***Onderzoek van onderwijs***

*De beschrijving van een onderzoek naar de wiskundig-didactische kennis die wiskundedocenten opdoen door lesson study in een Community of Learners.*

| | |
|---|---|
| ***Vaknaam***: | *Onderzoek van onderwijs* |
| ***Vaknummer***: | *745420* |


| | |
|---|---|
| ***Auteur:***: | *MSc. Diana van de Weijenberg* |
| ***Datum:*** | *13 december 2009* |
| ***Versienummer:*** | *0.4* |
| ***Begeleider***: | *Dr. N.C. Verhoef* |
| | *Drs. F.G.M. Coenders* |

## Voorwoord

Dit rapport is geschreven voor het vak ‘Onderzoek van Onderwijs’ van de opleiding tot eerstegraads wiskundedocent.

In dit voorwoord wil ik de mensen bedanken die meegewerkt hebben aan de totstandkoming van dit rapport. Daarmee wil beginnen met mijn begeleidster van de universiteit, Nellie Verhoef. Haar enthousiasme was groot, haar ideeën inspirerend en ik heb veel van haar geleerd, gedurende de jaren dat zij mij begeleid heeft.

Ook wil ik de deelnemende docenten, vakdidactici en andere onderzoekers bedanken voor hun inbreng en het vele werk dat zij verricht hebben. Door hun inzet heb ik dit rapport kunnen schrijven en al is het onderzoek dat zij uitvoeren nog niet afgerond en zijn de resultaten nog niet helemaal duidelijk, er is een grote stap in de goede richting gezet.

En tot slot wil ik mijn familie bedanken. Het ging soms moeizaam, maar door jullie vastberadenheid en steun heb ik volgehouden.

Diana van de Weijenberg

**Uitleg bij dit rapport**

Dit rapport is geschreven voor het vak ‘Onderzoek van Onderwijs’ van de opleiding tot eerstegraads wiskundedocent en richt zich op een onderzoek dat verricht is door een groep van wiskundedocenten en onderzoekers van de Universiteit Twente naar het wiskundig denken van leerlingen.

Bij dit onderzoek heb ik bijna vanaf het begin meegekeken en dit rapport bevat een overzicht van alles wat ik heb geleerd over het doen van een onderzoek op deze wijze. Daarbij heb ik af en toe geconcentreerd op mijn eigen inbreng in dit onderzoek, maar heb ik vooral alle factoren die in dit onderzoek een rol spelen uitgebreid beschreven.

Het vak ‘Onderzoek van Onderwijs’ bestaat uit 10 ECTS, wat overeenkomt met een periode van 7 weken. De eerste drie weken daarvan heb ik mij vooral gericht op het verkrijgen van alle informatie met betrekking tot het onderzoek, het zoeken van bruikbare bronnen en het doorlezen van de gevonden documenten. De week die daar op volgde stond vooral het maken van de observatielijst op het programma, waarvoor ik ook een bijeenkomst van de groep onderzoekers heb bijgewoond. De twee weken daarna, ben ik voornamelijk bezig met het schrijven en verbeteren van dit rapport over het onderzoek, en het samenvatten van de elementen die ik in het onderzoek allemaal ben tegengekomen. Gedurende al deze weken heb ik ook de stand van zaken in het onderzoek gevolgd aan de hand van de e-mailuitwisselingen en de beschrijvingen van de bijeenkomsten van de onderzoeksgroep. Tot slot heb ik nog een afstudeerpresentatie gemaakt, welke op 15 december gegeven zal worden.

**Samenvatting**

Om de professionaliteit van wiskundedocenten te vergroten is een Community of Learners opgericht. Het doel van deze groep is het, aan de hand van de methode lesson study, vergroten van de kennis over het leren van leerlingen. Eén onderdeel van deze methode is het ontwikkelen van een kader waarmee dit leren van leerlingen in kaart kan worden gebracht.

Voor het voltooien van het vak Onderzoek van Onderwijs is dit onderzoek van dichtbij gevolgd en is een meetinstrument ontwikkelt waarmee het leren van leerlingen vastgelegd kan worden. Onderdeel van dit meetinstrument is een verwerkingslijst waarop de uitspraken van leerlingen en docent aangevinkt kunnen worden. Aan de hand van deze verwerkingslijst is het mogelijk om het abstractieniveau van de leerlingen te volgen, maar ook wordt hiermee duidelijk waar en waarom leerlingen tegen problemen aanlopen.

**Inhoudsopgave**

Voorwoord ..... 2
Uitleg bij dit rapport ..... 3
Samenvatting ..... 4
Inleiding ..... 6
1. Theoretisch kader ..... 7
1.1 Community of Learners ..... 7
1.2 Pedagogical Content Knowledge ..... 8
1.3 Lesson study ..... 8
*1.3.1 Het formuleren van leerdoelen* ..... 9
*1.3.2 Het ontwerpen van een onderzoeksles* ..... 9
*1.3.3 Het ontwikkelen van een onderzoeksplan* ..... 10
*1.3.4 Het geven en observeren van de onderzoeksles* ..... 10
*1.3.5 Het analyseren van de verkregen data* ..... 10
*1.3.6 Het documenteren van de resultaten van onderzoek* ..... 11
2. Methode ..... 12
2.1 Het leren van leerlingen ..... 12
2.2 Acties van leerlingen en docent ..... 13
*2.2.1 Vragen van leerlingen* ..... 13
*2.2.2 Reacties van docenten* ..... 14
2.3 Abstractieniveaus ..... 14
*2.3.1 Piaget* ..... 15
*2.3.2 Bruner* ..... 15
*2.3.3 Van Hiele* ..... 15
*2.3.4 Tall* ..... 15
3. De observatielijst ..... 17
3.1 Vragen van leerlingen in de embodied wereld ..... 17
*3.1.1 Begripsvragen van leerlingen in de embodied wereld* ..... 17
*3.1.2 Procedurevragen van leerlingen in de embodied wereld* ..... 18
*3.1.3 Procesvragen van leerlingen in de embodied wereld* ..... 19
3.2 Vragen van leerlingen in de proceptual wereld ..... 20
*3.2.1 Begripsvragen van leerlingen in de proceptual wereld* ..... 20
*3.2.2 Procedurevragen van leerlingen in de proceptual wereld* ..... 20
*3.2.3 Procesvragen van leerlingen in de proceptual wereld* ..... 21
4. Stand van zaken en vervolgstappen ..... 22
Referentielijst ..... 23
Bijlagen ..... 25

## Inleiding

In het voortgezet onderwijs is er een grote behoefte aan goed geschoolde wiskundedocenten. Recent onderzoek is gericht op de professionalisering van deze wiskundedocenten. Hiervoor is een Community of Learners (CoL) samengesteld, bestaande uit wiskundedocenten in het voortgezet onderwijs, vakdidactici en onderzoekers van de Universiteit Twente. Het doel van deze Community of Learners is om aan de hand van de methode lesson study de Pedagogical Content Knowledge (PCK) van de deelnemende docenten en hun collega's te vergroten.

