

Wind en water in de Westerschelde

Behorende bij de Bacheloropdracht HS



Door:

Julia Berkhout

Lena Jezuita

Stephen Willink

Begeleider:

Prof.dr. A.A. Stoorvogel

Datum:

17 juni 2013

Inhoudsopgave

1	Inleiding	2
2	Achtergrondinformatie	3
2.1	Het getij	3
2.2	Gebiedsbeschrijving	4
3	Probleembeschrijving	5
4	Astronomische invloed	7
4.1	Fourieranalyse - Frequenties bepalen	7
4.2	Amplitudes bepalen	8
4.3	Frequenties herzien	9
4.4	Resultaat	10
4.5	Verandering over de jaren	11
5	Wind, eerste model	12
5.1	Vinden van coëfficiënten	12
5.2	Resultaat	13
5.3	Versterkende wind	13
5.4	Luchtdruk	13
5.5	Conclusie	14
6	Wind, nader onderzocht	15
6.1	Wind per uur	15
6.2	Gemiddeldes per dag	17
6.3	Wind van verschillende kanten	18
6.4	Model	18
6.5	Resultaat	21
7	Conclusie	23
8	Discussie	25
9	Literatuur	26
10	Bijlage	27
10.1	Coëfficiënten modellen	27

1 Inleiding

Iedereen weet waar Nederland in 1953 door getroffen is: de watersnoodramp. Hierbij is een groot deel van Nederland onder water komen te staan en vonden ongeveer 1800 mensen de dood.

De oorzaak van deze watersnoodramp is een combinatie geweest tussen springtij en stormvloed. Springtij is het tweewekelijkse getij waarin het verschil tussen hoog- en laagtij het grootst is. Doordat springtij werd verhoogd met stormvloed, stond het water op een gegeven moment zo hoog dat de dijken het begaven onder de druk. Daardoor liep een groot deel van Zeeland, Noord-Holland, Zuid-Holland en Noord-Brabant onder water.

Aan bovenstaande situatie kun je zien dat de waterstand en de wind zeker invloed hebben op elkaar. Om zo'n grote ramp in de toekomst niet meer te laten voorkomen, wil je een voorspelling kunnen maken voor wat voor invloed beide facetten op elkaar hebben.

In dit verslag gaan wij op zoek naar een verband tussen de waterstand en de wind. Hierbij beperken wij ons tot de Westerschelde. Hiervoor willen wij een voorspelling maken hoe hoog het water in de toekomst is onder invloed van de wind. Schippers zouden deze voorspelling kunnen gebruiken om te kijken wanneer het beste tijdstip is om door de Westerschelde te varen.

2 Achtergrondinformatie

2.1 Het getij

Om de invloed van de wind op de waterstanden te kunnen analyseren is het eerst van belang om andere invloeden op de waterstand te begrijpen. Het getij heeft namelijk een grote invloed op de waterstand. Deze invloed moeten we eerst uit onze dataset filteren om een goed beeld te krijgen over hoe de wind van invloed is. Daarom is het belangrijk om te begrijpen hoe het getij ontstaat en welke invloed het heeft op de waterstanden in de Westerschelde.

Iedereen kent het fenomeen van eb (laagwater) en vloed (hoogwater), dat ongeveer twee keer per dag voorkomt. De grootste oorzaak van deze op- en neerwaartse zeebewegingen zijn de planeten om de aarde heen. De aantrekkingskracht van de zon en de maan spelen de grootste rol. Andere planeten die verder weg staan, hebben een veel kleinere invloed, omdat in dit geval de afstand tot de aarde een grotere rol speelt dan de massa van de planeet zelf. Door centrifugale krachten ontstaan nu op aarde twee bergen water, een aan de maan toegekeerde zijde en een aan de maan afgekeerde zijde. De hoge bergen worden vloed genoemd en de lage waterstanden ertussen eb.



Figuur 1: Eb en vloed

Men zou verwachten dat een eb- en vloedcyclus 12 uur duurt. Echter blijkt in de praktijk dat deze cyclus net iets langer duurt, namelijk 12 uur en 25 minuten. Dit is te verklaren doordat na één om draaiing van de aarde de maan ook net iets verder is gedraaid. Daarom moet de aarde ook nog een kleine hoek doordraaien om weer in een lijn met de maan te staan. Verder wordt de waterbeweging nog beïnvloed door bijvoorbeeld wrijving met de zeebodem, eilanden en zeeëngtes, waardoor ingewikkelde golfbewegingen ontstaan. Omdat de maan om de aarde heen draait, staan de aantrekkingskracht van de maan en de zon in verschillende hoeken op de aarde, waardoor het fenomeen van springtij en doodtij ontstaat. Als de maan en de zon in een lijn staan, dan is de aantrekkingskracht het sterkst, dus dan wordt het water nog iets meer omhoog getrokken. De verschillen in het getij zijn dan het hoogst. Dit fenomeen

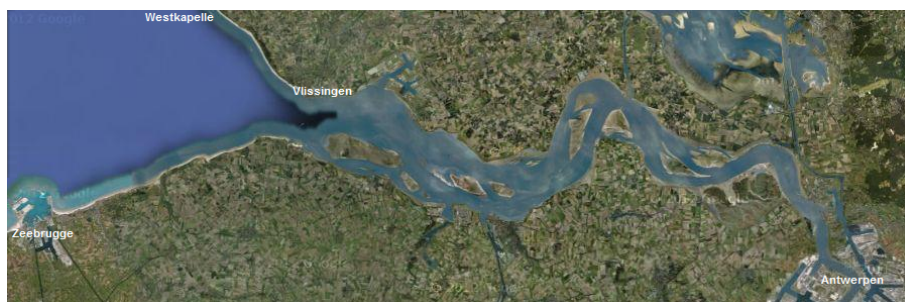
noem je dan springtij. Als de maan, de zon en de aarde in een rechthoekige driehoek ten opzichte van elkaar staan, dan werken de aantrekkingskracht van de zon en van de maan elkaar tegen. Hierdoor wordt het verschil in het getij het minst. Dit fenomeen noemen we doottij. Intuïtief zou men denken dat springtij dus plaats vindt bij volle maan en bij nieuwe maan. Echter zien we in de praktijk, dat springtij enkele dagen na volle of nieuwe maan voorkomt. Dit is te verklaren door dat de getijdenbewegingen ontstaan op de zuidelijke helft van de aarde en het dus een tijdje duurt voordat deze bewegingen tot de kust van de Westerschelde zijn gekomen.

2.2 Gebiedsbeschrijving

De Westerschelde maakt deel uit van het estuarium van de rivier de Schelde. Deze rivier ontspringt in Noord-Frankrijk en mondt bij Vlissingen uit in de Noordzee. Van het totale oppervlak van het stroomgebied van de Schelde, ruim 21000 vierkante kilometer, ligt ongeveer 1000 vierkante kilometer op Nederlands grondgebied. Dit Nederlandse deel bestaat uit de Westerschelde en het mondingsgebied van de Westerschelde.

Het mondingsgebied ligt tussen Vlissingen, Westkapelle en Zeebrugge en staat in vrije verbinding met de zee. Het water is hier een stuk dieper dan landinwaarts. Bij de monding liggen meerdere geulen en in de geulen liggen zandplaten. De Westerschelde is ongeveer 60 kilometer lang. Bij Vlissingen is de breedte zo'n vijf kilometer en dit neemt af tot ongeveer twee kilometer ter hoogte van de grens tussen Nederland en België.

