultaten:

- **Werkblad A** werd vooral gewaardeerd om het onderwerp $\pi$, de geschiedenis, de andere aanpak ten opzichte van reguliere lessen, en de uitdaging die het bood. Wat als negatief werd ervaren was de hoeveelheid tekst, de hoge moeilijkheidsgraad, en het achterhalen van informatie die al achterhaald is.
- **Werkblad B** werd gewaardeerd om de andere aanpak ten opzichte van reguliere lessen en de uitdaging. De hoge moeilijkheidsgraad, de lengte van het werkblad, de niet-interessante geschiedenis en de uitputting door de toetsweek werden als nadelen genoemd.
- **Opmerkingen**: Bij werkblad A werd er opgemerkt dat deze goed is gemaakt. Bij werkblad B werd de formulering van sommige vragen als moeilijk ervaren.

# 5 Conclusie

Dit onderzoek begon met het opstellen van de volgende hoofdvraag:

*"Wat is het specifieke effect van het gebruik van een primaire historische bron bij het leren van wiskunde op de intrinsieke motivatie van leerlingen?"*

Om deze hoofdvraag te kunnen beantwoorden hebben twee groepen 5VWO wiskunde D leerlingen een werkblad gemaakt over de benadering van $\pi$ door Archimedes. Groep A maakte werkblad A, die de primaire historische bron bevatte. Groep B maakte werkblad B, die geen primaire historische bron bevatte. Na afloop van het maken van de werkbladen hebben beide groepen een voor dit onderzoek ontworpen Likert-schaal vragenlijst ingevuld. Met stellingen van het hoofdthema 'Specifieke Intrinsieke Motivatie', werd de mate van intrinsieke motivatie die leerlingen tijdens het maken van het werkblad ervoeren geïnventariseerd worden. De andere thema's uit de vragenlijst, 'Algemene Competentie', 'Algemene Intrinsieke Motivatie', 'Specifieke Competentie' en 'Kijk Op Wiskunde', hingen sterk met het hoofdthema samen en konden meer inzicht verschaffen in de resultaten op het hoofdthema.

In hoofdstuk 4 was te lezen dat groep A gemiddeld hoger scoorde op het thema 'Specifieke Intrinsieke Motivatie' dan groep B. Dit verschil in gemiddelden was echter niet significant en ook uit de boxplots volgde dat het verschil klein was. Op basis van deze resultaten wordt er dus geconcludeerd dat, wanneer wiskunde wordt geleerd aan de hand van geschiedenis, een primaire historische bron geen specifiek effect heeft op de intrinsieke motivatie bij leerlingen. Dat wil zeggen: het werken met een primaire historische bron bij het leren van wiskunde aan de hand van geschiedenis is niet intrinsiek motivatieverhogend of -verlagend vergeleken met het niet werken met een primaire historische bron.

Uit de resultaten bleek ook dat groepen A en B niet significant van elkaar verschillen wat betreft de intrinsieke motivatie voor het vak wiskunde in het algemeen. Dit suggereert dat een vooraf bestaand verschil in intrinsieke motivatie tussen de groepen niet aan de orde was en dus geen verstorende variabele is geweest. Een ander resultaat was dat de twee groepen niet significant van elkaar verschillen wat betreft hun gevoel van competentie voor wiskunde in het algemeen. Op basis hiervan wordt er verondersteld dat de resultaten bij 'Specifieke Competentie' niet verstoord zijn door een mogelijk vooraf bestaand verschil in 'Algemene Competentie'. Er wordt dus vanuit gegaan dat een mogelijk verschil in ervaren competentie in het maken van de werkbladen tussen de groepen volledig te wijten is aan de ervaren moeilijkheidsgraad van de werkbladen. Het verschil in gevoelens van competentie tijdens het maken van de werkbladen is echter ook niet significant. Dit betekent dat verschillen in de intrinsieke motivatie tijdens het maken van het werkblad niet direct kunnen worden toegewezen aan verschillen in gevoelens van competentie tussen de twee groepen. Wat betreft het nut van de les kon er tussen de twee groepen geen statistische toets worden uitgevoerd. Uit de boxplots volgde echter dat het verschil tussen de groepen in ervaren nut van de les middelmatig is. Mogelijk heeft dit verschil een rol gespeeld bij de resultaten van de twee groepen op het thema 'Specifieke Intrinsieke Motivatie'. De 'starthouding', oftewel in hoeverre de leerlingen zin hadden in de les, was vergelijkbaar tussen de groepen en heeft dus geen verstorend effect teweeg gebracht.

Uit de resultaten bleek dat er een significant verschil was tussen groep A en groep B wat betreft hun 'Kijk Op Wiskunde'. De leerlingen uit groep A hebben door het maken van het werkblad een positievere kijk op wiskunde als wetenschap gekregen. Dit betekent dat zij meer waardering hebben gekregen voor (de ontwikkeling van) wiskunde en zich meer bewust zijn geworden van de menselijke aspecten ervan, in vergelijking met leerlingen uit groep B. Zoals in paragraaf 2.2 te lezen was bevordert een positieve kijk op wiskunde de intrinsieke motivatie voor wiskunde. Indirect kan het gebruik van specifiek primaire historische bronnen dus wel degelijk de intrinsieke motivatie van leerlingen voor wiskunde verhogen, in ieder geval in deze groep. Daarnaast is het verkrijgen van een positiever beeld van wiskunde bij leerlingen al een waardevol doel op zich, en blijken primaire historische bronnen hier dus effectief voor te zijn.

De mate waarin leerlingen geïnteresseerd en nieuwsgierig zijn geworden in de *geschiedenis* van wiskunde was gepeild met het thema 'Mening Over Geschiedenis'. Uit de boxplots bleek dat het verschil hierin tussen de twee groepen middelmatig was, waarbij groep A hier positiever in staat. Wel is de score op dit onderwerp overwegend neutraal en ietwat terughoudend, wat betekent dat leerlingen niet sterk enthousiast zijn geraakt in de *geschiedenis* van wiskunde.

# 6 Discussie

Bij het interpreteren van de resultaten en de conclusie is het belangrijk om rekening te houden met enkele beperkingen van dit onderzoek die van invloed kunnen zijn geweest op de betrouwbaarheid en de betekenis van de uitkomsten. In deze paragraaf worden die beperkingen aan het licht gebracht en worden er aanbevelingen gedaan voor verder onderzoek. Als laatste zal er worden ingegaan op de implicaties die de uitkomsten van dit onderzoek hebben op de huidige en toekomstige lespraktijk.

## 6.1 Beperkingen van het onderzoek

Een eerste limitatie van dit onderzoek is de zeer beperkte steekproefomvang (8 en 7 personen per groep). Bij kleine steekproeven speelt het toeval een grotere rol. Zo kan het voorkomen dat er bij de geïncludeerde groep leerlingen nu net enkelen zaten die een sterke voorkeur of juist afkeer hebben tegen primaire historische bronnen, wat de resultaten doet vertekenen. Ook wegen uitschieters in de gegeven antwoorden veel meer mee in de resultaten bij kleine groepen dan bij grote groepen. Kortom: bij kleine steekproeven zullen de berekende parameters, bijvoorbeeld de gemiddelden van de groepen op het thema 'Specifieke Intrinsieke Motivatie', wellicht minder goed overeenkomen met de werkelijke parameters van de te onderzoeken populatie. Hierdoor is de kans op het maken van Type I-fouten (foutief verwerpen van de nulhypothese als die eigenlijk waar is) en Type II-fouten (niet verwerpen van de nulhypothese als die eigenlijk onwaar is) hoger. Vooral Type II-fouten zijn waarschijnlijker, omdat bij kleine steekproeven de statistische 'power', ook wel soms 'gevoeligheid' genoemd, van statistische toetsen lager is (Columb & Atkinson, 2016). In dit onderzoek zijn vanwege de kleine steekproeven de getrokken conclusies dus wat minder betrouwbaar, dan wanneer grotere groepen werden onderzocht. Voor toekomstig onderzoek is het aan te raden om een grotere steekproefomvang te gebruiken om de betrouwbaarheid van de bevindingen te vergroten.

Een tweede beperking is dat de opgestelde vragenlijst niet van tevoren is onderzocht op betrouwbaarheid en validiteit. Dit is vanwege de beperkte omvang van dit onderzoek niet gedaan. Hoewel de vragenlijst is opgesteld aan de hand van items uit erkende, betrouwbare en valide vragenlijsten, betekent dit niet automatisch dat deze vragenlijst ook voldoende betrouwbaar en valide is. Hierdoor bestaat er enige onzekerheid over of de vragenlijst meet wat deze beoogt te meten en of deze dat consistent genoeg doet. Daarom is het goed om met enige voorzichtigheid de resultaten uit de vragenlijst te interpreteren. Voor eventueel toekomstig onderzoek bij grotere groepen of andere jaarlagen en niveaus is het aan te raden de vragenlijst eerst te onderzoeken op betrouwbaarheid en validiteit.

Een derde beperking is dat de gemaakte werkbladen niet eerst zijn onderworpen aan een expertpanel, bestaande uit bijvoorbeeld docenten of medestudenten. Hoewel het voor hen lastig kan zijn om te beoordelen of geschiedenis op een goede manier wordt geïntegreerd en of de werkbladen voldoen aan specifieke ontwerpeisen zoals 'het werkblad voldoet aan de richtlijnen van de hermeneutische benadering', zou zo'n expertpanel zeker waardevol kunnen zijn voor het beoordelen van aspecten zoals moeilijkheidsgraad, lengte, vraagstelling en opbouw van de werkbladen. Er bleek dat er zeker ruimte was voor verbetering van dit soort aspecten. Het hoge niveau en de lengte van het werkblad (en de teksten in het werkblad) zijn namelijk door meerdere leerlingen als de redenen aangegeven waarom ze het maken van het werkblad als niet leuk hebben ervaren, ook al vonden sommigen die uitdaging ook juíst leuk en is er van tevoren aangegeven dat het werkblad niet helemaal af hoeft te zijn. Bij de overige opmerkingen heeft een leerling aangegeven dat vragen soms onnodig moeilijk geformuleerd waren. Met feedback van een expertpanel hadden dit soort 'gebreken' aan het werkblad voorkomen kunnen worden, waardoor leerlingen mogelijk andere ervaringen zouden hebben bij het maken ervan. Voor eventueel verder onderzoek met deze of andere werkbladen wordt het aangeraden ze voorafgaand aan gebruik voor te leggen aan een expertpanel voor feedback om ze vervolgens te optimaliseren. Idealiter wordt hiervoor ook een expert op het gebied van het inzetten van geschiedenis van wiskunde in de les voor geraadpleegd, zodat aan alle ontwerpeisen zo goed mogelijk kan worden voldaan.

Een andere beperking van dit onderzoek was dat, hoewel ze niet significant waren, er wel degelijk verschillen waren tussen de twee groepen wat betreft competentie en intrinsieke motivatie voor het vak wiskunde in het algemeen. De boxplots lieten zien dat dit verschil middelmatig was. Dit verschil kan in bepaalde mate de resultaten en interpretaties ervan hebben beïnvloed. Hoewel het goed was om rekening te houden met een mogelijk bestaand verschil tussen de groepen in termen van competentie en intrinsieke motivatie voor het vak wiskunde, levert dit ook veel speculaties op. Bijvoorbeeld: "Zou het kleine, niet-significante verschil in 'Specifieke Intrinsieke Motivatie' het gevolg zijn van het middelmatige, niet-significante verschil in 'Algemene Intrinsieke Motivatie', of heeft dit geen rol gespeeld?". Dit soort vragen zouden kunnen worden voorkomen door de competentie en intrinsieke motivatie van de gehele groep leerlingen in kaart te brengen vóórdat ze in twee groepen worden gesplitst. Op basis van die resultaten kunnen er vervolgens twee groepen worden gemaakt, die qua competentie en intrinsieke motivatie voor wiskunde gelijkwaardig zijn aan elkaar. Op deze manier zouden mogelijke verstorende variabelen worden geminimaliseerd, waardoor de interpretatie van de resultaten duidelijker en betrouwbaarder wordt.

Een laatste beperking van dit onderzoek is de onderzochte doelgroep. De onderzochte doelgroep is te specifiek om de onderzoeksvraag mee te kunnen beantwoorden. Immers, 5VWO wiskunde D leerlingen zijn geen goede afspiegeling van de gehele populatie middelbare scholieren. De resultaten en conclusie moeten daarom ook geïnterpreteerd worden bij de populatie '5VWO wiskunde D leerlingen'. Het is namelijk goed mogelijk dat de resultaten bij andere doelgroepen zouden verschillen. Wiskunde D leerlingen hebben vrijwillig gekozen voor een extra wiskunde vak en hebben daarmee logischerwijs al een sterke interesse in wiskunde en mogelijk minder interesse in alfa-vakken zoals geschiedenis of het interpreteren van teksten. Het zou dus zomaar kunnen dat bij wiskunde A of wiskunde C leerlingen, die vaak meer affiniteit met alfa-vakken hebben, de resultaten anders uitvallen en er wel significante verschillen worden gevonden. Om generaliseerbaardere conclusies te kunnen trekken, is het voor vervolgonderzoek aan te bevelen een breder scala aan doelgroepen te includeren. Deze doelgroepen kunnen eventueel afzonderlijk worden onderzocht, zodat er per doelgroep specifieke conclusies getrokken kunnen worden, waardoor docenten hun onderwijsmethoden beter kunnen afstemmen op de doelgroep waar ze mee te maken hebben.

## 6.2 Implicaties voor de lespraktijk

Dit onderzoek heeft niet kunnen aantonen dat het gebruik van primaire historische bronnen bij het leren van wiskunde door middel van geschiedenis de intrinsieke motivatie direct meer verhoogt of verlaagt dan het niet gebruiken ervan. Deze bevinding is echter ook waardevol voor de lespraktijk. Docenten weten nu dat het gebruik van primaire bronnen niet vermeden hoeft te worden uit angst dat ze te moeilijk of onaantrekkelijk zijn voor leerlingen. Evenzo hoeven ze primaire bronnen niet noodzakelijk in te zetten met de verwachting dat deze de intrinsieke motivatie van leerlingen significant zullen verhogen, omdat vergelijkbare motivatie bereikt kan worden zonder primaire bronnen.

Wat wel is aangetoond is dat het gebruik van primaire historische bronnen meer bijdraagt aan het ontwikkelen van een positievere kijk van leerlingen op wiskunde als wetenschap dan het niet gebruiken ervan. De menselijke kant van wiskunde is voor leerlingen door het gebruik van primaire bronnen beter zichtbaar geworden en de waardering voor (de ontwikkeling van) het vak is meer aan de orde dan bij de groep die zonder primaire bronnen hebben gewerkt. Het ontwikkelen van die positievere kijk is iets wat als docent zijnde zeker goed is om aandacht aan te besteden, gezien het beeld van veel leerlingen over wiskunde over het algemeen niet heel positief is. Ze zien het bijvoorbeeld als een niet-creatief vak waarbij alleen maar regeltjes moeten worden opgevolgd. Om dat beeld enigszins te veranderen kan het gebruiken van primaire bronnen, meer dan het niet gebruiken ervan, een goede aanpak zijn. Uiteindelijk zou dit zelfs, via die positievere kijk op wiskunde, kunnen leiden tot een hogere intrinsieke motivatie voor het vak.

Docenten moeten zelf een afweging maken óf ze geschiedenis gaan gebruiken en zo ja, op welke manier. Dit hangt af van de leerdoelen die ze voor hun leerlingen voor ogen hebben. Het leren van wiskunde met behulp van geschiedenis kan met of zonder primaire bronnen gebeuren. Wel verschillen deze methodes in hoe leerlingen wiskunde leren. Bij primaire bronnen gaat het met name om het begrijpen en doorgronden van wiskundige teksten met haar bijbehorende afleidingen en notaties. Deze vorm van met wiskunde bezig zijn zal minder snel naar voren komen in een les waarbij geen primaire bronnen worden gebruikt: hierbij ligt vaak de nadruk op zelf wiskunde doen. Bij de keuze tussen primaire bronnen gebruiken of niet moeten docenten dus ook bepalen hoe ze willen dat leerlingen met wiskunde bezig gaan. Zeker is dat primaire bronnen in ieder geval een mooie gelegenheid bieden om eens af te wijken van hoe normaal gesproken wiskunde wordt (aan)geleerd.