De studie die in dit document beschreven staat heeft als doel het in kaart brengen van de elementen die een rol spelen bij dit onderzoek en daarbij het ontwerpen van een kader waarmee het leren van leerlingen in kaart kan worden gebracht.

# 1. Theoretisch kader

In het volgende hoofdstuk worden de begrippen ‘Community of Learners’, ‘Lesson study’ en ‘Pedagogical Content Knowledge’ toegelicht.

## *1.1 Community of Learners*

Het begrip Community of Learners (CoL) is in de jaren tachtig geïntroduceerd en bestaat uit een kleine groep van onderzoekers die opereren in een veilige en onderzoeksgerichte omgeving (Brown & Campione, 1996). De deelnemers van Community of Learners werken op een gelijkwaardige manier samen aan het ontwerp en de uitvoering van een onderzoek. Iedere deelnemer draagt bij aan het eindresultaat en de taken worden onderling verdeeld. Een belangrijke taak van de deelnemers is het organiseren van de randvoorwaarden, zoals de inrichting van de lokalen en de aanwezigheid van de benodigde materialen (Beishuizen, 2008).

Brown & Campione (1996) en Beishuizen (2004) hebben zes belangrijke kenmerken van een Community of Learners geïdentificeerd, namelijk:

1. De deelnemers worden gezien als serieuze partners in het proces van kennisontwikkeling;
2. De deelnemers ontwikkeling hun kennis door wetenschappelijke onderzoeken uit te voeren;
3. Belangrijke vragen en concepten uit het betreffende vakgebied staan centraal;
4. De deelnemers maken kennis met de cultuur van en samenwerking in onderzoeken;
5. De deelnemers reflecteren op de verkregen resultaten en onderzoeksmethoden om op deze manier de waarde van het onderzoeksproject in te schatten.
6. De deelnemers beschikken over de benodigde voorzieningen om aan het onderzoeksproject te kunnen werken.

De deelnemers houden zich, in kleine onderzoeksgroepen, bezig met het uitvoeren van onderzoeken *(research)*, het uitwisselen van resultaten *(sharing)*, en het toepassen van de verworven kennis in een nieuwe taak *(consequential task)* (Beishuizen, 2004;2008). In deze studie wordt de Community of Learners als middel ingezet om docenten te professionaliseren (Johnson & Johnson, 1999).

De Community of Learners bestaat in deze studie uit een team van vijf wiskundedocenten van een middelbare school en drie vakdidactici van de Universiteit Twente. Deze onderzoeksgroep houdt zich bezig met een herhalende cyclus van het

uitvoeren van onderzoeken, het uitwisselen van resultaten en het op basis van de conclusies formuleren van nieuwe vragen die in vervolgtaken kunnen worden onderzocht.

De Community of Learners is opgericht om de Pedagogical Content Knowledge (PCK) van de deelnemende docenten en hun collega's te vergroten. Dit begrip wordt in de volgende paragraaf verder toegelicht.

### *1.2 Pedagogical Content Knowledge*

Pedagogical Content Knowledge is een belangrijk onderdeel van de praktijkkennis die docenten hebben en bestaat uit meerdere componenten. Eén van die componenten is de kennis van docenten over het leren van leerlingen (*knowledge of students' understanding)*, welke centraal staat in deze studie (Grossman, 1990; Magnusson, Krajcik & Borko, 1999).

De kennis over het leren van leerlingen, met betrekking tot een bepaald onderwerp (*content)*, kan opgesplitst worden in twee categorieën (Magnusson, Krajcik & Borko, 1999). De eerste categorie bestaat uit de kennis van docenten over wat leerlingen vooraf kunnen en weten en zouden moeten kunnen en weten (*Knowledge of requirements for learning)*. Het gaat hierbij om het inschatten van de voorkennis en de vaardigheden die een leerling heeft en zou moeten hebben om het onderwerp te leren begrijpen. Hieronder valt ook het inschatten van hoe leerlingen over het onderwerp denken, wat ze erover weten en hoe ze het onderwerp het makkelijkst kunnen leren. De tweede categorie bestaat uit de kennis van docenten over de problemen waar leerlingen tegenaan kunnen lopen (*Knowledge of areas of student difficulty)*. Er zijn verschillende redenen waarom leerlingen bepaalde elementen van een onderwerp moeilijk vinden, zoals een te hoog abstractieniveau, een gebrek aan ervaring met betrekking to het onderwerp, een tegenstrijdigheid met eerder ervaringen, etc. Docenten moeten weten wat leerlingen moeilijk vinden, welke misconcepten ze kunnen hebben en wat veelgemaakte fouten zijn.

Het vergroten van de PCK gebeurt aan de hand van de methode lesson study, wat verder toegelicht wordt in de volgende paragraaf.

### *1.3 Lesson study*

Lesson study is een methode die afkomstig is uit Japan en is gericht op de professionalisering van docenten (Hiebert, Gallimore & Stigler, 2002; Fernandez & Yoshida, 2004). De methode wordt als zeer succesvol beschouwd en bijna alle docenten in Japan maken deel uit van een team waarin lesson study gebruikt wordt (Lewis, Perry & Murata, 2006).

