



ONDERZOEK VAN ONDERWIJS

Koppeling tussen differentiaalrekening en kinematica

Uitgevoerd door:
Timon Vrijmoeth

Periode van uitvoering:
November 2009 tot maart 2010

Begeleiders UT:
Dr. Ir. H.J. Pol
Ir. J.T. van der Veen

Begeleider stageschool:
Ir. J. Hofstra

Stageschool:
Stedelijk Lyceum te Enschede
(locatie Zuid)

Samenvatting

In het hedendaags Nederlands natuurkunde-onderwijs wordt het onderwerp kinematica gedoceerd zonder gebruik te maken van wiskundige vaardigheden op het gebied van differentiëren en integreren. Momentane snelheid in een plaats-tijd grafiek wordt vaak grafisch bepaald via de raaklijn, zonder de afgeleide te noemen en de afgelegde weg in een snelheid-tijd diagram wordt grafisch bepaald via de oppervlakte-methode zonder het onderwerp integreren aan te snijden. En dat terwijl bij het vak wiskunde de onderwerpen differentiëren en integreren wel ter sprake komen.

In deze studie is getracht te onderzoeken of een goed begrip van het onderwerp differentiëren een positieve invloed heeft op het begrip van het onderwerp kinematica en daarom in aanmerking komt voor een prominentere plaats in het natuurkunde-onderwijs. Hiervoor is geprobeerd een verband te vinden tussen enerzijds de vaardigheden van leerlingen op het gebied van differentiëren en anderzijds misconcepties op het gebied van kinematica.

Om dit te bewerkstelligen is via een literatuurstudie een overzicht gemaakt van bekende misconcepties binnen de kinematica en is een overzicht gemaakt van de vaardigheden binnen het differentiëren. Met deze wetenschap zijn testinstrumenten ontwikkeld om een tweetal klassen, VWO-4 en VWO6, te testen op beide gebieden. Enerzijds is een kwalitatieve inventarisatie gemaakt van het algemene begrip van zowel differentiëren als kinematica met behulp van een mondelinge test, anderzijds is een kwantitatieve analyse gedaan met behulp van schriftelijke testen. De resultaten zijn vervolgens gecorreleerd om na te gaan of de vermoede koppelingen daadwerkelijk aangetoond konden worden.

De verkregen resultaten gaven enkele verbanden aan en doen vermoeden dat er wel degelijk positieve koppelingen bestaan tussen het onderwerp differentiëren en kinematica. Er wordt dan ook een lans gebroken voor een nauwere samenwerking tussen wiskunde en natuurkunde en een explicietere aanwezigheid van wiskundige vaardigheden binnen de natuurkunde op de specifieke gebieden.

Voorwoord

Deze these in combinatie met de te houden presentatie gelden als de officiële én officieuze afsluiting van mijn studententijd. Na 7,5 jaar studeren mag ik op dit moment voor de tweede maal master of science worden. Met dit diploma ben ik bovendien volledig bevoegd om eerstegraads natuurkunde aan de bovenbouw op het middelbaar onderwijs te geven. Het laatstgenoemde was uiteraard het hoofddoel; leraar worden was hetgeen ik ambieerde toen ik klaar was met elektrotechniek.

Uiteraard is dit alles niet vanzelf gegaan. Na afloop van mijn studie elektrotechniek moest ik weer opnieuw plaatsnemen in de collegebanken en moesten wederom een 80-tal studiepunten worden verworven. Enkele vakinhoudelijke vakken passeerden de revue, maar ook onderwijskundige en vakdidactische cursussen hielpen mij om verder te komen als competente docent. De beide stages heb ik als het belangrijkste onderdeel ervaren. Een inkijk in het lerarenpraktijk, de ervaring met de leerlingen en de energie die ik er uit haalde deden mij concluderen dat ik daadwerkelijk als docent verder wilde. Vandaar deze afronding van de studie; een afronding die een bijzonder interessant onderwerp behelst.

Zowel voor het afronden van mijn studie als voor het afronden van deze these ben ik een aantal mensen veel dank verschuldigd. Ik wil ze dan ook expliciet noemen.

Voor de begeleiding tijdens mijn snuffelstage wil ik Jos Vastert bedanken; hij gaf mij een eerste inkijk in het docentenleven. In het bijzonder wil ik Jaap Hofstra bedanken voor de zeer boeiende gesprekken en de positieve begeleiding tijdens de lange stage; tijdens deze stage ben ik door zijn positieve benadering definitief tot de conclusie te komen dat ik verder wilde in het lerarenvak. Uiteraard wil ik ook de klassen HAVO-4, VWO-4 en VWO-5 die ik les heb gegeven bedanken; ik mocht dankzij hun vele facetten van het docenten zijn beleven. Daarnaast hebben zij met hun vrijwillige inzet interessante resultaten gegeven in dit afstudeeronderzoek.

Ook de beide vakdidactici op de Universiteit Twente, Jan van der Veen en Henk Pol, wil ik hartelijk danken voor hun volhardende begeleiding tijdens mijn studie en in het bijzonder tijdens het doen van dit onderzoek.

Daarnaast wil ik mijn ouders bedanken voor hun morele ondersteuning en positieve feedback tijdens deze kopstudie. Ook mijn vriendin wil ik even noemen op deze plek; dankzij haar heb ik extra enthousiasme gekregen en sta ik vol goede moed in de toekomst als docent.

Hengelo, maart 2010.

Inhoudsopgave

Voorwoord	III
Inhoudsopgave	V
1 Inleiding	1
1.1 Aanleiding tot het onderzoek	1
1.2 Literatuuronderzoek	2
1.2.1 Transfer	2
1.2.2 Misconcepties binnen de kinematica	4
1.3 Analyse van schoolboeken	9
1.3.1 Systematische natuurkunde	10
1.3.2 Getal en ruimte	11
1.4 Probleemstelling	11
2 Methode	13
2.1 Onderzoeksgroep	13
2.2 Uitvoering van het onderzoek	14
2.3 Ontwerp van test kinematica	15
2.3.1 Selectie van misconcepties	16
2.3.2 Eisen per misconceptie	17
2.3.3 Uiteindelijk ontwerp van de test	18
2.4 Ontwerp van de test differentiëren	20
2.5 Koppeling tussen kinematica en differentiëren	22
2.6 Ontwerp van de mondelinge test	25
3 Resultaten	27
3.1 Mondelinge test	27
3.1.1 Discussie	33
3.2 Resultaten schriftelijke test	35
3.2.1 Kwantificering van resultaten	37
3.2.2 Correlatie	38
3.3 Vergelijking mondelinge en schriftelijke testen	39
4 Conclusies, discussie en aanbevelingen	41
4.1 Conclusies	41
4.2 Discussie	44
4.3 Aanbevelingen	45
Bibliografie	47
Appendices	47
A Test kinematica	49
B Test differentiëren	53
C Mondelinge test	57

D Resultaten mondelinge test	61
E Data schriftelijke testen	65
F Resultaten test kinematica	69
G Resultaten test differentiëren	71

Inleiding

Het vak natuurkunde bestaat uit veel verschillende onderwerpen. Van de werking van elektriciteit, het hefboomprincipe, vervalvergelijkingen tot het uitrekenen van brekingsindices. Het ene onderdeel van de natuurkunde staat moeilijker bekend dan het andere. Bij sommige onderwerpen zijn de procedures om opgaves te berekenen gemakkelijk en bij andere onderdelen is het principe inzichtelijk.

Eén van de meest bekende onderdelen van de natuurkunde is de kinematica. Kinematica is het deel van natuurkunde dat zich bezighoudt met beweging. De belangrijkste concepten die langskomen in de hoofdstukken over kinematica zijn: plaats, verplaatsing, snelheid en versnelling. Dit hoofdstuk uit het natuurkundeboek is voor de meeste leerlingen het dichtst bij de leefwereld; plaats en verplaatsing zijn aan de orde van de dag. Leerlingen fietsen heen en weer tussen school en thuis, zitten wel eens in trein of bus, zitten bij hun ouders in de auto en dromen vaak over snelle auto's.

Het feit dat dit onderwerp voor leerlingen geen ver van het bed show is neemt niet weg dat er veel adders onder het gras zitten als er daadwerkelijk gerekend dient te worden. Er zijn veel bekende misconcepties; vooral als de zichtbare bewegingen omgezet moeten gaan worden naar abstracte voorstellingen en als gerekend en voorspeld moet worden.

Iets anders wat opvalt als er gekeken wordt naar het onderwerp kinematica is dat in het natuurkundeboek dit onderwerp niet wordt ondersteund met de wiskundige onderwerpen differentiëren en integreren. Het berekenen van momentane snelheid uit een x - t wordt aangeleerd met de raaklijnmethode, zonder het onderwerp differentiëren te gebruiken, en het vinden van de verplaatsing in een v - t diagram wordt aangeleerd met de oppervlakte-methode, zonder het onderwerp integreren aan te snijden.

Het doel van dit onderzoek is om te kijken naar de koppeling tussen natuurkunde en wiskunde als het gaat om het onderdeel kinematica binnen de natuurkunde.

1.1 Aanleiding tot het onderzoek

Zowel tijdens mijn eigen VWO-tijd als tijdens de tijd dat ik stage liep op het Stedelijk Lyceum Zuid in Enschede viel me op dat bij het geven van de natuurkunde de principes binnen het onderwerp kinematica op een begrijpelijke manier worden uitgelegd, maar dat deze gesteund wordt met een zwakke wiskunde. Het principe wordt uitgelegd, er worden voorbeelden aangehaald en aan de hand van deze voorbeelden worden er één of meerdere formules geponeerd. Het probleem dat ik tegenkwam bij het behandelen van deze stof was het feit dat een essentieel wiskundig onderdeel - de differentiaalrekening - achterwege wordt gelaten en dat de principes via een sterk versimpelde wiskunde worden gepresenteerd.

Het viel me bij het gebruik van de natuurkunde methode (Systematische Natuurkunde) op dat het concept van momentane snelheid alleen grafisch wordt benaderd en dat zowel differentiëren als integreren achterwege worden gelaten. Bewegingen worden niet algebraïsch besproken en afgeleide grootheden worden daarom ook niet algebraïsch bepaald. De nadruk ligt vooral op het interpreteren van grafieken en het herkennen van plaats, snelheid en versnelling hier in.

Daarnaast viel op dat er werd geredeneerd vanuit standaardsituaties: een eenparige beweging (lineaire lijn in het x - t diagram) en een eenparig versnelde beweging (lineaire lijn in het v - t diagram). Aan de andere kant kwam er geen enkele vorm van differentiaalrekening in naar

voren. Ik zag in de klas om mij heen dat er op verschillende fronten misconcepties ontstonden aangaande het gebruik van de grafieken, maar ook over het uitrekenen van bijvoorbeeld de momentane snelheid.

In (Doorman, 2000) worden de opmerkelijke verschillen in de wiskunde en natuurkunde ook al aangestipt:

“Het probleem van twee gescheiden vakgebieden kinematica en differentiaalrekening is dat aan de ene kant snelheid en afgelegde weg als context dienen voor differentiaalrekening, terwijl aan de andere kant inzicht in de samenhang tussen snelheid en afgelegde weg juist kennis van differentiaalrekening vereist.”

Omdat ik vanuit mijn academische achtergrond direct de wiskundige onderbouwing met behulp van differentiaal- en integraalrekening miste en de verschillende misconcepties me opvielen rees bij mij de vraag of het gebruik van differentiaalrekening het begrip en de vaardigheid zouden bevorderen. Omdat differentiëren en integreren een volwaardig onderdeel van de wiskunde in het HAVO en VWO curriculum zijn lijken er wat mij betreft geen barrières aanwezig om deze kennis ten volle toe te passen binnen het onderwerp kinematica en ben ik er in geïnteresseerd of dit een waardevolle bijdrage zou kunnen leveren.

Zoals in verschillende onderzoeken naar voren is gekomen (McDermott, Rosenquist, & Zee, 1987; Beichner, 1994; Hale, 2000), is het onderwerp kinematica al vaak onderzocht. Er is zelfs een zeer uitgebreid onderzoek beschikbaar, waarin een jarenlang onderzoek wordt gepresenteerd en een complete lijst met misconcepties wordt gepresenteerd (McDermott et al., 1987). Ook is er onderzoek gedaan naar het begrip van leerlingen binnen het onderwerp differentiëren en integreren (Daemen & Roorda, 2008). Er wordt in deze artikelen vaak op verschillende manieren handreikingen gedaan om in de lespraktijk de manier van overbrengen van de stof te optimaliseren.

Het gaat in dit onderzoek er dan ook niet om welke misconcepties er precies zijn - dat is gezien de verschillende artikelen die vaak hetzelfde beeld geven iets wat al bekend is -, of om welke moeilijkheden er bestaan binnen het onderwerp differentiëren en integreren, maar om de vraag of een goed begrip van differentiëren (een positieve) invloed heeft het begrip binnen de kinematica.

1.2 Literatuuronderzoek

1.2.1 Transfer

De spil waar dit onderzoek om draait kan in één term worden gevangen: transfer.

Door (Byrnes, 1996) wordt transfer gedefinieerd als het volgende:

“Het proces waarin kennis vanuit een bepaalde context wordt toegepast in een andere context.”

Dit proces kan in allerlei zaken plaatsvinden. Kennis vanuit het klaslokaal kan worden toegepast in de werksfeer, kennis uit het vak economie kan worden toegepast bij het lezen van de economiepagina in de krant, of sommen uit het vak wiskunde kunnen worden toegepast bij het maken van producten.

Het type transfer waar in dit onderzoek naar wordt gezocht is de transfer van wiskunde naar natuurkunde. Specifieker gefomuleerd: het gebruiken van de kennis van differentiëren en/of integreren om kinematische sommen te begrijpen en op te lossen.

Eén van de eerste keren dat er wordt gesproken over transfer is in (Thorndike & Woodworth, 1901). Rond de eeuwwisseling van 1900 was er sprake van een doctrine genaamd *Formal discipline*. Deze doctrine omschreef dat moeilijke vakken als Latijn een breed effect zouden hebben

op andere vakgebieden. Het doel van deze studie was om te testen of dit daadwerkelijk het geval was; de uitkomsten deden het tegenovergestelde vermoeden. (Bransford, 2000)

In een later stadium omschrijft dezelfde schrijver (Thorndike, 1913) dat zowel *near transfer* (de transfer van een vaardigheid naar een zeer gelijksoortige vaardigheid) als *far transfer* (de transfer van de schoolsituatie naar het dagelijks leven) worden verhoogd als in de verschillende leergebieden exact dezelfde elementen naar voren komen.

Volgens (Bransford, 2000) kan transfer met de volgende zaken succesvol worden bewerkstelligd:

1. De initiële leerstof goed onder de knie hebben en er boven staan.
2. Streven naar begrip in plaats van kennis.
3. Genoeg tijd om te leren.
4. Feedback over de voortgang en de manier van leren door de docent.
5. Een goede motivatie. De taken moeten niet te makkelijk en ook niet te moeilijk zijn. Het moet ook duidelijk zijn wat de bruikbaarheid van het geleerde is.

In (Byrnes, 1996) wordt transfer beschreven als iets wat niet gemakkelijk gebeurt. Sterker nog, de schrijver stelt hier dat uit veel onderzoeken blijkt dat transfer bijna nooit voorkomt. Hetgeen is geleerd op school wordt vaak binnen school gelaten en weinig toegepast in het dagelijks leven. De schrijver wijt het gebrek aan transfer aan een aantal zaken en geeft er bijbehorende verbeteringen bij:

1. *Koppeling aan één context.* Mensen hebben de neiging om wat ze geleerd krijgen binnen de geleerde context toe te passen. Kinderen die sommetjes leren kunnen dit vaak alleen in een klaslokaal en passen ze niet meer toe in een snoepwinkel. Om verbetering van transfer te krijgen moet er expliciet *decontextualisatie* plaatsvinden. Dit houdt in dat geleerde vaardigheden worden losgekoppeld van de gepresenteerde context.
2. *Afwezigheid van conditionele kennis.* Om transfer te bevorderen moet iemand weten waarvoor de vaardigheid kan worden gebruikt. Om dit te bewerkstelligen moeten de vaardigheden aan doelen worden gekoppeld. Een kind kan als doel worden gesteld er achter te komen hoeveel geld hij aan de cassière moet geven voor zijn snoep, in plaats van het doel dat het werk achter zijn bureau af moet zijn.
3. *Leren zonder achterliggend principe.* Om tot betere transfer te komen moet het principe achter bepaalde vaardigheden duidelijk zijn. Als iedere vaardigheid een los trucje is, dan is er minder kans dat het wordt toegepast in een nieuwe context. Een leerling moet snappen dat er 1 opgeteld moet worden bij een getal om het volgende getal te krijgen. De losse kennis dat 7 na 6 komt en dat 18 na 17 komt zorgt er niet voor dat men ook in staat is om te snappen dat 1189 na 1188 komt.
4. *Afwezigheid van conceptuele kennis.* Uit verschillende onderzoeken bleek dat als mensen snappen waarom een bepaalde truc of vaardigheid werkt, er sneller sprake is van transfer.
5. *Afwezigheid van metacognitie.* Er is eerder sprake van transfer als iemand bewust, reflectief en analytisch probeert te begrijpen wat er gebeurt in een situatie. Daarnaast gaat dit ook beter als iemand zich bewust is van hoe zijn of haar brein in elkaar steekt.

Ook worden een aantal aanbevelingen gedaan om tot verbetering te komen:

1. Het gebruiken van veel voorbeelden en wijzen op de overeenkomsten tussen deze voorbeelden. Reciprocal teaching kan als middel worden gebruikt.
2. Benadrukken van de manier waarop leerlingen nieuwe informatie moeten toepassen, in plaats van vertellen wat de feiten zijn.
3. Expliciet gebruiken van voorbeelden uit de wereld om ons heen. Hierbij moeten de doelen in het klaslokaal gelijk worden gesteld aan de doelen in de echte wereld.
4. Om decontextualisatie te bewerkstelligen moeten verschillende realistische problemen wor-

- den gebruikt, die niet gelijksoortig zijn maar wel om dezelfde oplossingsstrategie vragen.
5. Het is goed om leerlingen te vragen om zaken in categorieën te plaatsen, zaken in één dimensie neer te zetten, een hypothese te maken, conclusies te trekken, zaken te analyseren in componenten en problemen op te lossen.
 6. Het aanmoedigen van zelfreflectie van het leerproces.

Uit bovenstaande verhaal blijkt dat er bij de koppeling tussen differentiëren en kinematica bepaald geen sprake van goede omstandigheden voor transfer. In het natuurkundeboek wordt op geen enkele manier gerept over de afgeleide of de integraal; in het wiskundeboek worden plaats, snelheid en versnelling daarentegen als context gebruikt om duidelijk te maken wat ze inhouden. De grootste euvels op het gebied van transfer liggen daarom in het natuurkundeboek enerzijds en de planning van de onderwerpen anderzijds.

