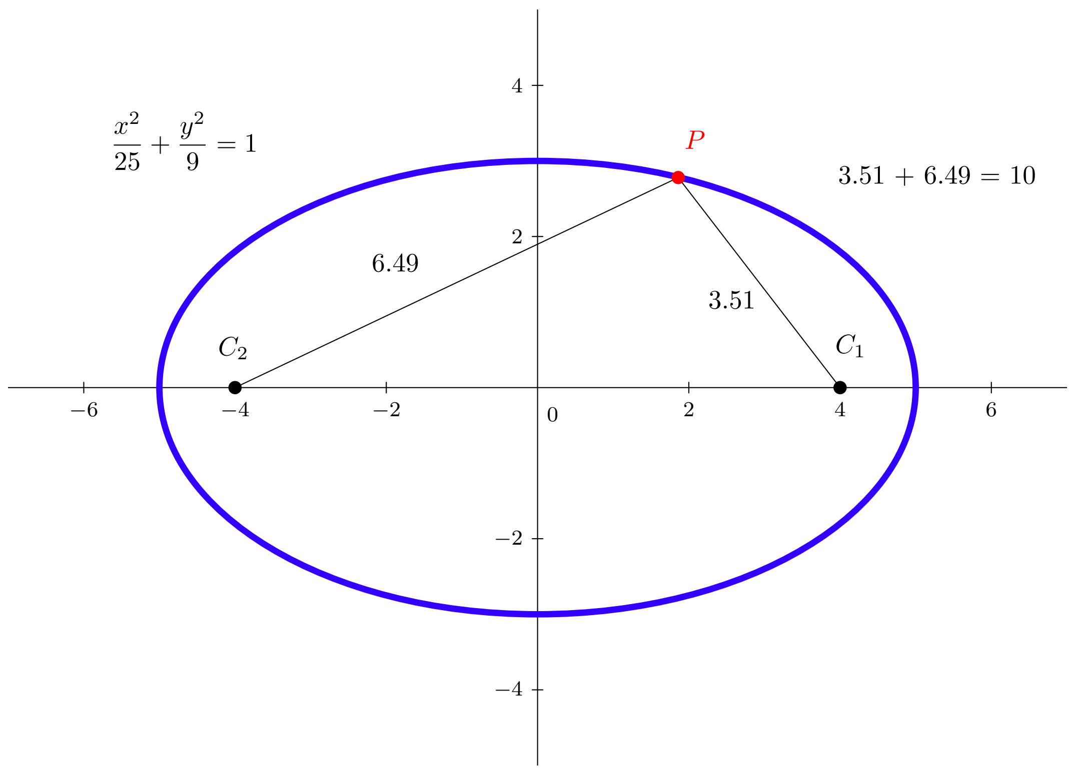
Onderzoek van Onderwijs

Rijkere cognitieve eenheden door het benadrukken van synthetische meetkunde tijdens de behandeling van analytische meetkunde



Mark Timmer

22 augustus 2011

Voor

Piet Timmer
en
Hetty Timmer - Hendriks

Zonder jullie was ik nooit zo ver gekomen.

Voorwoord

Het is alweer ruim 6,5 jaar geleden dat ik voor het eerst voor de klas stond, als onderdeel van de minor Kennisoverdracht. Hoewel het lesgeven me toen ook al erg goed bevallen was, wilde ik toch eerst verder met een Master-opleiding in de Informatica. Na mijn afstuderen heb ik getwijfeld om de lerarenopleiding af te maken, maar een promotietraject diende zich aan en dit was een kans die ik niet aan mij voorbij kon laten gaan.

Op 3 maart 2009, net iets meer dan een halfjaar na de start van mijn promotieonderzoek, stelde Nico van Diepen me op de hoogte van een uitwisselingsprogramma tussen de UT en het voortgezet onderwijs. Hier betrof het het geven van informatica-lessen, met een eventueel uitzicht op een bevoegdheid. Ik vond op dit moment dat ik nog te vroeg in mijn promotie-traject zat om me al met dit soort dingen bezig te gaan houden, en heb toen de boot nog even afgehouden. Bovendien wilde ik liever een wiskundebevoegdheid, aangezien dit me een leuker vak leek op de middelbare school.

Rond de jaarwissel 2009 / 2010 kwam er verandering in de situatie, vanwege een aantal gebeurtenissen. Ten eerste nam een collega ontslag, met de mededeling dat hij zich volledig op onderwijs wilde richten. Op dat moment merkte ik al dat ik hier eigenlijk erg jaloers op was, en begon het verlangen naar het onderwijs weer te groeien. Vervolgens won ik de onderwijsprijs van Informatica, en vroeg een personeelsfunctionaris van de faculteit me waarom ik niet ook de lerarenopleiding ging doen. Ondertussen was het project 'Promovendi voor de klas' van start gegaan, en bleek het mogelijk om met verlenging van het promotietraject een eerstegraads lesbevoegdheid te halen.

Overleg bij ELAN wees uit dat de lerarenopleiding en mijn promotie goed te combineren waren, en op 26 januari 2010 schreef ik me in. Ruim een week later kwam er een vacature binnen van het Carmel College Salland voor een wiskundedocent, en de volgende ochtend zat ik direct op gesprek in Raalte voor een stageplaats. Binnen een paar dagen stond ik voor de klas als docent van H4A, A3A, V4-WA6 en H4-WA4. Het Carmel College behandelde me direct vanaf het begin al als volwaardig docent, en alle collega's hebben ervoor gezorgd dat ik het fantastisch naar mijn zin heb gehad en veel heb geleerd. Iedereen, en met name Marita, ontzettend bedankt voor de fijne tijd!

Nu is het zo'n anderhalf jaar verder. De stage is klaar, alle vakken zijn af en voor u ligt het eindverslag van 'Onderzoek van Onderwijs'. Mijn promotie is nog niet klaar, maar verloopt nog op schema en zal hopelijk in 2012 tot een doctorstitel leiden. Op dit moment is mijn voornemen om vervolgens full-time voor de klas te gaan, en mijn twee grote hobby's — wiskunde en onderwijs — te combineren tot een uitdagende baan. Hopelijk kan ik na mijn promotie weer terecht op het Carmel College Salland.

Bij dezen wil ik graag iedereen bedanken die het mij mogelijk heeft gemaakt mijn lesbevoegdheid te behalen. In eerste instantie mijn promotoren Jaco van de Pol en Joost-Pieter Katoen en begeleidster Mariëlle Stoelinga, voor hun instemming met mijn keuze om de lerarenopleiding parallel aan mijn promotie te volgen. Daarnaast Petra Hendrikse, voor haar vele motiverende gesprekken en begeleiding tijdens de stage. Voor het eindonderzoek wil ik mijn dank uitspreken naar Nellie Verhoef en Gerard Jeurnink, voor hun goede begeleiding en sturing. Ook gaat mijn dank uit naar Henri Ruizenaar voor het ter beschikking stellen van zijn klas VWO 5 Wiskunde D en zijn flexibiliteit, en naar de leerlingen voor hun enthousiaste inzet en medewerking tijdens mijn interviews en lessen.

Om het belangrijkste tot het laatst te bewaren bedank ik Thijs, voor zijn altijd aanwezige steun tijdens en naast mijn werkzaamheden.

Enschede, augustus 2011
Mark Timmer - van der Stam

Inhoudsopgave

1 Inleiding **1**

1.1 Aanleiding 1

1.2 Onderzoeksvraag 2

1.3 Leeswijzer 3

2 Theoretisch kader **5**

2.1 Ellipsen 5

2.1.1 Meetkundige definitie 5

2.1.2 Analytische definitie 6

2.1.3 Symmetrie 6

2.1.4 Parametervoorstellingen 7

2.2 Cognitieve eenheden 7

2.2.1 Samenpersing tot rijke eenheden 8

2.2.2 Totstandbrenging van samenpersing 8

2.3 Visualisatie 9

3 Methodologie **11**

3.1 Deelnemers 11

3.2 Onderzoeksinstrumenten 11

3.2.1 Pretest 12

3.2.2 Posttest 14

3.3 Materiaal 15

3.3.1 Extra materiaal voor §14.1 (Symmetrie) 15

3.3.2 Extra materiaal voor §14.2 (Parametervoorstellingen) 17

3.4 Procedure 19

3.4.1 Lessen over §14.1 (Symmetrie) 19

3.4.2 Lessen over §14.2 (Parametervoorstellingen) 21

3.4.3 Dataverzameling 22

3.4.4 Dataverwerking 24

3.4.5 Data-analyse 24

4 Resultaten **31**

4.1 Leerling 1 31

4.1.1 Pretest 31

4.1.2 Posttest 31

4.1.3 Vergelijking . . . 32
4.2 Leerling 2 . . . 32
4.2.1 Pretest . . . 32
4.2.2 Posttest . . . 32
4.2.3 Vergelijking . . . 33
4.3 Leerling 3 . . . 33
4.3.1 Pretest . . . 33
4.3.2 Posttest . . . 33
4.3.3 Vergelijking . . . 34
4.4 Leerling 4 . . . 34
4.4.1 Pretest . . . 34
4.4.2 Posttest . . . 34
4.4.3 Vergelijking . . . 34

5 Conclusies en discussie **39**
5.1 Conclusies en discussie . . . 39
5.1.1 Interne validiteit . . . 40
5.1.2 Externe validiteit . . . 41
5.2 Aanbevelingen . . . 41

Literatuurlijst **43**

A Transcripties van de pretest **45**
A.1 Leerling 1 . . . 45
A.1.1 Opgave 1 . . . 45
A.1.2 Opgave 2 . . . 46
A.1.3 Opgave 3 . . . 46
A.1.4 Opgave 4 . . . 47
A.1.5 Aantekeningen . . . 50
A.2 Leerling 2 . . . 54
A.2.1 Opgave 1 . . . 54
A.2.2 Opgave 2 . . . 55
A.2.3 Opgave 3 . . . 55
A.2.4 Opgave 4 . . . 56
A.2.5 Aantekeningen . . . 58
A.3 Leerling 3 . . . 62
A.3.1 Opgave 1 . . . 62
A.3.2 Opgave 2 . . . 63

A.3.3 Opgave 3 63
A.3.4 Opgave 4 64
A.3.5 Aantekeningen 66
A.4 Leerling 4 70
A.4.1 Opgave 1 70
A.4.2 Opgave 2 71
A.4.3 Opgave 3 71
A.4.4 Opgave 4 72
A.4.5 Aantekeningen 74

B Visualisaties **79**

C Transcripties van de posttest **89**
C.1 Leerling 1 89
C.1.1 Opgave 1 89
C.1.2 Opgave 2 89
C.1.3 Opgave 3 90
C.1.4 Opgave 4 91
C.1.5 Aantekeningen 93
C.2 Leerling 2 97
C.2.1 Opgave 1 97
C.2.2 Opgave 2 97
C.2.3 Opgave 3 97
C.2.4 Opgave 4 98
C.2.5 Aantekeningen 100
C.3 Leerling 3 104
C.3.1 Opgave 1 104
C.3.2 Opgave 2 104
C.3.3 Opgave 3 105
C.3.4 Opgave 4 105
C.3.5 Aantekeningen 107
C.4 Leerling 4 111
C.4.1 Opgave 1 111
C.4.2 Opgave 2 111
C.4.3 Opgave 3 112
C.4.4 Opgave 4 112
C.4.5 Aantekeningen 114

D Samenvatting van de pre- en posttests **119**
D.1 Leerling 1 119
D.1.1 Pretest 119
D.1.2 Posttest 120
D.2 Leerling 2 120
D.2.1 Pretest 120
D.2.2 Posttest 121
D.3 Leerling 3 122
D.3.1 Pretest 122
D.3.2 Posttest 123
D.4 Leerling 4 123
D.4.1 Pretest 123
D.4.2 Posttest 124

Hoofdstuk 1

Inleiding

Reeds drie eeuwen voor het begin van onze jaartelling wist Euclides van Alexandrië in zijn *Elementen* een meetkunde te beschrijven die rijk is aan prachtige waarheden en interessante verbanden. Nog steeds wordt er in het middelbaar onderwijs veelvuldig gewerkt aan de Euclidische meetkunde, in eerste instantie op synthetische wijze en later bij Wiskunde D ook op analytische wijze.

1.1 Aanleiding

Hoewel de analytische meetkunde een prachtige techniek is om allerlei stellingen in de Euclidische meetkunde op eenvoudige en overtuigende wijze te bewijzen, leidt zij over het algemeen maar weinig tot daadwerkelijk begrip. Daarnaast is het bij sommige problemen zo dat de analytische methode juist veel omslachtiger is dan een synthetische redenatie.

Aangezien het middelbaar wiskundeonderwijs naast het bevorderen van wiskundige vaardigheden ook zou moeten leiden tot een vergroting van het wiskundig inzicht van leerlingen, is het meetkundeonderwijs wellicht voor verbetering vatbaar. Hoewel er wel enkele eindtermen in de richting van meetkundig denken zijn geformuleerd, wordt bij een aanzienlijk gedeelte van de stof niet genoeg tot nadenken aangezet.

In dit onderzoek richten we ons op de analytische meetkunde in het examenprogramma van Wiskunde D op het VWO. Hier wordt over het algemeen driftig gerekend, zonder dat er continu wordt stilgestaan bij het feit waar men nu eigenlijk precies mee bezig is. Dit leidt naar onze verwachting tot gefragmenteerde cognitieve eenheden. In plaats van dat leerlingen een totaalbeeld krijgen van de meetkundige concepten waar ze mee werken, blijven de synthetische meetkunde en de analytische meetkunde van elkaar gescheiden en worden niet alle verbanden tot stand gebracht. Dit zorgt voor een beperkt inzicht in de wiskundige structuren waar het om draait, en bovendien tot een beperkt arsenaal aan oplosstrategieën bij opgaven uit de verschillende meetkundige domeinen. De analytische meetkunde wordt een doel op zich; men zet formules om in andere formules, met weinig gevoel voor de meetkundige concepten waar het eigenlijk over gaat.

Het doel van dit onderzoek is het meetkundeonderwijs te verbeteren, door leerlingen tijdens hun bestudering van de analytische meetkunde meer te laten stilstaan bij de onderliggende meetkundige concepten. De hoop is dat leerlingen hierdoor meer inzicht krijgen in de meetkundige concepten waar over geredeneerd wordt. Dit zal naar verwachting leiden tot rijkere cognitieve eenheden: leerlingen zullen beter begrijpen hoe verschillende representaties van meetkundige concepten zoals parabolen en ellipsen samenhangen, en snel kunnen switchen tussen representaties om zo tot slimmere oplosstrategieën te komen bij opgaven waar een puur analytische benadering omslachtiger is dan noodzakelijk.

1.2 Onderzoeksvraag

Op basis van de bovenstaande overweging is gepoogd de volgende onderzoeksvraag te beantwoorden:

> *"Leidt het benadrukken van onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde, eventueel gevisualiseerd door middel van GeoGebra, in Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4 (Analytische meetkunde – Krommen) tot rijkere cognitieve eenheden?"*

De theoretische achtergronden van deze vraag zullen in Hoofdstuk 2 worden besproken. Hieronder volgt eerst een algemene toelichting op de specifieke onderdelen van de onderzoeksvraag.

Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4. Als werkveld voor het onderzoek is gekozen voor Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4: het laatste boek van Wiskunde D op het VWO. In dit hoofdstuk wordt het laatste gedeelte van de stof over analytische meetkunde behandeld aan de hand van verscheidene krommen. Met behulp van onder andere parabolen, ellipsen en hyperbolen wordt gekeken naar symmetrie, parametervoorstellingen en differentiaalquotiënten. Ook wordt gekeken naar ruimtekrommen.

Dit hoofdstuk doet op verscheidene plaatsen precies hetgeen wat wij juist graag willen voorkomen: er wordt 'onnozel' gerekend aan vergelijkingen van meetkundige figuren, zonder dat er stil wordt gestaan bij de onderliggende meetkunde en de eigenschappen die hier direct uit volgen. Hier is daarom extra toelichting gegeven over hoe het slimmer kan worden aangepakt. Ook hebben we extra opgaven toevoegen om leerlingen meer de kans te geven om meetkundige redenaties toe te passen op ogenschijnlijk analytische opgaven.

Nadruk op onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde. De opgaven in het hoofdstuk gaan voornamelijk over kegelsneden. Er wordt echter slechts gerekend aan de vergelijkingen van parabolen, ellipsen en hyperbolen, zonder veel stil te staan bij de meetkundige objecten zelf. Zo wordt er nergens gebruikgemaakt van eigenschappen zoals het feit dat ieder punt op een ellips een gelijke som heeft van zijn afstanden tot de brandpunten, of dat raaklijnen van overeenkomstige punten op getransleerde figuren evenwijdig zijn.

In dit onderzoek is gepoogd juist wel zoveel mogelijk nadruk te leggen op het feit dat de figuren die bij de vergelijkingen horen inderdaad dergelijke eigenschappen hebben. Dit is zowel gebeurd door middel van klassikale uitleg als door de leerlingen extra oefenopgaven te maken waarbij dergelijke eigenschappen relevant zijn.

Visualisatie door middel van GeoGebra. Veel concepten uit de meetkunde kunnen prachtig gevisualiseerd worden door middel van dynamische software. GeoGebra is een applicatie die meetkunde en algebra combineert, door een meetkundig vlak te combineren met een algebra-venster. Zo kunnen vergelijkingen worden ingegeven om figuren te construeren, maar kunnen ook figuren getekend of getransformeerd worden om vervolgens de bijbehorende vergelijkingen te verkrijgen. Bovendien kunnen punten dynamisch worden verplaatst, waarbij alle vastgelegde meetkundige eigenschappen behouden blijven. Zo kan men bijvoorbeeld het brandpunt van een ellips verplaatsen, waarbij de ellips netjes meetransformeert om ervoor te zorgen dat alle verhoudingen nog steeds juist zijn.

Hoewel visualisatie van meetkundige concepten niet het doel van het onderzoek is, kan het bijdragen aan het meetkundige inzicht. Bij het benadrukken van de onderliggende meetkundige concepten uit de synthetische meetkunde tijdens het behandelen van het genoemde hoofdstuk hebben we daarom waar mogelijk gebruikgemaakt van deze technologie, in de hoop dat dit het inzicht in de verbanden en overeenkomsten nog verder versterkt.

Rijkere cognitieve eenheden. Zoals in meer detail besproken zal worden in Hoofdstuk 2, is een cognitieve eenheid een mentale structuur die in volledigheid in beschouwing kan worden genomen (Barnard & Tall, 1997). Het kan gezien worden als een soort klont van informatie en begrip, waar direct gebruik van kan worden gemaakt. Met name van belang zijn cognitieve eenheden met rijke interne connecties tussen verschillende concepten of verschillende vormen van hetzelfde concept, die ervoor zorgen dat de kennis over deze concepten en hun onderlinge samenhang als eenheid gezien kan worden (Barnard & Tall, 2001).

Deze visie van kennis en begrip als cognitieve eenheden sluit goed aan op de probleemstelling binnen dit onderzoek. Gehoopt wordt te bereiken dat leerlingen rijke cognitieve eenheden ontwikkelen betreffende meetkundige concepten zoals de ellips. De verscheidenheid aan representaties van en omgangsmethoden met dergelijke meetkundige concepten maakt het van belang om *the big picture* te zien, en dan met name als rijke cognitieve eenheid met connecties tussen de verschillende vormen van de concepten.

Vanzelfsprekend heeft niet iedere persoon dezelfde cognitieve eenheden, en liggen de cognitieve eenheden van een specifieke persoon ook niet vast. Dit onderzoek heeft gepoogd om, door de nadruk te leggen op meetkundige concepten tijdens de behandeling van analytische meetkunde in het middelbaar onderwijs, de cognitieve eenheden van deze concepten rijker te maken.

1.3 Leeswijzer

Een diepere uiteenzetting van de theoretische achtergronden van het onderzoek zal worden besproken in Hoofdstuk 2. Aan de orde komen de wiskundige inhoud, de theorie omtrent cognitieve eenheden en de theorie omtrent visualisaties. Vervolgens zal in Hoofdstuk 3 worden stilgestaan bij de onderzoeksmethodologie die is toegepast. Aan de orde komen de deelnemers, de onderzoeksinstrumenten, het materiaal en de procedure. Hoofdstuk 4 bespreekt de resultaten van het onderzoek, waarna Hoofdstuk 5 afsluit met conclusies en discussie.

Hoofdstuk 2

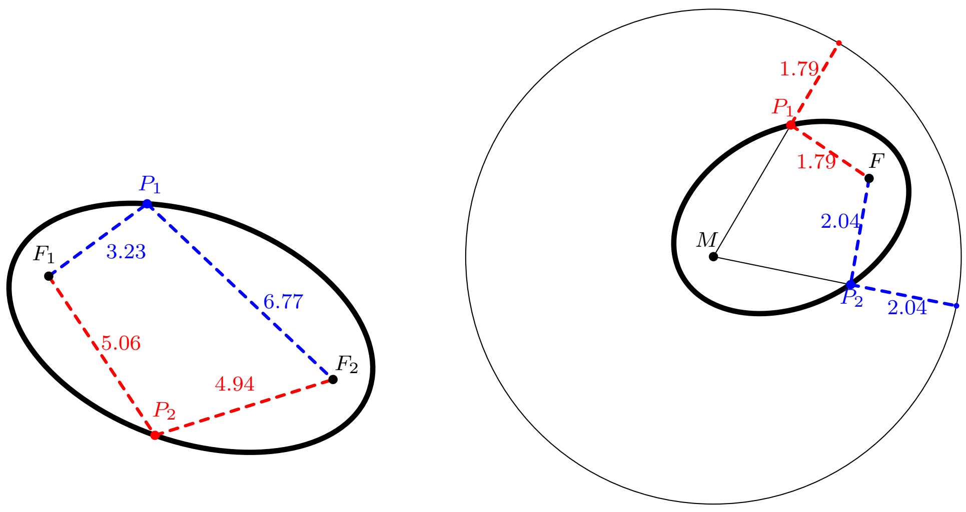
Theoretisch kader

Aangezien in dit onderzoek gekeken wordt naar het effect van een bepaalde lesstijl op de cognitieve eenheden van leerlingen betreffende meetkundige objecten (met name ellipsen), is het van belang om in ieder geval duidelijk te hebben wat cognitieve eenheden precies zijn. Bovendien is het voor het vervolg nuttig om een goed beeld van ellipsen te hebben. In dit hoofdstuk wordt daarom eerst ingegaan op de inhoudelijke wiskundige theorie die in dit onderzoek aan de orde komt. Vervolgens zal een overzicht worden gegeven van de theorie omtrent cognitieve eenheden. Als laatste wordt nog dieper ingegaan op het aspect visualisatie; een onderdeel van de aangepaste lesmethode die gehanteerd wordt.

2.1 Ellipsen

2.1.1 Meetkundige definitie

Meetkundig kan een ellips op twee manieren ontstaan: het is ofwel de verzameling van punten met gelijke opgetelde afstand tot twee gegeven brandpunten F_1 en F_2, ofwel de verzameling van punten met gelijke afstand tot een cirkel en een punt F binnen die cirkel (Reichard et al., 2008). Figuur 2.1 illustreert beide definities. Uitgaande van de definitie als conflictlijn van cirkel en punt is het eenvoudig in te zien dat beide definities overeenkomen. Immers, in Figuur 2.1(b) is direct duidelijk dat $MP_i + P_iF$ gelijk is aan



(a) Gelijke somafstand tot brandpunten.

(b) Conflictlijn van cirkel en punt.

Figuur 2.1: Twee definities van een ellips.

de straal van de cirkel voor beide punten P_i, en evenzo voor alle andere punten op de ellips. De ellips die ontstaat als verzameling punten met gelijke afstand tot een punt F en een cirkel met middelpunt M en straal r komt dus overeen met de ellips die ontstaat als verzameling punten met somafstand r tot M en F. Anders gezegd zijn M en F de brandpunten van de ellips in Figuur 2.1(b).

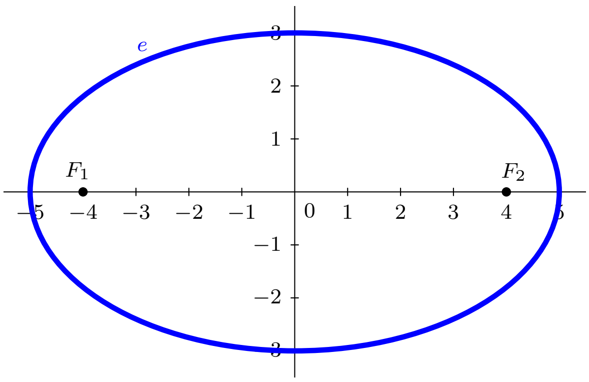
2.1.2 Analytische definitie

Door een ellips op slimme wijze in een assenstelsel te plaatsen kan er een eenvoudige vergelijking voor worden opgesteld:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

waarbij a de helft van de lengte van de as in de x-richting is en b de helft van de lengte van de as in de y-richting. Enig rekenwerk laat zien dat a overeenkomt met de helft van de straal van de richtcirkel en dus met de helft van de somafstand tot de brandpunten (Reichard et al., 2008). Verder geldt $b^2 = a^2 - c^2$, waarbij c de helft van de afstand tussen de brandpunten van de ellips is.

De onderstaande afbeelding geeft de ellips $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ weer. Te zien is hoe de waarden van a en b in de figuur terugkomen als de afstanden vanuit de oorsprong tot de toppen.



Zoals ieder figuur kan uiteraard ook de ellips geroteerd of getransleerd worden. Met name translaties kunnen eenvoudig analytisch uitgevoerd worden: om de bovenstaande ellips 3 eenheden naar links en 2 eenheden naar beneden te verplaatsen vervangen we simpelweg x door $x - 3$ en y door $y + 2$.

2.1.3 Symmetrie

Interessant aan de ellips is de veelvuldigheid aan symmetrie die aanwezig is. Zo is de ellips, zoals weergegeven hierboven met de oorsprong als midden, symmetrisch in zowel de x- als de y-as. Dit impliceert dus dat hij bovendien puntsymmetrisch is in de oorsprong (Reichard et al., 2009). Voor getransleerde en geroteerde ellipsen geldt uiteraard hetzelfde, hoewel de lijnen en het punt van symmetrie dan anders zullen liggen.

Vanwege de symmetrie is het eenvoudig in te zien dat als een punt (a, b) op de bovenstaande ellips ligt, de punten $(-a, b)$, $(a, -b)$ en $(-a, -b)$ er ook op liggen.

2.1.4 Parametervoorstellingen

Behalve op basis van de bovengenoemde vergelijking, kan een ellips ook door een parametervoorstelling gerepresenteerd worden (Reichard et al., 2009). Hierbij wordt in feite de baan van een punt over de ellips beschreven, op basis van een tijdsparameter t. Zo kan de ellips uit Sectie 2.1.2 beschreven worden door middel van de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x(t) &= 5\cos(t) \\ y(t) &= 3\sin(t) \end{cases}$$

Als t van 0 tot 2π loopt, ontstaat zo precies dezelfde figuur. Dat deze parametervoorstelling inderdaad met de gegeven vergelijking $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ overeenkomt is eenvoudig af te leiden:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} &= \frac{(5\cos(t))^2}{25} + \frac{(3\sin(t))^2}{9} \\ &= \frac{25\cos^2(t)}{25} + \frac{9\sin^2(t)}{9} \\ &= \cos^2(t) + \sin^2(t) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Op basis van deze representatie is makkelijk te zien dat de ellips in feite een uitgerekte cirkel is. In het geval van het voorbeeld is de cirkel in de x-richting met een factor 5 vermenigvuldigd, en in de y-richting met een factor 3.

2.2 Cognitieve eenheden

Het menselijk brein is vanzelfsprekend niet in staat om aan honderden dingen tegelijk te denken. Ingewikkelde beslissingen en ook bijvoorbeeld wiskundige handelingen moeten daarom behapbaar gemaakt worden door te abstraheren van onbelangrijke details en te focussen op de belangrijkste aspecten (Barnard & Tall, 1997). De term *cognitieve eenheid* is ontstaan uit dit idee, en beschrijft een mentale structuur die in volledigheid in beschouwing kan worden genomen:

> *"A* cognitive unit *consists of a cognitive item that can be held in the focus of attention of an individual at one time, together with other ideas that can be immediately linked to it."*
>
> *Tall en Barnard (2002)*

Het 'cognitieve item' waar over gesproken wordt kan bijvoorbeeld bestaan uit een formule zoals $a^2+b^2 = c^2$, een feit zoals $10+3 = 13$ of een mentaal beeld van een ellips. Hoe rijker het begrip van een persoon, hoe meer verbonden verschillende van dergelijke items zullen zijn. Zo zal er voor de meeste mensen weinig verschil zijn tussen $3 + 4$, $4 + 3$ en 7, en zijn deze cognitieve items in zo'n geval dus sterk gekoppeld. Als de verbindingen tussen cognitieve items sterk zijn, kunnen ze samen beschouwd worden als een enkele cognitieve structuur: een cognitieve eenheid.

Barnard en Tall (2001) leggen de nadruk op het belang van *rijke* cognitieve eenheden, die sterke interne verbanden tussen verschillende objecten of representaties van objecten hebben en daardoor tot krachtige denkstappen kunnen leiden. Als voorbeeld wordt gekeken naar de drie relaties $P = QR$, $\frac{P}{Q} = R$ en $\frac{P}{R} = Q$. Initieel zal een leerling dergelijke vergelijkingen waarschijnlijk los van elkaar zien, terwijl er later een rijkere cognitieve eenheid kan ontstaan waarin de drie relaties als verschillende representaties van hetzelfde concept beschouwd worden. Het idee is dat dit leidt tot meer efficiëntie en inzicht bij het manipuleren van ideeën waarbij deze kennis toegepast kan worden.

2.2.1 Samenpersing tot rijke eenheden

Rijke cognitieve eenheden ontstaan niet zomaar. In eerste instantie zal een persoon een gefragmenteerd inzicht hebben in een nieuw concept, en via verscheidene ogenschijnlijk verschillende manieren tot volledig begrip komen. Echter, als een concept eenmaal volledig begrepen is, vindt er vaak een significante '*mentale samenpersing*' plaats (Thurston, 1990). Dit heeft volgens Thurston tot effect dat het volledige begrip – hoewel in eerste instantie bereikt door een langdurig proces – eenvoudig opgeroepen kan worden en als onderdeel binnen een nieuwe gedachtegang gebruikt kan worden.

In de terminologie van Barnard en Tall (1997) komt het bovengenoemde proces van samenpersing overeen met het aanleggen van connecties binnen een cognitieve eenheid, met als resultaat een verrijking daarvan. Een zo ontstane rijke cognitieve eenheid is van belang binnen het wiskundig denken aangezien er nu ineens veel meer aspecten van een concept tegelijk in beschouwing genomen kunnen worden (Barnard, 1999).

Het begrip samenpersing wordt in de in dit hoofdstuk geciteerde literatuur op twee manieren gebruikt: ten eerste voor het samenpersen van kennis tot kleine cognitieve items (Gray & Tall, 2007), ten tweede voor de wijze waarop verschillende cognitieve items gekoppeld worden tot sterkverbonden cognitieve eenheden (Tall & Barnard, 2002). Aangezien beide processen tot rijkere cognitieve eenheden leiden, zal in dit onderzoek geen onderscheid worden gemaakt tussen de twee definities.

2.2.2 Totstandbrenging van samenpersing

Om samenpersing tot stand te brengen zullen hersengebieden dusdanig sterk verbonden moeten worden dat het aanspreken van een ervan de rest ook activeert. Immers, dat leidt tot de observatie dat de gecombineerde kennis en inzichten van deze gebieden als een enkele cognitieve structuur functioneren (Tall & Barnard, 2002). Volgens Tall en Barnard kan dit worden bewerkstelligd door middel van langetermijnpotentiatie (LTP), een bekend fenomeen uit de neurologie waarbij een veelvuldige gelijktijdige activatie van neuronen voor een versterkte verbinding ertussen zorgt. Overigens vermelden Gray en Tall (2007) dat het wel van belang is om LTP op een correcte wijze toe te passen: als het wordt ingezet door handelingen vaak te herhalen en zonder begrip regels te automatiseren, ontstaat een breekbare cognitieve structuur die niet meer van nut is als situaties ingewikkelder worden.

Concreter gezegd, kan samenpersing op verscheidene manieren tot stand worden gebracht (Tall, 2006). Zo is te denken aan het categoriseren van concepten of het uitvoeren van gedachte-experimenten die leiden tot verbindingen tussen eigenschappen. Ook het simpelweg oefenen van handelingen tot ze geautomatiseerd zijn kan helpen bij het ontstaan van rijke cognitieve eenheden. Aangezien dit biologisch door middel van LTP zal moeten gebeuren, is herhaling van belang (Tall, 2006). Een andere belangrijke methode om compressie tot stand te brengen is het introduceren van symbolen of namen voor concepten, ook wel *abstractie* genoemd. Zo geven Gray en Tall (2002, 2007) aan dat we pas de macht krijgen om over een fenomeen te praten als het een naam heeft gekregen. Er kan dan op een verfijndere wijze over het fenomeen gedacht worden, aangezien het in feite tot een cognitieve eenheid samengeperst is.

2.3 Visualisatie

De benadrukking van onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde gebeurt in dit onderzoek veelvuldig met behulp van GeoGebra: een computerprogramma voor dynamische meetkunde (Hohenwarter & Preiner, 2007). De meetkundige objecten waarover gesproken wordt lenen zich er immers perfect voor om dynamisch gevisualiseerd te worden. Zo kan bijvoorbeeld een vergelijking voor een ellips gegeven worden met een variabele parameter a en een schuifbalk, zodat leerlingen direct zien wat er met de ellips gebeurt als de waarde van a groter of kleiner gemaakt wordt.

Uit de literatuur blijkt dat visualisatie voor verrijking van begrip van zorgen, hoewel dat zeker niet altijd het geval hoeft te zijn. Zo schrijft Stols (2010) dat het gebruik van ICT (om precies te zijn GeoGebra en Cabri 3D) niet altijd een positieve invloed heeft op de meetkundige conceptuele groei van leerlingen. Specifieker volgt uit de resultaten van zijn onderzoek dat het slechts van nut is bij leerlingen met nog reeds weinig begrip van de concepten, en zelfs in dat geval slechts marginaal. Aangeraden wordt om programmatuur zoals GeoGebra in te zetten om visualisatie en conceptueel begrip te verbeteren, en leerlingen de kans te geven om relaties te ontdekken. Het werkt echter niet noodzakelijkerwijs om redeneervaardigheden te bevorderen. In dit onderzoek is GeoGebra dan ook inderdaad slechts ingezet ter visualisatie en het zien van verbanden.