Bij de methode lesson study is een kleine groep docenten betrokken die samenwerken bij het plannen, uitvoeren, observeren en analyseren van lessen, ook wel onderzoekslessen genoemd (Cerbin & Kopp, 2006). Dit werk levert twee producten op, namelijk:

1. Een gedetailleerd en bruikbaar lesplan;
2. Een dieptestudie van de les, waarin het lesgeven wordt onderzocht, waarin uitgelegd wordt hoe leerlingen reageren op de les en waarin aangegeven wordt hoe de les verbeterd kan worden, gebaseerd op het bewijs dat daarvoor, in de gegeven les, is verkregen.

De resultaten van deze onderzoekslessen worden uitgebreid beschreven en eventueel verspreid door het land.

De methode lesson study bestaat uit 6 stappen (Cerbin & Kopp, 2006). Deze zijn als volgt:

1. Het formuleren van leerdoelen;
2. Het ontwerpen van een onderzoeksles;
3. Het ontwikkelen van een onderzoeksplan;
4. Het geven en observeren van de onderzoeksles;
5. Het analyseren van de verkregen data en;
6. Het documenteren van de resultaten van het onderzoek;

Deze zes stappen worden nu verder uitgewerkt.

### *1.3.1 Het formuleren van leerdoelen*

De eerste stap van de methode lesson study is het formuleren van leerdoelen. De deelnemende docenten kiezen daarbij eerst een onderwerp dat geschikt is voor het analyseren van het leren van leerlingen. Vervolgens wordt vastgesteld wat de leerdoelen zijn.

### *1.3.2 Het ontwerpen van een onderzoeksles*

Het team van onderzoekers, in dit geval de wiskundedocenten in de Community of Learners, ontwerpt vervolgens een les, met als doel het vinden van een antwoord op de onderzoeksvraag, welke in dit geval luidt: “Hoe leren leerlingen?”. Deze les kan tot stand komen door kleine wijzigingen in een bestaand lesplan door te voeren of door een compleet nieuwe les te ontwerpen. Bij het ontwerpen van de les wordt gebruik gemaakt van de ervaring van alle deelnemers van de Community of Learners. Zij wisselen kun kennis uit en op basis daarvan wordt een les ontworpen die, volgens de Community of

Learners, het beste geschikt is voor het vinden van een antwoord op de onderzoeksvraag.

Het doel van dit onderzoek is het blootleggen van het wiskundig denken van leerlingen. Bij het plannen van de les is het daarom belangrijk om te bedenken hoe leerlingen gaan reageren op de les. Vooraf moet voorspeld worden waar leerlingen vragen over gaan stellen en waar ze tegen problemen aan gaan lopen. Om dit goed te kunnen doen moeten de deelnemers zich verplaatsen in de leerlingen en proberen zich voor te stellen hoe de les door de leerlingen ervaren zal worden. Aansluitend daarop wordt dan een les ontworpen waarbij het wiskundig denken van de leerlingen blootgelegd kan worden.

### *1.3.3 Het ontwikkelen van een onderzoeksplan*

In deze stap wordt er door de deelnemers van de Community of Learners een plan gemaakt dat weergeeft hoe het wiskundig denken van de leerlingen onderzocht kan worden. Tijdens het ontwerpen van de lessen bedenken de deelnemers ten eerste wat voor data tijdens de onderzoeksles verzameld moet worden om aan te kunnen geven hoe de leerlingen denken en ook wordt er nagedacht over hoe de observanten hun observaties vast moeten leggen. Voor dit laatste wordt een observatielijst gemaakt waarop observanten hun bevindingen kunnen vastleggen. Hierbij is belangrijk op te merken dat het niet gaat om wat leerlingen leren in de les, maar om hoe leerlingen leren. En om dit laatste duidelijk te krijgen wordt er geconcentreerd op hoe ze het onderwerp leren begrijpen, wat voor moeilijkheden ze hebben, hoe ze vragen beantwoorden en hoe het wiskundig denken verandert gedurende de les.

### *1.3.4 Het geven en observeren van de onderzoeksles*

Nadat de onderzoeksles en het onderzoeksplan voltooid zijn, wordt de ontworpen les ook daadwerkelijk gegeven. En in plaats van dat de observanten bekijken hoe de docent zijn of haar les geeft, letten zij op hoe de leerlingen reageren op de les. Daarbij worden aantekeningen gemaakt op de observatielijst, die weergeven wat de activiteiten van de leerlingen gedurende de les zijn. Bij het verkrijgen van data op deze manier worden het gedrag, de prestaties, en het wiskundig denken van de leerlingen vastgelegd. Bovendien kunnen er ook video-opnames gemaakt worden om elementen van de les opnieuw te bekijken.

### *1.3.5 Het analyseren van de verkregen data*

In deze stap komen de deelnemers van de Community of Learners bij elkaar om de verkregen data te analyseren. De deelnemers wisselen hun ervaringen uit en samen wordt nagedacht over wat de observatielijsten, samen met de ervaringen van de deelnemers, vertellen over het leren van de leerlingen.

### *1.3.6 Het documenteren van de resultaten van onderzoek*

De laatste stap van de methode lesson study bestaat uit het documenteren van alle conclusies die getrokken mogen worden aan de hand van de data die verkregen is uit de onderzoeksles. Het doel hiervan is dat ook andere docenten dit kunnen bekijken en ervan kunnen leren. De documentatie bestaat uit verschillende elementen, zoals een beschrijving van de leerdoelen, de verzamelde data en de onderzoeksmethode, maar ook een uitleg van de data-analyse, de conclusies die daaruit getrokken kunnen worden en alle overige informatie die andere zouden kunnen gebruiken om hun kennis over het leren van leerlingen te vergroten.

Bij het maken van dit document hebben de deelnemers in de Community of Learners de eerste twee stappen van de lesson study doorlopen, wat betekent dat er een onderwerp is uitgekozen, dat de leerdoelen zijn vastgesteld en dat er (ditmaal in twee groepen) een les is ontworpen. Het onderwerp van de lesson study is het begrip ‘afgeleide’. De volgende stap is het ontwikkelen van een onderzoeksplan, welke in het volgende hoofdstuk beschreven wordt.

## 2. Methode

Na het ontwerpen van de les bestaat het vervolg van het onderzoek uit het ontwikkelen van een onderzoeksplan, het uitvoeren van de introductieles en het observeren daarvan. Eén deelnemer van de Community of Learners voert de introductieles uit en andere deelnemers, waaronder collega's, wonen de les bij om data te verzamelen. Het doel van de observatie is in dit geval het in kaart brengen van het wiskundig denken van leerlingen.