In (Daemen & Roorda, 2008) wordt gesignaleerd dat er vaak sprake is van een afwezigheid van transfer van differentiëren naar kinematica:

“Hij ziet niet in dat er ook methoden uit de wiskundeles ingezet kunnen worden.”

Om een probleem op te lossen en transfer te bevorderen wordt in (Daemen & Roorda, 2008) de volgende aanbeveling gedaan:

“Voor flexibele transfer is het nodig om meerdere contexten of toepassingen te gebruiken. Ook abstracte representaties kunnen transfer bevorderen.”

Dit komt overeen met de opmerkingen die in (Byrnes, 1996) worden gemaakt.

De volgende zaken liggen transfer in de weg:

1. De behandeling van de kinematica is eerder dan de behandeling van differentiëren. Er wordt tijdens dit hoofdstuk daarom geen enkele koppeling met differentiëren gelegd. Ook (Daemen & Roorda, 2008) onderkent dit probleem:

“In het VWO heeft deze visie [Realistisch Wiskunde Onderwijs] er toe geleid dat de techniek van het differentiëren een tijd lang pas in de vijfde klas aan de orde kwam. Deze keuze wordt niet altijd gewaardeerd door collega’s van bijvoorbeeld natuurkunde en economie. Zij willen graag dat leerlingen een afgeleide kunnen berekenen, om daarmee bijvoorbeeld de marginale kostenfunctie of de formule voor snelheid van een voorwerp op te stellen.”

2. Het achterliggende principe achter de koppeling tussen plaats, snelheid en versnelling wordt niet duidelijk. Er wordt gehamerd op standaardsituaties (eenparige bewegingen, eenparig versnelde bewegingen), maar het principe van momentane snelheid en versnelling komt absoluut niet uit de verf. Het punt *“Leren zonder achterliggend principe”* uit de lijst met problemen die Byrnes beschrijft wordt hier dus niet goed in ogenschouw genomen.
3. Er worden in het hoofdstuk kinematica wel formules en trucs geponeerd, maar er wordt niet uitgelegd waarom dit werkt. Als leerlingen de afgelegde weg in een snelheid-tijd diagram moeten vinden, dan wordt uitgelegd dat dit kan met de oppervlaktmethode (integreren dus), maar er wordt niet duidelijk gemaakt waarom dit werkt. Punt 4 wordt daarom geen recht gedaan.

1.2.2 Misconcepties binnen de kinematica

Het constructivisme beweert dat iedere leerling zijn of haar eigen “construct” over een bepaald onderwerp maakt. Afhankelijk van de achtergrond, de aanwezige kennis en de omstandigheden wordt een nieuw concept of onderwerp op een bepaalde manier geïnterpreteerd en in het hoofd geconstrueerd. Iedere leerling maakt dus op de eigen manier een bepaald begrip en construct.

Zoveel leerlingen er zijn, zoveel verschillende manieren er worden gehanteerd om een onderwerp onder de knie te krijgen.

Binnen het onderwerp kinematica heeft ook iedere leerling zijn of haar eigen manieren om de stof te doorgronden. Los van het feit dat ieder leerling zijn of haar eigen concepties en manier van onthouden heeft over een bepaald onderwerp zijn er over dit onderwerp een aantal bekende en minder bekende misconcepties die leerlingen kunnen hebben of ontwikkelen gedurende de tijd dat de stof wordt gegeven. In het volgende zullen aan de hand van een aantal studies bekende en minder bekende misconcepties binnen het onderwerp kinematica worden behandeld.

In een studie van (Trowbridge & McDermott, 1980) werd naar aanleiding van een onderzoek naar het begrip van het begrip snelheid de volgende misconcepties aan het licht gebracht:

- Sommige leerlingen vertonen de neiging om plaats en snelheid te verwarren. Voorlopen of achterlopen worden geassocieerd met resp. een hogere snelheid en een lagere snelheid. De zogenaamde positie-snelheid verwarring.
- Het komt vaak voor dat leerlingen geen koppeling kunnen maken tussen hun begrip van de wereld om zich heen en kinematische begrippen. Snelheid wordt niet direct verbonden met de afgelegde weg binnen een bepaalde tijd.

Een gelijksoortige studie van dezelfde schrijvers (Trowbridge & McDermott, 1981) leverde resultaten aangaande het begrip van versnelling:

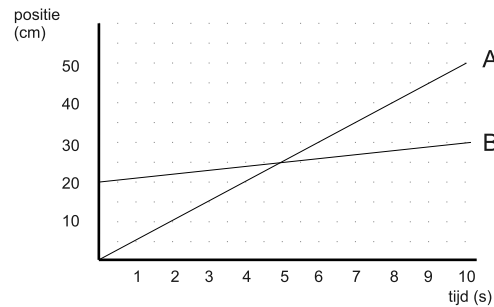
- Zelfs een kwalitatief begrip van versnelling als de ratio $\frac{dv}{dt}$ ontbrak bij sommige leerlingen.
- Een goed begrip van versnelling betekende ook een goed begrip van snelheid. Andersom was een goed begrip van snelheid nodig om een goed begrip van versnelling te krijgen, maar een begrip van snelheid impliceerde niet dat er ook een goed begrip van versnelling zou zijn.
- Verwarring tussen plaats en versnelling.
- Verwarring tussen snelheid en versnelling.

In de studie van (McDermott et al., 1987) werden de conclusies gepresenteerd van een jarenlang onderzoek naar de conceptie binnen de kinematica van leerlingen. Er werd een onderscheid gemaakt tussen twee verschillende moeilijkheden: de moeilijkheid om een goede verbinding te leggen tussen grafieken en natuurkundige concepten en de moeilijkheid om een goede verbinding te leggen tussen grafieken en situaties in de realiteit.

Binnen de eerste categorie zijn in de studie van (McDermott et al., 1987) de volgende misconcepties aan het licht gebracht:

1. Discrimineren tussen de helling en de hoogte van de grafiek. De conclusie werd getrokken dat leerlingen moeite hadden om de juiste informatie te halen uit zowel de momentane helling als de momentane waarde in de grafiek. Aan een groep studenten werd een plaats-tijd diagram gegeven waarin twee lineaire functies met verschillende hellingen elkaar op $t=4$ snijden. Bij de eerste vraag werd gevraagd om te definiëren welke van de twee grafieken een hogere snelheid had op $t=2$; in veel gevallen maakten leerlingen de fout de hoogte van de lijnen te interpreteren als de snelheid. Bij de tweede opgave werd de vraag gesteld of beide objecten dezelfde snelheid zouden hebben, en zo ja waar. Veel studenten kozen hier het snijpunt van beide grafieken en zagen niet in dat beide grafieken nooit dezelfde snelheid zouden hebben vanwege het lineaire karakter en de ongelijke helling.

2. Interpretatie van veranderingen in hoogte en helling. In de studie werd een plaats-tijd curve met allerlei verschillen in helling getoond aan leerlingen. Verschillende punten op de plaats-tijd curve werden aangegeven en er werd gevraagd om aan te geven op welke punten



Figuur 1.1: Opgave om te testen of een leerling goed discrimineert tussen helling en hoogte

de beweging het langzaamst was, het meest versnelde, het meest vertraagde en omdraaide. De meest gemaakte fout was het feit dat leerlingen dachten dat op het punten waar de grafiek de horizontale as snijdt de snelheid 0 is. Uiteraard is hier alleen de plaats 0 en de snelheid niet, omdat de grafiek hier een helling ongelijk 0 heeft. Een andere veel gemaakte fout was de interpretatie dat de snelheid toeneemt op het punt waar de grafiek afnemend stijgend is, omdat de grafiek stijgt. Nog een andere veel gemaakte fout was de interpretatie dat de beweging omkeert als de grafiek de horizontale as snijdt.

3. Relateren van verschillende grafieken. Het grootste probleem onder leerlingen was in deze studie het relateren van de verschillende grafieken aan elkaar. Er werd een continue plaats-tijd curve getoond en leerlingen moesten proberen daar een snelheid-tijd grafiek uit te construeren. Het bleek dat leerlingen niet in staat bleken om de vorm van de plaats-tijd diagram los te laten. In veel gevallen bleek de geconstrueerde snelheid-tijd grafiek een bewerking of zelfs een inverse van de vorm van de plaats-tijd grafiek.

4. Relateren van een beschrijving aan relevante elementen in een grafiek. Het bleek in de studie dat leerlingen een groot probleem hebben met het koppelen van een beschrijving aan een bepaald punt of een bepaald interval in een grafiek. Leerlingen moesten in een snelheid-tijd grafiek aangeven hoe groot de acceleratie van een raketmotor was aan de hand van een beschrijving waarin werd aangegeven op welke momenten welke motor werd ingeschakeld. De grootste problemen traden op in het feit dat leerlingen de neiging hadden om een snelheid door tijd te delen in plaats van het verschil in snelheid te delen door het verschil in tijd. Een ander probleem was het feit dat veel leerlingen die dit wel goed deden, dit niet relateerden aan de helling tussen de aangegeven punten. De meest gemaakte fout was op het moment dat de grafiek geen informatie gaf over de acceleratie van één van de motoren, omdat deze niet doorliep na dit punt. Dit stond ook in de beschrijving aangegeven. Toch maakten veel leerlingen de fout een berekening te maken; klaarblijkelijk had men de neiging een vast recept te volgen zonder te snappen waar men mee bezig was.

5. Interpreteren van de oppervlakte onder een grafiek. Onder deze noemer kregen de leerlingen een snelheid-tijd grafiek te zien en moesten hier informatie uit zien te halen. In de bewuste snelheid-tijd grafiek was een kromme te zien die op sommige delen positief was en op sommige delen negatief. De vraag was of de leerlingen hierbij zich een beeld zouden kunnen vormen over de plaats van het voorwerp. Dit bleek bij de meeste leerlingen niet het geval.

Eén van de problemen was dat leerlingen niet weten wat een bepaalde oppervlakte-eenheid onder de grafiek (blokje) precies inhoudt; er moet namelijk een stap worden gemaakt van een oppervlakte naar een lineaire grootte. Ook werd vaak niet begrepen dat een positieve oppervlakte een beweging vooruit betekent en een negatieve oppervlakte een beweging achteruit.

Ook werd de oppervlakte tussen de onderkant van het diagram en de lijn zelf bepaald. Een meer geraffineerde fout was het feit dat de beginpositie niet uit de grafiek kan worden bepaald; leerlingen zagen niet in dat deze in de begeleidende tekst zou moeten staan.

Naast deze moeilijkheden waren er ook moeilijkheden als het gaat om het koppelen van grafieken aan de realiteit. In dit deel van de studie (McDermott et al., 1987) werden laboratoriumsituaties aan leerlingen voorgelegd (beschreven van links naar rechts): een horizontale baan, een baan met een gedeelte aflopende helling tussen twee gedeelten horizontale en een baan met een stuk horizontaal, aflopend, horizontaal en oplopend. Op deze banen werd steeds een bal met een bepaalde beginsnelheid van links naar rechts bewogen. De volgende problemen kwamen in deze categorie naar voren:

1. Het representeren van een continue beweging door een continue lijn. Sommige leerlingen haalden de begrippen verplaatsing en plaats door elkaar. Bij een eenparige beweging resulteerde dit in een x - t diagram met een horizontale lijn. Beweging werd gezien als een serie punten in plaats van een continue lijn. Hetzelfde werd waargenomen bij snelheid-tijd grafieken: de snelheid werd in enkele gevallen berekend door intervallen te meten en de gemiddelde snelheid per interval te berekenen; de uitkomsten werden genoteerd als zijnde discrete punten in het v - t diagram. Een ander probleem was het feit dat leerlingen de meetpunten met rechte lijnen verbinden in plaats van deze met een vloeiende lijn te verbinden.

2. Het verschil tussen de vorm van de grafiek en de vorm van de beweging. Het grootste probleem was dat leerlingen de neiging hadden om de vorm van de beweging over te zetten in de vorm van de grafiek. Een uniforme beweging (horizontale baan) werd in een plaats-tijd grafiek een horizontale lijn (in plaats van een lineair stijgende lijn). Een aflopende helling werd in dezelfde grafiek een lineair dalende lijn en een stijgende helling; dat er op deze stukken sprake was van een parabool werd niet ingezien. Ook in de snelheid-tijd grafieken kwam gelijksoortige fouten voor. Punten werd met elkaar verbonden, zonder een vloeiende lijn er in te passen. Ook kwam hier het probleem naar voren dat de baan van de bal werd overgezet, in plaats van het snelheidsprofiel. Een andere observatie was dat als er geen metingen werden gedaan, dat het in grotere mate de baan van de bal werd overgezet.

3. Negatieve snelheden. Leerlingen blijken moeite te hebben met een negatieve snelheid. Op het moment dat de snelheid afneemt wordt dit doorgaans wel goed genoteerd, maar als de verplaatsing van de bal omkeert wordt vaak gedacht dat de snelheid weer toeneemt in positieve richting. Een bal op een oplopende helling krijgt op het keerpunt een v -vorm. In werkelijkheid zou het omkeren moeten worden gemodelleerd met een lineaire lijn die op het keerpunt de horizontale as snijdt.

4. Constante versnelling op een a - t grafiek. Dit probleem is gelijkvormig met het vorige. Leerlingen hebben moeite om aan te geven wat er gebeurt met de versnelling als het balletje omkeert. Veel leerlingen denken dat een negatieve versnelling alleen betekent dat het balletje vertraagt; na het keerpunt tekenen ze de versnelling dus positief. Een andere misconceptie wordt gevormd door een positieve versnelling als het balletje een helling op gaat en een negatieve versnelling als het balletje een helling af gaat.

5. Onderscheid tussen verschillende grafieken. Een veel gemaakt fout is dat leerlingen bij het maken van een v - t grafiek uit een x - t grafiek of een a - t grafiek uit een v - t grafiek de globale vorm overnemen. In plaats van een horizontale lijn in de v - t grafiek te tekenen als er sprake is van een lineaire lijn in het x - t diagram, wordt ook hier een hellende lijn getekend. Klaarblijkelijk vindt men het moeilijk om te accepteren dat grafieken met een verschillende

vorm dezelfde beweging kunnen omschrijven.

In de studie van (Beichner, 1994) is een instrument ontwikkeld om allerlei problemen met kinematica grafieken op te sporen. In deze studie benadrukt de schrijver allerlei bekende misconcepties die al onderzocht zijn: denken dat een grafiek een letterlijke figuur van de situatie is en het door elkaar halen van hoogte en helling in een grafiek. Daarnaast worden ook de problemen met het uit elkaar houden van positie, snelheid en versnelling genoemd.

In de studie is getracht aan de hand van 7 doelen een test op te stellen waarbij problemen van leerlingen met de kinematica aan het licht gebracht zouden moeten worden. De volgende problemen en opmerkingen kwamen aan de hand vna het onderzoek naar voren:

- In de studie bleek dat 25% van de leerlingen dacht dat het veranderen van de kinetische variabelen (x , v en a) de vorm van de grafiek niet zou veranderen.
- Daarnaast bleek dat leerlingen die de ene grafiek goed konden vertalen naar de andere het beste begrip hadden binnen het onderwerp kinematica.
- Vaak werden de helling en de hoogte van de grafiek door elkaar gehaald.
- In veel gevallen bleek dat leerlingen ook problemen hadden met het berekenen van de helling van een grafiek. Vaak werd de momentane waarde van ordinate variabelen gedeeld door de momentane waarde van de tijd.
- Er was vaak sprake van een verwarring wanneer een oppervlakte bepaald dient te worden en wanneer de helling bepaald dient te worden. In kwalitatieve zin deden leerlingen het beter dan in kwantitatieve. Zodra het nodig was een exacte berekening te doen met een oppervlakte of een helling dan deden leerlingen het een stuk slechter.
- In veel gevallen hadden leerlingen niet door wat de oppervlakte onder een grafiek betekent.

Als aanbeveling voor het lesgeven wordt gegeven om leerlingen eerst te laten begrijpen wat een grafiek betekent vóóordat deze worden gebruikt als taal voor in de les. Ook is het volgens de schrijver goed als docenten grafieken aan de leerlingen voorleggen die er niet uitzien als foto's van de beweging, waarbij het ook aan te raden is om deze grafieken niet door de oorsprong te laten gaan. Een andere goede opgave is om leerlingen te laten vertalen van een beweging naar een grafiek en weer terug en deze te vertalen naar de andere grafieken. Daarnaast moeten leerlingen zowel oppervlakten als hellingen bepalen om deze vervolgens aan elkaar te relateren.

De belangrijkste conclusie van het artikel is dat de traditionele methode waarbij de docent vertelt wat de verschillende concepten betekenen niet goed werkt. Leerlingen moeten zelf in staat worden gesteld te zeggen wat ze denken en dit spelenderwijs te laten corrigeren, waar nodig. Dit kan gebeuren door eerst een voorspelling te laten doen en vervolgens met behulp van een praktikum te meten wat er in het echt gebeurt.

In (Hale, 2000) is een literatuurstudie gedaan naar het begrip van leerlingen over het onderwerp kinematica. Het artikel wordt geopend met enkele pakkende voorbeelden van fouten die tijdens verschillende studies door leerlingen zijn gemaakt: dat het snelheid-tijd diagram een gelijke vorm zou hebben als het afstand-tijd diagram, dat alle beweging aan het eind zijn gestopt of dat een negatieve versnelling altijd een vertraging betekent; misconcepties die in de studie van (McDermott et al., 1987) al aan de orde zijn gekomen.

Vervolgens wordt er een onderscheid gemaakt tussen misconcepties en "simpele fouten". Het eerste veronderstelt een verkeerd begrip als oorzaak en is dus structureel; het tweede is gebaseerd op een foutje dat wordt gemaakt tijdens het bestuderen van de opgave, een niet structurele fout. Ze halen een voorbeeld uit (McDermott et al., 1987)) aan waarbij de hoogte in het plaats-tijd diagram wordt verward met de helling. Uiteraard kan de achtergrond hiervan in een simpele fout liggen, maar kan het ook zo zijn dat er een echt misconceptie aan ten grondslag ligt.

Een andere interessante misconceptie die wordt aangehaald is de volgende. "Als er sprake is van twee auto's die achter elkaar rijden met een substantiële afstand daar tussen en de achterste

auto versnelt hard, terwijl de voorste auto met een constante snelheid rijdt dan haalt de achterste auto de voorste in.” Een conceptie die logisch lijkt op het eerste gezicht, maar die niet klopt als de snelheid van de voorste auto groter is dan de eindsnelheid van de achterste.

