



Het spelmatig bevorderen van de begripsontwikkeling bij leerlingen

Onderzoeksverslag ten behoeve van het vak
"Onderzoek van Onderwijs"



In Opdracht van:	Universiteit Twente, Elan
Vak:	Onderzoek van onderwijs
Coördinator:	Nellie Verhoef
Plaats en datum:	Hengelo, 18 maart 2008
Auteur:	Renske Westerhof
Student nummer:	0009229
Email:	r.westerhof@student.utwente.nl

Samenvatting

Dit onderzoek is uitgevoerd naar aanleiding van de discussies die gaande zijn tussen het middelbaar onderwijs en het beroepsonderwijs. De discussies gaan over de overgang van middelbaar naar beroepsonderwijs. De leerlingen missen soms enige kennis om zonder problemen door te stromen naar het beroepsonderwijs. Om de overgangsproblematiek te verminderen wordt er onderzoek gedaan naar de begripsontwikkeling van leerlingen en hoe je dat zou kunnen stimuleren en bevorderen.

In dit onderzoek is gekeken naar het stimuleren van begripsontwikkeling van de leerlingen door de theorie spelenderwijs aan te bieden. Zo zijn de leerlingen op een leuke en relaxte manier bezig met wiskunde, hiermee wordt getracht een hoger begripsniveau te bereiken. De onderzoeksvraag van dit onderzoek is dan ook:

Heeft het geven van extra lessen in spelvorm effect op de begripsontwikkeling van de leerlingen uit 4 vwo? Zo ja, wat is de voor- of achteruitgang in termen van begripsniveaus in schematisch denken.

Door onder andere Skemp, Tall en Hiele is er onderzoek gedaan naar de begripsontwikkeling bij de leerlingen. Om een kwantificatie te geven in de begripsontwikkeling zijn een aantal begripsniveaus omschreven, in dit onderzoek is er gebruik gemaakt van de omschrijvingen in termen van schematisch denken.

Een zestal willekeurige leerlingen (de testgroep) uit 4 vwo van het Twents Carmel College te Oldenzaal hebben de theorie in vier lessen spelenderwijs gevolgd. De testgroep is vergeleken met een zestal willekeurige leerlingen (de controlegroep), tevens uit 4 vwo, die geen extra lessen hebben gevolgd. De vergelijking is gemaakt aan de hand van acht proefwerkopgaven die alle leerlingen hebben gemaakt. De antwoorden van de leerlingen zijn ingedeeld in vier begripsniveaus van schematisch denken.

Uit de verzameling van alle begripsniveaus per leerling, aan de hand van de acht proefwerkopgaven, is gehaald dat de leerlingen uit de testgroep een relatief kleine daling in denkniveau hebben gehaald. De leerlingen uit de controlegroep hebben een groter negatief resultaat geboekt ten opzichte van de pre-test. Uit deze resultaten is geconcludeerd dat de lessen in spelvorm een positief effect hebben op de begripsontwikkeling van de leerlingen.

Er moeten echter een aantal kanttekeningen bij de conclusie worden gemaakt. De grootte van de testgroep en de controlegroep is klein. Hierdoor wordt het beeld vertekend en is het geen juiste weerspiegeling van de bevolking. Het zou verstandig zijn om de lessen goed gestructureerd te laten verlopen, zodat de leerlingen tijd krijgen om na te denken en elkaar te kunnen helpen. Hierdoor leren de leerlingen meer van elkaar. Als laatste kunnen de opgaven van de tests ook zelf opgesteld worden en dan kan er meer rekening worden gehouden met de verschillende begripsniveaus. Deze kanttekeningen worden gezien als aanbevelingen om het onderzoek te verbeteren.

Voorwoord / Dankwoord

Bij het volgen van het vak Onderzoek van Onderwijs van de eerstegraads lerarenopleiding wiskunde aan de Universiteit Twente te Enschede hoort een onderzoek waarbij het onderwerp zelf gekozen is. Als onderwerp van dit verslag is gekozen voor de begripsontwikkeling van de leerlingen tijdens de lessen. De begripsontwikkeling bij leerlingen is in deze tijd een belangrijk en veel besproken onderwerp in het middelbaar onderwijs. Dit omdat de aansluiting van het middelbaar onderwijs naar het beroepsonderwijs niet goed op elkaar is afgestemd. De resultaten zijn in dit onderzoeksverslag beschreven.

Het onderzoek is uitgevoerd met een aantal leerlingen uit meerdere 4 vwo klassen met wiskunde B op het Twents Carmel College aan de Lyceumlaan te Oldenzaal. De leerlingen hadden les van de heer Roelofs en van mij. De lessen hebben plaatsgevonden in mei en juni 2006.

Hierbij wil ik dan ook de heer Roelofs en alle leerlingen betrokken bij dit onderzoek bedanken. Deze mensen hebben bijgedragen aan een succesvol afgerond onderzoek.

Ook wil ik mevrouw Verhoef, mijn begeleidster van de UT, bedanken voor de begeleiding tijdens mijn onderzoek. Ze heeft mijn verslag tussentijds beoordeeld en van verbeterpunten voorzien. Ook waren haar tips zeer welkom om er uiteindelijk een afgerond geheel van te maken.

Renske Westerhof
Hengelo, maart 2008

Inhoudsopgave

1	Inleiding	5
1.1	Aanleiding en context van het onderzoek	5
1.2	Doelstelling	5
1.3	Leeswijzer	6
2	Begripsvorming en niveautheorie	8
2.1	Hoe werkt het geheugen	8
2.2	Diverse niveaus van begrijpen volgens Skemp	11
2.3	Diverse niveaus van begrijpen volgens Tall	14
2.4	Diverse niveaus van begrijpen volgens Hiele	16
2.5	Vergelijking tussen Skemp, Tall en Hiele	17
2.6	Rol van de docent	17
3	Onderzoeksmethode	20
3.1	Deelnemers	20
3.2	Onderling verband docent - leerling - materiaal	20
3.3	Materiaal	21
3.4	Onderzoeksproces	23
4	Dataverzameling	25
5	Data analyse	27
5.1	Vergelijking van testgroep en controlegroep	27
5.2	Meisjes ten opzichte van jongens	27
5.3	Gemiddelde begripsniveau per opgave	28
6	Resultaten	29
7	Conclusie	30
7.1	Aanbevelingen	30
8	Discussie	32
8.1	Definities van de begripsniveaus	32
8.2	Aantal deelnemers	32
8.3	Indeling en materiaal van de extra lessen	32
8.4	Opgaven van de pre- en post-test	33
8.5	Indeling begripsniveaus	33
9	Literatuur	34
10	Bijlagen	36



- Bijlage 1: Materiaal voor de extra lessen
Bijlage 2: Proefwerk van de pre-test
Bijlage 3: Proefwerk van de post-test
Bijlage 4: Criteria voor diverse niveaus
Bijlage 5: Antwoorden van leerlingen op de opgaven van pre-test
Bijlage 6: Antwoorden van leerlingen op de opgaven van post-test
Bijlage 7: Beoordeling deelopgaven en verantwoording

1 Inleiding

1.1 Aanleiding en context van het onderzoek

Wiskunde is een veel gegeven vak op de middelbare school. In elk profiel, onderwijsrichting, zit wel wiskunde, maar niet elk profiel heeft evenveel wiskunde of hebben de leerlingen niet even lang les in wiskunde. In de maatschappij heeft iedereen wel enige kennis van wiskunde nodig, maar de laatste tijd hoor je steeds vaker dat het niveau van de huidige leerlingen verder achteruit gaat. Het niveau van de leerlingen op het wiskundige vlak is niet altijd te vergelijken met de cijfers van de leerlingen. Leerlingen kunnen namelijk trucjes, ezelsbruggen of andere handige hulpmiddelen leren om een probleem op te lossen, zonder het echt helemaal te begrijpen. Maar dit wordt pas geconstateerd als de opgaven net wat anders zijn geformuleerd dan de leerlingen vanuit de leerboeken gewend zijn. De leerlingen moeten de theorie dus begrijpen om de opgaven op te kunnen lossen op een hoger begripsniveau. Vooral de aansluitende scholen, hbo of universiteit, ondervinden hier het nadeel van. Het missen van een hoger kennisniveau kan voor zowel de leerlingen als de scholen grote problemen opleveren. De leerlingen kunnen namelijk niet meer "meekomen" met de lessen en raken dus nog verder achter. De scholen hebben steeds meer te maken met leerlingen die een achterstand hebben. Om dit probleem aan te pakken is er onderzoek nodig.

De leerlingen zitten tegenwoordig in grote klassen en de lesstof gaat er in een snel tempo doorheen. De leerlingen krijgen uitleg en dan is het hun taak om zelf te oefenen met de opgaven die in het boek staan. Tijd voor het bespreken van de opgaven is er bijna niet en er is vaak te weinig aandacht om de leerlingen te begeleiden die moeite hebben met wiskunde. Zouden er geen andere methoden zijn om de leerlingen die moeite met wiskunde hebben te helpen in hun voortgang?

Daarom is onderzoek naar de begripsontwikkelingen van de leerlingen belangrijk. Voor dit onderzoek is gekeken naar de begripsbevordering van leerlingen uit 4 vwo met wiskunde B. De leerlingen hebben les in kansrekening uit Reichard, et al. (2004, vwo 1 en vwo 2).

1.2 Doelstelling

Niet alleen de leerlingen die moeite hebben met wiskunde, maar ook de leerlingen die er plezier in hebben, zouden graag op een simpele manier wiskunde leren en hierdoor een hoger niveau van begripsontwikkeling bereiken. Het bereiken van een hoger begripsniveau geeft de leerling een bevredigend gevoel (Skemp, 1987). Door het bereiken van een hoger begripsniveau wordt tevens de kloof met de vervolgopleiding verkleind. Een andere lesmethode zou een oplossing kunnen zijn voor het bereiken van een hoger begripsniveau.

Theorie die spelenderwijs wordt aangeboden is misschien makkelijker op te slaan dan "rechttoe rechtaan regels". Een reden is dat de sfeer bij een overdracht in spelvorm meer ontspannen is en de leerling de regels op een relaxte manier tot zich

kan nemen. Bij de overdracht van theorie in de reguliere lesuren is vaak sprake van tijdsdruk. De docent kan alle theorie uit de leerboeken niet volledig behandelen in de lesuren. Hierdoor krijgen de leerlingen niet de mogelijkheid om de lesstof goed tot zich te nemen en staan dan onder druk om de theorie snel te begrijpen, zodat de docent verder kan met zijn lesstof.