Het verschil in hoogte tussen opeenvolgende hoog- en laagwaters wordt getijslag genoemd. Zo is bij springtij de getijslag bij Vlissingen zo'n 4.5 meter, bij Antwerpen ongeveer 6.0 meter. Het vloedvolume is de totale hoeveelheid water die tussen eb- en vloedkentering van een getij door een dwarsdoorsnede stroomt. Bij Vlissingen is dit circa 1.1 miljard kubieke meter.



Figuur 2: Satellietbeeld Westerschelde

3 Probleembeschrijving

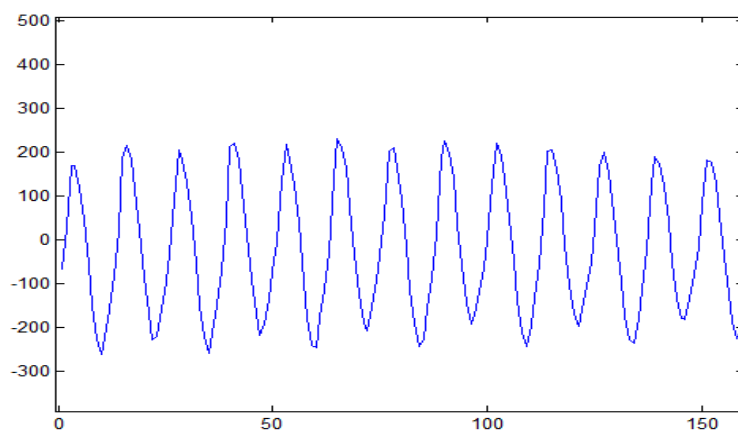
In dit verslag staat de volgende vraag centraal: Wat is de invloed van de wind op de waterstanden in de Westerschelde?

Om dit te onderzoeken moet er gekeken worden naar de waterstanden in de Westerschelde op bepaalde tijdstippen en tevens naar de wind op dat tijdstip. Door veel tijdstippen te beschouwen kan zo een beeld worden verkregen van de invloed van de wind op de waterstanden.

Voor dit onderzoek zijn een hoop gegevens nodig. Allereerst de waterstanden. Al lange tijd worden deze standen gemeten en opgeslagen in meetstations op verschillende plaatsen in de Westerschelde, namelijk in Bath, Terneuzen, Vlissingen, Cadzand, Westkapelle en Hansweert. Vroeger werd dit gemeten om de paar uur, tegenwoordig zelfs om de tien minuten. Deze metingen zijn terug te vinden op de website van het Rijkswaterstaat. Alle metingen zijn gedaan ten opzichte van het NAP (Normaal Amsterdams Peil).

Aan de hand van de data kun je zien dat het effect van het getij groter wordt hoe verder weg je bent van de kust. Bath, bijvoorbeeld, ligt meer landinwaards en het verschil van de waterstand tussen eb en vloed is redelijk groot in vergelijking met het verschil van de waterstand tussen eb en vloed in Vlissingen, wat direct aan de kust ligt. Wij hebben besloten om in ons onderzoek de data van de waterstanden van Terneuzen te gebruiken, omdat Terneuzen meer landinwaards ligt dan Vlissingen en er daarom een groter effect van het getij in de waterstanden terug te zien is. Verder ligt Terneuzen dichterbij Vlissingen dan bijvoorbeeld Bath, wat wij belangrijk vonden voor het veronderstellen van de nauwkeurigheid van de windmetingen die in Vlissingen genomen zijn. Deze metingen uit Vlissingen gebruiken wij namelijk voor ons onderzoek.

Voor dit onderzoek zijn de waterstanden in Terneuzen gebruikt van 1972 tot en met 2012. Er zijn metingen gebruikt van om het uur. In totaal zijn er zo 359424 meetpunten. Uitgezet tegen de tijd in uren krijgen we zo het volgende beeld:



Figuur 3: Waterstanden per uur

Voor de weersituatie zijn voor dezelfde meetpunten de windsnelheid, de windrichting en de luchtdruk verzameld. Met al deze data wordt geprobeerd een verband te vinden tussen de wind en de waterstanden. Kort samengevat:

Metingen waterstanden	Terneuzen
Metingen wind	Vlissingen
Periode metingen	1972 - 2012
Frequentie metingen	$\frac{1}{uur}$
Totaal aantal meetpunten	359424

4 Astronomische invloed

Om te kunnen beginnen met de analyse van de invloed van de wind op de waterstanden moeten wij eerst andere factoren die de waterstand beïnvloeden modelleren en uit de data filteren. Een hele belangrijke factor is het getij. In deze sectie zullen wij een model voor het getij beschrijven met behulp van een Fouriertransformatie.

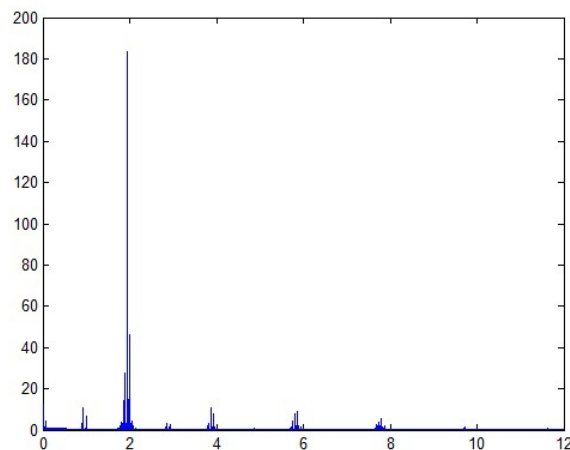
4.1 Fourieranalyse - Frequenties bepalen

Ons signaal van de waterstanden kan benaderd worden met een Fourierreeks. Een Fourierreeks is een som van sinussen en cosinussen met verschillende frequenties. Deze functie kan als volgt worden gerepresenteerd:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} (A(i)\sin(2\pi f_i t) + B(i)\cos(2\pi f_i t))$$

waarbij $f(t)$ het signaal is, $A(i)$ en $B(i)$ de amplitudes zijn en f de frequentie van de sinus en cosinus is.

Om een goede benadering te kunnen maken van het signaal van de waterstanden willen we de belangrijkste frequenties van het signaal weten. Omdat we over veel datapunten beschikken zijn deze frequenties nauwkeurig te bepalen. Met een Fouriertransformatie kan van het signaal de Fouriergetransformeerde bepaald worden, wat kan worden gezien als het signaal in het frequentiedomein. Zo kunnen we dus de frequenties van ons signaal bepalen. In Matlab bestaat hiervoor een functie (FFT). Deze functie geeft een vector waarin je kunt aflezen in welke mate frequenties voorkomen in het signaal. Dit is in het volgende plaatje te zien:



Figuur 4: Frequentie in 1/dag

Er is een duidelijke piek te zien bij ongeveer 2. Dit is de frequentie van eb en vloed. Per dag zijn er namelijk 2 periodes van eb en vloed.

Zoals te zien is, zijn er nog meer frequenties. Wij hebben een functie geschreven, die de pieken in dit plaatje zoekt. Om iets te zeggen over de hoeveelheid frequenties die we mee moeten nemen, moet er eerst gekeken worden naar de bijbehorende amplitudes.