In het verdere verloop van het artikel komen geen andere misconcepties naar voren dan degenen die al hiervoor zijn genoemd. De conclusie van het artikel is dat leerlingen veel misconcepties kunnen hebben, maar dat deze niet uit zichzelf kunnen worden opgelost. Ze moeten worden geconfronteerd met de misconcepties; dit kan worden gedaan met behulp van praktika, het liefst met een computer of grafische rekenmachine, die de metingen direct grafisch kunnen omzetten. Op deze manier kunnen leerlingen de directe link tussen de praktijk en de representatie zien.

De aanbevelingen die zowel in (McDermott et al., 1987) als in (Hale, 2000) worden gedaan over het directe omzetten van praktijksituaties naar grafische voorstellingen en het gebruik van computers daarbij is door (Doorman, 2003) onderzocht. Hij stelt:

”De wiskundige beschrijvingswijzen van beweging en kinematica bevinden zich op het eiland van de wetenschappelijke kennis”.

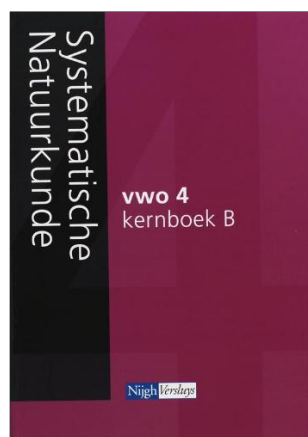
In het onderzoek gebruikt hij een computerprogramma met een simulatie, waarbij een alledaagse situatie (bijvoorbeeld een lopende clown) direct grafisch kan worden gemaakt. Met behulp van de applet ”Flits” kunnen leerlingen direct zien wat er gebeurt. Op een stroboscobische foto kunnen punten worden gezet door de leerling, terwijl direct in een tabel en een grafiek de positie of de afgelegde weg worden uitgezet. Leerlingen kunnen een beweging daarmee direct grafisch maken.

In het onderzoek ziet Doorman enkele positieve aanknopingspunten. Zo ziet iemand door het praktikum in dat een lineaire grafiek in een afgelegde weg grafiek een constante snelheid betekent. Daarnaast signaleert hij het feit dat kenmerken van de grafiek niet worden verward met kenmerken van de probleemsituatie: het snijden van de lijnen in een verplaatsingsgrafiek (wat eigenlijk een discrete v - t diagram is) wordt niet gezien als het inhalen. Wel waren er nog steeds enkele misconcepties, vooral bij een voorbeeld over een vallende bal. De verplaatsingen van de bal tussen de foto’s werden aangezien als posities. Ook ziet Doorman dat leerlingen met behulp van het programma sneller uitspraken doen over probleemstellingen en dus vaardiger worden. Verder ziet hij dat sommige leerlingen als gevolg van deze aanpak op eigen initiatief al inzien dat een rechte lijn in een verplaatsingen-diagram (v - t diagram) een gemiddelde snelheid kan weergeven.

Jammer binnen dit artikel is dat de observaties louter persoonlijk zijn en geen generaliseerbare tendens aangeven.

1.3 Analyse van schoolboeken

Bij het onderzoeken van misconcepties en het kijken naar een koppeling tussen kinematica en differentiëren is enerzijds de docent een belangrijke spil in het begrip van de leerling, maar ook het boek speelt een grote rol. De methode definieert op welke volgorde de leerstof wordt gepresenteerd, maar ook de manier waarop en de context waar binnen een begrip wordt gepresenteerd worden door de methode bepaald. Het is daarom van belang om te kijken naar de manier waarop de beide onderwerpen in het natuurkunde- en het wiskundeboek worden gepresenteerd. Op de school waar het onderzoek plaats heeft gevonden wordt voor natuurkunde de methode *Systematische natuurkunde* gebruikt en wordt voor het vak wiskunde de methode *Getal en ruimte* gebruikt. Een analyse van kinematica in het natuurkundeboek enerzijds en van differentiëren in het wiskundeboek anderzijds zal in onderstaande worden gegeven.



Figuur 1.2: Omslag van de methode Systematische Natuurkunde.

1.3.1 Systematische natuurkunde

Het onderwerp kinematica komt in deze methode direct in hoofdstuk 2 naar voren. Na een algemene introductie wordt er overgegaan op de introductie van een speciale vorm van beweging: de eenparige beweging. Vanuit dit perspectief wordt vervolgens geponeerd hoe de gemiddelde snelheid kan worden uitgerekend van deze beweging, hoe een plaats-tijd en een snelheid-tijd diagram werkt. Vervolgens wordt de eenparige beweging in deze diagrammen gepresenteerd. Hierna worden pas de concepten plaats, verplaatsing en afgelegde weg geïntroduceerd, waarna er wederom praktisch naar de eenparige beweging wordt gekeken.

Na deze paragrafen wordt er een paragraaf besteed aan het concept “momentane snelheid”; hetgeen in deze paragraaf “snelheid op een tijdstip” wordt genoemd. Dit concept wordt louter grafisch ondersteund: met behulp van de raaklijnmethode wordt gedemonstreerd hoe in een plaats-tijd diagram de snelheid kan worden bepaald. Aan het eind van de paragraaf wordt vervolgens ook uitgelegd hoe met behulp van de oppervlaktemethode grafisch de afgelegde afstand uit een snelheid-tijd diagram kan worden gedestilleerd.

Vergelijking

Na de analyse van *Systematische Natuurkunde*, *Pulsar* en *Newton* (de twee laatstgenoemde zijn hier niet uitgebreid behandeld) kan worden geconcludeerd dat ondanks de verschillende in benadering en structuur de stof die wordt behandeld hetzelfde is. Er wordt uitgegaan van de twee standaardbewegingen: de eenparige beweging en de eenparig versnelde bewegingen. Aan de hand daarvan wordt formules gegeven, waarmee de snelheid en de versnelling met behulp van een differentiequotiënt kunnen worden berekend.

In alle gevallen wordt daarna aan de hand van diagrammen getracht het begrip momentane snelheid duidelijk te maken met behulp van de raaklijnmethode. Ook wordt in alle gevallen verteld hoe met behulp van de oppervlaktemethode de afgelegde weg kan worden berekend uit een snelheid-tijd diagram.

In geen enkel geval wordt er gebruik gemaakt van differentiaalrekening. Momentane snelheid en versnelling worden grafisch geïntroduceerd en er wordt vervolgens gebruik gemaakt van de kennis over snelheid (vanuit de eenparige beweging) of versnelling (vanuit de eenparig versnelde beweging) om dit te kwantificeren. Wiskundig gezien blijft het dus hangen bij een differentiequotiënt, hetgeen overigens niet als zodanig wordt benoemd.

Hetzelfde geldt voor integraalrekening. Er wordt gesteld dat de oppervlakte onder een grafiek kan worden gebruikt als maat voor de afstand uit een snelheid-tijd diagram en de snelheid uit het versnelling-tijd diagram. Er wordt geen enkele vorm van integraalrekening geïntroduceerd en er

wordt logischerwijs ook geen gebruik gemaakt van standaardfuncties (bijvoorbeeld kwadratische, exponentiële functies etc.).

1.3.2 Getal en ruimte

Differentiaal- en integraalrekening wordt in deze methode in verschillende delen behandeld. Uitgaande van wiskunde B VWO bovenbouw komt in hoofdstuk 5 voor het eerst iets voor over de afgeleide functie. Zoals verwacht wordt het onderwerp geïntroduceerd aan de hand van toename en de concepten van toename en afnamen op intervallen en worden toenamendiagrammen gebruikt. Vervolgens wordt het differentiequotiënt genoemd als zijnde gemiddelde verandering en dus de helling van de lijn door twee punten. Daarna wordt de raaklijn geïntroduceerd om de helling in een punt te kunnen berekenen. Deze manier wordt ingebed in de context van het natuurkundige onderwerp snelheid. Een paragraaf later wordt de zogenaamde hellingfunctie geïntroduceerd als voorloper van de afgeleide; hierbij worden snelheid en afgelegde weg als context gebruikt.

In Hoofdstuk 9 van deze methode wordt vervolgens de differentiaalrekening ingevoerd; aan de hand van de limitfunctie wordt een formele definitie gegeven en wordt van polynomen afgeleid wat de afgeleide is. In het vervolg van dit hoofdstuk wordt van enkele andere functies de afgeleide behandeld; o.a. de produktregel en de quotiëntregel komen naar voren. In het verdere verloop wordt met behulp van de afgeleide functie beschreven hoe extrema van functies kunnen worden berekend.

In hoofdstuk 12 wordt binnen het hoofdstuk exponentiële functies de kettingregel geïntroduceerd. Heel hoofdstuk 15 wordt geweid aan de tweede afgeleide, vooral om de toepassingen: o.a. het vinden van buigpunten. Ook hier worden snelheid en versnelling gebruikt als context om de concepten van afgeleiden te verduidelijken.

Integreren wordt in deze methode minder versnipperd gepresenteerd. Pas in hoofdstuk 14 wordt integreren geïntroduceerd, waarbij de formele definitie kort wordt besproken. Het gebruik van de grafische rekenmachine om een oppervlakte te bepalen wordt aanbevolen. In het vervolg wordt er aandacht besteed aan het vinden van oppervlakten en inhouden met behulp van het primitiveren. Pas in de derde paragraaf wordt er aandacht besteed aan het analytisch bepalen van de primitieve functie als opponent van de afgeleide functie.

Kinematica vormt in het wiskundeboek dus ook een belangrijk onderdeel. In tegenstelling tot de natuurkunde methodes wordt het differentiëren en integreren onomwonden gebruikt om de relaties tussen afstand, snelheid en versnelling te bepalen en uit te rekenen. In de natuurkundeboeken blijft het bij een grafische en kwalitatieve benadering en wordt het analytische deel weggelaten.

1.4 Probleemstelling

Op basis van de genoemde observaties uit de klassenpraktijk, analyse van schoolboeken en een inventarisatie van aanwezige literatuur over dit onderwerp is de volgende probleemstelling opgesteld.

De hoofdvraag luidt:

Neemt (expliciet) begrip binnen het wiskundige onderwerp differentiëren misconcepties binnen het onderwerp kinematica weg?

Hypothese: Een beter begrip van het differentiëren biedt een robuust gereedschap voor het gebruik binnen de kinematica. Een goed begrip en gebruik van dit gereedschap

zal de kans op misconcepties binnen de kinematica verlagen.

De volgende deelvragen ondersteunen deze hoofdvraag:

Welke misconcepties zijn er bekend vanuit de literatuur?

Is er een verschil wat betreft het aantal misconcepties binnen de kinematica tussen leerlingen die weinig tot geen kennis van differentiëren hebben en leerlingen die alle kennis over differentiëren hebben?

Hypothese: Het aantal misconcepties zal afnemen naarmate er meer kennis en begrip van het differentiëren aanwezig is.

Is er een koppeling tussen het begrip van leerlingen aangaande bepaalde aspecten binnen het onderwerp differentiëren en bepaalde aspecten binnen het onderwerp kinematica?

Hypothese: Een positieve koppeling kan worden gevonden tussen aspecten binnen het onderwerp differentiëren en aspecten binnen het onderwerp kinematica.

Om op een adequate manier een antwoord op de gestelde vragen te krijgen is eerst gekeken welke randvoorwaarden, welke praktische mogelijkheden en onmogelijkheden er waren. Het onderzoek had aan alle kanten restricties: enerzijds waren de mogelijkheden tot onderzoek onder leerlingen beperkt, anderzijds hebben docenten hun uren nodig voor de stof. Tenslotte hebben leerlingen een korte spanningsboog. Het was daarom nodig om een goede afweging te maken wat betreft het aantal uren dat leerlingen getest zouden worden.

De volgende restricties moesten in ogenschouw worden genomen:

- 1 VWO-4 klas, 1 HAVO-4 klas, 1 VWO-5 klas en 1 VWO-6 klas.
- Twee lesuren per klas voor eventuele schriftelijke testen.
- Twee lesuren per klas voor eventuele mondelinge testen.

De eerste restrictie is gebaseerd op het feit dat voor dit onderzoek klassen nodig zijn, waarbij de leerlingen zowel het vak natuurkunde als het vak wiskunde B gedoceerd moeten krijgen. Het onderzoek gaat tenslotte enerzijds over het natuurkundige onderwerp kinematica en anderzijds over het wiskundige onderwerp differentiëren. Op de stageschool bij de stagedocent in kwestie waren met deze restricties de genoemde klassen beschikbaar.

De laatste twee restricties zijn gebaseerd op de schatting dat de stagedocent maximaal dit aantal lessen zou kunnen missen binnen de planning van het op dat moment te behandelen onderwerp.

2.1 Onderzoeksgroep

Zoals is genoemd bij de restricties was de keus uit een viertal klassen variërend van HAVO-4 tot VWO-6. Om tot een optimaal resultaat te komen waren er verschillende opties:

1. Eén testgroep die eerst wordt getest op het begrip van kinematica, vervolgens tijdens een interventie van enkele lessen in het differentiëren wordt ingewijd en daarna wederom wordt getest om te kijken welk effect dit heeft.
2. Twee testgroepen, die beiden het onderwerp kinematica hebben gehad, maar waarvan één groep is ingewijd in het differentiëren en de andere niet. Deze beide groepen kunnen vervolgens op het begrip van kinematica worden getest.
3. Twee testgroepen, die beiden het onderwerp kinematica hebben gehad, maar waarbij een verschil in kennis over het differentiëren is. Deze beide testgroepen kunnen worden getest op zowel kennis van kinematica als het differentiëren.
4. Eén testgroep die beide onderwerpen heeft gehad, waarbij de leerlingen op beide onderwerpen worden getest. Op deze manier kan het begrip van het differentiëren worden gekoppeld aan het begrip van kinematica.

Voor de te hanteren methode is uiteindelijk gekozen voor de optie om een VWO-4 klas en een VWO-6 klas te testen (optie 3), waarbij zowel op kinematica als differentiëren wordt getest. Ook is besloten om alleen een test af te nemen en een interventie achterwege te laten. Aan deze keus lagen de volgende overwegingen ten grondslag:

- Omdat het onderwerp kinematica standaard aan het begin van VWO-4 wordt gedoceerd kan er vanuit worden gegaan dat beide klassen gelijke kennis van dit onderwerp hebben, afgezien van het feit dat de kennis bij VWO-4 verser in het geheugen ligt.

- Op het moment van testen was VWO-4 net geconfronteerd met de beginselen van het differentiëren, terwijl VWO-6 alle deelonderwerpen al had gehad. Er was dus een substantieel verschil in kennis en vaardigheden op dit gebied tussen beide klassen; iets gebruikt zou kunnen worden ter vergelijking.
- Om de kans zo groot mogelijk te maken dat de leerlingen in de onderzoeksgroep serieus mee zouden werken is gekozen om deze VWO-4 klassen te nemen. Bekend was dat in deze klassen de meest gemotiveerde leerlingen aanwezig waren.
- Als de leerlingen met zowel natuurkunde als wiskunde B zouden worden getest, dan zijn dit er in totaal ongeveer 50. Dat is een goed handelbaar aantal leerlingen, zodat naast het kwalitatieve gedeelte ook kwantitatieve resultaten kunnen worden gebruikt.
- Omdat er relatief weinig lessen beschikbaar waren, leek het onmogelijk om een adequate interventie te ontwerpen, waarbij het onderwerp differentiëren binnen enkele lessen goed aan de orde zou komen.
- Daarnaast was het zo dat op het moment van uitvoeren van het onderzoek de leerlingen uit VWO-4 het eerste hoofdstuk over differentiëren al hadden gehad en daarom sowieso al geen mogelijkheid aanwezig was om een groep zonder kennis van differentiëren te testen.

2.2 Uitvoering van het onderzoek

Om een antwoord te kunnen vinden op de gestelde onderzoeksvragen is een plan gemaakt om zowel het begrip van kinematica als het begrip van differentiëren binnen de testgroepen te testen. Het doel van het onderzoek is om te kijken of er door kennis van differentiaalrekening misconcepties kunnen worden weggenomen. Om die informatie in te kunnen winnen is het nodig om te weten welke misconcepties er sowieso zijn onder de leerlingen als ze het onderwerp kinematica bij natuurkunde hebben gehad. Daarnaast is het ook goed om met hetzelfde instrument te meten of dezelfde misconcepties worden teruggevonden bij leerlingen die differentiaalrekening al helemaal hebben gehad bij wiskunde. Nu werd in voorgaande betoogd, dat het doel van dit onderzoek niet is om te definiëren welke misconcepties er bestaan. Echter, omdat de misconcepties die in het literatuuronderzoek aan de orde zijn gekomen uit verschillende onderzoeken komen en een algemeen beeld is geschetst, is het zeker van belang om te bekijken welke misconcepties binnen de specifieke groep aanwezig zijn. Zeker als er een vergelijking gemaakt moet worden.

Het eerste deel van het onderzoek behelste een literatuurstudie om een compleet beeld te schetsen van de misconcepties die onder leerlingen bestaan aangaande dit onderwerp. Om te komen tot een compleet beeld is een aantal verschillende studies onder de loep genomen, zodat verschillende typen misconcepties de revue zijn gepasseerd en overeenkomsten tussen verschillende studies kunnen worden bekeken. Uiteindelijk heeft deze literatuurstudie geleid tot een complete lijst met misconcepties die zouden kunnen bestaan; deze is in het hoofdstuk 1.2 besproken.

Na de literatuurstudie was het van belang dat er een instrument gemaakt zou worden waarmee misconcepties aangaande het natuurkundige onderwerp kinematica kunnen worden gemeten. Vanwege de beperkte beschikbare tijd moest aan de hand van de opgestelde lijst met misconcepties een beperkt maar samenhangend deel van misconcepties moeten worden uitgekozen, zodat duidelijk was wat er gemeten moest gaan worden. Aan de hand van deze beperkte lijst van misconcepties kon vervolgens een instrument worden gemaakt. Een toelichting op de keuzes en het ontwerp van dit instrument is te vinden in sectie 2.3.

Naast het testen van het begrip van kinematica is het ook belangrijk om te meten wat het begrip van de differentiaalrekening is. Omdat er een verband (of de afwezigheid daarvan) tussen het begrip van kinematica en het begrip van differentiëren moest worden onderzocht is het belangrijk om te weten wat per leerling het begrip van het differentiëren is en of er een verband met de conceptie van kinematica is. Naast het instrument om de conceptie van kinematica te testen zou er dus ook een instrument moeten worden ontworpen, waarmee het

begrip en de kennis van differentiëren zou worden getest. Als een leerling uit VWO-6 geen begrip of een slechte kennis van differentiaalrekening zou hebben, ondanks de veronderstelde kennis en/of begrip, dan zou dit moeten worden meegenomen in de resultaten.