Ook andere onderzoekers geven aan dat er winst te behalen is, maar dat dit niet vanzelfsprekend is. In het algemeen werd al vroeg aangegeven dat het gebruik van de computer tijdens de wiskundeles tot een verhoging van de motivatie van leerlingen leidt (Clements, Battista, Sarama, Swaminathan & McMillan, 1997). Meer toegesplitst op meetkunde, schrijven Sutherland en Balacheff (1999) dat “the computer affords the possibility of rendering more visible the nature of the objects with which a student is engaging”, maar dat het aan de andere kant ook niet direct voor iedere leerling eenvoudig is om de activiteiten op het computerscherm als meetkunde te interpreteren. Hier blijkt uit dat het essentieel is om de leerlingen te blijven ondersteunen in hun gedachteproces, en niet slechts te laten kijken naar de mooie plaatjes. Ook Langill (2009) schrijft dat software zoals GeoGebra met name als supplement op niet-technologische bronnen zoals boeken gebruikt moet worden. Zij vermeldt dat de meest krachtige mogelijkheden van dynamische meetkunde bestaan uit het meten van afstand en het verplaatsen van punten (*dragging*). Hiertoe worden de visualisaties in dit onderzoek dan ook telkens vergezeld door extra opgaven om de geobserveerde eigenschappen toe te passen, en wordt veelvuldig gebruikgemaakt van dragging en metingen om meetkundige eigenschappen te tonen.

Weer ander onderzoek toonde aan dat technologie leerlingen kan helpen bij het leggen van verbindingen tussen verschillende representaties van hetzelfde concept, maar ook dat technologie niet te vroeg ingezet moet worden (Alagic, 2003). Gesteld wordt dat hetgeen wat op het beeldscherm getoond wordt direct gelieerd moet zijn aan de kennis die leerlingen reeds hebben, om frustraties en misconcepties te voorkomen. In dit onderzoek worden visualisaties ook slechts gebruikt voor het verduidelijken van concepten waar de leerlingen al eerder kennis mee hebben gemaakt, zodat niet in deze valkuil gestapt zal worden.

Overigens wordt nog lang niet overal gebruikgemaakt van dynamische meetkundesoftware om leerlingen wiskunde te leren. Stols en Kriek (2011) schrijven dat met name een negatieve verwachting van het nut van dergelijke technologie en een gebrek aan vertrouwen in hun eigen technische vaardigheden docenten ervan weerhouden om software zoals GeoGebra te gebruiken. Ook Zhao, Pugh, Sheldon en Byers (2002) kwamen tot deze conclusie, inclusief de observatie dat docenten kleine evolutionaire stapjes moeten maken bij de introductie van ICT in het klaslokaal; een revolutionaire omslag zou slechts tot mislukkingen en frustratie leiden.

In het huidige onderzoek wordt slechts gebruikgemaakt van GeoGebra door de docent. Het is uiteraard ook mogelijk om leerlingen zelf te laten spelen met de applicatie. Hoewel inderdaad uit de literatuur blijkt dat dit positief kan werken voor bijvoorbeeld het ontdekken van meetkundige stellingen (Abumosa, 2008; Saha, Ayub & Tarmizi, 2010) of het begrijpen van meetkundige transformaties (Hollebrands, 2003), is GeoGebra in dit onderzoek nog slechts demonstratief ingezet. De nadruk lag immers ook niet op het aanleren van nieuwe meetkundige vaardigheden, maar meer op het toepassen van reeds aanwezige meetkundige kennis in een nieuwe context (analytische meetkunde).

Hoofdstuk 3

Methodologie

Zoals toegelicht in de inleiding, is dit onderzoek toegespitst op het 'vermeetkundigen' van de analytische meetkunde. Door de nadruk te leggen op de onderliggende meetkundige concepten, hopen we leerlingen een beter begrip en meer inzicht te geven in de verbanden tussen verscheidene representaties. Dit zal naar verwachting leiden tot rijkere cognitieve eenheden: leerlingen zullen beter begrijpen hoe verschillende representaties van meetkundige concepten zoals parabolen en ellipsen samenhangen, en snel kunnen switchen tussen representaties om zo tot slimmere oplosstrategieën te komen bij opgaven waar een puur analytische benadering omslachtiger is dan noodzakelijk.

3.1 Deelnemers

Het onderzoek is uitgevoerd op het Stedelijk Lyceum Kottenpark te Enschede. De analytische meetkunde komt alleen voor binnen het curriculum van Wiskunde D, en er is dan ook inderdaad gekozen om het onderzoek uit te voeren in de klas Wiskunde D in het leerjaar VWO 5, onder de hoede van Henri Ruizenaar.

Het bleek dat deze klas slechts uit vier leerlingen bestond. Hoewel dit een zinvolle kwantitatieve analyse onmogelijk maakte, bood het juist wel perspectieven voor een kwalitatieve onderzoeksaanpak. Vanwege de beperkte hoeveelheid leerlingen kon de nadruk liggen op didactiek, en hoefde er geen energie te worden besteed aan ordeproblematiek.

Dooley (2001) geeft aan dat het bij kwalitatief onderzoek in eerste instantie van belang is om toegang te krijgen tot de doelgroep en in een positie te komen waarbij het mogelijk is om te observeren en te ondervragen. Voor dit onderzoek is er daarom voor gekozen om de onderzoeker een actief onderdeel van het onderwijsproces te maken: hij heeft het volledige hoofdstuk onderwezen, en is voor de leerlingen het aanspreekpunt geweest tijdens deze periode. Dit maakte het mogelijk om de lesstof inderdaad op een aangepaste manier aan te bieden en de leerlingen te observeren en te bevragen tijdens het gehele proces. De reguliere docent was ook tijdens de lessen aanwezig.

3.2 Onderzoeksinstrumenten

Veel van de extra inzichten die we leerlingen wilden laten vergaren kunnen worden toegepast op opgaven die ze aan het begin van het traject nog niet konden maken. Immers, interessante opgaven uit bijvoorbeeld de tweede paragraaf van het boek, waar meetkundig inzicht voor slimmere oplosstrategieën kan zorgen, zijn afhankelijk van theorie die eerder in het hoofdstuk aan de orde komt.

Het was dus niet zinvol om vooraf een pretest af te nemen waarbij de leerlingen wordt gevraagd om deze opgaven te maken, vervolgens de leerlingen iets bij te leren, en dan achteraf dezelfde opgaven als posttest af te nemen en de resultaten te vergelijken. Dit zou een vertekend beeld geven; uiteraard kunnen de leerlingen de opgaven aan het begin van het hoofdstuk nog niet allemaal maken, maar dat wil nog niet zeggen dat de nadruk op meetkundige concepten tot rijkere cognitieve eenheden heeft gezorgt.

Wat we in plaats daarvan hebben gedaan, is een abstractere analyse van de cognitieve eenheden van de leerlingen betreffende de belangrijkste meetkundige concepten in het kader van het hoofdstuk: kegelsneden. In eerdere hoofdstukken hebben de leerlingen reeds kennisgemaakt met kegelsneden. Zowel de meetkundige definities (de ellips als conflictlijn van een brandpunt en een richtcirkel, de ellips als verzameling van punten met gelijke opgetelde afstand tot twee brandpunten) als de analytische definitie (de ellips als oplossing van de vergelijking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$) zijn aan de orde geweest. Het is echter de vraag in hoeverre leerlingen deze verschillende concepties van de meetkundige begrippen aan elkaar gekoppeld hebben.

Vooraf hebben we door middel van een pretest geanalyseerd hoe rijk de cognitieve eenheden van de leerlingen van de bovengenoemde concepten reeds waren door middel van een semi-gestructureerd interview. Vervolgens is het hoofdstuk behandeld, met extra nadruk op de verbanden tussen de verschillende domeinen. Achteraf is wederom een semi-gestructureerd interview gehouden (de posttest) om te zien in hoeverre er verschil is aangebracht.

Er is voor gekozen om bij het meten van de cognitieve eenheden van de leerlingen te focussen op de ellips. Dit meetkundige object is ook degene die in het hoofdstuk het vaakst aan de orde komt. Door de parabool en de hyperbool in de interviews achterwege te laten worden leerlingen niet overspoeld met haast overeenkomstige vragen. Immers, als eerst een tijd over de ellips is gepraat en vervolgens de hyperbool aan de orde zou komen, zouden de reacties van de leerlingen beïnvloed zijn door het eerdere gesprek over de ellips aangezien de eigenschappen van hyperbolen en ellipsen betrekkelijk op elkaar lijken.

Voor het construeren van de pre- en posttest is uitgegaan van de observatie dat rijke cognitieve eenheden leiden tot sterke verbindingen tussen cognitieve structuren en krachtige denkmethodes (Tall & Barnard, 2002). Hiertoe is ervoor gekozen om de leerlingen een aantal opgaven te geven, waarbij deze methodes inderdaad noodzakelijk zijn. Ze zullen relaties moeten leggen tussen analytische representaties en synthetische technieken om op slimme wijze tot correcte oplossingen te komen.

3.2.1 Pretest

Zoals Dooley (2001) al aangeeft is het bij kwalitatief onderzoek niet altijd op voorhand duidelijk wat er precies geobserveerd moet worden: tijdens een interview kunnen de reacties van de leerlingen bepalen welke kant de vragen op gaan. Toch is vooraf wel nagedacht over een aantal vragen die sowieso aan de orde moesten komen, in de vorm van wiskundige opgaven. Er was dus sprake van semi-gestructureerde interviews. De pretest bestond uit vier onderdelen, zoals weergegeven in Figuur 3.1.

De eerste opgave vraagt naar het opsommen van alle kennis over het concept ellips binnen één minuut. Tijdens deze minuut heeft de interviewer geen hints gegeven of de leerling een bepaalde richting op gestuurd, maar mocht de leerling gewoon zoveel mogelijk opnoemen als in hem of haar opkwam. Na deze initiële 'brainstormminuut' is nog verder doorgepraat over hun ideeën bij het begrip. Aangezien niet iedereen zich nog precies kon herinneren wat ook alweer de meetkundige en analytische definities waren, zijn de leerlingen op dit moment waar nodig enigszins in de goede richting gestuurd om door te kunnen praten over het onderwerp. Zo werd bij de leerlingen die niet meer precies op de formule $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ konden komen uiteindelijk toch gestuurd in die richting, zodat doorgevraagd kon worden over wat al die parameters nou precies betekenen.

Opgave 1. Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk in één minuut.

Opgave 2. Gegeven is de ellips $e\colon \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$.

(a) Laat zien dat het punt $P(4, 3)$ op de ellips ligt.

(b) Ligt het punt $P(-4, 3)$ op de ellips? Waarom?

Opgave 3. Het punt P doorloopt de ellips $e\colon \frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$. Gegeven is ook het punt $A(-5, -3)$. Welke kromme beschrijft een punt Q als het zich op het midden van het lijnstuk AP bevindt terwijl P over de ellips loopt?

Opgave 4. Gegeven een ellips $e\colon \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

(a) Geef de coördinaten van de brandpunten F_1, F_2.

(b) Gegeven is nu een cirkel c met straal 10 en als middelpunt M het brandpunt van e links van de y-as. Wat is de afstand tussen de cirkel en het punt $P(0, 4)$?

Figuur 3.1: Opgaven van de pretest.

De tweede opgave biedt een ellips aan in analytische vorm, en vraagt de leerling te laten zien dat een bepaald punt inderdaad op deze ellips ligt. Dit kan eenvoudig gedaan worden door de coördinaten in te vullen in de vergelijking. Op basis van de voorkennis uit een voorgaand hoofdstuk, waarin de standaardvorm van de ellips reeds uitgebreid aan de orde is geweest, zou dit geen problemen moeten opleveren. Vervolgens wordt gevraagd of een ander punt ook op de ellips ligt. Leerlingen die een beeld hebben van de meetkundige representatie van een ellips, zullen direct doorhebben dat dit tweede punt vanwege de symmetrie inderdaad ook op de ellips ligt. Anderen zullen wellicht in de analytische setting blijven, en zonder nadenken ook dit tweede punt invullen.

De derde opgave behandelt een punt P dat over een ellips loopt, een vast punt A en een punt Q dat zich op het midden van de lijn AP bevindt. Gevraagd wordt wat voor kromme het punt Q beschrijft. Hiervoor zouden de leerlingen analytisch aan de slag kunnen gaan, of door zich een meetkundige voorstelling van de situatie te maken direct in kunnen zien dat Q ook een ellips beschrijft die verschoven is ten opzichte van het origineel en in zowel x- als y-richting met een factor 0,5 vermenigvuldigd is.

De laatste opgave vraagt om de brandpunten van een analytisch gegeven ellips te bepalen. Vervolgens wordt een cirkel getekend met als middelpunt een van de brandpunten en als straal de lengte van de lange as van de ellips. Leerlingen met een rijke cognitieve eenheid betreffende de ellips zouden dit direct moeten herkennen als de richtcirkel van de ellips, en zouden op basis hiervan de opgave eenvoudig op moeten kunnen lossen: de afstand van P tot de cirkel is gelijk aan de afstand van P tot het brandpunt ongelijk aan M. Dit kan eenvoudig met de stelling van Pythagoras berekend worden, of zelfs nog slimmer door te zien dat $d(P, F_1) = d(P, F_2)$ en dat daarom $d(P, c) = d(P, F_i) = a = 5$. Als de cognitieve eenheid nog niet rijk genoeg is om analytische meetkunde en synthetische meetkunde te combineren, zal wellicht een vergelijking voor de cirkel worden opgesteld en een vergelijking voor de lijn l uit M door P, om zo het snijpunt van l en c te vinden en dan de afstand van P tot dit snijpunt.

Opgave 1. Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk in één minuut.

Opgave 2. Gegeven is de familie van ellipsen $e_k\colon \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{k} = 1$, met $k > 0$.

(a) Het punt $P(x_P, 0)$ ligt op ieder van deze ellipsen. Welke waarden kan x_P hebben?

(b) Voor precies één waarde van k geldt dat het punt $Q(3, 5)$ op de ellips e_k ligt. Op deze ellips e_k ligt ook het punt $R(-3, y_R)$. Welke waarden kan y_R hebben?

Opgave 3. Beschouw de ellips $e\colon \frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ en het punt $A(6, 0)$. Geef een vergelijking voor een raaklijn aan e door A.

Opgave 4. Gegeven is de ellips e die bestaat uit alle punten op gelijke afstand tot een cirkel $c\colon (x-5)^2 + (y-2)^2 = 25$ en een punt $P(8, 2)$.

(a) Geef de vergelijking van de ellips.

(b) Beschouw de driehoek $\triangle MPA$, waarbij M het middelpunt van de cirkel en A het bovenste punt van de twee punten op de ellips met x-coördinaat 5 is. Hoe groot is de omtrek van deze driehoek?

Figuur 3.2: Opgaven van de posttest.

3.2.2 Posttest

De posttest bestond wederom uit een viertal opgaven, zoals weergegeven in Figuur 3.2.

De eerste opgave komt overeen met die van de pretest: gevraagd wordt naar een opsomming van alle kennis over het concept ellips binnen één minuut. Op dezelfde wijze als tijdens de pretest heeft de interviewer geen hints gegeven of gestuurd tijdens deze minuut, en is na deze initiële 'brainstormminuut' nog verder doorgepraat over de ideeën van de leerlingen bij het begrip. Iedereen kwam nu uit zichzelf op de analytische standaardvorm, zodat geen hints gegeven hoefden te worden.

De tweede opgave geeft een familie van ellipsen en vraagt naar een coördinaat van de vorm $(x_P, 0)$ dat zich op alle ellipsen in de familie bevindt. Inzicht in het verband tussen de vergelijking en de vorm van de ellips zou direct tot het idee moeten leiden dat dit de punten $(4, 0)$ en $(-4, 0)$ zijn. Uiteraard is het ook mogelijk om door middel van een berekening tot dit resultaat te komen. Ook introduceert de opgave één specifieke ellips uit de familie waar het punt $(3, 5)$ op ligt, en wordt gevraagd welke punten van de vorm $(-3, y_P)$ ook op deze ellips liggen. Leerlingen zouden de waarde van k kunnen bepalen, om vervolgens de gevraagde coïdinaten te berekenen. Echter, een rijker inzicht leidt direct tot de conclusie dat de gevraagde coördinaten $(-3, -5)$ en $(-3, 5)$ zijn, vanwege de symmetrie.

De derde opgave test of er meetkundig geredeneerd kan worden bij een analytisch vraagstuk. Gevraagd wordt naar de raaklijn aan een gegeven ellips, door een gegeven punt. Hier kan driftig aan gerekend worden om uiteindelijk tot de raaklijn te komen; echter, als een beeld wordt gemaakt bij de ellips ziet men direct dat de ellips raakt aan de x-as en dat het punt waar de raaklijn door moet gaan ook op de x-as ligt. Hier volgt dus direct uit dat de gevraagde raaklijn de lijn $y = 0$ is. Leerlingen met een minder rijkere cognitieve eenheid zouden aan het rekenen kunnen slaan om op de omslachtige wijze van het boek tot hetzelfde resultaat te komen.

De laatste opgave geeft een ellips op basis van een richtcirkel en een punt, en vraagt naar de vergelijking van de ellips. Hier zal dus een brug geslagen moeten worden tussen de twee verschillende verschijningsvormen van de ellips. Vervolgens wordt gevraagd naar de omtrek van een driehoek met als hoekpunten de twee brandpunten van de ellips en een punt op de ellips. Als leerlingen inderdaad herkennen dat dit de situatie is, zou op basis van de eigenschap $PF_1 + PF_2 = r$ snel tot een correct antwoord gekomen kunnen worden, zonder dat er gerekend hoeft te worden met de vergelijking.

3.3 Materiaal

Zoals gezegd is er extra nadruk gelegd op de onderliggende meetkundige concepten tijdens het behandelen van Hoofdstuk 14 over Krommen. Dit is gedaan op een aantal manieren. Ten eerste is op sommige momenten extra uitleg gegeven (al dan niet met behulp van een GeoGebra-visualisatie), om leerlingen bewuster te maken van hetgeen ze aan het doen zijn (conform onder andere Tall (2006) en Stols (2010)). Ten tweede is bij sommige analytische opgaven uit het boek uitgelegd hoe deze eenvoudiger zouden kunnen worden opgelost door meer stil te staan bij de onderliggende meetkundige concepten (conform Sutherland en Balacheff (1999)). Ten derde is een aantal extra opgaven geïntroduceerd, waarmee leerlingen dergelijke vaardigheden nog eens konden oefenen (conform Langill (2009)).

Er is gepoogd om zo vaak als mogelijk stil te staan bij de onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde, om de door Tall en Barnard (2002) voorgeschreven langetermijnpotentiatie te laten plaatsvinden. Aangezien het aantal lessen beperkt was, is het uiteraard de vraag of er genoeg herhaling heeft plaatsgevonden om de maximaal mogelijke samenpersing te bereiken. Wel is uitdrukkelijk gepoogd om niet slechts een aantal regeltjes te herhalen, maar om daadwerkelijk begrip te kweken en zo de door Gray en Tall (2007) besproken valkuil van een breekbare cognitieve structuur te voorkomen.

Hieronder zal per paragraaf het extra materiaal worden besproken, dat is gebruikt tijdens dit proces. Het betreft hier de additionele opgaven en visualisaties bij bestaande opgaven. Bijlage B bevat afbeeldingen van de visualisaties waar naar verwezen wordt. In Sectie 3.4 zal vervolgens het verloop van de lessenserie, die op basis van het in deze sectie besproken materiaal is gegeven, verder worden toegelicht. Daar wordt ook de toelichting besproken die is gegeven bij het in deze sectie geïntroduceerde materiaal.

3.3.1 Extra materiaal voor §14.1 (Symmetrie)

Symmetrie is een uitermate geschikt onderwerp om niet alleen over te rekenen, maar ook meetkundig over na te denken. Bij deze paragraaf zijn dan ook verscheidene bruggetjes van de analytische meetkunde naar de synthetische meetkunde gelegd. Het volgende aanvullende materiaal is hiervoor gebruikt:

(1) Visualisatie van de eigenschappen van een ellips. Met GeoGebra is een visualisatie van de ellips in standaardvorm voorbereid (zie Figuur B.2). De visualisatie bevat twee schuifbalken om de parameters a en b van de ellips aan te passen; in dat geval vervormt de ellips, en worden ook automatisch de brandpunten opnieuw gepositioneerd. Bovendien wordt te allen tijde de overeenkomstige vergelijking getoond. Eveneens is een verschuifbaar punt P op de ellips getekend, inclusief lijnstukken naar de brandpunten. Een berekening laat zien wat de opgetelde lengte van deze lijnstukken is, en vanzelfsprekend verandert deze berekening ook dynamisch als de parameters gewijzigd worden.

Het doel van deze visualisatie is leerlingen inzicht te laten krijgen in de verschillende eigenschappen van de ellips, en hoe deze samenhangen met de parameters van de analytische vergelijking.

(2) Visualisatie van de eigenschappen van een hyperbool. Met GeoGebra is eveneens een visualisatie gemaakt van de hyperbool in standaardvorm (zie Figuur B.4). Ook deze visualisatie beschikt over schuifbalken voor de parameters a en b, laat de brandpunten en de vergelijking zien, en bevat een verschuifbaar punt met een bijbehorende berekening voor in dit geval de verschilafstand tot de brandpunten.

Het doel van deze visualisatie is leerlingen inzicht te laten krijgen in de verschillende eigenschappen van de hyperbool, en hoe deze samenhangen met de parameters van de analytische vergelijking.

(3) Visualisatie van opgave 5. In opgave 5 wordt een ellips gegeven en een punt (a, b) op de ellips, met daarbij de vraag of het punt (b, a) dan ook op de ellips ligt. Een visualisatie van deze situatie is voorbereid, waarbij de ellips wordt weergegeven inclusief een verschuifbaar punt $P(a, b)$ op de ellips. Bovendien wordt het punt $P'(b, a)$ getoond, dat in eerste instantie zoals verwacht niet op de ellips ligt. Als punt P verschoven wordt, schuift punt P' mee en wordt het spoor weergeven, zoals afgebeeld in Figuur B.5. Zo is mooi te zien hoe een ellips ontstaat door spiegeling in de lijn $y = x$.

De visualisatie staat het ook toe om de ellips 45° te draaien, zodat gezien kan worden dat in dit geval het punt P' wel telkens op de ellips ligt.

Het doel van deze visualisatie is leerlingen een beeld te laten vormen van spiegeling in de lijn $y = x$.

(4) Opgave over symmetrie van ellipsen. Aansluitend op opgave 5 uit het boek is een aanvullende vraag bedacht:

> *Bestaat er een ellips waarvoor geldt dat, gegeven een willekeurig punt $P(a, b)$ op die ellips, het altijd zo is dat het punt $P'(b, a)$ ook op de ellips ligt?*

Het doel van deze opgave is leerlingen te laten nadenken over verschijningsvormen van de ellips, en te laten ontdekken dat de assen van de ellips niet altijd evenwijdig aan de assen van het assenstelsel hoeven te staan.

(5) Opgave over symmetrie van krommen. In opgave 8 uit het boek wordt gevraagd om aan te tonen dat bepaalde krommen symmetrisch zijn in bepaalde lijnen of punten. Aansluitend op deze opgave is een aanvullende vraag bedacht:

> *Op welke manier is de kromme $K\colon y^2 - 3x + 6y - 8 = 0$ symmetrisch?*

Deze opgave is voorafgegaan door een uitleg over hoe je op een eenvoudige manier symmetrie in dergelijke vergelijkingen kunt herkennen (zie Sectie 3.4.1). Het doel van deze opgave is leerlingen te laten oefenen met deze techniek.

(6) Visualisatie van opgave 14. In opgave 14 uit het boek wordt gevraagd om de vergelijking van een getekende ellips te geven. De ellips was weergegeven in een assenstelsel, zoals afgebeeld in een hierbij geconstrueerde visualisatie (zie Figuur B.6(a)). De visualisatie staat het toe om de ellips te verschuiven, zodat deze netjes in de oorsprong gezet kan worden (zie Figuur B.6(b)).

Het doel van deze visualisatie is leerlingen zich ervan bewust te maken dat meetkundige objecten eenvoudig verplaatst kunnen worden, waarna het wellicht eenvoudiger is om een bijbehorende vergelijking op te stellen. Vervolgens kan de vergelijking door middel van bekende technieken weer teruggetransleerd worden.

3.3.2 Extra materiaal voor §14.2 (Parametervoorstellingen)

In deze paragraaf ging het over parametervoorstellingen. Hoewel hier wellicht niet zulke mooie visualisaties bij te maken zijn als bij symmetrie, kan meetkundig inzicht voor veel eenvoudigere oplosstrategieën zorgen. Het volgende aanvullende materiaal is bedacht om leerlingen hiermee te laten oefenen:

(7) Visualisatie van een cirkel met poollijn In opgave 18 wordt gevraagd naar het gebruik van de poollijn gegeven een punt en een cirkel, om de raaklijnen aan de cirkel door dit punt te bepalen. Ter illustratie is een visualisatie van deze situatie gemaakt (zie Figuur B.7). Door de pool te verplaatsen wordt zichtbaar wat dit met de poollijn doet, en wordt duidelijk dat deze inderdaad de corresponderende raaklijnen blijft snijden. Ook wordt aannemelijk gemaakt dat de poollijn gegeven een pool op de cirkel precies de raaklijn aan de cirkel door dat punt is.

Het doel van deze visualisatie is leerlingen meer inzicht te laten krijgen in de functie van de poollijn, en het verband met de raaklijnen aan een cirkel door een gegeven punt.

(8) Opgave over translaties en raaklijnen. In opgave 19 wordt gevraagd om gegeven een ellips $9x^2 + 25y^2 - 36x - 150y + 36 = 0$ en een punt $A(-13, 0)$ de vergelijkingen op te stellen van de raaklijnen aan de ellips die door A gaan. Dit is behoorlijk wat rekenwerk, en kan helaas zelfs met meetkundig inzicht niet verkort worden. Echter, gegeven het antwoord op opgave 19, zou de volgende opgave eenvoudiger moeten worden als men niet domweg hetzelfde trucje nogmaals toepast, maar nadenkt over de situatie:

> *Beschouw nu de ellips f die verkregen kan worden door de ellips van opgave 19 te verschuiven over $(-2, -3)$.*
>
> *(a) Geef de vergelijking van f in standaardvorm.*
>
> *(b) Beschouw het punt $B(-15, -3)$, en geef de vergelijkingen van de lijnen door het punt B die f raken.*

Het doel van deze opgave is leerlingen te laten stilstaan bij het feit dat veel rekenwerk voorkomen kan worden door een beeld te maken van de meetkundige situatie die aan de orde is. Door in te zien dat f getransleerd is over $(-2, -3)$ ten opzichte van e, en dat B getransleerd is over $(-2, -3)$ ten opzichte van A, kan eenvoudig worden bepaald dat de gevraagd raaklijnen evenwijdig zijn aan de reeds gevonden raaklijnen bij de opgave in het boek. Een eenvoudige translatie levert dan het antwoord.

(9) Visualisatie van translaties en raaklijnen. Om de bovengenoemde opgave te visualiseren (nadat leerlingen er zelf over na hebben gedacht), is een visualisatie van de situatie gemaakt (zie Figuur B.8). Initieel liggen beide ellipsen op elkaar; vervolgens kan er eentje verplaatst worden, samen met het punt B dat op gelijke afstand blijft, om zo te zien wat er met de raaklijnen gebeurt. De in Figuur B.8 afgebeelde toestand komt overeen met de vraagstelling van bovengenoemde opgave.

Het doel van deze visualisatie is leerlingen inzicht te geven in translaties.

(10) Visualisatie over verkleiningen van cirkels. In opgave 22 gaat het over een cirkel, gegeven door een vergelijking, een punt P dat over de cirkel loopt, en een punt B buiten de cirkel. Gegeven wordt ook dat het punt R op het midden van de lijn BP ligt. Gevraagd wordt op welke kromme R ligt als P over de cirkel loopt. In de theorie wordt dit gedaan door de cirkel eerst als parametervoorstelling te schrijven en dan driftig te gaan rekenen. Eenvoudiger is echter om een plaatje te tekenen en op meetkundige wijze in te zien dat Q ook een cirkel beschrijft, met precies de halve straal. De visualisatie zoals afgebeeld in Figuur B.9, ondersteunt deze denkwijze.

Het doel van deze visualisatie is leerlingen te laten inzien dat meetkundig redeneren soms rekenwerk kan besparen (en extra inzicht oplevert).

(11) Opgave over verkleiningen van ellipsen. Aansluitend op de bovengenoemde opgave, is een extra opgave gebruikt om leerlingen met hetzelfde concept te laten oefenen:

Het punt P doorloopt de ellips

$$e\colon \frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-6)^2}{16} = 1$$

Het punt R is het midden van het lijnstuk PC, waarbij $C(10,0)$. Geef de vergelijking van de kromme waar R op ligt.

Het doel van deze opgave is leerlingen te laten nadenken over de meetkundige context van deze analytische opgave. Om een vergelijkbare redenatie toe te passen als bij de opgave in het boek (zoals gedaan door middel van de bovengenoemde visualisatie), moet de representatie van de ellips als verzameling punten met gelijke opgetelde afstand tot de brandpunten gehanteerd worden. Leerlingen zullen dus moeten kunnen wisselen tussen representaties om deze opgave netjes op te lossen.

(12) Opgave over geparametriseerde ellipsen. Opgave 24 vraagt gegeven een geparametriseerde kromme om eerst aan te tonen dat deze overeenkomt met een bepaalde vergelijking, en om daarna aan te tonen dat het een ellips is en de bijbehorende eigenschappen te geven. Als aanvulling hierop is de volgende opgave geconstrueerd:

Gegeven de kromme

$$K\colon \begin{cases} x = 5 + 3\cos\phi \\ y = -2 + 6\sin\phi \end{cases}$$

Wat voor figuur is K en welke eigenschappen horen hierbij?

Het doel van deze opgave is leerlingen te laten oefenen met het herkennen van een ellips in een parametervoorstelling. De hoop is dat leerlingen de constante termen zullen herkennen als verschuiving, en de factoren voor de goniometrische functies als vermenigvuldigingen. Aangezien in de eerste paragraaf reeds is bewezen dat de verzameling van ellipsen gesloten is onder deze transformaties en we al weten dat $x = \cos\phi, y = \sin\phi$ een ellips is, volgt hier direct uit dat de parametervoorstelling ook een ellips is. Uit de gebruikte transformaties zouden ook de eigenschappen direct gevonden moeten kunnen worden.

3.4 Procedure

De uitvoering van het onderzoek bestond uit het afnemen van de pretest, het behandelen van het betreffende hoofdstuk over analytische meetkunde in dertien lessen, en het afnemen van een posttest. In deze sectie wordt ingegaan op de specifieke wijze waarop het hoofdstuk tijdens de lessen behandeld is. Aangezien alleen de eerste twee paragrafen zich leenden voor dit onderzoek, wordt alleen daar iets over vermeld. Vervolgens zal worden toegelicht hoe de data van de pre- en posttests is verzameld, verwerkt en geanalyseerd.

3.4.1 Lessen over §14.1 (Symmetrie)

De eerste paragraaf van het hoofdstuk is in drie lessen behandeld, waarvan de eerste les en een gedeelte van de tweede gebruikt zijn om de interviews af te nemen. Tijdens het tweede gedeelte van de tweede les en tijdens de derde les zijn verscheidene stappen ondernomen om de onderliggende meetkundige concepten te benadrukken. Hierbij is gebruikgemaakt van de materialen die in Sectie 3.3 zijn besproken.

- Ter inleiding van de figuren die in dit hoofdstuk aan de orde komen is de constructie van een ellips uitgevoerd met behulp van GeoGebra. Hierbij is uitgegaan van de meetkundige definitie als conflictlijn van een brandpunt en een richtcirkel.

  De onderzoeker tekende eerst een cirkel c en een punt B binnen de cirkel (zie Figuur B.1). Vervolgens werd de leerlingen gevraagd hoe een punt van de ellips gevonden kan worden. Ze moesten enigszins op weg geholpen worden, maar uiteindelijk wist een van de leerlingen na wat doorvragen de juiste constructie uit te voeren. Door middel van GeoGebra kon de ellips nu snel getekend worden. Het spoor van punt D werd aangezet, en het punt C werd over de cirkel gesleept. Zo ontstonden een groot aantal punten van de ellips, die de leerlingen hierdoor prachtig zagen ontstaan. Het eindresultaat is in Figuur B.1 te zien.

  Vervolgens is ook benadrukt dat de afstand van D naar B gelijk is aan de afstand van D naar C, dat $MD + DB$ dus gelijk is aan de straal van de cirkel, en dat dus voor ieder punt op de ellips de som van zijn afstanden naar M en naar B constant is. De leerlingen noemden zelf ook al dat dit dus de brandpunten van de ellips zijn.

- Vervolgens is de ellips ook nog een keer getoond in de standaardpositie [materiaal (1); zie Figuur B.2]. Aangezien de leerlingen net hadden gezien hoe de ellips ontstaan was vanuit de meetkundige definitie, was het eenvoudig in te zien dat het punt P dat over de ellips loopt gelijke opgetelde afstand tot de brandpunten had.

  Ook is op dit moment de analytische formule geïntroduceerd. Deze is niet weer volledig afgeleid, maar wel is nog even genoemd hoe deze ook alweer ontstond. Vervolgens is door middel van sliders getoond wat er met de figuur gebeurt als a of b groter of kleiner wordt. Hierbij is direct van de mogelijkheid gebruikgemaakt om nog even te laten zien dat de brandpunten als $b > a$ op de y-as liggen (deze verschoven iedere keer automatisch mee als a of b gewijzigd werd). Hoewel dit een gekke discontinuïteit lijkt, is dat niet zo aangezien we gezien hebben dat voor $a = b$ de ellips een cirkel is met de brandpunt allebei in de oorsprong.

  Ook is deze visualisatie gebruikt om te tonen hoe de toppen samenhangen met de formule. Leerlingen zagen zelf dat de toppen op de x-as en de y-as liggen, en dat we dus $y = 0$ of $x = 0$ kunnen invullen. Zo kwam men al snel op $x = a \vee x = -a$ en $y = b \vee y = -b$. Hierdoor was het vinden van de toppen geen gegoochel met getallen meer, maar zagen de leerling daadwerkelijk hoe alles met elkaar samenhing.

- Nadat de onderzoeker de constructie van een ellips met hulp van de leerlingen had voorgedaan, heeft een van de leerlingen de constructie van een parabool met GeoGebra voor het bord gedaan (zie Figuur B.3 voor het eindresultaat). Met enige hulp van de onderzoeker en ook van de andere leerlingen kwam ze tot de juiste constructie, waardoor iedereen ook weer even een goed beeld had van de parabool.

  Vervolgens is de bepaling van de standaardvergelijking van de parabool wel in detail besproken. Leerlingen wisten weer wat de meetkundige definitie was, hadden geen moeite met het opstellen van de juiste vergelijkingen en zagen $y^2 = 2px$ verschijnen. Ook ontdekten ze dat p de afstand tussen het brandpunt en de richtlijn is.