4.2 Amplitudes bepalen

Om de functie van de waterstanden zo goed mogelijk te benaderen met een Fourierreeks, wordt de kleinste kwadratenmethode gebruikt. Met deze methode minimaliseren we het verschil tussen onze voorspelling en de echte waterstanden S :

$$S = \sum_t [W(t) - \sum_{i=1}^N (A_i \sin(2\pi f_i t) + B_i \cos(2\pi f_i t))]^2$$

Hierbij is N het totaal aantal frequenties, $W(t)$ de functie van de waterstanden en f_i frequentie i . A_i en B_i zijn de bijbehorende amplitudes. Omdat de som van het product van de sinus en cosinus en de som van het product van twee sinussen of twee cosinussen met verschillende frequenties nul zijn, verdwijnen deze termen uit de uitwerking. Hierdoor verdwijnen alle combinaties van $A_i A_j$ en $B_i B_j$ voor $i \neq j$ en $A_i B_i$ voor alle i . We kunnen voor elke A_i en B_i apart de afgeleide van S berekenen en deze nul stellen. Dit levert voor alle i :

$$\frac{\partial S}{\partial A_i} = 0 = \sum_t [-W(t) \sin(2\pi f_i t) + A_i \sin^2(2\pi f_i t)]$$

Werken we dit verder uit voor A_i , dan krijgen we:

$$A_i = \sum_t \frac{W(t) \sin(2\pi f_i t)}{\sin^2(2\pi f_i t)}$$

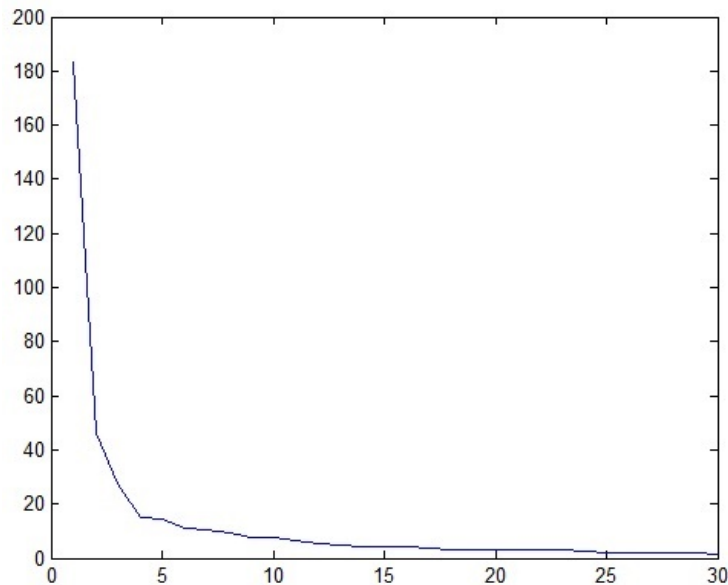
Een zelfde soort berekening resulteert in een uitdrukking voor alle B_i :

$$B_i = \sum_t \frac{W(t) \cos(2\pi f_i t)}{\cos^2(2\pi f_i t)}$$

Deze A_i en B_i zijn dus de amplitudes die horen bij de sinus en cosinus met frequentie i . Met al deze A_i , B_i en f_i kan een som van sinus- en cosinusfuncties gemaakt worden. Door deze functie vervolgens van het signaal van de waterstanden af te halen, blijft een resultaat over waar je het periodieke gedrag van het water niet meer in terug ziet.

4.3 Frequenties herzien

Er zijn heel veel frequenties te vinden. Om te kijken of al deze frequenties nodig zijn voor een goede benadering, hebben we gekeken naar de amplitude die hoort bij de frequenties. In de afbeelding hieronder staat boven de x-as de amplitude die hoort bij de x^e gevonden frequentie ¹:



Figuur 5: Amplitudes

Er is te zien dat de bijdrage van de frequenties snel afneemt. Zo is de amplitude van de eerst gevonden frequentie ongeveer 183 cm, en van de tweede frequentie nog maar 46 cm. Door naar alle amplitudes te kijken zijn we tot de conclusie gekomen dat voor een goede benadering 14 frequenties voldoende zijn. Hierbij hebben we gesteld dat een amplitude van minder dan 5 cm niet meer relevant is.

Omdat we kijken naar een lange periode, kan een kleine verandering in de omstandigheden het resultaat erg beïnvloeden. Om dit te illustreren hieronder de eerste frequentie met bijbehorende amplitude en een kleine aanpassing van deze frequentie met een nieuwe amplitude:

Frequentie	Amplitude
0.0805110	180.8961 cm
0.0805111	183.6613 cm

¹Hierbij moet worden vermeld dat de frequentie 0 is weggelaten uit het plaatje. De frequentie 0 levert namelijk $\sin(0) = 0$ en $\cos(0) = 1$. Met de gevonden waarde $B(0)$ levert $B(0) \cdot \cos(0) = B(0)$ de gemiddelde waarde van ons signaal. Deze waarde, 6.2039, is van tevoren van het signaal afgehaald om te zorgen dat het signaal 0 als evenwichtstand heeft, in plaats van deze gemiddelde waarde 6.2039

Het verschil is bijna 3 cm en we hebben de frequentie aangepast op de 7^e decimaal. Verdere aanpassing zou dus tot een beter resultaat kunnen leiden. Door handmatig de frequenties licht aan te passen hebben we de volgende 14 frequenties (in 1/uur) verkregen met bijbehorende amplitudes (in cm):

	Frequenties	Amplitudes
1	0.08051140	187.3
2	0.08333340	50.3
3	0.07899930	30.4
4	0.08202356	14.9
5	0.07769000	14.6
6	0.16102290	11.9
7	0.03873066	10.5
8	0.24435622	9.1
9	0.16384480	7.7
10	0.24153429	9.0
11	0.04178080	6.8
12	0.32486790	5.5
13	0.11773000	4.8
14	0.00282200	4.5

De bij dit model behorende A_i en B_i staan in de *bijlage*.

4.4 Resultaat

Met deze gevonden frequenties en amplitudes kunnen we het signaal G , de voorspelling van de waterstand, opstellen:

$$G(t) = \sum_{i=1}^{14} (A_i \sin(2\pi f_i t) + B_i \cos(2\pi f_i t))$$

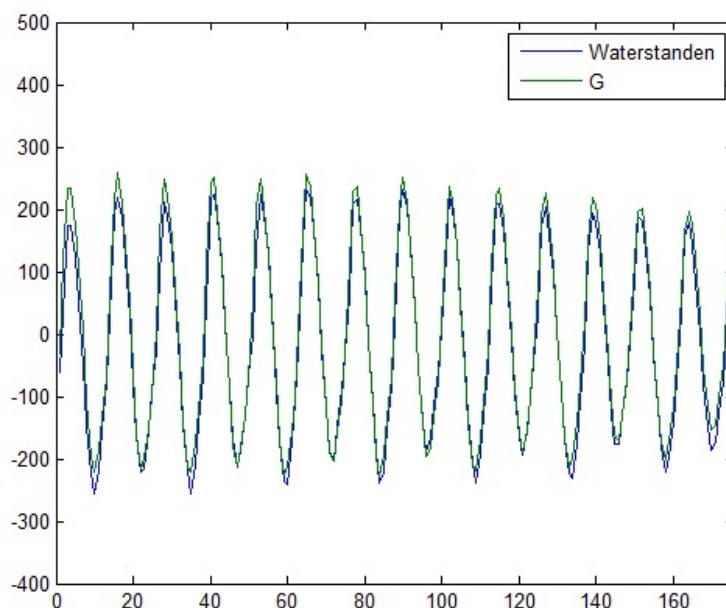
In figuur 6 is het signaal van de waterstanden en ons gevonden signaal G samen geplott voor de eerste paar dagen. Een handige maat om te controleren of G een goede benadering is, is de *gemiddelde fout*. Als wij ons signaal van de waterstanden W zouden benaderen met een functie 0 , dan is de gemiddelde fout die we maken:

$$\frac{1}{359424} \sum_t |W(t)| = 126.1$$

Dit is natuurlijk een grote fout. De gemiddelde fout die we maken als we het de waterstanden voorspellen met signaal G is:

$$\frac{1}{359424} \sum_t |W(t) - G(t)| = 25.0$$

Gemiddeld zitten we er dus nog maar een 25 cm naast. Nu kunnen we onderzoeken of het meenemen van de wind deze gemiddelde fout nog kleiner kan maken.