Het feit dat de leerlingen in VWO-6 alle deelonderwerpen van het differentiëren al hebben gehad zou geen sluitend argument zijn om conclusies te kunnen trekken over de invloed van het kennis van differentiëren. Het was belangrijk om alle andere variabelen uit te sluiten; leerlingen uit VWO-6 zouden opgaven over kinematica ook beter maken door de voorsprong in ervaring, grotere kennis in andere vakken of kunnen de opgaven eventueel slechter maken doordat het onderwerp langer geleden voorbij is gekomen in de les natuurkunde.

De beschikbare tijd voor het onderzoek was niet royaal, dus er moest een relatief smal onderzoeksterrein worden gekozen. Het leek daarom niet verstandig om de complete kinematica én de complete differentiaal- en integraalrekening onder de loep te nemen en de consequenties te onderzoeken. Het plan was daarom om wat betreft de differentiaalrekening het onderzoek in eerste instantie alleen te richten op het differentiëren en wat betreft de kinematica het onderzoek te richten op het begrip van grafische representaties en de koppeling tussen de verschillende representaties en tussen de grafische representaties en de werkelijkheid. Beide onderwerpen zouden dus kwalitatief getest gaan worden.

Uiteindelijk is gekozen om een aanpak te kiezen waarbij de volgende punten in deze volgorde zouden worden afgewerkt:

1. Definiëren en categoriseren van misconcepties binnen de kinematica.
2. Definiëren en categoriseren van vaardigheden binnen het onderwerp differentiëren.
3. Ontwerp van een schriftelijk instrument om kennis van begrip van kinematica te testen.
4. Ontwerp van een schriftelijk instrument om kennis en begrip van het differentiëren te testen.
5. Ontwerp van een mondeling instrument om kennis en begrip van zowel kinematica als differentiëren te testen.
6. Afnemen van mondelinge testen op 5 VWO-4 leerlingen en 5 VWO-6 leerlingen.
7. Analyse van mondelinge testen en het verband tussen beide onderwerpen.
8. Afnemen van schriftelijke test over kinematica.
9. Afnemen van schriftelijke test over differentiëren.
10. Kwalitatieve en kwantitatieve analyse van schriftelijke testen en het verband tussen beide onderwerpen.

2.3 Ontwerp van test kinematica

Bij het doen van de literatuurstudie kwamen verschillende vormen van misconcepties naar voren die betrekking hebben op het onderwerp kinematica. Omdat dit onderzoek zich voornamelijk richt op misconcepties binnen die onderwerp, zodanig dat er naar een relatie met het onderwerp differentiëren kan worden gezocht, is een complete lijst met relevante misconcepties opgesteld uit de literatuur.

Allereerst is gekeken naar een onderverdeling op grote lijnen. Net zoals in (McDermott et al., 1987) wordt gedaan kunnen de bovenstaande misconcepties ook worden ingedeeld in twee verschillende groepen:

1. Misconcepties waarbij het interpreteren van grafieken een rol speelt. Er is hierbij sprake van het overzetten van grafische representaties naar concepten en realiteit.
2. Misconcepties waarbij grafieken moeten worden geconstrueerd. Er is hierbij sprake van

het overzetten van de realiteit naar grafische representatie.

Op basis van de literatuurstudie en de aldaar gevonden misconcepties is eerst een complete lijst gemaakt. Vervolgens is gekeken naar de overeenkomsten tussen de misconcepties uit de verschillende artikelen. Aan de hand van deze overeenkomsten is overlap in ogenschouw genomen en zijn gelijksoortige misconcepties onder dezelfde noemer geplaatst. Op basis hiervan is vervolgens een kleinere lijst van misconcepties samengesteld.

In groep 1 zijn de volgende misconcepties ingedeeld:

1. Problemen met discrimineren tussen helling en hoogte en veranderingen in helling en hoogte.
2. Problemen met het zien van de relatie tussen verschillende grafieken (x - t , v - t , a - t).
3. Verwarring tussen het toepassen van de raaklijnmethode en de oppervlaktmethode.

In groep 2 zijn de volgende misconcepties ingedeeld:

1. Problemen met de interpretatie van negatieve snelheid en constante (negatieve) versnelling.
2. Ten onrechte overnemen van de vorm een beweging naar de vorm van een grafiek.
3. Problemen met het berekenen van helling in een punt en lijnen die niet door de oorsprong gaan.
4. Verwarring tussen de verschillende grootheden en de bijbehorende diagrammen (plaats-tijd, snelheid-tijd, versnelling-tijd).

2.3.1 Selectie van misconcepties

Om tot een goede test over te gaan, moest er van het aantal misconcepties een selectie worden gemaakt. Het belangrijkste criterium voor het selecteren van misconcepties kwam voort uit de onderzoeksvragen. In de te onderzoeken misconcepties moest er duidelijk sprake zijn van een koppeling tussen de natuurkunde (de bewegingen) en de wiskunde (het differentiëren). Er moest op een goede manier getest kunnen worden of leerlingen een switch kunnen maken van het waarneembare (beweging) naar de theoretische representatie (grafiek) en andersom.

Naast dit criterium waren er een aantal andere criteria waarmee rekening gehouden zou moeten worden bij het ontwerpen van deze test:

1. Er dient rekening te worden gehouden met ongeveer 1 lesuur. Als er vanuit wordt gegaan dat niet de complete 50 minuten worden gebruikt, dan is 40 effectieve minuten een veilige marge.
2. Binnen deze 40 minuten moet de test kort worden uitgelegd en moeten de leerlingen genoeg tijd hebben om de test af te krijgen. De test moet dus liever te kort dan te lang zijn. Leerlingen hebben tenslotte geen lange spanningsboog, vooral niet in VWO-4.
3. De opgaven van de schriftelijke test moeten bestaan uit meerkeuzevragen, zodat leerlingen niet het antwoord zelf hoeven te formuleren. Wel moeten leerlingen bij iedere vraag steeds kort aangeven, waarom ze dat antwoord hebben gekozen, zodat duidelijk is wat de gedachtengang is. Hiermee moet gokken worden tegen gegaan; dan kan worden nagegaan of er sprake is van een goede conceptie of een misconceptie.
4. De opgaven moeten helder en ondubbelzinnig zijn, zodat de leerlingen direct snappen waar het om gaat en duidelijk te zien is hoe de conceptie van leerlingen is.
5. Binnen de antwoorden moet een antwoord waar de misconceptie in verwerkt zit duidelijk aanwezig zijn, maar moet ook het antwoord waar de juiste conceptie in verwerkt zit aanwezig zijn.

Van de 8 opgesomde misconcepties zijn de volgende 4 uiteindelijk uitgekozen:

1. “Problemen met het discrimineren tussen helling en hoogte en veranderingen in helling en hoogte.” Deze misconceptie heeft te maken met het interpreteren van een grafische representatie en het omzetten naar de realiteit (groep 1)
2. “Problemen met de interpretatie van negatieve snelheid en constante versnelling”. Deze misconceptie kan zowel te maken hebben met het omzetten van werkelijkheid naar grafische representatie als andersom. (groep 1 en 2)
3. “Ten onrechte overnemen van de vorm van de beweging naar vorm van de grafiek”. Deze misconcepties heeft te maken met het interpreteren van de werkelijkheid en omzetten naar een grafische representatie. (groep 2)
4. “Verwarring tussen de verschillende grootheden en de bijbehorende diagrammen (plaats-tijd, snelheid-tijd, versnelling-tijd).” (groep 2)

Om een goede conclusie te kunnen trekken uit de verkregen antwoorden, moeten er per misconceptie voldoende opgaven aanwezig zijn. Als er per misconceptie ongeveer 3 opgaven worden gebruikt, dan leidt dit tot een totaal van maximaal 12 opgaven.

2.3.2 Eisen per misconceptie

Aan de hand van de gekozen misconcepties is per misconceptie een lijst met eisen gemaakt waar de opgaven aan zouden moeten voldoen. In onderstaande zijn deze eisen te zien:

- **Misconceptie 1:** *Problemen met het discrimineren tussen helling en hoogte en veranderingen in helling en hoogte.*

Relatie tot differentiëren: Helling interpreteren.

Probleem: Het verwarren of verkeerd interpreteren van helling en hoogte of de verschillen in helling en hoogte.

Categorie: Interpretatie van grafieken en koppelen aan een concept of realiteit.

Zaken die terug moeten komen:

- Helling moet goed te zien zijn.
- Hoogte(verschil) moet goed te zien zijn.
- Helling = 0 moet duidelijke horizontaal zijn of duidelijk een top zijn.
- Beide elementen moeten er in terug komen, zodat deze door elkaar gehaald kunnen worden.
- De te maken opgaven dienen kwalitatief te zijn

- **Misconceptie 2:** *Problemen met de interpretatie van negatieve snelheid en constante versnelling.*

Relatie tot differentiëren: Het interpreteren van een negatieve snelheid als een afnemende lijn in de plaatsfunctie en het interpreteren van een negatieve versnelling als een afnemende lijn in de snelheidsfunctie.

Probleem: Bij het grafisch maken van een omkerende beweging niet inzien dat de snelheid negatief wordt en dat de versnelling negatief blijft.

Categorie: Interpretatie van een grafische representatie en koppelen aan een concept of realiteit én andersom.

Zaken die terug moeten komen:

- Omschrijven of visualiseren van een beweging en laten omzetten in een grafische representatie of andersom.
- Er moet sprake zijn van een beweging die van richting verandert (omkeert).

- **Misconceptie 3:** *Ten onrechte overnemen van de vorm van de beweging naar vorm van de grafiek*

Relatie tot differentiëren: Het interpreteren van een beweging en het relateren van de beweging aan de juiste elementen van een grafiek.

Probleem: Het één op één overzetten van de vorm van de beweging naar de vorm van de grafiek.

Categorie: Interpretatie van de realiteit en koppelen aan een grafische representatie.

Zaken die terug moeten komen:

- Omschrijven of visualiseren van een beweging en laten omzetten in een diagram.
- Beweging moet in dezelfde richting zijn.
- Opgave moet kwalitatief zijn.

- **Misconceptie 4:** *Verwarring tussen de verschillende grootheden en de bijbehorende diagrammen.*

Relatie tot differentiëren: Het interpreteren van de beweging en inzien welke vorm in het gevraagde diagram hoort.

Probleem: Het verwarren van x-t, v-t en a-t diagrammen als een beweging in een grafische representatie moet worden omgezet.

Categorie: Interpretatie van de realiteit en koppelen aan een grafische representatie.

Zaken die terug moeten komen:

- Omschrijven of visualiseren van een beweging en laten omzetten in een diagram.
- De vorm van verschillende diagrammen (x-t, v-t en a-t) moet terugkomen.
- Opgave moet kwalitatief zijn.

2.3.3 Uiteindelijk ontwerp van de test

In eerste instantie is voor alle gevonden misconcepties een lijst met eisen opgesteld, zoals deze voor de verkozen misconcepties is gemaakt. Vervolgens zijn voor alle gevonden misconcepties een drietal opgaven geconstrueerd, die aan de gestelde eisen voldoen.

Na het construeren van deze complete lijst met opgaven, die in dit verslag achterwege wordt gelaten, is gekeken naar de praktische randvoorwaarden en de vraag welke misconcepties getest zouden moeten worden. Met behulp van deze randvoorwaarden, die al eerder zijn genoemd, zijn opgaven geselecteerd en geperfectioneerd. Een enkele opgave is overgenomen uit de bestudeerde literatuur, maar het merendeel is zelf geconstrueerd.

Na de selectie van opgaven is uiteindelijk een test gemaakt, waarbij de geselecteerde opgaven in een willekeurige volgorde zijn geplaatst en gelijksoortige opgaven niet achter elkaar zijn geplaatst. Het resultaat is een complete test, bestaande uit 8 opgaven. De test is zodanig opgesteld dat de verwachting was dat op de vier gestelde misconcepties getest zou worden. Uiteraard kon dit niet van tevoren worden gegarandeerd, omdat de verschillende misconcepties niet los van elkaar staan en het nog steeds mogelijk is om een misconceptie te testen, waarvan niet de bedoeling is geweest om deze te toetsen. Deze wetenschap wordt daarom expliciet meegenomen in de analyse van de testresultaten.

In tabel 2.1 is voor alle opgaven te zien welke misconceptie wordt getest en of dit te maken heeft met het interpreteren van grafische voorstellingen of het construeren ervan.

Opgave 1.	• Problemen met de interpretatie van negatieve snelheid en constante (negatieve) versnelling. (MC2) • Verwarring tussen de verschillende grootheden en de bijbehorende diagrammen. (MC4)	Interpretatie van de werkelijkheid.
Opgave 2.	• Problemen met het discrimineren tussen helling en hoogte en veranderingen in helling en hoogte. (MC1)	Interpretatie van grafiek.
Opgave 3.	• Ten onrechte overnemen van de vorm van de beweging naar vorm van de grafiek. (MC3) • Verwarring tussen de verschillende grootheden en de bijbehorende diagrammen. (MC4)	Interpretatie van de werkelijkheid
Opgave 4	• Problemen met de interpretatie van negatieve snelheid en constante (negatieve) versnelling. (MC2) • Verwarring tussen de verschillende grootheden en de bijbehorende diagrammen. (MC4)	Interpretatie van grafiek.
Opgave 5.	• Problemen met het discrimineren tussen helling en hoogte en veranderingen in helling en hoogte. (MC1)	Interpretatie van grafiek.
Opgave 6.	• Problemen met het discrimineren tussen helling en hoogte en veranderingen in helling en hoogte. (MC1)	Interpretatie van grafiek.
Opgave 7.	• Problemen met de interpretatie van negatieve snelheid en constante (negatieve) versnelling. (MC2) • Ten onrechte overnemen van de vorm van de beweging naar vorm van de grafiek. (MC3)	Interpretatie van de werkelijkheid.
Opgave 8.	• Ten onrechte overnemen van de vorm van de beweging naar vorm van de grafiek. (MC3)	Interpretatie van de werkelijkheid

Tabel 2.1: De misconcepties die met de opgaven in de kinematicatest worden getest.

De test die uiteindelijk is gedaan op de leerlingen is volledig te zien in appendix A.

2.4 Ontwerp van de test differentiëren

Voor het testen van de kennis en het begrip van differentiëren is eerst op een rij gezet wat er precies moet worden getest. Differentiëren is een breed onderwerp en niet alle deelonderwerpen binnen het differentiëren zijn van waarde voor het begrijpen van het onderwerp kinematica.

Het onderwerp differentiëren binnen de middelbare schoolwiskunde kan grofweg in twee dimensies worden uitgesplitst:

- Kwalitatief $\Leftrightarrow$ kwantitatief
- Grafisch $\Leftrightarrow$ algebraïsch

Op deze manier kan een stelsel van 4 kwadranten worden gemaakt, met deelonderwerpen die het onderwerp differentiëren betreffen:

	kwalitatief	kwantitatief
Grafisch	• Soorten stijgen en dalen. • Raaklijn/helling in een punt. • Relatie tussen extrema (maximum, minimum, zadelpunt) en helling. • Relatie tussen hollingen en bollingen en de afgeleide en tweede afgeleide.	• Differentiequotiënt. • Bepalen van de helling in een punt. • Rakende grafieken. • Loodrecht snijdende grafieken. • Bepalen van extrema in een grafiek. • Bepalen van buigpunten in een grafiek.
Algebraïsch	• Betekenis van de afgeleide functie. • Afgeleide functie gedefinieerd als limiet.	• Bepalen van de afgeleide functie. • Quotiëntregel. • Productregel. • Kettingregel. • Bepalen van extrema van een functie. • Bepalen van buigpunten van een functie.

Tabel 2.2: Categorisering van vaardigheden op het gebied van differentiëren

Bij de koppeling tussen het begrip van kinematica en het begrip van het onderwerp differentiëren is het raakvlak vooral te vinden op het grafische gebied. De wiskunde houdt zich wat grafieken betreft bezig met hellingen, raaklijnen, extrema, soorten stijgingen en soorten dalingen. De kinematica maakt bewegingen zichtbaar in grafieken en momentane snelheden en versnellingen kunnen met hellingen worden bepaald.

Omdat daarnaast het in dit onderzoek vooral draait om het vinden van een relatie tussen begripsniveaus, moet de link vooral worden gezocht in het kwalitatieve deel. In het onderzoek naar het begrip van kinematica gaat het vooral om het snappen van de betekenis van de helling in een grafiek, de betekenis van een top of dal, de betekenis van een nuldoorgang etc. Het algebraïsch, kwantitatieve deel (vooral het differentiëren van algebraïsche functies en de bijbehorende rekenregels) kan als instrument handig zijn als er een functie-omschrijving van snelheden of verplaatsingen voor handen is. Maar omdat dit onderzoek zich vooral richt op het interpreteren van grafische voorstellingen van bewegingen en het kwalitatief omzetten van de werkelijkheid naar grafische voorstellingen, is het kwantitatieve, algebraïsche deel van ondergeschikt belang.

In eerste instantie is het dus goed om ook wat dit onderwerp betreft op begripsniveau te blijven. De keus is om het algebraïsche deel weg te laten en alleen op grafische niveau te testen. Dit kan zowel kwalitatief als kwantitatief; waarbij de nadruk op het kwalitatieve deel ligt.

Naast een onderverdeling in de twee genoemde dimensies kan dit onderwerp nog worden uitgesplitst in het redeneren richting de afgeleide of het terugredeneren vanuit de afgeleide:

1. Het interpreteren van een grafiek en de afgeleide construeren of belangrijke punten aangeven.
2. Het interpreteren van de afgeleide en de functie construeren of de belangrijke punten aangeven.

Aan de hand van de onderverdeling van deelonderwerpen en de benoemde prioriteiten is een lijst met vaardigheden van deze deelonderwerpen opgesteld.

- Interpreteren van een grafiek en het construeren van de afgeleide of belangrijke punten daarin.
 - Inzien dat een stijgende grafiek een positieve afgeleide oplevert en dat een dalende grafiek een negatieve afgeleide oplevert. (kwalitatief)
 - Inzien dat een toenemend stijgende grafiek een stijgende afgeleide oplevert en dat een afnemend stijgende grafiek een dalende afgeleide oplevert. (kwalitatief)
 - Inzien dat een extremum in een grafiek een nulpunt in een afgeleide oplevert. (kwalitatief)
 - Construeren van een afgeleide uit een functie. (kwalitatief)
 - Construeren van een raaklijn en de bijbehorende helling. (kwantitatief)
- Interpreteren van een afgeleide en het construeren van de eigenlijke functie (primitieve) of belangrijke punten.
 - Inzien dat de positieve afgeleide betekent dat de primitieve stijgend is en dat een negatieve afgeleide betekent dat de primitieve dalend is.
 - Inzien dat een nulpunt betekent dat er een extremum aanwezig is in de primitieve.
 - Inzien dat een stijgende lijn in de functie betekent dat de primitieve toenemend stijgt of afnemend daalt en dat een dalende lijn in de functie betekent dat de primitieve afnemend stijgt of toenemend daalt.