# Referenties


Abosalem, Y. (2015). Khalifa University students' attitudes towards mathematics in the light of variables such as gender, nationality, mathematics scores and the course they are attending. *Education Journal*, *4*(3), 123–131.

Afari, E. (2013). Examining the factorial validity of the attitudes towards mathematics inventory (ATMI) in the United Arab Emirates: Confirmatory factor analysis.

Allen, I. E., & Seaman, C. A. (2007). Likert scales and data analyses. *Quality progress*, *40*(7), 64–65.

Arthur, Y. D., Appiah, S. K., Amo-Asante, K., & Asare, B. (2022). Modeling Student's Interest in Mathematics: Role of History of Mathematics, Peer-Assisted Learning, and Student's Perception. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *18*(10).

Barnett, J. (2016). Monsters in the mathematics classroom: Learning analysis through the works of Gaston Darboux. *History and Pedagogy of Mathematics*.

Barnett, J. H., Lodder, J., & Pengelley, D. (2014). The pedagogy of primary historical sources in mathematics: Classroom practice meets theoretical frameworks. *Science & Education*, *23*, 7–27.

Berlinghoff, F. Q., W. P. Gouvêa. (2016). *Wortels van de wiskunde: een historisch overzicht voor leraren en anderen*. Epsilon-uitgaven.

Boone Jr, H. N., & Boone, D. A. (2012). Analyzing likert data. *The Journal of extension*, *50*(2), 48.

Bos, R. (2020). Blok: Geschiedenis van Wiskunde.

Columb, M., & Atkinson, M. (2016). Statistical analysis: sample size and power estimations. *Bja Education*, *16*(5), 159–161.

Doz, D. (2021). Using the History of Mathematics as a Motivational Factor in Teaching Math. , , 470.

Drijvers, P., van Streun, A., & Zwaneveld, B. (2021). *Handboek wiskundedidactiek*. Epsilon-uitgaven.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the learning of mathematics*, *11*(2), 3–6.

Fiorella, L., Yoon, S. Y., Atit, K., Power, J. R., Panther, G., Sorby, S., Uttal, D. H., & Veurink, N. (2021). Validation of the Mathematics Motivation Questionnaire (MMQ) for secondary school students. *International Journal of STEM Education*, *8*, 1–14.

Freudenthal, H. (2005). *Revisiting mathematics education: China lectures* (Deel 9). Springer Science & Business Media.

Fried, M. N., Guillemette, D., & Jahnke, H. N. (2016). Theoretical and/or conceptual frameworks for integrating history in mathematics education. *History and Pedagogy of Mathematics*.

Fried, M. N., & Jahnke, H. N. (2015). Otto Toeplitz's 1927 paper on the genetic method in the teaching of mathematics. *Science in Context*, *28*(2), 285–295.

Ghasemi, A., & Zahediasl, S. (2012). Normality tests for statistical analysis: a guide for non-statisticians. *International journal of endocrinology and metabolism*, *10*(2), 486.

Goodhue, D. L., & Loiacono, E. T. (2002). Randomizing survey question order vs. grouping questions by construct: An empirical test of the impact on apparent reliabilities and links to related constructs. *Proceedings of the 35th annual Hawaii international conference on system sciences*, 3456–3465.

Gulikers, I., & Blom, K. (2001). A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational studies in mathematics*, *47*, 223–258.

Hornstra, L., Hornstra, T., Weijers, D., Veen, H., van der Veen, I., Peetsma, T., Peetsma, T., Utrecht, U., van Amsterdam, U., (Amsterdam), K. I., e.a. (2016). *Motiverend lesgeven:*

*handleiding voor docenten*. Universiteit Utrecht, Kohnstamm Instituut en Universiteit van Amsterdam. https://books.google.nl/books?id=7lt5zgEACAAJ

Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., El Idrissi, A., da Silva, C. M. S., & Weeks, C. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In *History in mathematics education: the ICMI study* (pp. 291–328). Springer.

Jankvist, U. T. (2009a). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational studies in Mathematics*, *71*, 235–261.

Jankvist, U. T. (2009b). Using history as a 'goal' in mathematics education.

Jankvist, U. T. (2013). On the use of primary sources in the teaching and learning of mathematics. In *International handbook of research in history, philosophy and science teaching* (pp. 873–908). Springer.

Joshi, A., Kale, S., Chandel, S., & Pal, D. K. (2015). Likert scale: Explored and explained. *British journal of applied science & technology*, *7*(4), 396–403.

Kapofu, L. K., & Kapofu, W. (2020). "This Maths Is Better than That Maths--Exploring Learner Perceptions on the Integration of History of Mathematics in Teaching the Theorem of Pythagoras: A Case Study. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(3).

Kim, T. K., & Park, J. H. (2019). More about the basic assumptions of t-test: normality and sample size. *Korean journal of anesthesiology*, *72*(4), 331–335.

Kjeldsen, T. H., & Blomhøj, M. (2012). Beyond motivation: history as a method for learning meta-discursive rules in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *80*, 327–349.

Kloosterman, P. (2002). Beliefs about mathematics and mathematics learning in the secondary school: Measurement and implications for motivation. *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?*, 247–269.

Leech, N. L., Barrett, K. C., & Morgan, G. A. (2014). *IBM SPSS for intermediate statistics: Use and interpretation*. Routledge.

Liljedahl, P. (2021). *Building thinking classrooms in mathematics*. Corwin Press Inc.

Lim, S. Y., & Chapman, E. (2015). Effects of using history as a tool to teach mathematics on students' attitudes, anxiety, motivation and achievement in grade 11 classrooms. *Educational studies in mathematics*, *90*, 189–212.

Marzano, W., R. Miedema. (2018). *Leren in vijf dimensies*. Koninklijke van Gorcum.

Massa-Esteve, M. R. (2023). The use of original sources in the classroom for learning mathematics.

Mazana, Y. M., Suero Montero, C., & Olifage, C. R. (2019). Investigating students' attitude towards learning mathematics.

Mishra, P., Pandey, C. M., Singh, U., Gupta, A., Sahu, C., & Keshri, A. (2019). Descriptive statistics and normality tests for statistical data. *Annals of cardiac anaesthesia*, *22*(1), 67–72.

Monteiro, V., Mata, L., & Peixoto, F. (2015). Intrinsic motivation inventory: Psychometric properties in the context of first language and mathematics learning. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, *28*, 434–443.

Noordhoff Uitgevers. (n.d.). *Moderne Wiskunde*.

OECD. (2017). *PISA 2015 Results (Volume III)*. https://doi.org/https://doi.org/https://doi.org/10.1787/9789264273856-en

Panasuk, R. M., & Horton, L. B. (2012). Integrating history of mathematics into curriculum: What are the chances and constraints? *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *7*(1), 3–20.

Pedersen, I. F., & Haavold, P. Ø. (2023). Students' mathematical beliefs and motivation in the context of inquiry-based mathematics teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *54*(8), 1649–1663.

Peeters, W. (2015). Motivatie meten: 3 vragenlijsten (2018) [https://vernieuwenderwijs.nl/motivatie-meten-2-vragenlijsten/ [Geraadpleegd op: (10-06-2023)]].

Pythagoras, R. (2016). *Pythagoras Archief* [Geraadpleegd op 16-06-2024]. https://www.pyth.eu/pythagoras-archief

Rojo Robas, V., Madariaga, J. M., & Villarroel, J. D. (2020). Secondary education students' beliefs about mathematics and their repercussions on motivation. *Mathematics*, *8*(3), 368.

Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). Intrinsic and extrinsic motivations: Classic definitions and new directions. *Contemporary educational psychology*, *25*(1), 54–67.

Salifu, A. S., & Bakari, A. (2022). Exploring the Relationship Between Students' Perception, Interest and Mathematics Achievement. *Mediterranean Journal of Social & Behavioral Research*, *6*(1), 13–20.

Sauro, J. (2015). 5 Things to Know about Likert Scales [https://measuringu.com/likert-scales/ [Geraadpleegd op: 21-6-2024]].

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for research in mathematics education*, *20*(4), 338–355.

Swaen, M. (2015). De Ontcijfering van het lineair B. *Pythagoras*, *5*.

Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sa, C. C., Isoda, M., Lit, C.-K., Niss, M., de Carvalho, J. P., Rodriguez, M., & Siu, M.-K. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 201–240). Springer.

Uitgeversgroep Noordhoff. (n.d.). *Getal en Ruimte*. Noordhoff Uitgevers.

Van den Boogaart, D., & Daems, J. (2015). De Ontcijfering van het lineair B. *Pythagoras*, *5*.

Van den Broeck, A., Vansteenkiste, M., De Witte, H., Lens, W., & Andriessen, M. (2009). De Zelf-Determinatie Theorie: kwalitatief goed motiveren op de werkvloer. *Gedrag & Organisatie*, *22*(4).

van der Donk, C., & van Lanen, B. (2020). *Praktijkonderzoek in de school*. Coutinho.

van Ast, M., de Loor, O., & Spijkerboer, L. (2021). *Effectief leren, de docent als regisseur*. Noordhoff Uitgevers.

van Maanen, J. (1997). Frans van Schooten Jr. *Pythagoras*, *5*.

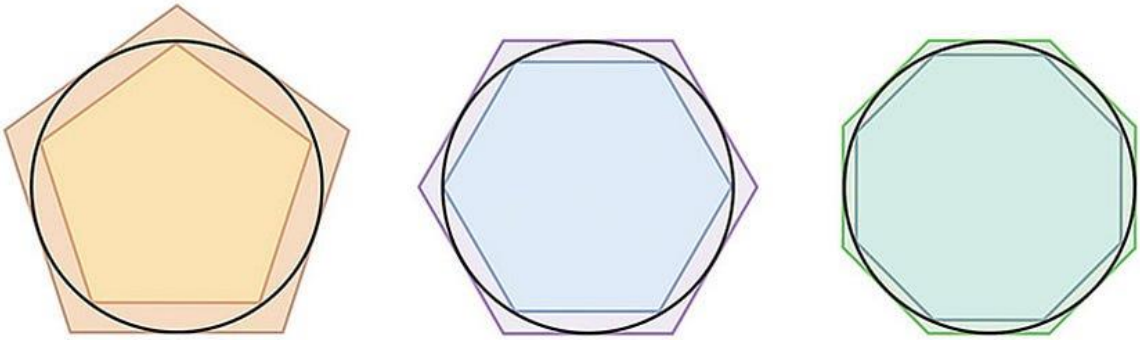
Wu, H., & Leung, S.-O. (2017). Can Likert scales be treated as interval scales?—A simulation study. *Journal of social service research*, *43*(4), 527–532.

# 7 Bijlage A1

# Werkblad A: Archimedes' benadering van $\pi$

Al voordat Archimedes (287-212 v. Chr.) leefde observeerde men dat de verhouding tussen de omtrek en de diameter van een cirkel ($\boldsymbol{\pi}$) constant is. Archimedes was de eerste (van wie we het weten) die de grootte van deze verhouding nauwkeurig wist te benaderen. In tegenstelling tot zijn voorgangers deed hij dit niet door te meten aan een cirkel. Archimedes deed dit op een theoretische manier, inclusief wiskundig bewijs. Aan de hand van de vertaalde originele oude tekst en dit werkblad ga je leren hoe Archimedes aan zijn benadering van $\boldsymbol{\pi}$ kwam.

Het bewijs komt neer op het volgende idee. Een cirkel wordt *in*geschreven door een regelmatige veelhoek en *om*geschreven door een regelmatige veelhoek, zie figuur 1.



*Figuur 1: Schets ter illustratie van de methode van het inschrijven en omschrijven met regelmatige veelhoeken.*

De verhouding tussen de omtrek van de ingeschreven veelhoek en de diameter van de cirkel geeft een *onder*grens van $\boldsymbol{\pi}$. De verhouding tussen de omtrek van de omgeschreven veelhoek en de diameter van de cirkel geeft een *boven*grens van $\boldsymbol{\pi}$. Dit principe kan worden weergegeven door de vergelijking:

$$\frac{\textit{omtrek ingeschreven veelhoek}}{\textit{diameter cirkel}} < \boldsymbol{\pi} < \frac{\textit{omtrek omgeschreven veelhoek}}{\textit{diameter cirkel}} \qquad \textbf{(1)}$$

Hoe meer zijden de regelmatige veelhoek heeft, hoe beter de omtrek van die veelhoek de omtrek van de cirkel benadert, zie figuur 1. De onder- en bovengrens komen hiermee steeds dichter bij de daadwerkelijke waarde van $\boldsymbol{\pi}$ te liggen. Als het ware wordt $\boldsymbol{\pi}$ steeds meer ingesloten door de steeds nauwkeuriger wordende onder- en bovengrens.

Dit werkblad bestaat uit een aantal fases. In fase 1, de inleidende fase, zul je met de huidige wiskundige middelen die beschikbaar zijn (zoals de goniometrische functies sinus, cosinus en tangens) een onder- en bovengrens voor $\boldsymbol{\pi}$ vinden. In fase 2 en 3 zul je de oude vertaalde tekst gebruiken en doorgronden om te leren hoe Archimedes in zijn tijd met heel beperkte middelen toch een zeer nauwkeurige benadering van $\boldsymbol{\pi}$ heeft gevonden.

## Fase 1: goniometrische functies gebruiken

Met de vergevorderde wiskundige kennis en 'hulpmiddelen' die we vandaag de dag tot onze beschikking hebben is het benaderen van $\boldsymbol{\pi}$ met in- en omgeschreven veelhoeken goed te doen. Zo kunnen de goniometrische functies (sinus, cosinus en tangens) gebruikt worden bij deze benadering.

*Opdracht 1a*

Stel je voor dat we een cirkel met diameter = 1 en haar *in*geschreven regelmatige achthoek beschouwen. Wat is op basis van deze ingeschreven regelmatige achthoek een ondergrens van $\boldsymbol{\pi}$? Rond af op 5 decimalen.

Tip: maak een schets in figuur 1.

*Opdracht 1b*
We beschouwen nu bij dezelfde cirkel haar *om*geschreven regelmatige achthoek. Wat is op basis van deze omgeschreven regelmatige achthoek een bovengrens van $\boldsymbol{\pi}$? Rond af op 5 decimalen.

## Fase 2: Archimedes' bewijs voor de bovengrens

Lees propositie 3 (alleen de schuingedrukte zin) uit de oude bron. *Propositie* is een ander woord voor *stelling.*

In het resterende deel van dit werkblad ga je Archimedes' bewijs voor propositie 3 doorgronden. In deze fase zul je leren hoe Archimedes aan de *boven*grens $3\frac{1}{7}$ van $\boldsymbol{\pi}$ kwam. Vóórdat je in de bron duikt is goed om je bewust te zijn van in hoeverre de Griekse wiskunde in Archimedes' tijd ontwikkeld was.

In Archimedes' tijd waren de goniometrische functies sinus, tangens en cosinus nog niet ontdekt en kon hij deze dus niet gebruiken om lengtes van driehoekszijden te berekenen. Wel had Archimedes weet van een aantal meetkundige stellingen zoals de stelling van Pythagoras, die zo'n 300 jaar vóór Archimedes was uitgevonden. Naast en mogelijk dóór deze stelling waren bij Archimedes ook drie speciale driehoeken bekend:

- De 60°-60°-60°-driehoek (gelijkzijdige driehoek), waarbij tussen de zijdes uiteraard de verhouding $1:1:1$ geldt.
- De 45°-45°-90°-driehoek (ook wel de gelijkbenige rechthoekige driehoek), waarbij tussen de zijdes de verhouding $1:1:\sqrt{2}$ geldt.
- De 30°-60°-90°-driehoek (eigenlijk de helft van een gelijkzijdige driehoek), waarbij tussen de zijdes de verhouding $1:2:\sqrt{3}$ geldt.

*Overkoepelende opgave (is op dit moment nog niet uit te voeren)*
De stelling van Pythagoras wordt veelvuldig gebruikt voor het bewijzen van propositie 3. Wanneer je stukken tekst leest, markeer dan in de oude bron telkens díe regels waar de stelling van Pythagoras rechtstreeks wordt toegepast. Hou deze overkoepelende opgave dus de rest van dit werkblad in gedachten.

Lees het blauwe aangegeven deel tekst. In dit begin van het bewijs stelt Archimedes zijn eerste regelmatige veelhoek op. De helft van een zijde van die veelhoek (lijnstuk AC) is te zien in de tekening op blz. 94.