Figuur 6: Waterstanden en voorspelling G

4.5 Verandering over de jaren

Het kan zijn dat er in de loop van de jaren dingen in de Westerschelde zijn veranderd waardoor onze benadering $G(t)$ niet goed past over alle veertig jaren. Dit zou bijvoorbeeld kunnen komen door verandering van de diepte van de bodem door de beweging van het water of door menselijk toedoen. Daarom is het verstandig om te kijken of we een betere benadering krijgen als we naar verschillende tijdsperiodes kijken.

Hieronder staat een tabel met verschillende tijdsperiodes met de daarbij behorende gemiddelde fout in cm:

Tijdsperiode	Gemiddelde fout
1972 - 2012	25.0
1982 - 2012	25.1
1992 - 2012	24.5
2002 - 2012	24.7
2007 - 2012	23.9

Er is te zien dat het kiezen van verschillende periodes weinig winst oplevert, maximaal 1.1 cm. We kiezen er daarom voor om verder te gaan met al onze datapunten, dus een periode van 40 jaar.

5 Wind, eerste model

Nu we een benadering hebben voor de waterstanden willen we gaan onderzoeken hoe we deze voorspelling beter kunnen maken door de wind mee te nemen. Eerst kijken we of we aan ons model voor de waterstanden een model voor de wind kunnen toevoegen. We beschouwen eerst het volgende, lineaire model.

Voor al onze 359424 datapunten beschikken wij over de windsnelheid en de windrichting. We modelleren nu de windsnelheid als twee vectoren met als vector V_1 de x -richting en vector V_2 de y -richting van de windsnelheid:

$$V_1(t) = [v(t) \cdot \cos(w(t))] \\ V_2(t) = [v(t) \cdot \sin(w(t))]$$

Hierbij is v de windsnelheid en w de windrichting in radialen.

Vervolgens hebben we het effect van de wind E als volgt gemodelleerd:

$$E(t) = \alpha_1 \cdot v(t) \cdot \cos(w(t)) + \alpha_2 \cdot v(t) \cdot \sin(w(t)) = \alpha_1 \cdot V_1(t) + \alpha_2 \cdot V_2(t)$$

5.1 Vinden van coëfficiënten

Om nu in het effect E de geschikte α_1 en α_2 te vinden, gebruiken we opnieuw de kleinste kwadratenmethode. We willen dus

$$S = \sum_t [R(t) - \alpha_1 \cdot V_1(t) - \alpha_2 \cdot V_2(t)]^2$$

minimaliseren. Hierbij is $R(t)$ ons reeds gevonden resultaat $W(t) - G(t)$. Minimaliseren doen we door S af te leiden naar α_1 en α_2 en vervolgens deze afgeleiden nul te stellen. Uitwerken geeft een systeem van twee vergelijkingen met twee onbekenden:

$$\alpha_1 \sum_t V_1^2 + \alpha_2 \sum_t V_1(t)V_2(t) = \sum_t R(t)V_1(t) \\ \alpha_1 \sum_t V_1(t)V_2(t) + \alpha_2 \sum_t V_2^2(t) = \sum_t R(t)V_2(t)$$

We kunnen deze vergelijkingen modelleren als het systeem

$$Ax = b$$

met

$$A = \begin{bmatrix} \sum V_1^2 & \sum V_1(t)V_2(t) \\ \sum V_1(t)V_2(t) & \sum V_2^2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} \sum R(t)V_1(t) \\ \sum R(t)V_2(t) \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Het oplossen van dit systeem geeft ons de waarden voor α_1 en α_2 :

$$\alpha_1 = 0.0106, \alpha_2 = -0.3571$$

5.2 Resultaat

Nu de waarden van de α_i voor $i = 1, 2$ bekend zijn, kunnen we het effect van de wind als volgt schrijven:

$$E(t) = 0.0106 \cdot v(t) \cdot \cos(w(t)) - 0.3571 \cdot v(t) \cdot \sin(w(t))$$

Berekenen we nu weer de gemiddelde fout, dan krijgen we het volgende:

$$\frac{1}{359424} \sum_t |W(t) - G(t) - E(t)| = 22.6$$

De gemiddelde fout is, door dit model van de wind, met 2.4 cm afgenomen.

5.3 Versterkende wind

Dit resultaat levert nog niet het gewenste effect. In het verleden is namelijk gebleken dat een harde wind wel degelijk, soms ernstige, gevolgen kan hebben. Daarom hebben wij geprobeerd onze methode te verbeteren door ook nog de windrichting en windsnelheid van een aantal uur geleden mee te nemen in het model voor het effect E. We vermoeden dat de wind een groter effect heeft als het een paar uur lang hard waait dan als er een korte windvlaag komt. Uit onderzoek blijkt dat de fout, nadat de wind van een, twee en drie uur uit het verleden mee is genomen, niet meer sterk verbetert. Daarom hebben we ervoor gekozen alleen de wind van drie tijdstippen eerder mee te nemen en om het model dus als volgt aan te passen:

$$E(t) = \alpha_1 \cdot V_1(t) + \alpha_2 \cdot V_1(t-1) + \alpha_3 \cdot V_1(t-2) + \alpha_4 \cdot V_1(t-3) \\ + \alpha_5 \cdot V_2(t) + \alpha_6 \cdot V_2(t-1) + \alpha_7 \cdot V_2(t-2) + \alpha_8 \cdot V_2(t-3)$$

Deze formule minimaliseren we op dezelfde manier als beschreven staat in de vorige paragrafen met de kleinste kwadraten methode. Na het oplossen van dit systeem krijgen we het volgende resultaat voor de gemiddelde fout:

$$\frac{1}{359424} \sum_t |W(t) - G(t) - E(t)| = 22.3$$

5.4 Luchtdruk

We hebben ook nog geprobeerd om de luchtdruk (L) mee te nemen in dit model:

$$E(t) = \alpha_1 \cdot V_1(t) + \alpha_2 \cdot V_2(t) + \alpha_3 \cdot L$$

Opnieuw de kleinste kwadratenmethode leverde:

$$\alpha_1 = 0.1126, \alpha_2 = -0.3305, \alpha_3 = -0.0004$$

De gemiddelde fout die we nu maken is:

$$\frac{1}{359424} \sum_t |W(t) - G(t) - E(t)| = 22.58$$

Deze fout verschilt nauwelijks van de 22.6 cm. Deze toevoeging aan dit model levert dus geen verbetering op.