Aangezien het bij een test over differentiëren gaat om de conceptie en niet zozeer om de misconceptie leek het voldoende om een aantal opgaven te formuleren, zodanig dat ieder punt 1 of 2 keer terug komt. Aan de hand van de opgaven zou vervolgens kunnen worden aangevinkt of uit de uitwerking van de opgaven blijkt dat het begrip van dit deelonderwerp aanwezig is.

Aan de hand van deze gedefinieerde vaardigheden zijn vervolgens opgaven gemaakt, waarin deze vaardigheden werden verwerkt. Deze opgaven zijn uiteindelijk bijgeschaafd en in een willekeurige volgorde geplaatst. De uiteindelijke test is te zien in appendix B.

In onderstaande overzicht is per opgave in deze test te zien welke vaardigheid is getracht te testen:

Opgave 1. Rechte lijnen differentiëren.

- (a) De leerling ziet in dat bij een lineaire functie de afgeleide horizontaal is.
- (b) De leerling ziet in dat in een stijgend deel van een functie de afgeleide positief is en dat in een dalend deel van de functie de afgeleide negatief is.

Opgave 2. Raaklijn tekenen en helling bepalen.

- (a) De leerling is in staat om de helling in een punt te bepalen en hier een raaklijn bij te gebruiken.

- (b) De leerling is in staat om in te zien dat de helling hier afloopt en dus negatief is.

Opgave 3. Koppeling tussen toppen en nulpunten in de afgeleide.

- (a) De leerling ziet in dat de afgeleide gelijk is aan 0 op de punten waar de functie op een extremum zit.

Opgave 4. Vanuit een afgeleide terugredeneren.

- (a) De leerling is in staat om terug te redeneren van een simpele afgeleide (horizontale lijn) naar de oorspronkelijke functie (lineaire functie).
 (b) De leerling ziet in dat een negatieve afgeleide betekent dat de oorspronkelijke functie een dalend patroon oplevert.

Opgave 5. Ingewikkelde functie differentiëren.

- (a) De leerling ziet in dat een stijgende functie betekent dat de afgeleide positief is.
 (b) De leerling ziet in dat afnemend stijgende functie betekent dat de afgeleide afneemt.
 (c) De leerling ziet in dat een toenemend stijgende functie betekent dat de afgeleide toeneemt.

Opgave 6. Vanuit nulpunten in de afgeleide naar toppen en dalen in de primitieve.

- (a) De leerling is in staat om in te zien dat een nulpunt in de afgeleide betekent dat de primitieve daar een extremum heeft.
 (b) De leerling is in staat om in te zien dat een stijgend nulpunt betekent dat de primitieve daar een dal heeft en dat een dalend nulpunt betekent dat de primitieve daar een top heeft.

2.5 Koppeling tussen kinematica en differentiëren

Alvorens de test af te nemen en de resultaten van de schriftelijke test volledig uit te werken en te interpreteren wordt eerst een koppeling gelegd tussen enerzijds de gedefinieerde misconcepties kinematica en anderzijds de gedefinieerde vaardigheden differentiëren. De hoeveelheid data die met de twee schriftelijke testen wordt verzameld is relatief groot, het is daarom belangrijk dat er gericht naar de data wordt gekeken en er geen willekeurige (en eventueel niet bestaande) verbanden worden gezocht. De conclusies uit dit onderzoek moeten bruikbaar zijn en leiden tot een aantal aanbevelingen die het onderwijs op het gebied van kinematica kunnen verbeteren.

Eventuele verbanden moeten daarom van tevoren worden gedefinieerd, zodat hier specifiek naar kan worden gekeken. Als het verband daadwerkelijk kan worden aangetoond, dan kan op basis van deze verklaring een onderwijsverbetering worden voorgesteld.

In onderstaande worden per misconceptie (kinematica) op een rijtje gezet welke opgaven vatbaar zijn voor een dergelijke misconceptie. Daarnaast wordt beredeneerd waar de oorzaak van de misconceptie zou kunnen liggen en wordt een hypothese opgesteld over de vraag met welke vaardigheden op het gebied van differentiëren deze misconceptie een verband zou kunnen hebben.

1. Problemen met het discrimineren tussen helling en hoogte en veranderingen in helling en hoogte.

Code in resultatenmatrix: MC1.

Opgaven die deze misconceptie testen:

- Opgave 2: Twee rechte lijnen met verschillende helling, die elkaar kruisen.

- Opgave 4: Eén lijn die verschillende recht hellingen heeft.
- Opgave 6: Exact hetzelfde als opgave 2.

Deze misconceptie heeft vooral te maken met de interpretatie van een grafiek en belangrijke punten. Uit de literatuur kwam naar voren dat bij deze misconceptie vooral sprake is van het verkeerd interpreteren van belangrijke punten in een grafiek: als in een plaats-tijd diagram wordt gevraagd waar de snelheid 0 is wordt klaarblijkelijk vaak een snijpunt met de horizontale as gekozen en als gevraagd wordt waar de snelheid het hoogst is wordt klaarblijkelijk een top in de grafiek aangewezen.

Het is lastig om een direct verband aan te wijzen met het onderwerp differentiëren als het gaat om het door elkaar halen van hoogte en helling. Het lijkt niet direct verband te houden met de vaardigheden in het tekenen van de afgeleide of het tekenen van de primitieve. Als deze misconceptie direct wordt vertaald naar het differentiëren dan zou een verband met opgave 2 voor de hand liggen. In deze opgave moet de helling in een bepaald punt worden bepaald. Hier zou de hoogte van de lijn per abuis kunnen worden gekozen in plaats van de helling.

Het is dus het meest voor de hand liggend om een verband te zoeken met de volgende vaardigheid op het gebied van differentiëren (VD1):

- De leerling is in staat om de helling in een punt te bepalen en hier een raaklijn bij te gebruiken. (opgave 2a)

2. Problemen met de interpretatie van negatieve snelheid en constante versnelling.

Code in resultatenmatrix: MC2

Opgaven die deze misconceptie testen:

- Opgave 1: Negatieve snelheid
- Opgave 4: Negatieve versnelling
- Opgave 7: Negatieve snelheid

Uit de literatuur blijkt dat een grote misconceptie is dat leerlingen denken dat snelheid niet negatief kan zijn. Het omdraaien van een object wordt vaak niet geassocieerd met het negatief worden van de snelheid. Daarmee hand in hand blijkt uit de literatuur ook dat leerlingen moeite hebben met een negatieve versnelling. Een negatieve versnelling wordt vaak direct gekoppeld aan een vertraging, terwijl men niet inziet dat dit ook kan zorgen voor een versnelling in tegenovergestelde richting.

De moeite om negatieve snelheid en negatieve versnelling op de juiste manier te interpreteren kan gekoppeld worden met vaardigheden binnen het differentiëren waarbij ook sprake is van negatieve hellingen. In de volgende opsomming staan deze vaardigheden, tezamen met de overeenkomstige opgaven uit de test differentiëren. Tezamen vormen deze een getal, die een weergave geeft van de vaardigheid op dit gebied (VD2):

- Inzien dat een dalende functie resulteert in een negatieve afgeleide. (Opgave 1b)
- Bij het bepalen van een helling in een punt inzien dat de helling daalt, het getal negatief is. (Opgave 2b)
- Inzien dat een negatieve afgeleide betekent dat de primitieve dalend is. (Opgave 4b)

3. Ten onrechte overnemen van vorm van de beweging naar vorm van de grafiek.

Code in de resultatenmatrix: MC3

Opgaven die deze misconceptie testen:

- Opgave 3.

- Opgave 7.
- Opgave 8.

Hierbij is er volgens de literatuur sprake van dat leerlingen de neiging hebben om bij een beschrijving van een beweging een grafiek te tekenen die de vorm van een beweging evenaart. Als er wordt beschreven dat een heuvel wordt beklommen dan heeft men de neiging om een heuvel te tekenen.

Als er wordt gekeken naar het differentiëren zou een dergelijke fout ook gevonden kunnen worden bij het bepalen van de afgeleide van een ingewikkelde functie. Hierbij zou de functie zelf bijvoorbeeld overgenomen kunnen worden (VD3):

1. De leerling ziet in dat een stijgende functie betekent dat de afgeleide positief is. (opgave 5a)
2. De leerling ziet in dat afnemend stijgende functie betekent dat de afgeleide afneemt. (opgave 5b)
3. De leerling ziet in dat een toenemend stijgende functie betekent dat de afgeleide toeneemt. (opgave 5c)

4. Verwarring tussen de verschillende grootheden en bijbehorende diagrammen.

Code in resultatenmatrix: MC4.

Opgaven die deze misconceptie testen:

- Opgave 1: v-t gevraagd, maar x-t ook aanwezig.
- Opgave 3: x-t gevraagd, maar v-t ook aanwezig.
- Opgave 4: a-t gegeven, maar kan worden geïnterpreteerd als v-t.

Deze misconceptie komt volgens de literatuur ook vrij vaak voor. Leerlingen hebben de neiging om een x-t diagram te interpreteren als een v-t diagram of een a-t diagram. De helling van een x-t diagram wordt niet alleen gezien als de snelheid, maar ook als een snelheidstoename. Uit de mondelinge testen bleek ook vooral dat versnelling vaak hetzelfde wordt geïnterpreteerd als snelheid en dat ook in een plaats-tijd diagram wordt gedacht dat de lijn de snelheid aangeeft.

Dezelfde soort fout zou kunnen worden teruggevonden bij het redeneren van een functie naar de afgeleide of van de afgeleide naar een functie. Er kan worden gezocht naar een verband met de volgende wiskundige vaardigheden:

- Inzien dat een nulpunt betekent dat er een extremum aanwezig is in de primitieve. (opgave 6a)
- Inzien dat een extremum of zadelpunt in een functie resulteert in een nulpunt in de afgeleide (opgave 3 en opgave 5c)

In tabel 2.3 is een overzicht gemaakt van de misconcepties kinematica die zijn gekoppeld aan de vaardigheden binnen het differentiëren. De dikgedrukte opgaven komen overeen met de opgaven in de test kinematica waarin de misconceptie voorkomt, de schuingedrukte nummers komen overeen met de vaardigheden op het gebied van differentiëren die zijn gedefinieerd. Om de overzichtelijkheid te bewaren zijn de vaardigheden differentiëren niet helemaal uitgeschreven, maar is een verwijzing gemaakt naar VD1 t/m VD4. VD1 is de samenvoeging van vaardigheden, die zijn gedefinieerd bij de koppeling met MC1, VD2 is te vinden onder MC2 etc.

	Problemen met het discrimineren tussen helling en hoogte en veranderingen in helling en hoogte	Problemen met de interpretatie van negatieve snelheid en constante versnelling	Ten onrechte overnemen van de vorm van de beweging naar vorm van de grafiek	Verwarring tussen de verschillende grootheden en de bijbehorende diagrammen
	MC1	MC2	MC3	MC4
VD1	2,4,6 <i>2a</i>			
VD2		1,4,7 <i>1b, 2b, 4b</i>		
VD3			3,7,8 <i>5a, 5b, 5c</i>	
VD4				1,3,4 <i>3, 5c, 6a</i>

Tabel 2.3: Koppeling tussen kinematische misconcepties en vaardigheden op het gebied van differentiëren.

2.6 Ontwerp van de mondelinge test

Het doel van de mondelinge test was om zowel op het gebied van kinematica als op het gebied van differentiëren een kwalitatief beeld te krijgen van hoe leerlingen redeneren, waar precies de moeilijkheden liggen en of er relaties met vaardigheden op het gebied van differentiëren te vinden zijn.

Voor de testvragen in deze mondelinge test zijn dezelfde eisen van toepassen als op de afzonderlijke testen kinematica en differentiëren. Daarnaast zijn enkele aanvullende eisen voor specifiek de mondelinge test opgesteld:

- Er dient rekening te worden gehouden met maximaal 20 minuten testtijd per leerling, de spanningsboog moet niet te lang zijn en het aantal opgaven moet te overzien zijn. Het mag geen overload zijn.
- De test moet voor een deel bestaan uit kinematische opgaven, maar ook uit een deel opdrachten over differentiëren.
- Opgaven dienen open te zijn, zodat er genoeg ruimte voor de leerling is om hardop na te denken. Eventueel zouden er meerkeuzevragen kunnen worden gebruikt, maar dan moet er ruimte zijn om de leerlingen aan te laten geven wat de gedachtengang is.

De uiteindelijke test (dat wil zeggen: de handleiding, waarin ook de opgaven te zien zijn) is te zien in appendix C.

In tabel 2.6 is te zien welke misconcepties en vaardigheden getracht worden te testen bij deze mondelinge test.

Opgave	Type	Te testen (mis)concepties/vaardigheden
Opg. 1.	Kin.	• Problemen met het discrimineren tussen helling en hoogte en veranderingen in helling en hoogte.
Opg. 2.	Kin.	• Problemen met het discrimineren tussen helling en hoogte en veranderingen in helling en hoogte.
Opg. 3.	Kin.	• Problemen met de interpretatie van negatieve snelheid en constante versnelling.
Opg. 4.	Kin.	• Ten onrechte overnemen van de vorm van de beweging naar vorm van de grafiek.
Opg. 5.	Diff.	• De leerling ziet in dat in een stijgend deel van een functie de afgeleide positief is en dat in een dalend deel van de functie de afgeleide negatief is. • De leerling ziet in dat de afgeleide gelijk is aan 0 op de punten waar de functie op een extremum zit. • De leerling ziet in dat afnemend stijgende functie betekent dat de afgeleide afneemt.
Opg. 6.	Diff.	• De leerling ziet in dat een nulpunt in de afgeleide betekent dat er een extremum is in de primitieve. • De leerling ziet in dat als de afgeleide positief is, dat de primitieve dan stijgt e.d.. • De leerling ziet in dat als de afgeleide stijgt, dat de primitieve dan toenemend stijgt of afnemend daalt e.d.

Tabel 2.4: Misconcepties en vaardigheden die bij de mondelinge test worden getest.

De ontworpen testen, zoals deze in hoofdstuk 2.3 zijn toegelicht zijn tijdens enkele sessies op de stageschool afgenomen. De volgende sessies zijn gehouden:

- De mondelinge testen zijn gedurende een tweetal sessies afgenomen bij 5 leerlingen uit VWO-4 en 5 leerlingen uit VWO-6. Deze leerlingen zijn geheel willekeurig uitgekozen en persoonlijk geïnterviewd met de ontworpen mondelinge test. De resultaten en bespreking hiervan zijn in het eerste deel van dit hoofdstuk terug te vinden.
- De test kinematica is gedurende een lesuur bij een VWO-6 klas afgenomen en gedurende een ander lesuur bij een VWO-4 klas. Beide lessen waren tijdens het vak natuurkunde. De resultaten en de discussie van deze resultaten is in het tweede gedeelte van dit hoofdstuk terug te vinden.
- De test differentiëren is gedurende een lesuur in VWO-6 afgenomen tijdens een uur waarin wiskunde werd gegeven. Ook is de test in een tweetal clusters VWO-4 bij het vak wiskunde afgenomen. Omdat de natuurkunde-docent een beperkt aantal uren over had moest voor deze test worden uitgeweken naar de uren waarin wiskunde werd gegeven. Aangezien de overlap tussen het natuurkunde-cluster en het wiskunde-cluster totaal niet optimaal was moest de test in de beide wiskunde clusters worden afgenomen.

3.1 Mondelinge test

De ontworpen mondelinge test is middels een interview bij 5 VWO-6 leerlingen en 5 VWO-4 leerlingen afgenomen; de gesprekken zijn met een recorder opgenomen. In onderstaande tekst is te lezen hoe de leerlingen per opgave antwoordden; vervolgens worden de opvallende zaken bediscussieerd. Voor de privacy van de leerlingen zijn de namen fictief en niet te herleiden naar de leerlingen zelf. In appendix D zijn voor alle leerlingen voor de complete test de interpretatie van hun concepties en misconcepties te zien.

Opgave 1.

Opvallend was dat de eerste opgave in bijna alle gevallen goed werd beantwoord. Ook was er in de meeste gevallen sprake van een goede conceptie. De meeste leerlingen wisten hetzelfde antwoord te geven als Richard: *"Ja, euh, tussen 0 en 4 seconde en tussen 6 en 10 seconde, want daar lopen de lijnen evenwijdig."*

Een redenering die vaak voorkwam. Klaarblijkelijk weten ongeveer alle leerlingen te vertellen dat in een plaats-tijd diagram evenwijdige lijnen dezelfde snelheid representeren.

Eén persoon uit V4 haalde toch hoogte en helling door elkaar en bestempelde een snijpunt van de twee grafieken als het moment dat ze even snel gaan. Elly: *"Ik denk op dit punt (wijst $t = 5s$ aan), want daar kruisen ze elkaar. Ze rijden even met dezelfde snelheid denk ik."* Eén persoon uit V6 dacht dat er sprake van is dat de beide auto's nergens even snel gaan.

Eén persoon uit V6 gaf er uiteindelijk blijk van kennis uit het differentiëren te gebruiken. Maarten: *"Dit stukje en dit stukje (wijst 0-4 s en 6-10 s aan), want dit is s (wijst de verticale as aan) en dit is t (wijst de horizontale as aan) en de afgeleide, dus zeg maar de richtingscoëfficiënt, dat zou de snelheid zijn."*

Opgave 2.

Bij de tweede opgave wordt er een dieper inzicht verwacht; de lijnen lopen niet meer recht

en de positie neemt toe en af en wordt zelfs negatief. Het aantal fouten is dan ook groter dan bij de eerste opgave. Meest opvallend was dat alle leerlingen uit VWO-4 bij deze opgave fouten maakten, terwijl de VWO-6 leerlingen het een stuk beter deden. Vier van de vijf leerlingen uit VWO-6 deden dit wel correct.

Bij de vraag wanneer het object stil staat merkte Richard op: *"Bij F, want daar loopt de positie even gelijk aan de tijd-as en staat hij dus stil."* Hij ziet wel in wat stilstaan inhoudt in de grafiek, maar niet dat dit bij B het geval is. Momentaan stilstaan begrijpt hij vermoedelijk niet. Een misconceptie die bij een grote groep - vooral in VWO-4 - werd gevonden.

In de meeste andere gevallen wordt het snijpunt met de tijd-as aangeduid als het moment waarop er wordt stil gestaan. Kim: *"Bij D, omdat de positie daar 0 is en dus stilstaat."*

De meeste VWO-6 leerlingen denken hier correct over. Deborah: *"De snelheid is 0 als de raaklijn horizontaal loopt en dat is bij B en F het geval."*

Weinig mensen weten te definiëren wanneer er sprake is van een versnelling. In het overgrote merendeel van de gevallen wordt men het bos ingestuurd door het feit dat de lijnen krom lopen. Richard: *"Tussen 0 en A, want hij verplaatst steeds meer in een bepaalde tijdseenheid en volgens mij ook tussen B en C, maar dat weet ik niet zeker. Daar loopt de lijn ook niet evenwijdig."* Het tweede deel van het antwoord is correct, maar hij weet zich geen raad met de kromming van de lijn, de redenering is in geen enkel opzicht goed.

