

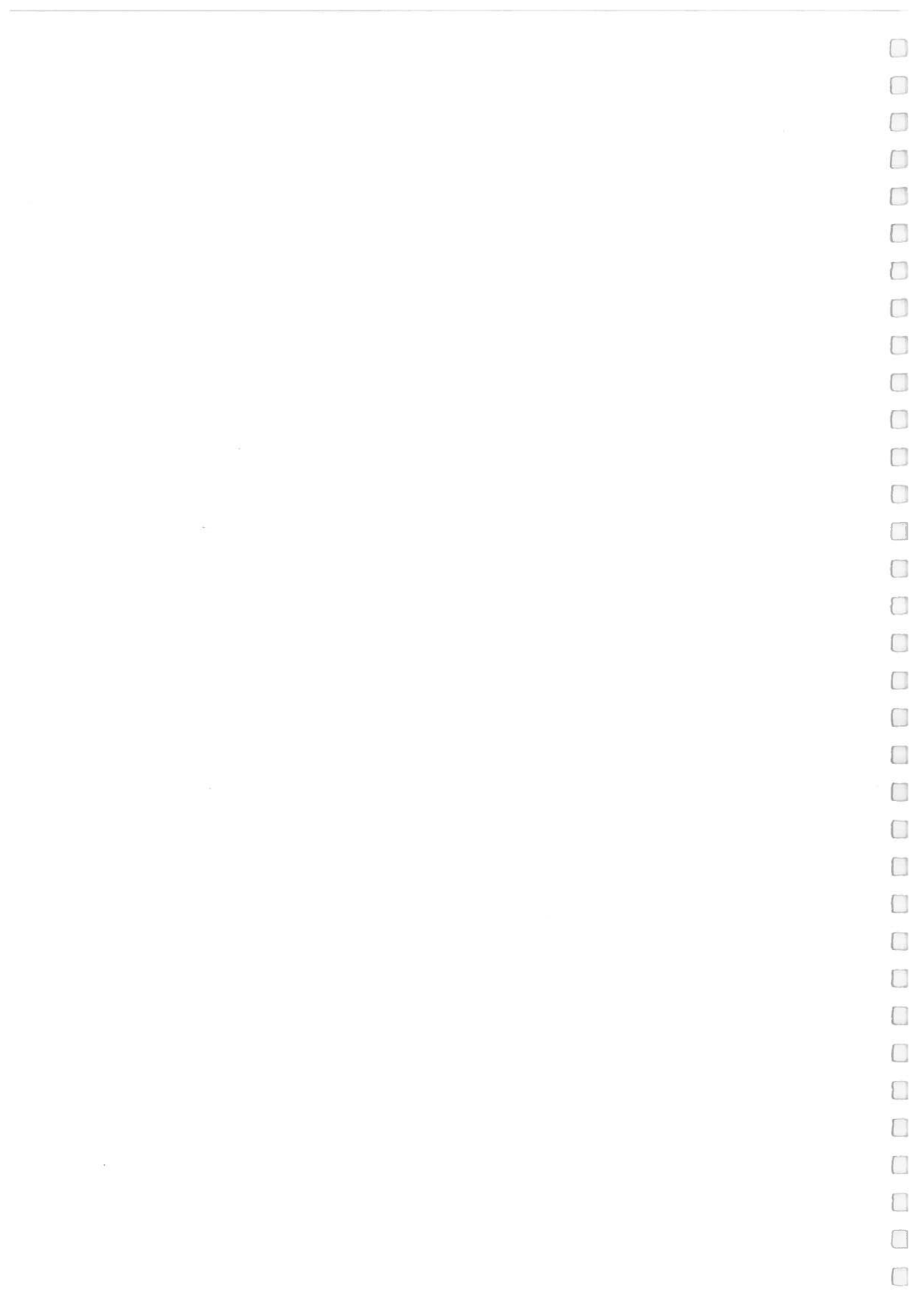
Hoe modelleren een cognitieve eenheid wordt
Het succesvol implementeren van 'Wiskunde in Wetenschap' in het vak wiskunde D

J. Schakel BSc

Master afstudeerscriptie
Science Education
track Mathematics
Maart 2008



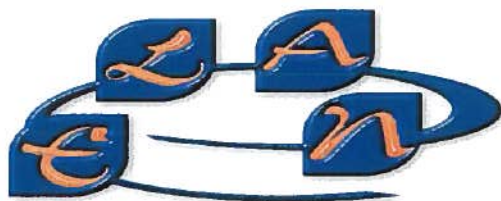
Universiteit Twente
de ondernemende universiteit



Examencommissie:
C.B. Vaneker
dr. J.T. van der Veen
ir. A.S. Posthuma

Begeleider:
dr. N.C. Verhoef

Universiteit Twente
Instituut ELAN
Postbus 217
7500 AE Enschede
www.utwente.nl/elan



Universiteit Twente
de ondernemende universiteit



Samenvatting

Met ingang van 2007 wordt er in het wiskundeonderwijs een nieuw vak aangeboden: wiskunde D. Er kan op verschillende manieren invulling aan dit vak gegeven worden. Eén invulling is het leerstofdomein 'Wiskunde in Wetenschap', ontwikkeld door een kerngroep van wiskundeleraars uit de regio Twente en docenten van de Universiteit Twente.

Het doel van 'Wiskunde in Wetenschap' is de leerlingen te leren modelleren aan de hand van uitdagende cases uit de praktijk. De module die hiervoor geschreven is, leert de leerlingen de gehele modelleercyclus te doorlopen.

De didactiek die hierbij wordt aangeraden is *reciprocal teaching*. De rol van de docent is om de leerlingen te begeleiden, terwijl de leerlingen communiceren over de cases. Door vragen te stellen worden de leerlingen in de juiste richting geduwd en zijn ze in staat zelf kennis te 'construeren'.

In dit ontwerpgerichte onderzoek leren vier leerlingen in de vierde klas modelleren met de startmodelle 'Modelleren' als onderdeel van het domein 'Wiskunde in Wetenschap'. Gekeken is hoe de leerlingen reageren op *reciprocal teaching*. Ook wordt gekeken of en zo ja, hoe ze door deze didactische aanpak een hoger abstractieniveau bereiken en of modelleren zelfs een cognitieve eenheid kan worden.

Geconcludeerd kan worden dat door het communiceren met elkaar onder begeleiding van de docent de leerlingen elkaar aanvullen en verder komen in de modelleercyclus dan ze alleen hadden bereikt.



Voorwoord

Voor u ligt mijn afstudeerscriptie voor de master Science Education. Met veel plezier heb ik bestudeerd hoe het nieuwe vak wiskunde D haar invulling kreeg en hoe de leerlingen leerden modelleren. Ik heb drie lessen geobserveerd en deze zijn volledig op papier uitgeschreven. Het is interessant deze te lezen om een volledig beeld te krijgen van de situatie in de klas en hoe de leerlingen reageerden.

Ik wil graag de mensen bedanken die mee hebben geholpen aan het resultaat van deze scriptie. Ik heb onderzoek gedaan op de O.S.G. Hengelo vestiging Montessori in de klas van Conny Larmene. Ik wil Conny hartelijk danken voor haar enthousiasme en medewerking aan dit onderzoek! Ook de leerlingen, Marinde, Joost, Marlo en Thomas wil ik bedanken. Zonder hen was er niets te bestuderen geweest!

Mijn begeleidster Nellie Verhoef verdient zeker te worden genoemd. Nellie, ik wil je ontzettend bedanken voor je flexibiliteit, je kritische blik en de deur die altijd open stond!

Niet alleen is dit mijn laatste werk voor Science Education, ook voor de master Applied Mathematics ben ik nu klaar. Al die jaren ben ik door dik en dun gesteund door mijn familie en vrienden. Bedankt hiervoor!

Anna Schakel



Inhoudsopgave

1	Inleiding	1
1.1	Inleiding	1
1.2	Aanleiding	2
1.3	Probleemformulering	3
1.4	Leeswijzer	4
2	Theoretisch kader	5
2.1	Inleiding	5
2.2	Constructivisme	6
2.3	Reciprocal teaching	6
2.4	Van Hiele	8
2.5	David Tall	9
2.6	Wiskunde in Wetenschap	9
2.7	Samenvatting	12
3	Methode	13
3.1	Inleiding	13
3.2	Leerlingen	13
3.3	Materiaal	13
3.4	Onderzoeksinstrumenten	16
3.5	Dataverzameling	16
3.6	Dataverwerking	17
3.7	Data analyse	19
3.7.1	Leerling A	19
3.7.2	Leerling B	20
3.7.3	Leerling C	20
3.7.4	Leerling D	20
3.7.5	Docent	21
3.8	Samenvatting	21
4	Resultaten	23
4.1	Inleiding	23
4.2	Abstractieniveau	23
5	Conclusies & discussie	25
5.1	Inleiding	25
5.2	Reciprocal teaching	25
5.3	Modelleren als cognitieve eenheid	26

5.4	Discussie	26
5.5	Verder onderzoek	27
A	Startmodule	29
B	Uitwerking lessen	41
B.1	Les 1	41
B.1.1	Wat is wetenschap?	41
B.1.2	Kijkafstand	42
B.1.3	Zwemmer in nood	48
B.2	Les 2	49
B.2.1	Hoe snel beweeg je als je stilstaat?	49
B.2.2	Fabriekshal	54
B.3	Eindopdracht	55
B.3.1	Leerling A - Thuiswerkers	55
B.3.2	Leerling B en D - Straatverlichting	55
B.3.3	Leerling C - Goot	55
C	Procesbeschrijving	65
C.1	Inleiding	65
C.2	Les 1	65
C.2.1	Wat is wetenschap?	65
C.2.2	Kijkafstand	66
C.2.3	Zwemmer in nood	66
C.3	Les 2	66
C.3.1	Hoe snel beweeg je als je stilstaat?	67
C.3.2	Fabriekshal	67
C.4	Eindopdracht	67

Hoofdstuk 1

Inleiding

1.1 Inleiding

Met ingang van 2007 zijn er een aantal nieuwe profielkeuzevakken ingevoerd. Binnen het profiel Natuur & Techniek (NT) op het havo en vwo is dit het vak wiskunde D. Het vak biedt zowel verdieping als verbreding. De samenhang binnen de wiskunde komt naar voren, net als het naar voren komt tussen wiskunde en andere exacte vakken [1]. Ter *verbreding* krijgen leerlingen statistiek en kansrekenen, dat uit wiskunde B is verdwenen. De *verdieping* zit in abstractere onderwerpen als analyse en meetkunde. Tevens zal er samengewerkt worden met het hoger onderwijs om de leerlingen in aanraking te laten komen met de combinatie van wiskunde in een vervolgopleiding, techniek en wetenschap.

Naar aanleiding van deze invulling van het vak wiskunde D, waarin middelbare scholen een samenwerkingsverband met het hogere onderwijs kunnen aangaan, is op de Universiteit Twente een leerstofdomein 'Wiskunde in Wetenschap' ontwikkeld door een kerngroep van UT- en vwo-docenten. Dit lesmateriaal is bedoeld om aan de hand van uitdagende cases de leerlingen te laten ervaren dat het proces van wiskundig modelleren verschijnselen doet beschrijven en ze toegankelijk maakt voor oplossingen [2].

De visie van de UT-kerngroep is dat, wiskundig modelleren het exact formuleren van begrippen en relaties is, dat leidt tot een model. Via logisch redeneren wordt kennis ontwikkeld over de te onderzoeken verschijnselen. Een model opstellen vereist een nauwkeurig werkwijze, waarin in elke stap een beslissing moet worden genomen om een zo waarheidsgetrouwe weergave van de werkelijkheid te krijgen. Om het geformuleerde model om te zetten naar een wiskundig model moeten er grootheden en relaties worden geïntroduceerd. Begrippen vertalen naar meetbare grootheden en een nauwkeurige werkwijze behoren tot wiskundige activiteiten, dat modelleren bevat.

Om de leerlingen te laten modelleren, zijn er vijf modules geschreven voor het domein 'Wiskunde in Wetenschap' [2]. In totaal heeft dit domein een studielast van 80 uren en één module staat voor 20 studielasturen. In totaal kunnen er vier modules behandeld worden. De modules kunnen in opeenvolgende leerjaren worden ingezet. Zo kan in klas 4 begonnen worden met de algemene inleidende module 'Modelleren', waar eenvoudige voorbeelden uit diverse wetenschapsgebieden aan de orde komen. Vervolgens zijn er specifiekere mo-

dules met een thema, zoals tsunami's en golven. Deze kunnen gekoppeld worden aan een onderzoeksopdracht aan de universiteit of behandeld worden in het vak Natuur, Leven en Technologie.

De ontwikkelde modules bestaan uit leerlingmateriaal en docentmateriaal. Ze zijn ontwikkeld met de gedachte dat er samen aan het probleem gewerkt wordt. De docent en de leerlingen stellen zichzelf vragen en zoeken naar antwoorden vanuit probleemgeoriënteerde activiteiten in een rijke leeromgeving. Deze aanpak is gebaseerd op de constructivistische visie op leren en onderwijzen. De rol van de docent is om het geheel te begeleiden, hints te geven, vragen te stellen en de mogelijkheid te bieden om volgende stappen te zetten. In de literatuur wordt dit de *reciprocal teaching* methode [2] genoemd. Het lesmateriaal is op deze didactiek aangepast. Het leerlingmateriaal is een module, waarin verschijnselen uit de realiteit worden onderzocht door de leerlingen. Het verschijnsel wordt kort toegelicht. Aan de hand van vragen kunnen de leerlingen tot een beschrijving komen van de verschijnselen. Voor de docenten is er een uitgebreide docentenhandleiding, waarin literatuurverwijzingen, websites met applets en dwarsverbanden naar andere concepten in zijn opgenomen.

1.2 Aanleiding

De vraag die bij de invoering van dit nieuw vak wiskunde D en speciaal het leerdomein 'Wiskunde in Wetenschap' naar boven komt, is hoe de implementatie succesvol kan verlopen. Wat wordt verstaan onder een succesvolle implementatie? Wat wordt bereikt door modelleren een onderdeel te laten worden van het wiskunde-onderwijs?

Zoals eerder genoemd bevat modelleren wiskundige activiteiten [2]. Als wiskundige activiteiten correct worden uitgevoerd en begrepen is hoe en waarom de leerlingen de activiteiten kunnen toepassen, leidt dit tot een hoger abstractieniveau van de leerlingen. Dit heeft te maken met de cognitieve structuur van het brein, waarin cognitieve eenheden met elkaar in verbinding staan. Hoe meer cognitieve eenheden, bijvoorbeeld wiskundige activiteiten, met elkaar samen smelten, hoe hoger het abstractieniveau wordt. Een diepere uitleg wordt gegeven in hoofdstuk 2.

De didactiek die gebruikt wordt om modelleren te onderwijzen, is anders dan waarin een wiskundige theorie wordt onderwezen. Het leerproces wordt gestuurd door de vragen die de leerlingen zelf stellen en niet door de opgaven uit het boek. Hierdoor verandert ook de rol van de docent. Eerder legde de docent de theorie uit en de leerlingen gingen daarna bijbehorende sommen maken. De docent was diegene die het woord voerde en de leerlingen luisterden naar wat de docent te vertellen had en stelden eventueel vragen als ze het niet begrepen. Nu is het zo, dat de leerlingen het gesprek voeren, waarbij de docent aanwijzingen geeft of vragen stelt om het denkproces in gang te zetten.

Zoals eerder vermeld, wordt deze andere didactiek in de literatuur ook wel *reciprocal teaching* genoemd. Deze manier van lesgeven is ontstaan naar aanleiding van leerlingen die slecht zijn in het begrijpen van wat ze lezen [3]. Het is een didactische aanpak waar de leerlingen samenwerken door de dialoog aan te gaan met de docent en/of andere leerlingen. Dit maakt het denk- en leerproces van de leerlingen transparant. Doordat leerlingen naar elkaar luisteren,

kunnen ze ideeën opdoen en anderen verbeteren of aanvullen. *Reciprocal teaching* draait om vier strategieën, ook wel de Fabulous Four [4] genoemd: voorspellen, vragen stellen, verklaren en samenvatten. De docent is degene die elke strategie uitlegt, zodat de leerlingen bewust worden van hun eigen denkproces. Waar nodig helpt de docent de leerlingen om de strategie succesvol op te bouwen. Het doel van *reciprocal teaching* is de dialoog te gebruiken om het begripsvermogen bij teksten te verhogen en zelfsturing en leren luisteren te ontwikkelen. Bovendien raken de leerlingen gemotiveerder om problemen aan te pakken en op te lossen [5], omdat de leerlingen door de strategieën ontdekken dat ze niet de enigen zijn die moeite hebben met lezen.

1.3 Probleemformulering

Nu bekend is wat 'Wiskunde in Wetenschap' inhoudt en hoe het onderwezen wordt, kan er een onderzoeksvraag worden vastgesteld. Een succesvolle implementatie van het domein 'Wiskunde in Wetenschap' houdt in dat leerlingen in staat zijn om een probleem uit de praktijk in kaart te brengen en om te zetten in een abstracter wiskundig probleem. Als ze hiertoe in staat zijn, leidt dit tot het gebruik van wiskundige begrippen en verbanden op een hoger abstractieniveau. De didactische aanpak is van wezenlijk belang om de leerlingen te leren modelleren.

De onderzoeksvraag luidt dan ook:

Leidt een reciprocal teaching benadering tot het door leerlingen gebruiken van wiskundige begrippen en verbanden op een hoger abstractieniveau?

'Wiskunde in Wetenschap' wordt op de O.S.G. Hengelo vestiging Montessori gegeven als onderdeel van wiskunde D, wat door vier leerlingen is gekozen. Montessorionderwijs betekent voor de wiskunde leerlingen dat ze één les per week hebben van een wiskundedocent. De rest van de uren kunnen de leerlingen zich inschrijven voor een begeleidingsles. De leerlingen doen erg veel zelfstandig en bepalen in principe zelf welke stof ze doen. *Reciprocal teaching* is geen didactiek die dagelijks wordt toegepast. De leerlingen zullen moeten wennen aan het actief mee doen in het gesprek en het werken naar een model.

In totaal worden er drie lessen gegeven. Twee van de drie lessen worden gebruikt om in groepsverband een opdracht te maken en te leren modelleren. Deze lessen worden op video opgenomen. Zo kan elke denkstap van de leerlingen gevolgd worden. De derde les wordt gebruikt om de leerling zelfstandig of met z'n tweeën te laten werken aan één van de modelsituaties. Ze kunnen wel vragen stellen aan de docent. De leerlingen werken de opdracht uit op papier. Daartussen worden de leerlingen geacht thuis verder te lezen en te werken.

De twee lessen die in groepsverband worden gevolgd, worden met de *reciprocal teaching* aanpak gegeven. In de derde les moeten de leerlingen zelfstandig aan het werk of in groepjes van twee, zonder de begeleiding van een docent die de vragen stelt. De eerste twee lessen zijn te betitelen als sociaal-constructivistisch, terwijl de laatste les individueel-constructivistisch is, waar de leerlingen zelf de stappen moeten nemen en hun begripsvorming moeten 'construeren'.

Het handelen van de docent is te typeren als de didactische aanpak *reci-*

procal teaching, zoals uitgelegd zal worden in hoofdstuk 2. De docent stelt in principe alleen maar vragen om de leerlingen zelf de antwoorden te laten geven en ze de goede kant op te sturen. De video die wordt opgenomen, wordt later gebruikt om de opgaven volledig uit te werken en het hard op denken van de leerlingen te kunnen volgen.

1.4 Leeswijzer

In hoofdstuk 2 wordt het theoretisch kader gegeven met de theorieën van David Tall en Dina & Pierre van Hiele en de verbanden met de leer methode *reciprocal teaching*. Aan de hand van deze theorieën kan bepaald worden op welk abstractieniveau de leerlingen zijn. Daarna wordt in hoofdstuk 3 de opzet en uitwerking van het onderzoek gegeven, dat op de O.S.G. Hengelo vestiging Montessori is gedaan. In hoofdstuk 4 worden de resultaten van het onderzoek gegeven en conclusies en discussiepunten worden gegeven in hoofdstuk 5.