- Om niet te veel in herhaling te vallen is de constructie van de hyperbool niet in even-veel detail gedaan als van de ellips en de parabool. Wel is een visualisatie getoond, waarin de eigenschappen naar voren zijn gekomen [materiaal (2); zie Figuur B.4]. Wederom is de functie van a en b getoond, en is benadrukt dat nu het *verschil* van de afstanden van een punt op de hyperbool tot de brandpunten constant is.

- Nu de trend van het benadrukken van meetkundige concepten gezet was, is de leerlingen gevraagd opnieuw na te denken over een opgave uit het boek. In deze opgave werd gevraagd of, gegeven een ellips en een punt (a, b) op de ellips, het punt (b, a) ook op de ellips ligt. De leerlingen hadden weinig moeite met het invullen van de coördinaten en het inzien dat dit niet het geval was. Ook zagen ze snel dat dit kwam doordat de ellips niet symmetrisch was in de lijn $y = x$. Een visualisatie [materiaal (3); zie Figuur B.5] bevestigde dit inzicht. Vervolgens is de leerlingen gevraagd na te denken over een ellips mét de betreffende eigenschap [materiaal (4)].

  Al snel kwam men tot de conclusie dat dit zo zou zijn als de ellips een cirkel was. Enig doorvragen leidde vervolgens iemand tot het inzicht dat een ellips misschien ook wel schuin zou kunnen staan, hoewel dat enige twijfel opleverde aangezien men niet wist wat voor vergelijking daarbij zou horen. De onderzoeker heeft deze gelegenheid gebruikt om nog maar eens te benadrukken dat een ellips niks meer of minder is dan een figuur met de eigenschappen die we eerder besproken hebben (gelijke afstanden tot richtcirkel en brandpunt, of gelijke opgetelde afstanden tot de brandpunten), en dat je zo'n figuur uiteraard prima schuin kan zetten zodat hij nog steeds dezelfde eigenschappen heeft. Dat wij wellicht nog geen vergelijking van zo'n ellips kunnen opstellen wil natuurlijk niet zeggen dat hij niet bestaat.

  Vervolgens is met GeoGebra een schuine ellips getoond met de gewenste eigenschap, en is getoond dat ook hier een vergelijking bij hoort (met een term $k \cdot xy$).

- Het boek liet leerlingen voor een aantal krommen aantonen dat ze symmetrisch zijn in bepaalde lijnen of punten. De methode uit het boek schrijft voor om voor symmetrie in bijvoorbeeld de lijn $y = -4$ de punten $(a, -4 + b)$ en $(a, -4 - b)$ in te vullen en te kijken of dit tot gelijke vergelijkingen leidt. Dit kost echter behoorlijk wat rekenwerk, terwijl meestal direct aan de vergelijking te zien is dat het bijvoorbeeld een parabool is. Bovendien kan via kwadraatafsplitsing eenvoudig gezien worden hoe deze getransleerd is, waaruit direct de symmetrie-as volgt.

  Na deze uitleg, die de leerlingen goed konden volgen, hebben ze de opdracht gekregen om uit te zoeken hoe de kromme $y^2 - 3x + 6y - 8 = 0$ symmetrisch is [materiaal (5)]. Dit leverde geen enkel probleem op, en uiteindelijk konden ze zo veel sneller redeneren over de symmetrie van analytisch gegeven krommen.

- Tegen het eind van de paragraaf bevond zich een opgave waarbij de vergelijking van een ellips gegeven moest worden. De ellips was weergegeven in een assenstelsel, zoals afgebeeld in Figuur B.6(a) [materiaal (6)]. De leerlingen is de tip gegeven om de ellips te verplaatsen naar de oorsprong (zoals afgebeeld in Figuur B.6(b)), dan de vergelijking te bepalen zoals we eerder hebben gezien, en dan nog even een translatie uit te voeren op de vergelijking.

3.4.2 Lessen over §14.2 (Parametervoorstellingen)

Om de lessen over parametervoorstellingen te introduceren is de parametervoorstelling van een lijn herhaald. Besproken is hoe op basis van de parametervoorstelling een vergelijking kan worden afgeleid en hoe je snel een punt op de lijn en dan de richtingsvector kan vinden. Ook is herhaald wat een normaalvector is, hoe je 'm kan vinden op basis van de richtingsvector en hoe de normaalvector terug te vinden is in de vergelijking van een lijn.

Vervolgens is op een aantal manieren gepoogd de leerlingen meetkundig te laten nadenken over de figuren waarvan parametervoorstelling gegeven werden.

- De vergelijking van de poollijn gegeven een punt en een cirkel is herhaald. Hierbij is ook een visualisatie getoond om kennis van de poollijn weer even op te halen [materiaal (7)]. Leerlingen vonden het verhelderend en eenvoudig in te zien dat de poollijn vanuit een punt blijkbaar overeenkomt met de raaklijn door dat punt.
- Nadat de leerlingen met het boek raaklijnen aan een cirkel hadden bepaald via een parametervoorstelling van de lijnen door een specifiek punt, is een extra opgave gegeven waarin dit nogmaals gedaan moest worden [materiaal (8)]. Hierbij is vermeld dat het uitgebreide rekenwerk niet herhaald hoefde te worden als slim wordt nagedacht over het verband tussen de twee opgaven.

  Interessant was dat Leerling 1 direct opmerkte "ik reken liever gewoon", ondanks dat iedereen ruim een kwartier bezig was geweest met de analytische berekening. Enige aansporing leidde toch tot extra nadenken, en al snel merkten Leerling 1 en Leerling 2 tegelijk op dat de raaklijnen eenvoudig verschoven waren.
- Ter illustratie van het zojuist verworven inzicht is ook nog een visualisatie getoond [materiaal (9); zie Figuur B.8]. Vervolgens konden de leerlingen met weinig hulp en door middel van meetkundig inzicht tot een oplossing van de opgave komen.
- Nadat de leerlingen opgave 22 hadden gemaakt, is deze in detail besproken aan de hand van een visualisatie [materiaal (10); zie Figuur B.9]. De nadruk is gelegd op de meetkundige interpretatie van de situatie, die via gelijkvormigheid eenvoudig opgelost kon worden. Leerlingen vonden dit in eerste instantie niet zo eenvoudig, maar zagen uiteindelijk wel in dat de opgave ook zo aangepakt kon worden.
- Na de bespreking van opgave 22 is de leerlingen een extra opgave gegeven om de meetkundige aanpak bij dit type opgaven te oefenen [materiaal (11)]. De leerlingen probeerden de opgave op verschillende manieren op te lossen, maar kwamen uit zichzelf niet tot een juiste oplossing. Enige sturing leidde uiteindelijk tot het idee dat brandpunten handig zouden kunnen zijn. Vervolgens was nog wel wat sturing nodig om aan te kunnen tonen dat de afstand tot de brandpunten nog steeds constant is

  De leerlingen konden vervolgens met weinig moeite de vergelijking opstellen.
- Als laatste is een extra opgave na opgave 24 gegeven [materiaal (12)]. Er is uitgebreid ingegaan op het feit dat $x = \cos\phi, y = \sin\phi$ een cirkel is, dat een cirkel eigenlijk ook een ellips is, en dat ellipsen nog steeds ellipsen blijven als ze vermenigvuldigd worden. De leerlingen begrepen dat hieruit inderdaad direct volgde dat de gegeven parametervoorstelling een ellips beschrijft.

  Vervolgens hebben de leerlingen gepoogd de vergelijking voor de ellips op te stellen. Het middelpunt werd eenvoudig gevonden, maar de waarden van a en b in deze context vond men toch nog niet eenvoudig om te vinden. Na een korte klassikale discussie was het verband tussen de parametervoorstelling en de meetkundige ellips echter wel duidelijk, en kon men snel tot de juiste vergelijking komen.

Wederom is benadrukt dat het voor het inzicht en het gemak goed is om een meetkundig beeld te vormen bij de vergelijkingen en parametervoorstellingen waar we mee werken, om zo snel tot resultaten te komen, minder fouten te maken en een beter beeld te hebben van wat we nou eigenlijk aan het doen zijn.

3.4.3 Dataverzameling

Het onderzoek vond zoals gezegd plaats in een klas VWO 5 Wiskunde D aan het Stedelijk Lyceum Kottenpark te Enschede. De data voor de pretest is verzameld tijdens de eerste les over Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte Wiskunde D4, die plaatsvond op maandag 23 mei 2011. De data voor de posttest is verzameld in de een-na-laatste les over het hoofdstuk, die plaatsvond op maandag 20 juni 2011.

Pretest

Om in de goede (of wellicht juist de verkeerde) mind set te komen, zijn we de les begonnen met het klassikaal behandelen van de eerste opgave van het hoofdstuk. Hierin wordt de vergelijking $4x^2 + y^2 = 100$ van een ellips gegeven, waarna gekeken wordt naar symmetrie in de x-as en de daaruit volgende mogelijkheid om het figuur op te splitsen in twee functies (die vervolgens op de grafische rekenmachine geplot kunnen worden).

Na deze introductie op de onderwerpen krommen en symmetrie, zijn de leerlingen zelfstandig aan het werk gezet. Ondertussen zijn ze individueel en afzonderlijk van elkaar geïnterviewd in het kader van de pretest. De leerlingen is ook duidelijk gemaakt dat het niet is toegestaan om na hun interview hierover te communiceren met een van de leerlingen die nog geïnterviewd moeten worden, om beïnvloeding van de resultaten te voorkomen. De reguliere docent was tijdens de interviews in het lokaal van de leerlingen aanwezig om toe te zien op de naleving hiervan.

Iedere vraag is op een ander vel papier voorgelegd, zodat leerlingen niet al tijdens het bespreken van de eerste vraag konden zien waar volgende over gingen. Ze hadden de beschikking over papier, maar hoofdzakelijk is er gesproken over de opgaven en de wijze waarop de leerling deze zouden aanpakken. Sommige opgaven waren wellicht nog aan de lastige kant gegeven de voorkennis, maar het ging dan ook niet zozeer om het komen tot een juiste oplossing, maar meer om überhaupt het type aanpak dat de leerling zou nemen om de som op te losssen.

Van de interviews voor de pretest is de audio opgenomen, om terug te kunnen luisteren wat er precies allemaal door de leerlingen is gezegd.

Posttest

De afname van de posttest verliep op dezelfde wijze van de afname van de pretest. Nu werd echter al direct aan het begin van de les met de test begonnen. De leerlingen die nog niet aan de beurt waren of al geweest waren konden gewoon verder werken aan de opgaven, om zo het hoofdstuk af te ronden.

Wederom was de reguliere docent in het lokaal aanwezig om vragen te beantwoorden en erop toe te zien dat er niet overlegd werd over de inhoud van de posttest.

Ook van de interviews voor de posttest is de audio opgenomen, om terug te kunnen luisteren wat er precies allemaal door de leerlingen is gezegd.

Interventies

Tijdens de interviews is op enige momenten interventie gepleegd door de onderzoeker. Vooraf is per opgave vastgesteld welke interventies eventueel gedaan zouden worden. Sowieso is erop gelet om in het algemeen zo weinig mogelijk feedback aan de leerlingen te geven, om hun gedachten niet te beïnvloeden. Zelfs non-verbale communicatie zoals een bedenkelijke blik na een foutieve opmerking zou de leerling op een ander spoor kunnen brengen, dus is expliciet gepoogd om dit soort invloeden te minimaliseren door bewust zo neutraal mogelijk over te komen. Wel is regelmatig "hmm hmm" of "oke" of iets dergelijks gezegd, om leerlingen aan te sporen om verder te praten (ongeacht de correctheid van hetgeen dat gezegd werd).

Pretest In de pretest is bij opgave 1 in eerste instantie helemaal geen interventie gepleegd gedurende de minuut waarin leerlingen hun ideeën over ellipsen oprakelden. Vervolgens is tijdens het daarop volgende gesprek slechts de vergelijking in standaardvorm voor de ellips gegeven, indien leerlingen hier zelf niet op konden komen. Zonder deze interventie zou niet doorgevraagd kunnen worden naar de eigenschappen die bij de parameters van deze vergelijking horen.

Bij opgave 2 zou interventie gepleegd worden indien de leerling geen idee had hoe onderdeel (a) opgelost zou moeten worden. Dit zou het mogelijk maken om de leerling toch over onderdeel (b) na te laten denken, en dat is nou juist de deelopgave waarbij slim nagedacht zou kunnen worden. Bovendien zou deze interventie geen invloed hebben op de hoeveelheid meetkundig inzicht die leerlingen zouden toepassen bij deze of de volgende opgaven. Echter, aangezien alle leerlingen uit zichzelf al uit opgave (a) bleken te komen, was deze interventie niet nodig.

Bij opgave 3 is geen interventie gepleegd, om te voorkomen dat de resultaten van de leerling op de vierde opgave beïnvloed zouden worden.

Bij opgave 4 zou interventie plaatsvinden als leerlingen niet meer wisten hoe de brandpunten gevonden konden worden, aangezien dit de hele opgave onbruikbaar zou maken. Echter, alle leerlingen konden uit zichzelf tot coördinaten van de brandpunten komen (hoewel niet altijd correct), waardoor deze interventie niet nodig was.

Verder was vooraf ook vastgesteld welke overige opmerkingen de interviewer mocht maken tijdens de bespreking van de opgaven met de leerling; deze interventies waren niet zozeer ter ondersteuning van het begrip van de leerling, maar meer om de hoeveelheid zinvolle data te vergroten. Toegestane opmerkingen, als een leerling niet genoeg informatie gaf om te begrijpen hoe zijn of haar denkwijze in elkaar stak, zijn:

- Wat bedoel je daarmee?
- Waarom denk je dat?
- Waarom heb je het zo aangepakt?
- Kan je dat nog iets meer toelichten?
- Hoe zag je dat dat zo was?
- Hoe zou je verdergaan?
- Denk nog eens goed na.
- Probeer dat nog eens.

Bovendien is aan het eind van iedere opgave aan de leerling gevraagd "heb je nog meer te melden over dit onderwerp, of ben je klaar?" Dit zorgde ervoor dat leerlingen nog even gewezen werden op het feit dat ze zoveel mogelijk informatie over hun gedachten moesten geven.

Posttest Voor de posttest was het in principe de bedoeling om geen enkele interventie te plegen (afgezien van de bovenstaande opmerkingen om de leerling meer informatie te laten geven). De interviewer wilde de leerlingen wederom zo min mogelijk beïnvloeden.

Uiteindelijk is toch een enkele hint gegeven, toen een leerling bij de vierde opgave per ongeluk een punt buiten in plaats van binnen de cirkel plaatste. Dit zorgde voor verwarring, die weinig met de te meten kennis en inzichten te maken had.

3.4.4 Dataverwerking

Aangezien het kwalitatief onderzoek betreft, hoefde er geen statistische verwerking van de data plaats te vinden. De opgenomen interviews dienen als input voor de data-analyse, en zijn derhalve getranscribeerd weergegeven in bijlage A en bijlage C.

3.4.5 Data-analyse

Het doel van het onderzoek was om te analyseren of het leggen van nadruk op onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde in Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4 (Analytische meetkunde – Krommen) tot rijkere cognitieve eenheden leidt. De eerdergenoemde pre- en posttest zijn daarom geanalyseerd om per leerling te kijken naar de rijkheid van zijn of haar cognitieve eenheden betreffende de meetkundige concepten uit dit hoofdstuk voor en na alle uitleg. Zoals uitgelegd in Sectie 3.2 is in de pre- en posttest gesproken over het begrip van de ellips, dus is bij de analyse ook gekeken naar de cognitieve eenheden betreffende de ellips.

Zoals reeds besproken in het theoretische kader, worden cognitieve eenheden rijker door middel van compressie (Thurston, 1990; Barnard & Tall, 1997). Hierdoor wordt meer informatie in een cognitieve eenheid gepositioneerd, en worden sterkere links aangebracht tussen verschillende cognitieve items. Tall legt uit dat het hierbij van belang is om te werken vanuit het ‘uitleggende geheugen’, waardoor zinvolle relaties tussen concepten gebruikt kunnen worden op basis van begrip in tegenstelling tot herinnering. Dit onderdeel van ons geheugen wordt daarom gezien als het gedeelte dat zorgt voor het gebruiken en aanmaken van verbindingen tussen cognitieve eenheden, en zorgt daarom voor een verrijking ervan.

Als laatste vermeldt Tall ook dat het in geval van rijke cognitieve eenheden zo is dat mensen sneller en eenvoudiger met een verscheidenheid aan representaties van hetzelfde concept kunnen omgaan (Tall & Barnard, 2002). Er wordt dan ook een verband genoemd tussen succes in het toepassen van wiskunde en de sterkte van de verbinding tussen verschillende representaties van wiskundige concepten.

Op basis van deze theoretische achtergronden is bij de analyse van de rijkheid van de cognitieve eenheden op een aantal aspecten gelet. Hieronder wordt per opgave van de pre- en posttest behandeld hoe de reacties van de leerlingen geanalyseerd zijn. Naderhand is op basis hiervan gekeken of leerlingen voornamelijk slechts analytisch redeneerden, of in de analytische context ook gebruikmaakten van hun meetkundige inzicht. Op basis hiervan is per leerling geanalyseerd of hier sprake was van geen gebruik van meetkundige kennis, enige mate van gebruik van meetkundige kennis (er werd wel op enkele momenten meetkundig gedacht, maar over het algemeen werd er toch nog voornamelijk simpelweg gerekend) of grote mate van gebruik van meetkundige kennis.

De analyse wordt samengevat in Tabel 3.1 en Tabel 3.2.

Pretest

Opgave 1. In deze opgave werd in eerste instantie gevraagd naar het noemen van alles wat in de leerling opkwam bij het begrip ellips. Door de tijd hiervoor te beperken tot één minuut, had de leerling niet de tijd om uitgebreid na te denken om ter plekke nog koppelingen tussen verscheidene representaties aan te brengen. Vanwege de korte tijdsperiode is de verwachting dat de leerling alleen in geval van een rijke cognitieve eenheid betreffende de kennis omtrent ellipsen tot een grote verscheidenheid van representaties en de verbanden hiertussen kon komen (zoals reeds uitgelegd op basis van onder andere Tall en Barnard (2002)).

Om te meten hoeveel begrip de leerling reeds in korte tijd over de ellips kon produceren, is gekeken hoeveel van de onderstaande aspecten over de ellips genoemd zijn tijdens de minuut.

- De ellips is de conflictlijn van een brandpunt en een richtcirkel.
- De ellips is de verzameling van punten met gelijke opgetelde afstand tot twee brandpunten.
- De ellips is de oplossing van de vergelijking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ voor bepaalde a, b.
- De parameters a en b bepalen de toppen van de ellips.
- De parameters a en b bepalen de brandpunten via de hulpparameter $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
- De ellips is een generalisatie van de cirkel.
- De ellips kan zich overal in een assenstelsel bevinden en hoeft niet per sé tegen de oorsprong aan te liggen.
- Het verplaatsen van een ellips over (p, q) komt overeen met substitutie van x en y door $x - p$ en $y - q$ in de vergelijking.
- Het spiegelen van een ellips in de x-as of y-as komt overeen met het substitueren van $-y$ of $-x$ voor y of x.

Hoe meer aspecten van de ellips de leerling binnen korte tijd kan opnoemen, hoe rijker zijn cognitieve eenheid blijkbaar is.

Vervolgens is gevraagd om er nog eens rustig over na te denken, en eventueel nog meer te noemen over de ellips. Kennis die een leerling op dit moment nog wist te noemen was blijkbaar wel aanwezig, maar nog niet erg sterk verbonden aan de reeds eerdergenoemde kennis over de ellips. Dit duidt erop dat er wel verbanden gelegd zijn, maar dat de verbindingen nog niet zo sterk zijn (Tall & Barnard, 2002).

De mogelijkheid om foutieve antwoorden te geven was uiteraard ook aanwezig; aangezien deze zouden kunnen voorkomen uit het feit dat leerlingen zo veel mogelijk proberen op te noemen en wellicht niet getuigen van een gebrek aan inzichten, is ervoor gekozen om foutieve informatie buiten beschouwing te laten. Echter, dit geldt alleen voor gegevens die echt niets met de ellips te maken hebben. Kleine foutjes in representaties verkleinen dan wel de inschatting van het begrip van de leerling, maar een idee in de goede richting is in dit geval meer waard dan geen enkel idee.

Opgave 2. Bij deze opgave wordt een analytische vraag gesteld, die eenvoudiger kan worden opgelost door middel van meetkundig inzicht. Leerlingen met een rijke cognitieve eenheid zullen zonder rekenen eenvoudig tot een juist antwoord komen, terwijl leerlingen met een wat armere cognitieve eenheid aan het rekenen zullen slaan. Bij de analyse is dus gekeken welke van de twee opties door de leerlingen gekozen werd. Als genoemd werd dat het tweede punt vanwege de symmetrie inderdaad op de ellips ligt dan is er sprake van het toepassen van meetkundig inzicht, als er gerekend wordt niet. Als het meetkundige inzicht van symmetrie genoemd werd, maar er uiteindelijk alsnog gerekend werd, is er sprake van een beperkte mate van gebruik van meetkundig inzicht.

Opgave 3. Bij deze opgave wordt wederom een analytische vraag gesteld, waarbij driftig gerekend kan worden om tot een correct antwoord te komen. Wederom zou een leerling met een rijkere cognitieve eenheid eenvoudig kunnen schakelen tussen representaties en door middel van synthetische meetkunde tot een antwoord komen. Bij de analyse is gekeken welke richting de leerlingen insloegen. Er is sprake van een beperkte mate van meetkundig inzicht als leerlingen door meetkundig te denken uitkomen op het feit dat Q een ellips beschrijft, en van grote mate indien hier ook daadwerkelijk concrete meetkundige argumenten voor gegeven worden. Foutjes in de redenatie (zoals het niet inzien dat er sprake is van een halvering in beide dimensies) worden niet sterk meegenomen in de analyse; het belangrijkst is of leerlingen überhaupt meetkundig aan de slag gaan om te bedenken wat Q, doet of dat ze met formules aan de slag gaan.

Opgave 4. Bij deze opgave zal voor onderdeel (a) een verband gelegd moeten worden tussen de analytische vorm en de meetkundige representatie met brandpunten. Als dit verband bekend is (en de leerling dus een rijke cognitieve eenheid heeft), zal de vraag eenvoudig opgelost kunnen worden. Voor onderdeel (b) dient de leerling in te zien dat de gegeven cirkel overeenkomt met de richtcirkel. Als de eigenschap dat de afstand van een punt op de ellips tot de cirkel gelijk is aan de afstand tot het brandpunt paraat is binnen de cognitieve eenheid, dan zal deze som eenvoudig opgelost worden. In de analyse is daarom gekeken of er inderdaad geredeneerd is met behulp van de richtcirkel, of dat men botweg aan het rekenen geslagen is. Inzicht dat de gegeven cirkel de richtcirkel van de ellips is duidt op het snel kunnen schakelen en het zien van verbanden tussen verschillende representaties, waarvoor rijke cognitieve eenheden benodigd zijn (Barnard, 1999). Wederom is correctheid van het antwoord van ondergeschikt belang, en gaat het om de mate van meetkundige creativiteit.

Posttest

Aangezien de eerste opgave van de posttest overeen kwam met de eerste opgave van de pretest, is hier dezelfde analyse op toegepast. De resterende opgaven zijn als volgt geanalyseerd:

Opgave 2. Bij deze opgave worden twee vragen gesteld, die beide op twee manieren opgelost kunnen worden. De leerling kan bij (a) direct opmerken dat $a^2 = 16$ en daarom $a = 4$, en dat de toppen dus $(4, 0)$ en $(-4, 0)$ zijn. Bij (b) kan door middel van symmetrie direct het juiste antwoord gegeven worden. In dit geval heeft de leerling een rijkere cognitieve eenheid betreffende de ellips.

Een alternatief zou zijn om bij (a) 0 in te vullen voor y in de vergelijking en vervolgens te berekenen voor welke x de vergelijking klopt. Bij (b) zou de waarde van k uitgerekend kunnen worden, om vervolgens de omslachtige techniek van (a) weer op dezelfde wijze toe te passen. In dit geval heeft de leerling nog weinig verbanden gelegd, en is er dus sprake van een minder rijke cognitieve eenheid.

Opgave 3. Bij deze opgave wordt gevraagd naar een raaklijn aan een ellips. Meetkundig inzicht en een juiste beeldvorming bij de situatie leidt direct tot het inzicht dat de ellips aan de x-as raakt (vanwege de waarde van b en de translatie), en dat het punt A ook op de x-as ligt. Leerlingen die op basis hiervan redeneren dat de raaklijn dus gegeven wordt door $y = 0$ tonen meetkundig inzicht, wat duidt op een rijke cognitieve eenheid.

Leerlingen die aan het rekenen slaan zonder na te denken over de meetkundige situatie, kunnen de analytische vraag blijkbaar niet loskoppelen van het analytisch domein en komen niet op het idee om meetkundig te redeneren. Dit getuigt van een zwakkere cognitieve eenheid.

Opgave 4. Bij deze opgave wordt eerst gevraagd naar de vergelijking van een ellips, gegeven een omschrijving als conflictlijn van een cirkel en een punt. Hier moeten leerlingen dus verschillende verschijningsvormen voor combineren; alleen met een rijke cognitieve eenheid zal het lukken deze vraag te beantwoorden. Vervolgens dient van een gegeven driehoek de omtrek bepaald te worden. Leerlingen met inzicht in de situatie en de eigenschappen van ellipsen zullen zien dat er niet gerekend hoeft te worden om tot een juist antwoord te komen. Als er wel gerekend wordt met de vergelijking is er sprake van een minder rijke cognitieve eenheid.

	Kenmerken voor een rijke cognitieve eenheid
Opgave 1	• De ellips is de conflictlijn van een brandpunt en een richtcirkel. • De ellips is de verzameling van punten met gelijke opgetelde afstand tot twee brandpunten. • De ellips is de oplossing van de vergelijking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. • De parameters a en b bepalen de toppen in de x- en y-richting. • De parameters a en b bepalen de brandpunten via $c^2 = a^2 - b^2$. • De ellips is een generalisatie van de cirkel. • De ellips kan zich overal in een assenstelsel bevinden. • Het verplaatsen van een ellips over (p, q) komt overeen met substitutie van x en y door $x - p$ en $y - q$ in de vergelijking. • Het spiegelen van een ellips in de x-as of y-as komt overeen met het substitueren van $-y$ of $-x$ voor y of x.
Opgave 2	• Het tweede punt ligt ook op de ellips vanwege symmetrie in de y-as.
Opgave 3	• Q doorloopt een ellips; dit kan aangetoond worden door middel van gelijkvormige driehoeken.
Opgave 4	• De gegeven cirkel is de richtcirkel van de ellips; aangezien de afstand van het punt P tot het middelpunt 5 is en P op de ellips ligt, is de afstand tot de cirkel ook 5.

Tabel 3.1: Kenmerken voor een rijke cognitieve eenheid (pretest).

	Kenmerken voor een rijke cognitieve eenheid
Opgave 1	• De ellips is de conflictlijn van een brandpunt en een richtcirkel. • De ellips is de verzameling van punten met gelijke opgetelde afstand tot twee brandpunten. • De ellips is de oplossing van de vergelijking $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. • De parameters a en b bepalen de toppen in de x- en y-richting. • De parameters a en b bepalen de brandpunten via $c^2=a^2-b^2$. • De ellips is een generalisatie van de cirkel. • De ellips kan zich overal in een assenstelsel bevinden. • Het verplaatsen van een ellips over (p,q) komt overeen met substitutie van x en y door $x-p$ en $y-q$ in de vergelijking. • Het spiegelen van een ellips in de x-as of y-as komt overeen met het substitueren van $-y$ of $-x$ voor y of x.
Opgave 2	• Aangezien $a^2=16$ ligt de rechtertop op $x=4$ en de linkertop op $x=-4$. Dat zijn dus de mogelijke waarden voor x_P. • Vanwege symmetrie in de y-as geldt dat y_R als waarden 5 en -5 kan hebben.
Opgave 3	• Vanwege de verschuiving van 3 naar beneden en het feit dat de ellips vanuit het middelpunt gezien 3 hoog is (vanwege $b^2=9$), raakt de ellips aan de x-as en is er dus een raaklijn met vergelijking $y=0$.
Opgave 4	• De brandpunten van de ellips zijn $M(5,2)$ en $P(8,2)$, dus het midden is $(6\frac{1}{2},2)$. • De vergelijking is $\frac{(x-6\frac{1}{2})^2}{a^2}+\frac{(y-2)^2}{b^2}=1$ • Aangezien de cirkel door $(10,2)$ gaat, gaat de ellips door $(9,2)$ en geldt dus $a=2\frac{1}{2}$. • Uit de brandpunten volgt $c=1\frac{1}{2}$, dus $b^2=a^2-c^2=4$. Dus, $b=2$. • Aangezien $a=2\frac{1}{2}$ is de somafstand van een punt tot de brandpunten gelijk aan 5. De gevraagde driehoek heeft dus omtrek $5+3=8$.

Tabel 3.2: Kenmerken voor een rijke cognitieve eenheid (posttest).

Hoofdstuk 4

Resultaten

De resultaten van het onderzoek bestaan in feite uit de in bijlage A en bijlage C getranscribeerde gesprekken met de leerlingen in de kader van de pre- en posttest. In bijlage D is per leerling een samenvatting gegeven van hun antwoorden op de vragen tijdens de pre- en posttest, waarbij de in Sectie 3.4.5 besproken criteria aangehouden zijn om te bepalen welke opmerkingen relevant waren.

In dit hoofdstuk wordt per leerling een analyse gegeven op basis van deze samenvattingen, waarin duidelijk wordt in welke mate een verandering in cognitieve eenheden heeft plaatsgevonden. Ook worden in Tabel 4.1 en Tabel 4.2 op bladzijden 36 en 37 voor de pre- en posttest de meest interessante opmerkingen van de leerlingen op een rijtje gezet. Zo kan snel een indruk verkregen worden van de wijze waarop de leerlingen met deze opgaven omgingen.

4.1 Leerling 1

4.1.1 Pretest

Tijdens de eerste opgave van de pretest bleek dat er nog weinig over de ellips bekend was; geen van de twee meetkundige definities werd genoemd. Wel was bekend dat de ellips als vergelijking geschreven kan worden, hoewel de precieze formule niet genoemd kon worden. Meetkundige transformaties zoals translaties, rotaties en spiegelen zijn ook niet aan de orde gekomen. Ook uit een onjuiste opmerking over de functie van de 1 in de vergelijking en het effect van a en b bleek duidelijk dat er nog geen volledig begrip van de vergelijking aanwezig was.

Bij de tweede opgave werd slechts uitgegaan van de analytische meetkunde, en werd niet ingezien dat er sprake was van symmetrie.

Bij de derde opgave had de leerling wel enige intuïtie, maar wist ze niet gebruik te maken van meetkundige technieken om de opgave aan te pakken.

Bij de vierde opgave wist de leerling op de juiste wijze de brandpunten te bepalen, maar herkende ze niet dat de cirkel waar over gesproken werd de richtcirkel van de ellips was.

4.1.2 Posttest

Bij de hardop-denksessie over de ellips was er wel enige associatie met de meetkundige definities (aangezien de brandpunten genoemd werden), maar veel begrip op dit vlak was alsnog niet aanwezig. Verder is er weinig verschil in begrip waar te nemen ten opzichte van de pretest.

Bij de tweede opgave werd niet gezien dat de toppen onafhankelijk waren van k, en dat deze gewoon direct af te lezen waren uit de waarde van a^2. Verder werd ook niet gezien dat de waarden van y_R eenvoudig via symmetrie bepaald konden worden, maar werd onnodig gerekend om eerst de specifieke waarde van k te bepalen.

Bij de derde opgave werd niet herkend dat de raaklijn erg eenvoudig was, aangezien niet gezien werd dat de ellips precies aan de x-as raakt.

Bij de vierde opgave bleek niet bekend te zijn dat de ellips de conflictlijn is van een cirkel en een punt binnen die cirkel. Verder was het plan om te gaan rekenen om de omtrek van de gestelde driehoek te verkrijgen, terwijl kennis van de eigenschappen van de ellips voor een veel eenvoudigere oplosstrategie had kunnen zorgen.

4.1.3 Vergelijking

De leerling bleek zowel tijdens de pre- als de posttest weinig kennis en inzicht te hebben in de ellips en zijn eigenschappen. Ook werd telkens direct teruggegrepen naar vergelijkingen en rekenwerk, zonder dat na werd gebracht over de meetkundige technieken die de opgaven veel makkelijker zouden kunnen maken.

Voor deze leerling heeft het leggen van nadruk op onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde dus duidelijk niet tot rijkere cognitieve eenheden geleid.

4.2 Leerling 2

4.2.1 Pretest

Bij de eerste opgave werden geen associatie gelegd met de meetkundige definities. Er was bekend dat er een vergelijking voor de ellips is, maar niet precies hoe die eruit ziet. Er werd over één meetkundige transformatie gesproken.

Bij de tweede opgave werd netjes meetkundig geredeneerd, door op basis van symmetrie tot een conclusie te komen.

Bij de derde opgave werd slechts analytisch geredeneerd, en kwam het niet in de leerling op om na te denken over de meetkundige situatie waar we mee te maken hadden.

Bij de laatste opgave werd niet opgemerkt dat de cirkel waar het over ging de richtcirkel van de ellips was. Wel werd op een juist en efficiënte manier tot het correcte antwoord gekomen.

4.2.2 Posttest

Bij de eerste opgave van de posttest werden nu wel allerlei meetkundige associaties gemaakt: de definitie op basis van de richtcirkel en op basis van de constante somafstand tot de brandpunten werden genoemd. Ook werd de correcte vergelijking gegeven, het feit dat er toppen zijn, dat er raaklijnen en een poollijn zijn en dat een ellips verschoven kan worden.

Bij de tweede opgave werd direct ingezien dat het gevraagde punt een van de toppen $(-4, 0)$ en $(4, 0)$ is. Ook werd bij het tweede gedeelte direct door middel van symmetrie het correcte antwoord gegeven.

Bij de derde opgave werd een juiste beeldvorming van de situatie gemaakt, waardoor direct door middel van meetkundig inzicht tot de correcte vergelijking voor de raaklijn gekomen werd.

Bij de laatste opgave was de leerling in staat om de verschillende verschijningsvormen van de ellips te combineren. Het lukte (afgezien van een foutieve Pythagoras-berekening) om tot de juiste vergelijking te komen, en door middel van het inzicht dat we te maken hadden met de richtcirkel van een ellips werd ook de omtrek van de driehoek zonder problemen en zonder ingewikkeld rekenwerk bepaald.

4.2.3 Vergelijking

Tijdens de pretest bleek de leerling nog weinig beeld te hebben bij het concept ellips. Bovendien werd voornamelijk analytisch gekeken naar de analytische opgaven, zonder dat meetkundig nagedacht werd over de situatie.