*Opdracht 2a*
Met wat voor soort omgeschreven regelmatige veelhoek begint Archimedes zijn bewijs en hoe zie je dat?

*Opdracht 2b*
Wat is waarschijnlijk de reden dat Archimedes juist deze veelhoek als startpunt koos?

In de oude vertaalde bron komen veel vierkante haken voor, zo ook in het blauwe aangegeven deel tekst waar bijvoorbeeld tussen haken staat dat $OA : AC$ gelijk is aan $\sqrt{3} : 1$. De tekst binnen dit soort vierkante haken komen niet van Archimedes, maar van een andere geroemde oud-Griekse wiskundige genaamd Eutocius (480 – 520 n. Chr.). Hij heeft deze toegevoegd ten behoeve van de leesbaarheid. Archimedes zelf schreef namelijk maar weinig tussenstappen op.

Omdat men in Archimedes' tijd nog niet goed wist hoe met wortels moest worden gerekend, werden wortels door Archimedes benaderd met een breuk. Hiervoor gebruikte hij een tijdrovend algoritme. Aan dit algoritme zullen we geen aandacht besteden in dit werkblad.

*Opdracht 2c*
De breuk $265 : 153$ is een onderschatting van de werkelijke verhouding $\sqrt{3} : 1$ tussen $OA$ en $AC$, maar benadert de verhouding behoorlijk nauwkeurig. Tot en met de hoeveelste decimaal komt deze breuk overeen met de werkelijke verhouding tussen $OA$ en $AC$?

Wat je verder wellicht opvalt is dat Archimedes tot nu toe nog helemaal geen getalswaarde heeft gegeven aan bepaalde 'objecten', zoals de grootte van een hoek of de lengte van een lijnstuk (bijv. de diameter van de cirkel). Het is tegenwoordig misschien lastig voor te stellen, maar in de Oudheid werd dit in de Griekse theoretische wiskunde niet gedaan. Griekse meetkundigen kenden niet rechtstreeks getalswaarden toe aan de objecten die zij bestudeerden:

*"Een lijnstuk was een lijnstuk. Er bestaan gelijke lijnstukken, langere en kortere lijnstukken en een lijnstuk kan gelijk zijn aan twee andere lijnstukken samen, maar op geen enkel moment sprak een Griekse wiskundige over de lengte van een lijnstuk." ('Wortels van de Wiskunde', door Berlinghoff & Gouvêa, 2019)*

In het dagelijkse praktische leven werd overigens net zo goed met lengte gerekend en gemeten als elders, maar in de theoretische wiskunde werd dit dus vermeden. Griekse wiskundigen probeerden alles vanuit een *relatief* oogpunt te zien. *Verhoudingen* speelden dus in de theoretische Griekse wiskunde een zeer belangrijke rol. Dit is waarom Archimedes bijv. schrijft dat hoek $AOC$ één derde is van een rechte hoek, in plaats van 30°. En dat hij bijv. schrijft dat $OA : AC$ gelijk is aan $\sqrt{3} : 1$, in plaats van dat hij lijnstuk AC lengte 1 geeft en lijnstuk $OA$ lengte $\sqrt{3}$. Op deze manier benadert Archimedes $\boldsymbol{\pi}$ zonder ook maar één lijnstuk of hoek een getal te geven. Hij gebruikt alleen maar verhoudingen, die wel een getalswaarde kregen.

Met de omgeschreven regelmatige zeshoek zou Archimedes in principe al een bovengrens van $\boldsymbol{\pi}$ kunnen geven. Immers, de verhouding $OA : AC$, dat is de straal van de cirkel ten opzichte van de helft van een zijde van de veelhoek, is bekend. Vanuit deze verhouding kan redelijk eenvoudig de verhouding $\frac{omtrek\ regelmatige\ zeshoek}{diameter\ cirkel}$ worden berekend, die een bovengrens van $\boldsymbol{\pi}$ geeft. Echter, Archimedes was op zoek naar een nauwkeurigere bovengrens en verdubbelt daarom telkens het aantal zijden van de veelhoek, zodat die veelhoek steeds meer op de cirkel gaat lijken. Dit doet hij eerst door hoek $AOC$ door midden te delen, waardoor zijde $AD$ ontstaat. Zijde $AD$ is de helft van een zijde van de omgeschreven regelmatige twaalfhoek.

Lees aan de hand van opdrachten 2d en 2e het met rood aangegeven stuk tekst.

*Opdracht 2d*
Archimedes stelt dat $CO : OA$ gelijk is aan $CD : DA$. Deze gelijkheid komt voort uit een stelling die de oud-Griekse wiskundige Euclides (± 300 v. Chr.) had opgeschreven in zijn boek 'de Elementen'. De stelling luidt:

*'Als een lijnstuk een hoek van een driehoek doormidden deelt, deelt dit lijnstuk de overstaande zijde in stukken die zich verhouden als de zijden die de hoek insluiten.'*

Deze stelling wordt de ________________-stelling genoemd.

Vul in het vak de wiskundige naam in voor een lijnstuk dat een hoek precies doormidden deelt.

Vervolgens leidt Archimedes de ongelijkheid $OA : AD > 571 : 153$ af. Hij schrijft hierbij maar weinig tussenstappen op.

*Opdracht 2e*
Laat zien hoe Archimedes tot deze ongelijkheid is gekomen. Vul daartoe hieronder eerst in de lege vakjes de juiste getallen of letters in. De laatste stappen om tot deze ongelijkheid te komen moet je zelf zetten.

$$\frac{CO}{OA} = \frac{CD}{DA}$$

$$\frac{CO}{OA} + 1 = \frac{CD}{DA} + \boxed{\phantom{0}}$$

$$\frac{CO}{OA} + \boxed{\phantom{0}} = \frac{CD}{DA} + \boxed{\phantom{0}}$$

$$\frac{CO + OA}{OA} = \frac{CD + \boxed{\phantom{0}}}{DA}$$

$$\frac{CO + OA}{OA} = \frac{\boxed{\phantom{0}}}{DA}$$

$$\frac{CO + OA}{OA} \cdot \boxed{\phantom{0}} = \frac{\boxed{\phantom{0}}}{DA} \cdot \boxed{\phantom{0}}$$

$$\frac{CO + OA}{CA} = \frac{OA}{AD}$$

Lees het resterende rode deel. In dit laatste stuk rode tekst komt Archimedes tot een benadering (een kleine onderschatting) voor de verhouding $OD : DA$.

Scan het met geel aangegeven stuk tekst. Hou de overkoepelende opgave hierbij in gedachten. In dit stuk wordt het proces dat beschreven was in het rode deel tekst drie keer herhaald. Eerst wordt de hoek AOD in tweeën gedeeld, oftewel er wordt weer een nieuwe veelhoek gecreëerd met twee keer zo veel zijdes als de vorige veelhoek. Ook van deze gecreëerde veelhoek wordt het aantal zijdes verdubbeld en daarna (zie 'fourthly') wordt dit proces een laatste keer gedaan. Archimedes schrijft echter steeds minder tussenstappen op. Merk op dat het doel van het herhalende proces is om telkens een tweetal verhoudingen te berekenen, namelijk (vanuit punt O gezien) de verhoudingen:

1. $straal\ cirkel : helft\ zijde\ veelhoek$ (bijv. $OA : AE$). Zoals eerder vermeld kan met deze verhouding een bovengrens van $\boldsymbol{\pi}$ worden gevonden voor die betreffende veelhoek.
2. $lijnstuk\ middelpunt\ cirkel\ naar\ hoekpunt\ veelhoek : helft\ zijde\ veelhoek$ (bijv. $OE : EA$).

*Opdracht 2f*
Met welk doel berekende Archimedes deze tweede verhouding? Tip: zoek in het gele deel tekst op waar de benadering voor $OD : DA$ wordt gebruikt.

In de laatste regel van het met geel aangegeven deel staat een belangrijk resultaat van al het harde werk: namelijk (een benadering van) de verhouding tussen de straal van de cirkel (OA) en de helft van een zijde van de laatste omgeschreven veelhoek (AG).

*Opdracht 2g*

Met wat voor soort omgeschreven regelmatige veelhoek was Archimedes blijkbaar tevreden genoeg om hiermee een bovengrens van $\boldsymbol{\pi}$ te geven?

| |
|---|
| |

Zoom nog eens uit van wat je net allemaal hebt gelezen, gescand en berekend en kijk nog eens naar figuur 1 op dit werkblad. Deze figuur wordt online veel gebruikt om Archimedes' idee voor het benaderen van $\boldsymbol{\pi}$ intuïtief logisch te maken, maar komt strikt gezien niet overeen met Archimedes zijn werkwijze.

*Opdracht 2h*

Geef twee redenen waarom figuur 1 niet geschikt is voor het weergeven van Archimedes' bewijs.

| |
|---|
| |

Lees het met groen aangegeven deel tekst. In dit stuk wordt een bovengrens gevonden voor de verhouding tussen de omtrek van de omgeschreven veelhoek en de diameter van de cirkel en dús ook voor $\boldsymbol{\pi}$.

*Opdracht 2i*

Er wordt gesteld dat hoek $AOG = \frac{1}{48}$ van een rechte hoek. Geef een berekening waaruit blijkt dat dit inderdaad zo is.

| |
|---|
| |

*Opdracht 2j*

Op een gegeven moment wordt er gesteld dat $\frac{AB}{omtrek\ omgeschreven\ 96\_hoek} > \frac{4673{,}5}{14688}$. Ook wordt afgeleid dat $\frac{14688}{4673{,}5} < 3\frac{1}{7}$. Hoe volgt hieruit dat $\boldsymbol{\pi} < 3\frac{1}{7}$? Schrijf zo veel mogelijk tussenstappen op.

Hint: de volgende regel bestaat:

*"Als $\frac{A}{B} > 0$ en $\frac{C}{D} > 0$, dan volgt uit $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ dat $\frac{B}{A} < \frac{D}{C}$."*

| |
|---|
| |

## Fase 3: Archimedes' bewijs voor de ondergrens

Nu je iets meer gewend bent geraakt aan de wiskundige stijl van Archimedes, bekijken we als laatst ook nog even in grote lijnen zijn bewijs voor de *onder*grens van $\boldsymbol{\pi}$, namelijk $3\frac{10}{71}$.

Lees het met paars aangegeven stuk tekst. In de vorige fase heb je gezien dat Archimedes telkens op zoek was naar de verhouding tussen de straal van de cirkel en de helft van een zijde van de veelhoek. Voor de ondergrens doet hij het anders: meer rechttoe rechtaan. Hij begint nu met een *in*geschreven zeshoek en zoekt gelijk naar de verhouding tussen de diameter en de zijde van de veelhoek. Die verhouding is $BA : BC = 2 : 1$ en schrijft hij in het paarse stuk tekst niet op, maar komt later wel terug (hij had er dus wel weet van).

Hoek $CAB$ is één derde van een rechte hoek. Hieruit concludeert Archimedes dat $AC : CB = \sqrt{3} : 1$. Hiervoor gebruikt hij impliciet een eeuwenoude meetkundige stelling die in zijn bewijs nog niet eerder is verschenen.

*Opdracht 3a*

Welke stelling wordt impliciet gebruikt bij het afleiden van de verhouding $AC : CB = \sqrt{3} : 1$.

Lees aan de hand van opgaven 3b t/m 3d het met roze aangegeven stuk tekst.

Net zoals bij de het berekenen van een bovengrens, wordt de 'verdubbelingsstrategie' ook bij het berekenen van een nauwkeurige ondergrens toegepast. Hiertoe wordt eerst hoek $BAC$ doormidden gedeeld, waardoor een zijde $BD$ van de ingeschreven twaalfhoek ontstaat.

*Opdracht 3b*

Archimedes stelt dat hoek $dAC$ gelijk is aan hoek $dBD$, maar geeft geen uitleg. Beredeneer waarom deze hoeken gelijk zijn.

Met behulp van de gelijkvormigheid tussen driehoeken $ADB$, $ACd$ en $BDd$ leidt Archimedes de gelijkheid $\frac{BA+AC}{BC} = \frac{AD}{DB}$ af. De eerste stappen: $AD : DB = BD : Dd = AC : Cd$ volgen rechtstreeks uit de gelijkvormigheid van deze driehoeken (ga dit na!).

*Opdracht 3c*

Welke stelling gebruikt Archimedes voor het vinden van de stap $AC : Cd = AB : Bd$ ?

De volgende stap is wellicht een lastige. Hiervoor moet je weten dat de volgende regel geldt:

*'Als er geldt* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *dan geldt ook* $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$*.'*

*Opdracht 3d*

Maak het bewijs van deze regel compleet door hieronder de lege vakjes in te vullen.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;\; geeft \;\; ad = \boxed{\phantom{x}}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\cdot\boxed{\phantom{x}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{\boxed{\phantom{x}}}{b+d}=\frac{ab+\boxed{\phantom{x}}}{b(b+d)}=\frac{\boxed{\phantom{x}}}{b(b+d)}+\frac{\boxed{\phantom{x}}}{b(b+d)}=\frac{\boxed{\phantom{x}}}{b+d}+\frac{\boxed{\phantom{x}}}{b(b+d)}=\frac{\boxed{\phantom{x}}}{b+d}+\frac{\boxed{\phantom{x}}}{b+d}=\frac{a+c}{b+d}$$

Nu je deze regel hebt aangetoond is het duidelijk dat $\frac{AC}{Cd}=\frac{AB}{Bd}=\frac{AC+AB}{Cd+Bd}$. De laatste twee stappen voor het aantonen van de gelijkheid $\frac{BA+AC}{BC}=\frac{AD}{DB}$ zijn vrij rechttoe-rechtaan.

Lees het resterende roze deel. In dit laatste stuk roze tekst komt Archimedes tot een benadering (een kleine overschatting) voor de verhouding $AB : BD$, de diameter van de cirkel ten opzichte van een zijde van de twaalfhoek.

Scan het met oranje aangegeven stuk tekst. Hou de overkoepelende opgave hierbij in gedachten. In dit stuk wordt het proces dat beschreven was in het roze deel tekst drie keer herhaald. Hierbij vindt Archimedes telkens, na elke verdubbeling van het aantal zijden van de ingeschreven regelmatige veelhoek, een benadering voor de verhouding tussen de diameter van de cirkel en de lengte van de 'nieuwe' zijde. Hoewel Archimedes steeds minder stappen opschrijft, zijn de stappen die hij zet zijn totaal overeenkomstig met wat je in de vorige opgaven betreffende het roze deel hebt gezien.

In de laatste regel van het met oranje aangegeven deel staat een belangrijk resultaat van al het harde werk: namelijk (een benadering van) de verhouding tussen de diameter van de cirkel $AB$ en een zijde van de *in*geschreven regelmatige 96-hoek $BG$.

Lees het met bruin aangegeven stuk tekst.

*Opdracht 3e*

Er wordt geconcludeerd dat $\frac{omtrek\ ingeschreven\ 96\_hoek}{AB}>\frac{6336}{2017{,}25}$. Hoe volgt hieruit dat $\boldsymbol{\pi}>3\frac{10}{71}$?

Merk op dat Archimedes met de breuken $\frac{6336}{2017{,}25}$ en $\frac{14688}{4673{,}5}$ eigenlijk een nog nauwkeurigere ondergrens respectievelijk bovengrens te pakken had. Echter, deze breuken zijn onhandig. Zeker in Archimedes' tijd. Daarom besloot Archimedes de ondergrens $3\frac{10}{71}$ en bovengrens $3\frac{1}{7}$ te hanteren. Conclusie: $\boldsymbol{3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}}$

Zo zie je maar: met alle 'wiskundige tools' die we vandaag de dag tot onze beschikking hebben lijkt het benaderen van $\boldsymbol{\pi}$ vrij eenvoudig. Dat heb je in fase 1 gezien, waarin je gebruik kon maken van goniometrische functies. Ontdekking van die tools heeft echter eeuwenlang geduurd. Wiskunde werd opgebouwd vanuit het niets. Met zeer beperkte middelen werd $\boldsymbol{\pi}$ door Archimedes benaderd.

Wie niet sterk is moet slim zijn. ☺
Bedankt voor het meedoen met het onderzoek!