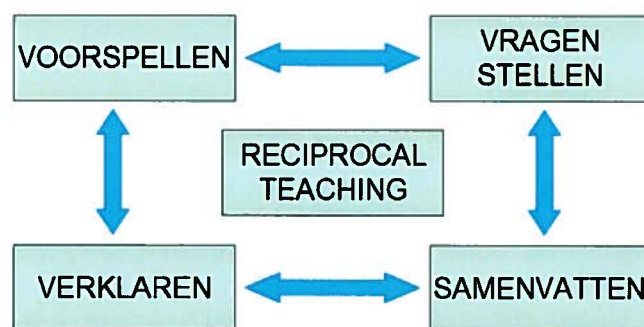
Hoofdstuk 2

Theoretisch kader

2.1 Inleiding

Om te onderzoeken of *reciprocal teaching* tot het gebruik van wiskundige begrippen en verbanden op een hoger abstractieniveau leidt, wordt eerst een theoretisch kader gegeven wat *reciprocal teaching* precies inhoudt. Verder wordt de definitie geformuleerd van wat er onder een hoger abstractieniveau wordt verstaan en hoe wiskundige begrippen met elkaar samenhangen zodat dit leidt tot een hoger abstractieniveau.

In dit hoofdstuk wordt eerst uitgelegd wat de grondslag is van *reciprocal teaching*, namelijk het constructivisme. *Reciprocal teaching* wordt gedefinieerd en de Fabulous Four (zie Figuur 2.1) wordt uitgelegd. Daarna wordt de samenhang tussen wiskundige begrippen beschreven volgens de theorieën van David Tall en Pierre van Hiele. Beide theorieën vloeien voort uit het constructivisme.



Figuur 2.1: Reciprocal teaching schema met de Fabulous Four eigenschappen

2.2 Constructivisme

Constructivisme vindt haar wortels in het werk van de Zwitserse psycholoog Jean Piaget [6] en staat tegenover het objectivisme. De objectivisten zien kennis als een object dat buiten de leerling staat. Het object kan door de docent worden overgedragen aan de leerling. Constructivisten zien kennis als een innerlijk object dat aangesproken en ontwikkeld kan worden. Het constructivisme is de grondtheorie van theorieën en kennisstructuren als het sociaal-constructivisme. Het sociaal-constructivisme berust op ideeën van Vygotsky [7]. Een gevolg hiervan zijn theorieën en kennisstructuren als de Van Hiele niveau's van Dina en Pierre van Hiele [8].

Piaget bestudeerde de ontwikkeling van kennis bij kinderen en zei dat kennis geconstrueerd wordt doordat kinderen in aanraking komen met objecten, ideeën en ervaringen. Kennis is niet, zoals de objectivisten beweerden, een object buiten het kind dat overgedragen kan worden door een docent. Leerlingen kunnen zelf kennis vergaren, zonder dat een docent de kennis aandraagt. Kennis vergaren moet dan ook een actief proces zijn, waar leerlingen begeleiding bij nodig hebben [9]. Het kost namelijk meer tijd, voordat leerlingen kennis 'ontdekken' en als ze er zelf niet op tijd opkomen, kan het zijn dat hun motivatie wegebt. *Reciprocal teaching* is een didactiek, waarbij leerlingen zichzelf vragen leren stellen en zelf kennis moeten construeren door met elkaar te communiceren. De docent is er om de vragen te begeleiden zonder ze te beantwoorden en de kennis te sturen.

2.3 Reciprocal teaching

De derde klas van mevrouw Jansen heeft een aantal leerlingen die erg onder niveau lezen. Ze kunnen de woorden ontwarren of de woorden in geluiden breken en ze zo bijeenvoegen zodat ze de woorden kunnen zeggen. Echter, ze zijn niet in staat om te begrijpen wat ze lezen. De leerlingen raken gefrustreerd en met tegenzin proberen ze het, omdat ze zichzelf zien als "zwakke leerlingen". Ze begrijpen niet wat andere leerlingen doen, dat als zij lezen dat ze dan in staat zijn om de "juiste" antwoorden op tekstvragen te geven. Deze leerlingen zijn niet in staat te begrijpen hoe vragen gerelateerd zijn aan datgene dat ze lezen [10].

Hierboven wordt duidelijk waarom er een didactiek bedacht en onderzocht is om leerlingen met leesproblemen te helpen. Het idee is ontstaan om leerlingen aan de hand van strategieën teksten beter te begrijpen. *Reciprocal teaching* is een didactische aanpak, waar leerlingen onder begeleiding van een docent communiceren over een onderwerp. In een natuurlijke dialoog wordt het denkproces van de leerlingen blootgelegd, zodat ze van elkaar kunnen leren en elkaar kunnen helpen. Het is bedoeld om leerlingen cognitieve strategieën als samenvatten, vragen stellen, verklaren en voorspellen te leren, die kunnen helpen bij het beter begrijpen van teksten.

Reciprocal teaching is gebaseerd op de theorie van Vygotsky [7], die sociale interactie en dialoog een fundamentele rol toekende in de begripsontwikkeling. Dit sociaal-constructivisme, door hardop te denken en van gedachten te

wisselen met anderen, helpt in het verhelderen en herzien van gedachten en het geleerde.

In deze compositie, waarin leerlingen de dialoog met elkaar en met de docent aangaan, zullen er leerlingen zijn die verlegen zijn of moeilijk hun aandacht erbij kunnen houden. Deze opstelling is voor hen moeilijk en daarom is het van belang om in kleinere groepen te werken en de leerlingen een doel of een richting te geven. De vier strategieën, ook wel Fabulous Four, van Levi Oczkus [11] kunnen hierbij helpen.

De vier strategieën zijn bedoeld om de dialoog te structureren. Immers, leerlingen en docent zullen op elkaar reageren. Bovendien kunnen de strategieën de leerlingen houvast geven als ze later zelf met een tekst aan de gang moeten gaan. De strategieën zijn hieronder weergegeven met een wiskundige invulling. Om de strategieën duidelijker te maken in een wiskundig onderwerp, wordt de eerste opdracht uit de module A gebruikt als voorbeeld. De opdracht heet 'Kijkafstand' en de vraag is hoever je kunt kijken als je op het strand staat.

Voorspellen: helpt de leerlingen om meer betrokken te raken in de situatie.

Door na te denken over wat er gebeurt en wat er nog meer kan gebeuren, maakt het de leerlingen makkelijker om voorspellingen te maken en komende gebeurtenissen en stappen te begrijpen. Bovendien helpt het om de hoofdzaken te onderscheiden van bijzaken, ofwel het versimpelen van de situatie en welke aannames er kunnen worden gedaan. Visuele weergaven van de situatie of delen daarvan helpen bij het bevestigen of herzien van eerdere voorspellingen.

Voorbeeld: "Het is ongeveer x km!", "Misschien ligt het aan je ogen", "Dat ligt aan het weer", "Het heeft vast te maken met hoe hoog je staat" of "Het ligt aan de ronding van de aarde".

Vragen stellen: leert de leerlingen te reflecteren op de al verzonnen stappen die genomen zijn. Naast reflecteren kunnen de leerlingen elkaar ook op ideeën brengen en achtergrond informatie geven door vragen te stellen. Bovendien worden de leerlingen zekerder en enthousiaster om in een discussie deel te nemen, omdat ze door vragen durven stellen de situatie beter gaan begrijpen.

Voorbeeld: "Is de aarde overal even rond?", "Ik begrijp het niet, kun je het me uitleggen?", "Wat nemen we voor de lengte van een persoon en zouden die paar centimeters echt verschil maken?" of "Kunnen we Pythagoras gebruiken?".

Verklaren: helpt de leerlingen elkaar te helpen door de niet begrepen delen van de situatie te onderkennen en ze proberen te verklaren. Ook andere bronnen als internet, rekenmachine, bibliotheek of docent kunnen worden aangesproken als duidelijk is waar het probleem ligt.

Voorbeeld: antwoorden op vragen als: "Waarom is deze kijklijn eigenlijk loodrecht op de aarde?" of "De lengte 1.80m of 1.85m vergeleken met de straal van 6000 km is bijna verwaarloosbaar".

Samenvatten: helpt onduidelijkheden naar voor te halen en de situatie te comprimeren tot het hoofdidee en de belangrijkste details van de situatie.

Voorbeeld: "Dus de straal is overal hetzelfde", "We kunnen Pythagoras gebruiken" of "Een kijkafstand van 6 km komt overeen met wat we voorspeld hadden!".

De Fabulous Four zijn hulpmiddelen om de leerlingen structuur te geven in het lezen en beter begrijpen van teksten. Deze zijn ook nuttig voor wiskundige teksten en opgaven. De vraag is echter waarom deze didactiek past bij de ontwikkeling van wiskundige kennis. Die vraag wordt beantwoord in de volgende twee paragrafen waarin de wiskundige kennisstructuur van het brein wordt uitgelegd op twee manieren door Van Hiele en Tall. Deze twee manieren sluiten goed op elkaar aan en zo kan voor elk van de leerlingen bepaald worden waar ze in hun begripsontwikkeling zijn.

2.4 Van Hiele

In de jaren '50 ontwikkelden Dina en Pierre van Hiele de 'Van Hiele niveau's'. Zij suggereerden dat kinderen meetkunde kunnen leren door structuur aan te brengen in het redeneren. Het model neemt aan dat de leerlingen niveau's kan doorlopen.

Niveau 0 (visuele niveau): leerlingen herkennen figuren als totale entiteiten, zoals driehoeken en vierkanten, maar ze herkennen nog geen eigenschappen van deze figuren als rechte hoeken in een vierkant. Daarnaast analyseren ze delen van een figuur, zoals overstaande hoeken van parallelogrammen zijn congruent. De relaties tussen figuren en eigenschappen kunnen echter niet verklaard worden. Waarnemingen en beschrijvingen worden zintuigelijk uitgevoerd. Het is intuïtief, visueel, verbaal en objectmatig.

Niveau 1 (beschrijvende niveau): leerlingen kunnen relaties van eigenschappen in figuren en tussen figuren constateren. Informele bewijzen kunnen volgen, maar leerlingen zien niet hoe de logische volgorde wordt opgebouwd en kunnen ook geen bewijs construeren beginnend bij een andere aanname. De leerlingen kunnen met hun beschrijvende bevindingen werken met figuren, schema's en grafieken. Categorieën en vuistregels worden gemaakt en begrepen.

Niveau 2 (theoretische niveau): op dit niveau begrijpen leerlingen de waarde van een geometrische theorie die gebruikt kan worden in een axiomatisch systeem. De relaties en rol van niet gedefinieerde termen, axioma's, definities, theorieën en formele bewijzen worden begrepen. De mogelijkheid om een bewijs te formuleren op meer dan één manier wordt voorzien door de leerlingen. Leerlingen kunnen op dit niveau verschillende axiomatische systemen met elkaar vergelijken. Meetkunde wordt abstract bekeken met een hoge graad van striktheid, zelfs zonder concrete voorbeelden. De leerlingen ontdekken in de categorieën en regels systemen en verbanden. Bovendien zijn ze in staat om de regels en eigenschappen logisch te ordenen.

Leerlingen aanspreken op een te hoog niveau leidt tot onbegrip. De docent zal terug moeten gaan naar het niveau van de leerlingen dat ze beheersen om daarna verder te komen op volgende niveau's.

Naast Van Hiele zijn er meer onderzoekers geweest die een theorie hebben ontwikkeld met het constructivisme als grondtheorie. Davind Tall is er daar één van. In de volgende paragraaf worden zijn denkbeelden gepresenteerd.

2.5 David Tall

Uit het constructivisme komt de theorie over de ontwikkeling van een cognitieve structuur van David Tall [12] voort. Een cognitieve structuur is opgebouwd uit cognitieve eenheden en iedereen heeft zijn eigen unieke structuur. Elk individu verwerkt informatie, dat gecomprimeerd kan worden tot een cognitieve eenheid. Tussen cognitieve eenheden zijn verbindingen gelegd, zodat er een web ontstaat met knooppunten. Dit web heet de cognitieve structuur.

Een cognitieve eenheid is informatie die het individu constant in de gedachten heeft. Het kan een symbool of een feit ($2+5=7$) zijn, maar ook een verband of een (deel van een) bewijs. Een cognitieve eenheid ontstaat als informatie gecomprimeerd wordt. Compressie is het gebruik van een symbool voor zowel het proces als het concept. De samenvoeging van *proces* en *concept* heet een *procept*.

Voorbeeld: het symbool $2+5$ kan worden gezien als een proces, namelijk het optellen van de twee getallen 2 en 5. Daarnaast kan het worden gezien als het concept 'de som'. Als het proces en het concept begrepen zijn heet het symbool $2+5$ een procept.

Het gebruik van een symbool, voor zowel proces (de stappen die moeten worden genomen) als concept (het achterliggende idee), maakt de wiskundige denker flexibel. Hoe meer compressie mogelijk is, hoe meer structuur er in cognitieve eenheden kan worden aangebracht. De hiërarchische structuur van een cognitieve eenheid bestaat uit een laag details met daarboven een laag met hoofdzaken.

Cognitieve eenheden kunnen met elkaar samenhangen, waardoor verbindingen ontstaan tussen eenheden. Hierdoor ontstaat een spinnenweb met knooppunten die de cognitieve structuur van het wiskundig menselijk brein wordt. Om de kracht van de cognitieve structuur te maximaliseren, zou het lopen via verbindingen tussen eenheden een routine moeten worden. Een 'looproute' zelf kan dan weer opgeslagen worden als cognitieve eenheid, zodat het geen energie kost om bepaalde processen uit te voeren.

2.6 Wiskunde in Wetenschap

Voor wiskunde D, specifiek voor de in te voeren module 'Wiskunde in Wetenschap' met leren modelleren als doel, is de *reciprocal teaching* aanpak uitstekend geschikt. Om de leerlingen te leren modelleren, moeten de leerlingen hun denkproces gaan analyseren. Aan de hand van zichzelf en anderen vragen te stellen komen ze stap voor stap op een hoger abstractieniveau terecht.

De Van Hiele niveau's zijn ontwikkeld voor meetkunde en elementaire wiskunde op de middelbare school. Om ze toe te passen in 'Wiskunde in Wetenschap' worden hier nieuwe niveau's gedefinieerd die toegepast worden bij het vak modelleren. De drie nieuwe niveau's hebben dezelfde basis als die van Van Hiele: het visuele, beschrijvende en theoretische niveau. Gravemeijer geeft aan welke stappen er in het wiskundeonderwijs genomen moeten worden om niveauverhoging te bereiken. Die ideeën komen voort uit theorieën van Freudenthal [13].

Gravemeijer onderscheidt drie stappen: horizontaal mathematiseren, het uitvoeren van wiskundige bewerkingen en verticaal mathematiseren in engere

zin. Deze stappen zijn de uitwerkingen van de niveau's. In een klein voorbeeldje wordt uitgelegd wat deze drie stappen betekenen.

Voorbeeld: In Figuur 2.2 is een muis die kaas wil gaan eten. Hij moet daarvoor door het eerste schavot waar hij twee mogelijke poortjes kan kiezen. In het tweede schavot zitten drie mogelijke poortjes. Op hoeveel manieren kan de muis naar de kaas?



Figuur 2.2: Links: het probleem. Rechts: een schematische tekening.

Als eerste stap naar een oplossing zou je een schematische tekening kunnen maken, zoals rechts te zien is in Figuur 2.2. Deze stap heet horizontaal mathematiseren, waarin de praktijk omgezet wordt in een wiskundig probleem. Het probleem kan nu worden opgelost door de mogelijke wegen te tellen of door het aantal wegen in het eerste deel van de route (2) te vermenigvuldigen met het aantal mogelijke wegen in het tweede deel (3). Het uitvoeren van de vermenigvuldiging, $2 \times 3 = 6$, valt dan onder 'het uitvoeren van wiskundige bewerkingen'. Het bedenken dat het tellen vervangen kan worden door vermenigvuldigen behoort dan tot het verticaal mathematiseren in engere zin. Hiermee wordt namelijk de wiskundige activiteit van het tellen gemathematiseerd.

De Fabulous Four kan de leerlingen helpen om, bewust of onbewust, de juiste cognitieve eenheden van Tall naar boven te halen die ze nodig hebben om de situatie te begrijpen. Bovendien kan het verbanden leggen tussen cognitieve eenheden om de cognitieve structuur verder op te bouwen.

Hieronder de drie nieuwe niveau's die gebruikt worden om te kijken waar leerlingen zitten in hun proces van wiskundig modelleren. Cognitieve eenheden hierin zijn de wiskundige verbanden en begrippen. Ter verduidelijking wordt de opdracht 'Kijkafstand' weer gebruikt.

Niveau A (visuele niveau): de leerlingen zijn in staat om het praktijkprobleem uit de modelleeropdracht te omschrijven in eigen woorden en ze kunnen bedenken wat van invloed is op de huidige situatie. Daarnaast kunnen de leerlingen hun fantasie gebruiken om andere soortgelijke problemen te verzinnen en een intuïtieve oplossing te geven. In woorden of schetsjes kunnen ze de situatie nabootsen en weergeven wat de variabelen zijn. Gravemeijer en Freudenthal [13] noemen dit horizontaal mathematiseren: het toegankelijk maken van een probleemgebied voor een wiskundige aanpak.

Voorbeeld: de kijkafstand is de afstand van de persoon tot de horizon. Hoe langer de persoon is, hoe verder hij kan kijken. Dat is hetzelfde als dat hij op een treinrails staat en wil weten hoeveel kilometer spoor er tot aan de horizon ligt. Bij helder weer kan de persoon verder kijken dan bij mistig weer. In een schetsje wordt de aarde getekend met een poppetje erop die een kijklijn heeft richting de horizon. Aangenomen wordt dat de aarde rond is en de persoon 2 meter lang is.

Niveau B (beschrijvende niveau): de leerlingen zijn in staat om het probleem om te zetten in wiskundige begrippen en verbanden. Ze kunnen de variabelen in de situatie een naam geven en begrijpen de verbanden tussen de variabelen. Bovendien kunnen ze de situatie gedetailleerd schetsen en met getallenvoorbeelden kunnen de leerlingen het probleem uitwerken. Waar Freudenthal het heeft over horizontaal en verticaal mathematiseren heeft Gravemeijer het hier ook nog over het uitvoeren van wiskundige bewerkingen, die bij dit niveau aan de orde komen.

Voorbeeld: de schets wordt gedetailleerder. Het probleem is weergegeven in een rechthoekige driehoek. De straal komt twee keer voor en krijgt een waarde. Er wordt aangegeven dat de kijklijn loodrecht op de straal staat. De leerlingen verzinnen dat ze Pythagoras nodig hebben om de kijkafstand te bepalen en werken een getallenvoorbeeld uit met de bekende straal en lengte van de persoon.

Niveau C (theoretische niveau): de leerlingen zijn in staat om de verbanden weer te geven in formules, hun model te controleren en te bewijzen. Ze kunnen hun model aanpassen als de situatie verandert, omdat ze begrijpen wat hun model doet. Bovendien zijn ze bij machte de antwoorden te interpreteren in de praktijksituatie. Dit valt allemaal onder verticaal mathematiseren in engere zin.

Voorbeeld: Pythagoras wordt nu in variabelen opgeschreven met een onbekende straal (die berekend kan worden uit de omtrek van de gekozen planeet) en onbekende lengte van de persoon. De leerlingen proberen een paar situaties waarin de lengte van de persoon varieert. Ze begrijpen dat als de persoon langer is de kijkafstand groter wordt en krijgen gevoel hoeveel dit dan is.

Op elk niveau hebben de leerlingen cognitieve eenheden nodig. De leerlingen beheersen een niveau als alle cognitieve eenheden die bij het probleem horen worden gecompriëerd en gelinkt. Op niveau A ontstaat dan een spinnenweb van cognitieve eenheden. De leerlingen bevinden zich dus op een hoger abstractieniveau als ze in staat zijn om linken te leggen tussen cognitieve eenheden of zelfs een niveau kunnen doorlopen. Het spinnenweb van niveau A wordt een nieuwe cognitieve eenheid in de kern van een nieuw spinnenweb op niveau B. Als alle cognitieve eenheden op niveau B gecompriëerd zijn tot één nieuwe eenheid, wordt deze een nieuwe cognitieve eenheid in de kern van een nieuw spinnenweb op niveau C. Zij bevinden zich op het hoogste abstractieniveau als ze zich kunnen redden in niveau C en alle losse cognitieve eenheden zoveel mogelijk gecompriëerd zijn. De cognitieve structuur bestaat uit een paar cognitieve eenheden, waartussen makkelijk kan worden overgesprongen. De cognitieve structuur is dan compleet.