In dit onderzoek is aan zes leerlingen uit 4 vwo (de testgroep) een deel van de behandelde stof spelenderwijs gegeven in een aantal extra lessen. Met behulp van de vergelijkbare proefwerken die ze voor de extra lessen (pre-test) en na de extra lessen (post-test) gemaakt hebben, is er gekeken of de extra lessen een positieve invloed hebben op hun begripsontwikkeling. De antwoorden van de leerlingen op de opgaven van de proefwerken (pre- en post-test) zijn ingedeeld in begripsniveaus, zoals beschreven in paragraaf 3.3, op basis van de vier niveaus van dhr. Skemp (1987) en dhr. Tall (1979). In een begripsniveau wordt een niveau van denken vastgelegd. In dit niveau wordt tevens vastgelegd in hoeverre een leerling iets begrijpt. Dit kan zijn van 'niet begrijpen' tot 'het begrijpen door logische redeneren'. Hiermee ontstaat de volgende onderzoeksvraag:

Heeft het geven van extra lessen in spelvorm effect op de begripsontwikkeling van de leerlingen uit 4 vwo? Zo ja, wat is de voor- of achteruitgang in termen van begripsniveaus in schematisch denken.

Het effect op de begripsontwikkeling is vastgesteld door criteria aan de hand van de verschillende begripsniveaus van Skemp en Tall die in paragraaf 2.2 en 2.3 zijn beschreven. Het begripsniveau van de leerlingen, voordat ze deelnemen aan de extra lessen, is vastgesteld door middel van de opgaven uit het proefwerk die ze gemaakt hebben. De antwoorden van de leerlingen zijn ingeschaald aan de hand van de beschreven begripsniveaus. Tevens zal het begripsniveau van de leerlingen na het volgen van de extra lessen op dezelfde wijze worden vastgesteld. Deze twee niveaus zullen worden vergeleken met de twee niveaus van de zes leerlingen uit de controlegroep die de lessen niet hebben gevolgd, maar dezelfde proefwerkopgaven hebben gemaakt. Hiermee kan er vastgesteld worden of de leerlingen die de extra lessen hebben gevolgd een andere begripsontwikkeling hebben doorgemaakt en of deze ontwikkeling een positief of negatief effect heeft gehad op de begripsontwikkeling.

1.3 Leeswijzer

De theorie over het vormen van begrippen en de diverse begripsniveaus is opgenomen in hoofdstuk 2. Hierin is in paragraaf 2.6 de rol van de docent belicht en zijn de verschillende niveaus van begrijpen beschreven in paragraaf 2.2-2.4. Hoofdstuk 3 bevat onder andere de deelnemers en het onderzoeksproces. In paragraaf 3.3 zijn de extra lessen beschreven. De verzameling van alle data, zoals de niveaubepalingen van de antwoorden van de leerlingen, zijn opgenomen in hoofdstuk 4. De analyse en resultaten van deze dataverzameling zijn opgenomen in respectievelijk hoofdstuk 5 en 6. Hoofdstuk 7 bevat de conclusie van de onderzoeksvraag. Verder is in dat hoofdstuk ook de aanbevelingen voor verder onderzoek te vinden. In Hoofdstuk 8 is de discussie van het onderzoek te vinden,

hierin worden de keuzes tijdens het onderzoek besproken. Hoofdstuk 9 bevat de referenties en literatuurverwijzingen. De bijlagen zijn in hoofdstuk 10 opgenomen.

2 Begripsvorming en niveautheorie

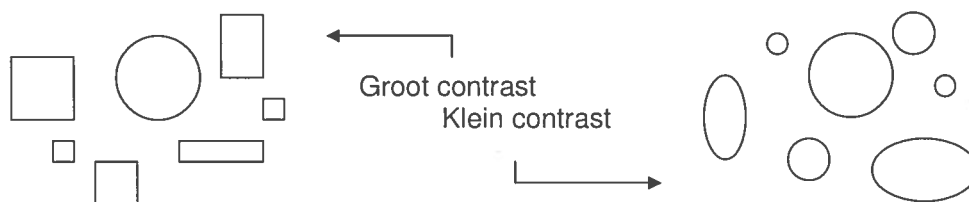
Dit hoofdstuk beschrijft de ontwikkeling van een begrip tot een denkstructuur, schema, aan de hand van schematisch leren denken. Ook wordt er ingegaan op welke wijze de docent de opbouw van de juiste structuren kan bevorderen en op welke wijze dit alles samenhangt met het leren van het vak wiskunde.

2.1 Hoe werkt het geheugen

Vormen van een begrip

Elke keer als een persoon een nieuw voorwerp ziet, een tastbaar object, gebeuren er een heleboel dingen in het brein. Zelden zullen voorwerpen precies hetzelfde zijn, men ziet ze vanuit verschillende oogpunten of vanaf een andere afstand. Maar uit alle verschillende gegevens worden elke keer de overeenkomsten gehaald, dit heet abstraheren. Door de gemeenschappelijke kenmerken samen te voegen en vast te leggen wordt het voorwerp geclassificeerd, dit is een abstractie. Iedere volgende ervaring met dezelfde kenmerken roept dan weer die abstractie op. Hierdoor is het bekend om welk voorwerp het gaat. Een belangrijke classificatie van de abstractie is de functie van het voorwerp. Omdat als de abstractie is gelegd met hetgeen wat al bekend is, is ook bekend hoe het nieuwe voorwerp moet worden gebruikt. Het nadeel van classificeren van alle voorwerpen is, wanneer een voorwerp eenmaal geclassificeerd is, men minder open staat voor andere classificaties. Bijvoorbeeld een auto kan functioneren als een veilig vervoersmiddel, maar het kan ook gezien worden als een moordvoertuig. De overgang van de ene classificatie naar de andere is niet vanzelfsprekend voor iedereen. Voorwerpen kunnen dus op diverse manieren functioneren of worden gebruikt. Ook is het mogelijk om classificaties te wijzigen, als blijkt dat het voorwerp anders kan worden gebruikt. Als een persoon deze flexibiliteit in het classificeren ontdekt heeft, kan dit zorgdragen voor een groter aanpassingsvermogen.

Om verwarring tussen abstraheren (leggen van overeenkomsten) en een abstractie (het vast leggen van de overeenkomsten) te vermijden wordt een abstractie ook wel een begrip (Skemp, 2006) genoemd. Voor het ontstaan van een begrip zijn er dus ervaringen nodig die overeenkomsten tonen. Als er eenmaal een begrip is ontstaan kunnen voorbeelden worden genoemd die al gezien zijn of die aan de hand van de kenmerken uit de classificatie kan worden omschreven. Het is logisch dat van alledaagse dingen makkelijker een begrip kan worden gevormd, maar dat is niet de enige invloed. De omgeving waar een voorwerp naar voren komt is ook belangrijk. Een voorwerp valt meer op als het tussen andere voorwerpen staat, die wel allemaal dezelfde overeenkomsten vertonen (groot contrast). Bijvoorbeeld een cirkel valt meer op als het tussen allemaal vierkanten staat, dan dat het tussen andere cirkels staat. Het onderscheidende voorwerp steekt dus af bij zijn omgeving.

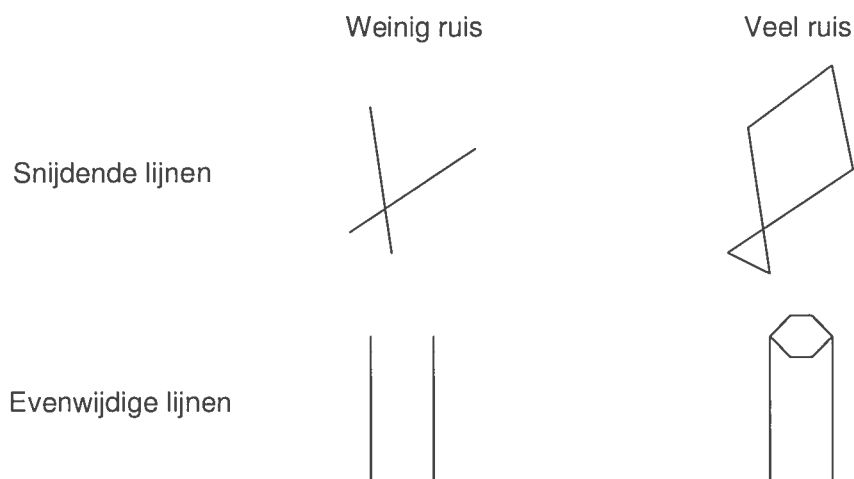


Als uit een aantal voorbeelden een begrip is geabstraheerd, dan is dit begrip van een hogere orde. Een abstracter begrip is dus verder verwijderd van de ervaring. Over het algemeen is een begrip van een hogere orde dan men al bezit, niet over te dragen door middel van een definitie, maar alleen door geschikte voorbeelden te verzamelen. Het overdragen van lagere orde begrippen kan wel met een definitie. (Skemp, 2006)

Een begrip kan op twee manieren worden opgeroepen of tot functioneren worden gebracht.

- Ten eerste door er voorbeelden van te ontdekken. Het voorbeeld moet namelijk worden geclassificeerd onder een begrip.
- Ten tweede door de naam of het symbool van het begrip te horen, te lezen of er op een andere manier bewust van worden gemaakt.

Als er gegevens die niet relevant zijn voor het over te dragen begrip aanwezig zijn, noemen we dat ruis. Begrippen met ruis zijn lastig over te dragen, maar als er eenmaal een begrip gevormd is, dan kunnen er ook voorbeelden worden gevonden met ruis, die daarvoor niet zichtbaar waren.



Het vormen van een wiskundig begrip

Het denken in begrippen is waardevol, omdat de mens zijn aandacht beperkt kan verdelen. Bij het denken in begrippen van hogere orde, komt er meer informatie tot ons. Wiskunde is abstract en dus van een hogere orde, hierin ligt de moeilijkheidsgraad om wiskunde te kunnen begrijpen. Ook het feit dat opeenvolgende generaties, elk op hun beurt uit begrippen van vroegere generaties, nieuwe begrippen vormen, maakt wiskunde moeilijk. Daarom kan wiskunde ook niet rechtstreeks uit de dagelijkse omgeving worden geleerd, maar alleen met behulp van andere wiskundigen (Skemp, 2006). Om deze reden is men afhankelijk van een docent.

De twee grondbeginselen van het wiskunde onderricht zijn (Skemp, 2006):

- Begrippen van een hogere orde dan die iemand al bezit, kunnen niet worden overgedragen door een definitie, maar alleen door voldoende en toepasbare voorbeelden.