Mies haalt de betekenis van snelheid en versnelling door elkaar: *"Tussen 0 en A versnelt hij heel snel, want daar gaat de lijn heel stijl."* Een misconceptie die bij het overgrote merendeel van de leerlingen werd teruggevonden.

Eén VWO-6 leerling weet dat bij een versnelling sprake moet zijn van een holle lijn. Maarten: *"Dan loopt de lijn als de rechterkant van een parabool."* En even later: *"Tussen F en G is er een negatieve versnelling."*

Het omdraaien van het object wordt in enkele gevallen los van de eerste vraag gezien. Richard: *"Bij B, want daar gaat hij de andere kant op."* Een correcte redenering. Bij de meeste anderen wordt dezelfde fout weer uit de kast gehaald. Mies: *"Volgens mij bij D, want wordt de positie negatief en draait hij dus om."*

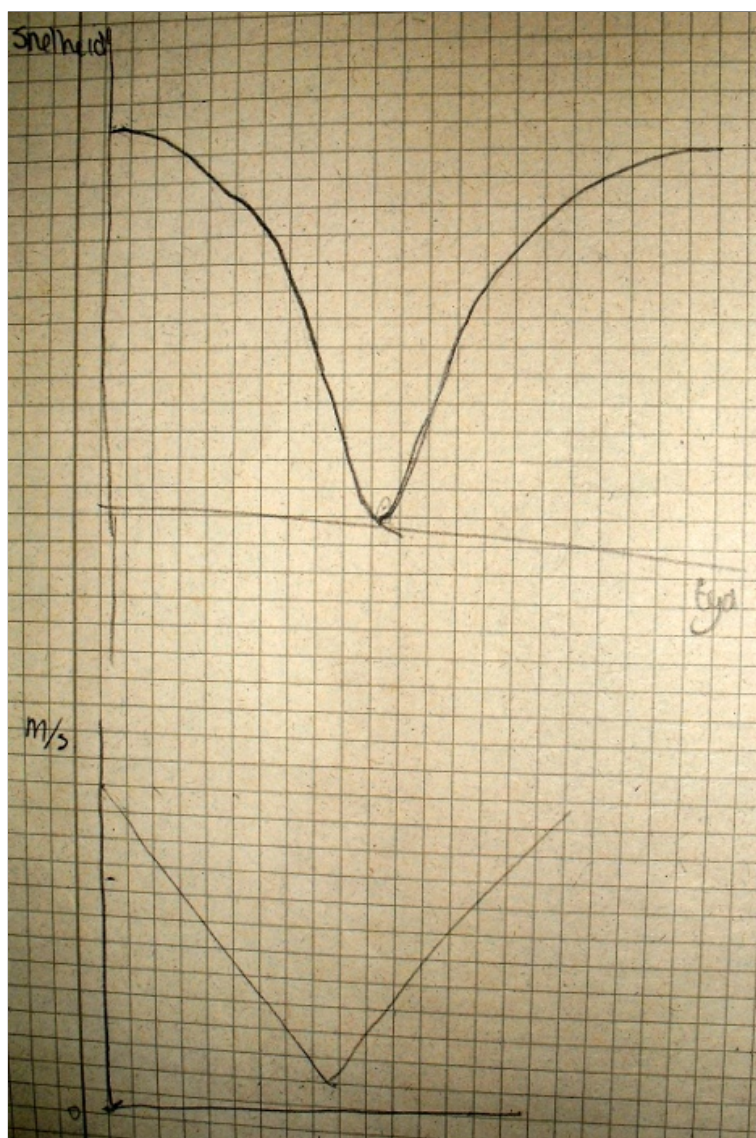
Opgave 3.

Bij deze derde opgave valt op dat vrijwel iedereen inziet dat de bal begint met een bepaalde snelheid die niet gelijk is aan 0. Ook iedereen ziet in dat tot het moment waarop de bal omdraait de snelheid afneemt, waarbij iedereen de lijn ook naar 0 laat lopen. De meningen lopen uiteen als het gaat om de vorm van de lijn. Enkelingen maken er een recht lijn van, maar veel anderen tekenen een toenemend dalende lijn. Richard: *"Hij wordt steeds harder afgeremd volgens mij."* Kim: *"Ik denk dat hij begint met een snelheid die afneemt tot 0, en dan draait hij om en neemt de snelheid weer toe."*

Duidelijk is er hier sprake van dat de betekenis van negatieve snelheid niet wordt onderkend. In de helft van de gevallen (5) wordt een v-vorm getekend in het snelheid-tijd diagram, in twee gevallen wordt de juiste lineaire lijn getekend, in twee andere gevallen wordt er wel gebruik gemaakt van een negatieve versnelling, maar is de vorm incorrect. In één geval wordt de helft van een bergparapool getekend, waarbij de negatieve snelheid ook wordt gebruikt.

Als vervolgens wordt gevraagd hoe het versnelling-tijd-diagram er uit ziet, is er maar 1 persoon die een verband legt met het al eerder getekende v-t diagram. Maarten: *"De versnelling is gewoon de afgeleide van het v-t diagram, dus dan is de versnelling negatief en dan denk ik dat het gewoon zo een rechte lijn is (tekent een horizontale lijn)."*

Negen van de tien personen beginnen opnieuw met redeneren, zonder een verband met het



Figuur 3.1: Karakteristieke fout van een leerling (Richard): negatieve snelheid wordt niet onderkend (bovenste grafiek) en versnelling wordt op dezelfde manier benaderd als snelheid (onderste grafiek).

eerder getekende v - t diagram te leggen. Het probleem is ook direct dat in geen enkel geval sprake is van een correcte grafiek. De meesten redeneren precies dezelfde kant op als bij het snelheid-tijd diagram. Mies: *"De versnelling gaat steeds langzamer, dus euh .. (tekent een dalende lijn), en dan weer zo (tekent een stijgend vervolg)."* Kim: *"De versnelling? Dat is toch weer ongeveer hetzelfde? Hij neemt af en dan neemt hij weer toe."*

Als het aankomt op het concept versnelling zijn er dus weinig mensen - in dit geval welgeteld 1 - die inzien wat er precies gebeurt. Ook hier heeft men in bijna alle gevallen geen goede conceptie van negatieve versnelling; enkele personen associëren vertraging met een afnemende lijn in het a - t diagram en sommigen met een negatieve versnelling. Bij deze laatste conceptie tekent men de versnelling weer positief of zelfs oplopend als er een versnelling in tegenovergestelde richting plaatsvindt.

Het is duidelijk dat men massaal niet in staat is om te beredeneren hoe men moet omgaan met het concept versnelling. De volgende zaken vallen op:

- Er wordt geen verband gelegd tussen de snelheid-tijd grafiek en de versnelling-tijd grafiek. Bijna niemand weet te benoemen dat de versnelling de afgeleide van de snelheid is; ook bij

doorvragen benoemt niemand de afgeleide of de raaklijn als het verband met de snelheid.

- Bijna niemand ziet in dat de versnelling - die in dit geval negatief is - constant blijft. Ook wordt niet ingezien dat versnelling in de andere richting dezelfde (negatieve) waarde voor de versnelling geeft als een vertraging in de positieve richting.
- Niemand houdt rekening met het begrip kracht. Geen enkele leerling ziet in dat de wind zorgt voor een constante kracht en daarom voor een constante versnelling. De tweede wet van Newton wordt door iedereen over het hoofd gezien. Ook in VWO-6 is er geen enkeling die blijkt geeft van een dergelijk inzicht.

Opgave 4.

Deze vierde opgave - de laatste opgave als het gaat om het deel kinematica - bleek tijdens de interviews een stuk gemakkelijker voor de leerlingen. Bijna iedereen wist aan te geven dat er sprake was van een fietser die stukjes met constante snelheid fietste. Opmerkelijk is het antwoord van Richard, die in de vorige opgave de grootste moeite had met het begrip versnelling. Bij deze opgave - waarbij er dus sprake is van een x - t diagram - weet hij haarfijn te zien dat er geen sprake is van een versnelling: *"Hij versnelt niet. Dan zou de grafiek de grafiek geen rechte streep zijn."*

Veruit de meeste leerlingen hebben een correcte interpretatie van deze grafiek.

Klaas: *"Het is een tijd-verplaatsing grafiek, dus in het begin heeft hij een constante snelheid. Vervolgens staat hij stil omdat de verplaatsing 0 is. Vervolgens gaat hij weer. Vervolgens staat hij weer stil met weer een verplaatsing van 0. En vervolgens is dit dan het draaipunt en gaat hij de andere kant op weer terug."*

Een enkeling interpreteert het soort diagram fout, ook na doorvragen. Kim: *"Hij neemt eerst toe, en dan gaat hij weer constant."* Begeleider: *"Naar wat voor diagram zit je te kijken?"* Kim: *"Naar een plaats-tijd diagram. Euhm. De snelheid neemt op het laatst weer af. Ik denk dat het C is."* Er is hier duidelijk sprake van dat deze leerling het diagram interpreteert als een snelheid-tijd grafiek, terwijl er sprake is van een plaats-tijd grafiek.

Opgave 5.

Hierbij bleek dat leerlingen het moeilijk vonden om ineens een afgeleide te gaan construeren. Waar bij vorige opgaven de leerlingen minder moeite hadden waren er nu ineens weinig leerlingen die direct de afgeleide konden tekenen. Vaak was te horen dat de leerling het niet meer wist. Richard: *"Dat weet ik zo niet meer, dat vond ik een moeilijk gedeelte."* Met wat simpel doorvragen bleek dat de kennis wel degelijk aanwezig was. Begeleider: *"Wat zegt de afgeleide?"* Richard: *"Daaraan kun je zien hoe erg de lijn stijgt. Euhm. Daar is de afgeleide dus negatief (wijst een aflopend deel van de grafiek aan). Euhm, hier en hier is hij 0 (wijst het dal en de top aan)."*

Enkele andere leerlingen gaven direct aan geen flauw idee hebben wat ze zouden moeten doen bij het tekenen van de afgeleide van de gegeven grafiek. Mies: *"Ik weet niet wat de afgeleide is."* Mies bleek geen wiskunde B te hebben en daarom dat onderwerp niet te hebben gehad.

Kim bleek geen goede conceptie van de afgeleide te hebben: *"Hier is hij 0, want als de functie 0 is is de afgeleide ook 0."* Even later: *"Je hebt gewoon een formule en dan moet je daar de afgeleide van berekenen."* Kim wist niet naar welke punten ze moest kijken en waar de afgeleide van afhankelijk was.

Ellie: *"Ik weet het niet. Ik weet het echt niet."*

Klaas: *"De afgeleide ... is dat niet de helling grafiek? Dan moet ik letten op de snijpunten met de x -as."* Even later: *"Oh nee, ik moet kijken naar de toppen, dat zijn de nulpunten van de afgeleide! Verder moet je kijken naar of hij afneemt, dan is de afgeleide negatief en of hij toeneemt, dan is de afgeleide positief."* Klaas blijkt dus prima door te hebben wat de afgeleide

precies inhoudt.

De VWO-6 leerlingen wisten dit substantieel beter te beantwoorden. Ruud: *"Bij een dal en een top snijdt hij volgens mij de x -as."* Na een tijdje weet Ruud bijna perfect de afgeleide te tekenen.

Peter heeft in eerste instantie last van het feit dat hij het even moet ophalen: *"Ik heb het wel geweten, maar het is allemaal weer een beetje weggezakt."* Even later: *"De afgeleide is de helling. Hmm. Als hij stijgt dan is de afgeleide positief. Hier daalt hij steeds minder, dus wordt de afgeleide steeds minder negatief. Hier daalt hij steeds meer, dus dan wordt de afgeleide steeds negatiever. Dan zou ik dus een parabool tekenen (tekent de bergparabool)".*

Maarten heeft een zeer goede conceptie van hoe hij een afgeleide moet construeren: *"Ik kijk altijd eerst waar de afgeleide de x -as snijdt; dat is hier bij de top en hier bij het dal van de functie. Dan kijk ik waar hij positief is, dan moet dus hier tot hier zijn (wijst het stijgende gedeelte van de functie aan). Hier is de grafiek dalend, dus is de afgeleide onder de x -as, maar de functie is wel afnemend dalend, dus neemt de afgeleide steeds minder toe, dan wordt de functie eerst toenemend stijgend en daarna wordt hij afnemend stijgend en daarna is hij toenemend dalend."* Het gevolg is een kloppende afgeleide. Maarten geeft er duidelijk blijk van alle facetten van het differentiëren te snappen.

Mieke weet totaal niet wat ze moet doen bij deze opgave: *"Nee, dat kan ik niet uit mijn hoofd, dat doe ik altijd op de rekenmachine!"* Begeleider: *"Weet je waar je waar je op zou kunnen letten?"*

Deborah probeert er eerst een algebraïsche omschrijving van te maken: *"Volgens mij is dit een functie van x tot de macht drie."* Begeleider: *"Waarom? Dat is helemaal niet gegeven!"* Deborah: *"Ja, dat kun je wel zien."* Begeleider: *"Wat zegt de afgeleide eigenlijk?"* Deborah: *"Ik heb eigenlijk geen flauw idee. Weet je wat het is? Ik weet wel hoe ik het moet berekenen."* Na wat doorvragen blijkt ze toch wel te weten waar ze op moet letten: *"Bij de toppen is de afgeleide 0. De afgeleide is de richtingscoëfficiënt dus dan weet ik dat bij de toppen de afgeleide 0 is."* Begeleider: *"Wat weet je nog meer?"* Aan het eind heeft ze een lijn getekend die precies de horizontaal gespiegelde is van de functie.

Opgave 6.

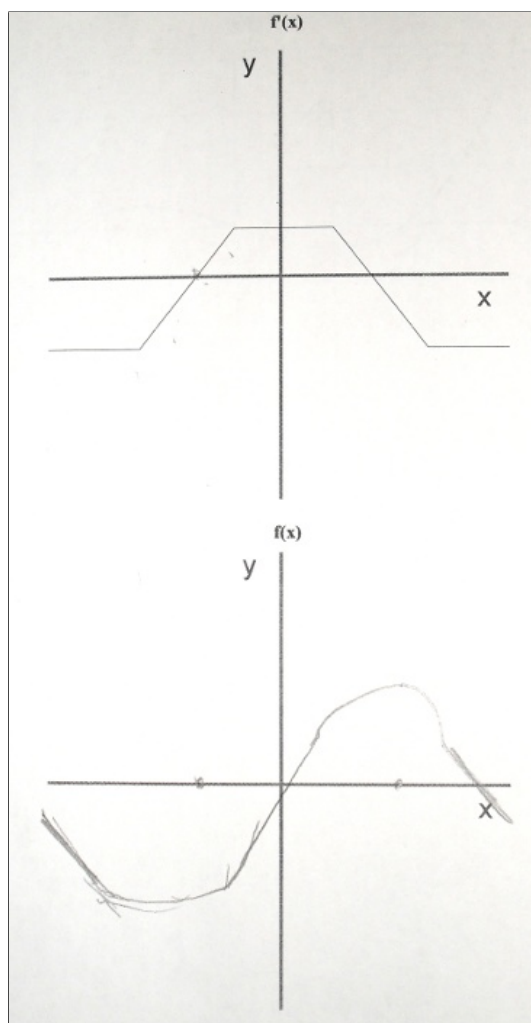
Bij deze zesde opgave, waarbij vanuit de afgeleide moet worden geredeneerd, is dezelfde trend te zien als bij het redeneren naar de afgeleide toe.

Richard: *"Op deze twee punten gaat de afgeleide door de x -as."* Begeleider: *"Wat betekent dat?"* Richard: *"Dan is de raaklijn daar 0. Dus je zit op een top of een dal. Hij stijgt hier, dus dit zal een top moeten zijn en dit een dal."* Verder komt hij niet.

Mies: *"Ik heb echt geen idee."*

Kim: *"Hier gaat hij recht en negatief, dus dan moet de functie recht en positief zijn. Hier stijgt de afgeleide, dus dan moet de functie dalen."* Kim tekent de functie zodanig dat deze horizontaal gespiegeld.

Klaas weet precies hoe hij dit moet aanpakken: *"Hij is negatief en constant, dus dan neemt de primitieve af met een rechte lijn. Hier is de helling negatief afnemend, dus dan krijg je dat de helling hol gaat lopen, dan is hier de top wat dus het nulpunt in de afgeleide. Hier is hij toenemend positief, dus dan neemt de primitieve weer toe. Vervolgens is de lijn weer horizontaal en stijgt de primitieve dus weer constant."* Aan het eind van zijn verhaal heeft hij een primitieve getekend die correct is. Ruud: *"Hij is gelijk negatief, dus eerst met een rechte lijn omlaag. Dan wordt hij groter, dus dan krijg je een afronding totdat hij weer omhoog gaat. Daarna gaat hij weer recht omhoog en dan weer een afronding naar beneden en loopt hij weer recht naar beneden."* Ruud tekent hier een perfecte primitieve.



Figuur 3.2: Voorbeeld van een zeer goede vaardigheid in het terugredeneren vanuit een afgeleide. De onderste grafiek is de oplossing van deze leerling (Maarten). Deze mag als perfect worden aangemerkt.

Ook Peter weet een goede vorm te beredeneren: *"Hier daalt hij met één snelheid, dan daalt hij minder snel tot dit punt en dan is de afgeleide positief dus dan stijgt hij. Daarna stijgt hij met dezelfde snelheid door en dan stijgt hij minder snel tot daar (wijst het tweede nulpunt in de afgeleide aan) en dan daalt hij weer en vanaf het laatste punt daalt hij weer met dezelfde snelheid."*

Maarten weet net als bij het bepalen van de afgeleide precies hoe hij nu de primitieve moet bepalen: *"Dit stukje is recht, dus dan moet de primitieve schuin naar beneden lopen. Hier is de afgeleide gelijk aan nul, dus dat is een top of een dal. Euhm, hier moet een dal zitten (wijst het linker nulpunt aan), dus hier (wijst recht nulpunt aan) moet andersom een top zitten. Vanaf daar wordt het een rechte lijn omhoog en dan wordt hij steeds minder (tekent een stuk parabool) en daar gaat hij met een rechte lijn naar beneden."*

Mieke weet zich ook hier geen raad: *"Ik weet niet. Ik weet het écht niet!"*

Deborah weet dat ze op de nulpunten van de afgeleide moet letten: *"Hier is de richtingscoëfficiënt 0, dus dan zouden daar de twee toppen moeten zijn van de grafiek. Op dit punt moet dus een minimum zitten (wijst het linker nulpunt in de afgeleide aan) en daar moet een top zitten. Hmm. Ik denk dat hij zo loopt."* Deborah tekent een grafiek die wat betreft de extrema klopt, maar waarbij weinig oog is voor het detail. Er wordt geen onderscheid gemaakt tussen de delen waar de primitieve lineair loop en waar deze parabolisch zou moeten lopen. Er is gedeeltelijk sprake van begrip.