Als de leerlingen in staat zijn zichzelf vragen te stellen en te beantwoorden, als ze begrijpen hoe ze van werkelijkheid naar probleemsituatie, naar wiskundig model en uiteindelijk een uitwerking van een situatie kunnen maken, dan beheersen ze een routine dat leidt tot een model. Het modelleren zelf is dan een cognitieve eenheid geworden.

2.7 Samenvatting

Om 'Wiskunde in Wetenschap' op een succesvolle manier te implementeren in het vak wiskunde D en daarmee de leerlingen te leren modelleren wordt de didactische aanpak *reciprocal teaching* gebruikt. Tesamen met de Fabulous Four strategieën en de aangepaste niveau's voor modelleren wordt gekeken of de leerlingen wiskundige begrippen en verbanden op een hoger abstractieniveau kunnen geven en zelfs of modelleren een cognitieve eenheid kan worden.

Hoofdstuk 3

Methode

3.1 Inleiding

In dit onderzoek gaat het om of en zo ja, hoe *reciprocal teaching* leidt tot het gebruik van wiskundige begrippen en verbanden daartussen op een hoger abstractieniveau. In het vorige hoofdstuk werd de theorie gegeven om te bepalen of een hoger abstractieniveau bereikt is aan de hand van de (aangepaste) theorieën van Tall en Van Hiele. In dit hoofdstuk wordt de opzet van het onderzoek toegelicht, zodat in het volgende hoofdstuk de resultaten van het onderzoek gegeven kunnen worden gekoppeld aan de theorie.

3.2 Leerlingen

Het onderzoek is uitgevoerd op de O.S.G. Hengelo vestiging Montessori. De docent wil graag de startmodule gebruiken om wiskunde D te geven aan vier leerlingen. Het betreft vier leerlingen uit de vierde klas in de leeftijd van 15 en 16 jaar. De groep bestaat uit één meisje en drie jongens. Leerling A, B en C zitten op het vwo, leerling D op het havo. Ze hebben allemaal het exacte profiel Natuur & Techniek gekozen en er wordt dus verwacht dat ze geïnteresseerd zijn in wiskunde D. Mede door het feit dat wiskunde D een keuzevak is.

3.3 Materiaal

Voor 'Wiskunde in Wetenschap' zijn modules ontwikkeld door wiskundedo-centen uit de regio Twente in samenwerking met Universiteit Twente. In module 1 (de startmodule [14]) leren de leerlingen hoe ze aan de hand van het stellen van vragen aan zichzelf een probleem uit de werkelijkheid tot een wiskundig model kunnen maken en deze kunnen uitwerken en oplossen.

In Bijlage A is de leerlingmodule gegeven. De module is bedoeld als inleiding op het onderwerp 'wiskundig modelleren'. De leerlingen worden geconfronteerd met open en relatief overzichtelijke situaties, waarin ze eerst zelf hun weg moeten zien te vinden. Door reflectie op het handelen van de leerlingen onder leiding van een docent wordt geprobeerd om in kaart te brengen wat er bij modelleren komt kijken. De modelleercyclus is bedoeld om richting te

geven aan het handelen bij modelleren. Omdat het kunnen zetten van stappen in deze cyclus is gebaseerd op het jezelf vragen durven stellen is ook aan dat aspect aandacht geschonken in de module.

De opbouw van de module is als volgt:

1. Modelleren, wat is dat?: In dit introductie hoofdstuk worden de leerlingen uitgenodigd tot modelleren door eerst te spelen met praktijksituaties en daarna hulpvragen kunnen gebruiken.
2. De modelleercyclus: Hierin wordt beschreven welke stappen (werkelijkheid, vraag, model, antwoord) er in elk modelleerproces worden gezet, zodat de leerlingen telkens bewust zijn van de fase waarin ze bezig zijn bij het modelleren.
3. Jezelf vragen leren stellen: Om werkelijk stappen te kunnen zetten in de modelleercyclus, wordt de leerlingen geleerd hoe ze zichzelf vragen kunnen stellen.
4. Enkele modelsituaties: Het is nu de bedoeling dat er in kleine groepjes minstens één van de modelsituaties volledig uitwerken.

Er is tevens een handleiding voor docenten geschreven, waar de opdrachten staan uitgewerkt voorzien van achtergrondliteratuur. Daarbij zijn tips gegeven om de lessen te structureren en wordt uitgelegd wat *reciprocal teaching* inhoudt. In het onderzoek worden de volgende opgaven behandeld in de lessen, waarbij alle stappen uit de modelleercyclus aanbod komen in de module.

Voor de opdracht 'Kijkafstand' is het de bedoeling dat de leerlingen de volgende stappen nemen in de modelleercyclus. In Figuur 3.1 is een schets weergegeven die bij stap 2 past.

Stap 1: Intuïtie (kijkafstand heeft te maken met hoe lang je bent), aannames maken (aarde is rond, kijkhoogte is 2 meter), schets maken (aarde, individu, kijklijn)

Stap 2: Gedetailleerd schetsen (aarde, raaklijn, rechte hoek, straal), variabelen toekennen in schets (in juiste eenheden), welke wiskunde gebruiken we? (omtrek aarde voor de straal, Pythagoras), getallenvoorbeeld uitrekenen

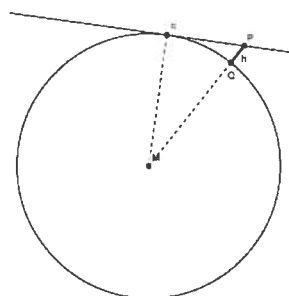
Stap 3: Formule in variabelen ($a = \sqrt{(\frac{40000000}{2\pi} + h)^2 - (\frac{40000000}{2\pi})^2}$), variëren voor extremere gevallen (hoe ver kijk ik als ik op de Eiffeltoren sta?), terugkoppeling (was intuïtie juist?)

Stap 4: Algemene formule (voor andere planeten en maan)

Voor de opdracht 'Zwemmer in nood' zijn de volgende stappen in de modelleercyclus van belang.

Stap 1: Intuïtie (lopen is sneller dan zwemmen, kust is recht), aannames maken (snelheden, afstanden), schets maken (driehoek, zwemmer, redder)

Stap 2: Variabelen toekennen in juiste eenheden (x is afstand langs kust, $t(x)$ is totale tijd onderweg), welke wiskunde gebruiken we? (Pythagoras, minimaliseren op GR), getallenvoorbeeld uitrekenen (direct zwemmen, eerst lopen dan zwemmen)



Figuur 3.1: Schets behorend bij 'Kijkafstand'

Stap 3: Formule opstellen met variabelen (bijv: $t(x) = 0.4x + 2\sqrt{200000 - 800x + x^2}$)

Stap 4: Controle van uitkomsten (tijdsduur tussen extremen?), algemene formule (verschillende snelheden variabel)

De opdracht 'Hoe snel beweeg je als je stil staat?' heeft de volgende stappen die door de leerlingen doorlopen moeten worden. In Figuur 3.2 is een gedetailleerde schets weergegeven van de opdracht.

Stap 1: Intuïtie (waar op aarde bepaalt snelheid)

Stap 2: Aannames (aarde is rond, aardas is middellijn van bol, omtrek aarde is 40000 km)

Stap 3: Gedetailleerd schetsen (zie Figuur 3.2), getallenvoorbeeld uitwerken (voor Amsterdam)

Stap 4: Controle van getallenvoorbeeld

De laatste gezamenlijke opdracht 'Fabriekshal' voor de leerlingen bevat de volgende stappen uit de modelleercyclus.

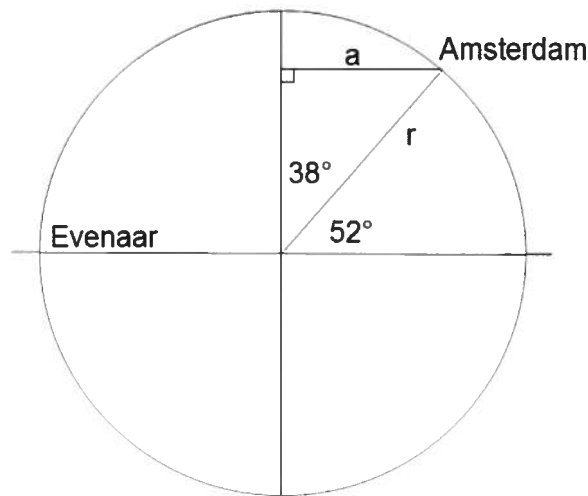
Stap 1: Intuïtie (oppervlakte afhankelijk van lengte en breedte)

Stap 2: Aannames (fabriekshal en terrein zijn rechthoeken), variabelen toekennen (lengte l , breedte b , oppervlakte A), getallenvoorbeeld uitwerken

Stap 3: Formule opstellen met variabelen (bijv: $\text{opp}(\text{terrein}) = A(L) = \frac{2400L}{L-20} + 30L$)

Stap 4: Algemene formule (lengte en breedte bepalen), controle

In de module wordt uitgelegd wat modelleren is, welke kernbegrippen daar bij horen, hoe de leerlingen zichzelf vragen leren stellen en enkele modelsituaties waar ze aan kunnen gaan werken. Voor de eindopdrachten kiezen de leerlingen de opdrachten 'Thuiswerkers', 'Straatverlichting' en 'Goot'. Leerling A kiest 'Thuiswerkers', leerling B en D kiezen 'Straatverlichting' en leerling C kiest 'Goot'. Er wordt duidelijk verteld dat het niet gaat om het antwoord, maar om het denk- en leerproces van de leerlingen. Het is de bedoeling dat ze daarbij de vier stappen uit de modelleercyclus gebruiken.



Figuur 3.2: Schets behorend bij 'Hoe snel beweeg je als je stil staat?'

3.4 Onderzoeksinstrumenten

Om te kunnen vaststellen op welk abstractieniveau de leerlingen zich bevinden, worden er steekwoorden gekozen per niveau A, B en C uit hoofdstuk 2. De steekwoorden worden gewaardeerd. Steekwoorden uit het beschrijvende niveau A krijgen waarde 5. Steekwoorden uit het analytische niveau krijgen waarde 3 en uit het theoretische niveau C waarde 1. Hoe lager de waarde, hoe hoger het abstractieniveau. Zo ontstaat er een criteriumlijst, zoals hieronder weergegeven.

waarde 5: Intuïtie, aannames maken, waarneming in globale schets

waarde 3: Schematische voorstelling, variabelen toekennen in juiste eenheden, welke wiskunde gebruiken we?, uitgewerkt getallenvoorbeeld

waarde 1: Formule in variabelen (abstract zonder enige herkenning), variëren voor extreme gevallen, controle en terugkoppeling naar praktijk

3.5 Dataverzameling

De data is verzameld door de gesprekken van de leerlingen op te nemen op video. De vier leerlingen gaan in een groep zitten. Er staan vier tafels in vaste verdeling aan elkaar geschoven, zodat iedereen elkaar goed kan zien en met elkaar kan communiceren. Elke leerling beschikt over eenzelfde module, zodat ze zelf de uitleg en opdrachten kunnen lezen. De docent schuift aan tafel bij één van de leerlingen. De videocamera staat voorin het lokaal, zodat alle leerlingen en de docent in beeld zitten.

In de eerste twee lessen wordt in deze setting gediscussieerd over de opdrachten. In de laatste les werken leerling A en C zelfstandig aan een eindop-

dracht en leerling B en D werken samen. Nog steeds zitten ze in een groep van vier. Alleen leerling B en D zitten naast elkaar, zodat ze makkelijk met elkaar kunnen overleggen.

3.6 Dataverwerking

Het videomateriaal is verwerkt door het op papier uit te schrijven. De volledige uitwerkingen van de lessen en van de eindopdrachten zijn opgenomen in Bijlage B.

De lessen zijn in opdrachten verdeeld. Per opdracht wordt gekeken hoe ver de leerlingen komen in de aangepaste niveau's, welke cognitieve eenheden daarbij gebruikt worden en of ze bouwen aan hun cognitieve structuur door compressie van cognitieve eenheden. Bovendien wordt het duidelijk of de Fabulous Four effect heeft op de stappen die genomen worden tijdens de modelleercyclus.

In deze paragraaf worden allereerst de steekwoorden en wiskundige activiteiten van de leerlingen die belangrijk zijn voor de modelleercyclus uit de uitwerkingen worden gehaald. Dit is te zien in Tabel 3.1. Daarna wordt aan elk steekwoord of wiskundige activiteit een waarde (1, 3 of 5) uit de criteriumlijst gekoppeld. Deze waarde wordt toegekend als de leerlingen laten zien dat ze dat steekwoord of wiskundige activiteit begrijpen, beheersen en overeenkomt met één van de steekwoorden uit de criteriumlijst. Het begrijpen en beheersen kan zijn dat de leerlingen zichzelf en elkaar helpen om verder te komen in de modelleercyclus. Verder komen in de modelleercyclus betekent dat er compressie optreedt in cognitieve eenheden. De leerlingen begrijpen wat ze zeggen en wat ze met de informatie kunnen. Zo ontstaat er per opdracht een waardelijst met daarachter een omschrijving van het denkproces van de leerlingen. Sommige steekwoorden of wiskundige activiteiten kunnen niet precies de waarde krijgen uit de criteriumlijst, omdat deze niet exact overeenkomen met de steekwoorden uit de criteriumlijst of niet geheel goed zijn uitgevoerd door de leerlingen. De beslissing is genomen door de onderzoeker en gecontroleerd door de docent. Achteraf wordt beslist of de leerlingen door *reciprocal teaching* zich op een hoger abstractieniveau bevinden.

In Tabel 3.1 zijn steekwoorden en wiskundige activiteiten met bijbehorende waarde onderstreept. Dit zijn voorbeelden, die hieronder toegelicht worden zodat een idee ontstaat hoe de steekwoorden uit de conversaties zijn gehaald en hoe er een waarde aan is gekoppeld.

intuïtie: hoogte/lengte persoon ⇒ 5: *in de opdracht 'Kijkafstand' zegt leerling A: "Ik denk dat het te maken heeft met hoe groot je bent." Hij spreekt een vermoeden uit dat overeenkomt met 'intuïtie' uit de criteriumlijst. Daardoor kan er direct een waarde 5 aan worden gekoppeld.*

eenheden: snelheid in meter per uur ⇒ 3: *in de opdracht 'Zwenmer' begrijpt leerling C, nadat leerling A het aangeeft, dat de snelheid in meters per uur moet als de afstand ook in meters is. Dit begrijpen van het in juiste eenheden zetten, wordt gewaardeerd met een waarde 3.*

Leerling	Kijkafstand	Opdrachten			Eindopdracht
		Zwemmer	Hoe snel beweeg je als je substraat?	Fabriekshal	
Leerling A:	intuïtie: hoogte/lengte persoon $\Rightarrow$ 5 gevolg van aanname: straal over hetzelfde $\Rightarrow$ 4 intuïtie: hoek van 90 graden $\Rightarrow$ 5 uitleg geven over opstellen formule $\Rightarrow$ 1 getallenvoorbeeld $\Rightarrow$ 3 proberen andere lengtes $\Rightarrow$ 1	aanname: lopen sneller dan zwemmen $\Rightarrow$ 1 aanname: lopen 10 km/u, zwemmen 5 km/u $\Rightarrow$ 5 juiste eenheden: snelheid in meter per uur $\Rightarrow$ 3 realistische kijk: 10/20 km $\Rightarrow$ 1	intuïtie: draait aarde $\Rightarrow$ 5 intuïtie: breedtegraad $\Rightarrow$ 5 rekennmachine gebruik: haaijes $\Rightarrow$ 5 schetsen $\Rightarrow$ 5 parate kennis: SosCasToa $\Rightarrow$ 3 getallenvoorbeeld $\Rightarrow$ 3 geeft uitleg aan anderen $\Rightarrow$ 1 vult formule van leerling C aan $\Rightarrow$ 1	schetsen $\Rightarrow$ 5 aannames $\Rightarrow$ 5 variabelen voor breedte en lengte $\Rightarrow$ 1 trekt goede conclusies $\Rightarrow$ 1 nauwkeurige werkwijze $\Rightarrow$ 3 koppelt terug naar verwachting $\Rightarrow$ 1	aannames $\Rightarrow$ 5 waarden in getallenvoorbeeld $\Rightarrow$ 5 formule in variabelen $\Rightarrow$ 1 formule $\Rightarrow$ 3
Leerling B:	intuïtie: hoe goed je ogen zijn $\Rightarrow$ 5 ziet juiste driehoek $\Rightarrow$ 3 helpt bij rekennmachinegebruik $\Rightarrow$ 5	intuïtie: sneller lopen dan zwemmen $\Rightarrow$ 5	omtrek van de aarde is 40000 km $\Rightarrow$ 4 straal kan geen 62000 km zijn $\Rightarrow$ 1	schetsen $\Rightarrow$ 5	schets $\Rightarrow$ 5 aanname: weg is 4m breed $\Rightarrow$ 3 formule $\Rightarrow$ 3 vaste waarden omtrek $\Rightarrow$ 5 schetsen met variabelen $\Rightarrow$ 3
Leerling C:	intuïtie: afstand 8 tot 10 km $\Rightarrow$ 5 intuïtie: helling aarde $\Rightarrow$ 5 schetsen $\Rightarrow$ 3 intuïtie: hoek van 90 graden $\Rightarrow$ 4 formule in variabelen $\Rightarrow$ 1 getallenvoorbeeld $\Rightarrow$ 3 proberen met andere lengtes $\Rightarrow$ 1	aanname: als je in water stapt met een in water kunt zwemmen $\Rightarrow$ 5 aanname: lopen 10 km/u, zwemmen 5 km/u $\Rightarrow$ 5 eenheden: snelheid in meter per uur $\Rightarrow$ 3 intuïtie: omtrek Amsterdam kleiner $\Rightarrow$ 5 welke wiskunde?: SosCasToa $\Rightarrow$ 3 kennis: hoek en zijde is voldoende om overige onbekende te weten $\Rightarrow$ 1 getallenvoorbeeld $\Rightarrow$ 3 rekennmachine: graden en radalen $\Rightarrow$ 1 formule uitschrijven $\Rightarrow$ 1	intuïtie: omtrek van de aarde $\Rightarrow$ 5 intuïtie: aarde draait in 24 uur rond $\Rightarrow$ 5 intuïtie: omtrek Amsterdam kleiner $\Rightarrow$ 5 welke wiskunde?: SosCasToa $\Rightarrow$ 3 kennis: hoek en zijde is voldoende om overige onbekende te weten $\Rightarrow$ 1 getallenvoorbeeld $\Rightarrow$ 3 rekennmachine: graden en radalen $\Rightarrow$ 1 formule uitschrijven $\Rightarrow$ 1	kent variabelen toe $\Rightarrow$ 3 getallenvoorbeeld $\Rightarrow$ 3	schetsen met variabelen $\Rightarrow$ 3 getallenvoorbeeld $\Rightarrow$ 3 schrijft formules om $\Rightarrow$ 3 trekt conclusies $\Rightarrow$ 2 terugkoppeling naar praktijk $\Rightarrow$ 1
Leerling D:	intuïtie: iets met straal van de aarde $\Rightarrow$ 5 aanname: aarde is rond $\Rightarrow$ 5 schets $\Rightarrow$ 3 verklaart waarom hoek 90 graden $\Rightarrow$ 3 eenheden goed: straal in meters $\Rightarrow$ 3 getallenvoorbeeld op rekennmachine $\Rightarrow$ 3	aanname: lopen dubbel zo hard als zwemmen $\Rightarrow$ 5 schets: driehoek $\Rightarrow$ 5 intuïtie: beter eerst lopen $\Rightarrow$ 4 aanname voorstel: 10 en 20 km $\Rightarrow$ 5	aanname: aarde draait recht om as $\Rightarrow$ 5 in woorden omschrijft hij oplossingsmethode $\Rightarrow$ 3 intuïtie: straal A'dam nodig $\Rightarrow$ 4 op rekennmachine getallenvoorbeeld $\Rightarrow$ 3 wiskunde: Pythagoras $\Rightarrow$ 3	intuïtie: 50 bij 50 is te groot $\Rightarrow$ 5 aanname: getallen voor lengte en breedte $\Rightarrow$ 5 probeert getallenvoorbeeld $\Rightarrow$ 4	schets $\Rightarrow$ 5 aanname: weg is 4m breed $\Rightarrow$ 5 formule $\Rightarrow$ 3

Hoe modelleren een cognitieve eenheid wordt

Tabel 3.1: Steekwoorden van leerlingen per opdracht gekoppeld aan een waarde uit criteriumlijst

intuïtie: straal A'dam nodig⇒4: leerling D zegt in opdracht 'Hoe snel beweeg je als je stilstaat?': "Als je nou aanneemt dat de aarde recht om zijn as draait. Dan kun je zo de straal uitrekenen op de evenaar. Als je dan ergens Amsterdam hebt en je kunt kijken hoever het naar de middenlijn is, dan kun je het ook uitrekenen.". Hij concludeert daarna dat hij de nieuwe straal nodig heeft. Intuïtief geeft hij de oplossing van het probleem, maar onderbouwt het nog niet met een schets of variabelen. Het is een twijfelgeval, omdat het meer dan intuïtief is. Er wordt een waarde 4 aan gekoppeld.

probeert getallenvoorbeeld⇒4: leerling D probeert de opdracht 'Fabriekshal' op zijn rekenmachine uit te rekenen. Dit komt overeen met 'getallenvoorbeeld uitwerken' uit de criteriumlijst. Hij is echter niet in staat om het op te lossen. Waardoor deze wiskundige activiteit gekoppeld wordt aan waarde 4.