5.5 Conclusie

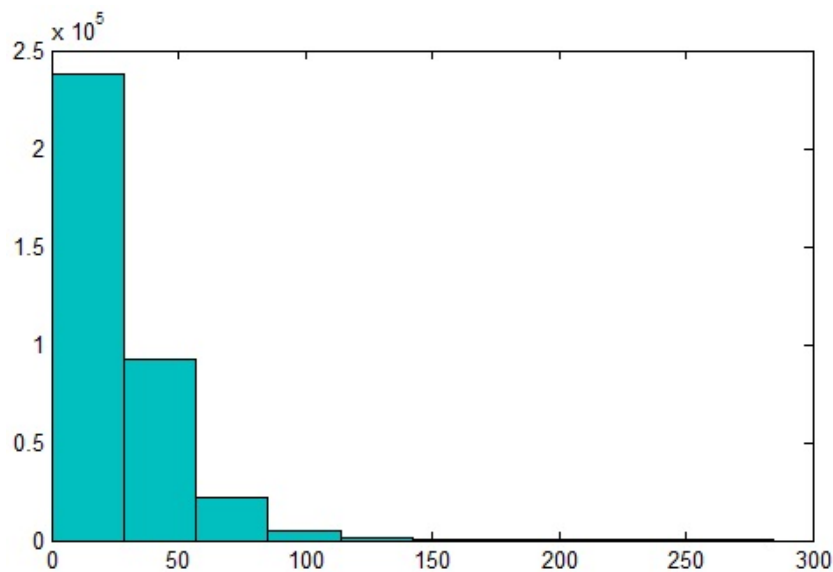
Uit het resultaat blijkt dat dit model voor de wind een verbetering van ongeveer 3 cm oplevert ten opzichte van het model zonder windinvloed. Ook na het model aangepast te hebben en de wind uit het verleden mee te nemen krijgen we geen beter resultaat. Ook de luchtdruk zorgde niet voor een verbetering in dit model. We verwachten echter wel dat de wind in de realiteit een groter effect heeft dan 3 cm. Daarom gaan we nu onze data op een andere manier bekijken.

6 Wind, nader onderzocht

6.1 Wind per uur

Wij kijken opnieuw naar onze, in hoofdstuk 4 gevonden voorspelling $G(t)$. We konden $W(t)$ daarmee voorspellen met een gemiddelde fout van 25.0 cm. Hoe komt deze fout tot stand? Schommelt de fout van elk punt rond deze 25.0 cm of zijn er een paar grote fouten die het gemiddelde omhoog halen?

Om dit te onderzoeken zijn we gaan kijken naar de absolute fout in elk meetpunt. Van deze gegevens hebben we een histogram gemaakt, die hieronder staat afgebeeld:



Figuur 7: Histogram absolute fout

In dit histogram is te zien dat de absolute fout voor een groot deel kleiner of gelijk is aan 25 cm, om precies te zijn: 60.4%. Waarom is de fout bij de andere punten een stuk groter? Om deze vraag te kunnen beantwoorden zijn we gaan kijken wat er aan de hand is bij de punten waarbij de fout het grootst is.

We hebben eerst gezocht naar 15 punten met de grootste fout. Hiervan hebben we de volgende gegevens verzameld:

- De windrichting;
- De windsnelheid;

Deze gegevens staan in onderstaande tabel:

Windrichting (graden)	Windsnelheid (0.1 m/s)
320.0000	110.0000
340.0000	123.0000
300.0000	103.0000
330.0000	129.0000
300.0000	98.0000
310.0000	110.0000
300.0000	123.0000
330.0000	110.0000
330.0000	134.0000
340.0000	139.0000
290.0000	170.0000
310.0000	87.0000
340.0000	144.0000
300.0000	98.0000
330.0000	113.0000

Hier valt wat op. De wind komt elke keer uit het noordwesten en de wind varieert van 9 tot 17 m/s. Dit is vrij krachtige tot stormachtige wind.

Vervolgens zijn we deze gegevens gaan verzamelen van alle punten met een fout groter of gelijk aan 100 cm. Kijken we naar de punten waar onze voorspelling meer dan 100 cm onder de werkelijke waterstand ligt, dan blijkt dat in 98.9% van de gevallen er sprake is van wind uit het westen. In 88.6% van de gevallen was er sprake van windsnelheden van 8 m/s of harder, wat gelijk staat aan vrij krachtige wind of harder.

Kijken we naar de punten waar onze voorspelling meer dan 100 cm boven de werkelijke waterstand ligt, dan blijkt dat in 78.7% van de gevallen de wind uit het oosten kwam. In 68.8% van de gevallen was er sprake van minimaal vrij krachtige wind.

Hierdoor krijgen we het idee dat harde wind uit het oosten zorgt voor een lagere waterstand, en harde wind uit het westen voor een hogere waterstand.

Dit bleek echter niet helemaal waar te zijn. We troffen punten aan waarbij het bijvoorbeeld wel hard waaide uit het westen, maar waar de waterstand niet of nauwelijks van de voorspelling afweek.

Waar we rekening mee moeten houden is dat deze gegevens gebaseerd zijn op uurgegevens. We hebben dus gekeken wat er op dat uur met de waterstand gebeurd als op dat uur hard waait uit een bepaalde richting. We kunnen ons voorstellen dat deze waterverhoging niet instantaan gaat. Ook hebben we een vermoeden dat als het de hele dag bijvoorbeeld uit het oosten waait, en slechts één uur uit het zuiden, de waterstand niet significant zal veranderen door deze zuiderwind.

Om dit alles beter te beschouwen kijken we vervolgens niet meer naar de fout per uur, maar naar de gemiddelde fout per dag.

6.2 Gemiddeldes per dag

We beschouwen nu de gemiddelde fout die we maken op één dag. Als we $R(t)$ definiëren als $W(t) - G(t)$, dan geldt:

$$R'(d) = \frac{1}{24} \sum_{n=0}^{23} R(d+n)$$

waarbij d nu de dag is en er in totaal 14976 dagen zijn. Zo is $R'(2)$ bijvoorbeeld de gemiddelde fout op dag twee, en die is samengesteld uit de fouten op de uren 25, 26, 27, 48.

Zoals in de vorige paragraaf is beschreven, bestaat het vermoeden dat harde wind uit het westen de waterstand verhoogt. Als we de gemiddelde fouten zoeken van dagen dat het uit het westen waait met een windsnelheid groter of gelijk aan 10 m/s, krijgen we situaties waarbij de waterstand hoger is dan onze voorspelling, maar net zo vaak situaties dat het water lager ligt dan voorspeld. Wat zorgt er voor dat deze situaties verschillen?

Van al deze dagen met harde wind uit het westen hebben we de volgende gegevens verzameld:

- De gemaakte fout in cm (GM)
- De gemiddelde windsnelheid op die dag in 0.1 m/s (WS)
- De gemiddelde windrichting op die dag in graden (WR)
- De luchtdruk op die dag in hPa (LD)

Van tien dagen met een hogere waterstand en tien dagen met een lagere waterstand dan voorspeld staan in onderstaande tabel de bijbehorende gegevens:

Hoger water				Lager water			
GM	WR	WS	LD	GM	WR	WS	LD
155	309	128	10196	-70	195	115	10195
153	309	106	10183	-67	197	144	9996
146	273	177	9926	-56	202	111	10191
138	282	171	10115	-53	190	122	10040
138	333	120	10143	-48	194	133	10186
137	281	158	9888	-46	185	100	10204
136	309	124	10060	-46	180	115	10171
133	287	142	9933	-41	181	119	10058
131	282	126	10027	-40	189	104	10202
128	317	121	10050	-38	191	101	10008

Wat als eerst opvalt is het verschil in de windrichting. Bij hoger water komt de wind uit het noordwesten, bij lager water uit het zuidwesten. Kijken we naar meer dagen, dan zien we dat de luchtdruk bij hoger water gemiddeld lager is dan wanneer de waterstand lager is. Deze twee factoren, de windrichting en de luchtdruk, zouden dus wel eens voor het verschil kunnen zorgen. Dit zijn we nader gaan onderzoeken.

6.3 Wind van verschillende kanten

We beginnen met de windrichtingen tussen 270° en 360° . Van alle 14976 dagen die we beschouwen waait de wind op 2053 dagen uit deze richting. We verwachten vooral waterverhoging, maar treffen toch ook enkele dagen aan waarop het water lager staat dan voorspeld. Wat is er anders op deze dagen?