De volgende paragrafen zijn gericht op het beschrijven van de vormen die de vragen en opmerkingen van leerlingen en docenten kan aannemen. In het volgende hoofdstuk leidt dit tot een verwerkingsmatrix, welke gebruikt zal worden als meetinstrument voor het leren van de leerlingen.

### *2.1 Het leren van leerlingen*

Zoals eerder aangegeven ligt de focus niet op het observeren van hoe de docent lesgeeft, maar op hoe leerlingen reageren op de les. Om het wiskundig denken van leerlingen bloot te leggen, zullen uitspraken van leerlingen in kaart gebracht en geanalyseerd worden.

Om het niveau van het denken compleet te kunnen vastleggen wordt er een observatielijst gebruikt die de personen die de les observeren gebruiken om aan te geven wat er in de les gebeurt. Deze observatielijst bevat in eerste instantie drie kolommen. De eerste kolom heeft betrekking op de uitspraak van de leerling. En om het compleet te maken worden in de overige twee kolommen de reactie van de docent op de uitspraak van de leerling, en de reactie van de leerling die daar weer op volgt, vastgelegd.

De uitspraken die een leerling doet, en de reactie van de docent daarop kan verschillende vormen aannemen. Zo kan een leerling bijvoorbeeld een vraag stellen die te maken heeft met het begrijpen van het onderwerp, maar kan deze ook een vraag stellen die betrekking heeft op de oplossingsstrategie (zie paragraaf 3.2). Bovendien kan aan de hand van de uitspraken van leerlingen en de reactie van de docent vaak bepaald worden op welk abstractieniveau ze zich bevinden (zie paragraaf 3.3).

Om te constateren welk type vragen leerlingen stellen, wordt de observatielijst verder uitgebreid en bestaat daarom uit een matrix waarbij de rijen opgesplitst worden in verschillende abstractieniveaus en waarbij de eerste twee kolommen opgesplitst worden in de verschillende vormen van uitspraken. In de cellen van de matrix komen dan

uitspraken te staan die een leerling of een docent gedurende de les kan doen. Meer uitleg hierover is te vinden in het vervolg van dit rapport

In de ideale situatie kunnen de uitspraken van de leerlingen en de docent, eenvoudig aangevinkt worden. Maar gedurende de les is dit moeilijk te realiseren, aangezien de observerende deelnemers dan iedere keer de juiste uitspraak moet opzoeken in de lijst. Daarom gebruiken de observanten tijdens de onderzoeksles alleen een leeg papier waar de uitspraken kort opgeschreven kunnen worden. Na de les worden de uitspraken dan verwerkt in de opgestelde matrix, welke vanaf nu de verwerkingsmatrix wordt genoemd (zie hoofdstuk 4). Aan de hand van deze matrix kan dan achteraf bepaald worden welk type vragen de leerlingen voornamelijk stellen en op welk niveau van denken de leerlingen zich bevinden.

## *2.2 Acties van leerlingen en docent*

Het vragen stellen door leerlingen moet worden aangemoedigd. Vragen laten zien dat leerlingen iets niet begrijpen maar wel willen begrijpen, ze laten de grens zien tussen begrip en onbegrip en geven een indruk van de voorkennis van de leerling. Verder tonen de vragen de ideeën die kinderen zelf hebben en daarnaast brengen vragen de mogelijkheid met zich mee om beschreven te worden. Het stimuleren door de docent van het stellen van vragen, en het creëren van een leeromgeving waarin het gemakkelijk is om vragen te stellen, is daarom van groot belang.

Achter een vraag van een leerling kunnen verschillende bedoelingen zitten. De volgende paragraaf is gericht op het onderscheiden van de verschillende type vragen die leerlingen kunnen stellen gedurende de onderzoeksles (Hill, Ball & Schilling, 2008).

### *2.2.1 Vragen van leerlingen*

Ten eerste kan een vraag gesteld worden met als doel het verdiepen van het begrip. Via compressie wordt een begrip krachtiger. Een b*egripsvraag* is een vraag die verlangt dat de docent classificeert, dat deze bekende feiten met elkaar combineert door beschrijvingen te geven, hoofdzaken te bepalen en te vergelijken (King, 1994). De bijbehorende vragen zullen vaak beginnen met “Wat betekent ...” en “Wat is ...” en zullen vooral gesteld worden om het relationele begrip te verdiepen (Skemp, 1976).

Ten tweede kan een leerling een vraag stellen die er op gericht is het instrumentele begrip te vergroten (Skemp, 1976). Dit type vraag wordt vanaf nu een *procedurevraag* genoemd. In deze categorie wil de leerling stap voor stap weten wat er gedaan moet worden om tot de oplossing voor het probleem te komen. Twee voorbeelden van vragen in deze categorie zijn: “Hoe moet ik nu verder?” en “Wat is de volgende stap”.

Tot slot kan een uitspraak van een leerling betrekking hebben op de oplossingsstrategie, vanaf nu *procesvraag* genoemd. Dit type vragen wordt vaak gesteld op het moment dat een leerling niet weet hoe een oplossing gevonden kan worden voor het probleem waar deze tegenaan loopt. Bijbehorende vragen zullen vaak beginnen met “Hoe bepaal ik...” en “Hoe kom ik tot ...” en “Hoe kan ik ervoor zorgen dat...”.

### *2.2.2 Reacties van docenten*

Op het moment dat een leerling een vraag stelt, kan een docent daar op verschillende manieren op reageren. Om het totale beeld van wat er gebeurt in de les compleet te krijgen, worden ook de reacties van de docent opgesplitst in verschillende categorieën. In deze paragraaf worden deze verschillende categorieën besproken.

Het eerste dat een docent kan doen is rechtstreeks antwoord geven op de vraag. Het type vraag van de leerlingen bepaalt wat dit precies inhoudt. Als een leerling een begripsvraag heeft gesteld, dan begint de reactie van de docent vaak met “Dat betekent...” of “Dat is...”. Als een leerling een procedurevraag heeft gesteld dan zal een rechtstreeks antwoord betekenen dat de docent direct vertelt wat de volgende stap in het proces is en als een leerlingen een procesvraag heeft gesteld, dan vertelt de docent hoe de oplossing gevonden kan worden.