- In de wiskunde zijn deze voorbeelden ook vaak weer begrippen en moeten deze begrippen eerst bij de leerling gevormd worden.

In de praktijk blijkt dat het eerste grondbeginsel niet in acht wordt genomen. Vooral in leerboeken worden nieuwe begrippen door middel van een definitie uitgelegd. Bekwame docenten ondersteunen intuïtief een definitie met voorbeelden. Echter is een juiste verzameling voorbeelden lastig samen te stellen. De voorbeelden moeten namelijk alleen die eigenschap gemeenschappelijk hebben waaruit het begrip moet worden samengesteld.

Het tweede grondbeginsel lijkt vanzelfsprekend. Het betekent dat voordat een begrip wordt overgedragen, na moet worden gegaan of begrippen van een lagere orde, die ten grondslag liggen, wel aanwezig zijn. Dit moet doorgaan tot de primaire begrippen of begrippen die uit ervaring als 'gegeven' worden beschouwd. Dit heeft tot gevolg dat als een begrip op een bepaald niveau niet begrepen wordt, de begrippen in bovenliggende niveaus niet kunnen worden overgedragen.

Hoewel bij het leren van wiskunde alle begrippen opnieuw in ons hoofd moeten worden gereorganiseerd, kan dit alleen maar door gebruik te maken van begrippen die vanuit vroeger bekend zijn. Dit maakt het leren van wiskunde afhankelijk van het goed onderrichten, zeker in de beginfase (Skemp, 2006).

Structuur van de begrippen

In het voorgaande is het vormen van begrippen besproken en op welke wijze deze over kunnen worden gebracht op een ander persoon. Al deze begrippen moeten in een bepaalde structuur van andere begrippen worden opgeslagen. Elk begrip is namelijk afgeleid uit een ander begrip en leidt zelf weer tot vorming van nieuwe begrippen. Er bestaat een soort van hiërarchie tussen de verschillende begrippen. Begrippen kunnen ook worden onderverdeeld in een andere hiërarchie doordat het bijvoorbeeld verschillende functies heeft (Skemp, 2006).

Tussen begrippen bestaan relaties (wat zelf weer een nieuw begrip vormt) als twee begrippen een bepaald verband hebben, ofwel als paren van begrippen iets gemeen hebben. Bijvoorbeeld "Rotterdam, Holland" of "Bristol, Engeland". De relatie tussen deze twee begrippen is, 'is een havenstad in'. De begrippen worden dus niet alleen onderverdeeld in een hiërarchische structuur. Er bestaat ook een structuur van individuele relaties en klassen van relaties. Wiskundige relaties zijn onder andere orderrelaties (groter dan) of equivalentierelaties (even groot als).

Er kan ook een 'transformatie' op een begrip los worden gelaten, ofwel algemener een 'functie'. Als twee functies gecombineerd worden, ontstaat er zelfs een nieuwe functie.

Bovenstaand voorbeeld geeft inzicht in welke verbanden er tussen begrippen kunnen bestaan en de structuren die daaruit voortkomen. De studie naar de opbouw van de structuren en het functioneren is een belangrijk deel van het vak wiskunde. De algemene psychologische term voor een denkstructuur is een 'schema' en een schema heeft twee hoofdfuncties. Het integreert bestaande kennis en het is een handig hulpmiddel bij het opdoen van nieuwe kennis. Hoe meer schema's men heeft, hoe beter men is opgewassen tegen onverwachte situaties (Skemp, 2006).

Schema's die men in de beginfase opbouwt zijn beslissend voor het gemak of de moeite waarmee nieuwe onderwerpen begrepen worden. Als men schematisch leert, ofwel intelligent leert, is dat niet alleen efficiënter, maar ook gelijk een handig hulpmiddel voor toekomstige opdrachten. Als het hulpmiddel gebruikt wordt, voegt het de inhoud van het schema samen. Dit geeft schematisch denken een voordeel boven uit het hoofd leren (Skemp, 2006). Maar schematisch leren heeft ook nadelen. Ten eerste kost het meer tijd om schematisch denken te leren. Het tweede nadeel is ingrijpender, als de ervaring niet binnen een schema past wordt het niet geleerd of maar heel tijdelijk. Schema's die eerst van belang zijn geweest kunnen later gaan tegen werken. Als een leerling dan in een situatie komt waarin iets niet in een schema past, wordt de stabiliteit van dat schema een belemmering voor het aanpassingsvermogen. Als bijvoorbeeld men weet dat je alleen van positieve getallen een wortel kan trekken, maar nu staat er toch een negatief getal. Het schema moet dus aangepast worden, in plaats van dat het nieuwe begrip in het schema wordt geassimileerd. Dit accommoderen van een schema kan moeilijk zijn en kan zelfs leiden tot een onbevredigend gevoel bij de leerlingen.

Nu een idee is gevormd over hoe de denkstructuren in elkaar zitten, kan ook iets worden gezegd wat er bedoeld wordt met begrijpen. *Iets begrijpen betekent dat het geassimileerd wordt in een passend schema* (Skemp, 2006). Dit verklaart de subjectieve aard van begrijpen, want het is niet alles of niets. Een leerling kan denken het te begrijpen, maar assimileren in een verkeerd schema.

Door de centrale plaats die het schema inneemt kan het opbouwen van verkeerde schema's betekenen dat het assimileren van begrippen moeilijker of zelfs onmogelijk wordt. In het begin stadium is het nog moeilijk te onderscheiden of leerlingen een truc hebben geleerd om het juiste antwoord te krijgen of dat ze het werkelijk begrijpen. Dit kan alleen getest worden door in hoeverre de leerling zich kan aanpassen aan nieuwe situaties. Daarom zijn 'geschikte' schema's belangrijk, deze schema's houden namelijk al rekening met het leren op lange termijn (Skemp, 2006).

2.2 Diverse niveaus van begrijpen volgens Skemp

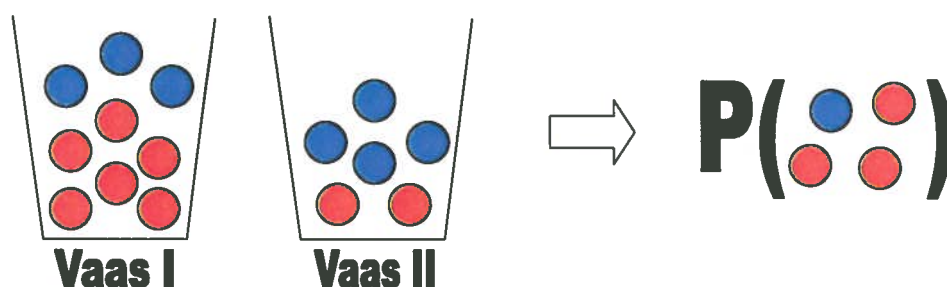
In paragraaf 2.1 is de definitie van begrijpen beschreven. Echter is de definitie niet volledig. Er zijn namelijk meerdere niveaus van begrijpen. Volgens Skemp zijn dit de volgende niveaus: instrumentaal begrijpen, relationeel begrijpen en logisch begrijpen (Skemp, 1987).

- Instrumentaal begrijpen is het kunnen toepassen van een geschikte regel om een probleem op te lossen, zonder te weten hoe deze regel werkt.
- Relationeel begrijpen is het kunnen afleiden van speciale regels of procedures uit meer algemenere wiskundige relaties.
- Logisch begrijpen is het kunnen linken van wiskundige symboliek en notaties aan relevante wiskundige ideeën en het combineren van deze ideeën in een keten van logische redenering.

Hierna zal elk niveau nader worden toegelicht en zal een mogelijk antwoord, van voorbeeld 1, dat bij desbetreffende niveau hoort worden gegeven. Het voorbeeld waar bij elk niveau een antwoord op wordt gegeven is als volgt.

Voorbeeld 1:

Er zijn twee vazen, met in de ene vaas 6 rode en 3 blauwe knikkers. In de andere vaas zitten 2 rode en 4 blauwe knikkers. Uit elke vaas worden 2 knikkers gepakt. Wat is de kans op 3 rode knikkers en 1 blauwe knikker.



Instrumentaal begrijpen

De manier om instrumentaal begrijpen te leren, bestaat uit het vergroten van het aantal vaste plannen om bij een gegeven startpunt het gewenste eindpunt te kunnen bereiken. Het plan vertelt de leerling wat te doen bij elke keuzemogelijkheid om tot het juiste antwoord te komen. De leerlingen leren dus regels. Deze regels zijn niet geheel op zichzelf staand, ze kunnen gecombineerd worden en in opeenvolging worden toegepast. Het doel van de leerling is het juiste antwoord te geven op de probleemstelling die de docent (verbaal of schriftelijk) heeft gesteld. Bij een juist antwoord zal de docent goedkeuring geven. Het lange termijn doel is het krijgen van goedkeuring van de examinerator of een toekomstige werkgever. Bij instrumentaal begrijpen zullen de leerlingen de opgave herkennen als één uit een speciale klasse, waarvan ze al de regel kennen.

De leerlingen die op dit niveau zijn, zullen in voorbeeld 1 het vaasmodel herkennen en hiermee proberen op een antwoord te komen. Een mogelijk antwoord zou in dit niveau het volgende kunnen zijn:

$$\frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{7}{1}}{\binom{15}{4}}$$

Deze leerling kent wel de rekenregel van het 'trekken' uit één vaasmodel, maar weet niet hoe deze regel moet worden aangepast naar twee vazen. Daarom worden de twee vazen maar in het totaal beschouwd.

Relationeel begrijpen

Het relationeel begrijpen bestaat uit het opbouwen van een begrijpelijke structuur (schema), waarmee de leerling een aantal verschillende plannen kunnen produceren om van het gegeven startpunt naar het gewenste eindpunt te komen. Het doel is niet het geven van een juist antwoord, maar het construeren van de juiste schema's. Een ander doel is het afleiden van speciale methoden of regels voor een specifiek probleem en het verbeteren van schema's zodat de schema's effectiever gebruikt kunnen worden. Bij relationeel begrijpen zullen de leerlingen de opgave proberen om te zetten in een schema. Als er een "kant en klare" oplossing is, geeft dat een snel

antwoord. Als het niet mogelijk is om het antwoord gelijk te vinden, zullen de leerlingen een schema moeten wijzigen of meerdere schema's gaan combineren.