**EINDE**

# 8 Bijlage A2

Hence

$$AR \,.\, RA' + RA^2 > AM \,.\, MA' + AM \,.\, A'K,$$

or
$$AA' \,.\, AR > AM \,.\, MK$$
$$> HM \,.\, A'M, \text{ by (1).}$$

Therefore $AA' : A'M > HM : AR,$

or $AB^2 : BM^2 > HM : AR,$

i.e. $AR^2 : BM^2 > HM : 2AR$, since $AB^2 = 2AR^2$,

$> HM : CF.$

Thus, since $AR = CD$, or $CE$,

(circle on diam. $EE'$) : (circle on diam. $BB'$) $> HM : CF$.

It follows that

(the cone $FEE'$) $>$ (the cone $HBB'$),

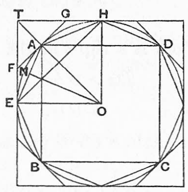
and therefore the hemisphere $DEE'$ is greater in volume than the segment $ABB'$.

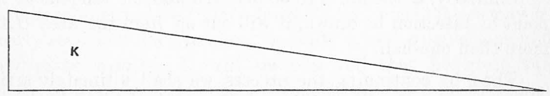
# MEASUREMENT OF A CIRCLE.

### Proposition 1.

*The area of any circle is equal to a right-angled triangle in which one of the sides about the right angle is equal to the radius, and the other to the circumference, of the circle.*

Let $ABCD$ be the given circle, $K$ the triangle described.




Then, if the circle is not equal to $K$, it must be either greater or less.

I. If possible, let the circle be greater than $K$.

Inscribe a square $ABCD$, bisect the arcs $AB$, $BC$, $CD$, $DA$, then bisect (if necessary) the halves, and so on, until the sides of the inscribed polygon whose angular points are the points of division subtend segments whose sum is less than the excess of the area of the circle over $K$.

Thus the area of the polygon is greater than $K$.

Let $AE$ be any side of it, and $ON$ the perpendicular on $AE$ from the centre $O$.

Then $ON$ is less than the radius of the circle and therefore less than one of the sides about the right angle in $K$. Also the perimeter of the polygon is less than the circumference of the circle, i.e. less than the other side about the right angle in $K$.

Therefore the area of the polygon is less than $K$; which is inconsistent with the hypothesis.

Thus the area of the circle is not greater than $K$.

II. If possible, let the circle be less than $K$.

Circumscribe a square, and let two adjacent sides, touching the circle in $E$, $H$, meet in $T$. Bisect the arcs between adjacent points of contact and draw the tangents at the points of bisection. Let $A$ be the middle point of the arc $EH$, and $FAG$ the tangent at $A$.

Then the angle $TAG$ is a right angle.

Therefore $$TG > GA$$ $$> GH.$$

It follows that the triangle $FTG$ is greater than half the area $TEAH$.

Similarly, if the arc $AH$ be bisected and the tangent at the point of bisection be drawn, it will cut off from the area $GAH$ more than one-half.

Thus, by continuing the process, we shall ultimately arrive at a circumscribed polygon such that the spaces intercepted between it and the circle are together less than the excess of $K$ over the area of the circle.

Thus the area of the polygon will be less than $K$.

Now, since the perpendicular from $O$ on any side of the polygon is equal to the radius of the circle, while the perimeter of the polygon is greater than the circumference of the circle, it follows that the area of the polygon is greater than the triangle $K$; which is impossible.



Therefore the area of the circle is not less than $K$.

Since then the area of the circle is neither greater nor less than $K$, it is equal to it.

**Proposition 2.**

*The area of a circle is to the square on its diameter as* 11 *to* 14. $\pi = \frac{22}{7}$

[The text of this proposition is not satisfactory, and Archimedes cannot have placed it before Proposition 3, as the approximation depends upon the result of that proposition.]

**Proposition 3.**

*The ratio of the circumference of any circle to its diameter is less than* $3\frac{1}{7}$ *but greater than* $3\frac{10}{71}$.

[In view of the interesting questions arising out of the arithmetical content of this proposition of Archimedes, it is necessary, in reproducing it, to distinguish carefully the actual steps set out in the text as we have it from the intermediate steps (mostly supplied by Eutocius) which it is convenient to put in for the purpose of making the proof easier to follow. Accordingly all the steps not actually appearing in the text have been enclosed in square brackets, in order that it may be clearly seen how far Archimedes omits actual calculations and only gives results. It will be observed that he gives two fractional approximations to $\sqrt{3}$ (one being less and the other greater than the real value) without any explanation as to how he arrived at them; and in like manner approximations to the square roots of several large numbers which are not complete squares are merely stated. These various approximations and the machinery of Greek arithmetic in general will be found discussed in the Introduction, Chapter IV.]

I. Let $AB$ be the diameter of any circle, $O$ its centre, $AC$ the tangent at $A$; and let the angle $AOC$ be one-third of a right angle.

Then $OA : AC [= \sqrt{3} : 1] > 265 : 153$ ............ (1),

and $OC : CA [= 2 : 1] = 306 : 153$ .............. (2).

*First*, draw $OD$ bisecting the angle $AOC$ and meeting $AC$ in $D$.

Now $CO : OA = CD : DA$, [Eucl. VI. 3]

so that $[CO + OA : OA = CA : DA$, or$]$

$$CO + OA : CA = OA : AD.$$

Therefore [by (1) and (2)]

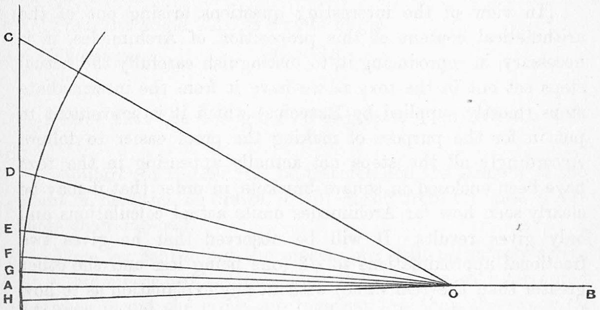
$$OA : AD > 571 : 153 \quad \text{.................} \quad (3).$$

Hence $OD^2 : AD^2 [= (OA^2 + AD^2) : AD^2$

$$> (571^2 + 153^2) : 153^2]$$

$$> 349450 : 23409,$$

so that $OD : DA > 591\frac{1}{8} : 153$ .................... (4).




*Secondly*, let $OE$ bisect the angle $AOD$, meeting $AD$ in $E$.

[Then $DO : OA = DE : EA$,

so that $DO + OA : DA = OA : AE$.]

Therefore $OA : AE [> (591\frac{1}{8} + 571) : 153$, by (3) and (4)]

$$> 1162\frac{1}{8} : 153 \quad \text{....................} \quad (5).$$



[It follows that

$$OE^2 : EA^2 > \{(1162\tfrac{1}{8})^2 + 153^2\} : 153^2$$

$$> (1350534\tfrac{33}{64} + 23409) : 23409$$

$$> 1373943\tfrac{33}{64} : 23409.]$$

Thus $OE : EA > 1172\frac{1}{8} : 153$ .................... (6).

*Thirdly*, let $OF$ bisect the angle $AOE$ and meet $AE$ in $F$.

We thus obtain the result [corresponding to (3) and (5) above] that

$$OA : AF [> (1162\tfrac{1}{8} + 1172\tfrac{1}{8}) : 153]$$

$$> 2334\tfrac{1}{4} : 153 \quad \text{....................} \quad (7).$$

[Therefore $OF^2 : FA^2 > \{(2334\frac{1}{4})^2 + 153^2\} : 153^2$

$$> 5472132\tfrac{1}{16} : 23409.]$$

Thus $OF : FA > 2339\frac{1}{4} : 153$ .................... (8).

*Fourthly*, let $OG$ bisect the angle $AOF$, meeting $AF$ in $G$.

We have then

$OA : AG [> (2334\frac{1}{4} + 2339\frac{1}{4}) : 153$, by means of (7) and (8)]

$$> 4673\tfrac{1}{2} : 153.$$

Now the angle $AOC$, which is one-third of a right angle, has been bisected four times, and it follows that

$$\angle AOG = \tfrac{1}{48} \text{ (a right angle).}$$

Make the angle $AOH$ on the other side of $OA$ equal to the angle $AOG$, and let $GA$ produced meet $OH$ in $H$.

Then $\angle GOH = \frac{1}{24}$ (a right angle).

Thus $GH$ is one side of a regular polygon of 96 sides circumscribed to the given circle.

And, since $OA : AG > 4673\frac{1}{2} : 153$,

while $AB = 2OA$, $GH = 2AG$,

it follows that

$AB$ : (perimeter of polygon of 96 sides) $[> 4673\frac{1}{2} : 153 \times 96]$

$$> 4673\tfrac{1}{2} : 14688.$$

But $$\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$$
$$\left[< 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}}\right]$$
$$< 3\tfrac{1}{7}.$$

Therefore the circumference of the circle (being less than the perimeter of the polygon) is *a fortiori* less than $3\frac{1}{7}$ times the diameter $AB$.

II. Next let $AB$ be the diameter of a circle, and let $AC$, meeting the circle in $C$, make the angle $CAB$ equal to one-third of a right angle. Join $BC$.

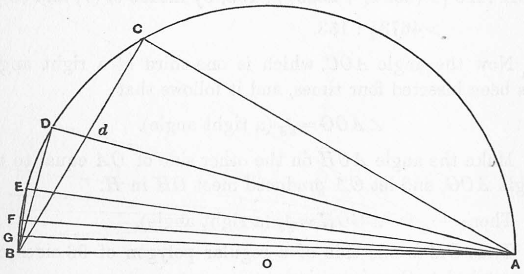
Then $$AC : CB \,[= \sqrt{3} : 1] < 1351 : 780.$$

*First*, let $AD$ bisect the angle $BAC$ and meet $BC$ in $d$ and the circle in $D$. Join $BD$.

Then $$\angle BAD = \angle dAC$$
$$= \angle dBD,$$

and the angles at $D$, $C$ are both right angles.

It follows that the triangles $ADB$, $[ACd]$, $BDd$ are similar.




Therefore $$AD : DB = BD : Dd$$
$$[= AC : Cd]$$
$$= AB : Bd \qquad \text{[Eucl. VI. 3]}$$
$$= AB + AC : Bd + Cd$$
$$= AB + AC : BC$$

or $$BA + AC : BC = AD : DB.$$



[But $$AC : CB < 1351 : 780, \text{ from above,}$$

while $$BA : BC = 2 : 1$$
$$= 1560 : 780.]$$

Therefore $$AD : DB < 2911 : 780 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

[Hence $$AB^2 : BD^2 < (2911^2 + 780^2) : 780^2$$
$$< 9082321 : 608400.]$$

Thus $$AB : BD < 3013\tfrac{3}{4} : 780 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

*Secondly*, let $AE$ bisect the angle $BAD$, meeting the circle in $E$; and let $BE$ be joined.

Then we prove, in the same way as before, that

$$AE : EB \,[= BA + AD : BD$$
$$< (3013\tfrac{3}{4} + 2911) : 780, \text{ by (1) and (2)]}$$
$$< 5924\tfrac{3}{4} : 780$$
$$< 5924\tfrac{3}{4} \times \tfrac{4}{13} : 780 \times \tfrac{4}{13}$$
$$< 1823 : 240 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

[Hence $$AB^2 : BE^2 < (1823^2 + 240^2) : 240^2$$
$$< 3380929 : 57600.]$$

Therefore $$AB : BE < 1838\tfrac{9}{11} : 240 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4).$$

*Thirdly*, let $AF$ bisect the angle $BAE$, meeting the circle in $F$.

Thus $$AF : FB \,[= BA + AE : BE$$
$$< 3661\tfrac{9}{11} : 240, \text{ by (3) and (4)]}$$
$$< 3661\tfrac{9}{11} \times \tfrac{11}{40} : 240 \times \tfrac{11}{40}$$
$$< 1007 : 66 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

[It follows that
$$AB^2 : BF^2 < (1007^2 + 66^2) : 66^2$$
$$< 1018405 : 4356.]$$

Therefore $$AB : BF < 1009\tfrac{1}{6} : 66 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(6).$$

*Fourthly*, let the angle $BAF$ be bisected by $AG$ meeting the circle in $G$.

Then $$AG : GB \,[= BA + AF : BF]$$
$$< 2016\tfrac{1}{6} : 66, \text{ by (5) and (6).}$$

[And $$AB^2 : BG^2 < \{(2016\tfrac{1}{6})^2 + 66^2\} : 66^2$$
$$< 4069284\tfrac{1}{36} : 4356.]$$

Therefore $$AB : BG < 2017\tfrac{1}{4} : 66,$$

whence $$BG : AB > 66 : 2017\tfrac{1}{4} \quad \text{.........................(7)}.$$

[Now the angle $BAG$ which is the result of the fourth bisection of the angle $BAC$, or of one-third of a right angle, is equal to one-fortyeighth of a right angle.

Thus the angle subtended by $BG$ at the centre is
$$\tfrac{1}{24} \text{ (a right angle).]}$$

Therefore $BG$ is a side of a regular inscribed polygon of 96 sides.

It follows from (7) that
$$(\text{perimeter of polygon}) : AB\ [> 96 \times 66 : 2017\tfrac{1}{4}]$$
$$> 6336 : 2017\tfrac{1}{4}.$$

And $$\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\tfrac{10}{71}.$$

Much more then is the circumference of the circle greater than $3\frac{10}{71}$ times the diameter.

Thus the ratio of the circumference to the diameter
$$< 3\tfrac{1}{7} \text{ but } > 3\tfrac{10}{71}.$$

# ON CONOIDS AND SPHEROIDS.

## Introduction*.

"ARCHIMEDES to Dositheus greeting.

In this book I have set forth and send you the proofs of the remaining theorems not included in what I sent you before, and also of some others discovered later which, though I had often tried to investigate them previously, I had failed to arrive at because I found their discovery attended with some difficulty. And this is why even the propositions themselves were not published with the rest. But afterwards, when I had studied them with greater care, I discovered what I had failed in before.

Now the remainder of the earlier theorems were propositions concerning the right-angled conoid [paraboloid of revolution]; but the discoveries which I have now added relate to an obtuse-angled conoid [hyperboloid of revolution] and to spheroidal figures, some of which I call *oblong* (παραμάκεα) and others *flat* (ἐπιπλατέα).

I. Concerning the *right-angled conoid* it was laid down that, if a section of a right-angled cone [a parabola] be made to revolve about the diameter [axis] which remains fixed and

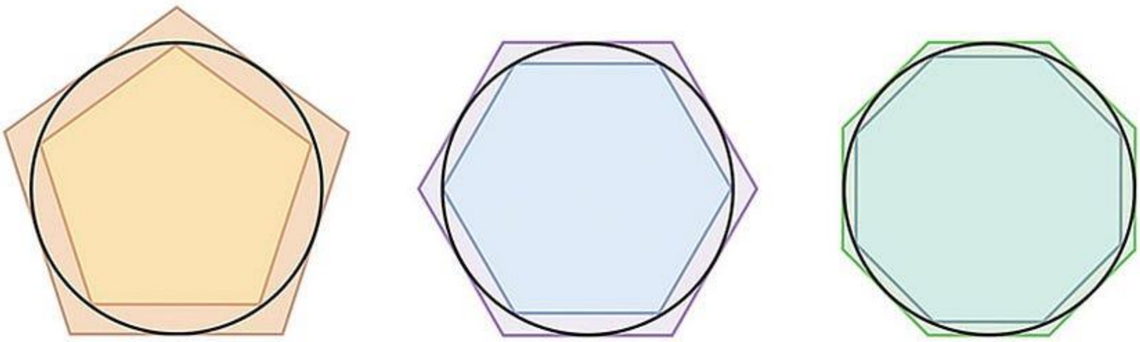
* The whole of this introductory matter, including the definitions, is translated literally from the Greek text in order that the terminology of Archimedes may be faithfully represented. When this has once been set out, nothing will be lost by returning to modern phraseology and notation. These will accordingly be employed, as usual, when we come to the actual propositions of the treatise.

# 9 Bijlage B

# Werkblad B: Archimedes' benadering van $\pi$

Al voordat Archimedes (287-212 v. Chr.) leefde observeerde men dat de verhouding tussen de omtrek en de diameter van een cirkel ($\pi$) constant is. Archimedes was de eerste (van wie we het weten) die de grootte van deze verhouding nauwkeurig wist te benaderen. In tegenstelling tot zijn voorgangers deed hij dit niet door te meten aan een cirkel. Archimedes deed dit op een theoretische manier, inclusief wiskundig bewijs. Aan de hand van dit werkblad ga je leren hoe Archimedes aan zijn benadering van $\pi$ kwam.