3.1.1 Discussie

Het valt op dat de resultaten heel wisselend zijn. In onderstaande zal eerst een kwalitatieve analyse per vraag worden gegeven van de resultaten, daarna zullen de opvallende zaken onder de loep worden genomen en zal een analyse worden gegeven van de resultaten, kijkend naar de relatie tussen de aan- of afwezigheid van misconcepties bij het onderwerp kinematica en de aan- of afwezigheid van begrip op het gebied van differentiëren.

Rechttoe-rechtaan

Het eerste wat opvalt aan deze resultaten is het feit dat bij rechttoe-rechtaan opgaven het overgrote merendeel van de leerlingen een correct antwoord weet te formuleren, vaak ondersteund met een correcte redenering. Bij de eerste opgave, waarbij er sprake is van een afstand-tijd grafiek met louter rechte lijnen, weten de meeste mensen op te merken dat de beide auto's even snel gaan als de lijnen parallel lopen. Van de tien geïnterviewde personen weten er 7 het correcte antwoord te formuleren; twee personen hebben de bekende misconceptie dat men de gelijkheid in hoogte aanwijst, in plaats van de gelijkheid in helling, één persoon denkt dat de auto's nergens even snel gaan.

Ook bij de vierde opgave, waarbij er sprake is van een plaats-tijd diagram met alleen rechte lijnen, weten de meeste mensen een goede conceptie tentoon te spreiden. Acht personen weten goed te interpreteren wat de grafiek hen zegt, twee personen interpreteren de afstand-tijd grafiek als een snelheid-tijd grafiek en spreken op het moment van een stijgende lijn van een versnelling. De bekende misconceptie waarbij de vorm van de beweging overeenkomt met de vorm van de grafiek komt geen enkele keer voor. De goede conceptie van deze opgave lijkt los te staan van andere elementen die werden getoetst. Bij enkelen zijn ook andere opgaven goed gemaakt en is sprake van een goed begrip van het differentiëren, bij anderen staan de goede antwoorden bij deze opgaven in een festival aan misconcepties.

Klaarblijkelijk is er sprake van een standaard situatie, die tijdens de lessen natuurkunde veelvuldig aan de orde is gekomen. De recht lijn in het plaats-tijd diagram wordt herkend als eenparige beweging en wordt daardoor correct geïnterpreteerd.

Kromme lijnen

Hoe anders is de conceptie als er ineens sprake is van een gekromde lijn in plaats van een aantal rechte lijnen. Bij de tweede opgave kwam dit heel duidelijk naar voren. Waar bij de eerste en vierde opgave - waar sprake is van een plaats-tijd grafiek - de meeste mensen correcte antwoorden weten te produceren is er nu (ook een plaats-tijd diagram) sprake van veel meer fouten. De vraag waar er sprake is van stilstand wordt heel wisselend beantwoord.

Geen enkele leerling uit VWO-4 weet beide punten van stilstand aan te wijzen; twee mensen zien alleen dat de beweging stil staat bij punt F, waar de lijn een stukje horizontaal loopt. De drie anderen wijzen de kruising met de tijd-as aan als punt waar de beweging stil staat. Deze misconceptie gaat hand in hand met de misconceptie dat hier de beweging ook omdraait.

Van de VWO-6 leerlingen weet de meerderheid (4 van de 5) wanneer er sprake is van stilstand en weet hier ook bij te vermelden dat in die gevallen de raaklijn gelijk moet zijn aan 0. Iets wat geen enkele leerling uit VWO-4 weet te beredeneren. Opvallend is dat iedereen die weet te beredeneren dat er sprake is van stilstand bij een horizontale raaklijn is ook in staat is om aan te geven dat toppen en dalen in een grafiek resulteren in nulpunten in de afgeleide en andersom. Andersom is het begrip van het differentiëren nog geen garantie voor een goede conceptie van stilstand in een kromme in het plaats-tijd diagram, kijkend naar de resultaten.

Klaarblijkelijk is het zo dat een goede toepassing in plaats-tijd diagrammen een uiting is van

een goed begrip van het differentiëren. De leerlingen die inzagen dat stilstand in een plaats-tijd diagram inhoudt dat de raaklijn horizontaal is, waren ook in staat om te zien dat de afgeleide op een top of een dal gelijk is aan 0 en konden aangeven dat een nulpunt in een afgeleide betekent dat er sprake is van een top of dal in de functie.

Uiteraard zijn hier - simpelweg vanwege het kwalitatieve karakter - geen harde conclusies uit te trekken. Wel kan deze observatie worden gebruikt om bij de schriftelijke testen te letten op de relatie tussen deze twee zaken.

Wat zeer opvallend is, dat bijna niemand in het plaats-tijd diagram weet aan te geven waar er sprake is van een versnelling. Veruit de meeste leerlingen beginnen te redeneren met de helling, die niet 0 is, maar weten niet te beredeneren dat toenemend stijgend een versnelling in positieve richting is en dat toenemend dalend een versnelling in negatieve richting is. Er is welgeteld één persoon, die weet te vertellen dat bij een toenemend stijgende of dalende lijn een versnelling plaatsvindt. Deze ene persoon (Maarten) geeft tijdens de hele sessie blijk van een zeer goed begrip van zowel het onderwerp kinematica als het differentiëren. Ook is bij deze jongen te merken dat er sprake is van transfer; hij gebruikt het concept van de afgeleide vaak om bewegingen te analyseren. De wiskunde is bij hem duidelijk een instrument geworden, die hij op natuurkundige zaken weet toe te passen.

Negatieve snelheid

Als wordt gekeken naar de opgave waarbij de leerlingen een snelheid-tijd grafiek moeten tekenen van een bal die afremt en door de wind in tegenovergestelde richting wordt geduwd, dan vallen een aantal zaken op.

Ten eerste heeft iedereen door dat er sprake is van een beginsnelheid, dus dat de lijn niet in de oorsprong begint, maar er boven. Ten tweede zien veel leerlingen niet in dat de wind, die een constante kracht veroorzaakt (hetgeen vermeld werd), als gevolg heeft dat er sprake is van een constant afnemende lineaire lijn. Vier van de vijf leerlingen uit VWO-4 tekenden een gebogen lijn. Bij de groep met VWO-6 leerlingen waren er twee die geen rechte lijn tekenden.

Het derde punt dat opviel was dat de meeste leerlingen niet inzagen dat de snelheid bij het punt waar het omdraait negatief wordt. In totaal waren er 4 leerlingen die blijk gaven dat ze inzagen dat de snelheid negatief werd, maar 6 die de snelheid weer positief zagen na het draaipunt.

Het vierde punt was het feit dat maar 1 persoon liet zien te snappen dat de versnelling een relatie met de snelheid heeft: dat de versnelling de afgeleide is van de snelheid. Alle andere leerlingen begonnen bij de vraag om een a-t diagram te tekenen van voor af aan bij het redeneren hoe de lijn zou lopen. In alle gevallen was hierbij sprake van een foutieve conceptie; er werden grafieken getekend die aan alle kanten niet klopten.

Ten vijfde was er het punt dat de leerlingen - zoals in het vorige punt genoemd - die opnieuw begonnen met redeneren bij het a-t diagram niet in staat waren te komen tot een correcte redenering. In 7 van de 9 (incorrect) opnieuw beredeneerde grafieken was er sprake van dat niet werd ingezien dat versnelling anders is dan snelheid. Als werd ingezien dat de bal werd afgeremd werd massaal gedacht dat de versnelling ook zou afnemen; niemand kwam tot de redenering waarbij de versnelling een horizontale lijn is. De bekende misconceptie over de moeite met negatieve versnelling én de misconceptie over constante versnelling zijn in dit onderzoek duidelijk naar voren zijn gekomen.

Conclusies

- Bij plaats-tijd diagrammen met rechte lijnen hebben de leerlingen een correcte conceptie. Vermoedelijk is hier sprake van standaardsituaties, die vaak aan de orde zijn geweest. Er

is geen enkele relatie met de vaardigheden op het gebied van differentiëren te vinden.

- Leerlingen die inzien dat de snelheid gelijk is aan nul is in een plaats-tijd diagram als de raaklijn horizontaal loopt weten ook de goede relatie tussen toppen/dalen in een functie en nulpunten in de afgeleide.
- Leerlingen zijn in de meeste gevallen (9 van de 10) niet in staat om in een plaats-tijd diagram in te zien waar de beweging versnelt. De ene persoon die dat wel kan geeft blijk van een zeer goede conceptie en van een goede mate van transfer.
- Leerlingen hebben vaak niet door wat versnelling precies is en kunnen dit dus ook niet goed toepassen. Vaak wordt gedacht dat versnelling hetzelfde is als snelheid.
- De meerderheid ziet het belang van negatieve snelheid niet in.
- Bijna niemand merkt op dat de versnelling de afgeleide van de snelheid is.

3.2 Resultaten schriftelijke test

Na het afnemen van de schriftelijke testen zijn de resultaten verwerkt en in verschillende schema's uitgezet. In appendix E zijn de gegeven antwoorden van de leerlingen die meededen aan test kinematica te zien.

Bij het maken van de test is rekening gehouden met het feit dat een meerkeuzetest impliceert dat er kans op gokken aanwezig is. Om dit te ondervangen is bij iedere opgave gevraagd of de leerlingen het antwoord zouden willen toelichten met hun redenering. Bij het verwerken van de antwoorden bleek deze strategie te werken. In bijna alle gevallen bleek het antwoord te zijn toegelicht; enerzijds met een correcte redenering bij het correcte antwoord, anderszijds met een redenering die coherent was met de misconceptie in het antwoord. In totaal waren er slechts twee antwoorden bij mensen die gegokt waren.

In appendix E is voor iedere opgave per klas een cirkeldiagram te zien met de gegeven antwoorden.

In tabel 3.1 zijn de resultaten van de test voor van VWO-4 in aantallen en percentages te zien en in tabel 3.1 zijn de resultaten voor VWO-6 te zien. De dikgedrukte getallen geven de juiste antwoorden aan.

Tabel 3.1: Resultaten van de kinematicatest van VWO-4

	1		2		3		4		5		6		7		8	
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
A	0	0	22	92	15	65	11	46	0	0	4	17	0	0	1	4
B	17	71	2	8	0	0	4	17	0	0	20	83	15	63	0	0
C	6	25	0	0	4	17	9	38	4	17	0	0	9	38	11	46
D	1	4	0	0	4	17	0	0	20	83	0	0	0	0	12	50

Tabel 3.2: Resultaten van de kinematicatest van VWO-6

	1		2		3		4		5		6		7		8	
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
A	0	0	20	95	13	62	11	52	1	5	3	14	0	0	0	0
B	10	48	1	5	1	5	1	5	0	0	18	86	14	67	0	0
C	11	52	0	0	1	5	9	43	1	5	0	0	7	33	4	19
D	0	0	0	0	6	29	0	0	19	90	0	0	0	0	17	81

Aan de hand van deze getallen kunnen de volgende overvaties worden gedaan:

- De leerlingen uit VWO-4 en VWO-6 maakten de opgaven zeer vergelijkbaar. Opgave 1 werd door VWO-4 beter gedaan en opgave 8 werd door VWO-6 beter gedaan.

- De misconceptie waarbij de vorm van de beweging wordt overgenomen in de vorm van de grafiek blijkt in de resultaten niet op te gaan. Bijna niemand bleek deze misconceptie te hebben. (opgave 3, 7 en 8)
- Veel leerlingen zien niet in dat snelheid negatief kan zijn. Bij opgave 1 maakt 25% van de leerlingen uit VWO-4 deze fout en 52% van de VWO-6 leerlingen. Bij opgave 7 is dit percentage nog een stuk hoger: 63% van de VWO-4 leerlingen en 67% van de VWO-6 leerlingen. Dit is coherent met de resultaten van de mondelinge test.
- Ongeveer de helft van de leerlingen zien negatieve versnelling louter als vertraging en niet als versnelling in tegenovergestelde richting. Van de VWO-4 leerlingen is dit 46% en van de VWO-6 leerlingen is dit 52%. Deze percentages zijn coherent met de aantallen die in de mondelinge test naar voren kwamen. Klaarblijkelijk is dit een misconceptie die in deze klassen nadrukkelijk aanwezig is.
- De misconceptie waarbij x - t , v - t en a - t diagrammen worden verward blijkt ook voor te komen. Bij opgave 1 is het bijna niemand, want daar voert een andere misconceptie de boventoon. Bij opgave 3 zijn er in totaal 10 leerlingen die deze fout maken, bij opgave 4 zijn het er 9. Opvallend, want bij de mondelinge test kwam het opvallend vaker voor dat leerlingen versnelling verwarden met snelheid.
- De misconceptie waarbij helling en hoogte worden verward blijkt relatief weinig voor te komen. Zowel bij opgave 2, 5 als 6 heeft ongeveer 85% van de leerlingen een goede conceptie.
- Tijdens het analyseren van de resultaten kwam naar voren dat een extra misconceptie aanwezig blijkt te zijn. Eén die vaak wordt fout gedaan, maar die in eerste instantie niet expliciet getest zou worden: *Probleem om in te zien dat een lagere snelheid ook inhoudt dat het afleggen van dezelfde weglengte langer duurt en dat bij een hogere snelheid dit korter duurt.* Deze misconceptie bleek zich zowel in opgave 3 als opgave 8 te manifesteren. Bij opgave 3 wordt het enkele keren fout gedaan, bij opgave 8 is dit percentage 46% en 19% voor resp. VWO-4 en VWO-6. In VWO-4 wordt deze fout vaker gemaakt.

Zoals in de laatste opmerking is beschreven is dus een extra misconceptie gevonden bij het analyseren van de resultaten. Omdat deze relatief vaak voorkwam is ervoor gekozen om deze misconceptie mee te nemen in de analyse van de resultaten. Ook is een koppeling gezocht met enkele vaardigheden uit het differentiëren. In onderstaande is dit te zien:

5. Probleem om in te zien dat een lagere snelheid ook inhoudt dat het afleggen van dezelfde weglengte langer duurt en dat bij een hogere snelheid dit korter duurt.

Code in de resultatenmatrix: MC5.

Opgaven in de test kinematica, waar deze misconceptie zich manifesteert:

- Opgave 3.
- Opgave 8.

Bij deze misconceptie wordt aan de hand van een beschrijving wel ingezien dat snelheid zou kunnen dalen, maar niet dat een lagere snelheid ook resulteert in het feit dat er meer tijd nodig is om een afstand af te leggen. Er is dus sprake van dat er vanuit het begrip snelheid niet goed wordt geredeneerd richting het begrip afstand. Er wordt dus niet gekeken naar het feit dat bij gelijke afstanden en verschillende snelheden de oppervlaktes onder de grafiek gelijk moeten zijn.

In eerste instantie heeft dit alles te maken met het onderwerp integreren. Het feit dat bij gelijke afstanden de oppervlaktes onder de lijn in het v - t diagram gelijk moeten zijn komt voort uit het feit dat de afstand de integraal is van de snelheid.

Wat betreft differentiëren zou een equivalent probleem kunnen zijn dat men niet goed in staat is om vanuit een afgeleide functie de vorm van functie zelf (de primitieve) te beredeneren. Er kan specifiek worden gekeken naar het begrip van een nulpunt in de afgeleide (een extremum/zadelpunt in de primitieve), een positief gedeelte in de afgeleide (stijgend in de prim-

itieve) en een stijgend gedeelte in de afgeleide (toenemend stijgend/afnemend dalend in de primitieve). Dus (VD5):

- De leerling is in staat om terug te redeneren van een simpele afgeleide (horizontale lijn) naar de oorspronkelijke functie (opgave 4a).
- De leerling ziet in dat een negatieve afgeleide betekent dat de oorspronkelijke functie een dalend patroon oplevert. (opgave 4b)
- De leerling is in staat om in te zien dat een nulpunt in de afgeleide betekent dat de primitieve daar een extremum heeft. (opgave 6a)
- De leerling is in staat om in te zien dat een stijgend nulpunt betekent dat de primitieve daar een dal heeft en dat een dalend nulpunt betekent dat de primitieve daar een top heeft. (opgave 6b)

3.2.1 Kwantificering van resultaten

Met deze resultaten in het achterhoofd is getracht om een verband te vinden met vaardigheden bij het differentiëren. Om dit te bewerkstelligen zijn de verbanden zoals deze beschreven staan in de methode (zie hoofdstuk 2) als uitgangspunt genomen.

In eerste instantie zijn voor de test kinematica de misconcepties onder één noemer gezet en zijn de bijbehorende opgaves in kolommen eronder gezet. De rijen in de tabel worden gevormd door alle leerlingen. Per leerling is vervolgens voor iedere opgave bepaald of de bewuste misconceptie aanwezig was. Als de misconceptie aanwezig was, dan werd een 1 genoteerd in de cel en anders bleef deze leeg. Als er sprake was van een kleinere of gedeeltelijke fout, dan is in sommige gevallen een 0,5 genoteerd.

Vervolgens zijn per misconceptie de getallen per kolom (dus per opgave) bij elkaar opgeteld, zodat per leerling een algeheel getal voor de bewuste misconceptie (MC1 t/m MC5) is berekend. Dit getal geeft de mate van misconceptie aan; deze kan variëren tussen 0 en het aantal opgaven dat er onder valt.

In appendix F is de complete tabel te zien die op deze manier is gemaakt. In deze tabel zijn de toegekende getallen per opgave te zien, maar is ook de genoemde optelling te zien. Steeds in de kolom "Tot.". Coherent aan de benamingen uit de methode (zie hoofdstuk 2) zijn hier ook de labels MC1 t/m MC5 aan de bewuste kolommen toegekend.

Om tot een statistische koppeling met de resultaten van de test differentiëren te komen is ook deze test op dezelfde manier getabelleerd. Per opgave zijn de gedefinieerde vaardigheden in kolommen gezet en zijn de leerlingen in de rijen te zien. Als een leerling een vaardigheid niet bleek te hebben bij de opgave dan was een 1 genoteerd; als er sprake was van een gedeeltelijke fout dan was er een 0,5 genoteerd en als de leerling de vaardigheid wel bleek te hebben dan werd een 0 genoteerd.

Vervolgens zijn ook hier extra kolommen toegevoegd die in overeenstemming met de hypothese de som van enkele vaardigheden representeren; hier zijn de labels VD1 t/m VD5 aan toegekend. Deze combinatie van vaardigheden is eerder in de methode gekoppeld aan overeenkomstige misconcepties; VD1 komt dus overeen met MC1 enzovoorts.