3.7 Data analyse

Per leerling wordt het proces beschreven; de stappen die de leerling neemt en welke strategieën van de Fabulous Four hij gebruikt. Zo ontstaat er een idee hoe de cognitieve structuur bij de leerlingen is ontwikkeld. Te samen met de waarden uit Tabel 3.1 vormt dit de motivatie om tot een abstractieniveau te komen van de leerlingen. Dit abstractieniveau wordt gepresenteerd in het volgende hoofdstuk.

3.7.1 Leerling A

Bijna alles wat leerling A zegt, zegt hij in vraagvorm en zoekt hij bevestiging bij de docente. Zijn cognitieve structuur is goed ontwikkeld, omdat hij makkelijk linken legt tussen verschillende cognitieve eenheden. Zo springt hij makkelijk over van een getallenvoorbeeld naar het maken van een formule in variabelen. In het begin dringt het af en toe niet door wat er gevraagd wordt, ook omdat hij in verwarring wordt gebracht door de fantasie van de andere leerlingen. Met de steekwoorden in waarde 5 heeft hij dus lichte problemen. Als hij eenmaal beseft wat de vraag is, haakt hij moeiteloos in bij het probleem uiteenzetten in wiskundig termen. Hij kan daarna ook gemakkelijk van waarde 3 naar waarde 1 over springen, door een getallenvoorbeeld te vertalen in een wiskundig formule met variabelen en dit weer terug vertalen naar de praktijk.

Het begin van de opgave is lastig voor hem, maar zijn intuïtie is goed ontwikkeld. Dit maakt dat hij de strategie *voorspellen* redelijk beheerst, maar nog wel verder kan ontwikkelen. De strategie *vragen stellen* wordt regelmatig door hem gebruikt, hoewel deze meer door onzekerheid dan niet-weten wordt toegepast. De terugkoppeling naar de praktijk maakt hij regelmatig, wat betekent dat hij alles goed overziet. De strategie *samenvatten* is dan ook geen probleem. De Fabulous Four biedt hem houvast in situaties die hij niet kent.

Leerling A heeft moeilijkheden om goed te beseffen wat anderen zeggen. Hij is echter niet bang om dit aan te geven. In groepsverband kan hij veel van anderen leren, omdat medeleerlingen het probleem anders aan zullen pakken dan hij. Individueel een opdracht uitwerken gaat hem goed af. Hij is precies en consequent, dat leidt tot het uitvoeren van alle stappen in de modelleercyclus.

3.7.2 Leerling B

Leerling B heeft geluisterd, maar weinig gezegd tijdens de opdrachten die zijn gemaakt. Hierdoor is het niet mogelijk om aan te geven op welke niveau hij zich bevindt.

3.7.3 Leerling C

Leerling C is te snel voor de rest en voor zichzelf. Hij is enthousiast en niet bang om zijn mond open te doen. Hij begint te snel met schetsen, zonder eerst zijn intuïtie te laten spreken. Leerling C loopt regelmatig vast omdat hij parate kennis als formules voor de omtrek van een cirkel en (co)sinusregels mist. Als deze kennis hem wordt aangedragen, kan hij het direct gebruiken, maar hij slaat het niet op. Het 'waarom' is hem niet duidelijk. Zou hij in zijn eentje moeten werken, dan zou hij niet verder komen dan waarde 3. Hij kan gedetailleerd schetsen, variabelen toekennen en hij kan verzinnen welke theorie hij nodig heeft. De invulling van deze theorie ontbreekt echter. Door het communiceren met anderen wordt de ontbrekende kennis aangedragen en kan hij waarde 1 makkelijk bereiken.

De strategie *voorspellen* is voor leerling C nieuw. Hij is goed in het abstract nadenken, maar de terugkoppeling naar de praktijk ontbreekt op veel plekken. Dit valt op aan het begin van de opdracht, waar hij moeite heeft om aannames te maken en inschattingen te maken. Hij gaat gelijk schetsen. Aan het eind komt dit tot uitdrukking dat leerling A hem aanvult over het in elkaar zetten van de formule. Hij weet dat hij bepaalde kennis niet heeft en gebruikt dan de strategie *vragen stellen* om hier achter te komen. Leerling C ziet waar hij naar toe werkt en weet dan ook wanneer hij klaar is. *Samenvatten* doet hij niet in woorden, maar op papier wanneer hij zijn formule gemaakt heeft.

3.7.4 Leerling D

Leerling D doet alles in de beoogde volgorde. Hij denkt eerst na en volgt zijn intuïtie. Dan probeert hij te schetsen en te berekenen. Tussen het schetsen en rekenen slaat hij echter een stap over, namelijk het uitwerken van de som op papier. Hierdoor gaat hij foutjes maken, omdat hij niet meer overziet wat hij aan het doen is. Met een getallenvoorbeeld komt hij een heel eind, maar het daadwerkelijk omzetten in een formule kost hem moeite. Hij kan zich dus goed redden tot en met waarde 3. Hij zal moeite hebben om waarde 1 te halen. Waarde 2 zou hij echter zeker moeten kunnen halen, want alle cognitieve eenheden zijn daarvoor aanwezig. Er is echter compressie en een nauwkeurige werkwijze voor nodig om op de hoogste waarde, en daarmee het hoogste abstractieniveau, te komen. Hij begrijpt het proces, de stapjes die hij moet nemen om door de som te lopen. Maar het concept overziet hij niet. Zo kan er geen compressie optreden om tot een procept te komen.

Vragen stellen is niet leerling D's ding in tegenstelling tot *verklaren* en *voorspellen*. Zijn intuïtie duwt hem in de goede richting en aan de hand van zijn schetsen doorziet hij gemakkelijk wat variabelen doen in de situatie. Door samen te vatten en op te schrijven welke stappen hij genomen heeft, wordt het overzichtelijker. De laatste strategie *samenvatten* kan hem dan wellicht helpen om tot meer compressie te komen en tot een hoger abstractieniveau.

3.7.5 Docent

Om deze bevindingen te valideren, is de docent gevraagd om zijn interpretatie. Hieronder wordt zijn mening weergegeven over het vak, de lesmethode en over de behaalde resultaten van de leerlingen. Als deze mening overeenkomt met de analyse van het onderzoek, kan er een betrouwbare conclusie getrokken worden.

De docent is aangenaam verrast als hij de module ziet die gebruikt kan worden ter invulling van het vak wiskunde D. Zijn rol in *reciprocal teaching* ziet hij als de leerlingen op het goede been zetten en ze te sturen. Deze rol neemt hij vaker aan als hij daar voldoende tijd voor heeft. Modelleren is een moeilijk onderdeel van wiskunde, maar erg nuttig als ze het beheersen. Het is een aanvulling op de gewone rekenvaardigheden die ze leren. Het gaat hem niet om de antwoorden, maar vooral om het denkproces. Als ze hebben nagedacht, kunnen ze geen onvoldoende halen.

Over de leerlingen zegt hij het volgende: leerling A en leerling C zijn diegenen die het verst komen. Zij geven geen eensluitend antwoord op de vragen die ze kregen. Ze zijn in staat om alle stappen te maken tot aan het eind toe. Leerling A wil nog wel eens op het verkeerde been worden gezet en leerling C heeft moeite om met anderen samen te werken. Beiden zijn goed aan te sturen en hebben de eindopdracht ook voldoende gemaakt. Leerling B en leerling D moeten de eindopdracht overdoen. Ze hebben voor de eindopdracht alleen maar wat berekeningen en een antwoord ingeleverd, wat niet de bedoeling is van de opdracht. Volgens de docent is leerling D begaafd genoeg om dit te kunnen. Van leerling B krijgt hij weinig hoogte. Misschien is het luiheid of gooit de leerling de kop er tegenin. Hij vond de camera in ieder geval niet plezierig. Hij is erg gesloten en moeilijk te peilen.

3.8 Samenvatting

De leerlingen hebben met elkaar gediscussieerd over de gegeven opgaven. Met behulp van de video opnames wordt het denk- en leerproces van de leerlingen geanalyseerd. Er zijn waarden gekoppeld aan de steekwoorden en wiskundige activiteiten die uit de conversaties zijn gehaald. In het volgende hoofdstuk worden de resultaten per leerling gepresenteerd.



Hoofdstuk 4

Resultaten

4.1 Inleiding

In het vorige hoofdstuk is de criteriumlijst gekoppeld aan steekwoorden uit de conversaties. In dit hoofdstuk worden de resultaten van het abstractieniveau van de leerlingen weergegeven.

4.2 Abstractieniveau

In Tabel 4.1 staan de waarden die de leerlingen hebben bereikt in de gezamenlijk discussies en de eindopdrachten door het vergelijken van de criteriumlijst met de steekwoorden uit de conversaties. Het onderstreepte getal in de tabel betekent dat leerling C in de opdracht 'Hoe snel beweeg je als je stilstaat?' een waarde van 1 heeft bereikt. Dit is de hoogste waarde die de leerlingen kunnen bereiken en betekent dat leerling C zich voor die opdracht op het hoogste abstractieniveau bevindt.

Leerling	Kijkafstand	Zwenmer	Hoe snel beweeg je als je stilstaat?	Fabriekshal	Eindopdracht
Leerling A	1	3	1	3	1
Leerling B	4	5	3	5	3
Leerling C	1	3	<u>1</u>	3	2
Leerling D	3	4	3	4	3

Tabel 4.1: Waarden bereikt door leerlingen per opdracht

In de opdrachten die geheel zijn afgemaakt (Kijkafstand, Hoe snel beweeg je als je stilstaat? en de eindopdracht) bereikt leerling A waarde 1 (het hoogste abstractieniveau) in elke opdracht en zichtbaar met gemak doorloopt hij alle stappen uit de modelleercyclus. Hij stelt formules op in variabelen en kan de

terugkoppeling naar de praktijk eenvoudig maken. De andere opdrachten bereikt hij waarde 3, het middelste abstractieniveau, met gemak. Als er meer tijd was geweest, zou hij nog verder zijn gekomen.

Leerling B heeft maar een paar steekwoorden genoemd die allemaal de waarde 3, 4 of 5 (het laagste abstractieniveau) hebben. Van invloed is de camera, waardoor hij zich niet op zijn gemak voelt.

Leerling C bereikt net als leerling A waarde 1 voor de opdrachten die zijn afgemaakt. Hij is juist sterk in het laatste gedeelte van de opdrachten als er formules moeten worden uitgewerkt. Minder sterk is hij in parate kennis van formules als Pythagoras en in de terugkoppeling maken met de praktijk. Hier heeft hij de hulp van anderen bij nodig.

Leerling D bereikt niet het niveau van leerling A en C. Hij loopt vast in getallenvoorbeelden door een onnauwkeurige werkwijze. Hij haalt bijna overal waarde 3, omdat hij moeite heeft om verbanden tussen kwantificeerbare grootheden uit te drukken in wiskundige formules. Als hij hierbij hulp krijgt, is hij in staat om waarde 2 of zelfs het hoogste abstractieniveau 1 te halen. Hij overziet de opdracht immers prima.

Hoofdstuk 5

Conclusies & discussie

5.1 Inleiding

In dit hoofdstuk worden conclusies getrokken uit de resultaten van de leerlingen. Gekeken wordt hoe *reciprocal teaching* bijdraagt aan het halen van een hoger abstractieniveau van de leerlingen en of modelleren een cognitieve eenheid kan worden in de cognitieve structuur. Aan het eind van dit hoofdstuk wordt er gediscussieerd over het onderzoek en aanbevelingen gedaan voor eventuele aanpassingen en verder onderzoek.

5.2 Reciprocal teaching

De docent heeft de didactisch *reciprocal teaching* aanpak toegepast om leerlingen bewuster te laten worden met hun denkproces. Zijn rol is het begeleiden in de vragen en de leerlingen te sturen in het modelleerproces. De leerlingen zijn in het begin van de invoering van het domein 'Wiskunde in Wetenschap' erg onwennig van zowel de nieuwe didactische aanpak als de camera. Al snel gaat dit beter en kunnen ze de opdrachten tot een goed einde volbrengen, zonder de antwoorden van de docent.

Leerling A en C komen altijd het verst in de opdrachten doordat ze elkaar konden helpen. Door een schets van leerling C, begrijpt leerling A de vraag. Door aanvulling van leerling A, kan leerling C de formule opstellen voor de snelheid waarmee iemand ronddraait in Amsterdam. Doordat ze met elkaar communiceren, kunnen ze meer stappen zetten in de modelleercyclus. Leerling A is niet zo afhankelijk van antwoorden van leerling C, als omgekeerd. Daarom bereikt leerling A makkelijker individueel ook een hoger abstractieniveau dan leerling C. Ook leerling D komt verder doordat hij geholpen wordt met zijn rekenmachine. Deze bevindingen worden door de docent bevestigd.

De module, waarvan de opzet gebaseerd is op het constructivisme, is een goede basis voor 'modelleren'. Ze bevat een gestructureerde aanpak door de uitleg van de modelleercyclus, leert de leerlingen vragen te stellen en zelf kennis te construeren. De opdrachten uit de module en de rol van de docent leiden tot het voltooien van alle stappen in de modelleercyclus bij twee van de vier leerlingen.

Samenvattend kan gezegd worden dat leerling A en C zich kunnen redden op het theoretische niveau C, zoals beschreven in paragraaf 2.6, door de didactische aanpak *reciprocal teaching* en de module die daarop gebaseerd is. Leerling B komt helaas niet verder dan het visuele niveau A en leerling D komt tot het beschrijvende niveau B. Deze laatste leerling is zeker in staat om niveau C te halen. Geconcludeerd kan worden dat de module 'modelleren' en de didactische aanpak *reciprocal teaching* uitstekend op elkaar aansluiten en leiden tot een hoger abstractieniveau bij de leerlingen.

5.3 Modelleren als cognitieve eenheid

Eerder werd geconcludeerd dat leerling A en leerling C in staat zijn om tot het eind van de opdracht te modelleren. Ze overzien de situatie, kunnen het omzetten naar wiskundige termen en terug vertalen naar de praktijk. Beiden hebben ze de meeste moeite met *voorspellen*. Waar leerling A moeilijkheden heeft met het begrijpen van de vraag, heeft leerling C moeite met de koppeling naar de praktijk. Zoals ook te zien is in de eindopdracht, zijn de stappen die ze nemen in de modelleercyclus echter nog geen routine. Wanneer ze vaker gaan modelleren, wordt dit zeker een routine en daarmee een cognitieve eenheid in hun cognitieve structuur.

Voor leerling D is dit ook haalbaar. Hij komt een heel eind in niveau B, maar verliest het overzicht nog te veel. De strategie *samenvatten* zou hem hierbij kunnen helpen om tot een hoger abstractieniveau te komen.

Leerling B is volgens de docent slim genoeg om modelleren onder de knie te krijgen. Hij moet zich alleen willen inzetten en dat was helaas niet zichtbaar. Niet alleen de lesmethode is van belang voor het eindresultaat. Factoren als motivatie en omgeving (groepssamenstelling, camera) zijn terug te vinden in het gedrag en resultaat van de leerling.

De verklaring van de titel 'Hoe modelleren een cognitieve eenheid wordt' is dan ook: het comprimeren tot een routine van alle stappen uit de modelleercyclus, is hoe modelleren een cognitieve eenheid wordt.

5.4 Discussie

Dit is de eerste keer dat 'Wiskunde in Wetenschap' wordt gegeven in het vak wiskunde D. Er gaan dingen mis en lopen anders dan verwacht. Het onderzoek is gebaseerd op dit debuut van 'Wiskunde in Wetenschap' en er zijn dan ook op- en aanmerkingen over te maken. Hieronder een paar punten:

De docent mist contacturen en de terugkoppeling met de leerlingen. De leerlingen hebben drie contacturen gehad en de rest van het vak hebben ze zelfstandig gedaan. De docent vindt dat hierdoor te weinig terugkoppeling is en hij niet genoeg kan sturen. Bovendien denkt hij dat de leerlingen de lol van het vak missen als ze zo weinig contact hebben met docent en medeleerlingen. Hij wil met de leerlingen de modelleercyclus beter doorlopen, zodat de leerlingen bewuster worden van hun denkproces. Dit heeft effect op het abstractieniveau van de leerlingen.

Er zijn maar vier leerlingen die het vak wiskunde D gekozen hebben. Deze groep is niet groot voor een onderzoek. Zeker niet, als één van de leerlingen

moeite heeft met een camera waarop hij wordt opgenomen en er dan drie leerlingen overblijven die één groep vormen. De twee lesuren die worden gevuld met discussies over vier opdrachten zijn weinig om een betrouwbare generalisatie te maken over het abstractieniveau van leerlingen in het algemeen. Het voordeel is dat er wel een gedetailleerd beeld ontstaat van het denkproces van deze leerlingen om conclusies te kunnen trekken over hun abstractieniveau. Deze steekproefgrootte wordt ook in ander onderzoek gebruikt, zoals dat van Hoksbergen [15], die bij vijf leerlingen de cognitieve structuur onderzocht.

5.5 Verder onderzoek

Dit onderzoek is gebaseerd op werk van onder andere Tall en Van Hiele. Meerdere onderzoekers nemen die theorieën van Tall en Van Hiele als basis en onderzoeken hoe een hoger abstractieniveau bereikt kan worden.

Voor verder onderzoek is het interessant om werk van Monaghan & Ozmantar [16] te bestuderen die onderzoeken hoe wiskundige kennis een wiskundige structuur wordt. Het overgaan van kennis naar structuur wordt een abstractie genoemd en zij bestuderen hoe abstracties consolideren. Ze vergelijken abstracties en constructies. Het consolideren van een constructie wordt ook bekeken en vergeleken met onderzoek van Dreyfus & Tsamir [17]. Hershkowitz et al. [18] geven een model die het ontstaan van abstractie samenvat.



Bijlage A

Startmodule

CONCEPT

1.1 Inleiding

Soms zie je iets waarvan je denkt: "Hoe zou dat nou komen?"

Een beroemd voorbeeld is het (waarschijnlijk onware) verhaal van Newton die een appel uit een boom zag vallen.

Dat verschijnsel maakt op hem (zo wil het verhaal) een grote indruk, hij wilde er een verklaring voor vinden. Maar de werkelijkheid is behoorlijk ingewikkeld:

- OK, de appel beweegt naar 'beneden', maar hoe valt die appel precies?
- De appel is niet zuiver rond en is dat van invloed op het vallen?
- Hoe zit het met de lucht, speelt die een rol?
- En zo zitten er nog veel meer kanten aan...

Wat is wel belangrijk voor de verklaring en wat niet?

Je kunt er in zo'n situatie voor kiezen een voorstelling te maken waarbij je gebruik maakt van de wiskunde, van vormen met bekende eigenschappen en van getallen en formules. Dit noem je een wiskundig model – de bouwmaterialen zijn getallen, verbanden, punten, lijnen, noem maar op.

Newton bedacht voor de vallende appel de theorie van de zwaartekracht (een veelomvattend model)...