Het bewijs komt neer op het volgende idee. Een cirkel wordt *in*geschreven door een regelmatige veelhoek en *om*geschreven door een regelmatige veelhoek, zie figuur 1.



*Figuur 1: Schets ter illustratie van de methode van het inschrijven en omschrijven met regelmatige veelhoeken.*

De verhouding tussen de omtrek van de ingeschreven veelhoek en de diameter van de cirkel geeft een *onder*grens van $\pi$. De verhouding tussen de omtrek van de omgeschreven veelhoek en de diameter van de cirkel geeft een *boven*grens van $\pi$. Dit principe kan worden weergegeven door de vergelijking:

$$\frac{\textbf{omtrek ingeschreven veelhoek}}{\textbf{diameter cirkel}} < \pi < \frac{\textbf{omtrek omgeschreven veelhoek}}{\textbf{diameter cirkel}} \qquad \textbf{(1)}$$

Hoe meer zijden de regelmatige veelhoek heeft, hoe beter de omtrek van die veelhoek de omtrek van de cirkel benadert, zie figuur 1. De onder- en bovengrens komen hiermee steeds dichter bij de daadwerkelijke waarde van $\pi$ te liggen. Als het ware wordt $\pi$ steeds meer ingesloten door de steeds nauwkeuriger wordende onder- en bovengrens.

Dit werkblad bestaat uit een aantal fases. In elke fase verdiepen jullie je in Archimedes' methode voor het benaderen van $\pi$ met in- en omgeschreven regelmatige veelhoeken. Per fase zal je hierbij steeds preciezer Archimedes' werkwijze gaan volgen.

## Fase 1: goniometrische functies gebruiken

Met de vergevorderde wiskundige kennis en 'hulpmiddelen' die we vandaag de dag tot onze beschikking hebben is het benaderen van $\pi$ met in- en omgeschreven veelhoeken goed te doen. Zo kunnen de goniometrische functies (sinus, cosinus en tangens) gebruikt worden voor het vinden van een formule voor de omtrek van een in- en omgeschreven regelmatige veelhoek. Hiermee kan vervolgens $\pi$ benaderd worden volgens vergelijking (1).

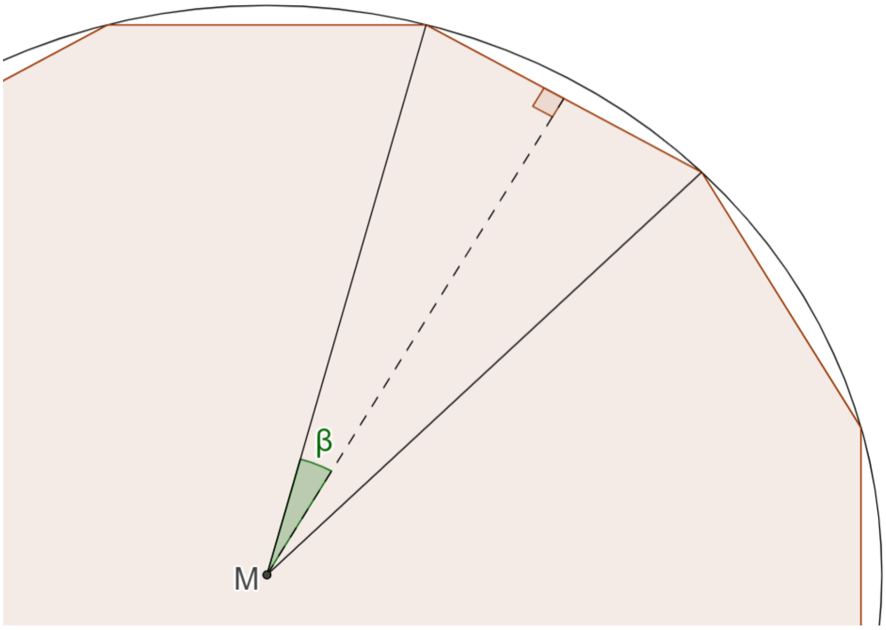
Als startpunt voor het benaderen van $\pi$ is het handig om uit te gaan van een cirkel met diameter = 1.

*Opdracht 1a*
Waarom is de aanname diameter = 1 een handige keuze?

*Opdracht 1b*

Druk de omtrek P (van: perimeter) van een regelmatige veelhoek met n zijden (vanaf nu: regelmatige n-hoek) uit in het aantal zijden n en de lengte van zo'n zijde L.

In figuur 2 zie je een gedeeltelijke schets van een ingeschreven regelmatige n-hoek. Hierbij is M het middelpunt van de cirkel en van de n-hoek.




*Figuur 2: gedeeltelijke schets ingeschreven regelmatige n-hoek*

*Opdracht 1c*

Laat zien dat de lengte L van een zijde van een regelmatige n-hoek gelijk is aan $sin\left(\frac{180}{n}\right)$. Ga uit van een cirkel met diameter = 1.

*Opdracht 1d*

Geef met behulp van opdracht 1b en 1c een benadering van $\boldsymbol{\pi}$ met een ingeschreven regelmatige 96-hoek. Rond af op 6 decimalen.

Op ongeveer dezelfde manier kan met een andere goniometrische functie ook de formule voor de omtrek van een *om*geschreven regelmatige n-hoek worden uitgedrukt in n.

*Opdracht 1e*
Druk de omtrek van een omgeschreven regelmatige n-hoek (om een cirkel met diameter = 1) uit in n. Maak eventueel een schets in figuur 1 of 2.

*Opdracht 1f*
Geef met behulp van opdracht 1e een benadering van $\boldsymbol{\pi}$ met een omgeschreven regelmatige 96-hoek. Rond af op 6 decimalen.

## Fase 2: ondergrens berekenen met beperkte middelen

In Archimedes' tijd waren de goniometrische functies sinus, tangens en cosinus nog niet ontdekt en kon hij deze dus niet gebruiken om lengtes van driehoekszijden te berekenen. Wel had Archimedes weet van de stelling van Pythagoras, die zo'n 300 jaar vóór Archimedes was uitgevonden. Naast en mogelijk dóór deze stelling waren bij Archimedes ook drie speciale driehoeken bekend, namelijk:

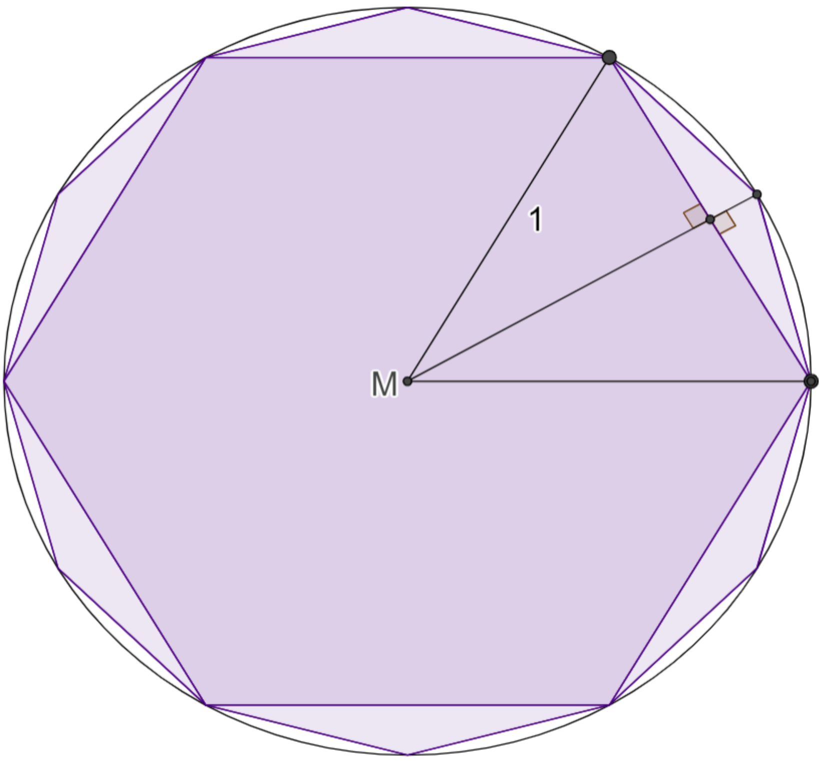
- De 60°-60°-60°-driehoek (gelijkzijdige driehoek), waarbij tussen de zijdes uiteraard de verhouding $1:1:1$ geldt.
- De 45°-45°-90°-driehoek (ook wel de gelijkbenige rechthoekige driehoek), waarbij tussen de zijdes de verhouding $1:1:\sqrt{2}$ geldt.
- De 30°-60°-90°-driehoek (eigenlijk de helft van een gelijkzijdige driehoek), waarbij tussen de zijdes de verhouding $1:2:\sqrt{3}$ geldt.

In deze fase van het werkblad gaan jullie de *ondergrens* van $\boldsymbol{\pi}$ benaderen met beperkte middelen, namelijk alleen met díe stellingen die voor Archimedes toentertijd bekend waren. De goniometrische functies sinus, cosinus en tangens mogen dus niet meer gebruikt worden.

Neem aan dat we nu een cirkel beschouwen met diameter = 2. Als startpunt voor het vinden van een ondergrens van $\boldsymbol{\pi}$ met regelmatige veelhoeken, koos Archimedes voor de ingeschreven regelmatige *zes*hoek.

*Opdracht 2a*
Wat maakt de keuze voor een *zes*hoek zo geschikt als startpunt?

Om tot een nauwkeurigere ondergrens van $\boldsymbol{\pi}$ te komen kan het aantal zijdes van de ingeschreven regelmatige zeshoek verdubbeld worden, waardoor een twaalfhoek ontstaat, zie figuur 3.




*Figuur 3: van ingeschreven zeshoek naar ingeschreven twaalfhoek bij cirkel met diameter = 2.*

Met de bekende lengte $L_0$ van een zijde van de ingeschreven zeshoek, kan de nieuwe lengte $L_1$ van een zijde van de ingeschreven twaalfhoek berekend worden.

*Opdracht 2b*
Bereken de lengte $L_1$ van de ingeschreven regelmatige twaalfhoek bij een cirkel met diameter = 2.

*Opdracht 2c*
Welke ondergrens van $\boldsymbol{\pi}$ geeft de ingeschreven regelmatige twaalfhoek? Gebruik je antwoord van 2b.

Het proces van het verdubbelen van het aantal zijdes van de ingeschreven veelhoek en het telkens berekenen van de omtrek van zo'n ontstane veelhoek kan steeds maar weer herhaald worden. Laten we de lengte van een zijde van een ingeschreven zeshoek (bij een cirkel met diameter = 2) $L_0$ noemen. De lengte van een zijde van de 'verdubbelde zeshoek' (dus twaalfhoek) noemen we $L_1$. De lengte van een zijde van de 'verdubbelde twaalfhoek' (dus 24-hoek) noemen we $L_2$, enzovoorts. Tussen $L_n$ en $L_{n-1}$ bestaat een recursief verband:

$$\boldsymbol{L_n = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2}}} \tag{2}$$

*Opdracht 2d*

Leid de recursieve formule (2) af. Je mag de formule ook afleiden voor één gekozen n, waarmee je bijvoorbeeld $L_1$ uitdrukt in $L_0$. Hint: kijk nog eens naar de stappen die je bij 2b hebt gezet en voeg deze samen.

*Opdracht 2e*

Bereken met de recursieve formule de ondergrens van $\boldsymbol{\pi}$ met een ingeschreven regelmatige 96-hoek. Tip: gebruik de NumWorks. Probeer tussentijds <u>niet</u> af te ronden. Je hoeft niet alle stappen op te schrijven.

Zoom nog eens uit van wat je net allemaal hebt berekend en kijk nog eens naar figuur 1 op de eerste bladzijde. Deze figuur wordt online veel gebruikt om Archimedes' idee voor het benaderen van $\boldsymbol{\pi}$ intuïtief logisch te maken, maar komt strikt gezien niet overeen met Archimedes zijn werkwijze.

*Opdracht 2f*

Geef twee redenen waarom figuur 1 niet geschikt is voor het weergeven van Archimedes' bewijs.

## Fase 3: verhoudingen in plaats van absolute lengtes

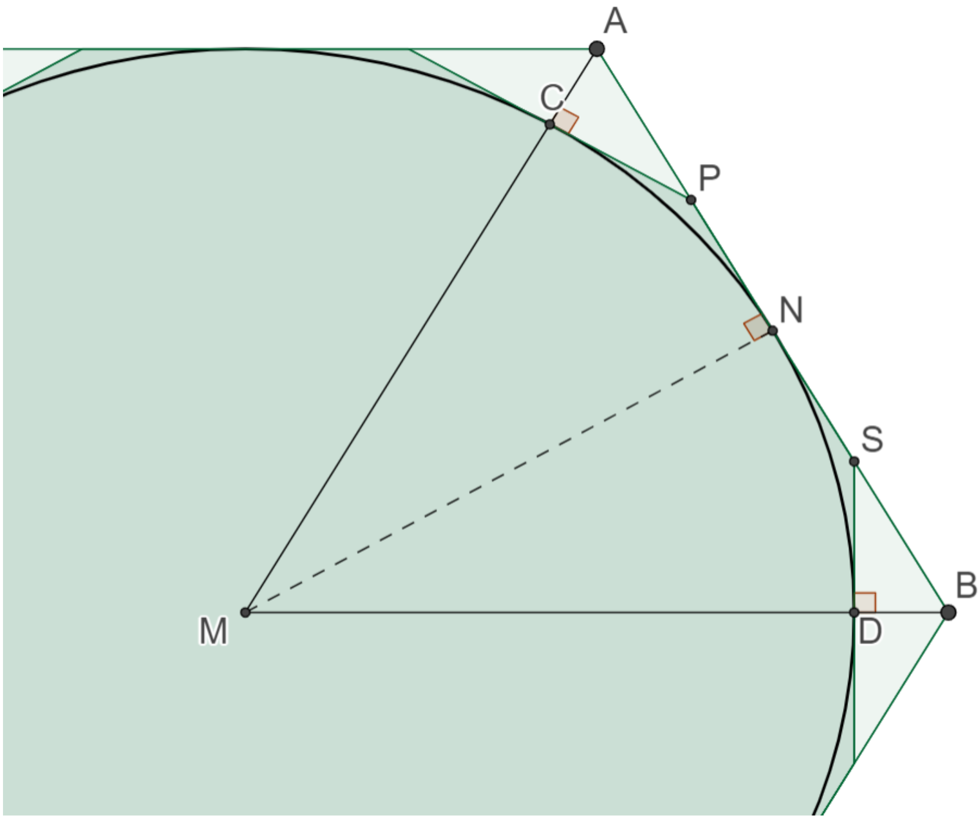
In de vorige twee fases heb je lengtes van lijnstukken, zoals bijvoorbeeld een zijde van een veelhoek of de straal van een cirkel, berekend. Je hebt die 'objecten' een getal gegeven. Het is tegenwoordig misschien lastig voor te stellen, maar in de Oudheid werd dit in de Griekse theoretische wiskunde niet gedaan. Griekse meetkundigen kenden niet rechtstreeks getalswaarden toe aan de objecten die zij bestudeerden:

*"Een lijnstuk was een lijnstuk. Er bestaan gelijke lijnstukken, langere en kortere lijnstukken en een lijnstuk kan gelijk zijn aan twee andere lijnstukken samen, maar op geen enkel moment sprak een Griekse wiskundige over de lengte van een lijnstuk." ('Wortels van de Wiskunde', door Berlinghoff & Gouvêa, 2019)*

In het dagelijkse praktische leven werd overigens net zo goed met lengte gerekend en gemeten als elders, maar in de theoretische wiskunde werd dit dus vermeden. Griekse wiskundigen probeerden alles vanuit een *relatief* oogpunt te zien. *Verhoudingen* speelden dus in de theoretische Griekse wiskunde een zeer belangrijke rol. Ook Archimedes heeft $\boldsymbol{\pi}$ benaderd zonder ook maar één lijnstuk een getal te geven. In zijn bewijs heeft hij alleen maar gebruikgemaakt van verhoudingen tussen bijvoorbeeld lijnstukken of tussen hoeken. Deze verhoudingen kregen wel een getalswaarde. In deze fase gaan jullie een bovengrens van $\boldsymbol{\pi}$ opstellen door alleen gebruik te maken van verhoudingen.

Als startpunt nemen we nu een *om*geschreven regelmatige zeshoek. De verhouding waarin we uiteindelijk geïnteresseerd zijn is die tussen de omtrek van de omgeschreven regelmatige n-hoek (waarbij n het liefst heel groot is) en de diameter van de cirkel.