Een mogelijk antwoord op voorbeeld 1 zou als volgt kunnen zijn:

$$\frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{9}{2}} \cdot \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{4}{0}}{\binom{6}{2}} + \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{3}{0}}{\binom{9}{2}} \cdot \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{6}{2}}$$

De leerling kan de rekenregels van het vaasmodel combineren met de productregel. Door deze regel is ook duidelijk voor de leerling dat de blauwe knikker zowel uit vaas 1 als vaas 2 kan worden getrokken, dit resulteert in de somregel.

Logisch begrijpen

Logisch begrijpen is dicht gerelateerd aan het verschil tussen jezelf overtuigen (dit is relationeel begrijpen) en het overtuigen van andere mensen. Bij logisch begrijpen moet de leerling bewijzen dat de oplossing volgt uit logische noodzaak. Het bewijzen kan door middel van goed gekozen axioma's en regels. Het doel is om er zeker van te zijn dat de opgebouwde schema's en de gevonden oplossing die is bedacht betrouwbaar en juist is. De methodes, die worden gebruikt, zijn analyses. De constructie van een keten met logische redeneraties noemen we bewijzen.

De leerling in dit niveau zal het antwoord willen motiveren, dus een mogelijk antwoord op voorbeeld 1 kan bijvoorbeeld als volgt zijn:

$$P(3 \text{ rood en } 1 \text{ blauw}) = P(3 \text{ R en } 1 \text{ B}) =$$

$$P(1 \text{ R en } 1 \text{ B uit vaas 1 EN } 2 \text{ R uit vaas 2 OF } 2 \text{ R uit vaas 1 EN } 1 \text{ R en } 1 \text{ B uit vaas 2}) =$$

$$P(1 \text{ R en } 1 \text{ B uit vaas 1}) \cdot P(2 \text{ R uit vaas 2}) + P(2 \text{ R uit vaas 1}) \cdot P(1 \text{ R en } 1 \text{ B uit vaas 2}) =$$

$$\frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{9}{2}} \cdot \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{4}{0}}{\binom{6}{2}} + \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{3}{0}}{\binom{9}{2}} \cdot \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{6}{2}}$$

Deze leerling weet de juiste regels te combineren en met de correcte notatie. Op deze wijze is het antwoord zeer overtuigend.

Voordelen van instrumentaal, relationeel en logisch begrijpen

Nu de drie niveaus van begrijpen zijn beschreven, zullen de voordelen en nadelen op een rijtje worden gezet. Instrumentaal begrijpen is namelijk niet beter of slechter dan relationeel begrijpen. Beide manieren van begrijpen kent zijn voordelen, deze zijn hieronder elk toegelicht (Skemp 1987).

De drie belangrijkste voordelen van instrumentaal begrijpen zijn:

- De instrumentale wiskunde is een stuk makkelijker te begrijpen. Als er een pagina met goede antwoorden wordt gevraagd, kan instrumenteel begrijpen dit sneller en makkelijker bieden;
- De beloningen zijn meer direct en eerder duidelijk. Het gevoel van succes, die de leerlingen krijgen, door het geven van de juiste antwoorden moet niet worden onderschat;

- Bij instrumentaal begrijpen is minder kennis bij betrokken, hierdoor kan men de juiste antwoorden makkelijker en betrouwbaar geven. Iemand die wel relationeel kan denken zal om deze reden ook vaak instrumentaal denken.

De vier belangrijkste voordelen van relationeel begrijpen zijn:

- Door relationeel begrijpen kan de leerling zijn schema's beter aanpassen aan de nieuwe opdracht. De leerlingen weten niet alleen hoe de methode werkt, maar ook waarom de methode zo werkt;
- Relationeel begrijpen is makkelijker te onthouden, omdat het een deel van het geheel is. Er worden dus niet alleen de "aparte" regels geleerd, maar ook het waarom en hoe ze gekoppeld zijn aan het geheel. Deze structuur is langer houdbaar en dus makkelijker te onthouden. Tevens is het beter toepasbaar in meer problemen;
- Relationele kennis kan een effectief doel op zichzelf zijn, de behoefte van externe beloning wordt minder;
- Leerlingen zijn nieuwsgieriger naar meer kennis. Als het namelijk voldoening geeft om iets te begrijpen zullen de leerlingen sneller geneigd zijn om naar nieuw materiaal te zoeken en nieuwe gebieden te ontdekken.

Logisch begrijpen heeft dezelfde voordelen als relationeel begrijpen.

2.3 Diverse niveaus van begrijpen volgens Tall

David Tall heeft tevens artikelen geschreven over het begrijpen van wiskunde. David Tall benoemt, net zoals Skemp, ook de niveaus van relationeel begrijpen en instrumentaal begrijpen. Hiernaast benoemt Tall het intuïtief begrijpen en het niet begrijpen. Hieronder zijn de termen van Tall beschreven.

Relationeel begrijpen

David Tall verstaat onder deze categorie het begrijpen dat voortkomt uit het onderzoek naar een samenhangend patroon van het universum (Tall, 1979). Bijvoorbeeld als je een kind vraagt "wat is zeven plus zeven" en het kind antwoordt "14, omdat dit twee minder is dan 16". Hiermee ziet dit kind een patroon in "acht plus acht" en "zeven plus zeven".

Instrumentaal begrijpen

Instrumentaal begrijpen kan simpelweg een opgave zijn vanuit het geheugen, niet meer of minder (Tall, 1979). Het kan worden gekarakteriseerd door middel van verschillende afdelingen met ideeën, waarbij de leerling het niet nodig vindt om een overkoepelend patroon te maken voor zichzelf. De gelimiteerde systemen bieden namelijk de voorkeur.

Het relationeel en instrumentaal begrijpen komen in grote lijnen overeen met de ideeën van Skemp. Bij relationeel begrijpen volgens Skemp moet de leerling ook een structuur weten te vinden, om van het beginpunt naar het eindpunt te komen. Instrumentaal begrijpen is volgens Skemp het leren van een vast patroon om van het beginpunt tot het eindpunt te komen. Volgens Tall ontstaat het verschil tussen deze niveaus van begrijpen vaak door de houding van de persoon.

Intuïtief begrijpen

Als er schema's voor handen zijn, maar er is echter nog geen passend schema beschikbaar, kan de persoon wel een link zien met een schema. Dit is intuïtief begrijpen (Tall, 1979). Een belangrijke onderscheiding van intuïtief begrijpen is dat de desbetreffende persoon zijn schema nog niet heeft gereflecteerd. Daardoor heeft de persoon nog niet nagedacht over hoe hij er over denkt.

Het intuïtieve begrijpen kan niet worden onderscheiden van het instrumentale begrijpen, als er alleen een antwoord op papier staat. Hiervoor is het denkpatroon van de leerling nodig. Uit het denkpatroon is af te leiden welke stappen een leerling heeft gemaakt om tot een antwoord te komen. Hierbij wordt ook duidelijk of het een "aha" moment heeft gehad (intuïtief begrijpen).

Niet begrijpen

Het niet begrijpen is meer dan alleen de afwezigheid van begrijpen. Bij niet begrijpen kunnen twee situaties van toepassing zijn.

- Ten eerste zijn de regels of schema's, die nodig zijn voor een opgave, nog niet gevormd. Er kan dus niet geassimileerd worden.
- Ten tweede kan de leerling de opgave koppelen aan verkeerde schema's en een totaal onjuist antwoord geven (Tall, 1979).

Voortbordurend op voorbeeld 1 dat in paragraaf 2.2 is gegeven zou een mogelijk antwoord dus bijvoorbeeld zijn:

$$\left(\frac{8}{15}\right)^3 \cdot \frac{7}{15} = \frac{3584}{50625}$$

De leerling weet niet hoe hij de opgave aan moet pakken en behandelt deze opgave alsof het "trekken" van elke knikker een gelijke kans heeft. De leerling kent geen rekenregels van het vaasmodel, waarbij het in deze opgave om draait. De leerling koppelt de opgave aan een verkeerd schema.

In een later stadium van verschillende onderzoeken, 2004, beschrijft Tall de drie type werelden waarin de wiskundige kennisontwikkeling naar voren komt. Deze werelden hebben een grote correlatie met de niveaus die zowel Skemp als Tall hebben omschreven. Hieronder zullen de drie werelden nader worden toegelicht.

De omvattende wereld

De omvattende wereld wordt gevormd uit onze waarnemingen van de wereld en bestaat uit de gedachten over deze waarnemingen (Tall, 2004a, 2004b). De personen die in deze wereld leven kunnen zich focussen op eigen waarnemingen die buiten deze wereld niet langer meer bestaan. Zoals een perfecte rechte lijn. Voor een persoon met deze gedachtewereld is iets waar, omdat gezien is dat het waar is.

De proceptuele wereld

De proceptuele wereld bestaat uit symbolen die gebruikt worden voor de berekeningen en manipulaties van wiskundige vergelijkingen (Tall, 2004a, 2004b). De ontwikkelingen die de leerlingen uit de wereld ondergaan, is die van het gebruiken van wiskundige symbolen en het bezig zijn met wiskunde, naar het denken

hierover. Iets is waar in deze wereld, omdat het berekend is met nummers en manipulatie van symbolen.

De overgang van de omvattende wereld naar de proceptuele wereld bestaat uit het omzetten van acties die voortkomen uit waarnemingen, naar het gaan nadenken over deze waarnemingen en over de eigenschappen van de gebruikte symbolen.

De proceptuele wereld is niet automatisch een verdieping van de omvattende wereld. Er kan namelijk een term bestaan, dat je symbolisch kan benaderen, maar dat het begrip nog niet geheel duidelijk is. Bijvoorbeeld de wortel van een negatief getal. Je kunt er mee rekenen, maar de wiskundige betekenis hoeft nog niet duidelijk te zijn.

De formele wereld

De formele wereld is gebaseerd op eigenschappen, uitgedrukt in termen van formele definities, die gebruikt worden als axioma's om de wiskundige structuur te specialiseren (Tall, 2004a, 2004b). Iets is waar, omdat het formeel bewezen is met de axioma's.

De formele wereld ontstaat uit een combinatie van de begrippen uit de omvattende wereld en de symbolische manipulatie van de proceptuele wereld.

Ieder persoon bewandelt een ander pad door deze verschillende werelden, omdat iedereen andere obstakels kan tegen komen die om oude ervaringen vragen. De tijdsduur van de verschillende fasen, verschilt ook per persoon.