Als we kijken naar de dagen waarop de fouten het grootst zijn valt op dat de wind uit deze richting op een dag het water 155 cm hoger doet staan. De grootste afstand dat het water *l*áger ligt is slechts 34 cm. Op deze dagen is de luchtdruk gemiddeld 10225 hPa. Op de dagen dat het water hoger ligt is de luchtdruk gemiddeld 10149 hPa. Dit is iets lager. Dit komt overeen met het bekende gegeven dat hoge luchtdruk zorgt voor laag water en een lage luchtdruk voor hoog water.

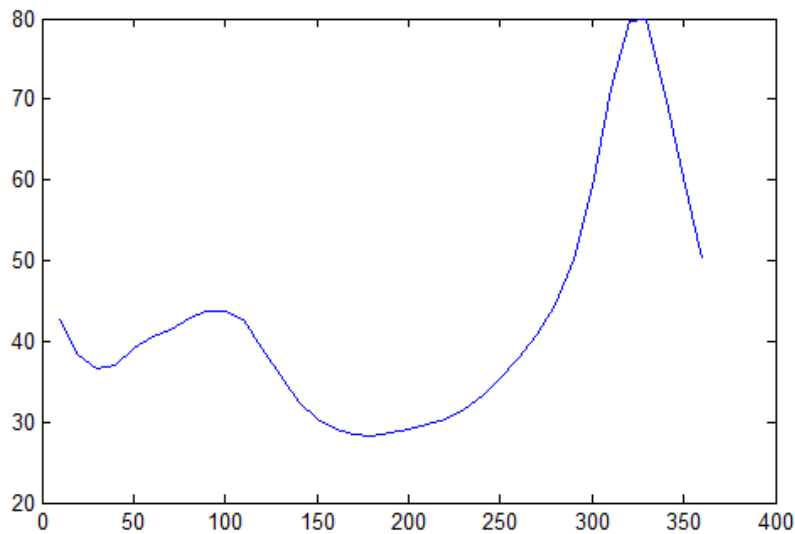
Vervolgens kijken we naar de windrichtingen tussen 180° en 270° . Daar is de verdeling tussen hoger en lager water bijna gelijk verdeeld en zitten er bij beide ook grote fouten bij. Als we kijken naar de gevallen waar het water hoger staat, valt op dat de hoek waaruit de wind komt sterk naar de grens van 270° neigt. Hierdoor krijgen we het idee dat de grens van 270° iets opgeschoven kan worden om een gebied te vinden waar, als de wind daar vandaan komt, de wind het water hoger doet staan. Na nader onderzoek is dit het punt 250° geworden.

Hierna bekijken we de wind die uit het noordoosten waait. We verwachten veel lagere waterstanden, maar er zitten ook hogere tussen. De echte waterstand staat ten opzichte van onze voorspelling maximaal 30 cm hoger, vergeleken met 88 cm lager. Er is bij hoger water ook een lagere luchtdruk te zien en een zwakkere wind. Dit is ook het geval tussen 90° en 100° , dus we schuiven de grens nog iets verder op.

Samenvattend: Tussen 250° en 360° zorgt de wind vooral voor een hogere waterstand. Tussen de 0° en de 100° zorgt de wind vooral voor een lagere waterstand. In het gebied tussen de 100° en 250° is er eigenlijk weinig verband te vinden. Bij dezelfde omstandigheden van de windsnelheid, windrichting en luchtdruk doen zich verschillende situaties voor. Dit wekt het vermoeden dat er misschien nog een andere factor van invloed is op de waterstand. Wij weten niet wat dit is, maar het kan bijvoorbeeld de aanvoer van water uit de rivier de Schelde zijn (zie *discussie*). Dit speelt ook bij de twee andere gebieden een rol, maar omdat daar toch een sterke invloed van de wind te zien is, proberen we voor deze twee richtingen het bestaande model aan te passen.

6.4 Model

In de vorige paragraaf hebben we geconcludeerd dat het bestaande model niet goed werkt bij harde wind uit het noordwesten of oosten. Dit kunnen we ook nog op een andere manier zien. In onderstaande afbeelding is de fout die we maken in het model G uitgezet tegen de windrichting:



Figuur 8: Fout uitgezet tegen windrichting

Er is duidelijk te zien dat het model het slechts past bij wind rond de 330° . Maar ook rond de 90° zit er een stijging in de fout. We kiezen er daarom voor om drie modellen te maken:

- Model 1: Dit model wordt gebruikt als het hard waait uit het noordwesten;
- Model 2: Dit model wordt gebruikt als het hard waait uit het oosten;
- Model 3: Dit model wordt gebruikt voor de andere windsituaties;

Deze modellen zien er allemaal als volgt uit (voor $i=1,2,3$):

$$M_i(t) = \sum_{j=1}^{14} (A_{i,j} \sin(2\pi f_j t) + B_{i,j} \cos(2\pi f_j t))$$

De frequenties f_j zijn de frequenties zoals deze in hoofdstuk vier zijn beschreven.

Schrijven we $W(t)$ weer als de functie van de waterstanden, dan vinden we voor elk model de coëfficiënten $A_{i,j}$ en $B_{i,j}$ door de kleinste kwadraten methode. Dus we minimaliseren de volgende vergelijkingen (voor $i=1,2,3$):

$$S_i = \sum_{t \in T_i} [W(t) - M_i(t)]^2$$

De gevonden $A_{i,j}$ en $B_{i,j}$ voor elk van de drie model zijn te vinden in de bijlage.

Voor elk model hebben we een dataset T_i met punten die we meenemen in de kleinste kwadratenmethode:

- $t \in T_1$ als het gemiddeld over de uren $t - \tau, t - \tau + 1, \dots, t - 1, t$ hard waait uit het noordwesten;
- $t \in T_2$ als het gemiddeld over de uren $t - \tau, t - \tau + 1, \dots, t - 1, t$ hard waait uit het oosten;
- $t \in T_3$ in alle andere windsituaties;

Deze τ wordt nog nader bepaald.

Vervolgens moeten er nog criteria bepaald worden voor wanneer een tijdstip t in T_1, T_2 of T_3 komt. In de afbeelding hierboven is te zien dat het slechts werkt voor wind uit de richting 330° . Uit de richtingen daaromheen zorgt de wind ook voor grote fouten, al moet het daarvoor wel harder waaien dan wanneer de wind waait uit de richting 330° . Daarom hanteren we voor model 1 het volgende criterium ²:

- $t \in T_1$ als $c_1 \geq 60$

Hierbij is c_1 :

$$\frac{1}{\tau} \sum_{t=t-\tau}^t \text{windsnelheid}(t) \cdot \cos(\text{windrichting}(t) - 330)$$

Voor de 60 in $c_1 \geq 60$ is gekozen om de volgende reden: We willen graag een zo groot mogelijke verbetering van de fouten. Zouden we kiezen voor 90, dan kunnen we het model voor deze punten met een factor 2 verbeteren. Het nadeel van zo'n hoge grens is dat er erg weinig punten mee worden genomen in het maken van de benadering. Dit zorgt natuurlijk voor een beter resultaat, maar het verbetert je bestaande model voor maar heel weinig punten. Kies je een te lage grens, dan heb je veel punten maar weer een te kleine verbetering. Onze gulden middenweg is $c_1 \geq 60$.