Zie figuur 4. Hier zie je een gedeeltelijke tekening van een omgeschreven regelmatige zeshoek (lichtgroen) met een zijde genaamd AB en een omgeschreven regelmatige twaalfhoek (donkerder groen) met een zijde genaamd PS. Zijde PS is vanuit de zeshoek geconstrueerd door aan de punten C en D die op de cirkel liggen de raaklijn te tekenen. Deze raaklijnen snijden zijde AB in punt P en punt S respectievelijk.



*Figuur 4: gedeeltelijke tekening omgeschreven regelmatige zes- en twaalfhoek*

*Opdracht 3a*

Wat is de verhouding $\frac{AN}{MN}$? Gebruik de kennis die Archimedes had van speciale driehoeken (zie begin fase 2).

*Opdracht 3b*

Neem als startpunt de verhouding $\frac{AN}{MN}$ . Hoe ga je vanaf hier naar de verhouding $\frac{omtrek\ regelmatige\ zeshoek}{diameter\ cirkel}$ ? Geef op die manier een bovengrens van $\boldsymbol{\pi}$ afgeleid met een omgeschreven regelmatige zeshoek.

Zoals je eerder hebt gezien zal de benadering van $\boldsymbol{\pi}$ nauwkeuriger worden bij een veelhoek met een groot aantal zijden. Daarom passen we ook hier het proces van verdubbeling steeds toe. In fase twee heb je na elke verdubbeling de lengte $L_n$ van een zijde van die verdubbelde veelhoek berekend. In deze fase zijn we telkens geïnteresseerd in de *verhouding* tussen de (helft van de) lengte van een zijde van de verdubbelde veelhoek en de straal van de cirkel. Wanneer die verhouding bekend is, kan je namelijk op dezelfde manier als bij 3b $\boldsymbol{\pi}$ benaderen. De volgende stap is dus het vinden van de verhouding $\frac{PN}{MN}$, of omdat $PN = PC$, $\frac{PC}{MN}$. Hiervoor maken we gebruik van gelijkvormigheid van driehoeken.

*Opdracht 3c*

Zie figuur 4. Toon aan dat driehoek $ACP$ gelijkvormig is met driehoek $ANM$.

*Opdracht 3d*

Uit deze gelijkvormigheid volgt de gelijkheid: $$\frac{PC}{MN} = \frac{\square}{AN}$$ (Vul in wat in het vierkantje hoort te staan.)

*Opdracht 3e*

Leid vervolgens af dat er geldt: $\frac{PC}{MN} = \frac{2}{1} - \frac{\sqrt{3}}{1}$. Schrijf zo veel mogelijk tussenstappen op.

*Opdracht 3f*

Bereken een bovengrens van $\boldsymbol{\pi}$ door middel van de omgeschreven regelmatige twaalfhoek.

De procedure van opdracht 3c tot en met 3f kan telkens herhaald worden om zo de verhouding tussen de (helft van) een zijde van de verdubbelde veelhoek en de straal van de cirkel te vinden.

*Opdracht 3g*
Probeer, door dezelfde procedure te volgen als bij 3c tot en met 3f, een bovengrens van $\boldsymbol{\pi}$ te vinden met een omgeschreven regelmatige 24-hoek. Tip: maak een schets (eventueel in figuur 4).
Hint: op een gegeven moment zul je stuiten op de onbekende verhouding $\frac{MP}{PN}$ . Op dat moment kan de stelling van Pythagoras je verder helpen om deze verhouding uit te drukken in twee verhoudingen die je wel weet.

Vergeleken met wat je gezien hebt in fase 1 en fase 2 is de procedure met verhoudingen een tijdrovend en intensief proces. In werkelijkheid was dit nog ingewikkelder, omdat men in Archimedes' tijd nog niet goed wist hoe met wortels moest worden gerekend en deze door Archimedes ook nog moesten worden benaderd met een breuk. Daarnaast bestonden rekenmachines natuurlijk nog niet. Archimedes besloot te stoppen toen hij een boven- en ondergrens van $\boldsymbol{\pi}$ had gevonden met een om- en ingeschreven regelmatige 96-hoek. De benadering die hij op deze manier had gevonden voor $\boldsymbol{\pi}$ was in zijn tijd namelijk goed genoeg voor de situaties waarin hij $\boldsymbol{\pi}$ nodig zou hebben.

Zo zie je maar: met alle 'wiskundige tools' die we vandaag de dag tot onze beschikking hebben lijkt het benaderen van $\boldsymbol{\pi}$ vrij eenvoudig. Ontdekking van die tools heeft echter eeuwenlang geduurd. Wiskunde werd opgebouwd vanuit het niets. Met zeer beperkte middelen werd $\boldsymbol{\pi}$ door Archimedes benaderd.

Wie niet sterk is moet slim zijn. ☺
Bedankt voor het meedoen met het onderzoek!

**EINDE**

# 10 Bijlage C

# Uitwerkingen: Werkblad A

## Fase 1: goniometrische functies gebruiken

*Opdracht 1a:*

Voorbeelden van manieren:

- Gebruik van rechthoekige driehoek: Teken vanaf het middelpunt M van de cirkel een lijnstuk naar een hoekpunt A van de ingeschreven 8-hoek. Teken vanaf M ook een lijnstuk naar het midden van een zijde B van de ingeschreven 8-hoek. Hierdoor ontstaat een rechthoekige driehoek $\Delta MAB$. $\angle M = \frac{360}{16} = 22{,}5°$ en zijde MA = 0,5. Dus zijde $AB = \sin(22{,}5°) \cdot 0{,}5 = 0{,}191 \ldots$. Dus de lengte van een zijde van de ingeschreven 8-hoek is: 0,383…. En de omtrek van de ingeschreven 8-hoek is $0{,}383 \ \cdot 8 = 3{,}06147$. Aangezien de diameter 1 is, is dit ook de ondergrens voor $\pi$.
- Gebruik van de cosinusregel: Teken vanaf het middelpunt M van de cirkel een lijnstuk naar een hoekpunt A van de ingeschreven 8-hoek. Teken vanaf M ook een lijnstuk naar een naastgelegen hoekpunt B van de ingeschreven 8-hoek. Hierdoor ontstaat driehoek $\Delta MAB$. De cosinusregel geeft $AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2 \cdot MA \cdot MB \cdot cos(\angle M) = 0{,}5^2 + 0{,}5^2 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot \cos\left(\frac{360}{8}\right) = 0{,}146 \ldots$ Dus $AB = \sqrt{0{,}146 \ldots} = 0{,}382 \ldots$ Dus de omtrek van de ingeschreven 8-hoek is: $0{,}382 \ldots \cdot 8 = 3{,}06147$. Aangezien de diameter 1 is, is dit ook de ondergrens voor $\pi$.

*Opdracht 1b:*

Voorbeeld van een manier:

Teken vanaf het middelpunt M van de cirkel een lijnstuk naar een hoekpunt C van de omgeschreven 8-hoek. Teken vanaf M ook een lijnstuk naar het midden van een zijde D van de omgeschreven 8-hoek. Hierdoor ontstaat een rechthoekige driehoek $\Delta MCD$. $\angle M = \frac{360}{16} = 22{,}5°$ en zijde MD = 0,5. Dus zijde $CD = \tan(22{,}5°) \cdot 0{,}5 = 0{,}207 \ldots$. Dus de lengte van een zijde van de omgeschreven 8-hoek is: 0,414…. En de omtrek van de omgeschreven 8-hoek is $0{,}414 \ldots \cdot 8 = 3{,}31371$. Aangezien de diameter 1 is, is dit ook de bovengrens voor $\pi$.

## Fase 2: Archimedes’ bewijs voor de bovengrens

*Opdracht 2a:*

Archimedes begint zijn bewijs met een regelmatige 6-hoek. Dit zou je bijvoorbeeld op de volgende manieren kunnen afleiden:

- Hoek AOC is een derde van een rechte hoek en dus 30°. Vermenigvuldig dit met 2 en je krijgt de hoek die de twee uiteinden van een zijde van de veelhoek met het middelpunt van de cirkel maken, dit geeft 60°. Nu vind je $\frac{360}{60} = 6$, dus het is een 6-hoek.
- In de bron staat de verhouding $OC : CA$ = 2 : 1. CA is de helft van een zijde van de veelhoek, dus 2CA is een hele zijde. Dit geeft de verhouding $OC : 2CA$ = 1 : 1, oftewel $OC = 2CA$. Hieruit volgt dat de veelhoek verdeeld kan worden in gelijkzijdige driehoeken. Dit kan alleen met een 6-hoek.

*Opdracht 2b:*

Archimedes koos waarschijnlijk voor een 6-hoek omdat hierbij de straal van de cirkel gelijk is aan een zijde van de veelhoek. Doordat hij dit weet kan hij makkelijk, al dan niet met Pythagoras of bijv. met zijn kennis van 30-60-90 driehoeken, achter de verhouding OA : AC komen. Merk op: ook met een vierkant zijn de verhoudingen makkelijk te achterhalen, maar dit is een slechter ‘startpunt’ dan een 6-hoek. (een 6-hoek benadert een cirkel beter dan een vierkant)

*Opdracht 2c:*

Tot en met de vierde decimaal.

*Opdracht 2d:*

Bissectrice.

*Opdracht 2e:*

$$\frac{CO}{OA} = \frac{CD}{DA}$$

$$\frac{CO}{OA} + 1 = \frac{CD}{DA} + \boxed{1}$$

$$\frac{CO}{OA} + \boxed{\frac{OA}{OA}} = \frac{CD}{DA} + \boxed{\frac{DA}{DA}}$$

$$\frac{CO + OA}{OA} = \frac{CD + \boxed{DA}}{DA}$$

$$\frac{CO + OA}{OA} = \frac{\boxed{CA}}{DA}$$

$$\frac{CO + OA}{OA} \cdot \boxed{\frac{OA}{CA}} = \frac{\boxed{CA}}{DA} \cdot \boxed{\frac{OA}{CA}}$$

$$\frac{CO + OA}{CA} = \frac{OA}{AD}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{CO}{CA} + \dfrac{OA}{CA} = \dfrac{OA}{AD} > \dfrac{306}{153} + \dfrac{265}{153} \\ \text{Dus } \dfrac{OA}{AD} > \dfrac{571}{153} \end{array}}$$

*Opdracht 2f:*
Hiermee kan hij, op dezelfde wijze als in opdracht 2e is gezien, uiteindelijk de verhouding $straal\ cirkel$ : $helft\ zijde\ veelhoek$ van de volgende veelhoek berekenen. Bijvoorbeeld: $\frac{OA}{AE} = \frac{DO}{DA} + \frac{OA}{DA}$ kan nu berekend worden met de bekende verhoudingen $\frac{DA}{DA}$ en $\frac{OA}{DA}$.

*Opdracht 2g:*
Een omgeschreven 96-hoek. (Dit kun je bijvoorbeeld achterhalen doordat Archimedes het aantal zijden van de omgeschreven 6-hoek van het begin vier keer heeft verdubbeld).

*Opdracht 2h:*
Twee redenen zijn:

- Archimedes begint met een regelmatige 6-hoek in plaats van een 5-hoek.
- Archimedes *verdubbelt* in zijn bewijs steeds de hoeken van de veelhoek, waardoor hij alleen een 6, 12, 24, 48 en 96 hoek gebruikt. In het plaatje zien we geen verdubbeling van het aantal hoeken.

*Opdracht 2i:*
Mogelijke berekeningen zijn:

- Snelste manier: Archimedes begint met $\frac{1}{3}$ van een rechte hoek. Deze hoek wordt 4 keer doormidden gedeeld, dus de hoek die we hierna krijgen is: $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{48}$ van een rechte hoek.
- We begonnen met een regelmatige 6-hoek. Het aantal zijden van deze veelhoek hebben we 4 keer verdubbeld zodat we achtereenvolgens de 12-hoek, 24-hoek, 48-hoek en 96-hoek kregen. De hoek die twee uiteinden van een zijde van de 96-hoek maken met het middelpunt van de cirkel is: $\frac{360}{96} = 3{,}75°$. Dus $\angle AOG = \frac{3{,}75}{2} = 1{,}875°$. Dit is $\frac{1{,}875}{90} = \frac{1}{48}$ van een rechte hoek.

*Opdracht 2j:*

$$\boldsymbol{\pi} < \frac{omtrek\ omgeschreven\ 96\_hoek}{AB} < \frac{14688}{46735} < \mathbf{3\frac{1}{7}} \quad \rightarrow \quad \text{dus } \pi < 3\frac{1}{7}.$$

(middelste ongelijkheid geldt want $\frac{AB}{omtrek\ omgeschreven\ 96\_hoek} > 0$ en $\frac{4673{,}5}{14688} > 0$).

## Fase 3: Archimedes' bewijs voor de ondergrens

*Opdracht 3a:*

De stelling van Thales. (A.d.h.v. deze stelling geldt $\angle C = 90°$, waardoor Archimedes weet dat we met een een 30°-60°-90°-driehoek te maken hebben, en de verhoudingen van zo'n driehoek kende hij).

*Opdracht 3b:*

$\angle C = \angle D$ (= 90° st. van Thales)

$\angle BdD = \angle AdC$ (overstaande hoeken)

Vanwege de hoekensom van een driehoek volgt dat $\angle dBD = \angle dAC$.

*Opdracht 3c:*

De bissectricestelling.

*Opdracht 3d:*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad geeft \quad ad = \boxed{bc}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \boxed{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\boxed{b+d}}{b+d} = \frac{ab + \boxed{ad}}{b(b+d)} = \frac{\boxed{ab}}{b(b+d)} + \frac{\boxed{ad}}{b(b+d)} = \frac{\boxed{a}}{b+d} + \frac{\boxed{bc}}{b(b+d)} = \frac{\boxed{a}}{b+d} + \frac{\boxed{c}}{b+d} = \frac{a+c}{b+d}$$

*Opdracht 3e*

$$\boldsymbol{\pi} > \frac{omtrek\ ingeschreven\ 96\_hoek}{AB} > \frac{6336}{2017{,}25} > \mathbf{3\frac{10}{71}} \quad \rightarrow \quad \text{dus} \quad \pi > 3\frac{10}{71}.$$

**EINDE**

# 11 Bijlage D

# Uitwerkingen: Werkblad B

## Fase 1: goniometrische functies gebruiken

*Opdracht 1a:*
Dan is de benadering van $\pi$ gelijk aan de omtrek van de in- of omgeschreven veelhoek.

*Opdracht 1b:*
$P = n \cdot L$

*Opdracht 1c:*
$\beta = \frac{360}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{180}{n}$ en sinus toepassen geeft $\frac{1}{2}L = sin\left(\frac{180}{n}\right) \cdot \frac{1}{2}$, oftewel $L = sin\left(\frac{180}{n}\right)$.

*Opdracht 1d:*
$L = \sin\left(\frac{180}{96}\right) = 0{,}032\ \ldots$, dus $omtrek\ ingeschreven\ 96 - hoek = 0{,}032 \ldots \cdot 96 = 3{,}141032$. Vanwege diameter = 1 is dit ook gelijk de benadering van $\pi$.

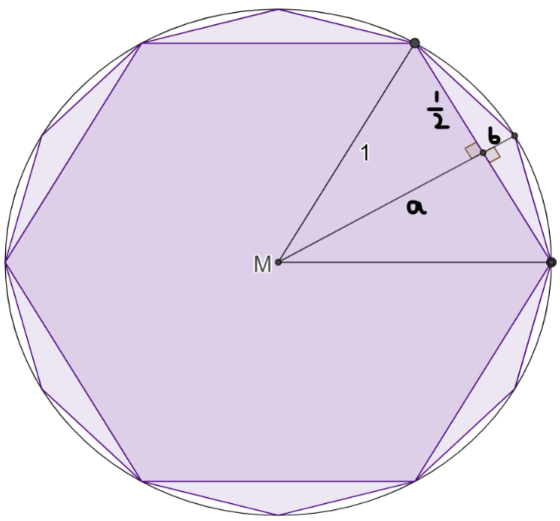
*Opdracht 1e:*
Teken een lijnstuk van het middelpunt van de cirkel naar een hoekpunt van de omgeschreven veelhoek. Teken ook een lijnstuk van het middelpunt van de cirkel naar het midden van dezelfde zijde van de omgeschreven cirkel. De hoek tussen de twee getekende lijnstukken is $\alpha = \frac{360}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{180}{n}$. Er geldt $\frac{1}{2}L = \tan\left(\frac{180}{n}\right) \cdot \frac{1}{2}$ en dus $L = \tan\left(\frac{180}{n}\right)$. Dus de omtrek van een omgeschreven n-hoek is: $L \cdot n = \tan\left(\frac{180}{n}\right) \cdot n$.