Oude ervaringen kunnen leiden tot conflicten. Bijvoorbeeld een kind heeft gehele getallen geleerd en weet dat er een volgend nummer is en niets daartussen. Hierdoor ontstaat een conflict met breuken, want er is geen volgend nummer. Er zitten altijd oneindig veel nummers tussen (Tall, 2004b). Het falen van het omzetten van procedures naar begrippen (proceptuele wereld) kan zelfs leiden tot uit het hoofd leren (Tall, 2004b).

2.4 Diverse niveaus van begrijpen volgens Hiele

Ook Hiele heeft in een artikel de verschillende niveaus van begrijpen beschreven. Deze niveaus hebben echter betrekking op de meetkunde.

Visualisatie niveau (level 0) *— Waarn*

In het visualisatie niveau herkennen de leerlingen figuren in zijn totaliteit. De leerlingen herkennen nog geen eigenschappen van de figuren (Hiele, 1984). Dus herkennen de leerlingen bijvoorbeeld de rechte hoeken niet in een vierkant en een rechthoek. Tevens zien de leerlingen totaal geen overeenkomsten in bijvoorbeeld een vierkant en een rechthoek.

Analyse niveau (level 1) *— Zien*

Alle aparte onderdelen van een figuur worden geanalyseerd in dit niveau. De eigenschappen van de figuren zijn voor de leerlingen duidelijk. De relaties tussen de figuren en de eigenschappen kan nog niet altijd worden uitgelegd (Hiele, 1984). Een leerling hoeft bijvoorbeeld nog niet te zien dat een vierkant ook een rechthoek is, maar als een rechthoek slecht is getekend, zullen de eigenschappen er wel uit worden gehaald.

Informele afleidingsniveau (level 2)

thes

In het informele afleidingsniveau zijn de eigenschappen van de figuren geordend en worden de wederzijdse betrekkingen in figuren en tussen verschillende figuren herkend (Hiele, 1984). Informele bewijzen en afleidingen kunnen in dit niveau ook gevolgd worden, maar de leerlingen zien niet hoe de logica gewijzigd zou kunnen worden of hoe ze de afleiding kunnen bewijzen vanuit een ander oogpunt. In dit niveau zal het vierkant ook herkend worden als een rechthoek.

Afleidingsniveau (level 3)

De significantie van het afleiden om de meetkundige theorie vast te stellen is bekend bij de leerlingen in het afleidingsniveau. Ze kunnen nu ook een bewijs leveren via meerdere wegen naar het eindproduct (Hiele, 1984).

2.5 Vergelijking tussen Skemp, Tall en Hiele

Zowel bij Skemp als bij Tall zijn de niveaus instrumentaal begrijpen en relationeel begrijpen besproken, deze komen ook overeen met elkaar zoals blijkt uit paragraaf 2.3.

Het visualisatie niveau van Hiele kan vergeleken worden met het instrumentale begrijpen. Bij instrumentaal begrijpen gaat het om het toepassen van regels en er zijn geen onderlinge verbanden bekend. Bij het visualisatie niveau draait het ook om de observatie van figuren en de eigenschappen van deze figuren. De onderlinge verbanden zijn nog niet bekend.

Het relationeel begrijpen kan worden vergeleken met het analyse niveau samen met het informele afleidingsniveau van Hiele. Bij zowel het relationele begrijpen als de analyse en informele afleidingsniveaus van Hiele draait het om verbanden leggen, om zo een netwerk te vormen die tot een juist antwoord leidt.

Het logisch begrijpen van Skemp komt overeen met het afleidingsniveau van Hiele. Hierin wordt de leerling namelijk duidelijk gemaakt wat het belang is van een goed opgebouwd schema en het belang van een juist eindproduct.

Tall beschrijft vier niveaus van begrijpen, het hoogste niveau is het relationeel begrijpen. In de beschrijving van de verschillende werelden wordt de formele wereld beschreven. De formele wereld kan wel vergeleken worden met het logisch begrijpen van Skemp, want in de formele wereld draait het om de formele definities en axioma's.

Bij dit onderzoek is uitgegaan van het niet begrijpen van Tall en de drie niveaus van Skemp; instrumentaal, relationeel en logisch begrijpen.

2.6 Rol van de docent

Nu de denkstructuren bekend zijn, is de rol die de docent hierin speelt verder bekeken.

De verantwoordelijkheid van de docent is groot in de eerste fase van het leerproces. / Hij moet ervoor zorgen dat leerlingen leren volgens juiste schema's en de theorie niet uit hun hoofd gaan leren. Dit zou de docent kunnen controleren door de leerlingen een opgave te geven, waarbij ze het antwoord alleen kunnen geven door het schema te gebruiken. De docent moet ook weten in welke stadium de leerlingen zitten. Dus ofwel het schema geassimileerd kan worden of dat er geacommodeerd moet worden, want dan moet de theorie langzamer behandeld worden en steeds worden geverifieerd of ze nog op de juiste weg zitten. Tevens moet de manier waarop de stof wordt aangeboden aangepast worden aan de denkwijze van de leerlingen (intuïtief en concreet redeneren of intuïtief en concreet redeneren samen met formeel denken). Bij formeel denken zijn de leerlingen namelijk onafhankelijk van de voorbeelden die worden gekozen door de docent en kan de lesstof daarop aangepast worden. Tenslotte is de taak van een docent om het analytische vermogen van een leerling gaande weg zodanig te versterken tot zij niet langer afhankelijk van een docent zijn om de zaken op een rij te zetten.

Een belangrijk voorbeeld van kennisoverdracht tussen leerling en docent is de uitleg. Uitleggen heeft als doel iemand iets te laten begrijpen, wat diegene eerst niet begreep. Als men na de uitleg van de docent hetgeen nog niet begrijpt zijn er drie mogelijke oorzaken (Skemp, 2006).

- 1) Het kan zijn dat het verkeerde schema bij de leerling gebruikt wordt. In dit geval moet bij de uitleg het geschikte schema geactiveerd worden.
- 2) De kloof tussen het nieuwe begrip en het te gebruiken schema is te groot. De uitleg moet dan tussenliggende stappen bevatten om de kloof te verkleinen.
- 3) Het schema kan ook moeten geacommodeerd worden, in plaats van alleen geassimileerd worden. Het uitlegen heeft dan als functie de leerling behulpzaam te zijn bij het komen tot reflectie op zijn schema. Hierbij wordt geprobeerd het schema en de oorspronkelijke verzameling voorbeelden, die nu een remmende werking heeft, van elkaar te scheiden. Hierna kan het schema op de juiste manier worden gewijzigd.

Tijdens het uitleggen kan het overbrengen van wiskundige begrippen met behulp van verbale symbolen (hier wordt zowel het gesproken woord, als het geschreven woord onder verstaan) en met behulp van visuele symbolen. De algebraïsche symbolen worden gerekend onder de verbale symbolen. Hoewel visuele symbolen fundamenteeler zijn en een nauwere band hebben met het begrip, zijn ze wel moeilijker over te dragen dan verbale symbolen. De beste combinatie tussen de eenvoud in overdracht van verbale symbolen en de kracht van structuur tonen van de visuele symbolen moet men zelf vinden (Skemp, 2006).

Om vooruitgang te boeken is het in de wiskunde essentieel dat de elementaire handelingen een automatisme worden, waardoor men zich kan concentreren op nieuwe begrippen die moeten worden geleerd. Het is dan ook een groot voordeel als een leerling een redenering snel kan doorlopen en niet elke keer weer de gehele gedachtegang moet oprakelen (Skemp, 2006). De rol van de docent is in de gaten te houden dat het gaat om een automatische uitvoering van een routinehandeling en niet om een mechanische handeling.

De voorbereiding en het geven van lessen

Voordat een docent zijn leerlingen de stof uitlegt heeft hij twee belangrijke dingen te doen.

- Ten eerste moeten de begrippen uit de lesstof geanalyseerd worden. Hierbij wordt onderscheidt gemaakt tussen de begrippen die een leerling wel, al dan niet, zal kennen.
- Ten tweede moet een zorgvuldige planning gemaakt worden, waarin duidelijk staat op welke manier de noodzakelijke schema's kunnen worden ontwikkeld. Met hierin speciale aandacht waarin de leerling een accommodatie van zijn schema moet ondervinden (Skemp, 2006).

Een docent voor de klas is verantwoordelijk voor de algemene leiding, begeleiding van het werk, voor uitleg en voor het rechtzetten van vergissingen. Ook dient de belangstelling en de motivatie van de leerlingen in stand te worden gehouden. Een leerling hoeft niets aan te nemen, waar zijn eigen intelligentie het niet mee eens kan zijn. De docent moet met behulp van zijn eigen intelligentie, de leerlingen bekend laten zijn met de begrippen en stellingen. Er mag hierbij geen sprake zijn van autoritair gedrag. Het is belangrijk dat de docent goed begrijpt welke begrippen overgebracht worden, want anders is er een kans dat de schema's op een onjuiste manier worden geaccommodeerd. De schema's zullen dan als het ware vernietigd worden.

morealisch

Buiten de overdracht van de theorie door de docent op de leerling, is het ook belangrijk om gedachten uit te wisselen tussen de leerlingen zelf. Het uitwisselen kan een belangrijke bijdrage leveren bij het leren (Skemp, 2006). Door de begrippen over te dragen moeten de leerlingen namelijk de begrippen verbinden met woorden en dat maakt ze bewuster van deze begrippen. Tevens worden de begrippen in verband gebracht met begrippen van anderen. Hierdoor worden de schema's geaccommodeerd aan de schema's van de medeleerlingen, zodat de begrippen van beide partijen kunnen worden geassimileerd. De discussies tussen leerlingen stimuleert tevens de vorming van nieuwe begrippen en zorgt voor kruisbestuiving van begrippen, waardoor er nieuwe ideeën kunnen ontstaan. Al deze voordelen zijn wel afhankelijk van een vriendschappelijke relatie tussen de leerlingen uit de groep (Skemp, 2006).

3 Onderzoeksmethode

In dit onderzoek is onderzocht of extra lessen waarin de theorie spelenderwijs wordt gegeven een beter effect hebben op de begripsontwikkeling van leerlingen met betrekking tot de kansverdeling.

Ten eerste worden de leerlingen die hebben deelgenomen aan het onderzoek besproken, hierna wordt tevens het verband tussen docent, leerling en het materiaal besproken. De materialen die door het gehele onderzoek zijn gebruikt worden tevens besproken, zoals de extra lessen, de pre- en post-test. De diverse begripsniveaus zijn in het vorige hoofdstuk al omschreven, in dit hoofdstuk zullen in het globaal de mogelijke antwoorden op de gestelde opgaven worden onderverdeeld in niveaus, zodat de antwoorden van de leerlingen kunnen worden vergeleken. Als laatste zal de onderzoeksvraag worden geformuleerd en toegelicht, waarna het proces van het onderzoek wordt belicht.