Voor model 2 geldt volgens dezelfde berekeningen als bij model 1:

- $t \in T_2$ als $c_2 \geq 60$

Hierbij is c_2 :

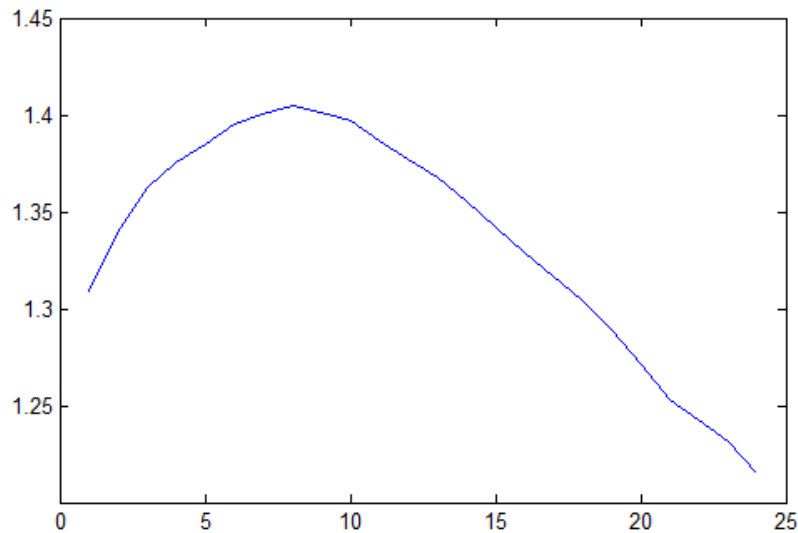
$$\frac{1}{\tau} \sum_{t=t-\tau}^t \text{windsnelheid}(t) \cdot \cos(\text{windrichting}(t) - 90)$$

Voor model 3 geldt ten slotte:

- $t \in T_3$ als $t \notin T_1 \wedge t \notin T_2$

²Voorbeeld: tijdstip t_1 met gemiddelde windsnelheid 11.7 m/s en windrichting 301° ($c \approx 120$) en tijdstip t_2 met gemiddelde windsnelheid 17.7 m/s en windrichting 274° ($c \approx 160$) behoren beide tot T_1 .

Nu willen we τ nog bepalen. Er is al eerder aangegeven dat we het vermoeden hebben dat de invloed van de wind niet instantaan is. Daarom willen we eerdere tijdstippen betrekken bij de keuze voor model 1,2 of 3. We willen een zo goed mogelijke verbetering maken. In de grafiek hieronder staat de verbeteringsfactor voor $\tau=1$ tot en met $\tau=24$:



Figuur 9: Verbeteringsfactor uitgezet tegen

Er is een maximum voor $\tau=8$. We kiezen er daarom voor om deze τ te kiezen voor onze modellen.

6.5 Resultaat

Met het model dat in de vorige paragraaf beschreven is, zijn we tot een aantal resultaten gekomen. We hebben voor de drie deelmodellen steeds de gemiddelde fout berekend, die we met de A_j en B_j voor $j = 1, \dots, 14$ van de oorspronkelijke voorspelling G kregen. Deze fout hebben we $F_{o,i}$ genoemd, voor model i met $i = 1, 2, 3$. Deze hebben we vergeleken met de gemiddelde fout die uit het nieuwe model komt, $F_{n,i}$. Die gemiddelde fout uit de nieuwe modellen hebben we op de volgende manier berekend ³:

$$F_{n,i} = \frac{1}{|T_i|} \sum_{t \in T_i} |W(t) - M_i(t)|$$

³Hierin staat $|T_i|$ voor het aantal elementen in de set T_i

In onderstaande tabel staan de waardes van de fouten van de verschillende modellen:

i	$F_{o,i}$ in cm	$F_{n,i}$ in cm
1	50.9	36.2
2	34.2	22.7
3	23.1	23.1

Zoals verwacht na het zien van figuur 8, is voor model 1, met wind uit het noordwesten, de grootste verbetering te zien. Deze fout is met bijna 15 cm afgenomen. Het gemiddelde fout uit model 2 is met 11.5 cm afgenomen. Ook naar onze verwachtingen is de fout voor de overige punten hetzelfde. Hier deed ons oude model het namelijk al goed voor. De winst viel dan ook vooral te halen bij de tijdstippen uit T_1 en T_2 .

Deze resultaten willen we graag nog vergelijken met de gemiddelde fout van 25 cm die we maakten over alle punten met onze voorspelling G . Hoe onze deelmodellen het samen doen, bekijken we met het *gewogen gemiddelde*:

$$\frac{|T_1| \cdot F_{n,1} + |T_2| \cdot F_{n,2} + |T_3| \cdot F_{n,3}}{359424}$$

We hebben

$$|T_1| = 17200$$

$$|T_2| = 14752$$

$$|T_3| = 327472$$

Vullen we de $F_{n,1}$ in uit de tabel hierboven, dan krijgen we

$$\frac{17200 \cdot 36.2 + 14752 \cdot 22.7 + 327472 \cdot 23.1}{359424} \approx 23.7$$

Dit is kleiner dan de 25 cm die we hadden met de voorspelling G , maar niet veel. De reden hiervoor wordt al snel duidelijk door de berekening hierboven. Vooral bij model 1 treedt er een grote verbetering op, maar dit betreft slechts 17200 datapunten, oftewel een kleine 5% van alle datapunten. Hetzelfde geldt voor de verbetering uit model 2. Dit betreft slechts 4% van alle datapunten. En omdat we op de overige datapunten de gemiddelde fout niet kleiner krijgen dan 23.1 cm, zal de gemiddelde fout niet sterk verbeteren ten opzichte van de 25 cm. De vermoedens waarom de fout bij de overige punten niet kleiner wordt dan 23.1 cm wordt besproken in de *discussie*.

Wat betreft de gemiddelde fout is dit model dus niet aanzienlijk beter dan onze eerste voorspelling G . De fout is zelfs groter dan de fout in ons lineaire model uit hoofdstuk 5, waar we een gemiddelde fout hadden van 22.6 cm. Maar concluderen dat dit model dan ook beter is doen we nog niet. We bekijken van alle modellen eerst de maximale fout.

Met voorspelling G was de grootste 2.85 m. Met het lineaire model reduceerde dit tot 2.50 m. Bij ons driedelige model is de grootste fout 2.28 m. Deze maximale fout is nog steeds groot, maar een verbetering van 60 cm is toch interessanter dan een verschil in de gemiddelde fout van 0.5 cm.

7 Conclusie

Afgelopen maanden hebben wij onderzoek gedaan naar de waterstanden in de Westerschelde. Eerst hebben wij een model gemaakt aan de hand van het getij, om het astronomische gedrag te kunnen verklaren. Voor de overgebleven fouten hebben wij onderzocht of er een model gemaakt kan worden met behulp van de wind. Wij konden wel een model maken, maar zagen ook dat er nog een andere factor meespeelt, die wij nog niet gevonden hebben.

Ons model van het getij bevat het gedrag van het water wat door de planeten veroorzaakt wordt, bijvoorbeeld eb en vloed en springtij en doortij. Zo hebben wij 14 frequenties gevonden die belangrijk zijn voor het astronomische gedrag. Er zijn uiteraard nog meer frequenties die invloed hebben op de waterstanden, maar omdat de sinus en cosinus met deze frequentie een amplitude hadden van minder dan 5 cm, hebben wij ervoor gekozen om deze frequenties niet mee te nemen. Dit omdat voor de scheepvaart 5 cm niet van groot belang is. Hiermee konden we een voorspelling voor de waterstand maken waarmee we gemiddeld 25 cm boven of onder de echte waterstand liggen. Eerst hebben wij geprobeerd om een model voor de wind te maken door aan te nemen dat er een lineair verband is tussen de waterverhoging of verlaging en de windsnelheid en windrichting. Dit model verbeterde het verschil tussen de voorspelling en de echte waterstand met maar 2.4 cm. De maximale fout in dit model bedraagt ook nog steeds 2.53 meter in plaats van 2.84 meter in het oude model. Dit sprak onze intuïtie tegen en wij dachten dat het beter moest kunnen. Daarom zijn we gaan kijken wat er aan de hand was op de punten waar onze voorspelling het slecht deed.