Opgaven:

1). kijkafstand

Je staat op het strand langs een rustige (vlakke) zee. Je ziet ver weg een schip. Hoe ver ben je van het schip verwijderd?



2). zwemmer in nood

Schuin voor je zie je een zwemmer in nood. Hoe kun je zo snel mogelijk bij hem komen om hulp bieden? Spring je meteen in het water of loop je eerst een stuk langs het strand?

CONCEPT

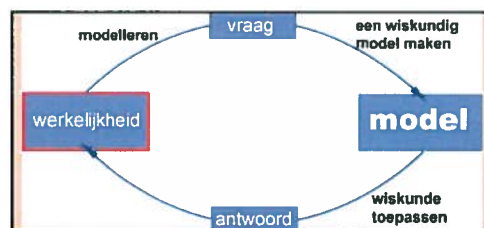
1.2 Modelleren, wat is dat?

Wetenschap wordt gemaakt door nieuwsgierige mensen die om zich heen kijken en zich dan vragen stellen over wat ze waarnemen. Nu is de werkelijkheid bijna altijd bijzonder ingewikkeld, te ingewikkeld om met alle details rekening te kunnen houden. En dus houd je met (in jouw ogen) onbelangrijke details ook gewoon geen rekening. Zodra je iets waarneemt vereenvoudigt je (waarschijnlijk onbewust) de werkelijke situatie.

Een model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid waarin nog alle eigenschappen zijn terug te vinden die belangrijk zijn voor de beschrijving van een bepaalde probleemsituatie.

Als je bij het formuleren van zo'n probleem bewust de werkelijkheid vereenvoudigt en grootheden benoemt die een rol kunnen spelen bij het oplossen ervan, spreek je van **modelleren**.

Je maakt vervolgens een wiskundig model door gebruik te maken van kwantificeerbare grootheden (dat zijn grootheden die getallen kunnen worden uitgedrukt) en de verbanden ertussen. De conclusies die je trekt na berekeningen in dat wiskundige model vertaal je terug naar de werkelijkheid. Als het resultaat niet bevredigend is moet je het model aanpassen en opnieuw de modelleercyclus doorlopen, bekijk het schema.



Figuur 1 : modelleercyclus

Van werkelijkheid naar model

Stap 1: Je kijkt naar de werkelijkheid en stelt jezelf een vraag die je wilt oplossen: de probleemstelling. Je bedenkt welke grootheden een rol spelen.

Stap 2: Je vereenvoudigt de werkelijkheid en ontwerpt een wiskundig model dat zo goed mogelijk bij de situatie of je probleemstelling past. Je moet je daarbij goed realiseren (opschrijven desnoods) waarom je bepaalde dingen weglaat. (Zijn er verborgen aannames in je lijst? Het bedenken van extreme gevallen kan je helpen.)

Van model terug naar werkelijkheid

Stap 3: Je zoekt het antwoord op je vraag door in je wiskundige model wiskunde toe te passen. De extreme gevallen kunnen je helpen. Het antwoord kan de oplossing van een probleem (de vraag) zijn, maar ook een beschrijving van een bepaalde situatie.

Stap 4: Je kijkt of je antwoord wel past bij de werkelijkheid. Daarmee onderzoek je of je model goed genoeg was of moet worden bijgesteld. In dat laatste geval doorloop je de cyclus opnieuw.

CONCEPT

Kijk nog eens naar de opgaven in paragraaf 1. Misschien kwam je er niet goed uit? Des te meer reden om even terug te kijken. Dit doen we in **opgaven 3). en 4).**

- 3). Bekijk opgave 1.1 nog eens. Waar liep het soepel en waar liep je vast?
 - a). Heb je aangenomen dat de aarde een zuivere bol is? Welke andere aannames heb je gedaan?
 - b). Heb je een schets gemaakt van de situatie? Hoe staat jouw kijkhoogte er in?
 - c). Hoeveel schatte je de kijkafstand?
 - d). Heb je een rechthoekige driehoek gevonden?
 - e). Over welke stap van de modelleercyclus gingen de voorgaande vragen?
 - f). Hoe gebruik je die rechthoekige driehoek in de bewerking?
 - g). Hoe maak je de uitwerking zo algemeen mogelijk (verschillende kijkhoogtes)?
 - h). Over welke stap in de modelcyclus gingen de vragen f en g?
 - i). Wat doe je in de vierde stap van de modelleercyclus bij dit probleem?
- 4). Bekijk **opgave 2** nog eens. Bekijk de aanzet tot een oplossing die je hebt gemaakt.
 - a). Welke aannames heb je gedaan?
 - b). Heb je een schets gemaakt van de situatie?
 - c). Heb je variabelen ingevoerd? Hoeveel en welke?
 - d). Heb je verbanden kunnen vinden?
 - e). Welke stappen in de modelleercyclus heb je nu gezet?
 - f). Hoe ga je vervolgens de afstand minimaal maken?
 - g). Kun je het antwoord controleren? Hoe?
- 5). Bij het modelleren spelen een aantal (wiskundige) begrippen een rol. In de volgende discussie zijn die kernbegrippen vet gedrukt. Beschrijf van elk van die begrippen de betekenis.



File in Nederland op de snelweg

Julia, Pjotr, Stefan, Lisa en Henk hebben een discussie over een krantenkop: "Nederland slijbt dicht met auto's".

Julia spreekt als **vermoeden** uit dat er in Nederland vaak files zijn omdat er veel auto's op de weg zijn. Pjotr betwijfelt of het wel zo eenvoudig is. En wat is nu eigenlijk veel?

Stefan geeft een **definitie**: het aantal auto's dat langs een bepaald punt komt per minuut.

Lisa vindt dat geen goede definitie, want als de snelweg drie rijbanen heeft in plaats van twee, dan kunnen er meer auto's langskomen. Dat is het is het **gedachte-experiment**

CONCEPT

van Lisa. De nieuwe definitie: het aantal auto's per rijbaan per minuut, is haar alternatief. Dat getal is een **grootheid** die stroming heet. Maar nu weten ze nog steeds niet wat 'veel' is. Henk zegt dat je volgens de verkeersregels twee seconden afstand moet houden. Dit betekent dat er maximaal, volgens de verkeersregels, 30 auto's per minuut per rijbaan langs kunnen komen: één auto per twee seconden. Dat is de test van Henk. Maar misschien is dat wel te veel, of te weinig. Misschien hangt het aantal ook wel van de snelheid af? Dat zijn vragen die aanleiding geven tot nieuwe vermoedens, testen, definities, en gedachte-experimenten, en misschien moeten er wel echte experimenten langs de weg gedaan worden.



Kernbegrippen bij modelleren

Bij modelleren spelen de volgende kernbegrippen een belangrijke rol:

- **De vraag:**
Iets wat interessant is om te weten, zonder daar al een vermoeden over te hebben.
- **Het vermoeden:**
Een uitspraak die aannemelijk klinkt, maar waarvan de waarheid nog niet vast staat.
- **De uitzondering:**
Situaties die niet passen in het model.
- **De definitie:**
Een duidelijke (wiskundige) afspraak van wat iets betekent.
- **Het gedachte-experiment:**
Een denkbeeldige situatie die iets verduidelijkt of verklaart.
- **De grootheid:**
Een variabele met bijbehorende eenheid, bijvoorbeeld: "snelheid" is de afstand afgelegd per tijd in meters per seconde, of kilometers per uur, twee verschillende definities.
- **De test:**
Een manier om een vermoeden concreet (in de praktijk) te testen.
- **Het tegenvoorbeeld:**
Een resultaat van een test, of gedachte-experiment, dat aantoont dat het vermoeden niet correct is.
- **De stelling:**
Een vermoeden dat waar blijkt te zijn.
- **Het bewijs:**
Een argumentatie waarom een stelling waar is.
- **Het gevolg:**
Iets wat direct, of simpel, volgt uit wat we al hebben bewezen hebben.
- **Het model:**
De wiskundige taal waarin we de grootheden, vermoedens, definities, testen, en stellingen formuleren.

CONCEPT

Iedereen kan iets inbrengen dat voortbouwt op een model dat al bestaat. Een tegenvoorbeeld, een definitie als je een woord te vaag vindt, een stelling als je weet waarom een vermoeden waar is, een gedachte-experiment, om een situatie te verduidelijken, enzovoort, enzovoort. Het is in de wetenschap belangrijk om goed naar elkaar te luisteren, en nauwkeurig op te schrijven welke definities, grootheden en stellingen samen het model uitmaken, zodat iedereen het over hetzelfde model heeft, want woorden zijn vaag, maar definities en formules niet.

Gebruik de modelleercyclus en de kernbegrippen bij de volgende opgaven.

6). economisch model

Bij de keuze van een mobiele telefoon speelt het soort abonnement een grote rol. Kies één type en maak een model om te beslissen wat voor jou de meest gunstige betalingswijze is.



7). de mast van een zeilboot

Je staat op het strand langs een rustige (vlakke) zee. Je ziet ver weg (met een verrekijker) alleen het topje van de mast van een zeilboot. Hoe ver ben je van deze zeilboot verwijderd?

CONCEPT

1.3 Jezelf vragen leren stellen

Het opstellen van een wiskundig model is vaak nog een heel gepuzzel.

Je hebt gezien hoe belangrijk het is om actief te zijn: stel jezelf passende vragen en probeer die te beantwoorden. Daarbij moet je proberen te schematiseren en na te denken over de variabelen. In de voorgaande paragraaf is dat voor je gedaan door hulpvragen te stellen. Een aantal mogelijke hulpvragen vind je als bijlage achter in deze module. Die lijst met vragen is beslist niet compleet: er zijn nog wel andere te verzinnen. Bovendien leer je hem natuurlijk niet uit het hoofd. Je houdt de modelleercyclus in de gaten en verzint zelf verstandige vragen. Ook bij het beschrijven van de oplossing is het nuttig om steeds op te schrijven welke vragen je jezelf hebt gesteld en welke antwoorden (en aannames) dat tot gevolg had. Volg je dan de stappen van de modelcyclus, dan kom je als vanzelf tot een leesbare uitwerking van je modelleersituatie.

Bekijk nog maar eens de modelsituaties 1.1 en 1.2.
Je maakt nu bij deze opgaven goede leesbare uitwerkingen.

8). Bekijk de opgaven 1 en 3 nog eens.

Schrijf de uitwerking van opgave 1 zo op dat de vier stappen van de modelcyclus zijn te herkennen:

- schrijf duidelijk op over welke probleemsituatie het gaat.
- zorg er voor dat de schets van de situatie en de aannames die je hebt gedaan duidelijk worden vermeld.
- maak de gebruikte wiskundige bewerkingen duidelijk.
- geef aan hoe het zit met de controles die je kunt uitvoeren.

9). Bekijk de opgaven 2 en 4 nog eens.

Schrijf de uitwerking van opgave 2 zo op dat de vier stappen van de modelcyclus zijn te herkennen:

- schrijf duidelijk op over welke probleemsituatie het gaat.
- zorg er voor dat de schets van de situatie en de aannames die je hebt gedaan duidelijk worden vermeld.
- maak de gebruikte wiskundige technieken duidelijk.
- geef aan hoe het zit met de controles die je kunt uitvoeren.

Eigenlijk weet je nu alles wat nodig is als basis voor het modelleren. Eigen creativiteit is belangrijk, jezelf en elkaar vragen leren stellen is heel belangrijk, de grote lijn is de modelcyclus en de rest is volharding...

CONCEPT

10). schaalmodellen

Doe één van de drie volgende opdrachten over schaalmodellen. Wissel je modelleerervaringen uit en schrijf een duidelijk leesbare uitwerking.

- a). Je kent ze wel: de treintjes van Märklin of Fleischmann. Je ziet er hier ééntje die staat op de drijfstaaf van hetzelfde origineel. Neem aan dat een echte loc met een snelheid van 60 km/h rijdt. Hoe snel moet je het schaalmodel laten rijden om het 'echt' te laten lijken?



- b). Deze auto valt. Dat wil je wel eens nadoen met een speelgoedauto. En dat neem je met een videocamera op. Bij het afdraaien van de film ziet het er niet 'echt' uit. Je kunt het 'echt' laten lijken door de film in slow motion af te draaien. Welke factor moet je voor de slow motion kiezen?

INFO:

$s = 0,5 \cdot g \cdot t^2$, met s de afgelegde weg in meter,
 $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ de zwaartekrachtversnelling en
 t de tijd in seconden



CONCEPT

- c). Een gietijzeren bootje is 3,60 m lang. Van dit bootje maak je een gietijzeren schaalmodel op schaal 1 : 10. Ligt het model relatief even diep in het water als het origineel?
Zo nee, hoe kun je ervoor zorgen dat dit wel het geval is?

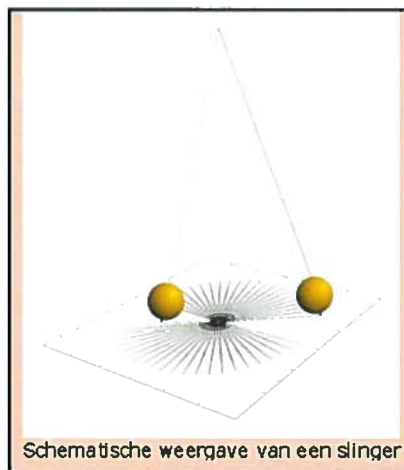
INFO:

De wet van Archimedes: de opwaartse kracht die een lichaam in een vloeistof ondervindt is gelijk aan het gewicht van de verplaatste vloeistof.

11). slinger

Een kogel aan het eind van een opgehangen draad maakt een periodieke slingerbeweging als je de kogel een (kleine) uitwijking geeft.

Je probeert een formule te vinden voor de slingerperiode. Bepaal eerst de eenheden (dimensies) van de verschillende grootheden in je model. Probeer dan een simpel verband voor de periode af te leiden waarbij de dimensies in ieder geval kloppen.



Schematische weergave van een slinger

CONCEPT

1.4 Enkele modelsituaties

Hier vind je enkele modelsituaties waarin je zelf (samen met anderen) moet zoeken naar de oplossing. Die oplossing schrijf je dan zo op dat iedere willekeurige voorbijganger die kan begrijpen:

- alle stappen moeten duidelijk zijn aangegeven (gebruik de stappen van de modelleercyclus);
- alle aannames en vereenvoudigingen moeten duidelijk zijn verwoord;
- de keuzes van de grootheden en de eenheden moeten duidelijk worden weergegeven;
- alle berekeningen moeten helder worden weergegeven;
- de vergelijking met werkelijkheid moet worden gemaakt.

Je noemt dit een leesbare uitwerking van de oplossing.

Bij de volgende probleemsituaties wordt zo'n leesbare uitwerking verwacht.

12). straatverlichting

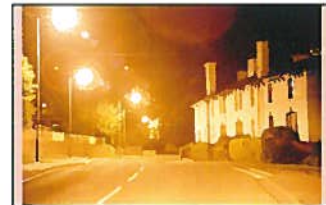
Er wordt een nieuwe weg aangelegd. Hoe ontwerp je zo goedkoop mogelijk de straatverlichting, terwijl je er toch voor zorgt dat de weg goed is verlicht?

INFO:

De lichtsterkte S (in watt per m^2) is recht evenredig met het vermogen P (in watt) van de lichtbron en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand (in m) tot de lichtbron. (Kun je verklaren waarom dit zo is?)

Je verlicht de weg met straatlantaarns met een bepaald vermogen, een bepaalde hoogte en een bepaalde onderlinge afstand, neem aan dat die niet variëren.

Wettelijk is vastgelegd dat de lichtsterkte op elk punt van een weg moet liggen tussen 10 en 320 Watt/ m^2 .



13). thuiswerkers

In de rotanmeubelenindustrie werd vroeger veel gebruik gemaakt van zogenaamde thuiswerkers. Dat waren mensen die in de avonden zittingen van stoelen invlochten met pitriet. Stel je voor dat een rotanmeubelenbedrijf van die thuiswerkers in dienst heeft. Ze laten twee soorten stoelen invlechten door deze mensen en brengen en halen die stoelen met een bestelbusje. De tijd die nodig is voor invlechten verschilt per soort stoel. De winst die het bedrijf maakt verschilt ook per soort stoel.

Bij welke wekelijkse productie is de winst op deze stoelen maximaal?

INFO:

Neem eerst bijvoorbeeld aan dat er 11 thuiswerkers in dienst zijn, dat er in het busje 30 stoelen passen, dat soort A één avond invlechten betekent en soort B twee avonden.

Neem ook aan dat elke thuiswerker 4 avonden per week werkt, dat de ene soort een winst van 200 euro per stoel en de andere soort een winst van 300 euro per stoel oplevert.

Ga daarna het model algemener maken.

CONCEPT

Bijlage: Mogelijke hulpvragen bij modelleren**Van werkelijkheid naar probleemsituatie**

Eigenlijk is dit vaak de moeilijkste stap.

- Wat wordt er gevraagd, kan ik dat in eigen woorden zeggen?
- Heb ik alle gegevens?
- Welke vereenvoudigingen kan ik maken?
- Kan ik een schema maken?
- Welke aannames kan ik doen?
- Welke variabelen zijn er?
- Welke verbanden zijn er tussen de variabelen?

Van probleemsituatie naar wiskundig model

Je probeert het probleem te vertalen in een wiskundig model.

- Zijn de variabelen kwantificeerbaar?
- Kan ik de verbanden (tussen kwantificeerbare grootheden) uitdrukken in wiskundige formules. Kloppen de eenheden met elkaar?
- Kan ik een getallenvoorbeeld maken? Extreme situaties doorrekenen?
- Kan ik de uitkomst van te voren schatten?

Van wiskundig model naar uitwerking

- Is het een bekend model, of ken ik een model dat er op lijkt?
- Kan ik een paar voorbeelden (en/of extreme gevallen) doorrekenen?
- Heb ik alle gegevens gebruikt, of zijn er nog verdere gegevens?

Je gaat nu wiskundige bewerkingen uitvoeren. Controleer elke stap op juistheid en probeer die juistheid aan te tonen. Werk zo overzichtelijk mogelijk. Je gaat na of het probleem volledig is opgelost en of je er iets van moet onthouden voor volgende problemen. Stel jezelf vragen als:

- Klopt het resultaat met mijn schatting?
- Hoe kan ik het resultaat verder nog controleren?
- Ben ik op de goede manier met eventuele afrondingen omgegaan?
- Heb ik de juiste eenheden gebruikt?

Van uitwerking terug naar de werkelijkheid

Je vertaalt de uitwerking die je hebt gevonden terug naar de werkelijkheid. Als het resultaat niet bevredigend is, stel je het model bij en doorloop je de modelleercyclus opnieuw.



Bijlage B

Uitwerking lessen

B.1 Les 1

B.1.1 Wat is wetenschap?

Docent: Weten jullie wat wetenschap is?

Leerling B: Hoe ze het hier bedoelen weet ik niet.

Docent: Wat is wetenschap in het algemeen? Hoe denk je over wetenschap? Wat doe je dan?

Leerling D: Kennis vergaren.

Docent: Kennis vergaren, heel goed ja! Jullie zitten op het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs, dus jullie gaan wetenschap beoefenen. Als het goed is, nadat je van de havo of het vwo afkomt. Dus wetenschap is kennis vergaren. Hoe vergaar je kennis? Hoe kom je aan kennis?

Leerling D: Door te onderzoeken.

Docent: En wat ga je dan onderzoeken?

Leerling C: Alles, zou ik zeggen.

Docent: Ja, alles wat je ziet. Ken je een wetenschapper? Weet je wie er wetenschap bedreven hebben? Wat weet je ervan?

Leerling C: Einstein.

Docent: Einstein, ja! Dat is één van de grootste denk ik. Einstein is een wetenschapper en wat heeft Einstein uitgevonden?

Leerling C: De relativiteitstheorie.

Docent: Ja, en hoe denk je dat hij daar aan komt? Hoe denk je dat een wetenschapper aan zijn kennis komt?

Leerling C: Door na te denken.

Docent: Waar denkt ie dan over na?
(stilte)

Docent: Wat zie je om je heen?

Leerling C: Een camera.

Docent: Wat zou je aan die camera kunnen gaan onderzoeken?

Leerling C: Hoe die werkt.

Docent: En hoe doe je dat?

Leerling C: Door hem uit elkaar te halen.

Docent: Uit elkaar halen is wel een hele goeie. Als je iets wil onderzoeken, kun je het uit elkaar halen. Je kunt ook gebruiken maken, van iets wat om je heen

gebeurt. Kennen jullie het verhaal van Newton met de appel?