*Opdracht 1e:*
Omtrek omgeschreven 96-hoek is: $\tan\left(\frac{180}{96}\right) \cdot 96 = 3{,}142715$. Omdat diameter = 1 is dit gelijk ook de benadering van $\pi$.

## Fase 2: ondergrens berekenen met beperkte middelen

*Opdracht 2a:*
Archimedes koos waarschijnlijk voor een 6-hoek omdat hierbij de straal van de cirkel gelijk is aan een zijde van de veelhoek. Doordat hij dit weet kan hij makkelijk, al dan niet met Pythagoras of bijv. met zijn kennis van 30-60-90 driehoeken, achter de lengte van een zijde van ingeschreven 6-hoek komen. Merk op: ook met een vierkant is de lengte van een zijde makkelijk te achterhalen, maar dit is een slechter 'startpunt' dan een 6-hoek. (een 6-hoek benadert een cirkel beter dan een vierkant)

*Opdracht 2b:*
$L_0 = 1$, want die is hetzelfde als de straal van de cirkel (60-60-60 driehoek).




Pythagoras geeft $a^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ → dus $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$b = 1 - a = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$, nog een keer Pythagoras geeft:
$L_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = 2 - \sqrt{3}$. Dit geeft:
$L_1 = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 0{,}517638$.

*Opdracht 2c:*
De ondergrens van $\pi$ op basis van de ingeschreven 12-hoek is: $\frac{0{,}517638 \cdot 12}{2} = 3{,}105829$.

*Opdracht 2d:*
Het proces gevonden bij 2b kan telkens herhaald worden. We kunnen bij het verdubbelen van het aantal zijden telkens weer een nieuw lijnstuk van punt M naar een hoekpunt van de 'nieuwe' veelhoek tekenen, die weer opgedeeld kan worden in stuk a (van M naar het snijpunt van dit getekende lijnstuk met de zijde van 'oude' veelhoek) en stuk b (van het snijpunt van dit getekende lijnstuk met de zijde van de 'oude' veelhoek, tot het hoekpunt van de 'nieuwe' veelhoek). Voor a geldt dan telkens, d.m.v. Pythagoras: $a = \sqrt{1^2 - \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2}$ en voor b dus: $b = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2}$. Dan kunnen we (in de kleinere driehoek) weer Pythagoras toepassen en volgt: $L_n = \sqrt{\left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2}\right)^2}$. Herleiden geeft:

$$L_n = \sqrt{\left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2 + 1 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2} + 1 - \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2}}.$$

*Opdracht 2e:*

$L_1 = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = 0{,}517\ldots$ (lengte zijde 12-hoek)

$L_2 = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}517\ldots}{2}\right)^2}} = 0{,}261\ldots$ (lengte zijde 24-hoek)

$L_3 = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}261\ldots}{2}\right)^2}} = 0{,}130\ldots$ (lengte zijde 48-hoek)

$L_4 = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}130\ldots}{2}\right)^2}} = 0{,}065\ldots$ (lengte zijde 96-hoek)

Dus de ondergrens van $\pi$ is: $\frac{0{,}065 \cdot 96}{2} \approx 3{,}141032$. (delen door 2 vanwege diameter = 2)

*Opdracht 2f:*
Twee redenen zijn:

- Archimedes begint met een regelmatige 6-hoek in plaats van een 5-hoek.
- Archimedes *verdubbelt* in zijn bewijs steeds de hoeken van de veelhoek, waardoor hij alleen een 6, 12, 24, 48 en 96 hoek gebruikt. In het plaatje zien we geen verdubbeling van het aantal hoeken.

## Fase 3: verhoudingen in plaats van absolute lengtes

*Opdracht 3a:*
Dit is een 30°-60°-90°-driehoek. Hieruit volgt de verhouding $\frac{AN}{MN} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

*Opdracht 3b:*
$\frac{AN}{MN} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ geeft $\frac{AB}{diameter\ cirkel} = \frac{2 \cdot AN}{2 \cdot diameter\ cirkel} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Hierdoor geldt: $\frac{omtrek\ 6\_hoek}{diameter\ cirkel} = \frac{6 \cdot AB}{diameter\ cirkel} = \frac{6}{\sqrt{3}}$
Dus de bovengrens van $\pi$ a.d.h.v. de omgeschreven 6-hoek is $\frac{6}{\sqrt{3}} \approx 3{,}464102$.

*Opdracht 3c:*
$\angle PCA = \angle MNA$ (= 90°)
$\angle NAM = \angle CAP$ (= 60°)
Dus vanwege het kenmerk hh is driehoek ACP gelijkvormig met driehoek ANM.

*Opdracht 3d:*

$$\frac{PC}{MN} = \frac{AC}{AN}$$

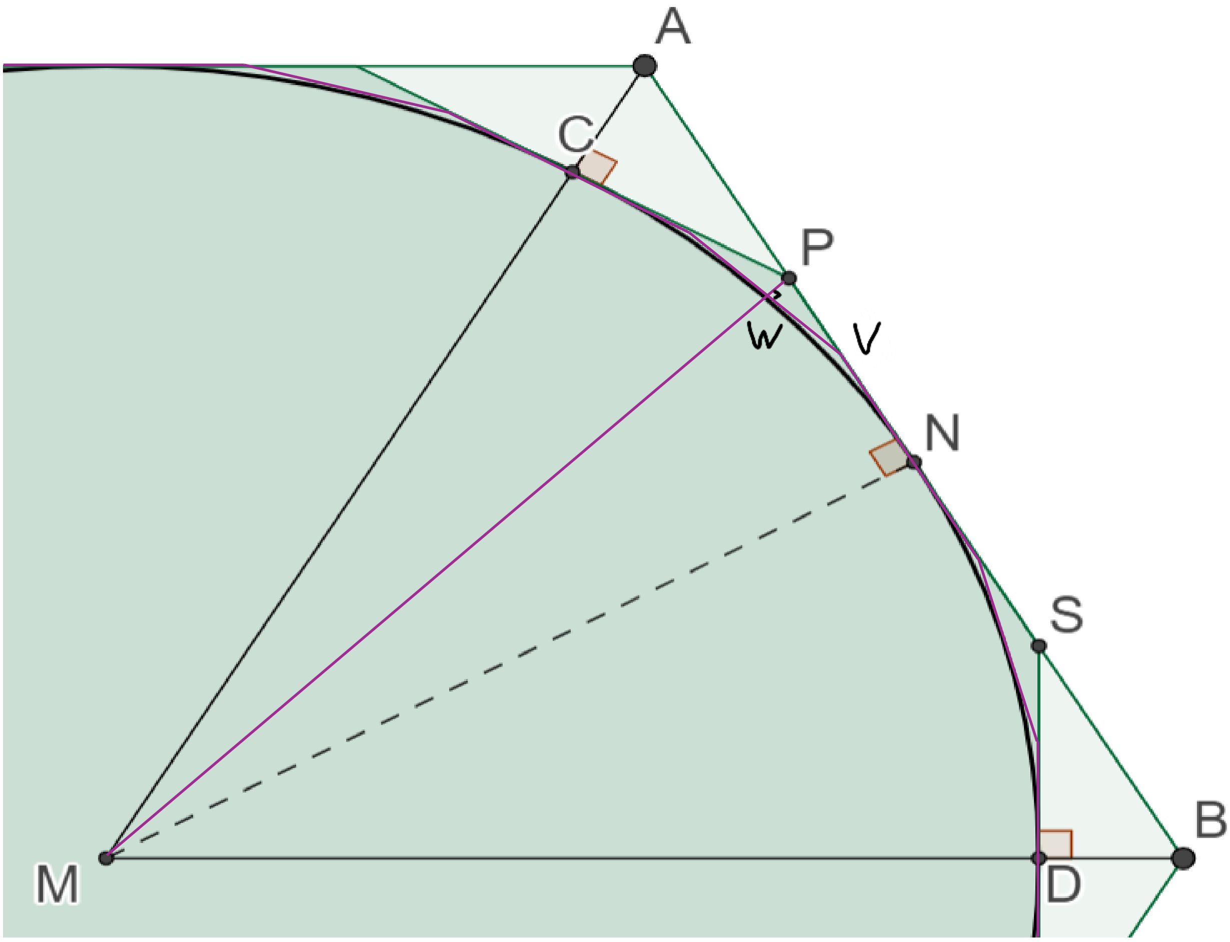
*Opdracht 3e:*

$$\frac{PC}{MN} = \frac{AC}{AN} = \frac{MA-MC}{AN} = \frac{MA}{AN} - \frac{MC}{AN} = \frac{MA}{AN} - \frac{MN}{AN} = \frac{2}{1} - \frac{\sqrt{3}}{1}$$

*Opdracht 3f:*

$$\frac{omtrek\ 12\_hoek}{diameter\ cirkel} = \frac{12 \cdot 2 \cdot PC}{2 \cdot MN} = 12 \cdot \left(\frac{2}{1} - \frac{\sqrt{3}}{1}\right) \approx 3{,}215390$$

*Opdracht 3g:*

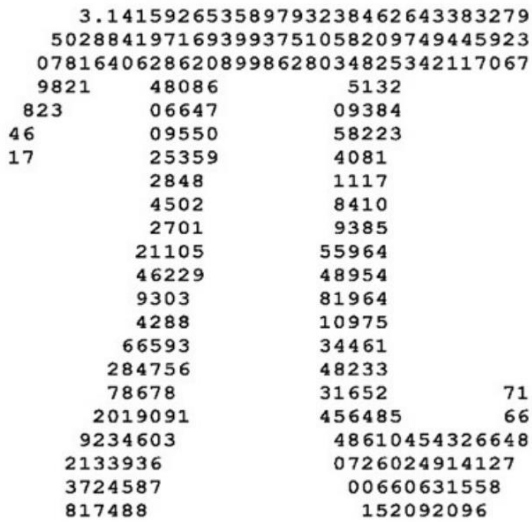


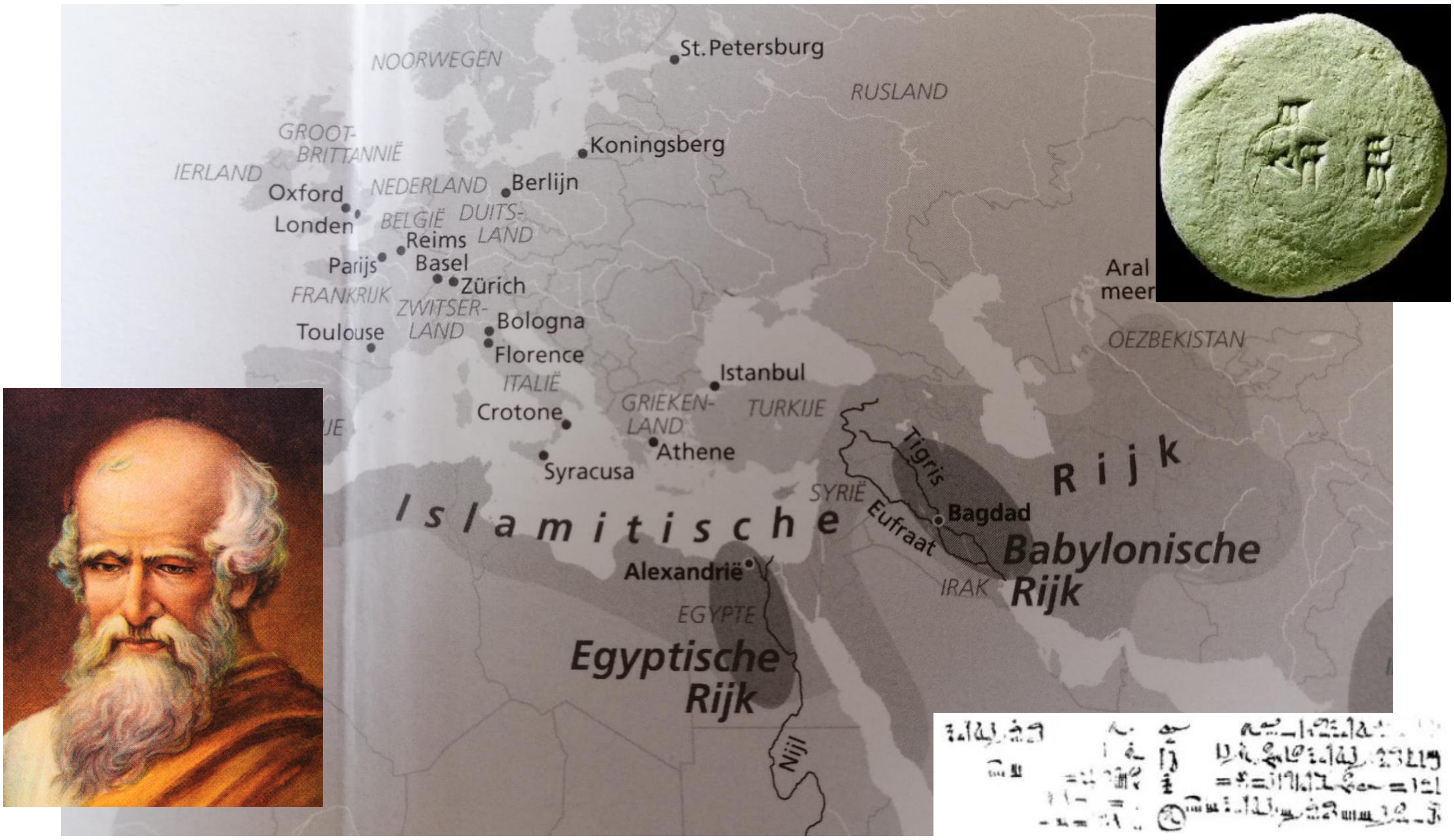

Schets de 24-hoek (zie paarse lijnstukken hiernaast). Definieer de punten V en W. We weten $\frac{PN}{MN} = \frac{PC}{MN} = \frac{2}{1} - \frac{\sqrt{3}}{1}$. Vanwege kenmerk hh ($\angle VPW = \angle MPN$ & $\angle VWP = \angle MNP$) is driehoek PWV gelijkvormig met driehoek MNP. Uit deze gelijkvormigheid volgt de gelijkheid $\frac{VW}{MN} = \frac{PW}{PN}$ . Hieruit volgt: $\frac{VW}{MN} = \frac{PW}{PN} = \frac{MP-MW}{PN} = \frac{MP}{PN} - \frac{MW}{PN} = \frac{MP}{PN} - \frac{MN}{PN}$. Hieruit is de verhouding $\frac{MP}{PN}$ onbekend. Pythagoras geeft: $\frac{MP^2}{PN^2} = \frac{MN^2+PN^2}{PN^2} = \frac{MN^2}{PN^2} + \frac{PN^2}{PN^2} = \frac{1^2}{(2-\sqrt{3})^2} + 1 = 14{,}928\ldots$ En dit geeft $\frac{MP}{PN} = \sqrt{14{,}928\ldots} = 3{,}863\ldots$. Dus, $\frac{VW}{MN} = \frac{MP}{PN} - \frac{MN}{PN} = 3{,}863\ldots - \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 0{,}131\ldots$. En $\frac{omtrek\ 24\_hoek}{diameter\ cirkel} = \frac{24 \cdot 2 \cdot VW}{2 \cdot MN} = 24 \cdot 0{,}131\ldots = 3{,}159660$.
Dus de bovengrens van $\pi$ a.d.h.v. een omgeschreven 24-hoek is 3,159660.