Een andere manier waarop een docent kan reageren is het uitvoeren van voorbeeldgedrag. Als reactie op de vraag doet een docent voor wat er moet gebeuren, waarbij deze de situatie, of een vergelijkbare situatie, schetst en stap voor stap laat zien wat het betekent of hoe het moet. De docent doet het wiskundig denken voor en de leerling kan het nadoen.

Tot slot kan een docent ook het antwoord op de vraag laten vinden door het probleem te identificeren en het vervolgens in een vorm te presenteren die de leerling wel begrijpt. Hierbij kan de docent bijvoorbeeld de vraag volledig ontleden en wedervragen stellen om het probleem, en daardoor misschien ook de oplossing, voor de leerling helder te krijgen.

## ***2.3 Abstractieniveaus***

Een onderdeel dat een grote rol speelt bij het onderzoeken van het wiskundig denken van leerlingen is het bepalen van het abstractieniveau waarop het wiskundig denken van de leerlingen zich afspeelt. In de afgelopen jaren zijn er veel theorieën over de cognitieve ontwikkeling van kinderen ontwikkeld door bijvoorbeeld Piaget (1985), Bruner (1966) en Van Hiele (1986) en Tall (2004, 2008, 2009). Al deze theoretici leggen de nadruk op de verschillende abstractieniveaus waarop het wiskundig denken van de kinderen zich kan

bevinden. In het vervolg van deze paragraaf worden deze abstractieniveaus kort genoemd.

### *2.3.1 Piaget*

Piaget onderscheidde drie abstractieniveaus, welke zijn als volgt gedefinieerd.

- Empirical abstraction
- Pseuso-empirical abstraction
- Reflective abstraction.

Voor meer informatie hierover, zie (Piaget, 1965; Tall, 2004):

### *2.3.2 Bruner*

Bruner beschrijft de volgende drie denkwerelden (zie Bruner, 1966; Tall, 2004):

- Enactive world
- Iconic world
- Symbolic world

### *2.3.3 Van Hiele*

De abstractieniveaus die Van Hiele beschrijft, zijn opgedeeld in de volgende vijf categorieën (zie Van Hiele, 1986; Tall, 2004):

- Recognitions
- Analysis
- Informal deduction
- Deduction
- Rigor

### *2.3.4 Tall*

Ook Tall (2004, 2008, 2009) ontwikkelde in de afgelopen jaren een theorie over een reis door drie werelden van de wiskunde waarin hij drie abstractieniveaus beschrijft waarin het wiskundig denken zich kan bevinden. Deze theorieën zijn gebaseerd op de theorieën van de deskundigen die in de deze paragraaf zijn beschreven (Tall, 2004) en vormen het uitgangspunt voor dit onderzoek. De abstractieniveaus van Tall worden in de rest van deze paragraaf toegelicht.

### Conceptual-embodied world

Onder de *conceptual-embodied,* afgekort *embodied* wereld verstaat Tall de wereld van objecten die waargenomen kunnen worden. Er is een grote rol weggelegd voor de zintuigen. Deze wereld groeit vanuit de voorstellingen die we van de wereld hebben en is de wereld waarin ieder kind begint met leren. Een uitspraak op die abstractieniveau is waar, als de bewering zichtbaar waar is.

### Proceptual-symbolic world

De *proceptual-symbolic*, afgekort *proceptual,* wereld is de wereld van symbolen die gebruikt worden in berekeningen in de rekenkunde en algebra. Deze symbolen kunnen staan voor een proces dat plaatsvindt, maar kunnen ook staan voor een concept waar je over na kunt denken, ook wel *procept* genoemd.  Op dit niveau is een uitspraak waar, als het aan te tonen is door rekenkundige uitvoering.

### Formal-axiomatic world

De *formal-axiomatic*, afgekort *formal,* wereld is de meest abstracte wereld. In deze wereld wordt gewerkt met axioma's die zijn geformuleerd om wiskundige structuren te beschrijven. Deze wereld is de wereld van axioma's, definities en formele bewijzen waaruit eigenschappen van objecten worden afgeleid. Waarheid op dit niveau rust uitsluitend op het bewijs met behulp van definities en axioma's.

De introductie van het begrip afgeleide staat in deze studie centraal. Uitingen in de *formal* wereld worden hierbij niet verwacht en daarom wordt deze ook niet meegenomen in de verwerkingsmatrix, welke in het volgende hoofdstuk beschreven wordt.

## 3. De observatielijst

De totale verwerkingsmatrix ziet er nu als volgt uit:

- 2 rijen:
    - Embodied
    - Proceptual
- 3 (soms opgesplitste) hoofdkolommen (7 kolommen in totaal):
    - Vraag leerling
        - Begripsvragen
        - Procedurevragen
        - Procesvragen
    - Reactie docent
        - Rechtstreeks antwoord
        - Voorbeeldgedrag
        - Probleemidentificatie
    - Reactie leerling

Deze matrix is voor een gedeelte (1e hoofdkolom) ingevuld met vragen die betrekking hebben op het onderwerp van deze studie, het begrip afgeleide. Een beschrijving van deze vragen per abstractieniveau en type vraag is te vinden in de volgende paragrafen.

### *3.1 Vragen van leerlingen in de embodied wereld*

Deze paragraaf bevat een beschrijving van de vragen die leerlingen kunnen stellen in de embodied wereld.

#### *3.1.1 Begripsvragen van leerlingen in de embodied wereld*

De eerste rij en eerste kolom, welke de begripsvragen bevat die een leerling zou kunnen stellen in de embodied world, bestaat nu uit de volgende vragen:

1. Wat betekent raken?
2. Wat is een raakpunt?
3. Wat is een lijn?
4. Wat is een raaklijn?
5. Wat betekent het dat er één raaklijn is?
6. Wat betekent de helling?