Bij de posttest daarentegen, werden veel meer associaties gegeven bij de ellips. Ook werd gewerkt met symmetrie, meetkundige tekeningen en verschillende representaties van de ellips om tot correcte en korte oplossingen te komen.

Deze leerling heeft dus duidelijk vooruitgang gemaakt: de posttest getuigde van een veel rijkere cognitieve eenheid betreffende de ellips, met als gevolg dat veel rekenwerk bespaard bleef en de leerling echt doorhad waar hij mee bezig was.

4.3 Leerling 3

4.3.1 Pretest

Ten tijde van de pretest had de leerling nog slechts een beperkt beeld van de ellips. De standaardvergelijking was nog niet helemaal goed bekend, en ook alle andere kennis was gefragmenteerd en onvolledig. Toch associeerde de leerling de ellips al wel met symmetrie, met brandpunten en met kegelsneden. Hoe het allemaal echter precies zit leek nog niet helemaal duidelijk.

Bij de tweede opgave begon hij in eerste instantie te rekenen, maar na doorvragen kwam hij uiteindelijk wel op het idee om met symmetrie te werken.

Bij de derde opgave had de leerling geen idee hoe het probleem aan te pakken. De intuïtie bij de oplossing was ook onjuist. Hij kon op geen enkele wijze aangeven wat er zou moeten gebeuren.

Ook bij de laatste vraag paste de leerling geen meetkundige kennis toe. Hij wist niet exact hoe te werk te gaan, maar stelde voor om te gaan rekenen aan de vergelijking. De representatie van de ellips als conflictlijn van een punt en een richtcirkel werd niet herkend.

4.3.2 Posttest

Ten tijde van de posttest was de leerling wel bekend met de standaardvergelijking van de ellips. Ook kon hij goed uitleggen wat de functie van de parameters a en b was. Er werd gesproken over brandpunten, en nu werd wel de constante somafstand genoemd. De ellips als conflictlijn van cirkel en punt werd niet genoemd (hoewel wel een begin gemaakt leek te worden in deze richting).

Bij de tweede opgave werd zonder hulp direct gebruikgemaakt van het inzicht dat de a in de vergelijking de toppen bepaalt, en vervolgens van de symmetrie om het tweede gedeelte op te lossen. Zo werd een boel rekenwerk bespaard.

Bij de derde opgave werd geen meetkundig inzicht getoond om tot een vergelijking voor de raaklijn te komen.

Bij de laatste opgave kon de leerling geen vergelijking voor de ellips opstellen. Ook stelde hij in eerste instantie voor om door middel van afstandsberekeningen tot de omtrek van de driehoek te komen. Toch kwam hij na een eenvoudige aansporing tot het nadenken over een alternatieve wijze zelf met het idee dat de constante somafstand gebruikt zou kunnen worden.

4.3.3 Vergelijking

Tijdens de pretest had de leerling al enige meetkundige associaties bij de ellips, maar nog geen volledig beeld van hoe dit precies in elkaar stak. Bovendien herkende hij niet de verschijningsvorm van de ellips als conflictlijn van een richtcirkel en een punt, en moest hij aangespoord worden om gebruik te maken van symmetrie bij het oplossen van een opgave.

Ten tijde van de posttest kon de leerling wel de standaardvergelijking van de ellips noemen, en wat vertellen over de functie van de parameters. Ook werd de ellips nu gezien als verzameling van punten met gelijke somafstand tot twee brandpunten, en werd dit uiteindelijk ook toegepast in een opgave. Daarnaast werd slim gebruikgemaakt van kennis over de functie van a in de standaardvergelijking en van symmetrie. Slechts bij de derde opgave had meer meetkundig inzicht toegepast kunnen worden.

Al met al lijkt de leerling dus zeker vooruit te zijn gegaan wat betreft het toepassen van meetkundige inzichten tijdens het werken met ellipsen. Hij had uiteindelijk meer associaties bij de ellips, kende meer representaties en kon deze ook gedeeltelijk toepassen in de opgaven. Het is dus te stellen dat de lessenserie bij deze leerling voor rijkere cognitieve eenheden heeft gezorgd.

4.4 Leerling 4

4.4.1 Pretest

Tijdens de pretest had de leerling nog geen associaties richting de meetkundige definities van de ellips. Wel werd de symmetrie genoemd, het feit dat de ellips verplaatst kan worden en dat hij toppen heeft.

Er werd bij de tweede opgave ook al slim gebruikgemaakt van symmetrie, maar bij de derde opgave werd niet gebruikgemaakt van meetkundige technieken om tot een goed antwoord te komen. Ook werd de verschijningsvorm van de ellips als conflictlijn van cirkel en punt niet herkend bij het beantwoorden van de laatste opgave.

4.4.2 Posttest

Bij de posttest kwam de leerling niet direct met de meetkundige associaties, maar wist uiteindelijk wel uit zichzelf de brandpunten te noemen, inclusief de eigenschap van gelijke somafstand. Ook werd de ellips als conflictlijn van een richtcirkel en een punt binnen die cirkel genoemd.

Bij het beantwoorden van de vragen werd niet iedere keer direct meetkundig gedacht, hoewel enig aansporen om na te denken of dingen nog op een andere manier aangepakt konden worden wel tot resultaat leidde. Zo werd uiteindelijk bij de tweede opgave gebruikgemaakt van symmetrie, en werd bij de laatste opgave herkend dat het middelpunt en het andere gegeven punt de brandpunten van de ellips waren.

4.4.3 Vergelijking

Tijdens de posttest wist de leerling meer te bedenken bij de ellips, hoewel het niet direct allemaal naar boven kwam. Ook werd dit nog niet allemaal direct toegepast bij het beantwoorden van de opgaven. Hier blijkt dus uit dat de leerling wel van alles over de ellips wist, maar dat de connecties tussen de cognitieve eenheden blijkbaar nog niet sterk genoeg waren om deze associaties direct te activeren.

Voor deze leerling heeft de lessenserie dus wel degelijk effect gehad, maar de compressie heeft nog niet genoeg plaatsgevonden om voor daadwerkelijk rijke cognitieve eenheden te zorgen.

	Leerling 1	Leerling 2	Leerling 3	Leerling 4
Opgave 1	• Ik denk ook aan cirkels en hyperbolen • Het is een in elkaar gedeukt rondje • Je hebt een x^2 en een y^2 als je het als een formule schrijft • De 1 in de standaardvergelijking is de straal • $c^2 = a^2 + b^2$ • a en b bepalen het middelpunt	• Een vervormde cirkel • De vergelijking lijkt op die van de cirkel • Het middelpunt kan verschoven worden • Als $a = b$ dan is het een cirkel • De toppen zijn $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ en $(0, -b)$ • Met c kan je de brandpunten uitrekenen • $a^2 + b^2 = c^2$ • Als a groter is dan ligt c op de x-as, anders op de y-as • Er zijn poollijnen	• Hij is symmetrisch in twee lijnen • De formule is zoveel x^2 plus zoveel y^2 is iets • Het is een kegelsnede • De vergelijking is $(x + a)^2 + (y + b)^2 = ...$ • De toppen liggen op $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $0, b)$ en $(0, -b)$ • Er zijn brandpunten, en $b^2 - a^2 = c^2$	• Platgetrokken cirkel • Symmetrisch in de midden • Hij heeft vier toppen • De vergelijking is $ax^2 + by^2 = c$ • Het middelpunt is soms verplaatst
Opgave 2	• Als je -4 in het kwadraat doet krijg je weer 16	• Het is een soort spiegeling aan de andere kant van de y-as • Deze twee lijnen zijn symmetrielijnen	• -4 kwadraat is hetzelfde als 4 kwadraat • Hij is symmetrisch in de x- en y-as	• Het ding is symmetrisch in de oorsprong • Dan ligt hier $(-4, 3)$, omdat dit een symmetrie-as is
Opgave 3	• Dan krijg je toch ook gewoon een ellips?	• Omdat P over een ellips loopt, zou ik zeggen dat Q ook een soort mini-ellipsje maakt	• Een parabool ofzo?	• Iets in de trant van een hyperbool • Ik zou deze punten berekenen
Opgave 4	• c^2 is dan $a^2 - b^2$ • Dan kan je Pythagoras gebruiken	• $c^2 = a^2 + b^2$	• Daar was toch zo'n formule voor...	• Ik kan de top berekenen • Ja, er was wel iets met de stelling van Pythagoras • $c^2 = a^2 - b^2$

Tabel 4.1: Overzicht van de pretest.

	Leerling 1	Leerling 2	Leerling 3	Leerling 4
Opgave 1	• Dat is zo'n platgedrukte cirkel • Je hebt als formule $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ • Je hebt twee brandpunten en vier toppen • Je hebt ook een c, als a groter is dan b dan geldt $c^2 = a^2 - b^2$, anders $c^2 = b^2 - a^2$.	• Een ellips heeft vier toppen, twee brandpunten • De afstand van het brandpunt naar een punt op de ellips en naar het andere brandpunt is altijd constant • De brandpunten zijn het middelpunt van een cirkel en een ander punt binnen de cirkel, en alle punten met een gelijke afstand tot het punt dat niet het middelpunt is en de cirkel die vormen de ellips • Vergelijking: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ • Kan ook raaklijnen hebben en een poollijn • Als de brandpunten samenvallen is het een cirkel • Kan verschoven worden	• Je hebt twee brandpunten • De afstand bij elkaar van de twee brandpunten naar een punt op de ellips is constant • De ellips is ook de afstand van een punt... dat ben ik even kwijt • De standaardvergelijking is $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ • Hij heeft toppen • a en b stellen de afstand tot de toppen voor	• Ik denk nog steeds aan een platgedrukte cirkel • Een vergelijking van x min het x-coördinaat van het middelpunt gedeeld door een getal, plus y min de y-coördinaat van het middelpunt gedeeld door getal is 1 • De getallen waardoor je deelt zijn de toppen. • Als $x = 0$, dan $y = b$ • Je hebt hier twee brandpunten • Dit plus dat is overal gelijk • Hij is ontstaan uit een cirkel en een punt binnen die cirkel, en daarvan dan alle punten die tot de cirkel en dat punt binnen de cirkel gelijk zijn
Opgave 2	• Als eerste zou ik daarin gaan substitueren • Dan wil ik eerst die daarin gaan zetten, want dan weet je k • Als je k hebt kan je die toch invullen	• Hij gaat altijd door deze top • a^2 is 16 en dit punt ligt op de y-as, dus dat zal altijd 4 of -4 zijn • Dit is eigenlijk gespiegeld	• Volgens mij is het gewoon 4 en -4... die zat hier, $(a, 0)$ en $(-a, 0)$, en aangezien a^2 16 is. • 5 en -5 als het goed is weer... gewoon weer spiegelen hierheen	• $\frac{x_P^2}{16} + \frac{0}{k} = 1$, dus... $x_P = 4$ of $x_P = -4$ • $k = \frac{25 \cdot 16}{7}$ • Dan kun je R invullen • Wacht even, je hebt hier symmetrie-assen, ... dus 5 en -5
Opgave 3	• Geen idee	• Omdat die 3 is, komt ie precies daar • Dat is eigenlijk heel makkelijk, dat zou dan $y = 0$ zijn	• Geen idee	• Dit is de vergelijking van de poollijn • Dan moet je die snijden met de ellips en dan kan je met die punten de raaklijn opstellen
Opgave 4	• Dan zou ik zeggen, vul x-coördinaat 5 in • En dan zou ik Pythagoras doen	• Die ligt op de ellips, dus dat betekent dat sowieso die twee samen 5 zijn	• Dan is de afstand van P naar A... ja die kun je berekenen • Dan was die afstand constant, altijd, de afstand van M naar A en de afstand van M naar P	• Middelpunt $(5, 2)$ wordt een van de brandpunten. • $P(8, 2)$ werd ook een brandpunt • Als je deze vergelijking hebt kun je $x = 5$ invullen, en daar komt dan twee y-coördinaten uit

Tabel 4.2: Overzicht van de posttest.

Hoofdstuk 5

Conclusies en discussie

Met behulp van een uit dertien uren bestaande lessenserie is gepoogd om de in Sectie 1.2 gestelde onderzoeksvraag te beantwoorden:

> *"Leidt het benadrukken van onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde, eventueel gevisualiseerd door middel van GeoGebra, in Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4 (Analytische meetkunde – Krommen) tot rijkere cognitieve eenheden?"*

In Hoofdstuk 3 is reeds uitgebreid ingegaan op de precieze wijze waarop extra nadruk is gelegd op onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde. Dit betrof met name extra uitleg en extra opgaven, veelal ondersteund door visualisaties met het computerprogramma GeoGebra. Het onderzoek is dus inderdaad verlopen zoals voorgeschreven door de onderzoeksvraag.

Door middel van een pre- en posttest is een analyse gemaakt van het inzicht en de vaardigheden van de leerlingen betreffende het werken met ellipsen, om zo de rijkheid van hun cognitieve eenheden te meten. De resultaten hiervan zijn weergegeven in bijlage A en bijlage C, en reeds in detail besproken in Hoofdstuk 4. Hieronder zullen op basis van deze resultaten enkele conclusies worden getrokken, inclusief een discussie betreffende hun geldigheid en generaliseerbaarheid.

5.1 Conclusies en discussie

Zoals blijkt uit de analyse, zijn de resultaten niet uniform. Een van de leerlingen lijkt weinig vorderingen gemaakt te hebben, een ander juist aanzienlijk. De twee overige leerlingen lieten een beperkte mate van verrijking van hun cognitieve eenheden zien. Hieruit kan geconcludeerd worden dat het leggen van nadruk op onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde in Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4 tot rijkere cognitieve eenheden *kan* leiden.

Interessant is dan uiteraard de vraag onder welke omstandigheden deze verrijking zal plaatsvinden, en onder welke omstandigheden dit niet zal gebeuren. Hoewel de resultaten van het onderzoek hier geen uitsluitsel over geven, is er wel aanleiding tot een hypothese. De leerling waarbij geen verrijking van cognitieve eenheden plaatsvond is namelijk precies de leerling die ook al tijdens de lessen regelmatig opmerkte dat ze liever gewoon rekende dan dat ze 'slim' na moest denken om een opgave op te lossen. Ze liet blijken niet veel vertrouwen in haar eigen wiskundige inzicht te hebben, en daarom veel liever de normale regeltjes te volgen. Ook aan het eind van de lessenserie gaf ze aan liever gewoon te rekenen.

Deze tegenstand jegens het doel van de lessenserie zou ertoe geleid kunnen hebben dat de leerling zich niet genoeg heeft opengesteld voor de nieuwe mogelijkheden van het meetkundig denken in de context van analytische meetkunde. Dit zou overeenkomen met het idee achter 'met-befores': een concept dat gebaseerd is op de visie dat leerprocessen in zeer grote mate beïnvloed worden door eerdere ervaringen (McGowen & Tall, 2010; Tall, 2011). Problematische 'met-befores', zoals in dit geval het gevoel toch niet zoveel van de situatie te zullen snappen, kunnen het huidige leerproces belemmeren. Aangezien deze leerling reeds vooraf had aangegeven liever te rekenen, en daarmee precies voldoet aan het door McGowen en Tall geschetste beeld van de student die zijn doelen bijstelt tot het slechts weten *hoe* in plaats van *waarom*, had wellicht meer aandacht besteed moeten worden aan deze problematische met-before. Immers, McGowen en Tall voorspellen reeds dat het negeren van dergelijke belemmerende factoren zal leiden tot een focus van de leerling op technieken die benodigd zijn om op een correcte (maar weinig inzichtelijke) wijze tot een antwoord te komen. Dit gaat dus juist precies voorbij aan hetgeen wat dit onderzoek probeerde te bereiken, zoals inderdaad ook bleek uit de posttest van deze leerling.

De andere drie leerlingen, waarbij wel een verrijking van hun cognitieve eenheden is waargenomen, gaven aan erg positief tegen de aangepaste wijze van analytische meetkunde aan te kijken. Ze merkten op dat ze deze aanpak van wiskunde leuker vonden, aangezien ze het gevoel hadden meer inzicht te krijgen en ook eenvoudiger tot resultaten te kunnen komen. Hoewel dit extra enthousiasme geen specifiek doel van dit onderzoek was, is het natuurlijk een prettige bijkomstigheid dat de meerderheid van de leerlingen zich op een positieve manier uitgedaagd voelde. Deze toename in motivatie sluit ook inderdaad aan bij eerdergenoemd onderzoek (Clements et al., 1997).

Het feit dat de verbindingen tussen hun cognitieve items bij sommige leerlingen nog niet heel sterk bleken te zijn, zou kunnen komen doordat er slechts een paar lessen aan dit onderwerp besteed zijn. Hierdoor zou de langetermijnpotentiatie, zoals beschreven door Tall en Barnard (2002), wellicht nog niet genoeg bereikt zijn.

5.1.1 Interne validiteit

De praktische omstandigheden lieten het niet toe om het onderzoek uit te voeren met een controlegroep. Hierdoor is de huidige vorm van het onderzoek ontstaan, waarbij als doelgroep slechts één klas met slechts vier leerlingen is gebruikt.

Vanwege het gebrek aan vergelijkingsmateriaal is het uiteraard niet gegarandeerd dat de waargenomen verrijking van de cognitieve eenheden van drie van de vier leerlingen inderdaad door de nadruk op onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde is gekomen. Wellicht zouden de leerlingen na het behandelen van het hoofdstuk over analytische meetkunde op de 'normale' wijze ook slimmer geworden zijn en had dit tot hetzelfde resultaat geleid.

Het is echter niet onrealistisch om te denken dat de verrijking daadwerkelijk door de aangepaste leswijze is veroorzaakt. Immers, in het betreffende hoofdstuk werd haast geen nadruk gelegd op de meetkundige eigenschappen van de figuren waar het om draaide, waardoor leerlingen niet geleerd zouden hebben dat het soms verrassend efficiënt kan zijn om net iets verder te kijken dan de formules lang zijn. Een experiment met controlegroep zou echter nodig zijn om dit objectiever vast te stellen.

Een verbeterpunt betreffende de interne validiteit van de pretest is dat het achteraf gezien beter was geweest om leerlingen de week voor aanvang van de lessenserie te testen. Nu begonnen de drie resterende leerlingen al aan de opgaven van het hoofdstuk over analytische meetkunde terwijl de eerste leerling al geïnterviewd werd voor de pretest. Hierdoor kregen ze al enige informatie mee, waardoor een van de leerlingen ook inderdaad opmerkte gebruik te hebben gemaakt van symmetrie aangezien hij net in het boek een opgave hierover had zien staan. Ook was het achteraf gezien niet handig dat de laatste opgave van de pretest ook eenvoudig te maken bleek te zijn zonder in te zien dat de cirkel waar naar gerefereerd werd de richtcirkel van de ellips was.

5.1.2 Externe validiteit

Vanwege de zeer kleine doelgroep van het experiment is het vanzelfsprekend onmogelijk om zinnige generalisaties te maken naar bijvoorbeeld de groepering van alle Nederlandse leerlingen die Wiskunde D op VWO-niveau volgen.

Vanwege het kleine aantal leerlingen was het eenvoudiger om vragen te beantwoorden en waren de leerlingen wellicht gemotiveerder dan gemiddeld. Bovendien kan het feit dat bij drie van de vier leerlingen een verrijking is waargenomen vanzelfsprekend niet statistisch verantwoord worden gegeneraliseerd tot de uitspraak dat dit dan wel in iedere geval bij 75% het geval is.

Niettemin geeft het huidige onderzoek wel in ieder geval een indicatie dat het benadrukken van de onderliggende meetkundige concepten nut *kan* hebben. Dit zal hopelijk andere wiskundedocenten aansporen om het ook eens te proberen en te zien wat hun resultaten zijn, en zou bovendien een aanleiding kunnen zijn voor een grootschaliger onderzoek (zoals hieronder als aanbeveling gegeven wordt).

5.2 Aanbevelingen

Op basis van de resultaten van dit onderzoek lijkt het reëel om aan te nemen dat het benadrukken van concepten uit de synthetische meetkunde tijdens het behandelen van analytische meetkunde voor rijkere cognitieve eenheden kan zorgen. Om er echter achter te komen hoe sterk dit verband is en onder welke voorwaarden verrijking plaatsvindt, zou aanvullend onderzoek gedaan moeten worden.

Een belangrijke aanbeveling voor toekomstig onderzoek op dit gebied is om gebruik te maken van parallelle klassen met beide een groter aantal kinderen dan bij dit onderzoek het geval was. Op die manier kunnen kwantitatieve technieken gebruikt worden die vanwege het grotere aantal deelnemers betrouwbaarder en generaliseerbaarder zullen zijn, en dus voor betere externe validiteit zullen zorgen (Dooley, 2001). Bovendien zal beter gemeten kunnen worden in hoeverre de verrijking die plaatsvindt in geval van het benadrukken van de meetkundige concepten daadwerkelijk causaal verband houdt met de alternatieve lesmethode, als een van de klassen op de oude wijze onderwezen wordt en zo als controlegroep gebruikt wordt (betere interne validiteit).

Totdat verder onderzoek is uitgevoerd, kan in ieder geval uit het huidige onderzoek geconcludeerd worden dat het benadrukken van onderliggende meetkundige concepten tijdens de behandeling van analytische meetkunde aan sommige leerlingen een uitdaging geeft. Ze bleken deze uitdaging te waarderen, en vonden het prettig om meer inzicht te krijgen in de situaties. Ook bleek dat niet iedere leerling zich kan vinden in deze uitdaging; iets wat in gedachten gehouden moet worden. Zo zou gedifferentieerd kunnen worden, door leerlingen die wel een uitdaging kunnen en willen gebruiken wat extra uitleg en opgaven te geven (in de stijl van dit onderzoek). Sowieso blijkt differentiatie van groot belang te zijn (Tomlinson, 2001), en de meetkundige onderwerpen uit dit onderzoek lijken zich hier prima voor te lenen.

Literatuurlijst

Abumosa, M. A. (2008). Using a dynamic software as a tool for developing geometrical thinking. *International Journal of Instructional Technology & Distance Learning*, *5*(12), 45–54.

Alagic, M. (2003). Technology in the mathematics classroom: Conceptual orientation. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *22*(4), 381–399.

Barnard, T. (1999). Compressed units of mathematical thought. *Journal of mathematical behavior*, *17*(4), 401–404.

Barnard, T. & Tall, D. O. (1997). Cognitive units, connections and mathematical proof. In *Proceedings of the 21st conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 41–48).

Barnard, T. & Tall, D. O. (2001). A comparative study of cognitive units in mathematical thinking. In *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 89–96).

Clements, D. H., Battista, M. T., Sarama, J., Swaminathan, S. & McMillan, S. (1997). Students' development of length concepts in a logo-based unit on geometric paths. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 70–95.

Dooley, D. (2001). *Social research methods (vierde editie).* Prentice Hall.

Gray, E. & Tall, D. (2002). Abstraction as a natural process of mental compression. In *Proceedings of the 26th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 115–120).

Gray, E. & Tall, D. (2007). Abstraction as a natural process of mental compression. *Mathematics Education Research Journal*, *19*(2), 23–40.

Hohenwarter, M. & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and its Applications*, *7*. (ID 1448, March 2007)

Hollebrands, K. F. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*(1), 55–72.

Langill, J. (2009). *Requirements to make effective use of dynamic geometry software in the mathematics classroom: a meta-analysis.* (Ongepubliceerd.)

McGowen, M. A. & Tall, D. O. (2010). Metaphor or met-before? The effects of previouos experience on practice and theory of learning mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, *29*(3), 169–179.

Reichard, L. A., Rozemond, S., Dijkhuis, J. H., Admiraal, C. J., Vaarwerk, G. J. te, Verbeek, J. A. et al. (2008). *Getal & Ruimte WI VWO D deel 3.* EPN.

Reichard, L. A., Rozemond, S., Dijkhuis, J. H., Admiraal, C. J., Vaarwerk, G. J. te, Verbeek, J. A. et al. (2009). *Getal & Ruimte WI VWO D deel 4.* EPN.

Saha, R. A., Ayub, A. F. M. & Tarmizi, R. A. (2010). The effects of GeoGebra on mathematics achievement: enlightening coordinate geometry learning. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, *8*, 686–693.

Stols, G. H. (2010). Influence of the use of technology on students' geometric development in terms of the van hiele levels. In *Proceedings of the 18th annual conference of the southern african association for research in mathematics* (pp. 149–155).

Stols, G. H. & Kriek, J. (2011). Why don't all maths teachers use dynamic geometry software in their classrooms? *Australasian Journal of Educational Technology*, *27*(1), 137–151.

Sutherland, R. & Balacheff, N. (1999). Didactical complexity of computational environments for the learning of mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *4*(1), 1–26.

Tall, D. O. (2006). A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *11*, 195–215.

Tall, D. O. (2011). *Sensible mathematics.* (Ongepubliceerd. Draft van June 24, 2011, geschreven in overleg met Nellie Verhoef)

Tall, D. O. & Barnard, T. (2002). *Cognitive units, connections and compression in mathematical thinking.* (Ongepubliceerd.)

Thurston, W. P. (1990). Mathematical education. *Notices of the American Mathematical Society*, *37*(7), 844–850.

Tomlinson, C. A. (2001). *How to differentiate instruction in mixed-ability classrooms.* Association for Supervision and Curriculum Development.

Zhao, Y., Pugh, K., Sheldon, S. & Byers, J. L. (2002). Conditions for classroom technology innovations. *Teachers College Record*, *104*(3), 482–515.

Bijlage A

Transcripties van de pretest

A.1 Leerling 1

A.1.1 Opgave 1

(1)	Mark:	We hebben vier opgaven, en bij de eerste gaat het erom om in één minuut zoveel mogelijk over iets te zeggen. Dus dan is het echt zo van: probeer gewoon zo snel mogelijk allerlei dingen die je kan bedenken bij dat onderwerp, en daarna gaan we gewoon wat langzamer erover praten. Maar in het begin is het even snel waar je op zou kunnen komen als je daarover nadenkt.
(2)	Mark:	Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk in één minuut.
(3)	Leerling:	Ehh, bij een ellips denk ik ook aan cirkels en aan hyperbolen en parabolen. Het is een rondje en dan vaak zeg maar zo in elkaar gedeukt een beetje. En je hebt een x^2 en een y^2 als je het als een formule schrijft. En, ehh, ellips, ja weet niet. Meetkunde. Ja bij ons moesten we, toen met het hoofdstuk moeten we zeg maar, kregen we een functie en moesten we onderzoeken of het een ellips was, parabool, hyperbool of cirkel. Dus daar denk ik dan aan. [Lange stilte]
(4)	Mark:	Ja, verder niks?
(5)	Leerling:	Nee, dat was wel het.
(6)	Mark:	Oke, nou, goed.
(7)	Mark:	Nou ga ik een dingetje helpen: een ding bij een ellips wat we tot nu toe vaak gezien hebben is dat hij geschreven kan worden als $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, dus die vergelijking. Kan je daar wat over vertellen?
(8)	Leerling:	Dat kan je anders schrijven, of tenminste, je kan toch dat je dat zonder de breukdingen hebt. Dan vermenigvuldig je het met a... of met a^2, en met b^2.
(9)	Mark:	En dan?
(10)	Leerling:	En dan heb je gewoon zo'n vergelijking. Wat je hier kunt zien is toch iets met toppen en middelpunten en de straal?
(11)	Mark:	Kan je dat nog iets meer toelichten?
(12)	Leerling:	Eh, ja, met de a^2 en de b^2... en je hebt ook nog een c^2, alleen die kan je daaruit halen.
(13)	Mark:	Oke, wat weet je daarvan?
(14)	Leerling:	Eh, iets van: als a^2 groter of kleiner is dan b^2, het was zoiets, dan heb je $c^2 = a^2 + b$...., ja dat was zo'n regeltje. En die 1 die staat dan voor de r, toch? Ja?
(15)	Mark:	Hoe zeg je?
(16)	Leerling:	Voor de r? De straal?
(17)	Mark:	Wat is de r?
(18)	Leerling:	Straal, toch?

(19)	Mark:	Ja, maar wat staat voor de r zei je?
(20)	Leerling:	Die 1. Of nou ja, wat daar dan staat.
(21)	Mark:	Oke. En verder die a en die b, wat hebben die precies voor invloed? Kan je daar wat over zeggen?
(22)	Leerling:	Middelpunt. Zeg maar, waar... als je 'm plot.
(23)	Mark:	Oke. Zijn er nog andere dingen waar je aan denkt bij de ellips, als je er nog wat rustiger over na mag denken?
(24)	Leerling:	Eh, [lange stilte], nee schiet niks te binnen.
(25)	Mark:	Oke, dat is helemaal goed.

A.1.2 Opgave 2

(26)	Mark:	Oke, nou dit is de opgave. We hebben een ellips, gegeven door deze vergelijking, en daar hebben we twee korte opgaafjes bij. En op zich mag je het papier gebruiken, je mag het ook uitleggen, en wat ik belangrijk vind is dat je uitlegt hoe je dit zou aanpakken, en hoe je daarbij nadenkt, ja, hoe je zoiets zou doen. Dus alles wat je daarbij bedenkt. Dat mag met papier of ook gewoon zeggen hoe je zoiets zou aanpakken.
(27)	Leerling:	Ja. Laat zien dat het punt $P(4,3)$ op de ellips ligt. Nou, wat ik zou doen is 4 als x invoeren en 3 als y. En dan kijken als het samen 1 is, dan ligt ie op de ellips.
(28)	Mark:	Oke, wil je dat doen?
(29)	Leerling:	Ja... [noteert: $\frac{16}{32} + \frac{9}{18} = 1$]. Hmm, vereenvoudigen... [mompelt wat en noteert: $\frac{4}{8} + \frac{3}{6} = 1$]... nog een keer... [noteert: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$].
(30)	Mark:	Oke, en waarom heb je het zo aangepakt?
(31)	Leerling:	Ehm, nou omdat je dat vaak doet. Als je een punt krijgt en je hebt iets met x en y dan substitueer je de punten voor de gegeven punten.
(32)	Mark:	Prima. En dan opgave (b)?
(33)	Leerling:	Laat zien dat het punt ... op de ellips. Eh, ja, want als je -4 in het kwadraat doet dan krijg je ook gewoon 16.
(34)	Mark:	Oke.
(35)	Leerling:	Dus dan krijg je dezelfde uitkomst als bij (a).
(36)	Mark:	Oke. Zou je dat nog op een andere manier kunnen zien?
(37)	Leerling:	Eh... nee niet dat ik weet. Nou ja, omdat ik (a) heb gedaan weet je dat...
(38)	Mark:	Oke, dus je zou het gewoon op dezelfde manier weer ja.
(39)	Leerling:	Ja, ja.
(40)	Mark:	Prima, nou, helemaal goed.

A.1.3 Opgave 3

(41)	Mark:	Je mag 'm weer zelf lezen, da's het makkelijkst denk ik.
(42)	Leerling:	[lange stilte]... [schetst een ellips in een assenstelsel]. Oke, wacht, dus je hebt een ellips.
(43)	Mark:	Ja. Ik mag verder niet helpen he. Je mag het papier gebruiken.
(44)	Leerling:	Punt A... Maar was dit nou de coordinaten van het middelpunt?
(45)	Mark:	Daar kan ik niets over zeggen.
(46)	Leerling:	Anders ga ik er zo vanuit.
(47)	Mark:	Ga er inderdaad maar gewoon vanuit wat je zelf denkt.

(48) Leerling: Oke, dan heb je dus dat $x = 5$, dan zou dit 5 komma 3 zijn [noteert het coördinatenpaar $(5, 3)$ in het midden van de ellips], en dan zal ongeveer hier.... Zoiets? Dan heb je het punt $(-5, -3)$ [noteert het punt $(-5, -3)$]. Wat is een kromme ook alweer? Dat is toch ook gewoon zoiets?

(49) Mark: Ja.

(50) Leerling: Beschrijf een punt Q als het zich op het midden van een lijnstuk AP... oke... het punt P doorloopt de ellips... Op het midden van AP terwijl punt P over de ellips loopt. Maar bedoel je dan dat ie zo gaat?

(51) Mark: Ja.

(52) Leerling: Oke, dus hij beweegt de hele tijd. En welke kromme beschrijft dat? Dus dan heb je een kromme die gaat zo ergens. Of nee, op het midden van lijnstuk... Dus dan zie je dat ie daar.... [lange stilte]... Dan krijg je toch ook gewoon een ellips?

(53) Mark: Dat zou kunnen als jij dat denkt.

(54) Leerling: Ja.

(55) Mark: Hoe zou je erachter kunnen komen, hoe zou je dat kunnen aantonen, laten zien? Hoe zou je dat aanpakken? Het gaat er nou niet om dat je precies weet hoe het moet, maar hoe zou je dat...

(56) Leerling: Want je hebt een punt A heb je, en je hebt het middelpunt van de ellips. En dit is het midden van het lijnstuk AP. Dus de afstand van het midden van, van A naar het midden van P is gelijk.

(57) Mark: En dan verder?

(58) Leerling: Ehm, [lange stilte] nee ik denk dat ik daar dan ongeveer zou vastlopen.

(59) Mark: Oke, helemaal goed.

A.1.4 Opgave 4

(60) Mark: De laatste. Weer een ellips.

(61) Leerling: Yes. Surprise, haha. Oke, ellips, geef de coordinaten van de brandpunten F_1 en F_2. Ja, daar was iets mee, haha.

(62) Mark: Daar was iets mee, oh echt, haha?

(63) Leerling: Ja, want je weet, dat is dan a^2 (wijst naar 25), want je hebt a^2 is dan 25, en b^2 is 16. Dus a is 5 en b is 4. En dan had je F, of ik bedoel c. En hier is a^2... o, was c dan niet iets van, of c^2 is dan $a^2 - b^2$? Ik ga er gewoon vanuit hoor.

(64) Mark: Heel goed. Lastig om niet te helpen...

(65) Leerling: Ja. Oh, ga ik zo hard de mist in, haha?

(66) Mark: Nee, nee, dat valt mee. Maar of het nou goed of fout is...

(67) Leerling: Oke, dan moet ik gaan rekenen. Dus of 9 of 11, even denken hoor. Ja is 9. Dus dan is c is 3. En dan heb je dan iets met, wat was het toch, dan had je als F_1 is dan... ja het was of iets van $(3, 0)$ en $(-3, 0)$ of $(0, 3)$ en $(0, -3)$, dat weet ik niet meer precies hoe dat nou zit, wanneer je a en b kwadraat groter en kleiner dan... en waar die dan zat.

(68) Mark: Maar als je het zelf zou moeten zeggen, waar zouden ze dan liggen denk je?

(69) Leerling: Ehm, [lange stilte].

(70) Mark: Zou je dat kunnen beredeneren?