We zagen dat ongeveer 60% minder of gelijk aan 25 cm verschil opleverden van onze voorspelling en de echte waterstand. De overige 40% bevat verschillen rond de 1 meter, maar ook speciale gevallen waar het water ineens bijna 3 meter hoger staat dan voorspeld. Ons doel was om voor deze grote verschillen een verklaring te vinden. Daarom keken we op de dagen waarop onze voorspelling het slecht deed wat er aan de hand was met de wind. We konden zien, dat als het water veel hoger stond dan onze voorspelling dat de wind meestal uit noordwestelijke richting kwam. Als het water veel lager stond dan onze voorspelling kwam de wind meestal uit oostelijke richting. Dus namen we aan dat wind uit het noordwesten voor een verhoging van de waterstand zorgt en wind uit het oosten voor een verlaging van de waterstand.

We hebben ook gekeken wat er met de waterstanden gebeurt als de wind uit het zuiden komt, maar dit bleek nogal willekeurig verhoogt en verlaagd te worden. Ook de wind uit het noordwesten/oosten zorgde niet altijd voor een gelijke verhoging/verlaging. Hieruit hebben we geconcludeerd, dat we onze voorspelling aan kunnen passen voor wind uit noordwestelijke richting en oostelijke richting, maar dat er wel nog een andere factor of meerdere factoren meespelen, zodat er altijd een fout overblijft.

Het uiteindelijke model voor de voorspelling konden we dus op die manier opdelen in 3 deelmodellen, waarbij model 1 de waterstand voorspelt als er harde wind uit het noordwesten waait, model 2 als de wind hard uit het oosten komt en model 3 voor alle andere gevallen. Het verschil tussen onze voorspel-

ling en de echte waterstanden bedraagt na toepassing van dit model 23 cm. Dit is helaas geen grote verbetering ten opzichte van de eerdere voorspelling. Dat komt door dat we maar heel weinig punten verbeteren, omdat het in 40 jaar niet zo heel vaak voorkomt, dat het hard waait uit de richtingen noordwest en oost. Wel is het zo, dat de maximale fout verbeterd is. In de oude voorspelling, waar de wind nog niet in mee genomen was, was er een maximale fout van 2.84 meter. Deze konden wij met ons nieuwe model reduceren tot 2.28 meter.

We konden dus een voorspelling maken voor de waterstand in de Westerschelde, die afhankelijk is van de wind. Maar we hebben ook gezien dat er nog een of meer andere factoren meespelen, die nog verder onderzocht kunnen worden. Dit zullen we nu in de discussie bespreken.

8 Discussie

In de modellen die we in dit verslag hebben besproken, zitten nog wat onzekerheden. Er zijn bijvoorbeeld wat externe factoren die bij deze modellen van invloed zijn en niet in onze modellen zijn verwerkt. In dit hoofdstuk zullen we deze onzekerheden gaan bespreken.

Er kunnen meetfouten in de data zitten. Dit kan komen door de manier op die er vroeger het water gemeten werd. Vroeger werd de waterstand van een stok afgelezen, maar dat was nogal onnauwkeurig door de onregelmatige bewegingen van het water. Tegenwoordig worden de waterstanden op een andere manier gemeten. Deze is minder afhankelijk van de turbulentie in het water en geeft nauwkeurigere metingen.

Uit ons onderzoek is gebleken, dat de wind zeker invloed heeft op de waterstanden. Zo konden wij zeggen dat als het hard waait uit het noordwesten, het water vaak iets hoger staat dan de voorspelling ons liet zien waarin de wind niet werd meegenomen. Ook bleek dat wind uit het oosten het water altijd wat verlaagd ten opzichte van onze voorspelling zonder de wind.

De onzekerheid zit vooral in de wind uit het zuiden. Uit ons dataonderzoek konden wij geen duidelijke oorzaak vinden voor het verschil in de waterstanden. De ene keer bleek het water hoger te staan dan voorspeld, terwijl een andere keer het water lager stond dan voorspeld. Wat hier de oorzaak van is, is ons niet duidelijk geworden.

Een andere factor die misschien van belang kan zijn voor de fout die we maken in het algemeen, is de invloed van rivieren die aan de Westerschelde liggen. Zo zou een grote aanvoer van de rivier de Schelde de waterstand kunnen beïnvloeden. Door de geringe tijd die wij nog over hadden om deze invloed te gaan onderzoeken, is het ons nog niet gelukt om de juiste informatie te vinden. Voor diegenen die geïnteresseerd zijn in verder onderzoek naar de invloed van de wind op de waterstanden zouden hierop verder kunnen gaan. Met de benodigde informatie kunnen zij ons model aanpassen met de hoop dat er een verbetering optreedt.

9 Literatuur

Walle, B. van de, Seys, J (2002). *Het mysterie van het getij*. Grote Rede, 6. Vlaams Instituut voor de Zee

Haelters, J. *Extreme getijden: niet enkel astronomie!* Geraadpleegd op 26 februari 2013 via <http://www.mumm.ac.be/Downloads/News/getij.pdf>

Stoorvogel, A.A. Habets, L.C.G.J.M. *Rapport Tijdreeksanalyse Westerschelde*. Rapport in opdracht van RIKZ.

Storey, B. *Computing Fourier Series and Power Spectrum with MATLAB*. Geraadpleegd op 26 februari 2013 via <http://www2.warwick.ac.uk/fac/sci/physics/research/cfsa/people/sandrac/lectures/basicfouriermatlab.pdf>

Kramer, J. de. (2002). *Waterbeweging in de Westerschelde. Een literatuurstudie*. Rapport in opdracht van RIKZ.

10 Bijlage

10.1 Coëfficiënten modellen

Frequentie	Model G	
	A	B
1	187.18	-6.90
2	14.39	-48.22
3	18.07	-24.39
4	-8.78	-12.04
5	-9.33	-11.25
6	-1.30	-11.83
7	-6.43	-8.32
8	-8.88	2.17
9	-7.35	-2.21
10	-6.48	-6.31
11	3.03	6.04
12	-3.30	4.36
13	-4.79	-0.54
14	2.21	3.93

Frequentie	Model M_1	
	A	B
1	181.16	-1.46
2	17.09	-49.21
3	17.56	-23.61
4	-7.76	-10.65
5	-8.23	-12.28
6	-6.92	-11.58
7	-6.52	-6.01
8	-9.10	1.93
9	-9.36	1.10
10	-6.08	-7.10
11	2.52	2.66
12	-2.55	4.61
13	-4.43	-0.09
14	1.88	1.98

Frequentie	Model M_2	
	A	B
1	186.47	-10.90
2	14.02	-49.45
3	17.06	-24.52
4	-8.84	-11.52
5	-9.01	-12.25
6	-1.51	-12.11
7	-6.21	-7.97
8	-8.97	2.85
9	-7.97	-2.41
10	-6.46	-5.50
11	3.19	3.83
12	-2.59	4.86
13	-4.54	-0.23
14	2.07	4.09

Frequentie	Model M_3	
	A	B
1	187.45	-6.95
2	14.24	-48.82
3	18.11	-24.56
4	-8.81	-12.06
5	-9.50	-11.19
6	-1.01	-11.86
7	-6.44	-8.38
8	-8.86	2.16
9	-7.24	-2.31
10	-6.47	-6.33
11	3.06	6.22
12	-3.36	4.36
13	-4.80	-0.57
14	2.20	4.00