7. Wat is het verband tussen helling en raaklijn?
8. Wat betekent de richtingscoëfficiënt?
9. Wat is het verband tussen de x en y- waarde?
10. Wat betekent verandering?
11. Wat betekent het differentiequotiënt?
12. Wat betekent het differentiaalquotiënt?
13. Wat is het verschil tussen exact en benaderd?
14. Wat betekent het om twee punten te kiezen?
15. Waarom wordt het $2^e$ punt dichtbij het $1^e$ punt gekozen?
16. Wordt er door 0 gedeeld?
17. Wat betekent dalen/stijgen?
18. Wat betekent een negatieve/positieve richtingscoëfficiënt?
19. Hoe moet het tweede punt in de grafiek gekozen worden?
20. Wat betekent de afgeleide?
21. Wat betekent lokaal/globaal?
22. Geldt dat in elk punt van de grafiek?
23. Wat is het verband tussen helling en afgeleide?
24. Wat is het verband tussen een lijn en een raaklijn?
25. Wat betekent een limiet?
26. Waarom wordt er een limiet gebruikt?

### *3.1.2 Procedurevragen van leerlingen in de embodied wereld*

De eerste rij en tweede kolom, welke de procedurevragen bevat die een leerling zou kunnen stellen in de embodied world, bestaat nu uit de volgende vragen:

1. Hoe ziet raken er in de tekening uit?
2. Wat is een raakpunt in de tekening?
3. Hoe ziet een lijn er uit?
4. Wat is de raaklijn in tekening?
5. Hoe zie je in de tekening één raaklijn?
6. Wat is helling in tekening?
7. Hoe is het verband tussen helling en raaklijn in de tekening te zien?
8. Wat is de richtingscoëfficiënt in de tekening?
9. Hoe is het verband tussen x en y -waarde in de tekening te zien?
10. Hoe berekening ik de verandering?
11. Wat is het differentiequotiënt in de tekening?
12. Wat is het differentiaalquotiënt in de tekening?
13. Hoe ziet het verschil tussen exact en benaderd er in de tekening uit?

14. Hoe teken ik twee punten in de grafiek?
15. Wat gebeurt er in de tekening als het 2e punt dichtbij het 1e punt gekozen wordt?
16. Hoe kan ik uit de tekening halen of er door 0 gedeeld wordt?
17. Hoe ziet dalen/stijgen eruit?
18. Hoe zie ik in de tekening dat de richtingscoëfficiënt negatief/positief is?
19. Hoe teken ik het tweede punt bij een dalende grafiek?
20. Wat is de afgeleide in de tekening?
21. Hoe zie ik in de tekening dat iets lokaal/globaal is?
22. Hoe zie ik de geldigheid in elk punt?
23. Hoe is het verband tussen helling en afgeleide in de tekening te zien?
24. Waar is dat verband in de tekening te zien?
25. Hoe ziet een limiet er uit in de tekening?
26. Hoe kan ik in de tekening de reden voor een limiet terugvinden?

### *3.1.3 Procesvragen van leerlingen in de embodied wereld*

De eerste rij en derde kolom, welke de procesvragen bevat die een leerling zou kunnen stellen in de embodied world, bestaat nu uit de volgende vragen:

1. Hoe bepaal ik of er sprake is van raken?
2. Hoe bepaal ik een raakpunt?
3. Hoe bepaal ik of iets een lijn is?
4. Hoe bepaal ik de raaklijn?
5. Hoe bepaal ik die ene raaklijn?
6. Hoe bepaal ik de helling?
7. Hoe bepaal ik het verband tussen de helling en raaklijn?
8. Hoe bepaal ik de richtingscoëfficiënt?
9. Hoe bepaal ik het verband tussen de x en y- waarde?
10. Hoe bepaal ik de verandering?
11. Hoe bepaal ik het differentiequotiënt?
12. Hoe bepaal ik het differentiaalquotiënt?
13. Hoe bepaal ik het verschil tussen exact en benaderd?
14. Hoe kies ik de twee punten?
15. Hoe bepaal ik wat er gebeurt als het 2e punt dichterbij het 1e punt gekozen wordt?
16. Hoe bepaal ik of er door 0 gedeeld wordt?
17. Hoe bepaal ik of iets daalt of stijgt?
18. Hoe bepaal ik of de richtingscoëfficiënt negatief/positief is?
19. Hoe bepaal ik het tweede punt bij een dalende grafiek?
20. Hoe bepaal ik de afgeleide?

21. Hoe bepaal ik of iets lokaal/globaal is?
22. Hoe bepaal ik overal de geldigheid?
23. Hoe bepaal ik het verband tussen de helling en afgeleide?
24. Hoe bepaal ik het verband tussen een lijn en een raaklijn?
25. Hoe bepaal ik de limiet?
26. Hoe bepaal ik waarom een limiet gebruikt wordt?

## *3.2 Vragen van leerlingen in de proceptual wereld*

Deze paragraaf bevat een beschrijving van de vragen die leerlingen kunnen stellen in de proceptual wereld.

### *3.2.1 Begripsvragen van leerlingen in de proceptual wereld*

De tweede rij en eerste kolom, welke de begripsvragen bevat die een leerling zou kunnen stellen in de proceptual wereld, bestaat nu uit de volgende vragen:

1. Wat is vergelijking van een raaklijn?
2. Wat betekent de *a* in de vergelijking van de raaklijn?
3. Wat betekent de *b* in de vergelijking van de raaklijn?
4. Wat betekent f(x)?
5. Wat betekent f(x) = y = ax + b?
6. Wat betekent Δy/Δx?
7. Wat betekent (f(x+Δx)-f(x))/Δx?
8. Wat betekent f(x) > (of <) f(a) voor elke x > (of <) a?
9. Wat betekent Δx --> 0?
10. Wat betekent Δx = 0?
11. Wat betekent δy/δx?
12. Wat betekent dy/dx?
13. Wat betekent f'(x)?
14. Wat betekent f'(x) = 0?
15. Wat betekent f'(x) > (of <) 0?

### *3.2.2 Procedurevragen van leerlingen in de proceptual wereld*

De tweede rij en tweede kolom, welke de procedurevragen bevat die een leerling zou kunnen stellen in de proceptual wereld, bestaat nu uit de volgende vragen:

1. Hoe bereken ik de vergelijking van de raaklijn: y = ax + b?
2. Hoe bereken ik de *a* in de vergelijking van de raaklijn?
3. Hoe bereken ik de *b* in de vergelijking van de raaklijn?
4. Hoe bereken ik f(x) voor een gegeven x?