(71) Leerling: Ja, wat ik nou zat te denken, dat... maar daar klopt volgens mij helemaal niks van... dat ie gewoon als, hoe noem je dat, M middelpunt 0 heeft, en dan ligt ie dus gewoon zo als je een x- en een y-as hebt dan ligt ie zo [noteert een ellips in een assenstelsel met de oorsprong als middelpunt] en dan de brandpunten hier en aan die kant, dus ik zou dan denken dat het dan $(-3, 0)$ is en $(3, 0)$. Gewoon als ik daar vanuit ga, maar dat zou dus ook helemaal verkeerd kunnen zijn.

(72) Mark: Oke. Even voor de opname: je wees aan de uiteinden van de ellips toen je aanwees waar ze zaten. Oke.

(73) Leerling: Oh, hoef dat niet? Nou ja, laat maar.

(74) Mark: Eh, oke, dus je zegt de brandpunten liggen daar. En dan op basis daarvan opgave (b)?

(75) Leerling: Gegeven is nu een cirkel c met straal 10 en als middelpunt M het brandpunt van e links... oh zo, wacht, ja, links van de y-as. Wat is de afstand tussen de cirkel... cirkel c... straal 10... als het middelpunt het brandpunt van die ellips, links van de y-as. Ja... en je hebt punt $(0, 4)$, dus dat ligt op de y-as. En hoe bedoel je het middelpunt van de cirkel?

(76) Mark: Ja er staat hier waar het middelpunt van de cirkel ligt. Dus op het brandpunt van de ellips, links van de y-as. Snap je wat daarmee bedoeld wordt?

(77) Leerling: Ja. Dus voor mijn gevoel zou dat dus deze zijn [wijst op de juiste plek]. Dan zet ik hier dus een grote cirkel omheen, en wat is de afstand tussen de cirkel en het punt $(0, 4)$. Dat ligt dus hier ergens... [noteert een punt boven de ellips, op de y-as]. Dan moet ik dus deze afstand berekenen?

(78) Mark: Lees de vraag nog eens goed.

(79) Leerling: Oh, maar de hele cirkel? Maar dan ligt dit punt [wijst naar het punt $(0, 4)$] in de cirkel.

(80) Mark: Dat zou kunnen.

(81) Leerling: Straal 10... In mijn geval...

(82) Mark: Oke, op basis daarvan...

(83) Leerling: Ja, dan ligt ie in de cirkel. Maar dan zou je dus wel die afstand moeten weten. En dan, als je ervan uit gaat dat de rest 10 is, dan ligt ie in de cirkel...

(84) Mark: Dan ga ik nu toch een klein beetje helpen, aangezien we toch aan het eind zijn en ik toch graag zou weten hoe je verder zou gaan. Met "tot de cirkel" wordt bedoeld tot...

(85) Leerling: de buitenkant

(86) Mark: ... de punten van de cirkel, dus tot de buitenkant zou je kunnen zeggen als je het zo ziet.

(87) Leerling: Dus, als je dan hier nog een grote cirkel omheen had, dan dat punt van daar tot die?

(88) Mark: Precies, hoe zou je dat berekenen?

(89) Leerling: Nou, omdat je weet, dit is het middelpunt, en je weet dat dit tot de afstand is 10. En als je dan weet die, dan kun je toch 10 min, nou als je dit x noemt, en die kan je dan toch berekenen omdat je die weet en die en dan kan je Pythagoras gebruiken.

(90) Mark: Oke.

(91) Leerling: En zo zou ik dat doen.

(92)	Mark:	Oke.
(93)	Leerling:	Ja.
(94)	Mark:	Oke, dan zijn we klaar.

A.1.5 Aantekeningen

Opgave 1. Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk in één minuut.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

7

Opgave 2. Gegeven is de ellips e: $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$.

(a) Laat zien dat het punt $P(4,3)$ op de ellips ligt.

(b) Ligt het punt $P(-4,3)$ op de ellips? Waarom?

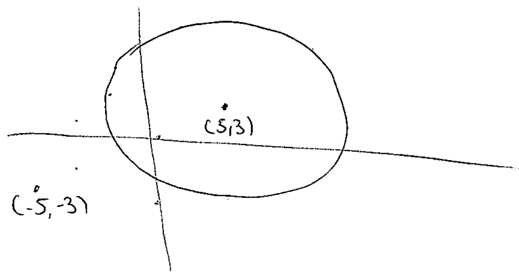
a $\frac{16}{32} + \frac{9}{18} = 1$

$\frac{4}{8} + \frac{3}{6} = 1$

$\frac{\cancel{2}\,1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

2

Opgave 3. Het punt P doorloopt de ellips e: $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$. Gegeven is ook het punt $A(-5,-3)$. Welke kromme beschrijft een punt Q als het zich op het midden van het lijnstuk AP bevindt terwijl P over de ellips loopt?



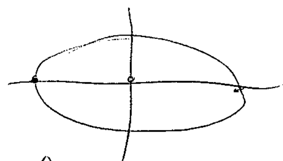
3

7

Opgave 4. Gegeven een ellips e: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

(a) Geef de coördinaten van de brandpunten F_1, F_2.

(b) Gegeven is nu een cirkel c met straal 10 en als middelpunt M het brandpunt van e links van de y-as. Wat is de afstand tussen de cirkel en het punt $P(0, 4)$?



$a^2 = 25 \rightarrow a = 5$

$b^2 = 16 \rightarrow b = 4$

$(-3,0)$ en $(3,0)$

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$

$c = 3$

A.2 Leerling 2

A.2.1 Opgave 1

(1) Mark: Oke, de eerste. Waar denk je aan bij een ellips? In een minuut.

(2) Leerling: Ja, een ellips dat was eentje die, een vervormde cirkel, die dus niet helemaal rond was dacht ik. Ja, dan was de parabool die halve, en, ja, de ellips is een ovaal-achtig object. De vergelijking lijkt een beetje op die van een cirkel, maar dan vervormd. Hij kan zijn middelpunt kan verschoven worden, eh, ja. Je kan 'm, als je 'm naar een functie toebrengt dan komt er een wortel in voor. Eh, ja, oh ja, er is een bepaalde vergelijking voor en dan heb je twee losse helften, en daar staat een plus tussen, en als er een min tussen staat dan is het een hyperbool.

(3) Mark: Oke, ja toen was de tijd ook op. Helemaal goed. Nou, nu hebben we iets meer tijd. Weet je de vergelijking ook nog precies? Want je zei net wel iets...

(4) Leerling: Ja, eh, daar net op het bord stond ie met $4x^2+y^2$... ja dan is gewoon... ja dat de x, daar staat een 4 voor, dus dan vervormt ie.

(5) Mark: Kan je de algemene vergelijking opschrijven?

(6) Leerling: Ehm, wat was die ook alweer. Was dat $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$?

(7) Mark: Bijna...

(8) Leerling: Of moest het andersom... nee... [lange stilte].

(9) Mark: Nee, weet je het niet meer?

(10) Leerling: Nee, hm, of hoefde dit niet 1 te zijn?

(11) Mark: Op zich, zo kan het ook, maar in de algemene vorm schrijf je meestal a^2 daar en b^2 daar.

(12) Leerling: Oh, dus, oh ja, dat klopt.

(13) Mark: Ja, kan je hier wat meer over vertellen?

(14) Leerling: Ehm, ja, dat je, als deze twee hetzelfde zijn dan is het volgens mij een cirkel, maar dat moet ik even... ja... ik denk het wel. Ja je kan 'm ook als je die b daarin... dan krijg je $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, en zo zie je 'm ook wel eens, volgens mij, die hebben wij in ieder geval wel gehad. En als hier a^2 en b^2 hetzelfde zijn, dan heb je een cirkel, met straal de is r^2 dan.

(15) Mark: Oke.

(16) Leerling: Ja, er was nog iets, de toppen zijn volgens mij $(a, 0)$ en $(-a, 0)$.

(17) Mark: Oke.

(18) Leerling: Ja, en de andere toppen zijn dan $(0, b)$ en $(0, -b)$. En dan kon je ook nog c de brandpunten uitrekenen, maar dan weet ik even niet zo snel meer hoe dat moet.

(19) Mark: Oke. Want hoe zat dat ongeveer, kan je er wel iets over zeggen?

(20) Leerling: Ja, dat had iets met de stelling van Pythagoras te maken in de vorm van $a^2 + b^2 = c^2$, en dan is de top $(0, c)$ of $(0, -c)$ of $(c, 0)$ of $(-c, 0)$. Oh ja, als a of b groter is, als a groter is dan staat er $(c, 0)$, dan is c op de x-as, en als b groter is dan is c op de y-as. Ja, ja.

(21) Mark: Oke. Kan je nog meer over de ellips vertellen, al dan niet op basis van dit?

(22) Leerling: Ehm, even kijken, wat hebben we er nog over gehad. Ehm... nee, ja... nee dat weet ik niet zeker meer hoe dat moest met poollijnen, maar volgens mij is dat hier niet bij.
(23) Mark: Ja, verder niks?
(24) Leerling: Ja, ik denk dat dit het was.
(25) Mark: Oke.

A.2.2 Opgave 2

(26) Mark: Een opgave... ik wil graag weten hoe je 'm zou oplossen... en in dit geval kan je 'm misschien ook gewoon oplossen.
(27) Leerling: Oke, dus gewoon met (a) beginnen?
(28) Mark: Ja. En zeg wat je erbij denkt, hoe je erop komt.
(29) Leerling: Ja, dan zou ik om dit te controleren invullen, en als je $4^2 = 16$, gedeeld door 32, plus $\frac{9}{18}$, ehm, dit komt uit op een half, en dit is een half, en dat is in totaal 1, en dus klopt het, dus zou ik ervan uitgaan dat het op de ellips ligt.
(30) Mark: Oke, ja. Nog meer wat je zou kunnen doen of is dat hoe je het zou aanpakken?
(31) Leerling: Je zou er ook een kunnen invullen en kijken of die ander er dan uitkomt.
(32) Mark: Oke, goed. En opgave (b), hoe zou je die aanpakken?
(33) Leerling: Ehm, ja, dat stond net al in die vorig opgave in het boek, dat was een beetje jammer, maar omdat ie symmetrisch is, want het middelpunt is hier niet verschoven, lijkt me zo, ga ik er eigenlijk vanuit dat die er ook op ligt, omdat het eigenlijk een soort spiegeling is aan de andere kant van de y-as.
(34) Mark: Oke.
(35) Leerling: Ja ik kan 'm wel even... $a = 32$ dus dan zou ie iets van zo zijn... [schetst een ellips met de gevraagde punten] ... en dan spiegelt het hierop... dus... dan eh, deze twee lijnen zijn eigenlijk ook symmetrielijnen, dus ga ik ervan uit dat als je hier een min voor zet of hier een min voor zet dat al die punten erop liggen.
(36) Mark: Oke. Prima, dus zo zou je dat aanpakken.
(37) Leerling: Ja.
(38) Mark: Oke.

A.2.3 Opgave 3

(39) Mark: De volgende...
(40) Leerling: Oke... dus het middelpunt is $(5, 3)$... lijkt me zo. Ehm... welke kromme beschrijft het punt Q als het zich op het midden van lijnstuk AP bevindt terwijl P over de ellips loopt... [lange stilte]. Punt $(-5, -3)$, even kijken, dan zou $-5-5 = -10$ zijn. Even kijken. $(-10)^2$ is gewoon 10^2 is 100. Ja, 100 gedeeld door 16, heb je daar wat aan? 6 gedeeld door 9... Wacht even. Dit is twee derde [wijst naar $\frac{6}{9}$], is dit dan één derde? [wijst naar $\frac{100}{6}$]. [Mompelt wat]... nee, dat klopt niet.
(41) Mark: Wat ben je aan het doen? Hoe pak je het aan?

(42) Leerling: Ik wou deze... ik wou kijken wat het punt $(-5, -3)$, dat ligt hier ergens dan. Die ligt er dus niet op, want dit komt anders niet uit [wijst naar de vergelijking van e]... denk ik zo. De toppen zijn, 4 en 3, met als x 4... oh, die ligt er ook buiten, 4... 3... 4.... 3... ellips [schetst een ellips met de oorsprong als middelpunt, en zet een stip in de toppen. Terwijl de toppen op de x-as worden aangestipt wordt 4 gezegd, en 3 terwijl de toppen op de y-as worden aangestipt], en P loopt er overeen. Wat voor kromme schrijft ie? Ja... ik denk dat ik toch een beetje zou gaan tekenen... maar je mag natuurlijk nooit iets echt bewijzen door het alleen maar op papier te zetten. Oh wacht even, A is dat punt.... Ehm... [lange stilte]. Mijn eerste... ja in het begin zou ik zeggen... omdat het punt P over een ellips loopt, zou ik zeggen dat Q ook een soort van mini-ellipsje maakt.

(43) Mark: Hoe zou je dat kunnen aantonen?

(44) Leerling: Ja dat weet ik nog niet precies. Ja, de afstand tussen A en P is altijd... nee de afstand tussen P en Q is altijd de helft van A en P, maar... moet je ook een vergelijking geven van die kromme die punt Q beschrijft?

(45) Mark: Dat zou kunnen ja... Hoe zou je dat dan doen?

(46) Leerling: Ja... dat eh... dat zou ik nu niet precies weten.

(47) Mark: En hoe zou je het ongeveer aanpakken, zou je dat al kunnen bedenken?

(48) Leerling: Ja, ik denk dat je ergens in moet verwerken dat de afstand tussen deze... ja hij zit altijd op de helft van de afstand tussen die twee... ehm... dus dan moet je eigenlijk de afstand tussen die en die berekenen, als een formule schrijven, en de afstand tussen twee punten was...

(49) Mark: tussen welke twee punten?

(50) Leerling: tussen een punt op die lijn en dit punt. Een punt op de kromme en dit punt bedoel ik [wijst het punt $(-5, -3)$ aan]. Ik denk dat de afstand... was $\sqrt{a^2 + b^2}$, maar dan krijg je iets heel raars...

(51) Mark: Want hoe zou je dit gebruiken en waarvoor precies?

(52) Leerling: Ja, dan heb je eigenlijk de afstand tussen die twee punten en dan zou ik daar de helft van nemen, maar dan heb je alleen maar relatieve afstand, daar heb ik ook niks aan. Nee, ik kom hier niet uit.

(53) Mark: Oke, nog iets anders hierover te zeggen, of is zo alles gezegd?

(54) Leerling: Nee, ik heb wel alles gezegd.

(55) Leerling: Oh, ik zie hier dat ik... dit ding heb ik al gelijk in het midden gezet [wijst naar de ellips die getekend was], die had ik eigenlijk daar moeten zetten [wijst in het eerste kwadrant]... daar kom ik nu achter dat dit een ander middelpunt had.

(56) Mark: Oke, prima.

A.2.4 Opgave 4

(57) Mark: De laatste alweer.

(58) Leerling: Geef de coordinaten van de brandpunten F_1 en F_2. Ja, volgens mij was het bij een ellips wel gewoon $a^2 + b^2 = c^2$, maar dan krijg ik... dit is $a^2 = 25 + 16$ is... nee dat is geen mooie, maar... 41... dus $\sqrt{41}$... dan zou c^2 41 zijn. Ja. En dan zou c is $\sqrt{41}$ of $-\sqrt{41}$. Ja, en dan denk ik dat, omdat a hier groter is, ligt ie op de x-as, dus krijg je $(\sqrt{41}, 0)$

		en $(-\sqrt{41}, 0)$. Maar nu ga ik ervan uit dat $a^2 + b^2 = c^2$... en ik weet niet meer zeker of die hierbij geldt.
(59)	Mark:	Oke, laten we er nu maar even vanuit gaan dat dat zo is dan.
(60)	Leerling:	Oke, dan ga ik verder met (b)... [lange stilte]... Oke. Cirkel met een straal van 10, dus $r = 10$. Middelpunt M, brandpunt e... oke, dan zouden we uitgaan dat het brandpunt links deze is... dus dat zou dan $(-\sqrt{41}, 0)$ zijn... oh en als middelpunt is het dit. Wat is de afstand tussen de cirkel en het punt P? $(0, 4)$ ligt dus op de y-as, omhoog, en deze ligt ergens op de x-as. Nou, dan is de afstand... eh $4^2 + (\sqrt{41})^2 - 41^2$... is dus gewoon 41... $16 + 41 = 57$... maar dit is in het kwadraat dus dan zou de afstand $\sqrt{57}$ zijn.
(61)	Mark:	Oke, prima. Is er nog iets meer over deze opgave wat je bekend voorkomt, dat interessant is of waarvan je denkt dat zou nog belangrijk kunnen zijn?
(62)	Leerling:	Ehm, ja, ik... bij zo'n opgave is het zo dat als je de eerste niet goed hebt dat dan ook de tweede een beetje...
(63)	Mark:	Oke, nou hartstikke mooi, dank je wel.

A.2.5 Aantekeningen

Opgave 1. Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk in één minuut.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

1

Opgave 2. Gegeven is de ellips e: $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$.

(a) Laat zien dat het punt $P(4, 3)$ op de ellips ligt.

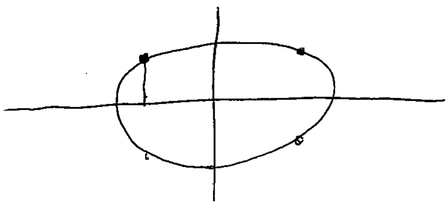
(b) Ligt het punt $P(-4, 3)$ op de ellips? Waarom?

a

$$\frac{16}{32} + \frac{9}{18}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

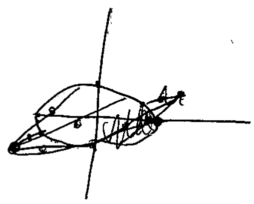
b



7

Opgave 3. Het punt P doorloopt de ellips e: $\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$. Gegeven is ook het punt $A(-5,-3)$. Welke kromme beschrijft een punt Q als het zich op het midden van het lijnstuk AP bevindt terwijl P over de ellips loopt?

(5, 3)



7

Opgave 4. Gegeven een ellips e: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

(a) Geef de coördinaten van de brandpunten F_1, F_2.

(b) Gegeven is nu een cirkel c met straal 10 en als middelpunt M het brandpunt van e links van de y-as. Wat is de afstand tussen de cirkel en het punt $P(0, 4)$?

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$25 + 16 = 41$$

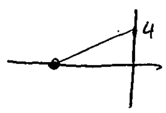
$$c^2 = 41$$

$$c = \sqrt{41} \vee c = -\sqrt{41}$$

$$(\sqrt{41}, 0) \quad (-\sqrt{41}, 0)$$

b

$$r = 10$$



$$(-\sqrt{41}, 0)$$

$$4^2 + 41 =$$

$$16 + 41 = 97$$

$$\sqrt{97}$$

A.3 Leerling 3

A.3.1 Opgave 1

(1) Leerling: Hij is symmetrisch in twee lijnen. En, ehm, ja, die formule, zoveel x^2 plus zoveel y^2 is iets. En, ehm, het is een kegelsnede. [Lange stilte]... er was ook iets met brandpunten, dat zat er nog bij. [Lange stilte].

(2) Mark: Oke. Nou, als je er rustig over nadenkt, zijn er nog meer dingen, die je denkt van... kan je nog iets verder ingaan op wat je net allemaal gezegd hebt überhaupt?

(3) Leerling: Ehm, ja hij is symmetrisch in twee lijnen zeg maar. En, eh...

(4) Mark: Kan je dat meer toelichten? Welke lijnen?

(5) Leerling: Ja de lijnen die tegenover... de twee toppen verbinden zeg maar... de overstaande toppen verbinden, die lijnen. Daar is ie symmetrisch in. En er was, ehm, wat zei ik nog meer? [Lange stilte].

(6) Mark: Je zei iets van een vergelijking.

(7) Leerling: Vergelijking, dat was iets...

(8) Mark: Kan je 'm opschrijven?

(9) Leerling: Die van net, dat was dan $4x^2 + y^2 = 100$ [noteert dit ook]. Dat was die ene. En eh, dat is gewoon een algemene vergelijking van een ellips.

(10) Mark: Ja, wat was de algemene vergelijking, weet je dat nog? De standaardvorm noemde het boek het denk ik.

(11) Leerling: Eh, ja dat was iets met x en dan een afwijking en y een afwijking met het middelpunt ten opzichte van de oorsprong... is iets [noteert $(x + a)^2 + (y + b)^2 =$].

(12) Mark: Oke, dit is de vergelijking voor een ellips?

(13) Leerling: Ik dacht het wel ja.

(14) Mark: Komt dat overeen met die andere dan? Die erboven staat?

(15) Leerling: Ja, dat is hier, daar moet die 4 voor [wijst naar de term $(x + a)^2$].

(16) Mark: Ja, maar dan heb je 'm dus nog niet volledig zo.

(17) Leerling: Ah, dan moet ie nog een... dan moet je kwadraat splitsen. Nee, dan eh...

(18) Mark: Als we de verschuiving even weglaten, dan is die standaardvorm deze [noteert $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$].

(19) Leerling: Oh ja.

(20) Mark: Kan je daar iets over vertellen? Wat die a en die b zijn bijvoorbeeld.

(21) Leerling: Ehm, de toppen.

(22) Mark: Kan je dat iets meer toelichten

(23) Leerling: Dan moet ik even denken wat dat ook alweer was. [Lange stilte]... Is er een top in... ja ik weet niet meer... volgens mij in a en b...

(24) Mark: Hoe bedoel je? Kan je tekenen wat je bedoelt?

(25) Leerling: Dat was dan... zo'n ellips [tekent een ellips met de oorsprong als middelpunt]... en dit zijn de toppen [zet stippen op de juiste plekken]... en er was... even denken dat was $(a, 0)$, $(b, 0)$, nee $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ en $(0, -b)$.

(26) Mark: Weet je ook waarom?

(27) Leerling: Nee, kan ik niet even zo opkomen.

(28) Mark: Weet je er nog meer over?

(29) Leerling: Over die toppen?

(30) Mark: Mag ook over de ellips.

(31) Leerling: Ja, brandpunten hier [zet stippen op de juiste plekken]... en $b^2 - a^2$ was c^2 ofzo. Zo kun je de toppen berekenen.
(32) Mark: Hoe bereken je zo de toppen?
(33) Leerling: Of de brandpunten, sorry.
(34) Mark: Oke. En waarom zou je dat doen?
(35) Leerling: Om erachter te komen waar de brandpunten liggen, haha.
(36) Mark: En wat heb je daaraan, wat doen die?
(37) Leerling: Ehh... dat weet ik niet meer.
(38) Mark: Oke. Is er nog iets anders over de ellips, of heb je zo alles gezegd?
(39) Leerling: Ja.

A.3.2 Opgave 2

(40) Mark: De volgende, mag je omslaan. Simpel sommetje... of simpel weet ik niet, maar zeg gewoon hoe je 'm zou doen, en misschien kan je 'm ook gewoon doen. En da... eh... wat er in je opkomt bij zoiets.
(41) Leerling: Ja ik zou 'm in eerste instantie gewoon invullen.
(42) Mark: Oke, doe maar.
(43) Leerling: Dus dan krijg je 16, 32, plus 9, 18, is een half en een half is 1 [noteert $\frac{16}{32} + \frac{9}{18} = 1$].
(44) Mark: Dus...
(45) Leerling: Dus die zit op de ellips.
(46) Mark: Nou, prima. En dan (b).
(47) Leerling: Eh, ja die ligt er ook op omdat het kwadraat van -4 gelijk is aan het kwadraat van 4.
(48) Mark: Oke. Zou dat nog anders kunnen?
(49) Leerling: Hoe bedoel je anders?
(50) Mark: Is dat de enige manier om het aan te pakken?
(51) Leerling: Tja, hij is symmetrisch in de x-as en de y-as, dus dat is sowieso al, dat min... als je met minnetjes en plusjes zit te klooien dat ie er sowieso al op voorkomt.
(52) Mark: Oke, prima. Nou helemaal goed.

A.3.3 Opgave 3

(53) Leerling: [Lange stilte]... dus P die gaat gewoon over de ellips heen?
(54) Mark: Ja.
(55) Leerling: [Lange stilte]... brandpunt ofzo... ik weet niet.
(56) Mark: Wat zou je kunnen doen, wat weet je alvast?
(57) Leerling: Eh... nou ja, de... waar die... het middelpunt van de ellips is...
(58) Mark: Oke, want wat is dat?
(59) Leerling: Dat is $(5, 3)$ [schetst een ellips met het middelpunt in het eerste kwadrant].
(60) Mark: Oke.
(61) Leerling: En dan zou -5...3... dan zou die aan de... zou ie ergens hier zitten... dan zou dat punt hier liggen [zet een punt in het derde kwadrant]. En dan P beweegt hier en dan zit hier Q... hier zit dan Q ergens... [Lange stilte]... even denken... parabool ofzo?
(62) Mark: Hoe zou je dat kunnen aantonen?
(63) Leerling: Ehm... dat weet ik niet.

(64) Mark: Oke, want je hebt die ellips, en je hebt dat punt, en dan staat er nog iets over die Q waar die precies op ligt.
(65) Leerling: Ja, in het middel van AP.
(66) Mark: Oke, en wat kan je daarmee?
(67) Leerling: Ja, gewoon tekenen, maar ja... Hmmm... Ja dan komt er volgens mij zo'n parabool uit hier.
(68) Mark: Oke, en als je bijvoorbeeld een vergelijking daarvan zou willen weten, hoe zouden we die kunnen opstellen, als extra vraag?
(69) Leerling: Ehm... dat weet ik niet zo.
(70) Mark: Het hoeft niet dat je het precies kan doen, maar welke kant zou je opgaan, hoe zou je het ongeveer aanpakken denk je?
(71) Leerling: Ehm... ja... [lange stilte]... dat weet ik niet zo.
(72) Mark: Oke, dus op basis van die vraag zou je niet...
(73) Leerling: Nee.
(74) Mark: Nog iets anders wat hier bij je opkomt, bij zoiets, of hebben we zo alles gezegd wat je hierbij zou kunnen bedenken.
(75) Leerling: Ja.

A.3.4 Opgave 4

(76) Mark: Dan de laatste.
(77) Leerling: Weer die brandpunten, haha. Dan was het... deze is zo, dacht ik, omdat het...
(78) Mark: Wil je tekenen wat je met "zo" bedoelt? Anders kan ik het achteraf niet meer...
(79) Leerling: Ja. Zo... volgens mij [tekent een staande ellips], want a was dan groter dan b, dus dan zou dat weer... was... de brandpunten... was gewoon $25 - 16$... dus 3... hier... is $(0, 3)$ en $(0, -3)$... zou ik zeggen.
(80) Mark: Oke.
(81) Leerling: En (b)... [lange stilte]... cirkel met straal 10... [lange stilte]...
(82) Mark: Snap je de vraag?
(83) Leerling: Ja ik snap 'm wel.
(84) Mark: Oke.
(85) Leerling: Ongeveer... [lange stilte]...
(86) Mark: Ik denk... om deze vraag te maken moet je weten dat ie eigenlijk andersom had gemoeten [wijst naar de ellips die bij (a) getekend is]... anders is "links van de y-as" een beetje raar, omdat ze er allebei op liggen. Maar hij had andersom moeten zitten. Zou je kunnen beredeneren waarom ie andersom had gemoeten? Of hoe zou je überhaupt... waarom dacht je dat ie zo was?
(87) Leerling: Ja... er was iets in mijn hoofd dat als de ene groter was dan de ander dan moet het zo.
(88) Mark: Kan je ook beredeneren, nou achteraf...
(89) Leerling: Ja, anders... als je 'm zo had, dan was de vergelijking van de toppen is in de trant van $b - a$... $b^2 - a^2 = c^2$, maar als... als a^2 groter is dan b^2 dan krijg je een negatief getal en daar kan je geen wortel uit halen.
(90) Mark: Oke... dus dan?
(91) Leerling: Dan is ie andersom, dan moet dat $a^2 - b^2$.
(92) Mark: Ja, precies, ja. Maar hoe weet je dan hoe om ie moet op basis van die redenatie?

(93) Leerling: Ja, dat weet ik dus niet meer... dat was een beetje een gok van mij dat ie zo moest.
(94) Mark: Oke, prima... dan zet je 'm andersom, en dan (b).
(95) Leerling: Ehm... [lange stilte]... nul vier... dat zou dan hier zitten, en dan zou die cirkel met een straal van 10 zou ie hier zes boven moeten zitten. Middelpunt M... [lange stilte] ik weet niet precies waar die cirkel staat. Want het middelpunt...
(96) Mark: Het idee is dus... die ellips die zit dus zo [tekent 'm nu goed om]... en dan staat er: "het middelpunt is het linker brandpunt" zeg maar... op die manier wordt het bedoeld.
(97) Leerling: Oh, zo ja... [lange stilte]... nou dat weet ik niet... weet ik niet hoe je dat berekent.
(98) Mark: Hoe zou je dat aan kunnen pakken, ook als je het niet weet, ongeveer...
(99) Leerling: Nou... schetst maken van de cirkel die daar dan zo omheen zit.
(100) Mark: Oke.
(101) Leerling: En... dan zeggen dat ergens dat punt 4 hier ligt... nee dan ligt ie daar... dan zou ie hier moeten liggen volgens mij [wijst op een aantal plekken op de y-as, uiteindelijk op de juiste]. En dan zou ie gewoon 6 zijn...
(102) Mark: Want?
(103) Leerling: Nee niet 6... die cirkel zou dan [tekent een grote cirkel om de ellips heen]... ehm, dan zou je die cirkel zou je moeten... even kijken, die cirkelvergelijking... straal 10... zou je dan moeten invullen voor de y-coördinaat... voor de x-coördinaat 0... nee, nee juist niet... de kortste afstand moet je hebben toch.
(104) Mark: Hmmhmm.
(105) Leerling: Ik weet het niet meer.
(106) Mark: Nee? Maar je zei iets over invullen. Wat zou je waar invullen?
(107) Leerling: Dan zou je... daar was toch zo'n formule voor... kortste afstanden... iets. Nee dat was de afstand van een punt tot een lijn... maar dat was zo'n lineair ding en dat is die cirkel natuurlijk niet... [lange stilte]
(108) Mark: Nee, is dat alles wat je er over weet zo?
(109) Leerling: Ja.
(110) Mark: Oke.

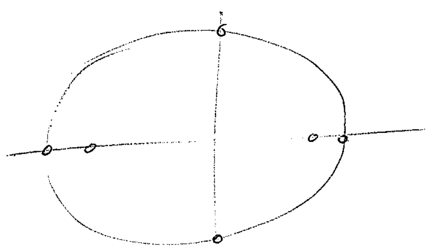
A.3.5 Aantekeningen

Opgave 1. Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk in één minuut.

$$4x^2 + y^2 = 100$$

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 =$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



1

Opgave 2. Gegeven is de ellips e: $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$.

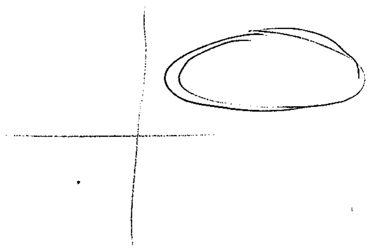
(a) Laat zien dat het punt $P(4, 3)$ op de ellips ligt.

(b) Ligt het punt $P(-4, 3)$ op de ellips? Waarom?

a. $\frac{16}{32} + \frac{9}{18} = 1$

b.

Opgave 3. Het punt P doorloopt de ellips e: $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$. Gegeven is ook het punt $A(-5,-3)$. Welke kromme beschrijft een punt Q als het zich op het midden van het lijnstuk AP bevindt terwijl P over de ellips loopt?



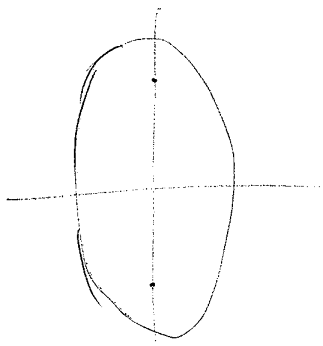
7

Opgave 4. Gegeven een ellips e: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

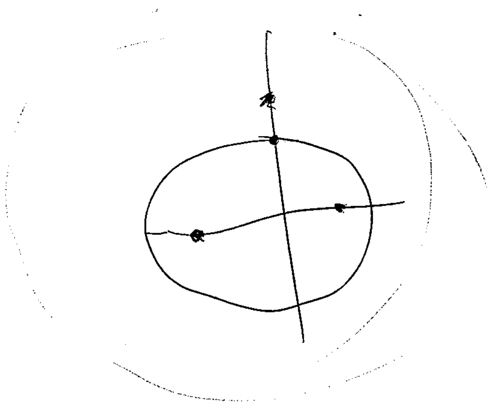
(a) Geef de coördinaten van de brandpunten F_1, F_2.

(b) Gegeven is nu een cirkel c met straal 10 en als middelpunt M het brandpunt van e links van de y-as. Wat is de afstand tussen de cirkel en het punt $P(0, 4)$?

a.



b.



A.4 Leerling 4

A.4.1 Opgave 1

(1)	Leerling:	Waar denk jij aan bij een ellips? Ehhm... tja... ehm... platgetrokken cirkel, of platgeduwde cirkel. Op zich, eh, symmetrisch in de midden, hij heeft vier toppen. Op zich de vergelijking van een cirkel is $ax^2 + by^2 = c$, en soms, als het middenpunt verplaatst is, of, ja, het middenpunt van een ellips is altijd de oorsprong, maar als dat ergens anders ligt dan wordt het x min die x-coordinaat van het middelpunt en y min het... middelpunt, en ehm, hoe lang heb ik nog?
(2)	Mark:	Dat was de minuut inderdaad. Als je nog langer mag nadenken, zijn er nog andere dingen die in je opkomen?
(3)	Leerling:	Van een ellips? Nee, geloof het niet.
(4)	Mark:	Je noemde iets over een formule. Zou je die kunnen opschrijven, de algemene formule voor een ellips?
(5)	Leerling:	Met zo'n verplaatst middelpunt?
(6)	Mark:	Mag.
(7)	Leerling:	[Mompelt wat en noteert $a(x-b)^2 + c(y-d)^2 = e$]. Volgens mij.
(8)	Mark:	Oke. En wat betekent dat allemaal?
(9)	Leerling:	Ehm, (b, d) is het middelpunt. Moet ik dat opschrijven?
(10)	Mark:	Nee hoor, alles wat je zegt is ook goed.
(11)	Leerling:	Eh, a, c en e... je had zoiets van een ellips [tekent een ellips om de oorsprong, zet a bij de positieve x-as en c bij de positieve y-as binnen de ellips, en e op een gestippelde lijn tussen de top bovenaan en de top rechts]. Iets in die trant was het. Maar kan nog iets met kwadraat, was nog iets met de stelling van Pythagoras geloof ik. Zoiets, ik weet niet meer precies hoe dit zat.
(12)	Mark:	Oke. Als ik nou zeg dat dit de normale vergelijking de ellips is [noteert $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$]. Komt dat bekend voor? Kan je daar wat over zeggen?
(13)	Leerling:	Oh, ja, dat is... ja, dan heb ik hier... het middelpunt komt er hierboven nog bij he... Ja dat klopt, alleen als je die gaat verschuiven krijg je wel zoiets.
(14)	Mark:	Ja precies, en wat zijn die a's en die b's hier? Zijn dat dezelfde a's en b's als daar?
(15)	Leerling:	Ehm, nee, wat hier a^2 is is hier c, en wat hier b^2 is is hier a, en e is a^2b^2.
(16)	Mark:	Oke, e is wat?
(17)	Leerling:	a^2 maal b^2.
(18)	Mark:	maal b^2, oke. En kan je nog iets meer hierover vertellen?
(19)	Leerling:	Ehm, ja, daar komt inderdaad wel weer zoiets uit, maar ik weet niet meer precies wat dat was. Nee.
(20)	Mark:	Nog iets anders over de ellips, of hebben we zo alles genoemd wat er in je opkomt?
(21)	Leerling:	Ik denk het wel.
(22)	Mark:	Oke, prima.