3.1 Deelnemers

Het onderzoek is uitgevoerd op het Twents Carmel College te Oldenzaal. Er hebben twaalf leerlingen uit 4 vwo met wiskunde B1 mee gedaan aan dit onderzoek. De test en controlegroep zijn samengesteld uit twee klassen en hebben zich vrijwillig opgegeven voor dit experiment. De docenten van deze klassen zijn Marc Roelofs en Renske Westerhof. De leerlingen krijgen tijdens het onderzoek les uit hoofdstuk 6, kansverdelingen uit Reichard, et al. (2004, vwo 2), dit is de aansluiting op hoofdstuk 4, kansrekening uit Reichard, et al. (2004, vwo 1). Gaandeweg het onderzoek zijn vijf leerlingen afwezig geweest tijdens één van de vier lessen en één leerling die twee lessen afwezig is geweest. Hier dient in dit onderzoek rekening mee te worden gehouden. De testgroep bestaat uit de zes leerlingen die alle lessen hebben gevolgd. Voor de controlegroep zijn zes leerlingen willekeurig uit de twee klassen gekozen.

3.2 Onderling verband docent - leerling - materiaal

Binnen de didactische driehoek docent - leerling - materiaal neemt de leerling een dominante rol in. Het is de leerling die zelfstandig, maar met wel behulp van de aangeboden materialen, de leerstof tot zich moet nemen. De materialen hebben in dit proces zeker een rol, als de materialen juist zijn gekozen zal het leerproces bij de leerlingen sneller verlopen. De docent zal de leerlingen begeleiden, maar speelt hier een ondergeschikte rol in. De leerling moet immers zelf de structuur en verbanden in de stof ontdekken. De docent zal de leerling hier en daar wel sturen en begeleiden om op het juiste pad te blijven. Hierbij kan de docent de mate van begeleiding aanpassen aan het niveau van begripsontwikkeling, waar de leerling zich op dat moment bevindt. Zo kan de docent de leerling laten reflecteren op het werk van de leerling.

3.3 Materiaal

In deze paragraaf worden de gebruikte materialen besproken. De materialen zijn onderverdeeld in drie subgroepen, namelijk de vier te geven lessen, de pre- en post-test en de indeling van de antwoorden.

3.3.1 Indeling extra lessen

In deze paragraaf zal de opzet van de vier te geven extra lessen worden behandeld, waarbij het benodigde materiaal (dus de gebruikte materialen per les en de opgaven die zijn gesteld) per les worden besproken.

De eerste les

De eerste les bestaat uit zeven opdrachten die de leerlingen uitvoeren. Deze opdrachten hebben betrekking op de theoretische kans van een experiment. De experimenten bestaan onder andere uit het gooien van een dobbelsteen, het trekken van een kaart of het pakken van knikkers uit een vaas. In deze opdrachten is de som-, product- en complementregel verwerkt. Met deze experimenten moeten de leerlingen bewuster worden van de theorie die achter deze experimenten zitten. Om deze bewustwording te versterken zijn een aantal experimenten met behulp van de computer uitgevoerd, zodat het aantal keer dat je hetzelfde experiment uitvoert groter is en het beter te vergelijken is met de theoretische kans.

Materiaal:

- Voor deze les zijn de opdrachten op papier gebruikt (zie bijlage 1a);
- Een aantal dobbelstenen;
- Setjes van tien kaarten waarvan twee rode;
- Een aantal schaalpjes met tien rode en vier witte knikkers of steentjes erin;
- Voor de laatste opdracht is een softwareprogramma nodig dat het gooien van dobbelstenen kan simuleren.

De tweede les

De tweede les bestaat uit een spel, waarbij de leerlingen in twee teams opgaven moeten beantwoorden. De teams kunnen zo ingedeeld worden dat de meiden tegen de jongens moeten strijden, de winnaar krijgt de volgende les een prijs. De opgaven zijn ingedeeld in verschillende categorieën, met daaraan punten gekoppeld. Elk team moest een categorie kiezen en die opgave beantwoorden. De opgaven uit de categorie één tot drie punten moet door één persoon uit elk team worden beantwoordt. Lukt dit niet dan mag een ander persoon uit het team de opgave uitleggen zonder het antwoord te geven. Bij een juist antwoord, krijgt diegene alsnog een punt. De opgaven van vier punten mogen de teamleden samen beantwoorden. Na elk veelvoud van vijf punten moeten de teams een doe-opdracht of een uitlegopdracht doen. Bij de uitlegopdracht moet één teamlid een woord uitleggen zonder het woord zelf te gebruiken, de rest moet raden waar het omgaat. Het team dat als eerste bij vijftig punten is heeft gewonnen.

Materiaal:

- Voor deze les zijn opgaven per categorie nodig, met daarbij een aantal tekeningen van schijven, vazen en een tabel met bijbaantjes (zie bijlage 1b);

- Verder zijn de regels belangrijk en is het handig om de doe-opdrachten en uitlegopdrachten op te schrijven.
- Voor de doe-opdrachten zijn vier dobbelstenen;
- Een pakje kaarten;
- Een schaalte met een aantal witte en rode knikkers/steentjes nodig.

De derde les

Om de individuele ontwikkeling van de leerlingen te stimuleren bestaat deze les uit een zestal die elke leerling individueel moet beantwoorden. Ze krijgen daar ruim de tijd voor en als een opgave niet lukt, zal deze door een andere leerling aan het eind van de les worden beantwoord in het gezamenlijke gedeelte.

Materiaal:

Het enige wat nodig is, is een opgavenlijst waarmee de leerlingen aan de slag kunnen gaan (zie bijlage 1c)

De vierde les

Om de vier lessen leuk af te sluiten word in deze les een soort triviant spel gespeeld. Het spel wordt in teams van twee of drie leerlingen gespeeld. De opgaven worden over drie categorieën verdeeld.

- De eerste categorie is het beantwoorden van een opgave in de trend van "bereken p in het volgende experiment" en wordt gekoppeld aan 3 kleuren op het bord.
- De tweede categorie is het vaststellen of een experiment binomiaal is en wordt gekoppeld aan twee kleuren op het bord.
- Bij de laatste categorie is het antwoord al gegeven, maar moeten de leerlingen daar een vraag bij bedenken. Deze categorie wordt aan één kleur op het bord gekoppeld.

Voor de eerste en tweede categorie krijgt men één minuut en dertig seconden. Als een opgave goed is beantwoord mag het team nogmaals gooien met de dobbelsteen. Als de opgave fout is gaat de beurt naar een ander team. Bij de laatste categorie gaat de beurt automatisch naar het volgende team en mag het team pas weer mee doen als er een juiste vraag is geformuleerd. Als het team op een triviantopgave komt van de eerste twee categorieën krijg het team de triviantstukjes als het team de opgave juist heeft beantwoord. Bij de laatste categorie moet het team een juiste vraag hebben geformuleerd, voordat de beurt weer bij het team is gekomen. Het team dat aan het eind de meeste trivianten heeft, heeft gewonnen.

Materiaal:

Voor deze laatste les heb je een triviant spel nodig met een bord, een dobbelsteen, triviantstukjes en de schijfjes, de originele triviantvragen worden niet gebruikt. De opgaven voor dit spel zijn in de drie categorieën verdeeld (zie bijlage 1d).

3.3.2 Testen

De pre- en post-test bestaan beide uit vier opgaven. De opgaven die de leerlingen hebben beantwoord komen uit de toets 220 voor 4 vwo wiskunde B1/B1,2 van januari 2006 en uit de toets 420 voor 4 vwo wiskunde B1/B1,2 van juli 2006. Deze proefwerken zijn respectievelijk opgenomen in bijlage 2 en 3. De opgaven van de

pre-test bestaan uit opgaven 2, 3, 4 en 5 uit toets 220. De opgaven van de post-test bestaan uit opgaven 5, 7, 8 en 9 uit toets 420.

3.3.3 Criteria begripsniveau

De antwoorden van de leerlingen worden onderverdeeld in de diverse niveaus. Hiervoor worden criteria vastgesteld, die bepalen welk antwoord in welk niveau wordt ingedeeld. De antwoorden van de leerlingen zijn niet altijd concreet in één niveau te plaatsen, daarom zijn er ook tussenniveaus benoemd. De diverse niveaus zijn:

- 0) niet begrijpen;
- 1) instrumentaal begrijpen;
- 2) tussen instrumentaal en relationeel in;
- 3) relationeel begrijpen;
- 4) tussen relationeel en logisch in;
- 5) logisch begrijpen.

Hieronder is in het kort beschreven waar een antwoord in de diverse niveaus aan moet voldoen. Dit zijn een algemeen geldende criteria voor alle opgaven. Voor enkele opgaven is extra toelichting nodig. In bijlage 4 is een additionele beschrijving opgenomen voor de criteria van de diverse begripsniveaus.

Bij een antwoord dat in niveau 0 past, gebruiken de leerlingen de verkeerde regels. Bij niveau 1 laten de leerlingen wel zien dat ze begrijpen welke regels er zouden moeten worden gebruikt, maar de link naar het juiste antwoord kunnen ze niet vinden. Echter bij niveau 3 zullen de leerlingen met de juiste regels wel een goed antwoord kunnen geven. Als laatste bij niveau 5 'overtuigen' de leerlingen door gebruik van definities of notaties de lezer van zijn antwoord, hierbij moet natuurlijk wel gebruik zijn gemaakt van de juiste regels en moet het antwoord tevens juist zijn.

3.4 Onderzoeksproces

Ten eerste is de onderzoeksvraag vastgesteld. De onderzoeksvraag van dit onderzoek is hieronder geformuleerd.

Heeft het geven van extra lessen in spelvorm effect op de begripsontwikkeling van de leerlingen uit 4 vwo? Zo ja, wat is de voor- of achteruitgang in termen van begripsniveaus van schematisch denken.