5. Hoe bereken ik f(x) en ax + b?
6. Hoe bereken ik Δy/Δx?
7. Hoe bereken ik (f(x+Δx)-f(x))/Δx?
8. Hoe kan ik aantonen dat f(x) > (of <) f(a) voor elke x > (of <) a?
9. Hoe gebruik ik Δx --> 0 in de berekeningen?
10. Hoe kan ik aantonen dat Δx = 0?
11. Hoe bereken ik δy/δx?
12. Hoe bereken ik dy/dx?
13. Hoe bereken ik f'(x)?
14. Hoe kan ik aantonen dat f'(x) = 0?
15. Hoe kan ik aantonen dat f' (x) > (of <) 0?

### *3.2.3 Procesvragen van leerlingen in de proceptual wereld*

De tweede rij en derde kolom, welke de procesvragen bevat die een leerling zou kunnen stellen in de proceptual wereld, bestaat nu uit de volgende vragen:

1. Hoe bepaal ik de vergelijking van de raaklijn: y = ax + b?
2. Hoe bepaal ik wat de *a* in de vergelijking van de raaklijn is?
3. Hoe bepaal ik wat de *b* in de vergelijking van de raaklijn is?
4. Hoe bepaal ik f(x)?
5. Hoe bepaal ik dat f(x) gelijk is aan y = ax + b?
6. Hoe kom ik tot een Δy en Δx?
7. Hoe kom ik tot een f(x + Δx), f(x) en Δx?
8. Hoe bepaal ik dat f(x) > (of <) f(a) voor elke x > (of <) a?
9. Hoe doe ik Δx --> 0?
10. Hoe kom ik tot Δx = 0?
11. Hoe kom ik tot een δy en δx?
12. Hoe kom ik tot een dy en dx?
13. Hoe bepaal ik f'(x)?
14. Hoe kom ik tot f'(x) = 0?
15. Hoe kom ik tot f' (x) > (of <) 0?

## 4. Stand van zaken en vervolgstappen

In dit document is een onderzoek beschreven dat is uitgevoerd door wiskundedocenten en onderzoekers van de Universiteit Twente. Voor dit onderzoek is tevens een meetinstrument ontwikkelt waarmee het wiskundig denken van leerlingen in onderzoekslessen vastgelegd kan worden.

Inmiddels zijn er een aantal van deze onderzoekslessen uitgevoerd, waarbij enkele deelnemers van de Community of Learners als observator hebben gefungeerd. De resultaten van deze onderzoekslessen worden nog verzameld, waardoor er op dat gebied nog geen conclusies getrokken kunnen worden.

Wel is al bekend dat er een nieuwe reeks van onderzoekslessen gegeven zal worden, waarbij ditmaal de begrippen ‘sinus en cosinus’ centraal staan. Aan de hand van de resultaten het onderzoek dat in dit rapport beschreven staat, kan het meetinstrument verbeterd worden en opnieuw getest in de onderzoekslessen die nog gaan volgen.

**Referentielijst**


Beijaard, D., van Driel, J., & Verloop, N. (1999). Evaluation of story-line methodology in research on teachers' practical knowledge. *Studies In Educational Evaluation, 25*(1), 47-62.

Beishuizen, J. J. (2004). De vrolijke wetenschap. Over communities of learners als kweekplaats voor kenniswerkers (oratie). Amsterdam: Vrije universiteit. X

Beishuizen, J. J. (2008). Does a community of learners foster self-regulated learning? *Technology, Pedagogy and Education, 17*(3), 183-193. X

Biza, I. Nardi, E. & Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 301-309.

Brown, A. L. & Campione, J. C. (1996). Psychological theory and the design of innovative learning environments: On procedures, principles, and systems. In L. Schauble and R. Glaser (Eds.), *Innovation in learning: New environments for education,* 289-325. Mahwac, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. X

Bruner, J. S. (1966). *Towards a theorie of instruction.* New York: Norton.

Cerbin, W. & Kopp, B. (2006). Lesson study as a model for building pedagogical knowledge and improving teaching. *International Journal of Teaching and Learning in Higher Education, 18*(3), 250-257. X

Escudero, I. & Sánchez, V. (2007). How do domains of knowledge integrate into mathematics teachers' practice. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 312-317.

Friedrichsen, P. J., Abell, S. K., Pareja, E. M., Brown, P. L., Lankford, D. M., & Volkmann, M. J. (2009). Does teaching experience matter? Examining biology teachers' prior knowledge for teaching in an alternative certification program. *Journal of Research in Science Teaching, 46*(4), 357-383.

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press. X

Fernandez, C. & Yoshida, M. (2004). *Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning.* Mahwah, New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Harlen, W. (2006). *Teaching, learning and assessing science 5-12.* Londen: Sage Publications.

Hiebert, J., Gallimore, R. & Stigler, J. (2002). A knowledge base for the teaching profession: What would it look like and how can we get one? *Educational Researcher, 31*(5), 3-15. X

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight.* Orlando: Academic Press.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal, 105*(1), 11-30.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

King, A. (1994). Guiding knowledge construction in the classroom: Effects of teaching children how to question and how to explain. *American Educational Research Journal, 31*(2), 338 – 368.

Krauss, S., Baumert, J., & Blum, W. (2008). Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: validation of the COACTIV constructs. *ZDM, 40*(5), 873-892.

Lewis, C. Perry, R. & Murata, A. (2006). How should research contribute to instructional improvement? The case of lesson study. *Educational Researcher, 35*(3), 3-14. X

Magnusson, S., Krajcik, J., & Borko, H. (1999). Nature, sources, and development of pedagogical content knowledge for science teaching. In J. Gess-Newsome & N. G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge: The construct and its implications for science education* (pp. 95-132). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. X

Piaget, J. (1965). *The child's conception of a Number.* New York: Norton.

Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*(2), 20-26.

Tsamir, P. & Tirosh, D. (2008). Combining theories in research in mathematics teacher education. *ZDM, 40*, 861-872.

Tsamir, P., Rasslan, S. & Dreyfus, T. (2006). Prospective teachers' reactions to right-or-wrong tasks: The case of derivatives of absolute value functions. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 240-251.

Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen, Norway, 4, 281–288.

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 20*(2), 5-24.

Tall, D. & Mejia-Ramos, J. P. (2009). The long-term cognitive development of different types of reasoning and proof. Hanna, G., Jahnke, H. N., & Pulte, H. (Eds.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives.* New York: Springer.

**Bijlagen**

Bijlage 1: Lesontwerp 1 over ‘afgeleide’ van deelnemer CoL

**Doelen van de les**

- Om de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een punt met x-coördinaat $x$ te vinden laten we het interval $[x, x+\Delta x]$ steeds kleiner worden. De leerling ziet in dat dit geen probleem oplevert, wanneer je eerst deelt en dan pas $\Delta x \to 0$ laat gaan.
- De leerling kent het begrip <u>limiet</u> als wiskundig begrip dat bovenstaande activiteit formaliseert en herkent de uitkomst van de limietactiviteit als een afspraak.
- De leerling kent het begrip <u>afgeleide</u> als resultaat van het variëren van $x$.

**De les: eerste deel**

*“Grafische herhaling van de helling in willekeurig punt $A$ d.m.v. grafieken (animaties?!) van hellingen van lijnen door punt $A$ en een ander punt ($B$) op de grafiek van $f$ met een steeds kleiner wordende $\Delta x$, zowel rechts als links van punt $A$.” [N.B. gebruik van $y = x^2$]*

Ik laat (met de Java applets m.b.v. GeoGebra gemaakt) verschillende rc’s zien, zowel links als rechts van punt $A$. Wat gebeurt er eigenlijk als $B$ steeds meer in de buurt van $A$ komt te liggen....? Je kunt het bestaan van een raaklijn *vermoeden.*

Het blijkt dat met het GeoGebra programmaatje de lijn als raaklijn....*verdwijnt*. Tekst t.b.v. leerlingen: "Hoe komt dat? Delen door nul (dat kan een computerprogramma niet). Maar is dat wel een probleem?" (antwoord wordt uitgesteld tot derde deel v/d les).

**De les: tweede deel**

*“Van één lijn $l$ door een willekeurig gekozen punt $A$ (x-coördinaat $x$) en een punt met x-coördinaat $x+\Delta x$ de richtingscoëfficiënt in symbolen weergeven, ondersteund door een grafische voorstelling (zie oorspronkelijke presentatie).”*

Introductie (met plaatje) van notatie $$rc_l = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \overset{def}{=} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{[x, x+\Delta x]} \quad (*)$$

**De les: derde deel**

*“Formaliseren van het begrip <u>afgeleide</u> door <u>limiet</u>gedrag van de rc van $l$”.*

Tekst voor de klas: “Wat gebeurt er met (*) als je $\Delta x$ heel klein maken (maar wel altijd $\Delta x > 0$ laten)?”.

**<u>Voorbeeld</u>**

bijv. $f(x) = 3x^2 - 2x$. De helling op $[x, x+\Delta x]$ is $rc_l = \left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]_{[x,x+\Delta x]} = \underbrace{.....}_{algebra} = 6x + 3\Delta x - 2$ (**).

En dan: ”Des te kleiner $\Delta x$ gekozen wordt, des te beter zal de benadering v/d rc van de raaklijn zijn.
Voor $\Delta x \to 0$ (willekeurig dicht bij nul, maar altijd net niet) wordt $rc_l\big|_{\Delta x \to 0} = 6x - 2$ …..
Hé, er ontstaat helemaal geen probleem!”

“En nu **spreken we af** dat de rc van die ene niet-wiebelende raaklijn gelijk is aan $rc_l\big|_{\Delta x \to 0} = 6x - 2 \overset{def}{=} rc_{raaklijn}$. Je kunt deze raaklijn vinden door in (**) $\Delta x$ verwaarloosbaar klein te nemen. We krijgen dan de rc in het punt $x : rc_l = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{[x]} = 6x - 2$. We noemen $\frac{dy}{dx}$ of $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{[x]}$ het differentiaalquotiënt of ook wel <u>afgeleide</u> $f'(x)$ van de functie $f$ in het punt met x-coördinaat x. Spreek uit als ‘f-accent’”

Wat we net gedaan hebben:
Het zo klein mogelijk kiezen van $\Delta x$,

- kijken naar de formule (**) waar we de deling weggewerkt hebben, en
- dan gewoonweg $\Delta x$ verwaarloosbaar klein maken
- en afspreken dat het resultaat de rc van de raaklijn is,

noemen we “de limiet nemen”.

In de wiskunde schrijven we dit formeel als:

$$rc_{raaklijn} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{[x]} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

**Rationale van de les**

Het gaat erom dat de leerling ziet (d.m.v. animatie van plaatjes) dat er zoiets als een raaklijn verondersteld mag worden (embodied world). Er is wel een probleem lijkt het als $\Delta x = 0$.

Vervolgens dat er met gebruikmaking van de definitie van rc en de $\Delta x$ notatie gerekend kan worden en er geen problemen opreden als je eerst deelt en dan pas $\Delta x \to 0$ laat gaan (symbolic world).

Tot slot maakt je het af door dat wat we gezien hebben te formaliseren, af te spreken dat dit mag. Wat we dan gedaan hebben wordt in de wiskunde de "limiet nemen" genoemd (formal world). Dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{dy}{dx} = f'(x)$.

*Samenvattend*: $\Delta x \to 0$ een probleem? Met de computerprogramma's: ja. Kijken en vermoeden: nee. Handig algebra gebruiken: nee. Dus maken we een afspraak: we nemen de limiet.

**Extra lesmateriaal**

Er zijn Java applets m.b.v. GeoGebra ontwikkeld die als demonstratie tijdens de les gebruikt zullen worden.

| **Tijdschema** | | |
|---|---|---|
| **Actie** | **Verloop lestijd (minuten)** | **Opmerkingen** |
| Welkom/opstarten | 0-5 | |
| Herhaling benaderingen raaklijnen m.b.v. Applets | 5-8 | |
| Opbouwen grafische voorstelling m.b.v. formules | 8-13 | |
| Formalisering | 13-16 | |
| Limietgedrag | 16-25 | |
| Terugblikken/samenvatten | 25-30 | |