Leerling A: Nee

Leerling C: Ja

Leerling B: Half, ik weet niet meer precies hoe het ging.

Leerling D: Kreeg ie niet een appel op z'n kop?

Docent: Ja, tenminste dat is het ene deel van het verhaal. Newton was een jaar of 11, 12 en zijn moeder riep om te komen eten. Hij liep toen onder een appelboom door en toen kreeg hij een appel op zijn kop. Hij ging toen nadenken over: waarom valt die appel op de grond als die boom hem loslaat? En toen ging die wat ie aan die appel zag, gebruiken voor de planeten. Hij ging kijken, waarom de maan bijvoorbeeld niet op de aarde viel. Want die maan is ook los en de zon is ook los. Waarom dan de aarde niet op de zon viel of de zon op de aarde. Dus op zo'n manier, door te gaan kijken, iets onverwachts wat er op jonge leeftijd gebeurd is, waarom zou dit gebeuren en in verband te zetten met iets anders, is die appel een soort model geworden voor Newton. Daarom ging hij kijken hoe dan het zonnestelsel, het planetenstelsel in elkaar zit. En zo heeft hij de zwaartekracht ontdekt. Jullie gaan dat ook doen. Jullie gaan modellen maken van dingen die we gewoon zien.

(Uitleg over de module en de bedoeling van het vak)

B.1.2 Kijkafstand

(Inleiding en vraag worden gelezen)

Opdracht 'kijkafstand': je staat op het strand langs een vlakke zee. En je ziet ver weg een schip. Hoe ver weg ben je van dat schip? En hoever kun je kijken?

Leerling A: Ik denk dat het te maken heeft met hoe groot je bent.

Docent: Ok, schrijf dat maar 'ns op.

Leerling C: Ik weet wel, dat het tussen de 8 en de 10 km is.

Docent: Maar waarom is dat zo? Zou het meer zijn als je groot bent en minder als je klein bent?

Leerling C: Dat scheelt maar een heel klein beetje. Ik denk dat het echt maar om centimeters gaat.

Docent: Centimeters, dat zou kunnen. Laat maar zien dat dat zo is!

Leerling C: Dat gaan we maar eens proberen dan.

Docent: Waar zou het nog meer aan kunnen liggen?

Leerling B: Hoe goed je ogen zijn.

Leerling A: Verschil in hoogte.

Docent: Verschil in hoogte waarvan?

Leerling A: Ja ik weet niet. Daar hebben ze het over het strand. Als die iets hoger is dan de zee.

Docent: Dan wordt je dus zelf ook iets groter. Hoe zoek je nou zoiets uit?

Leerling A: Dan moet je misschien de afstand weten tot de boot?

Docent: Dat willen we nou juist weten, die afstand tot de boot.

Leerling C: Kun je dat niet met schaal doen ofzo? Zeg maar: die boot is in het echt 100 meter en nu is ie 100 centimeter of 10 of 3 cm.

Leerling A: Maar hoe weet je dan hoeveel klein ie wordt.

Leerling C: Dat moet je eerst onderzoeken.

Docent: Wat weet je allemaal?

Leerling C: De grootte van de boot?

Docent: Als jij op het strand staat, dan weet je de grootte van de boot?

Leerling C: Dat zou je kunnen weten.

Docent: Ok, dat kan.

Leerling B: En als je het dan nog niet wist?

Leerling C: Ja, dan heb je pech.

Leerling D: Kun je dat niet met dat 3D tekenen doen? Dat je van die kruisjes zet en dat je daar gelijke afstanden tussen zet.

Docent: Probeer eens.

Leerling A: Maar hier hebben ze het over een vlot en dan heb je geen boot.

Docent: Ja, hoe ver kun je kijken?

Leerling A: Dus dan heb je toch niets aan de grootte van de boot, toch?

Docent: Nee, het heeft niets te maken met de grootte van de boot. Wat weet je allemaal?

Leerling A: Misschien, weet je welke zee je staat en hoe groot het dan kan zijn.

Leerling C: Je kan natuurlijk ook de zon zien. Maar dat is wel heel ver. Als het nacht is kun je sterren zien. Dan kun je wel heel ver kijken.

Docent: Dan kijk je de ruimte in. Als je er nou eens vanuit gaat, dat je recht-vooruit kijkt. Kijken waar de horizon is. Wat weet je allemaal?

Leerling D: De straal van de aarde.

Docent: Dat is wel een aardig idee! Wat zou je daar mee kunnen doen?

Leerling D: Kun je de afronding van de aarde bekijken en dan kun je zo'n lijn trekken en dan kijken waar het beeld stopt.

(Leerling C begint gelijk te tekenen)

Leerling C: Zoiets? (Kijkt vragend naar docent)

Docent: Jullie bedenken het! Kun je daar verder mee?

Leerling A: Vergeleken bij de aarde ben je toch maar een heel klein poppetje?

Leerling C: Ja nou ja, dit is de Eiffeltoren ofzo of een hele hoge mast.

Docent: Dat kun je onderzoeken of niet? Je kunt wel kijken. Je ziet wel een horizon.

Leerling A: Dan zet je daar ook een bootje neer en dan kijk je of je hem nog kan zien als ie steeds verder weggaat en dan meet je de afstand.

Docent: Hoe meet je de afstand?

Leerling C: GPS.

Docent: Dat zou kunnen, maar we hebben geen GPS. We hebben alleen onszelf, ons boerenverstand.

Leerling D: En een walkietalkie?

Docent: Nee, die ook niet.

Leerling A: Dan kun je kijken hoe snel die boot gaat.

Leerling C: Stuur je een lichtsignaaltje en een geluidssignaaltje en dan meet je het verschil.

Docent: Ik wil het met wiskunde doen.

Leerling A: Dat kan wel toch met de snelheid?

Leerling C: Dat is allemaal rekenen.

Docent: Wat zei jij ook alweer? (tegen leerling D)

Leerling D: Ja, dat 3D tekenen.

Docent: Nee, daarna.

Leerling B: Die straal van de aarde.

Docent: Kun je daar verder mee?

Leerling D: Als je de straal van de aarde weet wel.

Docent: 40000 km

(Leerling C begint weer te tekenen)

Leerling C: Wat zou je nou aan de straal van de aarde hebben? En dan is jouw 2 meter zo klein...

Leerling A: Weten we de omtrek van de aarde dan?

Leerling C: Weten we de helling van de aarde? Hoe die afloopt?

Docent: Dat is wel een goede vraag! Want als de aarde ellipsvormig is, is natuurlijk anders dan wanneer ie bolvormig is. Misschien dat je een aanname moet doen.

Leerling D: Dat ie bolvormig is.

Docent: Bijvoorbeeld.

Leerling C: Als je weet hoe ver ie per kilometer afbuigt en je weet hoever je bovenop staat, dan weet je vanzelf wanneer je blik daarmee kruist, toch?

Docent: Ja!

Leerling C: Maar dat moeten we dus gaan uitrekenen?

Leerling D: Hoeveel was het?

Leerling C: 40000

(Leerling D begint nu ook te tekenen)

Leerling D: Als je hier met je passer langs gaat dan heb je de ronding van de aarde.

Docent: Dus dan neem je aan...

Leerling D: ... dat de aarde rond is.

Docent: Dat zou ik dan opschrijven, dat je die aanname doet. Want je gaat iets berekenen en dan ga je aannames doen. Dan is het handig dat je opschrijft wat je hebt aangenomen. Heb je een passer?

(Leerling C tekent aarde met passer)

Docent: Er is één ding dat je weet, de straal van de aarde.

Leerling C: Dat is een schaal van 1 op?

Docent: Dat is niet zo belangrijk.

Leerling C: Maar hoe moet je dan een poppetje van 2 meter er op zetten?

Docent: Dat wordt wel heel klein he? Dan maken we daar een modelletje van. Dat hoeft niet precies op schaal. Anders zie je niets meer.

Leerling A: Moet je dan ook niet de omtrek van de aarde weten?

Docent: Weet je die?

Leerling C: Pi maal r kwadraat?

Docent: Omtrek?

Leerling C: Ja, of haal ik nu wat door elkaar?

Docent: Geeft niet, wat is de omtrek dan?

Leerling D: Twee maal de straal.

Docent: Twee maal de straal maal...?

Leerling D: Pi.

Docent: Twee pi r. Misschien heb je het nodig. Schrijf maar op! Misschien ook wel niet. En hoever kun je nu kijken als je op een vlot staat (wijzend naar tekening)?

Leerling D: Maar een heel klein gedeelte. Alleen wat recht staat. De rest valt allemaal weg.

Docent: Nee dat denk ik niet, kijk maar eens in de tekening van leerling C.

Leerling A: Je kunt toch niet heel ver om het hoekje kijken?

Docent: De vraag is ook niet of je heel ver om het hoekje kan kijken, maar hoe ver.

Leerling C: Als het ongeveer 8 km is van de 40000, dan is dat ook maar heel

klein.

Docent: Ja klopt, en als je recht vooruit kijkt, kun je toch best ver kijken? Als je voor een treinrails staat, dan kun je een heel eind die treinrails volgen. Dan zie je hem mooi naar elkaar toe gaan. Hoeveel treinrails kun je dan zien? Hoeveel km rails kun je dan zien? Dat is het zelfde als wanneer je op een vlot staat.

Leerling C: Dat ligt eraan of er bochten in zitten.

Leerling A: Maar dat is bij de zee natuurlijk niet zo. Daar heb je geen bochten en daar staat ook niets in de weg waar je niet overheen kan kijken.

Docent: Nee, precies. Dus dan kun je heel goed kijken, wat je maximale kijkafstand is.

Leerling D: Ik zou dit heel erg uitvergrooten (wijzend op zijn tekening).

Docent: Maak een schets van de situatie.

Leerling C: Kun je dan niet iets met een driehoek doen, met Pythagoras?

Leerling A: Maar dan moet je eerst die afstand weten (wijzend in tekening van leerling C). Want je weet zelf hoe groot je bent.

Docent: Weer een aanname! Hoe groot ben je?

Leerling C: 2 meter.

Docent: Als je nou ook eens een poppetje boven op de aarde tekent.

Leerling D: Maar dat kan toch niet op schaal?

Docent: Hoeft ook niet op schaal. Hoeft niet in verhouding.

(Leerling D tekent)

Docent: En kun je nou daarin de kijkafstand aangeven? Wat kan dit poppetje met deze lengte zien?

Leerling D: Dan zitten de ogen ongeveer hier, en dan kan ie dit zien (tekent rechte lijn naar horizon).

Leerling C: Moeten we dan niet aannemen dat ooghoogte op 2 meter is?

Docent: Ja, is goed, of op 1 meter 80. Hoe komen we nu verder?

Leerling C: Als je hier nu een lijn trekt, dan heb je een driehoek en dan Pythagoras ofzo?

Docent: Doe dat eens.

(Leerling D tekent driehoek)

Docent: Dat is wat je moet doen. Proberen en kijken wat je allemaal hebt. Welke afstand weet je?

Leerling D: Die 2 meter.

Docent: En er is er nog eentje.

Leerling B: De hoek.

Leerling C: Die is 90 graden.

Docent: Welke hoek is 90 graden? (aanwijzen) Ja, die is 90 graden, maar die weet je niet en die ook niet. Als je een rechthoekige driehoek hebt, waar je twee hoeken niet van weet...

Leerling C: Twee onbekenden.

Leerling D: Dan moet je de hoek van de aarde berekenen.

Docent: Goed idee! Want je had nog iets dat je wist he?

Leerling C: Straal van de aarde.

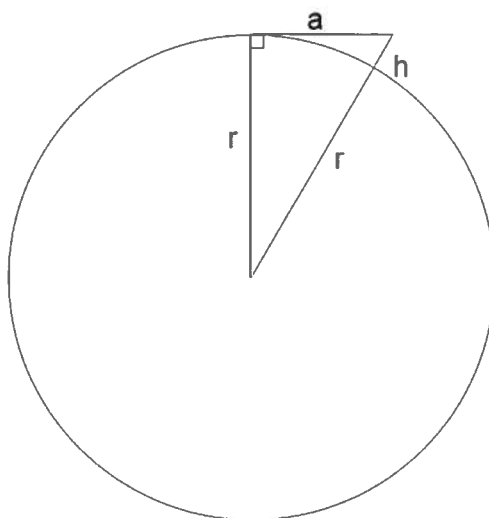
Docent: Zet de gegevens die je allemaal hebt in de tekening. En wat voor aanname had je nog gedaan?

Leerling D: Dat de aarde rond is.

Docent: Wat betekent dat?

Leerling A: Dat de straal overal hetzelfde is.

Leerling C: Kunnen we dan niet die straal 2 keer gebruiken? Want dan heb je



Figuur B.1: Schets behorend bij 'kijkstand'

al twee lengtes.

Leerling B: Ja hier zo, een lijn naar dit punt.

(Ze roepen nu allemaal hardop 40000, en 40000 plus die 2 meter)

Docent: Weet je iets van deze raaklijn en de straal?

Leerling C: Die snijden elkaar. Loodrecht.

Leerling A: Dat lijkt nu zo, maar dat is het vast niet.

Docent: Dat zou je kunnen onderzoeken door gewoon eens wat stralen te tekenen in cirkels en wat raaklijnen en dan kijken of dat loodrecht is.

Leerling D: Ik denk wel dat het loodrecht is. Want op het punt waar jij stopt met kijken, is jouw kijklijn evenwijdig aan de aarde. Dus kun je aannemen dat dat loodrecht is.

Docent: Iedereen het daar mee eens?

(Er wordt geknikt)

Docent: Zet er maar een rechte hoek in. En wat wilden we ook alweer berekenen?

Leerling B: Deze (wijzend op kijklijn) en je weet die andere twee.

Leerling C: Dus dan met... wat is het ook alweer? SosCasToa?

Leerling A: Pythagoras, dan is dit de schuine en dit de rechte zijden. En dan heb je het al!

Leerling D: Maar dan moet je ze kwadrateren.

Leerling A: Dan zou het toch gewoon 4 zijn?

(Leerling D gaat rekenen op rekenmachine)

Leerling D: Met 15 nullen.

Leerling A: Kun je niet wat nullen wegstrepen?

Leerling C: Maar dan heb je toch hier 4 kwadraat en daar 4 kwadraat, dus dan zou die afstand nul zijn?

Docent: In welke driehoek zit je nu?

Leerling C: Owja, dat is niet de goede driehoek.

Leerling A: We hebben het nu toch al?

Leerling D: Maar dan snap ik het niet, want dan komt hier gewoon 4 uit.

Leerling C: Je hebt nog een twee'tje erbij he?

Docent: Hier staat een twee bij, heb je die in het kwadraat gedaan? En goed gedaan op je rekenmachine?

Leerling B: Ik weet al wat ie heeft fout gedaan. 40000 kwadraat plus 2 kwadraat is wat anders dan 40000 plus 2 in het kwadraat.

Docent: Goed, dit heb je nu gedaan met een aanname van 2 meter. Maar niet iedereen is twee meter. Kun je nu een formule afleiden, waarbij je de ooghoogte op h stel? Dan zou je voor iedereen die over de zee kijkt de kijkafstand kunnen berekenen. Dus teken het nu allemaal eens, voor in jullie map. En dan mogen jullie hem nog even uitwerken tot een mooie formule.

(Leerlingen gaan tekenen en formule bedenken)

Leerling D: Zo klopt ie toch?

(Leerling C controleert)

Leerling B: 40000 km is wat anders dan 2 meter.

Leerling A: Je moet die h ook in het kwadraat doen. Dus dan kun je die gelijk in het kwadraat daar neer zetten?

Leerling C: Snap er helemaal niets meer van.

Leerling A: Want je moet die (schuine zijde) min die (straal) in het kwadraat. (verbetert zichzelf) Die (schuine zijde) in het kwadraat min die (straal) in het kwadraat. Dus dan kun je het toch beter direct uitrekenen?

Leerling C: Dus dan zeg je: a is gelijk aan de wortel van h plus r in het kwadraat min r in het kwadraat. Dan vervang je 40000 voor zo'n r van straal.

Leerling A: Ja ok.

Leerling D: Maar in de formule moet je weten wat r is.

Leerling A: Dat kun je zeggen voor alle dingen, maar je kunt ook zeggen dat het voor de aarde 40000 is. Dan vul je het wel in.

Docent: Ik heb ook nog een foutje gemaakt. De omtrek is 40000, dus dan moet je eerst de straal nog uitrekenen.

Leerling C: Maar mijn formule klopt toch nog.

Docent: Heb je een formule met straal gemaakt?

Leerling C: Ja, gewoon r .

Docent: Als je mijn fout eruit haalt en dan de straal uit de omtrek haalt, dan komt het uiteindelijk toch goed uit.

(Leerling D rekt straal uit)

Docent: Wordt de straal nu groter dan de omtrek? Dat kan niet. Als je 40000 deelt door twee pi, moet je op je rekenmachine twee pi tussen haakjes zetten.

Leerling C: 6366,2 km.

Leerling D: Klopt ie zo?

Docent: Ja klopt, en nu kun je voor elke planeet de kijkafstand bepalen.

Docent: Begrijpen jullie nu, dat door een model te maken van hetgene wat je weet, vrij exact kunt berekenen wat je wilde weten? Probeer het nu maar eens voor verschillende waarden.

(Leerlingen gaan wat proberen en krijgen ongeveer een afstand van 5.5 km)

Docent: Dan hebben we dus het volgende geleerd: je hebt een situatie, ga het bijvoorbeeld tekenen, ga kijken wat je weet, doe een paar aannames. Als je er niet uitkomt, staan er vragen in de module die je kunt gebruiken. Ze hebben het keurig in stapjes gezet. Jullie kwamen er heel erg snel uit met z'n allen! Dan maak je een model en aan de hand van het model je bijvoorbeeld de lengte van

een persoon op h zetten en dan kom je op een gegeven moment zo op een formule.

B.1.3 Zwemmer in nood

Opdracht 'zwemmer in nood': schuin voor je zie je een zwemmer in nood. Hoe kun je zo snel mogelijk bij hem komen om hulp te bieden? Spring je meteen in het water of loop je eerst een stuk langs het strand?

Leerling C: Hoe snel loop je en hoe snel zwem je?

Leerling A: Je loopt sneller dan dat je zwemt denk ik.

Leerling C: Ligt eraan hoe goed je kunt zwemmen.

Leerling B: Dan nog lijkt het me normaal dat je sneller loopt dan zwemt.

Leerling D: Als het maar 1 of 1.5 meter diep is, dan kun je sowieso niet zwemmen.

Leerling C: Dan loop je in feite.

Leerling A: Ja, maar dat is veel zwaarder dan dat je op het strand loopt.

Leerling C: Laten we er vanuit gaan dat het gelijk diep is.

Docent: Doe maar aannames, dat is goed!

Leerling A: Hoe snel loop je gemiddeld dan?

Leerling C: Als je gewoon loopt, is het geloof ik 5 km per uur.

Leerling A: Maar het is wel langs het strand.

Docent: Daar moet je niet te lang bij stil staan. Dan mag je een aanname doen.

Leerling C: 12 km per uur rennen ongeveer.

Leerling D: Niet als je een meter diep staat.

Leerling C: Wel als je gewoon over de kust loopt.

Leerling A: Hoe snel zwem je en hoe snel loop je moet wel in verhouding zijn.

Leerling B: Hoe hard ga je als je normaal zwemt?

Leerling D: Als je dubbel zo hard loopt als dat je zwemt, dan is het verstandiger om eerst te gaan lopen.

Leerling A: Ik denk dat het sowieso verstandiger is om eerst te gaan lopen.

(Leerling D tekent een driehoek)

Leerling D: Als hier de zee is en hier ligt het mannetje in het water en je loopt twee keer zo hard als je zwemt, dan kun je beter eerst gaan lopen.

(Leerling A en leerling C beamen dit.)

Docent: Je kunt een paar aannames doen. Zeg, je loopt 5 km per uur en je zwemt de helft daarvan. Dan kun je het eerst een keer gaan uitrekenen. En dan kun je later zeggen; ik loop x km per uur en ik zwem $0.5x$. Ga daar maar eens mee aan het werk. Met z'n allen een model maken. Kijk maar wat je het snelst kunt doen of je met een bocht moet gaan of rechtstreeks.