Voordat een onderzoek wordt uitgevoerd moet een nulsituatie worden vastgesteld. De leerlingen hebben in het vorige lesblok al een hoofdstuk over kansrekening gehad. Hierover hebben zowel de leerlingen uit de testgroep als de leerlingen uit de controlegroep een proefwerk gemaakt. Een aantal opgaven uit het proefwerk worden als pre-test gezien. De antwoorden van de leerlingen kan worden ingeschaald naar de drie niveaus van Skemp aangevuld met het niet begrijpen van Tall, zoals beschreven in voorgaande paragrafen. De leerlingen uit de testgroep krijgen vier extra lessen waarin de theorie spelenderwijs gegeven wordt. De inhoud van de extra lessen is weergegeven in paragraaf 3.3. Alle leerlingen uit de testgroep hebben deze vier lessen gevolgd en goed meegedaan. Dit is een vereiste om een vergelijking te

kunnen maken met de controlegroep. Het effect dat deze extra lessen hebben opgeleverd wordt gemeten aan de hand van de post-test, met als basis de pre-test. De post-test is een proefwerk van het huidige hoofdstuk en is door beide groepen gemaakt. Uit dit proefwerk worden een aantal opgaven gekozen waarop getest wordt. De mogelijke antwoorden worden weer in de diverse niveaus, beschreven in hoofdstuk 2, ingedeeld. De indeling in niveaus van de opgaven is beschreven in paragraaf 3.3. Voor de vooruitgang van alle leerlingen is gekeken naar en verschil in vooruitgang tussen test en controlegroep. Met andere woorden: heeft het spelenderwijs geven van lessen een beter effect op de begripsontwikkeling?

4 Dataverzameling

De twaalf leerlingen van dit onderzoek hebben twee proefwerken gemaakt, één proefwerk voordat de extra lessen hebben plaatsgevonden en één proefwerk nadat de extra lessen hebben plaatsgevonden. Uit elk proefwerk zijn vier opgaven geselecteerd voor de pre- en post-test. De antwoorden van de leerlingen op deze opgaven zijn opgenomen in bijlage 5 en 6.

Er is per deelopgave gekeken in welk begripsniveau de leerling valt. Deze beoordeling is opgenomen in bijlage 7. Het niveau per opgave en het uiteindelijke niveau is vastgesteld door het gemiddelde niveau van de deelopgaven vast te stellen. De verzameling van de niveaus van de testgroep is te vinden in tabel 1, de data van de controlegroep is te vinden in tabel 2. De diverse niveaus zijn: niet begrijpen (niveau 0), instrumentaal begrijpen (niveau 1), relationeel begrijpen (niveau 3) en logisch begrijpen (niveau 5).

In bijlage 7 zijn een aantal niveaubepalingen toegelicht. Niet alle niveaubepalingen zijn toegelicht, vanwege de gelijkenis in vele bepalingen. De keuze van de toegelichte bepalingen zijn tot stand gekomen volgens de volgende twee criteria:

- De bepalingen moeten verspreid liggen tussen de verschillende niveaus;
- De bepaling moet representatief zijn ten opzichte van de overige bepalingen. Dit omdat de overige bepalingen dan te herleiden zijn.

Tabel 1: vastgestelde niveau voor de testgroep

Type test	Leerling Opgave	Lex Blinkers	Alexander Hamhuis	Maarten Hekman	Laurie Overbeek	Floris Swennenhuis	Merve Karakus
Pre-test	Niveau opgave 2	0	0	2,3	2,3	2,3	2,3
	Niveau opgave 3	4,8	0	3	2,8	2,6	1,6
	Niveau opgave 4	3	4	1	2	3	0
	Niveau opgave 5	3	5	3	2,7	3	2
	Totale niveau	3	1,6	2,7	2,6	2,7	1,8
Post-test	Niveau opgave 5	1,3	2	2,7	2,3	3	2,3
	Niveau opgave 7	3	3	1,5	1,5	3	1
	Niveau opgave 8	2,5	3	2	0	1,5	2,5
	Niveau opgave 9	3	3	3	3	3	2,3
	Totale niveau	2,5	2,7	2,5	2	2,7	1,8

Tabel 2: vastgestelde niveau voor de controlegroep

Type test	Leerling Opgave	Marjolein v. Eenennaam	Sophie Janssen	Jennifer Zwaferink	Joris Bolhaar	Jeske Nijman	Nick ter Pelle
Pre-test	Niveau opgave 2	2,7	2,3	3	1	2,3	2,3
	Niveau opgave 3	3,6	3	1,6	1,4	2,7	3
	Niveau opgave 4	4	2	3	0	3	3
	Niveau opgave 5	2,7	3	2	1,3	3	2,7
	Totale niveau	3,2	2,8	2,2	1,2	2,7	2,8
Post-test	Niveau opgave 5	0	2,7	0	1,3	1,7	2,3
	Niveau opgave 7	3	3	1	1,5	1,5	2
	Niveau opgave 8	0	2,5	1	1,5	0	2,5
	Niveau opgave 9	3	3	2	2,8	3	2,3
	Totale niveau	1,6	2,8	1,1	1,9	1,7	2,3

In het volgende hoofdstuk zal de data worden verwerkt en geanalyseerd.

5 Data analyse

In dit hoofdstuk is de dataverzameling van hoofdstuk 4 geanalyseerd om tot een conclusie te komen van de onderzoeksvraag die beschreven is in paragraaf 3.4.

Als eerste is er een vergelijking gemaakt tussen de testgroep en de controlegroep. Daarna is er nog een vergelijking gemaakt tussen de jongens en meiden. De tweede vergelijking is niet noodzakelijk voor de onderzoeksvraag, maar is zeker interessant om naar te kijken. Als laatste is er nog gekeken naar het gemiddelde niveau van de leerlingen per opgave.

5.1 Vergelijking van testgroep en controlegroep

In tabellen 3 en 4 zijn de uiteindelijke niveaubepalingen van elke leerling uit tabel 1 en 2 overgenomen. Om de leerlingen uit de verschillende groepen te kunnen vergelijken wordt het verschil berekend van de pre- en post-test. De verschillen van de testgroep worden dan vergeleken met de verschillen van de controlegroep.

Tabel 3: begripsniveau van testgroep

Naam Test	Lex	Alexander	Maarten	Laurie	Floris	Merve	Gemiddeld
Pre-test	3	1,6	2,7	2,6	2,7	1,8	2,4
Post-test	2,5	2,7	2,5	2	2,7	1,8	2,3
Vershil	-0,5	1,1	-0,2	-0,6	0	0	-0,1

Tabel 4: begripsniveau van controlegroep

Naam Test	Marjolein	Sophie	Jennifer	Joris	Jeske	Nick	Gemiddeld
Pre-test	3,2	2,8	2,2	1,2	2,7	2,8	2,5
Post-test	1,6	2,8	1,1	1,9	1,7	2,3	1,9
Vershil	-1,6	0	-1,1	0,7	-1	-0,5	-0,6

De testgroep heeft gezien het gemiddelde een grotere vooruitgang geboekt dan de controlegroep, ondanks dat de beide groepen achteruit zijn gegaan in niveau. Verder valt het ook op dat het begripsniveau van de testgroep bij de pre-test lager is dan het begripsniveau van de controlegroep. Bij de post-test heeft de testgroep een beter resultaat geboekt dan de controlegroep.

5.2 Meisjes ten opzichte van jongens

In deze paragraaf wordt gekeken naar de verschillen tussen de meisjes en jongens. De begripsniveaus van elke leerling is opgenomen in tabellen 5 en 6. Uit deze tabellen is het verschil bepaald.

Tabel 5: begripsniveau van de jongens

Naam Test	Lex	Alexander	Maarten	Joris	Floris	Nick	Gemiddeld
Pre-test	3	1,6	2,7	1,2	2,7	2,8	2,3
Post-test	2,5	2,7	2,5	1,9	2,7	2,3	2,4
Vershil	-0,5	1,1	-0,2	0,7	0	-0,5	0,1

Tabel 6: begripsniveau van de meisjes

Naam Test	Marjolein	Sophie	Jennifer	Laurie	Jeske	Merve	Gemiddeld
Pre-test	3,2	2,8	2,2	2,6	2,7	1,8	2,6
Post-test	1,6	2,8	1,1	2	1,7	1,8	1,8
Vershil	-1,6	0	-1,1	-0,6	-1	0	-0,8

De jongens hebben duidelijk een groter vooruitgang geboekt dan de meiden. De meiden zijn er zelfs op achteruit gegaan ten opzichte van de pre-test.

5.3 Gemiddelde begripsniveau per opgave

Om inzicht te krijgen in het begripsniveau van elke opgave van zowel de testgroep als de controlegroep is in tabel 7 de gemiddelde begripsniveaus van elke opgave opgenomen. In deze tabel is ook het verschil tussen de testgroep en de controlegroep per opgave weergegeven.

Tabel 7: gemiddelde begripsniveau van de leerlingen per opgave

Opgave	Opgaven pre-test				Opgaven post-test			
Groep	2	3	4	5	5	7	8	9
Testgroep	1,6	2,5	2,2	3,2	2,3	2,2	1,9	2,9
Controlegroep	2,3	2,4	2,5	2,4	1,3	2,0	1,3	2,7
Vershil	0,7	-0,1	0,3	-0,8	-1	-0,2	-0,6	-0,2
Gemiddelde	2,0	2,5	2,4	2,8	1,8	2,1	1,6	2,8

Het gemiddelde van alle opgaven is 2,23. Niet slecht dus, maar bij deze score werken een aantal leerlingen dus nog wel veel met standaard schema's. Bij lastigere opgaven is het komen tot een antwoord, door middel van het combineren van schema's, voor deze leerlingen nog niet weggelegd.

6 Resultaten

In het vorige hoofdstuk is de data geanalyseerd, in dit hoofdstuk worden de resultaten van het onderzoek besproken.

De testgroep heeft bij het maken van de pre-test een gemiddeld begripsniveau behaald van 2,4, bij de post-test is dit begripsniveau 2,3. Er heeft een minimale daling plaats gevonden. Bij de controlegroep is het gemiddelde begripsniveau bij de pre-test gelijk aan 2,5 en bij de post-test 1,9. De daling in begripsniveau bij de controlegroep is groter dan bij de testgroep. Beide groepen hebben geen vooruitgang geboekt in begripsniveau, echter heeft de testgroep een beter resultaat geboekt ten opzichte van de pre-test dan de controlegroep.

Door het verschil in daling van het begripsniveau heeft de testgroep na het maken van de post-test een hoger begripsniveau bereikt dan de controlegroep. Dit in tegenstelling tot het begripsniveau na het maken van de pre-test, hier heeft de controlegroep nog een hoger begripsniveau.

Het gemiddelde van alle opgaven is 2,23. De testgroep heeft bij beide testen boven het gemiddelde behaald, de controlegroep heeft bij pre-test boven gemiddelde en bij post-test onder gemiddelde behaald.