A.4.2 Opgave 2

(23) Mark: Sommetje, hoe je het zou aanpakken, en wie weet kan je het gewoon ook doen hier.
(24) Leerling: Opschrijven?
(25) Mark: Ja, dat kan. In ieder geval ook zeggen wat je erbij denkt en hoe je het zou doen, of hoe je het doet.
(26) Leerling: Ehm, laat zien dat het punt $(4,3)$ op de ellips ligt. Ehm, ik zou denk ik voor x 4 invullen en dan kijken wat y is. En als daar 3 uitkomt dan... nou er zullen twee antwoorden uitkomen, maar als een van die dingen 3 is dan ligt $(4,3)$ op de ellips. De tweede, ligt het punt $(-4,3)$ op de ellips, waarom? Ehh, als die op de ellips ligt, ligt deze ook op de ellips, want dat ding is symmetrisch door de oorsprong. Dus dan heb je hier $(4,3)$ ligt daar ergens, en dan ligt hier $(-4,3)$, omdat dit een symmetrie-as is [wijst naar $(4,-3)$].
(27) Mark: Nou, eigenlijk hier [wijst naar $(-4,3)$], maar dat maakt voor nu even niet uit.
(28) Leerling: Jaaa, haha, ja, klopt, zo ja, oke. Beetje jammer, haha.
(29) Mark: Ach, het is maar Wiskunde D he, haha.
(30) Leerling: Haha, ach, dit is ook een symmetrie-as.
(31) Mark: Zijn er nog andere dingen die je hierover zou kunnen zeggen? Over zo'n soort som, hoe je dat zou kunnen doen.
(32) Leerling: Ehm, wat bedoel je precies?
(33) Mark: Nou, heb je alles gezegd wat je hierbij bedacht zou kunnen hebben?
(34) Leerling: Over symmetrie, of...?
(35) Mark: Nou, of gewoon als je zo'n soort som zou krijgen, wat je zou kunnen doen.
(36) Leerling: Nou, ik zou in eerste instantie gewoon kijken of ik je het in kunt vullen, en ja symmetrie-dingen zo die helpen wel.

A.4.3 Opgave 3

(37) Mark: De volgende, we zijn alweer over de helft. Je mag 'm zelf lezen.
(38) Leerling: Mag ik tekenen zo?
(39) Mark: Ja hoor.
(40) Leerling: [Mompelt wat en schetst een ellipsvorm, met middelpunt $(5,3)$. Een punt $A(-5,-3)$, niet op de juiste positie. Een hyperbooltak om A heen.]... [lange stilte]... oh, oke, dan krijg je zo'n, ja, iets in de trant van een hyperbool ofzo.
(41) Mark: Hoe kom je daarop?
(42) Leerling: Eh, ja, omdat je hebt hier een punt, ehh, wacht even, dit is Q, nee A. Dan P hier [tekent een punt P op de ellips], dan ligt het midden dus precies tussen P en dat ding, en deze die loopt zo [tekent een aantal punten van de kromme van Q].... nee het klopt niet helemaal geloof ik. Dan leg ik hier..... hier ergens denk ik. En dan komen die dingen denk ik meer op een cirkel terecht. Ja, ik denk dat het ongeveer een cirkel of nog een ellips zou kunnen worden.
(43) Mark: Hoe zou je dat kunnen achterhalen, wat het is?
(44) Leerling: Precies de vergelijking?

(45) Mark: Ja, bijvoorbeeld. Of in eerste instantie wat voor vorm het is, cirkel of ellips, en dan inderdaad daarna wat de vergelijking is. Hoe zou je daarachter kunnen komen?

(46) Leerling: Tja, ehh, [lange stilte]... ik zou het eerlijk gezegd niet weten.

(47) Mark: Nee? Kijk nog eens een keer goed naar de vraag, en dan nog een keer goed nadenken of je zou weten hoe je dat zou kunnen aanpakken. Je hoeft het niet precies te kunnen, maar hoe je... ongeveer welke kant je op zou gaan.

(48) Leerling: Ik zou misschien deze punten, ja die kan ik zeker berekenen, de toppen van die ellips. En daarna kan ik dus ook die dingen berekenen. Oh, en dan weet je vast ook wel het middelpunt van dat ding. Want als het een cirkel of een ellips is, dan ligt dat precies daar midden tussen. Ehm... Tja... [lange stilte] Nee, heel veel verder kom ik niet.

(49) Mark: Nee, dat is alles wat je hierover te melden hebt?

(50) Leerling: Ja.

(51) Mark: Prima.

A.4.4 Opgave 4

(52) Mark: De laatste.

(53) Leerling: Ja, dat heb ik ook geleerd, haha. Uhm... even kijken. Het middelpunt is gewoon $(0, 0)$, dan ligt F daarzo [tekent een assenstelsel met ellips op de juiste plaats, en zet stippen voor de brandpunten op de correcte locaties]. Ja, dat was wel iets met...je had drie getallen... De ene was deze afstand [wijst op helft van de lange as van de ellips], de ander die [wijst op helft van de korte as van de ellips], en de andere dit volgens mij [tekent een lijn die de top $(0, 4)$ verbindt met het brandpunt $(-3, 0)$]. En dan... ja, was dit nog gelijk aan dat ofzo [wijst onduidelijk naar iets in het plaatje], dat weet ik niet meer precies... maar... welke welke was. Volgens mij moest je sowieso iets van $\sqrt{25}$ en... dat is 5 en 4 dus...

(54) Mark: Oke, wat betekenen die getallen hier?

(55) Leerling: Ja, dat zijn een van die afstanden.

(56) Mark: Oke, kan je ook beredeneren welke welke is?

(57) Leerling: Nou ja, als deze ellips inderdaad zo gevormd is dan zal dit wel 5 zijn en dit 4 [wijst naar de juiste lijnstukken].

(58) Mark: En zou dat inderdaad zo zijn?

(59) Leerling: Tja, het zou kunnen denk ik...

(60) Mark: Hoe zou je daarachter kunnen komen?

(61) Leerling: Hmm, ik kan de top berekenen op zich. Ja, dat is op zich... ik schrijf dit ding even anders op hoor [noteert $16x^2 + 25y^2 = 16 \cdot 25$]. En dan wordt het... [noteert $x^2 = 25$, $x = 5$]. [Mompelt wat]... en dan wordt x 5 of -5. Ja, dan klopt het! Dan is het inderdaad vast ook zo dat deze gelijk is aan die [wijst weer naar de lijn van brandpunt naar top]. Ja, er was wel iets met de stelling van Pythagoras. Dan had je... ja, als die a en b waren... [noteert $c^2 = ...$]

(62) Mark: Hoe kom je dan aan c^2?

(63) Leerling: Ja, dat is ehh... in dit geval $a^2 - b^2$.

(64) Mark: Kijk, je komt toch nog een heel eind uiteindelijk zo, mooi. Oke, dus we hebben nu de brandpu... nou, dus wat zijn nu dan de brandpunten?

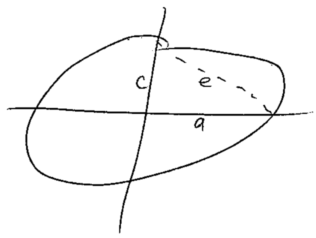
(65) Leerling: Ik zou zeggen $(-3, 0)$ en $(3, 0)$.
(66) Mark: Oke, prima. Dan gaan we door naar (b).
(67) Leerling: Ja, gegeven is nu een cirkel c met straal 10, middelpunt het brandpunt e links van de y-as... leuk te formuleren, haha... wat is de afstand tussen de cirkel en het punt $P(0, 4)$. Even kijken. Mag ik hierin verder tekenen?
(68) Mark: Ja hoor, doe wat je wilt.
(69) Leerling: Als dit 5 is... nou, dat wordt een hele grote cirkel [tekent de cirkel, maar dusdanig dat de ellips er ook voor een gedeelte buiten valt].... [lange stilte]... ja, dat was de afstand tot de cirkel moest toch zoiets zijn. De raaklijn en dan loodrecht daar, of zoiets [tekent een raaklijn aan de cirkel en een loodlijn hierop door het punt P]. En als die straal 10 is, en dit was al 5, dan is dit ook 5.
(70) Mark: Oke, nog andere dingen die bij je opkomen bij die vraag?
(71) Leerling: Ehh, nou ik zou misschien de vergelijking van die cirkel kunnen geven.
(72) Mark: En waarom, en wat zou je er dan mee doen?
(73) Leerling: Ja, dan kan je vast iets over afstand mee berekenen.
(74) Mark: Ja oke, maar zo kan het ook. Nou oke, prima, dank je wel.

A.4.5 Aantekeningen

Opgave 1. Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk in één minuut.

$$a(x-b)^2 + c(y-d)^2 = e$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



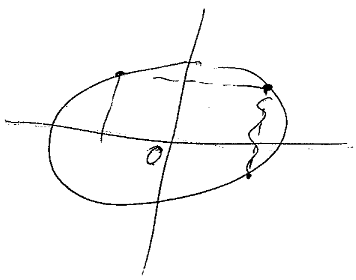
1

7

Opgave 2. Gegeven is de ellips e: $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$.

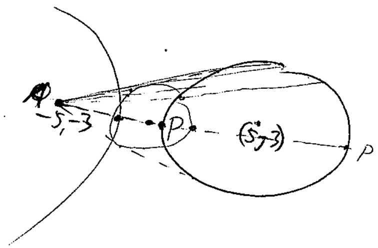
(a) Laat zien dat het punt $P(4, 3)$ op de ellips ligt.

(b) Ligt het punt $P(-4, 3)$ op de ellips? Waarom?



7

Opgave 3. Het punt P doorloopt de ellips e: $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$. Gegeven is ook het punt $A(-5,-3)$. Welke kromme beschrijft een punt Q als het zich op het midden van het lijnstuk AP bevindt terwijl P over de ellips loopt?

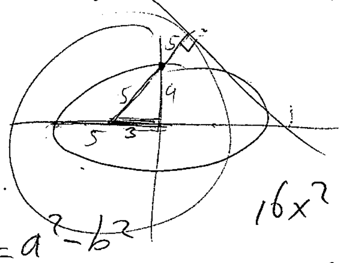


7

Opgave 4. Gegeven een ellips e: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

(a) Geef de coördinaten van de brandpunten F_1, F_2.

(b) Gegeven is nu een cirkel c met straal 10 en als middelpunt M het brandpunt van e links van de y-as. Wat is de afstand tussen de cirkel en het punt $P(0, 4)$?



$\sqrt{25} = 5$

4

$16x^2 + \cancel{25y^2} = 16 \cdot 25$

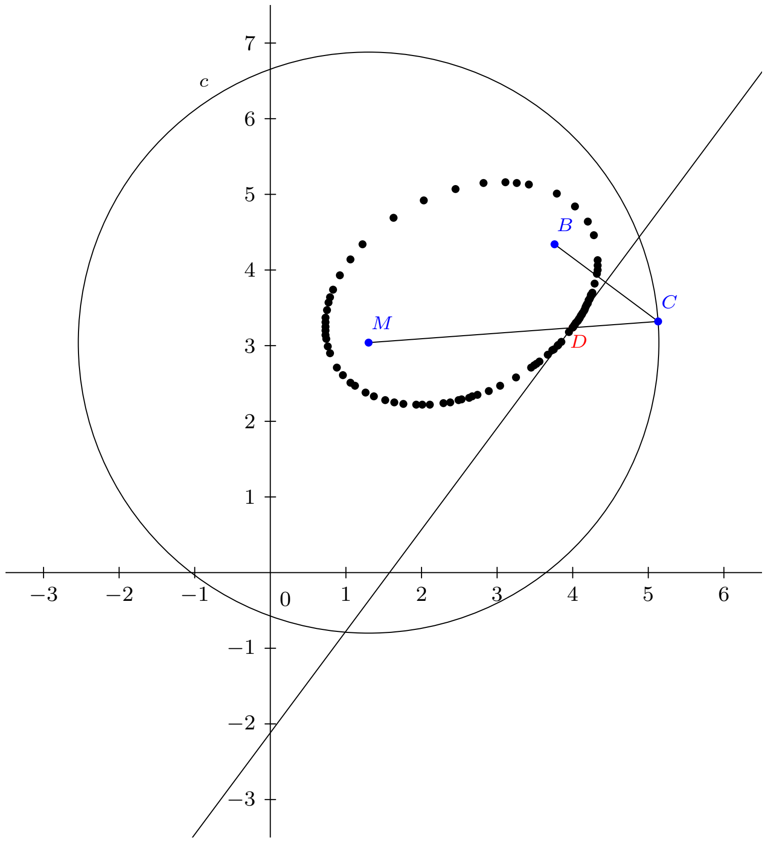
$x^2 = 25$

$x = 5$

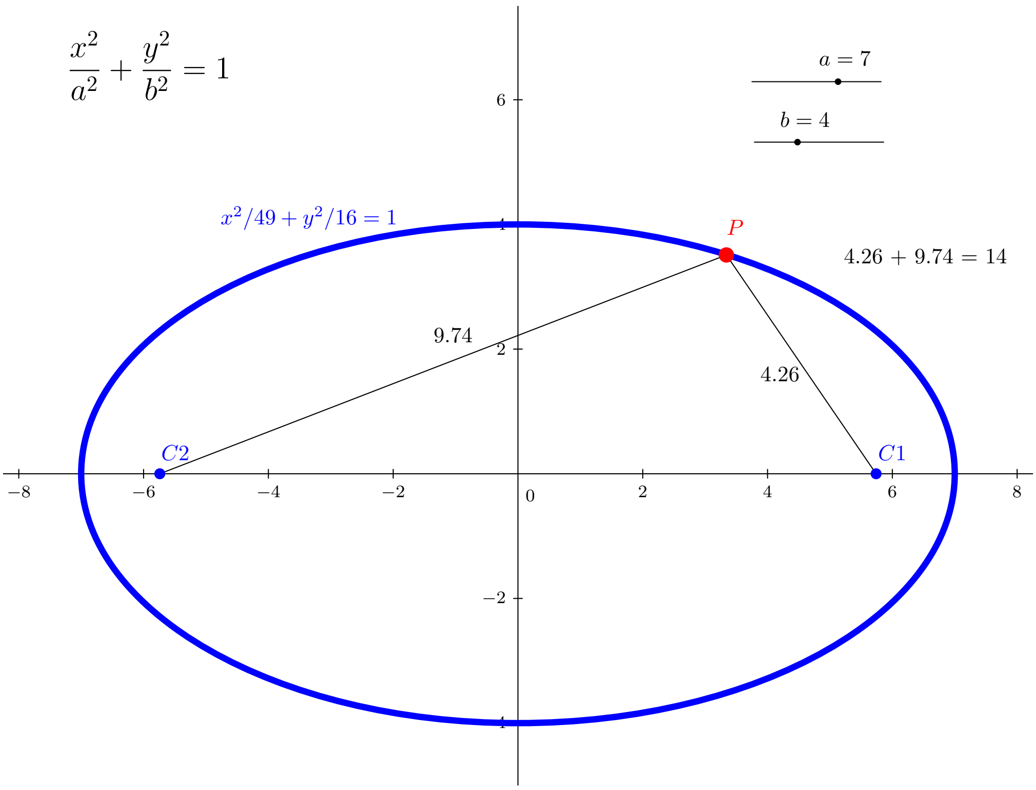
$c^2 = a^2 - b^2$

Bijlage **B**

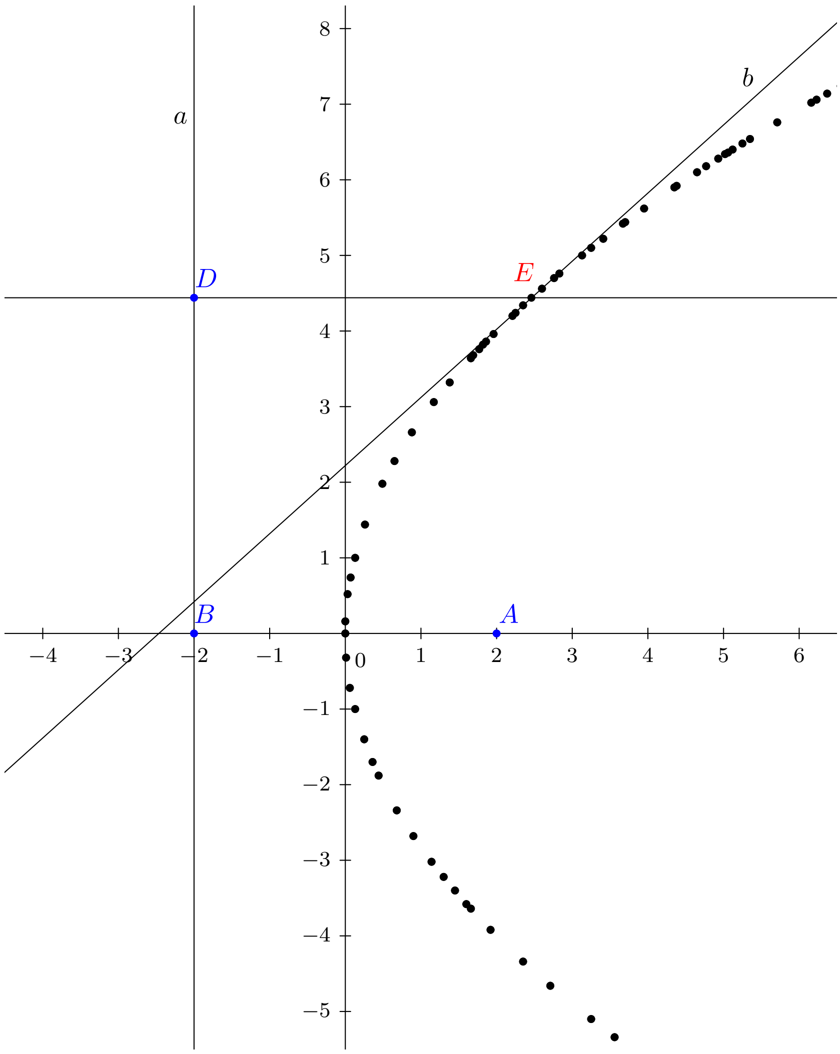
Visualisaties



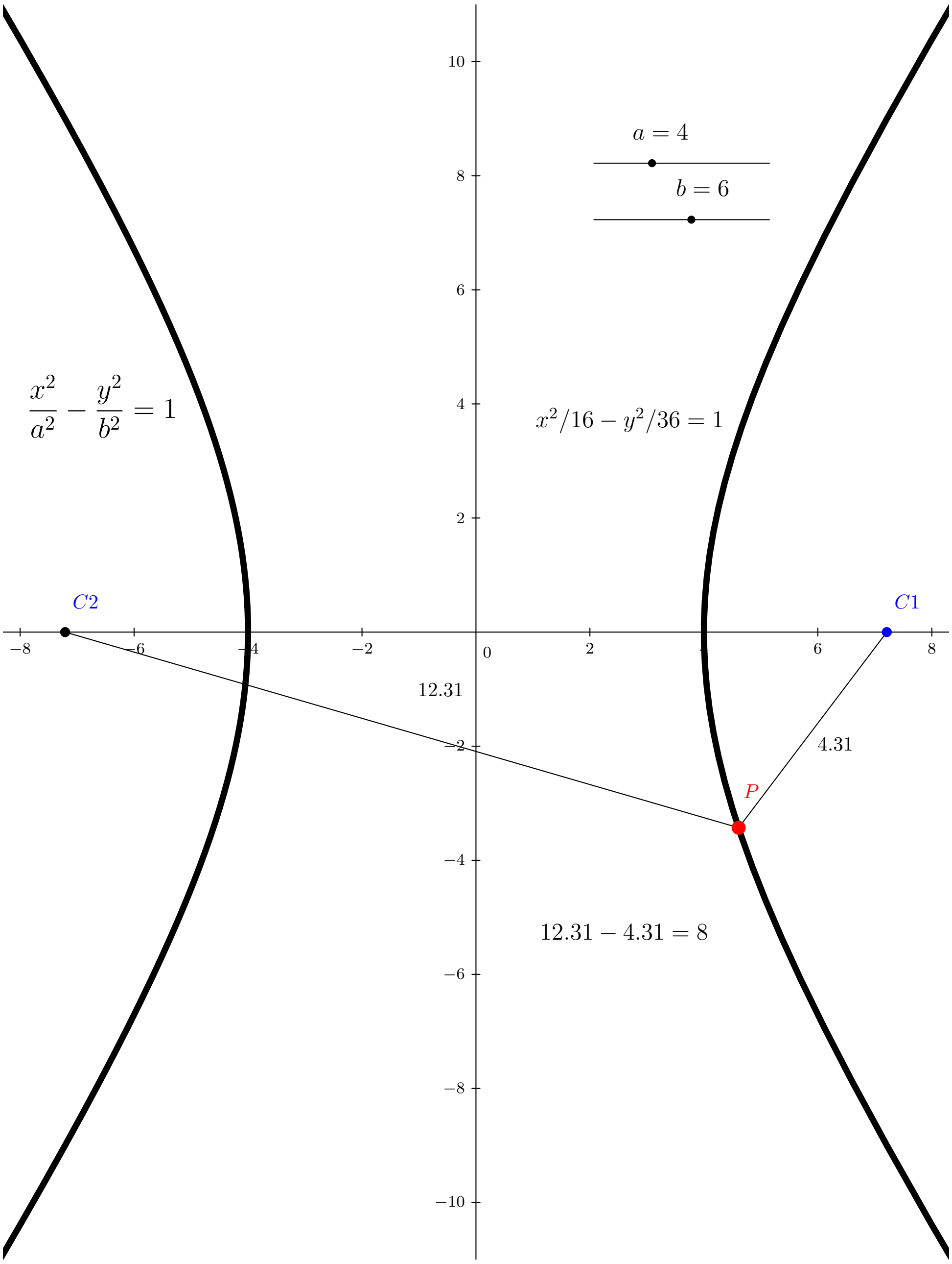
Figuur B.1: Constructie van een ellips.



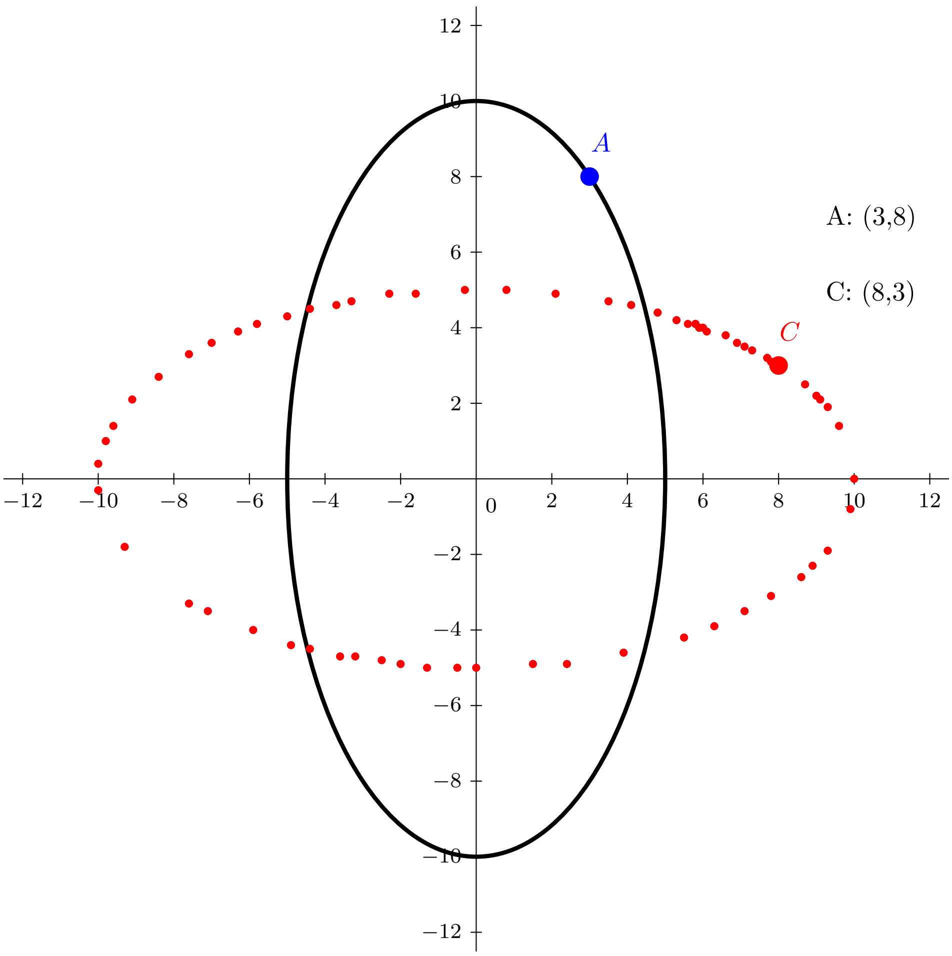
Figuur B.2: Eigenschappen van een ellips.



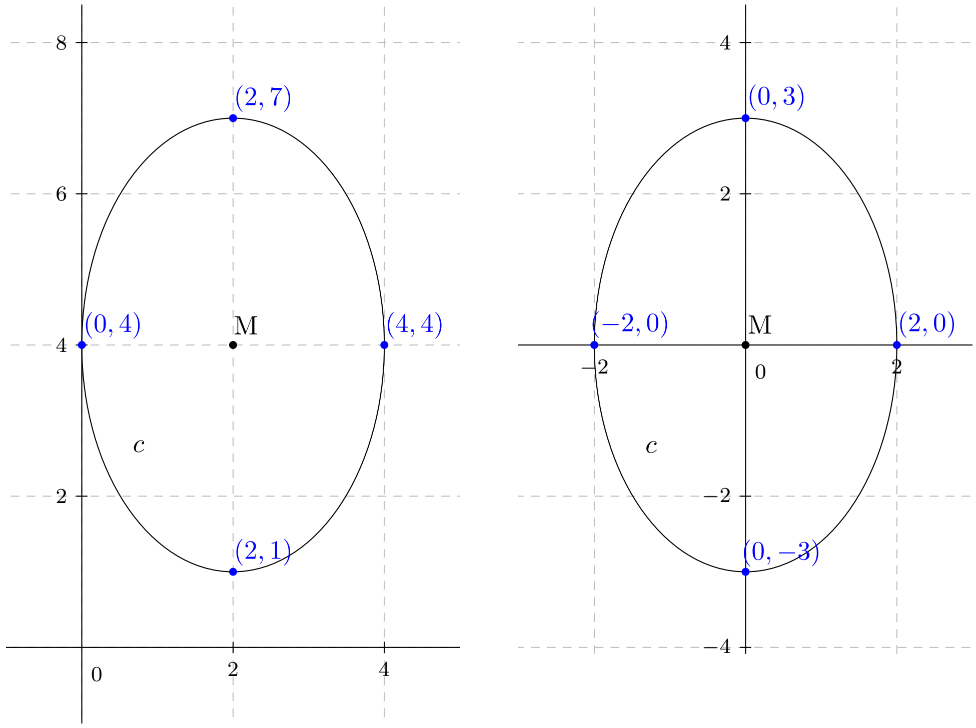
Figuur B.3: Constructie van een parabool.



Figuur B.4: Eigenschappen van een hyperbool.

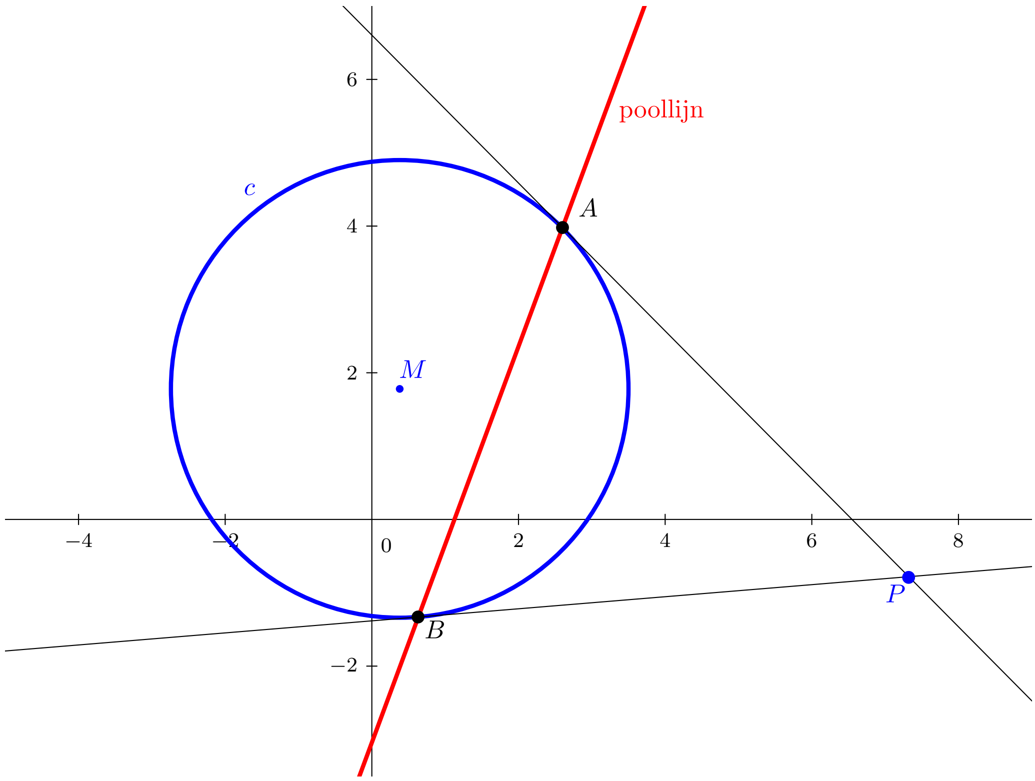


Figuur B.5: Symmetrie van een ellips.

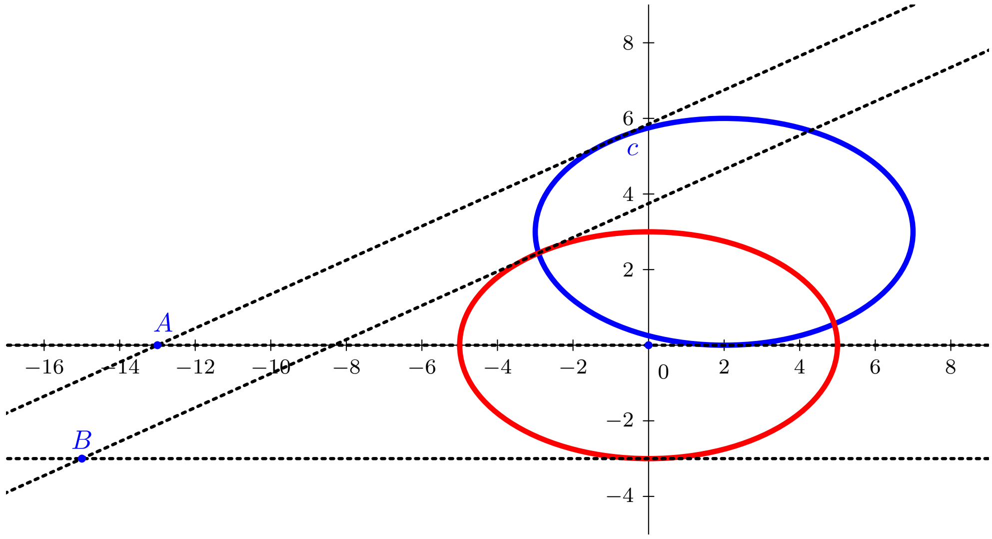


(a) Voor de verschuiving (b) Na de verschuiving

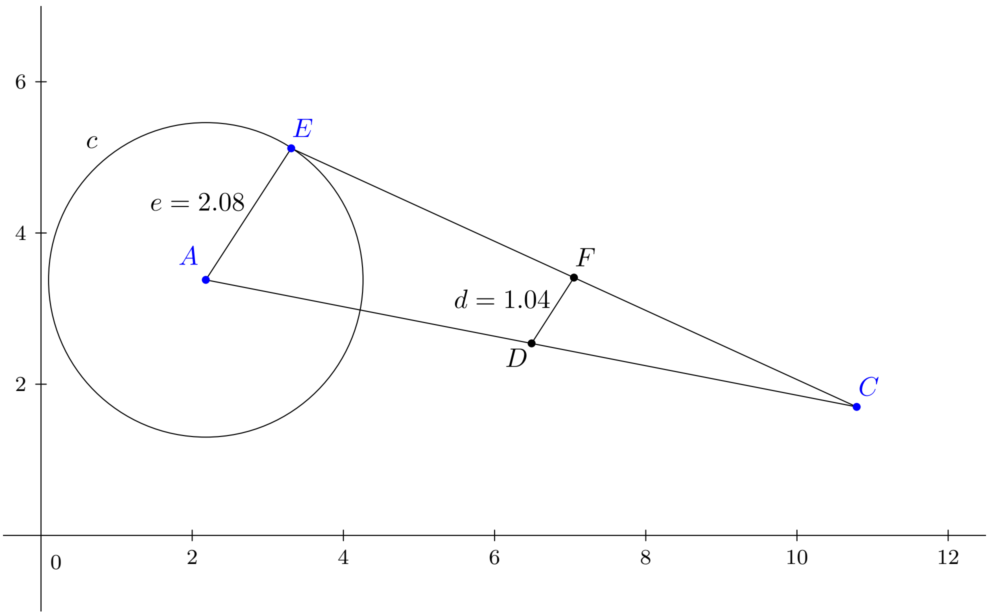
Figuur B.6: Een getransleerde ellips.



Figuur B.7: Een cirkel met een poollijn.



Figuur B.8: Een getransleerde ellips met raaklijnen.



Figuur B.9: Een verkleining van een cirkel.