Leerling A: Volgens mij moet je de helft lopen.

Docent: Nou dat kun je dus in je model zetten. En er staan allemaal vragen in, doe die gewoon met z'n allen. Jullie hebben al besproken wat sneller is, lopen of zwemmen. Een schets zijn jullie ook al mee bezig.

Leerling C: Als je er nu vanuit gaat dat deze afstand het dubbele is van die.

Docent: Maar dan is mijn vraag: als je dan de helft loopt en dan naar die persoon zwemt, is dat dan niet sneller? Je kunt eerst kijken wat je aannames zijn en daarna pas beginnen met rekenen.

Leerling A: Je bedoelt dan de snelheid en de afstanden enzo?

Leerling D: Lopen was toch twee keer zo snel?

Docent: Dat had je aangenomen.

Leerling A: Als we de één nou 10 doen en de andere 5. Wat zijn dan de afstanden die we doen?

Docent: Daar kun je dan ook een aanname over doen.

Leerling A: Nou, wat is het makkelijkst?

Leerling C: Het makkelijkst is als je met tientallen werkt. 20 en 10.

Leerling A: Dan doen we dat. Maakt op zich toch ook niet zo heel veel uit?

Leerling D: Dus hoeveel doen we dan?

Leerling A: B dus 20 en A dus 10. En dan kunnen we beter die snelheden ook in meters doen.

Docent en leerling C: Lijkt me wel zo handig inderdaad.

Leerling D: Of we maken er 10 en 20 km van.

Leerling A: Ja, kan ook, maar dan is je redding wel heel ver weg.

Leerling D: Dan kun je beter de boot nemen.

(gelach)

Leerling C: Hoeveel olie heb je nodig?

(bel, leerlingen wordt gevraagd de opgave thuis af te maken)

B.2 Les 2

B.2.1 Hoe snel beweeg je als je stilstaat?

Opdracht 'Hoe snel beweeg je als je stilstaat?': je staat ergens op aarde stil, bijvoorbeeld in het centrum van Amsterdam. Hoe snel beweeg je als gevolg van het draaien van de aarde?

Docent: De werkelijkheid, wat weet je allemaal?

Leerling C: Omtrek van de aarde, zodat je weet hoeveel kilometer je aflegt in 24 uur.

Docent: Als je nu eens systematisch hier langs gaat. Wat weet je dan allemaal?

Leerling C: Dat de aarde in 24 uur ronddraait.

Docent: Ok, dat is dus één gegeven. Wat weet je nog meer?

Leerling B: De omtrek van de aarde, 40000 km.

Docent: Wat nog meer?

Leerling C: Dat je in Amsterdam staat. Daar is de omtrek kleiner.

Leerling A: Je draait ook niet rechtop, maar beetje schuin.

Docent: Daar wordt het misschien wel moeilijk van.

Leerling A: Dan zeggen we dat de aarde rond is en de as rechtop staat.

Docent: Schrijf maar op. Je kunt later altijd het model nog veranderen naar een as die scheef is en een aarde die niet rond is.

Leerling C: Ik geloof dat die as helemaal niets uitmaakt.

Leerling D: Als je nou aanneemt dat de aarde recht om zijn as draait. Dan kun je zo de straal uitrekenen op de evenaar. Als je dan ergens Amsterdam hebt en je kunt kijken hoever het naar de middenlijn is, dan kun je het ook uitrekenen.

Docent: Dus wat heb je nodig?

Leerling D: De nieuwe straal.

Docent: In de aardrijkskunde heb je daar een andere naam voor. Hoe weet je

waar Amsterdam ligt?

Leerling D: De lengtegraad of de breedtegraad. Ik weet niet welke het is.

Docent: Welke zou het zijn?

Leerling A: De breedtegraad.

Docent: Ja, 52 graden. Achter de komma laten we even weg. Hoe werkt dat met de breedtegraad?

Leerling A: Je telt toch vanaf de evenaar?

(Leerlingen tekenen)

Docent: Heb je de hoek goed leerling D?

Leerling D: Het is toch een rechte lijn vanaf de evenaar? Owja, dan moet ie hier.

(Leerling D begint op zijn rekenmachine de straal van de aarde te berekenen)

Leerling D: Waarom doet ie dat niet?

Docent: Dat is een goeie vraag, nu nog een antwoord.

Leerling A: Wat rekt ie uit dan?

Docent: Straal van de aarde?

Leerling D: Want dan heb je een lijn en een hoek en dan kun je Pythagoras wel weer gebruiken ofzo.

Leerling A: En je hebt ook een rechte hoek?

Leerling C: Die kun je dan wel recht maken.

Leerling A: Maar dan moet je de lengte daarvan ook weten. Want die weet je toch niet?

Leerling C: Daar kun je wel uitkomen denk ik.

Leerling C: Als je die schuine weet, dan kun je er een soort van vector van maken. Dan weet je hoeveel ie heen en weer gaat bewegen. Ook de lengte van daarboven en daaronder.

Docent: En jullie hadden aangenomen dat de aarde een zuivere bol is?

Leerling C: Ja. Wat was de omtrek van een cirkel ook alweer?

Docent: $2 \pi r$.

Leerling B: Dat kan toch niet dat de straal 62000 is?

Docent: Waarom niet?

Leerling C: Ik heb een straal van 6366,19.

Docent: Ja, dat is goed. Snap jij hoe het zit? (aan leerling B)

Leerling B: Ja, maar niet hoe hij aan 62000 komt.

Leerling D: Ik deel 40000 door 2 pi.

Leerling A: Heb je 2 pi wel tussen haakjes gezet? Anders doe je gedeeld door 2 keer pi.

Leerling D: Stomme haakjes.

Leerling C: Tot hoeveel graden kun je gaan?

Leerling A: Ik snap niet hoe je dat moet doen hoor.

Docent: Heb je al een tekening gemaakt?

Leerling A: Nee.

Docent: Dan zie je het waarschijnlijk wel.

Leerling C: SosCasToa?

Docent: Ja, SosCasToa.

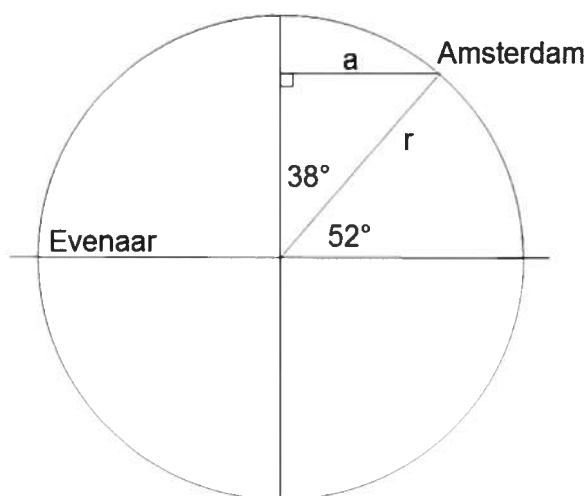
(In de tekening kijkend bij leerling A)

Docent: Wat wil je weten en wat heb je?

Leerling A: De omtrek. En dan moet je $180-2 \cdot 52$? Want dan heb je die hoek.

Leerling C: Weet jij nog hoe het met die sinus en cosinus moet? (tegen leerling D) Je hebt die hoek en je hebt die schuine lijn er dwars doorheen.

Leerling A: Dan moet je toch die hoek doen? De rechtoverstaande gedeeld door



Figuur B.2: Schets behorend bij 'snelheid'

de schuine?

Leerling B: Maar je hebt hier ook die graden.

Leerling C: Ja, we hebben nu graden en een hoek. Die zijn wel voldoende daarvoor.

Leerling B: Maar hoe?

Leerling D: Volgens mij heb je geen rechte hoek hoor.

Leerling C: Deze twee staan toch loodrecht op elkaar? En ik heb deze ook loodrecht gemaakt.

(Ze beginnen met z'n vieren te discussiëren in het plaatje, welke hoek nou recht is en in welke driehoek ze werken)

Leerling A: Je moet toch twee lijnen weten en een hoek?

Leerling C: Ik dacht dat je aan graden en een lijn genoeg had.

Leerling D: Ja, dat dacht ik ook.

Leerling B: We hebben wel twee hoeken toch?

Leerling A: Kun je niets met deze hoek doen dan? De hoek waar Amsterdam ligt en waar Amsterdam ook nog een keertje ligt aan de andere kant van de aarde (ze bedoelt gespiegeld in de as). Snap je wat ik bedoel?

Leerling B: Ja.

Leerling A: Want die twee weet je wel.

Leerling C: Dan krijg je in feite bijna dezelfde situatie (al tekenend).

Leerling A: Dan is die hoek 78 graden.

Leerling C: Ja, totaal.

Leerling A: Ja.

Leerling C: Dan is die 38 graden. Dit is 52 (Leerling C legt het uit aan leerling B). Dan 52 keer 2 is 104 en dan 180-104 gedeeld door 2 is 38 graden. Maar ik zou nog steeds zeggen dat je deze nodig hebt (wijzend op a) en dan Pythagoras.

Leerling A: Maar dat kan nu toch ook? Ownee, wacht.

Leerling D: Kon je niet alles uitrekenen, als je een zijde had en een hoek?

Leerling C: Ja, dat is ook zo. Maar we weten niet meer hoe je dat moet toepassen.

Leerling A: Maar dat was, je had de schuine en de overstaande.

Leerling D: Totaal moet ie 180 graden hebben.

Leerling B: Hoe ging dat ook alweer als je graden en hoek hebt?

Leerling A: Dan moet je toch nu Sos hebben?

Leerling C: Overstaand en schuine zijde. Overstaande hoek van deze 38.

Leerling A: Nee, je keek altijd vanuit de hoek en dan ging het om de zijde.

Leerling C: Nee, dat was terugrekenen.

Leerling A: Je hebt de hoek toch al?

Leerling C: Dat is met al die formules; je moet ze ook andersom kunnen toepassen.

Leerling A: Klopt het dat de straal 6366 was?

Leerling C: Ja, 6366,2. De sinus, hoe gaat dat ook alweer?

Leerling A: Kan het dit zijn? 241908? Of is dat een beetje te veel. Ja, is wel een beetje veel.

Leerling C: Dat is groter dan die andere.

Leerling A: Ownee, ik zie al wat ik fout heb gedaan.

Leerling C: Haakje?

Leerling A: Nee, geen haakje.

Leerling D: Wat had je gedaan dan?

Leerling A: Wacht even. Nu heb ik 3919. Dat kan wel kloppen, toch?

Leerling C: Dan is ie bijna gehalveerd dus.

Leerling A: Ik heb gedaan, dat als je die hoek van 38. Dan de sinus van die hoek, dan krijg je een bepaald kommagetal. Dan gebruik ik de sinus, dus dan heb ik Sos. Dat is overstaande gedeeld door de schuine. De overstaande weet je nog niet en de schuine wel. Dus dan heb je de overstaande gedeeld door die 6366 en dat moet de sinus van 38 zijn. En dat is net als 6 gedeeld door 3 is 2, dus dan heb je de overstaande is 6366 keer de sinus van 38. Klopt dat?

Leerling D: Dat kan wel kloppen ja.

Leerling B: Hoeveel was het eigenlijk?

Leerling A: 3919.

Leerling C: Ik krijg er 1886 uit.

Leerling A: Ow, ik niet.

Leerling C: De sinus van 38 en dat maal 6366,2.

Leerling A: Hoe kan dat nou weer? (kijkend op rekenmachine van 2) Als jij de sinus van 38 intypt, krijg je er iets anders uit dan ik.

Leerling C: Ow, wacht. Mag ik even jou rekenmachine zien? Jij hebt hem op graden staan. Dus je hebt graden berekend.

Leerling D: Ik heb ook 1886.

Leerling A: Wat moet ik dan doen?

Leerling C: Van de graden afhalen. Je hebt radialen of graden. Als je radialen wil berekenen zet je hem daarop en graden op de andere.

Leerling A: Dus je moet hem altijd op radialen hebben staan?

Leerling C: Bijna altijd. Maar stel dat je een hoek moet berekenen, dan moet ie op graden.

Leerling D: 1886 lijkt me ook sterk hoor.

Leerling B: Ja, mij ook.

Leerling C: Dus dan gaat die straal van grofweg 6300 naar 1800.

Leerling A: Je moet hem nog keer twee doen, omdat je hem ook aan de andere

kant wil.

Leerling C: Dan heb je de straal niet meer, maar twee keer de straal. De omtrek is dan...

Leerling D: Wat ben je nu aan het uitrekenen.

Leerling C: De omtrek op die hoogte. ... 11854

Docent: Even over de rekenmachine. Als je een hoek hebt in graden dan zet je je rekenmachine ook op graden. Als je hoek in radialen is, zet je je rekenmachine in radialen.

Leerling A: Dus wat ik eerst deed klopte?

Docent: Ja.

Leerling A: Maar kun je hem nu eigenlijk altijd op graden laten staan?

Docent: Dat ligt dus aan je hoeken.

Leerling A: En wat houdt in dat je hem in radialen hebt staan dan?

Docent: Hebben jullie ooit met een half pi, kwart pi en een zesde pi gewerkt?

Leerling A: Nee.

Docent: Dan zal ie nu meestal op graden staan. Als je een heel rondje maakt, je gaat helemaal rond. Hoeveel graden heb je dan gemaakt?

Leerling A: 360 graden.

Docent: Ja en je kunt ze ook uitdrukken in radialen. Als je een heel rondje maakt dan ga je twee pi rond. Dus als je 90 graden rondgaat, dan ga je eigenlijk een half pi rond.

Leerling A: Ja.

Docent: Dan neem je dus een kwart van 360.

Leerling A: En als je hem dus in half pi uitdrukt, dan is dat dus in radialen.

Docent: Ja, dan is dat radialen.

(rest rekent verder)

Leerling D: Als dat klopt, dan ga je met 1630 km per uur.

Leerling C: Ik kom op 1026 uit.

Leerling A: Mag ik ook volgen wat jullie doen?

Leerling C: We hebben dus die straal berekent voor hoogte Amsterdam en dan de omtrek maken. Die omtrek moet je dan delen door 24 en dan krijg je je snelheid. Die omtrek is wat je aflegt in 24 uur en snelheid is in km per uur, dus moet je delen door 24.

Leerling A: Ja, ik snap hem.

Leerling C: Dus dan is het 1026,11.

Leerling B: Dan ga je nog aardig snel als je stil staat.

Leerling C: Wat moesten we daarna doen? Een formule maken. Dat is misschien wel handig, ja.

(Leerling C zet formule in elkaar)

Leerling A: Maar dan moet je wel noemen dat x je breedtegraad is.

Docent: Hoe controleer je dit nou? Want de grap is nu ook dat als je zo'n formule hebt, dat je ook weet dat ie werkt.

Leerling D: Vul maar in. Als je breedtegraad 52 is, dat daar de 1026 uitkomt.

(Leerling C controleert, discussie over wat fout gaat bij leerling C)

Leerling C: Dan kom je weer op precies hetzelfde uit.

Docent: Voor snelheid gebruiken we meestal een v .

Leerling C: Nu nog even netjes opschrijven.

Leerling A: En dan moet je er wel bij zetten dat dit de formule voor de aarde is, omdat we de 6366 laten staan.

B.2.2 Fabriekshal

Opdracht 'Fabriekshal': een fabrikant van schoenen wil een nieuwe rechthoekige fabriekshal laten bouwen met een vloeroppervlakte van wel 2400 m². Hij dient een aanvraag in voor het aankopen van een rechthoekig stuk grond. Om de fabriek komen groenstroken en parkeerruimte, aan beide zijden en aan de achterkant stroken van 10 m breed, aan de voorkant een strook van 20 m breed. De fabrikant beoogt een zo klein mogelijk stuk grond te kopen dat aan deze eisen voldoet. Welke afmetingen heeft dit terrein?

Docent: Lees eerst maar het stukje even door. Jullie hebben elkaar nu vragen gesteld, maar soms is het ook de bedoeling dat je jezelf vragen stelt. (Leerling C, leerling B en leerling A gaan gelijk tekenen, leerling D denkt eerst na)

Leerling A: Hoezo ga jij er vanuit dat de parkeerplekken daar zijn?

Leerling C: Hier ga ik er vanuit dat dit de voorkant is. Maar je kan hem aan alle kanten uitrekken. Je moet kijken wat het effectiefste is. Als je die parkeerplekken het smalst houdt, dan hou je meer groen over.

Leerling D: Als die ruimte 50 bij 50 is, dan ben je er al overheen.

Leerling C: Dus oppervlakte hiervan is...

Leerling D: Wat ben je nu aan het doen dan?

Leerling A: Ja, dat vraag ik me ook af.

Leerling C: De oppervlakte van de fabriek is x maal y .

Leerling A: Maar daar zijn we toch lang niet?

Leerling C: Als je er vanuit gaat dat de oppervlakte x maal y is. Dan is de lengte van deze groenstrook $x + 10$ maal 10. Dan heb je deze oppervlakte, toch?

Leerling A: Maar je moet ook dit stuk er bij rekenen.

Leerling C: Dat doe ik bij de voorkant. Dit stuk, dus die kun je 2 keer doen en dat is dan $y - 20$ maal 10.

Leerling D: Die y van die fabrieksruimte blijft zo, daar gaat geen 20 vanaf.

Leerling C: Owja, dus gewoon y maal 10, die heb je één keer nodig en y maal 20.

Leerling D: Hebben we al een vraag gehad ofzo?

Leerling A: Nee, we moeten eerst opschrijven wat onze aannames zijn.

Leerling D: Wat ga je uitrekenen dan?

Leerling C: Dan maak je daar een formule van.

Leerling A: Deze vraag wordt in 5 opgaven gedaan en ze vragen nu alleen nog maar om de aannames. Zullen we dat gewoon eerst opschrijven?

Leerling C: Heel even dit proberen hoor.

Leerling A: Nou, wat zijn onze aannames dan?

Docent: Heeft hij stiekem niet al aannames gedaan?

Leerling A: Ja, ik denk het wel.

Leerling C: Een heleboel al.

Leerling D: Je kunt in ieder geval aannemen dat het geen vierkante fabriek wordt, want het was een rechthoek.

Leerling A: Dus mogen die twee zijden niet hetzelfde zijn.

Docent: Is een vierkant geen rechthoek dan?

Leerling D: Een vierhoek heeft toch rechte hoeken of even lange zijden?

Leerling A: Bij een vierkant hebben ze even lange zijdes. Dus dan moeten ze gewoon vier rechte hoeken hebben. En we gaan er vanuit dat die groenstroken zo breed zijn.

Leerling D: Ik zou niet weten waar je nog meer wat aan hebt. De rest staat er al.

Leerling B: Ja, alles is al gegeven.

Docent: Nou, dan kun je door naar de volgende vraag.

Leerling A: Zijn er dan niet meer dingen? Dit lijkt me een beetje weinig.

Docent: Misschien kom je ze onderweg nog wel tegen.

Leerling A: Er wordt nu gevraagd wat onze grootheden zijn en of we variabelen hebben. De variabelen zijn sowieso die zijden, toch?

Leerling D: De grootheden staan hierboven en de variabelen zijn de x en de y .

Leerling A: Ja, dat denk ik ook. Maar hier hebben ze het over dat je een fabriekshal gebruikt of de hele oppervlakte.

Leerling D: Ik zou alleen de fabriekshal doen. Misschien kunnen we een voorbeeld doorrekenen? Als je de breedte 50 meter maakt en de lengte 48 meter.

Docent: Snap je het nog?

Leerling A: Gedeeltelijk, ik weet niet hoe je een zo klein mogelijk oppervlakte krijgt. Als je die hal niet over zo neer zet, maar draait. En omdat je twee verschillende waardes hebt, weet ik niet hoe je zo klein mogelijk maakt. Moet je het dan proberen met tabellen ofzo?

Docent: Je zou het in een excelsheet kunnen zetten inderdaad.

Leerling A: Dus je wil dat de zijdes zo klein mogelijk worden, toch?

Docent: Ja.

Leerling A: Dus dan moet deze lengte het kleinste zijn.