7 Conclusie

In dit onderzoek is gekeken naar de begripsontwikkeling bij leerlingen. Dit is gedaan door het geven van een aantal extra lessen aan een zestal leerlingen (de testgroep), waarin de stof spelenderwijs wordt aangeboden. De andere groep (controlegroep) heeft deze lessen niet gevolgd. Zowel de testgroep als de controlegroep hebben voor de extra lessen een aantal opgaven gemaakt (pre-test) en na de lessen (post-test). Deze antwoorden van de leerlingen zijn geschaald naar de begripsniveaus van Tall en Skemp, deze resultaten zijn onderling vergeleken en de conclusies staan hieronder.

Uit de resultaten blijkt dat zowel de test- als de controlegroep er zelfs op achteruit gegaan ten opzichte van de pre-test. Echter heeft de testgroep een minder grote achteruitgang laten zien, dus heeft deze groep een grotere vooruitgang geboekt in begripsontwikkeling dan de controlegroep.

Uit de resultaten kan er dus geconcludeerd worden dat de extra lessen een positief effect hebben op de begripsontwikkeling van de leerlingen uit 4 vwo. De leerlingen van de testgroep hebben een gemiddelde vooruitgang geboekt van ruim een half begripsniveau ten opzichte van de controlegroep.

Het gemiddelde van alle opgaven uit zowel de pre- als de post-test is 2,23. Dit begripsniveau is niet slecht, maar er wordt dus nog wel regelmatig met standaard schema's gewerkt. Ook het combineren van schema's om tot een antwoord te komen, is bij een lastigere opgave voor een aantal leerlingen nog niet weggelegd.

7.1 Aanbevelingen

De conclusies kunnen in twijfel worden getrokken door bijvoorbeeld de grootte van de groepen (te kleine groepen), lesinvulling (niet consequent) en de manier van vraagstelling in de twee testen (niet begripsniveau verhogend). Hierdoor kan er niet met zekerheid gezegd worden dat de extra lessen ook in het algemeen de juiste invloed heeft op de begripsontwikkeling van de leerlingen.

Om een onderzoek neer te kunnen zetten, waarvan de conclusies gegrond zijn, moeten de volgende aanbevelingen in acht worden genomen;

- In een vervolg onderzoek zou een hele klas mee kunnen doen met het onderzoek. De klas zou dan één les in de week de theorie van die week spelenderwijs krijgen. Dit moet dan goed georganiseerd worden en de theorie moet duidelijk naar voren komen. Een andere klas neemt de theorie in normale lessen tot zich. Door klassen deel te laten nemen aan het onderzoek, is een groot aantal leerlingen gegarandeerd en ook een grotere variëteit aan personen. Onder variëteit wordt hier verstaan zowel goede en minder goede leerlingen.
- De lessen die de leerlingen spelenderwijs krijgen moeten zo ingedeeld worden dat de leerlingen de tijd krijgen om na te denken en om elkaar te helpen. Bij het geven van één les per week kunnen de spellen ook over meerdere lessen worden verdeeld.

- De pre- en post-test moeten goed in elkaar worden gezet. De opgaven uit een proefwerk hebben geen opbouwend karakter qua begripsniveau. Elke opgave moet zo gesteld worden dat door de opgaven heen er eigenlijk een steeds hoger begripsniveau beheerst moet worden om te kunnen antwoorden. Met andere woorden moet de eerste opgave te beantwoorden zijn met een standaard schema. Hier kan er bepaald worden of een leerling in het 1^e niveau zit (instrumentaal begrijpen). De tweede opgave moet zo zijn dat er meerdere schema's nodig zijn om tot een antwoord te komen. Om te bepalen of een leerling in het 3^e niveau thuis hoort (relationeel begrijpen), kunnen meerdere opgaven nodig zijn. Als afsluiter kun er een opgave gemaakt moeten worden die boven de theorie staat en waarbij ze de definities nodig hebben. Dit bepaalt of de leerling in het 5^e niveau zit (logisch begrijpen).

8 Discussie

In dit hoofdstuk is de betrouwbaarheid van dit onderzoek beschreven door middel van het kritisch kijken naar een aantal punten. Te weten:

- De definities van de niveaus;
- Het aantal deelnemers;
- De indeling en materiaal van de extra lessen;
- De opgaven van de pre- en post-test;
- De indeling van de leerlingen in de begripsniveaus.

8.1 Definities van de begripsniveaus

Voor het beschrijven van de definities van de verschillende begripsniveaus is gebruik gemaakt van zowel Skemp als Tall. Skemp en Tall hebben namelijk de grootste overeenkomst met de beschrijvingen van de diverse begripsniveaus. Ook is gekeken naar de begripsniveaus van Hiele. Hiele beschreef de begripsniveaus naar aanleiding van meetkundige onderwerpen. Deze beschrijvingen sloten niet aan op Skemp en Tall. Zowel Skemp als Tall zijn bekende namen in de wiskundige en de psychologische wereld. Door deze twee te combineren krijg je een aannemelijke lijst van definities voor de begripsniveaus.

8.2 Aantal deelnemers

Door de vrijwillige deelname aan de extra lessen kwamen er niet veel aanmeldingen. Ook kwam niet iedere leerling elke keer opdaven. Uiteindelijk waren er maar zes geschikte kandidaten overgebleven voor het onderzoek. Voor een betrouwbaarder vergelijking tussen de testgroep en de controlegroep zouden de groepen groter moeten zijn.

8.3 Indeling en materiaal van de extra lessen

Voor het aantal lessen geldt dat er een groot aantal reguliere lessen moeten worden gegeven om een beter beeld te krijgen van de invloed op de resultaten van de leerlingen. Tijdens dit onderzoek was er maar tijd voor vier extra lessen. De invloed van deze lessen op de resultaten is dus gering. Om echt resultaat te boeken en om er iets relevants over te kunnen zeggen is er een of meer lessen per week nodig. De inhoud van de vier lessen was gevarieerd. Voor een duidelijke lijn zullen de lessen meer op elkaar moeten worden afgestemd. Het doel van de eerste les was uit te proberen wat de leerlingen leuk vonden. In de derde les was het de bedoeling om de gedachtegang van de leerlingen te doorgronden. Tijdens de eerste en derde les is er dus niet echt spelenderwijs les gegeven. Daarentegen waren de tweede en vierde les bij de leerlingen een groot succes. Echter zullen de spellen korter moeten worden opgezet om meer tijd over te houden voor de uitleg. Ook is het goed om de leerlingen bij de uitleg te betrekken.

8.4 Opgaven van de pre- en post-test

Zowel de pre-test als de post-test bestaan uit vier opgaven, deze opgaven zijn representatief voor de opgaven uit de hoofdstukken. Echter zijn de opgaven ook uit te werken met standaard schema's. Er zijn geen meerdere schema's nodig om tot een antwoord te komen en de opgaven zijn dus niet uitdagend voor de leerlingen. Bij het zelf opstellen van de opgaven kun je zowel opgaven opnemen die op te lossen zijn met een standaard schema, als opgaven die op te lossen zijn met combinaties van schema's. Met deze opzet kun je het begripsniveau van de leerlingen bepalen. Het aantal opgaven is goed gekozen. Door deze keuze is een overzichtelijk geheel gevormd. Door meer opgaven zal er geen beter beeld ontstaan.

8.5 Indeling begripsniveaus

inlever
De bepalingen van de begripsniveaus zijn naar eigen mening ingevuld. Doordat een aantal leerlingen bekend zijn, kan er bevooroordeeld worden gehandeld. Dit is getracht te voorkomen door per opgave de antwoorden van de leerlingen te beoordelen, zodat er geen beïnvloeding is door de in het verleden behaalde resultaten. Bij het beoordelen van de begripsniveaus is het moeilijk om leerlingen in één begripsniveau in te delen. Soms hangen ze er duidelijk tussen of horen ze in beide begripsniveaus thuis. Bijvoorbeeld bij meerdere onderdelen van een opgave. Dit is opgelost door tevens tussenniveaus te definiëren. Het begripsniveau van de deelopgaven kan bij de leerlingen erg variëren.

9 Literatuur

- Van Hiele, P. M. (1984). *The child's thought and geometry*. In D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler (Eds.), *Engelse vertaling van geselecteerde artikelen van D. van Hiele-Geldof en P. M. van Hiele* (243-252). Brooklyn, New York: Brooklyn College, City University of New York (originele artikel gepubliceerd in 1957).
- Reichard, L. A., Rozemond, S., Dijkhuis, J. H., Admiraal, C. J., te Vaarwerk, G. J., Verbeek J. A., et al. (2003, tweede oplage 2004). *Getal en ruimte, vwo A/B 1*. Houten: EPN.
- Reichard, L. A., Rozemond, S., Dijkhuis, J. H., Admiraal, C. J., te Vaarwerk, G. J., Verbeek J. A., et al. (2003, tweede oplage 2004). *Getal en ruimte, vwo A/B 2*. Houten: EPN.
- Skemp, R. R. (1979). *Intelligence, Learning, and Action. A foundation for theory and practice in education*. Chichester: John Wiley & Sons.
- Skemp, R. R. (1987). *Psychology of learning mathematics*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Skemp, R. R. (2006). *Wiskundig denken*. Utrecht/Antwerpen: het Spectrum (Aula-boeken 501).
- Tall, David (1979). The Dynamics of Understanding Mathematics. *Mathematics Teaching*, 81, 50-52.
- Tall, David, Gray, Eddie (2002). Abstraction as a natural process of mental compression. In Anne D. Cockburn & Elena Nardi (Eds). *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics education*, (Norwich, UK), 1, 115-120.
- Tall, David (2004a). Introducing Three Worlds of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 23 (3), 29-33.
- Tall, David (2004b). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen, Norway, 4, 281-288.
- Tall, David (2005a). A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof. *Plenary Lecture for the International Colloquium on Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood*, Belgium, 5-7 July, 2005.
- Tall, David (2005b). The transition from embodied thought experiment and symbolic manipulation to formal proof. In M. Bulmer, H. MacGillivray & C. Varsasky (Eds). *Proceedings of Kingfisher Delta '05, Fifth Southern Hemisphere Symposium on*

Undergraduate Mathematics and Statistics Teaching and Learning, (pp. 23-25),
Fraser Island, Australia.

http://euler.slu.edu/teachmaterial/Van_Hiele_Model_of_Geometr.html

Referentie: Teppo, Anne (1991). The Van Hiele Model of Geometry Thought.
Mathematics Teacher, March, 210-221.