Bijlage

C

Transcripties van de posttest

C.1 Leerling 1

C.1.1 Opgave 1

(1) Mark: De eerste vraag is hetzelfde als de vorige keer.
(2) Leerling: Nou, waar denk je bij een ellips aan. Dat is zo'n platgedrukte cirkel. Je hebt als formule $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Je hebt brandpunten. Vier brandpunten... nee, wacht, twee brandpunten en vier toppen. En je hebt ook nog een c, en als a groter is dan b dan is c $a^2 - b^2$ en als a kleiner is dan b dan heb je $b^2 - a^2$. Oh maar wacht, dat is c^2. Ehm, tja... er is heel veel met de ellips.
(3) Mark: Nu is de minuut om. Als je er rustig over nadenkt, zijn er nog andere dingen die bij je opkomen? Je mag ook een pen gebruiken als je wilt.
(4) Leerling: Ehm... even kijken hoor... [tekent een assenstelsel met een ellips erin en twee brandpunten]... er was ook iets met die punten zo [wijst naar de brandpunten]... of waren dat de brandpunten? Ja dat waren de brandpunten. En dan heb je hier de toppen.
(5) Mark: Waar de toppen?
(6) Leerling: Zeg maar hierzo [wijst correct naar de vier toppen]. Even denken of ik nog iets met lijnen weet.
(7) Mark: Ja, gewoon alles wat er in je opkomt.
(8) Leerling: Ja. Ehm... Nee dat was het wel zo'n beetje.
(9) Mark: Oke.

C.1.2 Opgave 2

(10) Leerling: Welke waarden kan x_P hebben? Even kijken hoor. Dus je hebt een punt op deze ellips... Dan heb je wel twee variabelen, toch? Ja, je hebt k en x_P.
(11) Mark: Hmm hmm. Snap je wat er met de vraag bedoeld wordt? Die familie?
(12) Leerling: Ehm... dan heb je toch gewoon de formule van een ellips?
(13) Mark: Ja, wat we bedoelen is: er zijn heel veel ellipsen, zeg maar, die allemaal hieraan voldoen. Dus: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$, en plus $\frac{y^2}{2}$, al die dingen bij elkaar. En hier staat dus: dit punt ligt op al die dingen... op al die ellipsen. Voor welke waarden van x_P kan dat zo zijn?
(14) Leerling: Ja... oke. Even kijken hoor. Moet ik nou slim gaan nadenken, haha?
(15) Mark: Dat mag, haha. Gewoon hoe je het zou aanpakken, wat je zelf denkt.
(16) Leerling: Oke... ligt op elk van deze ellipsen. Dan heb je... ja als eerste zou ik eigenlijk dat daarin gaan substitueren, want volgens mij kom ik dan niet verder.
(17) Mark: Ja, probeer maar als je wilt.

(18) Leerling: Dus dan krijg je... [mompelt wat en noteert $\frac{x_P^2}{16} = 1$, $x^2 = 16$, en vervolgens $x_P = 4 \vee x_P = -4$.]. Dan zou ik zo uitkomen.
(19) Mark: Oke, prima.
(20) Leerling: Ja.
(21) Mark: Nog iets anders wat er in je opkomt bij die vraag, of is het dat?
(22) Leerling: Ehm, ja... maar... ja.
(23) Mark: Oke, prima, dan gaan we naar (b).
(24) Leerling: Precies één waarde van k geldt dat het punt op de ellips ligt... Dan wil ik eerst die daarin gaan zetten want dan weet je k.
(25) Mark: Oke.
(26) Leerling: Dus dan... [mompelt wat en noteert $\frac{9}{16} + \frac{25}{k} = 1$]... Hmm, even kijken hoor... $\frac{16}{9}$, dat kan ik allebei delen door 3... nee... hè...
(27) Mark: Nare breuken...
(28) Leerling: Dan krijg je $1 - \frac{9}{16}$ en dan houd je dus over... $\frac{7}{16}$... en dan, oke, wacht... dit is te doen. Oke, 16 keer 25... ohh... [schrijft de vermenigvuldiging van 16 en 25 uit en komt op 380 uit]... volgens mij doe ik het heel omslachtig of niet...
(29) Mark: Klein beetje... 16 keer 25 is ook geen 380 maar dat maakt niet uit.
(30) Leerling: Niet? Oh wat is het dan? [Mompelt wat]...
(31) Mark: 20 keer 16 is 320 en nog 5 keer is 80 erbij is 400, toch? Het is een veelvoud van 25 he, dus dat is altijd iets dat op 00, 25, 50 of 75 eindigt, maar goed daar gaat het nu niet om.
(32) Leerling: Ja... Nee, nou weer iets geleerd. 400 gedeeld door 7... nou, 40 gedeeld door 7 is... wordt 5 komma... een rest van... waar zit ik op? Nee, 35... 42...35... $\frac{5}{7}$... dus... nee, hier kom ik ook niet uit, oh wat erg. Maar goed dan heb je dus k.
(33) Mark: Ja, oke, ervan uitgaand dat je k hebt.
(34) Leerling: En als je dan k hebt dan kun je die toch invullen en dan heb je alleen nog maar y_R als variabele en dan kan je...
(35) Mark: Oke, dus zo zou je het aanpakken?
(36) Leerling: Ja.
(37) Mark: Nog iets anders over de vraag, of zijn we er dan?
(38) Leerling: Voor een waarde van k geldt dat... Ja, nee, dat was het.
(39) Mark: Oke, prima.

C.1.3 Opgave 3

(40) Mark: Mooi, dan zijn we alweer op de helft.
(41) Leerling: Oke, beschouw de ellips... punt... aan e door A... oke. Nou, van die ellips heb je als middelpunt $(-5, -3)$... en je hebt een punt... dus als je dat zou tekenen dan... [mompelt wat en tekent een ellips met ongeveer het juiste middelpunt, maar te groot]... zoiets. En je hebt punt $(6, 0)$ [tekent dit punt]. Een vergelijking voor een raaklijn aan e door A. Dus dan zou dat zoiets zijn... [tekent een correcte raaklijn]. Ja. Ehm... dat kon je op een hele handige manier doen...
(42) Mark: Ik ga niet helpen.
(43) Leerling: Nee... e door A. Hmm... [lange stilte]... Nee.
(44) Mark: Nee, geen idee?
(45) Leerling: Nee, dan moet ik eerst...

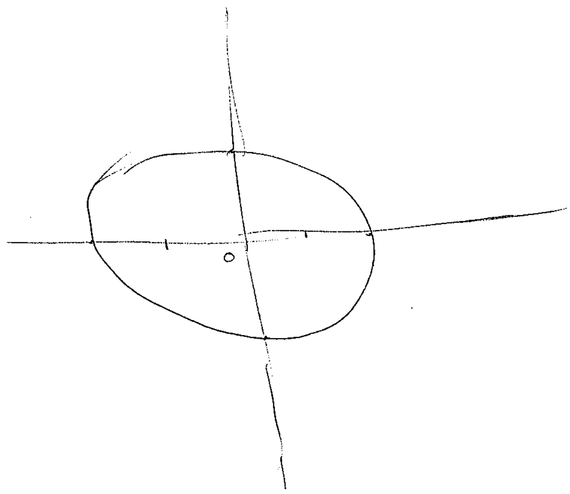
C.1.4 Opgave 4

(46) Leerling: e die bestaat uit alle punten... Oke... de cirkel... het punt... op een ellips... Dat ga ik even visualiseren hoor.
(47) Mark: Heel goed.
(48) Leerling: [tekent een assenstelsel]... dan heb je op $(5, 2)$... die cirkel liggen, met straal 5... [mompelt wat en tekent een cirkel]... en het punt 8... die zit hier achter ergens [tekent een punt buiten de cirkel]... $(8, 2)$... Oke. En dan heb je een ellips en die heeft alle punten op gelijke afstand tot een cirkel... dat zou dan hier dit punt zijn... [tekent het punt tussen de cirkel en het punt P]... Ja, en dan... zoiets dan [wijst een soort hyperbool-vorm aan]... en dan de vergelijking... [lange stilte].
(49) Mark: Wordt het inderdaad wat je zou verwachten hoe het zou worden?
(50) Leerling: Ehm... en dan krijg je dus dat het telkens zo gaat (wijst een ellipsvorm om punt P aan)... en dan bijvoorbeeld hier zit dat... dan zie ik even niet hoe ie aan die kant zou gaan (wijst naar het gedeelte rechts van P)... Dit is gelijk dan aan elkaar... als je dan hier aan die kant zit... Hmm...
(51) Mark: Nog iets anders wat je zou kunnen doen anders?
(52) Leerling: Ehh... [lange stilte]... Nee.
(53) Mark: Oke, dan ga ik je een ding helpen: P zat hier [tekent een stip binnen de cirkel]... en dan op basis daarvan...
(54) Leerling: Oh ja... wacht. Even denken hoor, gelijk tot de ellips, als in de buitenkant?
(55) Mark: Ja.
(56) Leerling: Dus dan krijg je hier iets... en dan een beetje zo [tekent een aardig correcte ellips].
(57) Mark: Dat lijkt al meer op een ellips he.
(58) Leerling: Ja. En dan heb je als middel... coördinaat... x is ook 2... of eh... y is ook 2... toch... als je dan het midden neemt, omdat het op die lijn ligt. En dan ligt dat... nee dat ligt dan niet op het midden van dat lijnstuk [wijst naar het lijnstuk MP... of wel... of niet... Even kijken hoor, kan ik dat beredeneren? [Mompelt wat.] Mag ik zeggen dat ie daar in het midden ligt?
(59) Mark: Ja ga daar maar vanuit als je dat wilt.
(60) Leerling: Ja, oke... dan heb je die als $(5, 2)$... die als $(8, 2)$... en het midden is daar dus 1,5... of nee... $(6\frac{1}{2}, 2)$... en dan kan je dat weer omzetten naar zo'n vergelijking. [Noteert $(x - 6\frac{1}{2})^2 + (y - 2)^2 = (2\frac{1}{2})^2$... maar die straal... [lange stilte]... want dat is 10... dus dat is 9... en dus het punt vanaf het middelpunt naar daar zou dan $2\frac{1}{2}$ zijn als straal
(61) Mark: Oke.
(62) Leerling: Ehm... Ja, zoiets... maar volgens mij klopt hier helemaal niks van.
(63) Mark: Je komt een aardig eind in de richting al, maar dit is nog niet helemaal goed inderdaad. Oke, maar... kom je er verder niet uit dan?
(64) Leerling: Nee, dat denk ik niet.
(65) Mark: Oke, dan gaan we gewoon (b) doen en er gewoon even vanuit gaan dat we de formule weten. Het maakt niet uit of die correct is of niet.
(66) Leerling: Oke... driehoek MPA... waarvan M het middelpunt van de cirkel is en P het bovenste punt van de twee punten op de ellips met x-coördinaat 5 is. Oke, dan is dit P [noteert een punt op de cirkel].

(67)	Mark:	Van de ellips, he.
(68)	Leerling:	Oh ja, oeps. Dan is dit P. [Tekent het correcte punt.]
(69)	Mark:	Oke.
(70)	Leerling:	Hoe groot is de omtrek van deze driehoek?
(71)	Mark:	Oh, mijn fout, die hadden niet allebei P moeten heten. [Verbetert een typfout in de opgave]. Dit is dan P en dat is A.
(72)	Leerling:	Oke, dus dan heb je deze driehoek. Ah, oke. Hoe groot is de omtrek van de driehoek. Ehm, middelpunt... de straal is 5... [lange stilte]... Oke, je hebt dan A... en dat is lijnstuk 3... en dan moet je weten hoe lang dit is maar dan moet je eerst weten... x-coördinaat is 5... dan zou je zeggen dan vul ik 'm hier in... [vult 5 in voor x in de eerder bepaalde foutieve formule]... Verschrikkelijk, zoveel rekenen...
(73)	Mark:	Oke, laten we dan zeggen dat je die y op deze manier hebt uitgerekend.
(74)	Leerling:	Oke, dan heb je dat lijnstuk en dan zou ik Pythagoras doen. En dan bij elkaar optellen.
(75)	Mark:	Oke, ja, dat is alles wat we over deze vraag kunnen zeggen?
(76)	Leerling:	Ja.
(77)	Mark:	Oke, helemaal goed.

C.1.5 Aantekeningen

Opgave 1. Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk in één minuut.



1

7

Opgave 2. Gegeven is de familie van ellipsen e_k: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{k} = 1$, met $k > 0$.

(a) Het punt $P(x_P, 0)$ ligt op ieder van deze ellipsen. Welke waarden kan x_P hebben?

(b) Voor precies één waarde van k geldt dat het punt $Q(3,5)$ op de ellips e_k ligt. Op deze ellips e_k ligt ook het punt $R(-3, y_R)$. Welke waarden kan y_R hebben?

$\frac{6}{2} = 3$

$$\frac{x_p^2}{16} = 1$$

$$x^2 = 16$$

$$x_p = 4 \quad \vee \quad x_p = -4$$

b

$$\frac{9}{16} + \frac{25}{k} = 1$$

$$\frac{25}{k} = \frac{7}{16}$$

$$7k = \cancel{380}\ 400$$

$$k =$$

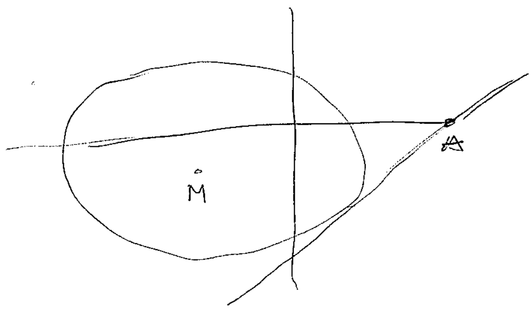
25
16
158
250
~~380~~
400
7

$5,\frac{5}{7}$

7

Opgave 3. Beschouw de ellips e: $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ en het punt $A(6,0)$. Geef een vergelijking voor een raaklijn aan e door A.

$M = (-5, -3)$



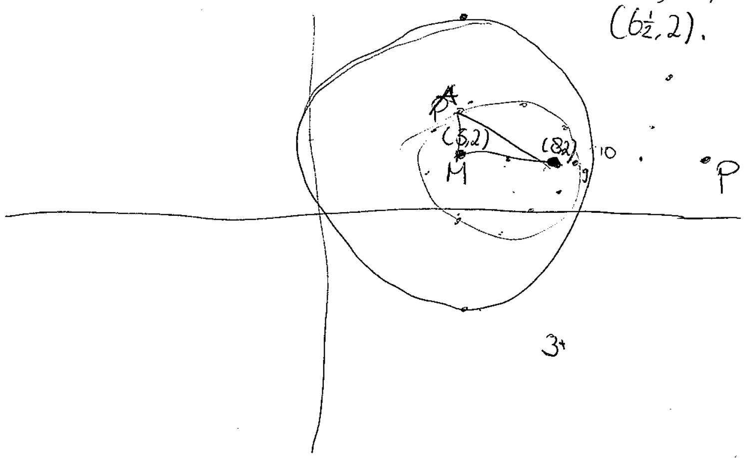
7

Opgave 4. Gegeven is de ellips e die bestaat uit alle punten op gelijke afstand tot een cirkel c: $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 25$ en een punt $P(8,2)$.

(a) Geef de vergelijking van de ellips.

(b) Beschouw de driehoek $\triangle MPA$, waarbij M het middelpunt van de cirkel en A het bovenste punt van de twee punten op de ellips met x-coördinaat 5 is. Hoe groot is de omtrek van deze driehoek?

$(X,2)$
$(6\frac{1}{2},2).$



$(X-6\frac{1}{2})^2 + (y-2)^2 = (2\frac{1}{2})^2$

$(-1\frac{1}{2})^2 + (y-2)^2 = (2\frac{1}{2})^2$

C.2 Leerling 2

C.2.1 Opgave 1

(1) Leerling: Oke, een ellips heeft vier toppen, twee brandpunten. De afstand van het brandpunt naar een punt op de ellips en naar het andere brandpunt is altijd constant. De brandpunten van een ellips bestaan uit de middelpunt van een cirkel en een ander punt binnen de cirkel, en alle punten met een gelijke afstand tot het punt dat niet het middelpunt is en de cirkel die vormen de ellips. Een ellips kan ook verschoven worden... de vergelijking van een ellips is... even kijken... $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Een ellips kan ook raaklijnen hebben en een poollijn.
(2) Mark: Oke. Je bent nu over de minuut, maar ga gewoon lekker door.
(3) Leerling: Ja, ik ehm... nee ik kan niet zo even de vergelijking van de poollijn meer krijgen.
(4) Mark: Oke. Nog andere dingen?
(5) Leerling: Ehm... als beide brandpunten op hetzelfde punt liggen dan is het een cirkel.
(6) Mark: Oke.
(7) Leerling: Ehm... ja, ik denk dat dat het wel is.

C.2.2 Opgave 2

(8) Leerling: Mag ik een pen?
(9) Mark: Ja, natuurlijk.
(10) Leerling: Oke. Een punt met $y = 0$ dat ligt op de x-as, dus zit in al die ellipsen... We weten dat de toppen... even kijken dat is a^2 is 16, dat betekent dat de ene top a, dat die 4 is, dus dan hebben we -4 en 4 [tekent punten bij deze toppen in een assenstelsel]. Een ander punt op die as... oh wacht eens even, dus hij gaat altijd door deze [wijst naar de toppen], wat voor ellips het ook is, of ie zo is of zo [tekent een liggende en een staande ellips met de correcte toppen op de x-as]... maar dit punt ligt op de y-as, dus dat zal altijd 4 of -4 zijn [noteert dit antwoord achter de vraag].
(11) Mark: Oke, mooi. En (b)?
(12) Leerling: Precies één waarde van k geldt... op deze ellips ligt ook het punt... Oke... ja. Punt $(3, 5)$, dat zou dan ongeveer iets van... 3... 5... hier liggen [tekent het juiste punt]. Op deze ellips ligt ook het punt R -3... hier ergens [tekent ook dit punt]. Oh ja... y_R... omdat dit... de parabool die heeft twee... dit is eigenlijk gespiegeld en deze liggen op dezelfde... ja deze afstand... ja nee... deze afstanden zijn beide 3 [tekent lijnstukken van de punten naar de y-as]. Dus... en er is al gezegd dat deze op $(3, 5)$ ligt en dan ligt deze dus op $(3, -5)$ en die hieronder die ligt dan op... oh nee, $(-3, 5)$ bedoel ik, en deze ligt hier op $(-3, -5)$. Dus dan zou ik zeggen dat y_R 5 en -5 kan hebben.
(13) Mark: Oke, mooi.

C.2.3 Opgave 3

(14) Mark: De volgende. Ja, sla maar om.

(15) Leerling: Oke, we zien hier een ellips met als middelpunt $(-5,-3)$... ja, dat ligt dus... $(-5,-3)$... hier ergens [tekent dit punt boven de x-as]. De toppen zijn 4 en 3, dus nou nee de toppen zijn... de x ligt 4 van het middelpunt... de y ligt 3 van het middelpunt... en deze was precies 3 hoog dus die komt hier [tekent de assen van de ellips om het foutieve middelpunt]... ho ho ho eens, sorry, die ligt hier [verbetert de locatie van het middelpunt]. Maar deze die is, omdat die 3 is, komt ie precies daar, zo... -5, deze was 4, dus die komt hier [tekent de correcte ellips]... Dan heb je de toppen $(-5,0)$, $(-5,-6)$... eh, wat is eigenlijk de opdracht? Geef de vergelijking voor de raaklijn aan e door A... op het punt $(6,0)$ [tekent dit punt]. Nou, dan... maar er zijn eigenlijk toch twee raaklijnen?

(16) Mark: Ja, maar er staat gewoon ‘voor een’, dus één is genoeg.

(17) Leerling: Oh maar dat is eigenlijk heel makkelijk, dat zou dan deze zijn [tekent de lijn $y=0$]. De lijn $y=0$. Dus de raaklijn is $y=0$.

(18) Mark: Je bent de eerste die zo slim is en dat ziet, dus zo makkelijk is het blijkbaar niet, maar heel goed.

C.2.4 Opgave 4

(19) Leerling: Gegeven is... alle punten op gelijke afstand tot een cirkel en een punt. Oke, de cirkel heeft als middelpunt $(5,2)$... met een straal van 5, dus... met het middelpunt $(5,2)$ en straal 5 [tekent de cirkel]. Punt $P(8,2)$... oke, nou 2 dat betekent dus dat ie op dezelfde hoogte ligt. En P... 8... dan ligt ie nog iets hierheen... eens kijken als hier de oorsprong is, dan ligt ie dus hier... P. Geef de vergelijking... oh ja. Dan ligt het midden dus van die twee punten ligt... ehm... op $(6\frac{1}{2},2)$. Even kijken, hoe komen we nu bij... de afstand van de cirkel tot die is altijd gelijk, dus dan is dat hierzo... [tekent de ellips]. Dus dan ligt die precies op de helft hiervan... juist, dus de toppen liggen tussen... op $(9,2)$ ligt de ene top en deze ligt dan op... hierzo ergens, die ligt op $(4,2)$. Dat zijn de ene toppen hebben we dan, maar dan de andere... die zouden dan hier ergens op moeten liggen. Oh, maar dan kunnen we aan de... de vergelijking van het... $(x-6\frac{1}{2})^2$ gedeeld door... ehm... a^2... a is vanuit het middelpunt gezien precies $2\frac{1}{2}$, dus dan krijgen we $2\frac{1}{2}$ in het kwadraat... plus $(y-2)^2$... en die weten we dan nog niet. We weten dat dit 1 is [noteert ondertussen de juiste vergelijking, met de noemer van de tweede breuk nog open]. Ehm... zou je kunnen invullen denk ik, maar er is misschien ook nog een andere, handigere manier. Ehm... [lange stilte]... oh ik weet natuurlijk de constante van deze omdat de afstand van dit punt naar dit punt... 9... is die afstand is 4 en 1 dus moet de afstand altijd 5 zijn, en als ie dus recht hier staat [wijst naar de bovenste top] moet die twee samen moeten 5 zijn, en dan zijn ze gelijk, dus dan zijn die $2\frac{1}{2}$ en $2\frac{1}{2}$. En dan hebben we... deze is dan 90° en die zijn 45. En als die $2\frac{1}{2}$ is dan is dat... even kijken, twee keer iets in het kwadraat is dan $2\frac{1}{2}$... dat kan volgens mij ook zo [tekent een hulplijn]... $1\frac{1}{4}$... Dan heb je $1\frac{1}{4}$ en $1\frac{1}{4}$... ja, $(1\frac{1}{4})^2+(1\frac{1}{4})^2$... ehmm.

(20) Mark: Dat kan ik ook niet zo goed uit mijn hoofd. Als je het rekenen gewoon niet uitkomt zeg maar gewoon wat je zou doen.

(21) Leerling: Ja, dus dan zou ik dus twee keer $(1\frac{1}{4})^2$ dat zou dit zijn, die hoogte, en als je dan die hoogte hebt dan weet je dus ook wat de afstand naar die top is en dan zou dit twee keer $(1\frac{1}{4})^2$ in het kwadraat zijn. Dan zou dit de vergelijking van de ellips zijn [noteert een onjuiste noemer].

(22) Mark: Oke, prima. Dan (b) en dan zijn we er.

(23) Leerling: M middelpunt van de cirkel... dus A is het bovenste punt van de twee punten... het bovenste punt van de twee punten op de ellips met x-coördinaat 5.

(24) Mark: Ja.

(25) Leerling: Even kijken, die x-coördinaat is 5, dus dan ligt ie... het middelpunt is al $(5, 2)$, dus dan ligt ie precies op de top, denk ik.

(26) Mark: Oke.

(27) Leerling: De omtrek van deze driehoek, van middelpunt naar die...

(28) Mark: $(5, 2)$ hoorde bij die he [wijst het middelpunt aan waar het door de leerling genoteerde coördinaat $(5, 2)$ bij hoorde].

(29) Leerling: Oh ja, dit was $6\frac{1}{2}$, $(5, 2)$ hoorde bij die, dus dan ligt ie hier ergens, daarboven. En dan zou je moeten berekenen de omtrek van... wat is P dan?

(30) Mark: [wijst naar de vraag, waar $P(8, 2)$ staat].

(31) Leerling: Oh, maar dit is gewoon als je... omdat die constant is... die ligt op de ellips, dus dat betekent dat sowieso die twee samen, die zijn al 5, en de afstand tussen die twee punten is 3, dus dan zou dat 8 zijn.

(32) Mark: Oke, netjes.

C.2.5 Aantekeningen

Opgave 1. Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk in één minuut.

1

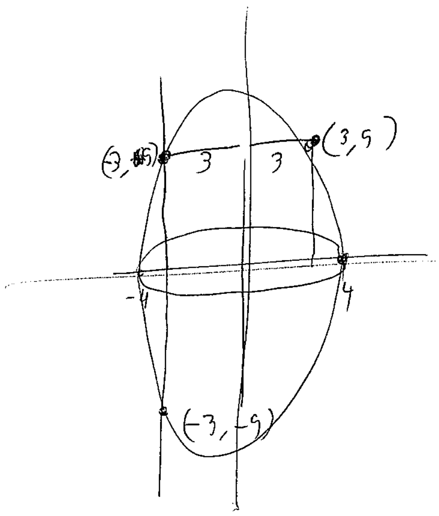
7

Opgave 2. Gegeven is de familie van ellipsen e_k: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{k} = 1$, met $k > 0$.

(a) Het punt $P(x_P, 0)$ ligt op ieder van deze ellipsen. Welke waarden kan x_P hebben? 4 of −4

(b) Voor precies één waarde van k geldt dat het punt $Q(3, 5)$ op de ellips e_k ligt. Op deze ellips e_k ligt ook het punt $R(-3, y_R)$. Welke waarden kan y_R hebben?

9 en −9

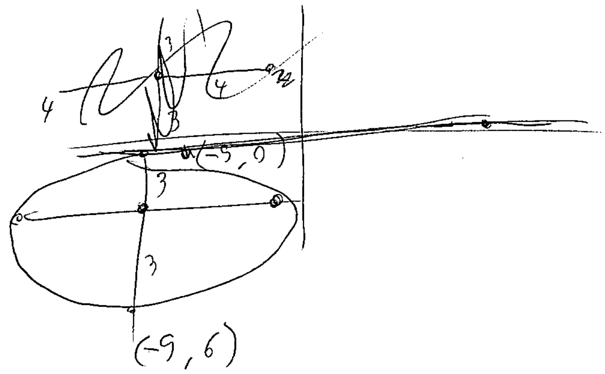


7

Opgave 3. Beschouw de ellips e: $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ en het punt $A(6,0)$. Geef een vergelijking voor een raaklijn aan e door A.

$y = 0$

$(-5, -3)$



Opgave 4. Gegeven is de ellips e die bestaat uit alle punten op gelijke afstand tot een cirkel c: $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 25$ en een punt $P(8, 2)$.

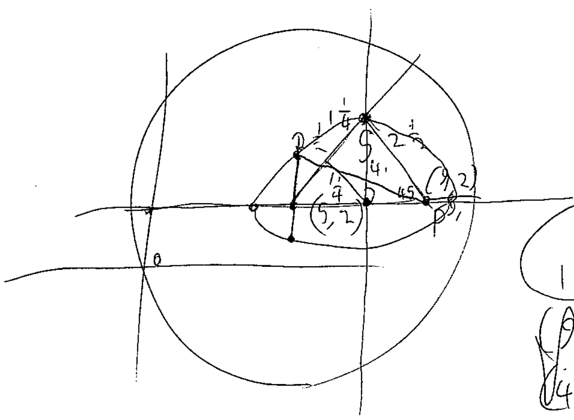
(a) Geef de vergelijking van de ellips.

(b) Beschouw de driehoek $\triangle MPA$, waarbij M het middelpunt van de cirkel en A het bovenste punt van de twee punten op de ellips met x-coördinaat 5 is. Hoe groot is de omtrek van deze driehoek?

8

$(5, 2)$

$2 \approx 9$



$2(p^2) = 2\frac{1}{2}$

$$1 = \frac{(x-6\frac{1}{2})^2}{(2\frac{1}{2})^2} + \frac{(y-2)^2}{(2(1\frac{1}{2})}$$

$(9, 2)$

$(4, 2)$

$(6\frac{1}{2}, 2)$

$2(1\frac{1}{4}^2)$

C.3 Leerling 3

C.3.1 Opgave 1

(1) Mark: Dus, eerst weer hetzelfde als de vorige keer de eerste vraag.

(2) Leerling: Oke, ellips. Een ellips dan heb je twee brandpunten, met de afstand van de twee brandpunten naar... bij elkaar naar een punt op de ellips is constant. De afstand van die twee bij elkaar die twee afstanden. En ehm... de ellips is ook de afstand van een punt... dat ben ik even vergeten, maar goed. Ehm, ja... Hij heeft toppen. En de vergelijking... standaardvergelijking is $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, waarbij a de... a en b de afstanden van het middelpunt naar de toppen voorstellen.

(3) Mark: Oke, dat was een minuut. En als je er nou rustig over nadenkt, kan je nog andere dingen verzinnen? Mag ook pen gebruiken eventueel als het nodig is.

(4) Leerling: Nee, niet echt.

(5) Mark: Ja dat is alles wat je bij de ellips weet?

(6) Leerling: Ja, zoiets.

(7) Mark: Oke.

C.3.2 Opgave 2

(8) Mark: Dan mag je al dan niet met pen of gewoon zeggen wat je erbij denkt en hoe je het zou doen.

(9) Leerling: Ehm, ellipsen... $k > 0$... punt ligt op ieder van deze ellipsen... welke waarden van x_P hebben. Ehm... we hebben de ellips die al dan niet zo of zo is [gebaart een staande en een liggende ellips]... afhankelijk van k. Ehm... punt P ligt op die ellips, dus dat is gewoon een top. En dat is de... hmm... gewoon elke waarde die ie kan hebben?

(10) Mark: Ja, dus voor welke waarden van x_P zou dit waar zijn. Dat ie inderdaad op iedere van die ellipsen ligt.

(11) Leerling: [tekent een liggende ellips]... zo, beetje lelijk, maar goed. Dan ligt P dus hier of hier [wijst op de juiste plekken]... als ie moet voldoen, dus... ehm... dus als ie hier ligt en hier ligt dan voldoet ie, dus... ja volgens mij is het gewoon 4 en -4.

(12) Mark: Waarom?

(13) Leerling: Ja volgens mij was het... dit... ehm... a^2 die zat hier, $(a, 0)$ en $(-a, 0)$, en aangezien a^2 16 is. En die k die bepaalt hoe ie zo rekt [wijst in de lengte].

(14) Mark: Ja, ja. Oke, gaan we naar (b).

(15) Leerling: Voor precies één waarde van k geldt dat het punt $Q(3, 5)$ op de ellips ligt. Deze ellips, ehm... $(3, 5)$... op deze ellips e_k ligt ook het punt $(-3, y_R)$. Op die ellips ligt ook -3... Ehm, 5 en -5 als het goed is weer.

(16) Mark: En waarom?

(17) Leerling: Want... die ligt op dezelfde ellips he, die e_k, en op die e_k ligt ook -3... als dit dan $(3, 5)$ zou zijn dan zou -3 aan de andere kant liggen en die y-coördinaat blijft dan hetzelfde, en met die -3 kan natuurlijk ook gewoon weer spiegelen hierheen. Dan zouden dus deze twee punten voldoen aan R [tekent de juiste punten].

(18) Mark: Oke, mooi.

C.3.3 Opgave 3

(19) Mark: Nummer 3.
(20) Leerling: Oke, leuke ellips... en het punt... geef een vergelijking van een raaklijn aan e door A. Oke. Middelpunt is $(-5,-3)$. Zo [tekent een ellips met dit middelpunt maar een foutieve hoogte]. $(6,0)$... [tekent het punt A]... lange stilte... Dat klopt niet want A ligt hier [wijst naar A].
(21) Mark: Waarom klopt dat niet?
(22) Leerling: Mijn getekende ellips gaat niet door die lijn heen waar A op ligt.
(23) Mark: Moet dat?
(24) Leerling: Oh nee... ehm, nee dat hoeft niet per sé. Ja, nee. Vergelijking van e door A. Dan zou die zo, zoiets zijn... of zo [tekent correcte raaklijnen aan e door A]... lange stilte... Ik zou niet weten hoe ik dit moet oplossen.
(25) Mark: Nee, geen idee?
(26) Leerling: Nee.
(27) Mark: Oke, dan gaan we naar de laatste.

C.3.4 Opgave 4

(28) Leerling: Ellips e, alle punten op gelijke afstand tot de cirkel en punt... ja. Geef de vergelijking van de ellips... Straal is 5, en dat punt is $(8,2)$... [tekent correct een assenstelsel met de cirkel]. Zoiets. En dan ligt ie hier [tekent het punt]. Dus dan... brandpunten... wacht even... gelijke afstand tot een cirkel. Gelijke afstand tot een cirkel en een punt... ehh... [lange stilte]... oke, gelijk tot cirkel en... krijgen we een mooi ding hier [tekent een correcte ellips]... ellipsachtig. En... [lange stilte]... nee... deze a... is 9... de x-coördinaat van a is 9... of -9 natuurlijk... en die zit hier tussenin [wijst naar de 'oosttop' van de ellips]... gelijke afstand tot P en de cirkel. Middelpunt van de ellips... [lange stilte].
(29) Mark: Geen idee hoe je die vergelijking kan opstellen?
(30) Leerling: Nee.
(31) Mark: Nou, laten we er dan voor (b) vanuit gaan dat we 'm wel zouden hebben.
(32) Leerling: Hmm, beschouw driehoek MPA, M het middelpunt van de cirkel, A het bovenste punt van de twee punten op de ellips met x-coördinaat 5. Oh zo. Nee, wacht even. Het bovenste punt van de twee. Dan zit ie hier en hier, en dan die [noteert A bij de bovenste top van de ellips]. Hoe groot is de omtrek van deze driehoek... [tekent de correcte driehoek]. Voor $x = 5$. En dan gingen we er vanuit dat we 'm hadden.
(33) Mark: Ja, je mag in principe... doen we alsof we een vergelijking hebben van de ellips, als je die nodig hebt.
(34) Leerling: Ehm... afstand van M naar P is natuurlijk, even kijken, 3. Dat is 3. En... de afstand van P naar A, A 5, een leuk punt... 6 [noteert $A(5,6)$].
(35) Mark: Waarom die 6, hoe bedoel je?
(36) Leerling: Gewoon... vergelijking van de ellips en dan random punt uitkiezen en die ligt dan op de ellips.
(37) Mark: Oke.

(38) Leerling: Die x-coördinaat is dan 5. Dan is de afstand van P naar A... ja die kun je berekenen... [mompelt wat en maakt de bijbehorende afstandsberekening]. Even kijken, die afstand is 3 en die afstand is 4. Ja. Dat zou dan 5 zijn... en van M naar A natuurlijk hetzelfde [begint vergelijkbare berekening]

(39) Mark: Ja, dat hoeft niet hoor. Oke, dus zo zou je dat doen?

(40) Leerling: Ja.

(41) Mark: Nog iets anders wat we zouden kunnen doen, of is dit wat je bij de vraag zou kunnen bedenken?