(bel, leerlingen krijgen instructies om volgende week af te maken)

B.3 Eindopdracht

B.3.1 Leerling A - Thuiswerkers

B.3.2 Leerling B en D - Straatverlichting

B.3.3 Leerling C - Goot



Naam: Marinde van Rooij
 Vak: Wiskunde D
 Datum: 05 - 02 - 08

Cijfer:

Klas: 42a

Thuiswerkers

Opgave 29

- Stap 1:
- Wanneer is de winst in een week maximaal?
 - Gegevens (voorbeeld):
 - 11 thuiswerkers
 - 30 stoelen per busje
 - 1 avond voor stoel A
 - 2 avonden voor stoel B
 - 4 avonden per week week
 - 200 euro winst per stoel A
 - 300 euro winst per stoel B
 - - Rijdt het busje alleen als hij vol is?
 - Wat zijn de kosten van het busje?
 - Wat zijn de kosten van een thuiswerker?
 - Aannames:
 - Het busje rijdt alleen als hij helemaal vol is
 - De thuiswerkers wonen in dezelfde straat
 - De thuiswerkers kosten 30 euro per avond.
 - Een busje rijdt voor 80 euro, per keer.

- De variabelen:
 - Kosten van het busje
 - Kosten van de thuiswerkers
 - Winst per stoel A
 - Winst per stoel B
 - Avonden voor het maken van stoel A
 - Avonden voor het maken van stoel B
 - Hoeveelheid thuiswerkers
 - Hoeveelheid stoelen per busje
- Verbanden:
 - Stoel A wordt 2 keer zo snel gemaakt als stoel B
 - Stoel B maakt 1,5 keer zo veel winst als stoel A.
 - Kosten van de thuiswerkers heeft te maken met de hoeveelheid thuiswerkers.
 - Kosten van een busje heeft te maken met de hoeveelheid stoelen per busje.

- Stap 2.
- Extra vraag/variabele:
 - Hoeveel thuiswerkers maken stoel A en hoeveel stoel B.
 - Waarden:
 - 5 mensen maken stoel A
 - 6 mensen maken stoel B
 - 200 euro winst, stoel A
 - 300 euro winst, stoel B



Naam:

Vak:

Datum:

Cijfer

Klas:

- Stap 3:
- werkundig model: model met twee onbekenden
 - Extra vaste waarde: 20 werknemers

* $y = \text{winst}$

$x = \text{werknemers voor stoel A}$

werknemers voor stoel B = $20 - x$

$$\text{winst} = 66g \frac{1}{3} x + 47g \frac{2}{3} x (20 - x)$$

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y	0	944	1288	1066	1105	1144	1182	1220	1260	1297	1338

* $y = \text{winst}$

$x = \text{werknemers voor stoel B}$

werknemers voor stoel A = $20 - x$

$$\text{winst} = 66g \frac{1}{3} (20 - x) + 47g \frac{2}{3} x$$

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y	1338	1297	1260	1220	1182	1144	1105	1066	1026	984	944

- * Het verschijnsel dat je ziet tussen de tabellen is heel logisch en had ik al zien aankomen.

- je hebt de meeste winst als je alleen stoel B produceert, met 20 werknemers.

Stap 4. • Met deze gegevens ($\rightarrow$ de gegevens die ik vast heb gesteld) komt de formule.

Bewijs

5 mensen maken stoel A

6 mensen maken stoel B

winst = € 6194,67

$$x = 5$$

$$y = 6$$

$$\text{winst} = 669\frac{1}{3} \times 5 + 474\frac{2}{3} \times 6 = € 6194,67$$

- Met zo weinig mogelijk energie zo veel mogelijk straat verlichten.
- $S = w/m^2$ $L = P/H^2$
 $P = w$
 uitkomst = $10-320 w/m^2$
- zie tekening
- De weg is recht
 Het licht komt aan de overkant van de straat.
- De weg is 4 m. breed
- De hoogte is variabel
 De lantaarn schijnt onder een hoek van 45°
- hoogte v. straatl. en de breedte v. d. straat. + hoe ver de lantaarns uit elkaar staan.

H en fs zijn altijd gelijk.

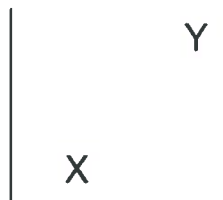
L moet 10 zijn.

L op het uiterste bereik moet 10 zijn.

$10 \cdot 2H^2 = P$
 (waarom $2H^2$? omdat je hiermee de lichtsterkte bij het uiterste bereik uitrekent, 2-t)
 Hierbij is H de hoogte van de lantaarnpaal en evenredig met de breedte van de straat.

Als de hoogte 4 m is → $10 \cdot 2H^2 = 320$ watt
 Als de hoogte 5 m is → $10 \cdot 2H^2 = 500$ watt

Vierkante goot:

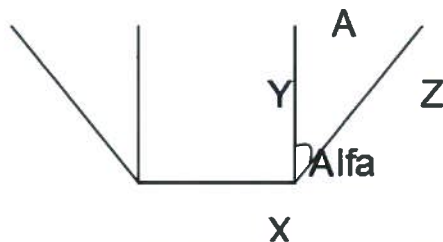


$$\begin{aligned}\text{Omtrek} &= 50 \text{ cm} = X + 2Y \\ \text{Opp} &= XY \\ \text{Opp} &= X(-.5X + 25) \\ \text{Opp} &= -.5X^2 + 25X \\ \text{Opp}_t &= -B/2A = -25/-1 = 25\end{aligned}$$

Y kun je schrijven als: $50 = X + 2Y$ $-2Y = X - 50$ $Y = -.5X + 25$

Dus $X = 25 \text{ cm}$ dus $Y = -1/2 \cdot 25 + 25 = 12,5 \text{ cm}$. Dat betekent dat de optimale vorm voor een goot met een open vierkant als vorm $312,5 \text{ cm}^2$ is. Dat blijkt uit de berekening van de oppervlakte ($\text{Opp} = XY$) $25 \cdot 12,5 = 312,5 \text{ cm}^2$. Dat geldt bij $X = 25 \text{ cm}$ en $Y = 12,5 \text{ cm}$.

Trapezium goot:



$$\begin{aligned}\text{Omtrek} &= 50 \text{ cm} = X + 2Z \\ \text{Opp} &= XY + YA\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= Y/Z \text{ oftewel: } Y = Z \cos \alpha \\ \sin \alpha &= A/Z \text{ oftewel: } A = Z \sin \alpha \\ 50 &= X + 2Z \text{ oftewel: } Z = 25 - .5X\end{aligned}$$

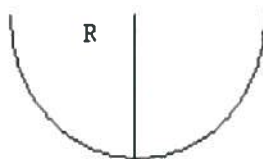
$$\text{Opp} = XY + YA = Y(X + A) = (25 - .5X) \cos \alpha (X + (25 - .5X) \sin \alpha)$$

Daarna heb ik aangenomen dat $\alpha = 45^\circ$ dat geeft de volgende formule:

$$\text{Opp} = (25 - .5X) \cos 45^\circ (X + (25 - .5X) \sin 45^\circ)$$

Deze formule heb ik ingevoerd in de grafische rekenmachine en daarna met [2nd] [calc] [4] uitgerekend dat de top op $X = 11,32$ ligt. Dat betekent dat de oppervlakte dan 341 cm^2 is. Dat is ook gevonden met de grafische rekenmachine op dezelfde manier als hierboven beschreven.

Halfronde goot:



$$\begin{aligned}\text{Omtrek} &= 50 \text{ cm} = \pi R \\ \text{Opp} &= .5\pi R^2 \\ \text{Opp} &= .5\pi(50/\pi)^2 = 397,88 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Dus de optimale grote van een halfronde goot is $397,88 \text{ cm}^2$ als de omtrek van de halve cirkel 50 cm .

$50 = \pi R$ $R = 50/\pi$

Conclusie:

De halfronde goot is de handigste goot voor de fabrikant want daarmee kan hij het meeste water afvoeren.



Bijlage C

Procesbeschrijving

C.1 Inleiding

Ter illustratie en motivatie wordt in deze bijlage de criteriumlijst en de motivatie gegeven voor de gekozen waarden bij de steekwoorden uit de conversaties. De volgende criteriumlijst bevat steekwoorden en wiskundige activiteiten die de leerlingen gebruiken om tot een hoger abstractieniveau te komen:

- Intuïtie, aannames maken, globale schets
- Gedetailleerd schetsen, variabelen toekennen in juiste eenheden, welke wiskunde gebruiken we?, getallenvoorbeeld uitwerken
- Formule in variabelen, variëren voor extreme gevallen, controle en terugkoppeling naar praktijk

C.2 Les 1

Deze les is opgedeeld in drie onderdelen. In het eerste onderdeel wordt er gefilosofeerd over wetenschap ter inleiding op het vak. Daarna worden er twee vragen behandeld, namelijk 'Kijkafstand' en een deel van 'Zwemmer in nood'. 'Zwemmer in nood' is niet helemaal af, omdat de bel ging en de leerlingen naar een andere les moesten.

C.2.1 Wat is wetenschap?

Dit is een inleiding van het vak 'Wiskunde in Wetenschap'. Er is nog geen opdracht om naar een model toe te werken. De vraag "Wat is wetenschap?" is filosofisch van aard en bedoeld om de leerlingen kennis te laten maken met wetenschap, onderzoek en modelleren.

De leerlingen hebben nog nooit in zo'n setting wiskunde gekregen en in dit onderdeel kunnen we zien dat ze niet gewend zijn om veel hun zegje te doen. Ze zijn verlegen en geven korte antwoorden op de vragen van de docent en gaan nog niet met elkaar in discussie. De docent moet erg trekken om antwoorden uit de leerlingen te krijgen.

C.2.2 Kijkafstand

Waarde 5: Intuïtief zit leerling A gelijk op het juist spoor. Hij zegt dat het te maken heeft met de hoe groot je bent. Hun fantasie gaat met hen aan de haal door dingen te verzinnen als 3D tekenen en GPS gebruiken. Leerling C zegt wel meteen dat hij weet dat het tussen de 8 en 10 km is en geeft ook aan dat het met de helling van de aarde te maken kan hebben. Leerling D is diegene die de eerste aanname maakt en zegt dat de aarde rond is en leerling C is de tweede die zegt dat je 2 meter lang bent. Schetsen wordt gedaan als eerst door leerling C en later ook door leerling D.

Waarde 3: Voor het gedetailleerd schetsen ziet leerling A gelijk het gevolg van de aanname dat de aarde rond is: de straal is overal hetzelfde. Intuïtief zien Leerling C en leerling A dat er een hoek van 90 graden in zit. Leerling D is echter degene die ook kan uitleggen waarom dat ook waar is. Er wordt door geen van alle gesproken over variabelen. Leerling D pakt wel de juiste eenheden door de straal in meters uit te drukken, net als de lengte van een individu. Dit gebruikt hij direct in een getallenvoorbeeld op zijn rekenmachine. Er is niemand die een getallenvoorbeeld uitwerkt op papier. Wel roepen ze allemaal wat leerling D moet doen.

Waarde 1: De docente geeft een voorzet om een formule te maken door te zeggen dat de ooghoogte h is. Leerling C controleert de uitwerking die leerling D maakt en zegt dat hij daarvan niets begrijpt. Leerling A is degene die hem op weg helpt en zo is leerling C wel diegene die de formule als eerste in variabelen heeft uitgedrukt. Leerling A en leerling C krijgen er ongeveer 5.5 km uit en zeggen meteen dat dit wel kan kloppen. Zij zijn de enigen die nog wat gaan proberen met andere lengtes.

C.2.3 Zwemmer in nood

Waarde 5: Alle vier durven ze nu de discussie met elkaar aan te gaan. Leerling A zegt meteen dat lopen sneller is dan zwemmen en leerling C maakt direct de aanname dat als je in het water stapt je meteen kunt zwemmen. Leerling D doet een aanname (je loopt dubbel zo hard als je zwemt) en intuïtief lijkt het hem dan verstandiger om te gaan lopen. Al voor dat hij (bewust) aannames heeft gedaan tekent hij een driehoek. Leerling A is diegene die de knopen doorhakt en die zegt dat ze 5 km/u zwemmen en 10 km/u rennen. Leerling C zegt over de afstanden dat het handig is om in tientallen te werken en oppert 20 meter en 10 meter.

Waarde 3: Leerling A geeft aan dat de snelheden ook in meters moeten en leerling D het alternatief dat ze ook 10 en 20 km kunnen nemen. Leerling D ziet, in tegenstelling tot leerling A, niet dat dit niet realistisch is. Dan gaat helaas de bel.

C.3 Les 2

Deze les is opgedeeld in twee onderdelen. De eerste vraag waarover gediscussieerd wordt, is 'hoe snel beweeg je als je stilstaat?'. De tweede vraag gaat over een fabriekshal. Deze vraag is niet geheel beantwoord, omdat de les voorbij is.

C.3.1 Hoe snel beweeg je als je stilstaat?

Waarde 5: Op de vraag wat ze allemaal weten geven leerling C en leerling A goede antwoorden waar leerling D direct de aanname uit maakt dat de aarde recht om zijn as draait. Leerling D geeft ook intuïtief al de oplossing voor het probleem. Hij ziet direct wat hij nodig heeft (de nieuwe straal). De leerlingen beginnen allemaal te tekenen.

Waarde 3: Leerling D is weer diegene die gelijk op zijn rekenmachine de straal van de aarde begint uit te rekenen en zegt dat je er vast met Pythagoras wel uitkomt. Leerling B ziet dat het bij leerling D fout gaat en leerling A geeft hem een tip. Leerling C heeft moeite met het onthouden van de formule van de omtrek van een cirkel, maar komt wel met het idee om SosCasToa te gebruiken. Met z'n vieren discussiëren ze over hun schetsen en komen erachter dat ze in een andere driehoek moeten werken. Het duurt echter vrij lang voordat ze de oplossing vinden voor een getallenvoorbeeld. Leerling A rekent het eerst uit voor zichzelf en daarna legt hij het uit aan de anderen. Leerling C probeert het ook en komt op iets anders uit. Na inmenging van docent weten ze wat correct is en waarom.

Waarde 1: Leerling C is de enige die de formule opstelt voor de snelheid. Leerling A volgt wel zijn berekening en vult aan waar nodig. Leerling D en leerling B lijken niet verder te komen dan het getallenvoorbeeld.

C.3.2 Fabriekshal

Waarde 5: Leerling C, leerling B en leerling A gaan gelijk tekenen. Leerling D denkt eerst na en bedenkt dat 50 bij 50 al te groot is. Leerling C gaat veel sneller dan de rest. Hij zet gelijk variabelen in zijn tekening, zonder eerst een getallenvoorbeeld uit te werken. Hierdoor kan de rest hem niet volgen en raken zij in de war. Leerling A gaat terug naar de aannames samen met leerling D. Ze gedragen zich onzeker, omdat ze niet weten of ze wel alle aannames hebben gemaakt.

Waarde 3: Leerling D en leerling A kennen variabelen toe aan de lengtes van de fabriekshal en leerling D probeert een getallenvoorbeeld uit te werken. Leerling B valt compleet stil, omdat hij leerling C te snel gaat en hij alleen maar luistert naar leerling A en leerling D. Leerling A vraagt aan de docent bevestiging of hij de opdracht wel begrepen heeft. Dan gaat de bel en komen de leerlingen niet meer toe aan stap 3.

C.4 Eindopdracht

Waarde 5: Leerling A heeft de eindopdracht 'Thuiswerkers' gekozen en heeft uitstekend de module gevolgd. Hij heeft netjes de stappen uit de modelleercyclus genomen. Hij maakt aannames en schrijft alle waarden op die gebruikt kunnen worden voor een getallenvoorbeeld. Verder zegt hij niets over een verwachting die hij heeft.

Leerling B en D hebben de eindopdracht 'Straatverlichting' gekozen. Ze hebben stappen genomen uit de modelleercyclus, maar het is niet duidelijk. Ze doen aannames over de breedte van de weg. Echter, ze zeggen

niet dat het een aanname is. Ook komen ze op een formule. Het is alleen niet duidelijk hoe ze daar aan zijn gekomen.

Leerling C heeft 'Goot' gekozen als eindopdracht. Hij heeft netjes de opdracht uitgewerkt en alle stappen opgeschreven. Hij is zeer systematisch en duidelijk, schrijft aannames op en schets de verschillende mogelijkheden met variabelen. Hij heeft net als leerling A geen verwachting opgeschreven en begint gelijk met uitwerken van de opdracht. Hierdoor merkt hij niet dat hij de inhoud moet hebben om tot een oplossing te komen.

Waarde 3: Leerling A werkt een getallenvoorbeeld uit en stapt makkelijk over naar een formule met twee variabelen. Hij werkt tabellen uit en trekt goede conclusies. Bij de conclusie durft hij te zeggen dat ze de tabellen logisch vindt en dat hij het al had zien aankomen. Blijkbaar had hij toch intuïtief een voorspelling gedaan, erg goed!

Leerling C schrijft helemaal uit welke stappen hij op zijn rekenmachine neemt en werkt alle drie de mogelijkheden uit.

Waarde 1: Zelfs de laatste stap is voor leerling A niet moeilijk. Doordat hij alles systematisch heeft opgeschreven is het makkelijk voor hem om een formule met variabelen te verzinnen.

Leerling C heeft niet helemaal begrepen hoe hij de opdracht moet oplossen. Hij had namelijk de inhoud moeten uitrekenen om tot een antwoord te komen. Hij trekt wel conclusies op de manier dat hij het heeft gedaan en motiveert deze. Er ontbreekt alleen een algemene formule, waarbij hij de vaste waarden als 50 cm omtrek loslaat.

Bibliografie

- [1] Drijvers P., 2006, "Wiskunde D, uitdagend en relevant", *Euclides* 81(7):327-330
- [2] UT-kerngroep, 2007, "Wiskunde in wetenschap", *Euclides*, 82(5):173-175
- [3] Palincsar A.S. en Brown A.L., 1984, "Reciprocal teaching of comprehension-fostering and comprehension-monitoring activities", *Cognition and instruction*, 1(2):117-175
- [4] Hashey J.M. en Conners D.J., 2003, "Learn from our journey: Reciprocal teaching action research", *Reading Teacher*, 57(3):224-232
- [5] Borkowski J.G., 1992, "Metacognitive theory: a framework for teaching literacy, writing, and math skills", *Journal of learning disabilities*, 25(4):253-257
- [6] Piaget J., 1937, "La construction du réel chez l'enfant", Neuchâtel: Delachaux et Niestlé
- [7] Vygotsky L.S., 1978, "Mind in society", Harvard University Press, Cambridge, MA
- [8] Verhoef N.C., 2003, "Implementatie van ICT, een probleem voor docenten?", proefschrift, Universiteit Twente, Enschede
- [9] Anderson J.R., Reder L.M. en Simon H.A., 1999, "Applications and misapplications of cognitive psychology to mathematics education", ongepubliceerd manuscript (toegankelijk via [http://www.beteronderwijsnederland.nl/files/active/0/Anderson,%20Reder%20&%20Simon%20\(2000\).pdf](http://www.beteronderwijsnederland.nl/files/active/0/Anderson,%20Reder%20&%20Simon%20(2000).pdf))
- [10] Reciprocal Teaching,
http://projects.coe.uga.edu/epltt/index.php?title=Reciprocal_Teaching#Introduction, gevonden februari 2008
- [11] Oczkus L.D., 2003, "Reciprocal teaching at work, strategies for improving reading comprehension", Orinda, California, VS
- [12] Tall D. en Barnard T., 1997, "Cognitive units, connections and mathematical proof", *Proceedings of PME 21*, 2:41-48
- [13] Gravemeijer K., 2005, "Revisiting 'Mathematics education revisited'", *Freudenthal 100*
- [14] Lesmateriaal wiskunde D,
<http://onderwijs.math.utwente.nl/Voorlichting/Lerarenvoorlichting/WiskundeD/Lesmateriaal>, gevonden februari 2008

- [15] Hoksbergen C., 2005, "Succesvol wiskundig denken & De cognitieve structuur", ongepubliceerd manuscript (toegankelijk via <http://www.utwente.nl/elan/LO/master/studentprodukt/OvO/OvO-wi/choksbergen.pdf>)
- [16] Monaghan J. & Ozmantar M.F., 2006, "Abstraction and consolidation", *Educational Studies in Mathematics*, 62:233-258
- [17] Dreyfus T. & Tsamir P., 2001, "Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets", technisch rapport, Tel Aviv, Israël, Tel Aviv University
- [18] Hershkowitz R., Schwarz B.B. en Dreyfus T., 2001, "Abstraction in context: epistemic actions", *Journal for research in mathematics education*, 32(2):195-222