**EINDE**

# 12 Bijlage E

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\boldsymbol{omtrek\ cirkel}}{\boldsymbol{diameter}}$$




NOORWEGEN
St. Petersburg
RUSLAND
GROOT-
BRITTANNIË
IERLAND
Koningsberg
Oxford
NEDERLAND
Berlijn
Londen
BELGIË
DUITS-
LAND
Reims
Parijs
Basel
Zürich
FRANKRIJK
ZWITSER-
LAND
Toulouse
Bologna
Florence
ITALIË
Istanbul
Crotone
GRIEKEN-
LAND
TURKIJE
Athene
Syracusa
Tigris
SYRIË
Eufraat
Bagdad
Islamitische Rijk
Alexandrië
IRAK
Babylonische
Rijk
EGYPTE
Egyptische
Rijk
Nijl
Aral
meer
OEZBEKISTAN

# 13 Bijlage F

**Het werkblad dat ik heb gemaakt is werkblad A / B** (omcirkel welke je hebt gemaakt)

Werkblad A bevatte de originele bron, werkblad B niet.

| | Sterk mee oneens | Mee oneens | Beetje mee oneens | Neutraal | Beetje mee eens | Mee eens | Sterk mee eens |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Algemeen** | | | | | | | |
| 1. Wiskunde vind ik over het algemeen een interessant vak. | | | | | | | |
| 2. Ik heb veel zelfvertrouwen als het om wiskunde gaat. | | | | | | | |
| 3. Normaalgesproken kijk ik ernaar uit nieuwe dingen over wiskunde te leren. | | | | | | | |
| 4. Wiskunde schrikt mij helemaal niet af. | | | | | | | |
| 5. Wiskundige vraagstukken/problemen oplossen gaat mij meestal eenvoudig af. | | | | | | | |
| 6. Ik vind het leuk om wiskundige vraagstukken/problemen te proberen op te lossen. | | | | | | | |
| 7. Meetkunde is normaalgesproken een onderwerp waar ik goed in ben. | | | | | | | |
| 8. Het onderwerp meetkunde vind ik over het algemeen erg boeiend. | | | | | | | |
| **Vragen naar aanleiding van de les** | | | | | | | |
| 9. Ik had zin om aan het werkblad te gaan werken. | | | | | | | |
| 10. Bij de meeste vragen/opdrachten die in het werkblad stonden was ik benieuwd naar wat het antwoord was. | | | | | | | |
| 11. De informatieve stukken tekst die ik heb gelezen in het werkblad (<u>en</u> in de oude bron) vond ik boeiend. | | | | | | | |
| 12. Het was leuk om een antwoord te zoeken op de vraagstukken uit het werkblad. | | | | | | | |
| 13. Het oplossen van de meeste vraagstukken uit het werkblad ging mij eenvoudig af. | | | | | | | |
| 14. De stukjes geschiedenis van de wiskunde die in afgelopen twee lessen naar voren kwamen konden mij niet echt boeien. | | | | | | | |
| 15. Afgelopen lessen hebben mij meer dan voorheen doen inzien dat wiskunde een menselijke activiteit is. | | | | | | | |
| 16. Ik had plezier in het werken aan het werkblad. | | | | | | | |
| 17. Ik voelde mij competent in het doorlopen van het werkblad. | | | | | | | |

| | Sterk mee oneens | Mee oneens | Beetje mee oneens | Neutraal | Beetje mee eens | Mee eens | Sterk mee eens |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18. Ik heb het gevoel dat ik deze les echt iets heb geleerd. | | | | | | | |
| 19. Afgelopen lessen hebben mij nieuwsgierig gemaakt naar de geschiedenis van wiskunde. | | | | | | | |
| 20. Ik heb veel voldoening gehaald uit het werken aan het werkblad. | | | | | | | |
| 21. Ik zag het nut van het maken van het werkblad <u>niet</u> in. | | | | | | | |
| 22. Het niveau van het werkblad lag aan de hoge kant. | | | | | | | |
| 23. Door afgelopen lessen is mijn kijk naar wiskunde verrijkt. | | | | | | | |
| 24. Ik zou deze wiskundeles omschrijven als: 'erg interessant'. | | | | | | | |
| 25. Ik kijk met een enthousiast gevoel terug op het maken van het werkblad. | | | | | | | |
| 26. Ik denk dat ik best wel goed was in het doorlopen van het werkblad. | | | | | | | |
| 27. Door afgelopen lessen heb ik meer respect gekregen voor mensen die bijdragen hebben geleverd aan wiskunde. | | | | | | | |
| 28. Mijn bewondering voor het getal $\pi$ is na het maken van het werkblad groter geworden. | | | | | | | |
| 29. Ik zou willen dat de geschiedenis van wiskunde met een soortgelijk werkblad vaker aan bod komt in de wiskundeles. *Ga er hierbij vanuit dat dit <u>niet</u> ten koste zou gaan van voorbereidingstijd voor een toets.* | | | | | | | |
| 30. Door afgelopen lessen zie ik beter in dan voorheen dat wiskunde een rijke ontwikkeling heeft en niet iets is dat uit de lucht is komen vallen. | | | | | | | |

| Wat maakte dat je het werkblad leuk vond? | Wat maakte dat je het werkblad *niet* leuk vond? | Eventuele overige opmerkingen |
|---|---|---|
| | | |

# 14 Bijlage G

# Informatiebrief over deelname aan onderzoek: ‘Wiskunde leren door een primaire historische bron: motivatieverhogend voor leerlingen?’

## 1. Inleiding

Ik, Carlijn Grimberg, vraag je om deel te nemen aan een wetenschappelijk onderzoek dat ik doe voor mijn masteropleiding Educatie en Communicatie in de Bètawetenschappen aan de Universiteit Twente. Het betreft een onderzoek waarbij je wordt verzocht een wiskundig werkblad te maken, om daarna een vragenlijst daarover in te vullen. Dit onderzoek is vooraf getoetst door de ethische commissie van de afdeling Behavioural, Management and Social Sciences aan de Universiteit Twente.

## 2. Wat is de achtergrond en het doel van het onderzoek?

Volgens wetenschappelijke literatuur heeft de inzet van geschiedenis in de wiskundeles allerlei voordelen, waaronder een verhoogde motivatie voor wiskunde bij leerlingen. Of dit effect wordt versterkt door het gebruiken van een originele oude historische bron is onduidelijk. Het doel van dit onderzoek is erachter te komen wat het effect van zo’n bron is op de intrinsieke motivatie van leerlingen voor wiskunde.

## 3. Hoe wordt het onderzoek uitgevoerd?

Maandag 26 juni wordt jouw klas 5VWO wiskunde D gevraagd aan een werkblad betreffende de benadering van $\pi$ door Archimedes te werken. De groep wordt in tweeën gesplitst: één groep krijgt het werkblad mét de primaire historische bron, de ander een soortgelijk werkblad zonder zo’n bron. Deze werkbladen zijn opgesteld door de onderzoeker. Naderhand worden papieren vragenlijsten betreffende de houding tegenover wiskunde in het algemeen en tegenover het werkblad uitgereikt en word je verzocht deze in te vullen. De vragenlijst is opgesteld door de onderzoeker. De verschillen in antwoorden tussen beide groepen worden statistisch geanalyseerd.

## 4. Wat wordt er van je verwacht?

Als je wilt deelnemen aan dit onderzoek verzoek ik je het werkblad te maken (duur: een kleine 1,5 uur) en achteraf de vragenlijst eerlijk en individueel in te vullen. Het invullen van de vragenlijst duurt maximaal 10 minuten en is anoniem.

## 5. Welke gegevens worden er verzameld?

De gegevens die verzameld worden zijn jouw antwoorden op de vragen in de papieren enquête. Je hoeft niet je naam op deze enquête te zetten. De gegevens worden geheel anoniem verwerkt en geanalyseerd voor het onderzoek. Daarnaast zal de onderzoeker de werkhouding en motivatie van de groep leerlingen observeren. Dit soort observaties zouden vermeld kunnen worden in het onderzoeksverslag. Als dit gebeurt, zal dit ook weer geheel anoniem worden verwerkt.

## 6. Wat gebeurt er met de verzamelde gegevens?

Jouw ingevulde vragenlijst wordt ingenomen en onderzocht en vergeleken met de antwoorden op de vragenlijsten van andere leerlingen. Van de ingevulde vragenlijsten worden digitale kopieën gemaakt, die gedurende het onderzoek loopt blijven bestaan. Eventueel kan er om inzage worden gevraagd van een persoon van de Universiteit Twente. Zodra het onderzoek is afgerond, zullen de vragenlijsten, zowel fysiek als digitaal, worden verwijderd.

## 7. Wat zijn mogelijke voor- en nadelen van deelname aan dit onderzoek?

Er zijn geen noemenswaardige directe voor- of nadelen verbonden aan je deelname aan dit onderzoek.

## 8. Vrijwillige deelname

Deelname aan het onderzoek is vrijwillig. Als je besluit niet mee te doen, dan hoef je niks te tekenen. Je hoeft ook niet te zeggen waarom je niet wil meedoen. Als je wel meedoet, kun je je ook tijdens het onderzoek nog bedenken en stoppen. Doe je dat, dan worden jouw onderzoeksgegevens niet meegenomen in de analyses. Zodra de gegevens (lees: antwoorden op de vragenlijst) zijn verzameld en ze niet meer tot je te herleiden zijn, is het niet meer mogelijk om deze te verwijderen.

## 9. Is er een vergoeding wanneer je besluit aan dit onderzoek mee te doen?

Er is geen vergoeding verbonden aan dit onderzoek.

## 10. Meer informatie over dit onderzoek?

Indien je vragen hebt naar aanleiding van dit onderzoek, graag meer informatie wil verkrijgen of geïnteresseerd bent in de uitkomsten van het onderzoek, dan kun je contact opnemen met de onderzoeker Carlijn Grimberg via c.l.grimberg@student.utwente.nl.

# 15 Bijlage H

# TOESTEMMINGSFORMULIER (informed consent)

**Betreft:** Onderzoek naar het effect van een primaire historische wiskundige bron op de intrinsieke motivatie van leerlingen.

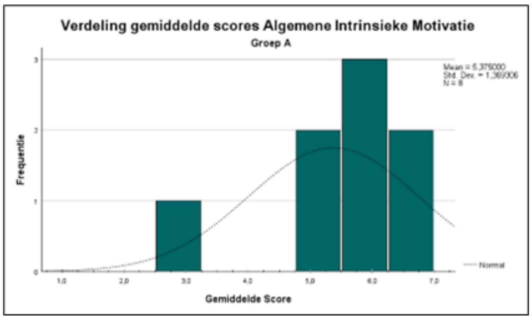
- Ik heb de informatie(brief) gelezen. Ook kon ik vragen stellen. Mijn vragen zijn voldoende beantwoord. Ik had genoeg tijd om te beslissen of ik meedoe.
- Ik geef toestemming voor het verzamelen, bewaren en gebruiken van mijn gegevens (lees: jouw antwoorden uit de vragenlijst) voor de beantwoording van de onderzoeksvraag in dit onderzoek.
- Ik wil meedoen aan dit onderzoek en weet dat mijn gegevens geheel anoniem verwerkt worden.
- Ik weet dat meedoen vrijwillig is en dat ik kan stoppen tijdens het onderzoek. Ik weet dat reeds verzamelde gegevens zullen worden gebruikt.

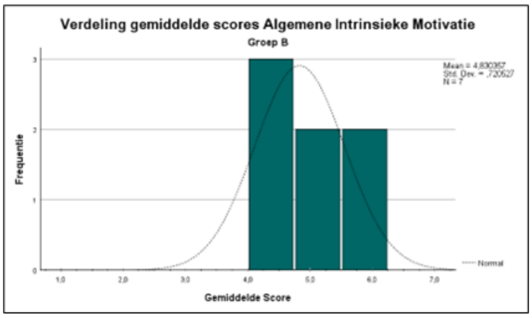
*Ik wil meedoen aan dit onderzoek* ☐

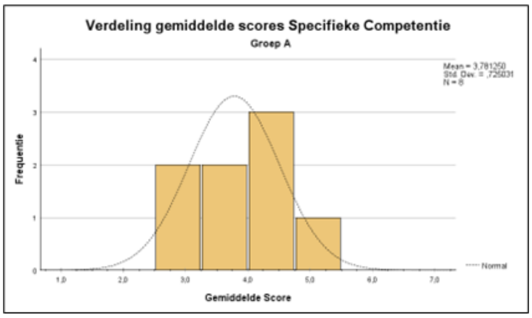
Naam Deelnemer: Naam Onderzoeker:

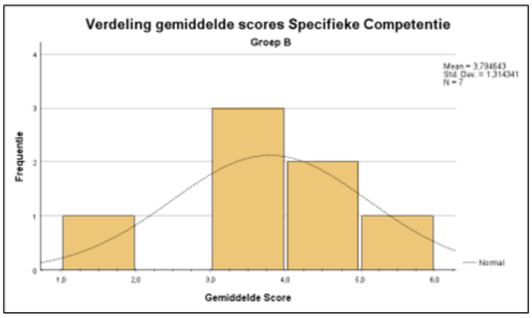
Handtekening: Handtekening:

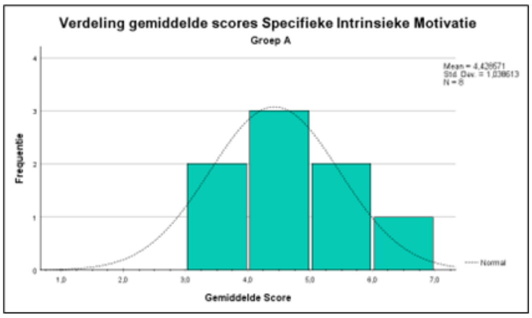
# 16 Bijlage I

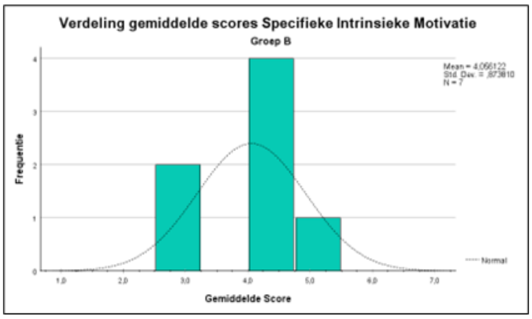

Verdeling gemiddelde scores Algemene Intrinsieke Motivatie
Groep A
Mean = 5,375000
Std. Dev. = 1,369306
N = 8
Frequentie
Gemiddelde Score
Normal

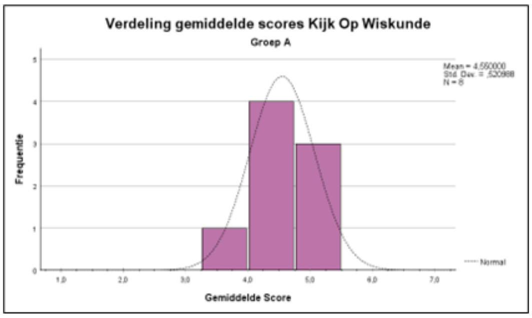

Verdeling gemiddelde scores Algemene Intrinsieke Motivatie
Groep B
Mean = 4,830357
Std. Dev. = ,720527
N = 7
Frequentie
Gemiddelde Score
Normal

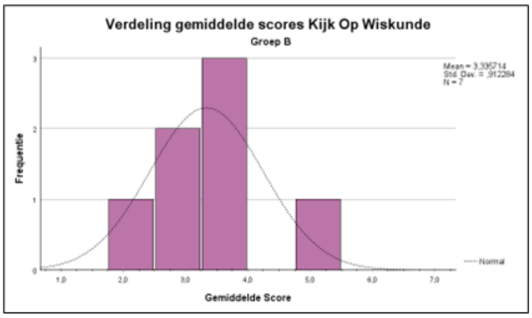

Verdeling gemiddelde scores Specifieke Competentie
Groep A
Mean = 3,781250
Std. Dev. = ,725031
N = 8
Frequentie
Gemiddelde Score
Normal


Verdeling gemiddelde scores Specifieke Competentie
Groep B
Mean = 3,794643
Std. Dev. = 1,314341
N = 7
Frequentie
Gemiddelde Score
Normal


Verdeling gemiddelde scores Specifieke Intrinsieke Motivatie
Groep A
Mean = 4,428571
Std. Dev. = 1,036613
N = 8
Frequentie
Gemiddelde Score
Normal


Verdeling gemiddelde scores Specifieke Intrinsieke Motivatie
Groep B
Mean = 4,056122
Std. Dev. = ,873810
N = 7
Frequentie
Gemiddelde Score
Normal


Verdeling gemiddelde scores Kijk Op Wiskunde
Groep A
Mean = 4,550000
Std. Dev. = ,520988
N = 8
Frequentie
Gemiddelde Score
Normal


Verdeling gemiddelde scores Kijk Op Wiskunde
Groep B
Mean = 3,335714
Std. Dev. = ,912284
N = 7
Frequentie
Gemiddelde Score
Normal