(42) Leerling: Ja, je zou volgens mij nog wel met de ellips kunnen doen... gegeven het feit dat... nee wacht even... ehm... nee, niet zo waar ik nu op kom.

(43) Mark: Ja, want wat wou je net zeggen?

(44) Leerling: Ja, als ik er vanuit ging dat M een brandpunt was, maar...

(45) Mark: Is dat zo of niet?

(46) Leerling: Ja dat weet ik dus niet meer.

(47) Mark: Oke. Want, wat zou je dan doen?

(48) Leerling: Ja dan was die afstand constant, altijd, de afstand van M naar A en de afstand van M naar P. En dan...

(49) Mark: Maar, constant... dan moet je dus nog wel weten wat die constante is.

(50) Leerling: Ja, precies. Dan reken je gewoon uit naar een van de toppen. Een van de toppen daar bereken je de afstand van.

(51) Mark: Oke.

(52) Leerling: Dat zou ik dan doen, of dan... je pakt de toppen waar die twee brandpunten mooi op liggen. Dan pak je die afstanden en dan heb je het in één keer, dan hoef je niet van die ingewikkelde wortels te gaan doen.

(53) Mark: Precies, oke, nou helemaal goed.

C.3.5 Aantekeningen

Opgave 1. Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk in één minuut.

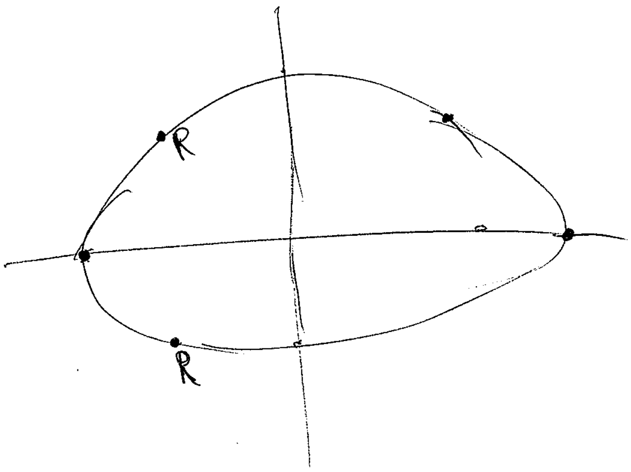
1

7

Opgave 2. Gegeven is de familie van ellipsen e_k: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{k} = 1$, met $k > 0$.

(a) Het punt $P(x_P, 0)$ ligt op ieder van deze ellipsen. Welke waarden kan x_P hebben?

(b) Voor precies één waarde van k geldt dat het punt $Q(3,5)$ op de ellips e_k ligt. Op deze ellips e_k ligt ook het punt $R(-3, y_R)$. Welke waarden kan y_R hebben?

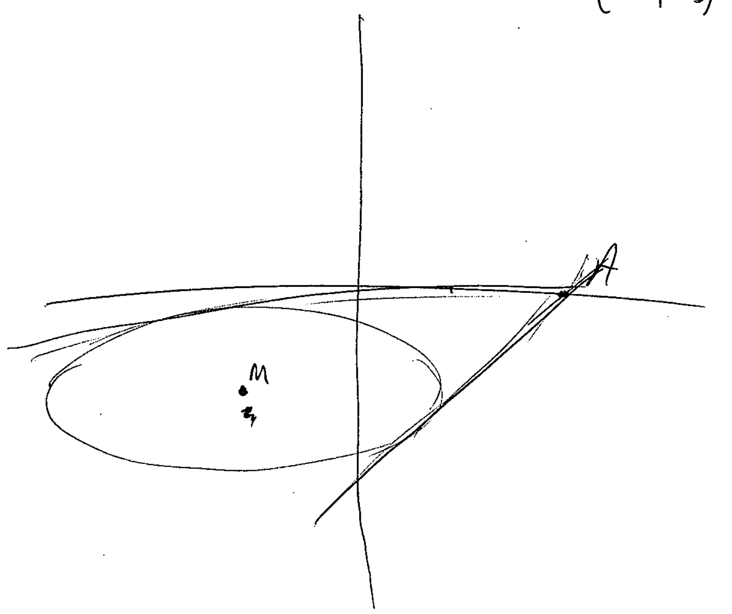


2

7

Opgave 3. Beschouw de ellips e: $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ en het punt $A(6,0)$. Geef een vergelijking voor een raaklijn aan e door A.

$M(-5,-3)$



7

Opgave 4. Gegeven is de ellips e die bestaat uit alle punten op gelijke afstand tot een cirkel c: $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 25$ en een punt $P(8,2)$.

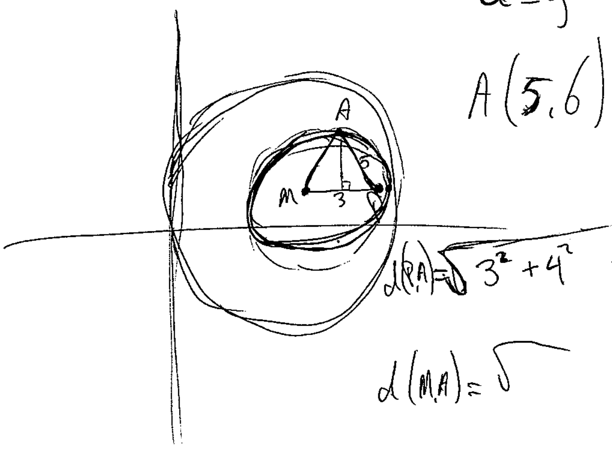
(a) Geef de vergelijking van de ellips.

(b) Beschouw de driehoek $\triangle MPA$, waarbij M het middelpunt van de cirkel en A het bovenste punt van de twee punten op de ellips met x-coördinaat 5 is. Hoe groot is de omtrek van deze driehoek?

$M_c(5,2)$ $r_c = 5$ $P(8,2)$

$X_a = 9$

$A(5,6)$



$d(P,A) = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25}$
$= 5$

$d(M,A) = \sqrt{\ }$

C.4 Leerling 4

C.4.1 Opgave 1

(1) Mark: De eerste vraag is hetzelfde als de vorige keer.

(2) Leerling: Oh, nee, haha. Ehm... tja ik denk nog steeds aan een platgedrukte cirkel. Een vergelijking van x min het x-coördinaat van het middelpunt gedeeld door een getal, plus y min de y-coördinaat van... nee wacht even, er was geen... jawel, wel de y-coördinaat van het middelpunt gedeeld door getal is 1. En dan waren die getallen waardoor je deelde waren de... [tekent een ellips]... deze [wijst naar de toppen].

(3) Mark: Oke. Wat is wat?

(4) Leerling: [lange stilte]

(5) Mark: Dat was de minuut, maar ga lekker door.

(6) Leerling: Als $x = 0$, dan heb je $\frac{y}{b} = 1$, dus $y = b$, dus als $x = 0$... dit is b en dit is a [wijst de juiste plekken aan].

(7) Mark: Oke, nog meer dingen die je weet over de ellips?

(8) Leerling: Ja, als je een punt hier hebt [wijst een punt op de ellips aan], je hebt hier twee brandpunten, dan is dit plus dat is overal gelijk [tekent lijnstukken tussen het punt op de ellips en de brandpunten]. Tja...

(9) Mark: Nog meer?

(10) Leerling: Hij is ontstaan uit een cirkel en een punt binnen die cirkel, en daarvan dan alle punten die tot de cirkel en dat punt binnen de cirkel gelijk zijn.

(11) Mark: Oke.

(12) Leerling: Ik denk dat dat het zo'n beetje was.

C.4.2 Opgave 2

(13) Mark: Dan mag je omslaan.

(14) Leerling: [noteert $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{k} = 1$]... k is groter dan 0... punt P... ligt op... [noteert $\frac{x_P^2}{16} + \frac{0}{k} = 1$]. Oh ja, dat klopt wel. Dit valt weg, dus dan heb je $\frac{x_P^2}{16} + \frac{0}{k} = 1$, dus $x_P^2 = 16$ dus $x_P = 4$ of $x_P = -4$.

(15) Mark: Oke. Nog iets bij die vraag of is dit hoe je...

(16) Leerling: Nee, volgens mij is dit het.

(17) Mark: Oke. helemaal goed. Dan gaan we naar (b).

(18) Leerling: b... Voor precies één waarde van k geldt dat het punt Q op de ellips ligt. Op deze ellips ligt ook het punt R. Welke waarden kan y_R hebben? Nou, dan heb je $\frac{3^2}{16} + \frac{5^2}{k} = 1$... [mompelt wat en berekent zo $k = \frac{25 \cdot 16}{7}$]. Dan kun je punt R invullen volgens mij... [maakt een begin aan deze berekening]... moet ik het helemaal uitwerken?

(19) Mark: Nou, je zou nu gewoon de vergelijking oplossen dus?

(20) Leerling: Ja.

(21) Mark: Oke. Zou het nog op een andere manier kunnen, of is dit hoe je het zou doen?

(22) Leerling: Ja, dit is hoe ik het zou doen. Het kan vast wel op een andere manier.

(23) Mark: Ja, hoe dan?

(24) Leerling: Ja wacht even, het zijn 3 en -3 he. Dus dan heb je een ellips, dan ligt hier $(3, 5)$ en daar $(-3, 5)$. [noteert $y_R = 5$]... denk ik.

(25) Mark: Ja, dat is het?
(26) Leerling: Ja, want je hebt hier die symmetrieassen, dus ja.
(27) Mark: Ja, dus hij kan alleen 5 zijn. Oke, helemaal goed, dan slaan we om.
(28) Leerling: Of... nee, -3, dus dan heb je deze... y_R is -5, haha [noteert $y_R = 5 \vee y_R = -5$].
(29) Mark: Ahh.
(30) Leerling: Goed.

C.4.3 Opgave 3

(31) Mark: Oke, de volgende.
(32) Leerling: Oke, ellips... punt $A(6, 0)$. Geef de vergelijking van een raaklijn aan e door A. Ja... in elk geval had je daar zo'n formule voor, maar ik ben niet zo goed in die formules onthouden, haha. Eh, $(6, 0)$, die ligt daar. Of nee, hij lag niet op de he, punt A? Volgens mij niet.
(33) Mark: Tja ik ga niks zeggen.
(34) Leerling: Nee, haha. Raaklijn aan e door A. Nee, volgens mij ligt die niet... wacht even, $\frac{11^2}{16} + \frac{3^2}{9}$, nah... wordt vast geen 1, haha. Vast niet. Punt A ligt daarbuiten, goed. Dan... iets als $(6+5)(x+5)+(0+3)(y+3) = 1$... ja, zoiets was het.
(35) Mark: Oke. Kan je nog iets beredeneren?
(36) Leerling: Ja... [lange stilte]... poollijn, kon je ook nog opstellen, en die dan snijden met de ellips. En dan had je die punten en daar kon je dan een raaklijn aan opstellen. Ah, dan is dit de vergelijking van de poollijn. Ja, dan moet je dit snijden met de ellips en dan kan je die punten kan je daar de raaklijn opstellen.
(37) Mark: En hoe zou je dat dan doen? Hoef je niet helemaal uit te werken hoor.
(38) Leerling: Nou, ehm... dit gelijk stellen daaraan [wijst naar de vergelijking van de poollijn en de vergelijking van de ellips], dan komt daar... nee, je kan beter substitueren denk ik want als je het gelijkstelt komt er niet veel uit. Ik denk dat je x ofzo moet substitueren denk ik, dan komt er een y-coördinaat uit, dan kan je de x-coördinaat berekenen die daarbij hoort.
(39) Mark: Oke.
(40) Leerling: Ja, dan kun je op zo'n zelfde manier de raaklijn opstellen.
(41) Mark: Oke, prima.

C.4.4 Opgave 4

(42) Mark: De laatste.
(43) Leerling: Gegeven is de ellips e, die bestaat uit alle punten op gelijke afstand tot de cirkel... en een punt... geef de vergelijking van de ellips. Ehm... [noteert $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 25$]. Middelpunt $(5, 2)$ van de cirkel... dat wordt een van de brandpunten van de ellips in elk geval. Ehm... ja, $P(8, 2)$ werd ook een brandpunt, volgens mij. Dus dan heb je het middelpunt van die ellips is $(6\frac{1}{2}, 2)$, want dat ligt precies tussen die punten in.
(44) Mark: Oke.

(45) Leerling: En, ehm... dan... dit ding heeft straal 5 he [tekent de cirkel met ellips, en noteert de juiste coördinaten erbij]. Anderhalf... dit hierzo is $1\frac{1}{2}+1$ dus dat is $2\frac{1}{2}$ [wijst naar de afstand tussen het midden van de ellips en de rechtertop]. Oh, en dan kun je die ook berekenen... dit is $2\frac{1}{2}$... nee dat klopt niet. [Noteert $\frac{(x-6\frac{1}{2})^2}{} + \frac{(y-2)^2}{} = 1$]. Ja, dit was $2\frac{1}{2}$ dus die heb ik daar al [noteert $2\frac{1}{2}$ als noemer van de eerste breuk]... je had hier wel zoiets met zo'n ding... zo'n driehoek. $c^2 = a^2 - ...$ nee, $+ b^2$... volgens mij. Als dit dan c is... a, b. Volgens mij weet ik die dingen ook wel. [Lange stilte]. Nee ik weet ze niet, haha.

(46) Mark: Nee, gaat 'm niet worden? Nog een andere manier?

(47) Leerling: Ehm... tja... Ja, ik kan zeggen... dit punt is $(y, 2)$... nee, op dit punt weet je $x = 6\frac{1}{2}$, dus dit wordt $0 + ...$ y was... ja dat weet je dus niet, haha.

(48) Mark: Haha, heel goed.

(49) Leerling: Oke dat weet je dus niet nee.

(50) Mark: Nee?

(51) Leerling: Nee.

(52) Mark: Oke, nou laten we er gewoon vanuit gaan dat we wel weten wat daar staat en dan... eventueel als je dat nodig hebt... en dan (b) gewoon doen alsof we het weten, als je het nodig hebt.

(53) Leerling: Oke. Beschouw de driehoek MPA, M het middelpunt van de cirkel, en A het bovenste punt van de twee punten op de ellips met x-coördinaat 5. Dus dat is dat punt.

(54) Mark: Ja.

(55) Leerling: Hoe groot is de omtrek van deze driehoek? Wacht even, MPA, wat is P? Oh, haha. Dat is deze driehoek, wat dan de omtrek is. Nou, deze afstand weet je [wijst op het lijnstuk MP]. Als je deze vergelijking hebt kun je $x = 5$ invullen, en daar komt dan mooi twee y-coördinaten uit waarvan je de bovenste moet nemen. Is een rechthoekige driehoek, dus dan kan je met de stelling van Pythagoras die zijde nog berekenen en dan optellen.

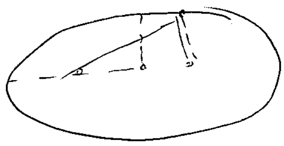
(56) Mark: Oke, dus dat zou je doen?

(57) Leerling: Ja.

(58) Mark: Oke.

C.4.5 Aantekeningen

Opgave 1. Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk in één minuut.



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

1

7

Opgave 2. Gegeven is de familie van ellipsen e_k: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{k} = 1$, met $k > 0$.

(a) Het punt $P(x_P, 0)$ ligt op ieder van deze ellipsen. Welke waarden kan x_P hebben?

(b) Voor precies één waarde van k geldt dat het punt $Q(3, 5)$ op de ellips e_k ligt. Op deze ellips e_k ligt ook het punt $R(-3, y_R)$. Welke waarden kan y_R hebben?

a)

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{k} = 1$$

$$\frac{x_p^2}{16} + \frac{0}{k} = 1$$

$$x_p^2 = 16$$

$$x_p = 4 \quad \vee x_p = -4$$

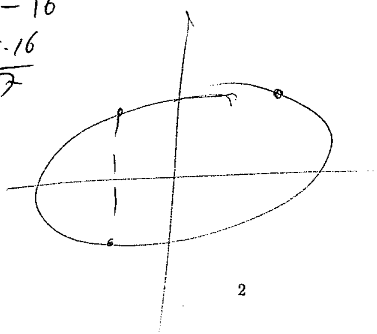
b)

$$\frac{3^2}{16} + \frac{5^2}{k} = 1 \qquad \frac{(-3)^2}{16} + \frac{y_R^2}{\left(\frac{25 \cdot 16}{7}\right)} = 1$$

$$\frac{25}{k} = \frac{7}{16}$$

$$k = \frac{25 \cdot 16}{7}$$

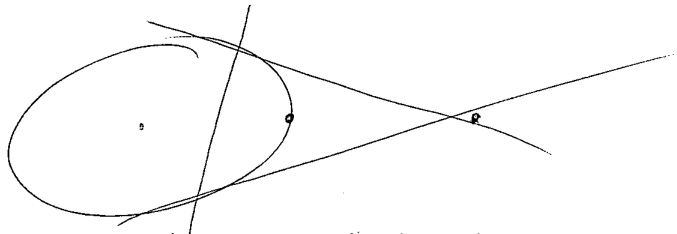
$$y_R = 5 \quad \vee y_R = 5$$



2

7

Opgave 3. Beschouw de ellips e: $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ en het punt $A(6,0)$. Geef een vergelijking voor een raaklijn aan e door A.



$(6+5)(x+5) + (0+3)(y+3) = 1$

7

Opgave 4. Gegeven is de ellips e die bestaat uit alle punten op gelijke afstand tot een cirkel c: $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 25$ en een punt $P(8,2)$.

(a) Geef de vergelijking van de ellips.

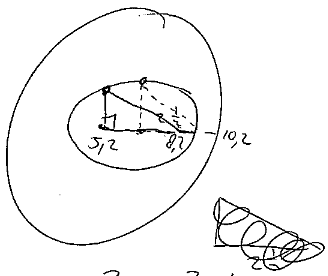
(b) Beschouw de driehoek $\triangle MPA$, waarbij M het middelpunt van de cirkel en ~~P~~ A het bovenste punt van de twee punten op de ellips met x-coördinaat 5 is. Hoe groot is de omtrek van deze driehoek?

$(x-5)^2+(y-2)^2=25$

$M(5,2) \quad P(8,2)$

$M_e\left(6\tfrac{1}{2},2\right)$

$$\frac{(x-6\frac{1}{2})^2}{2\frac{1}{2}} + \frac{(y-2)^2}{} = 1$$



$c^2 = a^2 + b^2$

Bijlage **D**

Samenvatting van de pre- en posttests

In deze bijlage wordt per leerling een samenvatting gegeven van hun antwoorden op de vragen tijdens de pre- en posttest, waarbij de in Sectie 3.4.5 besproken criteria aangehouden zijn om te bepalen welke opmerkingen relevant waren.

D.1 Leerling 1

D.1.1 Pretest

Opgave 1. Tijdens de eerste minuut van de pretest, waarbij zoveel mogelijk over de ellips genoemd moest worden, kwam de leerling met de volgende aspecten:

- "Bij een ellips denk ik ook aan cirkels en aan hyperbolen en parabolen."
- "Het is een rondje en dan vaak zeg maar zo in elkaar gedeukt."
- "Je hebt een x^2 en een y^2 als je het als een formule schrijft."

Na de initiële minuut is als hint de standaardvergelijking van de ellips gegeven, met de vraag om hier iets over te vertellen. De leerling vertelde dat deze formule omgeschreven kan worden tot een andere formule, en ook dat er nog een c^2 is die uit a^2 en b^2 gevonden kan worden. De leerling wist nog te noemen dat het van belang is of $a^2 > b^2$ of omgekeerd, maar dit waren slechts vlagen van herinnering zonder daadwerkelijk begrip van de concepten. Als laatste noemde de leerling nog dat de 1 in de formule de straal is, en dat a en b invloed hebben op het middelpunt.

Opgave 2. Het bepalen of het punt $P(4, 3)$ op de gegeven ellips ligt ging prima, door op de correcte analytische wijze een berekening uit te voeren. Op de vraag of $P(-4, 3)$ er ook op ligt werd geantwoord dat dit inderdaad zo is, aangezien $(-4)^2$ ook 16 is.

Opgave 3. De leerling stelde voor dat je weer een ellips krijgt. Op de vraag hoe je dat zou kunnen aantonen had ze geen antwoord.

Opgave 4. De leerling wist op de juiste wijze de locatie van de brandpunten te bepalen. Ze was er niet zeker van of ze op de x-as of de y-as lagen, maar kwam uiteindelijk twijfelachtig wel op het goede antwoord uit. Echter, toen ze moest aanwijzen waar deze in de figuur lagen wees ze de toppen aan.

De leerling merkte niet op dat het de richtcirkel van de ellips betrof. Wel stelde ze voor om Pythagoras te gebruiken, en dan de lengte van het lijnstuk tussen het middelpunt en het punt af te trekken van de straal.

D.1.2 Posttest

Opgave 1. Tijdens de eerste minuut van de posttest kwam de leerling met de volgende aspecten van de ellips:

- "Het is een platgedrukte cirkel."
- "De formule is $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$."
- "Er zijn twee brandpunten en vier toppen."
- "Er is een c^2, die $a^2 - b^2$ is als a kleiner is dan b en anders is ie $b^2 - a^2$."

Na de initiële minuut kon de leerling geen aanvullende informatie geven.

Opgave 2. Om te bepalen wat de toppen zijn vulde de leerling $y = 0$ in, en kwam ze zo al rekenend uit op de juiste antwoorden. Voor het bepalen van de waarden van y_R berekende ze eerst de waarde van k, en vulde ze vervolgens weer de gegeven x-coördinaat in.

Opgave 3. De leerlingen tekende de ellips niet in het juiste formaat, en had daardoor ook niet door dat hij aan de x-as raakte. Ze had geen idee hoe de som op te lossen was.

Opgave 4. Bij het beantwoorden van deze opgave tekende de leerling foutief het punt buiten de cirkel in plaats van erbinnen, waardoor de conflictlijn een hyperbooltak zou worden. Ze kwam niet verder, en na een hint dat het punt binnen de cirkel lag kon ze wel de bijbehorende ellips schetsen. Vervolgens kwam ze wel (twijfelachtig) tot het juiste middelpunt van de ellips, maar de vergelijking die ze opstelde was onjuist (de parameters a en b ontbraken). Ze had zelf wel door dat dit niet juist was.

Voor het bepalen van de omtrek van de driehoek was de leerling van plan om via de vergelijking het y-coördinaat te bepalen van het punt op de ellips, en vervolgens via afstanden en Pythagoras tot de omtrek te komen.

D.2 Leerling 2

D.2.1 Pretest

Opgave 1. Tijdens de eerste minuut van de posttest kwam de leerling met de volgende aspecten van de ellips:

- "Het is een vervormde cirkel, ovaalachtig."
- "De vergelijking lijkt een beetje op die van een cirkel, maar dan vervormd. Je hebt twee losse helften, en daar staat een plus tussen."
- "Het middelpunt kan verschoven worden."
- "Als je 'm naar een functie toebrengt komt er een wortel in voor."

Na de initiële minuut werd de standaardvergelijking als hint gegeven. De leerling noemde nu dat er toppen zijn, en dat die op $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ en $(0, -b)$ liggen. Ook werd genoemd dat er een c is, die via Pythagoras uitgerekend wordt, en dat dit samenhangt met de brandpunten. Als laatste werd genoemd dat er iets met poollijnen is, zonder hier in detail over te kunnen gaan.

Opgave 2. De leerling paste de correcte berekeningen toe om te laten zien dat het gestelde punt op de ellips ligt. Vervolgens maakte hij gebruik van symmetrie om aan te tonen dat het tweede punt ook op de ellips lag. Hierbij gaf hij wel aan dat hij net in een boek een vergelijkbare opgave had gezien.

Opgave 3. Na een onduidelijke redenatie en de vraag om uit te leggen hoe hij het aanpakte reageerde de leerling met de opmerking dat hij wilde uitzoeken of het punt A op de ellips lag. Door "een beetje te tekenen" kwam hij uit op het idee dat Q een "mini-ellipsje" doorloopt. Op de vraag hoe je dat zou kunnen aantonen kon geen antwoord gegeven worden. Op de vraag om een idee te geven van een oplosstrategie kwam een analytische methode naar voren, waarbij allerlei formules bepaald moesten worden en Pythagoras toegepast werd.

Opgave 4. De leerling begon met het uitrekenen van c door middel van de foutieve vergelijking $c^2 = a^2 + b^2$. Verder werd wel correct verder geredeneerd, ook met de argumentatie dat $a > b$ en dat de brandpunten daarom op de x-as liggen.

Voor het bepalen van de afstand tussen een punt en een cirkel werd niet opgemerkt dat het de richtcirkel van de ellips betrof. Wel werd een juiste berekening gegeven voor de afstand, hoewel de foute brandpunten voor een doorrekenfout zorgden.

D.2.2 Posttest

Opgave 1. Tijdens de eerste minuut van de posttest kwam de leerling met de volgende aspecten van de ellips:

- "Hij heeft vier toppen en twee brandpunten."
- "De afstand van het brandpunt naar een punt op de ellips en naar het andere brandpunt is altijd constant."
- "De brandpunten van een ellips bestaan uit de middelpunt van een cirkel en een ander punt binnen de cirkel, en alle punten met een gelijke afstand tot het punt dat niet het middelpunt is en de cirkel die vormen de ellips."
- "Een ellips kan verschoven worden."
- "De vergelijking van een ellips is $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$."
- "Een ellips kan raaklijnen en een poollijn hebben."

Vervolgens werd na langer nadenken nog genoemd dat de ellips een cirkel is als beide brandpunten op hetzelfde punt liggen.

Opgave 2. De leerling beredeneerde direct dat het gevraagde punt op de x-as ligt, dat het een top is, en dat deze dus op afstand a van de oorsprong ligt. Uit de noemer 16 in de formule kwam hij zo direct op de juiste punten uit, en daarmee op het correcte antwoord.

Ook het tweede gedeelte van de opgave werd direct correct opgelost, door het gebruik van symmetrie.

Opgave 3. De leerling tekende de ellips netjes op de juiste plek, en kwam daardoor al snel tot de conclusie dat er een eenvoudige raaklijn is: $y = 0$. Hier is geen enkel rekenwerk bij komen kijken.

Opgave 4. Eerst tekende de leerling de ellips, vervolgens berekende hij de coördinaten van het midden van de ellips. Op basis van de tekening kwam hij al snel op de waarde van a. Vervolgens werd gepoogd om b te bepalen door middel van Pythagoras, maar daarbij ging iets fout daardoor de leerling uiteindelijk op een onjuist antwoord uit kwam.

Bij het bepalen van de omtrek van de driehoek had de leerling direct door dat de eigenschap van ellipsen gebruikt kon worden dat de opgetelde afstand van een punt tot de twee brandpunten constant is. Zo kwam hij bijna direct tot het correcte antwoord.

D.3 Leerling 3

D.3.1 Pretest

Opgave 1. Tijdens de eerste minuut van de posttest kwam de leerling met de volgende aspecten van de ellips:

- “Hij is symmetrisch in twee lijnen.”
- “De formule is zoveel x^2 plus zoveel y^2 is iets.”
- “Het is een kegelsnede.”
- “Er is iets met brandpunten.”

Na langer na te denken en gevraagd te zijn om nog wat meer toe te lichten legde de leerling uit dat de ellips symmetrisch is in “de twee lijnen die de toppen verbinden”. Als vergelijking noemde hij $4x^2 + y^2 = 100$. Hij kon niet meer op de standaardvergelijking komen, dus is deze door de interviewer als hint gegeven. Op de vraag om hier iets meer over te vertellen zei hij dat a en b de toppen zijn. Op de vraag om meer uitleg kwam hij in een tekening wel met de goede toppen en de bijbehorende coördinaten, uitgedrukt in a en b, aanzetten. Vervolgens noemde hij ook nog dat er brandpunten zijn, en wist deze op de juiste plek in de figuur te tekenen. Hij noemde iets van $b^2 - a^2$, maar wist niet exact hoe dat toegepast moest worden.

Opgave 2. De leerling kon correct bepalen dat het gevraagde punt op de ellips lag, en concludeerde vervolgens dat dit ook voor het tweede punt gold aangezien $(-4)^2$ ook 16 is. Op de vraag hoe we het ook zouden kunnen zien antwoordde hij dat de ellips symmetrisch is in de x-as en de y-as, en dat je daarom “met minnetjes en plusjes mag klooien” en dan nog steeds op de ellips ligt.

Opgave 3. De leerling stelde in eerste instantie voor dat het resultaat een parabool is. Op de vraag hoe je dat zou kunnen aantonen had hij geen antwoord. Ook op de vraag hoe je een vergelijking van het figuur zou kunnen opstellen had hij geen enkel antwoord.

Opgave 4. De leerling had moeite met het bepalen van de coördinaten van de brandpunten. In eerste instantie tekende hij een staande ellips, vervolgens kwam hij met wat hulp wel tot de juiste vorm en noemde dan ook dat je $c^2 = a^2 - b^2$ moest gebruiken.

Bij het laatste gedeelte merkte de leerling niet op dat het om de richtcirkel van de ellips ging. Hoewel het niet lukte om tot een antwoord te komen, stelt hij voor om coördinaten in te gaan vullen en afstandsformules te gaan gebruiken. Hoe dit precies zou moeten kon hij niet vertellen.

D.3.2 Posttest

Opgave 1. Tijdens de eerste minuut van de posttest kwam de leerling met de volgende aspecten van de ellips:

- "Je hebt twee brandpunten."
- "De afstand van de twee brandpunten bij elkaar naar een punt op de ellips is constant."
- "Hij heeft toppen."
- "De standaardvergelijking is $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$."
- "De waarden a en b stellen de afstanden van het middelpunt naar de toppen voor."

Ook met langer nadenken kon de leerling geen aanvullende punten bedenken.

Opgave 2. De leerling merkte op dat de oriëntatie van de ellips afhangt van de waarde van k. Hij wees aan dat het gevraagde punt een van de toppen op de x-as is, legde vervolgens uit dat het -4 of 4 is aangezien $a^2 = 16$ en de toppen op $(a, 0)$ en $(-a, 0)$ liggen.

Vervolgens werd direct door middel van symmetrie het tweede gedeelte van de opgave correct opgelost.

Opgave 3. De leerling tekende een slordige ellips, en zag daardoor niet dat de gevraagde raaklijn eenvoudig te geven was. Hij had geen idee hoe de vraag opgelost zou kunnen worden.

Opgave 4. De leerling was in staat om de situatie te schetsen, maar had geen idee hoe de vergelijking voor de ellips opgesteld kon worden.

Om de omtrek van de cirkel te bepalen stelde de leerling voor om de coördinaten van de hoekpunten te berekenen en zo de omtrek te bepalen. Op de vraag of het nog anders zou kunnen kwam de leerling uiteindelijk toch twijfelachtig met het idee dat als twee van de hoekpunten de brandpunten zijn – maar hier was hij niet zeker van – je misschien de eigenschap zou kunnen gebruiken dat de opgetelde afstanden constant zijn. Om achter de constante te komen zou hij kijken naar de toppen.

D.4 Leerling 4

D.4.1 Pretest

Opgave 1. Tijdens de eerste minuut van de posttest kwam de leerling met de volgende aspecten van de ellips:

- "Het is een platgetrokken cirkel."
- "Hij is symmetrisch in de midden."
- "Er zijn vier toppen."
- "De vergelijking is $ax^2 + by^2 = c$."

- "Soms is het middelpunt verplaatst."

Na de vraag om de formule nogmaals te geven noteerde de leerling $a(x-b)^2+c(y-d)^2 = e$, en zei dat het middelpunt (b, d) is. Vervolgens probeerde ze uit te leggen wat de functie van de overige parameters is. Na een hint dat de standaardvorm van de vergelijking $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ is, legde ze hier wel iets over uit, maar geen concrete relaties tot het meetkundige figuur.

Opgave 2. De leerling vulde de coördinaten netjes in om te controleren of het gegeven punt op de ellips ligt. Daarna zag ze direct in dat het tweede punt vanwege symmetrie ook op de ellips lag.

Opgave 3. De leerling stelde voor dat het gevraagde figuur een hyperbool is. Naar aanleiding van de vraag waarom dat zo is dacht ze opnieuw na, en kwam tot de conclusie dat het toch een cirkel of een ellips was. Op de vraag hoe je dat zou kunnen achterhalen antwoordde ze dat ze dat niet wist.

Opgave 4. Met wat moeite lukte het de leerling om de brandpunten te bepalen. Vervolgens werd niet herkend dat de cirkel waar het om ging de richtcirkel van de ellips was. Het lukte de leerling echter wel om op een andere, ook betrekkelijk eenvoudige wijze, tot het juiste antwoord te komen.

D.4.2 Posttest

Opgave 1. Tijdens de eerste minuut van de posttest kwam de leerling met de volgende aspecten van de ellips:

- "Ik denk nog steeds aan een platgedrukte cirkel."
- "Een vergelijking van x min het x-coördinaat van het middelpunt gedeeld door een getal, plus y min de y-coördinaat van het middelpunt gedeeld door getal is 1"
- "De getallen waardoor je deelt zijn de toppen".

Bij langer nadenken werd nog genoemd dat a en b de toppen aangeven, met als redenatie dat je bijvoorbeeld $x = 0$ invult en dan $\frac{y}{b} = 1$ overhoudt. Vervolgens werd genoemd dat er twee brandpunten zijn, en dat de afstand van een punt tot beide brandpunten opgeteld overal hetzelfde is. Ook werd verteld dat de ellips is ontstaan uit een cirkel en een punt binnen de cirkel, en dan om precies te zijn alle punten die tot de cirkel en het punt 'gelijk zijn'.

Opgave 2. De leerling vulde simpelweg het punt in, maar redeneerde niet vanuit de functie van de a^2 in de formule. Er werd dus slechts analytisch te werk gegaan.

Vervolgens werd de waarde van k bepaald waarvoor het gegeven punt op de ellips ligt, om op basis daarvan te bepalen wat de waarde van y_R is. Nadat de interviewer vroeg of het nog op een andere manier kon kwam de leerling wel met het idee dat het een ellips is, en dat je daardoor eigenlijk direct kan zien dat ook het punt $(-3, 5)$ op de ellips ligt. Na enig nadenken kwam ze erop dat ook $(-3, -5)$ erop ligt.

Opgave 3. De leerling kwam met allerlei ideeën, zoals de formule voor de poollijn. Ze wist niet meer precies hoe dit zat, maar gaf aan die op te willen stellen, dan de snijpunten met de ellips te berekenen en zo tot de raaklijnen te komen.

Opgave 4. De leerling had direct door wat de brandpunten van de ellips waren, en noteerde een opzet voor de juiste vergelijking. Al snel beredeneerde ze de waarde van a, maar het lukte vervolgens niet om b te bepalen.

Om de omtrek van de driehoek te berekenen stelde ze voor om, als het gelukt was om de vergelijking van de ellips te vinden, gewoon de punten in te vullen en zo op de coördinaten van de hoekpunten uit te komen. Daarna zou ze de gevraagde zijden met Pythagoras berekenen en ze optellen.