De volledige tabel, zoals beschreven, is te zien in appendix G. De opgaven met de bijbehorende vaardigheden zijn in de eerste kolommen te zien, de samengestelde kolommen VD1 t/m VD5 zijn in de meest rechtse kolommen te zien. Onder de tabel zijn de vaardigheden verder toegelicht, zoals beschreven in hoofdstuk 2.3.

Omdat bleek dat de misconceptie die onder MC3 valt ("Het ten onrechte overnemen van de vorm van de beweging naar vorm van de grafiek") niet voorkomt (op 1 na) is besloten om deze misconceptie niet mee te nemen in de koppeling met het differentiëren. Uiteindelijk is er dus 1 misconceptie bij gekomen en is er 1 geschrapt. In tabel 3.3 is te zien welke koppelingen tussen misconcepties kinematica en vaardigheden differentiëren er uiteindelijk zijn gezocht.

	Problemen met het discrimineren tussen helling en hoogte en veranderingen in helling en hoogte	Problemen met de interpretatie van negatieve snelheid en constante versnelling	Verwarring tussen de verschillende grootheden en de bijbehorende diagrammen	Probleem om in te zien dat een lagere snelheid ook inhoudt dat het afleggen van dezelfde weglengte langer duurt en dat bij een hogere snelheid dit korter duurt.
	MC1	MC2	MC4	MC5
VD1	2,4,6 <i>2a</i>			
VD2		1,4,7 <i>1b, 2b, 4b</i>		
VD4			1,3,4 <i>3,5c,6a</i>	
VD5				3,8 <i>4a,4b,6a,6b</i>

Tabel 3.3: Uiteindelijke gezochte koppeling tussen kinematische misconcepties en vaardigheden op het gebied van differentiëren.

3.2.2 Correlatie

Tabel 3.4: Correlaties tussen de kinematische misconcepties en vaardigheden differentiëren

	corr. MC1-VD1		corr. MC2-VD2		corr. MC4-VD4		corr. MC5-VD5	
	corr. coëf.	sign.	corr. coëf.	sign.	corr. coëf.	sign.	corr. coëf.	sign.
VWO-4	0.193	0.366	-0.289	0.170	-0.206	0.333	-0.106	0.621
VWO-6	-0.198	0.390	0.731	0.000	0.399	0.073	-0.402	0.071

Om statistische verbanden eventueel aan te tonen is ervoor gekozen om de lijsten met data aan elkaar te correleren. In de methode zijn verbanden al gelegd en tijdens de data-analyse zijn de kolommen MC1 t/m MC5 en VD1 t/m VD5 gemaakt. Vervolgens is de testgroep in twee groepen gesplitst, namelijk VWO-4 en VWO-6. Omdat VWO-4 in een ander stadium zit en bij lange na niet zoveel kennis heeft opgedaan als VWO-6 is deze splitsing ook te rechtvaardigen. Het lijkt logisch dat er in VWO-6 meer kans is op transfer dan in VWO-4; deze laatste groep is net geconfronteerd met differentiëren en heeft nog niet de tijd gehad het verband met kinematica te vinden. Het differentiëren mag op dat moment nog als een wiskundig trucje worden beschouwd.

De correlaties tussen MC1 en VD1 etc. voor zowel VWO-6 als VWO-4 zijn in tabel 3.4 te zien.

Een aantal zaken vallen hier direct in op. Ten eerste zijn alle correlaties voor de testgroep VWO-4 niet significant. Alle vier de correlaties zijn lager dan 0,2 of zelfs negatief. Dit duidt erop dat in deze testgroep statistisch geen verband kan worden gevonden. Dit resultaat is in overeenstemming met de verwachtingen; in VWO-4 is de kennis van differentiëren prematuur en is er nog geen tijd geweest om dit te koppelen aan de kennis van kinematica.

In de groep VWO-6 zijn daarentegen wel enkele opvallende resultaten te bespeuren. In de eerste plaats is er een hoge correlatie tussen MC2 en VD2; omdat de correlatie hier 0.73 is en dit significant is binnen de 0.01 norm kan hier een verband worden vastgesteld. Klaarblijkelijk hebben goede concepties binnen MC2 een positieve invloed op goede concepties binnen VD2 en/of andersom.

Naast deze hoge correlatie zijn twee lagere correlaties te zien binnen de VWO-6 groep. Aan de ene kant is er een correlatie van 0,4 tussen MC4 en VD4 en een correlatie van -0,4 tussen MC5 en VD5. De eerstgenoemde correlatie zou kunnen duiden op een licht verband tussen MC4 en VD4 en de laatstgenoemde op een omgekeerd verband tussen MC5 en VD5. Dit is opmerkelijk, omdat in de hypothese alleen directe verbanden zijn geprobeerd te vinden.

De resterende correlatie (MD1-VD1) is net zoals de correlaties binnen de testgroep VWO-4 verwaarloosbaar. Hier kan worden geconcludeerd dat een verband niet gevonden is.

In de conclusie en discussie zal de betekenis van deze correlatie(s) worden geïnterpreteerd. Vervolgens zullen conclusies worden getrokken uit deze interpretatie en zullen implicaties worden geformuleerd. Tezamen met de bevindingen uit de mondelinge testen zal een trend worden geformuleerd. Uiteindelijk zal een voorstel worden gedaan welke aanpassingen aan het wiskunde en natuurkunde-onderwijs kunnen worden gedaan om het algehele begrip op het gebied van kinematica te verbeteren.

3.3 Vergelijking mondelinge en schriftelijke testen

De resultaten die zijn verkregen uit de mondelinge test (kwalitatief) stemmen in veel opzichten overeen met de resultaten die zijn verkregen uit de schriftelijke testen (kwantitatief).

- Opgaven waarbij sprake is van standaardsituaties (rechte lijnen) in kinematische diagrammen worden meestal correct begrepen. Zodra er sprake is van gekromde lijnen, dan gaan zowel de elementaire vaardigheden (de vraag waar er sprake is van stilstand in een x-t diagram bijvoorbeeld) als de gevorderde vaardigheden (de vraag wanneer er sprake is van versnelling in een x-t diagram) de mist in.
- De misconceptie waarbij de betekenis van negatieve snelheid en versnelling niet wordt onderkend blijkt in alle testen juist relatief vaak voor te komen.
- De misconceptie waarbij de vorm van de beweging wordt overgenomen naar de vorm van de grafiek blijkt in beide testresultaten niet voor te komen.
- De misconceptie waarbij helling en hoogte worden verward blijkt zowel in de mondelinge als in de schriftelijke testresultaten voor te komen.
- Een goed begrip van kinematica blijkt vaak hand in hand te gaan met een goed begrip van differentiëren. Andersom blijkt vaak dat goede vaardigheden bij het differentiëren niet direct uitmonden in een beter begrip van kinematica; waar differentiëren vaak het toepassen van een aantal trucjes is, bevordert dit niet per definitie het begrip van kinematica.

Conclusies, discussie en aanbevelingen

4.1 Conclusies

Het onderzoek is begonnen met het stellen van een hoofdvraag en enkele deelvragen. Na het onderzoeken van bestaande literatuur, het plannen van een onderzoek, het ontwerpen van meerdere testen, het schriftelijk en mondeling testen van leerlingen, het verwerken van onderzoeksresultaten en het interpreteren ervan is het zaak om het antwoord op de gestelde onderzoeksvraag te formuleren.

De hoofdvraag luidt:

”Neemt (expliciet) begrip binnen het wiskundige onderwerp differentiëren misconcepties binnen het onderwerp kinematica weg?”

Om deze vraag te beantwoorden is het onderzoek gericht op het begrip van leerlingen van zowel kinematica als differentiëren en is geprobeerd verbanden te zoeken tussen deze beide gebieden. Dit is op verschillende manieren gedaan en de resultaten, zoals in vorige hoofdstukken beschreven, doen de conclusie trekken dat deze vraag in enkele opzichten positief kan worden beantwoord. Om dit antwoord toe te lichten wordt per deelvraag beschreven wat de gevonden resultaten betekenen en wat hieruit kan worden geconcludeerd.

Welke misconcepties op het gebied van kinematica zijn er bekend vanuit de literatuur?

Deze deelvraag is onderzocht door een heel aantal artikelen te behandelen die over dit onderwerp gingen. In het hoofdstuk over literatuuronderzoek is dit nader toegelicht en is een totale lijst met misconcepties opgesteld. De volgende misconcepties uit de literatuur zijn uiteindelijk gebruikt om mee verder te gaan:

1. “Problemen met de interpretatie van negatieve snelheid en constante versnelling”. Deze misconceptie kan zowel te maken hebben met het omzetten van werkelijkheid naar grafische representatie als andersom. (groep 1 en 2)
2. “Verwarring tussen de verschillende grootheden en de bijbehorende diagrammen (plaats-tijd, snelheid-tijd, versnelling-tijd).” (groep 2)
3. “Ten onrechte overnemen van de vorm van de beweging naar vorm van de grafiek”. Deze misconcepties heeft te maken met het interpreteren van de werkelijkheid en omzetten naar een grafische representatie. (groep 2)
4. “Problemen met het discrimineren tussen helling en hoogte en veranderingen in helling en hoogte.” Deze misconceptie heeft te maken met het interpreteren van een grafische representatie en het omzetten naar de realiteit (groep 1)

Is er een verschil wat betreft het aantal misconcepties binnen de kinematica tussen leerlingen die weinig tot geen kennis van differentiëren hebben en leerlingen die veel kennis over differentiëren hebben?

Om deze vraag te kunnen beantwoorden moet er worden teruggegaan naar hoofdstuk 3.2. Alvorens er een koppeling werd gelegd met het onderwerp differentiëren zijn de resultaten voor

zowel de groep VWO-4 als VWO-6 op een rij gezet en besproken. De groep VWO-6 was op het moment van testen met alle facetten van het onderwerp differentiëren geconfronteerd, terwijl de groep VWO-4 alleen de grondbeginselen was bijgebracht. Beide groepen hadden het volledige onderwerp kinematica al gehad, omdat dit onderwerp aan het begin van VWO-4 al helemaal wordt besproken.

Wat opviel was het feit dat voor 6 van de 8 opgaven de resultaten zeer vergelijkbaar waren. Statistisch gezien waren er in beide groepen bij benadering evenveel fouten gemaakt; zelfs de mate waarin de verschillende misconcepties naar voren kwamen kwam in deze opgaven goed overeen.

Bij opgave 1 was er sprake van dat er in VWO-4 minder fouten werden gemaakt. Substantieel minder mensen in VWO-4 spreidden hier de misconceptie over negatieve snelheid tentoon; een opmerkelijk feit.

Aan de andere kant bleek opgave 8 in VWO-6 een stuk beter te zijn gedaan. In de groep VWO-4 hield bijna de helft van de leerlingen geen rekening met het feit dat snelheid implicaties heeft voor de tijd waarin een afstand wordt afgelegd, terwijl de opgave in de groep VWO-6 substantieel meer goede concepties naar voren bracht.

Met deze resultaten in de hand kan deze deelvraag worden beantwoord met "gedeeltelijk". Over het algemeen kwamen de prestaties op de schriftelijke test overeen, maar op 2 gebieden waren er verschillen te vinden. Er kunnen anderzijds geen algemene conclusies worden getrokken over het effect van de kennisvoorsprong van VWO-6 op het gebied van differentiëren. Voor specifiekere koppelingen moet worden gekeken naar de individuele gevallen.

Is er een koppeling tussen het begrip van leerlingen aangaande bepaalde aspecten binnen het onderwerp differentiëren en bepaalde aspecten binnen het onderwerp kinematica?

Om een antwoord te formuleren op deze deelvraag kunnen zowel de resultaten uit de mondelinge testen als de resultaten uit de schriftelijke testen worden aangevoerd. Tijdens de mondelinge testen werden enkele interessante zaken waargenomen.

De volgende conclusies kunnen uit resultaten van de mondelinge testen worden getrokken. Aangezien er geen harde bewijzen zijn hiervoor en er ook geen statistische verbanden zijn aangetoond, gaat het hier om zaken die opvielen en die leidden tot de volgende vermoedens:

- De koppeling tussen het correct interpreteren van gekromde en op-en-neer gaande lijnen in kinematische grafieken (grafieken die niet bestaan uit rechte lijnen en standaard figuren) enerzijds en het goed grafisch kunnen differentiëren van wiskundige grafieken anderzijds. Dit laatste omvat vaardigheden als het inzicht dat een top, dal of zadelpunt resulteert in een nulpunt in de afgeleide, het inzicht dat een dalende grafiek resulteert in een negatieve afgeleide en andersom. De wiskundige vaardigheden lijken hier een vereiste te zijn voor de kinematische conceptie, maar geen garantie.
- De koppeling tussen enerzijds het inzicht dat stilstand een momentane situatie kan betreffen (dat bij een top of dal in een x - t diagram een object stil staat) en anderzijds het inzicht dat toppen en dalen resulteren in nulpunten in de afgeleide en andersom. Ook hier geldt dat wiskundige vaardigheden hier een vereiste te zijn voor de kinematische conceptie, maar geen garantie.
- De koppeling tussen enerzijds het inzien van versnelling in een x - t diagram en anderzijds het een zeer goede conceptie van het differentiëren.
- De koppeling tussen enerzijds het inzicht dat versnelling de afgeleide van snelheid is en anderzijds een zeer goede conceptie van differentiëren.
- De koppeling tussen enerzijds het inzicht wat versnelling precies inhoudt en anderzijds een zeer goede conceptie van differentiëren.

Naast deze vermoedens die naar aanleiding van de mondelinge testen zijn geformuleerd is er

ook een statistische analyse uitgevoerd op de data die is verkregen uit de schriftelijke testen. Uit deze data zijn drie verbanden verkregen. Eén verband dat statistisch sterk wordt ondersteund en twee minder sterke, maar evenwel significante verbanden die niet zodanig sterk worden ondersteund, maar wel reden geven tot een vermoeden.

Beide verbanden werden alleen gevonden in de groep VWO-6. Dit werd verwacht, omdat de kennis over het differentiëren in de groep VWO-4 als prematuur kan worden betiteld. Het leek van tevoren onwaarschijnlijk dat de kennis van het differentiëren voor transfer op specifieke gebieden van kinematica zou zorgen bij deze groep; correlaties waren daarom ook onwaarschijnlijk. Voor VWO-6 werd dit meer verwacht, omdat uit het boek ook bleek dat het differentiëren binnen de context van plaats, snelheid en versnelling wordt uitgelegd en de ervaring met het differentiëren een stuk groter is.

Het sterkste verband, dat is gevonden is beschreven als de correlatie MC2-VD2. Deze correlatie toont een statistisch verband aan tussen de misconceptie waarbij negatieve snelheid en versnelling niet worden onderkend enerzijds en de volgende vaardigheden op het gebied van differentiëren anderzijds:

- Inzien dat een dalende functie resulteert in een negatieve afgeleide. (Opgave 1b)
- Bij het bepalen van een helling in een punt inzien dat de helling daalt, het getal negatief is. (Opgave 2b)
- Inzien dat een negatieve afgeleide betekent dat de primitieve dalend is. (Opgave 4b)

Er is dus een sterke koppeling tussen begrip van de fysische betekenis van een grootte die zowel positief als negatief kan zijn en het wiskundige begrip helling, wat ook geen absoluut begrip is. Aan de hand van deze koppeling kan helaas geen causaal verband worden afgeleid; beide begrippen zouden elkaar (op basis van de gevonden statistiek) kunnen beïnvloeden. De implicaties van deze correlatie zullen bij de discussie en de aanbevelingen worden beschreven.

De tweede koppeling is een correlatie die als zwak kan worden betiteld. Er lijkt een verband te bestaan tussen enerzijds de misconceptie waarbij de verschillende grootheden en diagrammen werden verward en anderzijds de volgende vaardigheden op het gebied van differentiëren:

- Inzien dat een nulpunt betekent dat er een extremum aanwezig is in de primitieve. (opgave 6a)
- Inzien dat een extremum of zadelpunt in een functie resulteert in een nulpunt in de afgeleide (opgave 3 en opgave 5c)

Gezien de significantie kan hier geen sterk verband worden geconstateerd, maar kan wel een vermoeden worden uitgesproken. Statistisch gezien hebben beide zaken invloed op elkaar.

De derde koppeling is het meest opmerkelijk. De koppeling tussen MC5 en VD5 blijkt negatief gecorreleerd met een significantie die een daadwerkelijke koppeling doet vermoeden. Met andere woorden, de misconceptie waarbij de implicaties van veranderende snelheid niet goed worden geïnterpreteerd wordt negatief beïnvloed door de volgende vaardigheden op het gebied van differentiëren:

- In staat zijn om terug te redeneren van een simpele afgeleide (horizontale lijn) naar de oorspronkelijke functie (opgave 4a).
- Inzien dat een negatieve afgeleide betekent dat de oorspronkelijke functie een dalend patroon oplevert. (opgave 4b)
- Inzien dat een nulpunt in de afgeleide betekent dat de primitieve daar een extremum heeft. (opgave 6a)
- Inzien dat een stijgend nulpunt betekent dat de primitieve daar een dal heeft en dat een dalend nulpunt betekent dat de primitieve daar een top heeft. (opgave 6b)

Klaarblijkelijk heeft een goede kennis van het één een negatief effect op de kennis van het ander, zonder dat er een uitspraak kan worden gedaan over de causaliteit. In de discussie zal

hier verder op worden ingegaan.

4.2 Discussie

Onder deze kop zullen de conclusies zoals ze zijn getrokken worden toegelicht en zal een verklaring worden gegeven.

Voordat de testen zijn afgenomen en de resultaten zijn verwerkt en geïnterpreteerd is een vermoeden opgesteld wat betreft de koppelingen tussen kinematica en differentiëren.

- De verschillende misconcepties zijn gekoppeld aan een aantal vaardigheden op het gebied van differentiëren. Hierbij zijn concrete vermoedens uitgesproken over koppelingen. (zie Methode)
- Het vermoeden was aanwezig dat in VWO-4 de mate van transfer minder zou zijn dan in VWO-6 en de koppeling daarom minder zou zijn.

Dat opgave 1 in de test kinematica in de groep VWO-4 substantieel beter wordt gedaan is moeilijk te verklaren. Leerlingen in de groep VWO-4 zien beter in dat er sprake is van negatieve snelheid als de beweging omdraait. Misschien speelt mee dat voor de VWO-4 leerlingen de stof verser in het geheugen zit. Tijdens de lessenserie kwam wel naar voren dat snelheid een vectorgrootte is en hebben meer leerlingen uit VWO-4 nog in hun geheugen zitten wat negatieve snelheid inhoudt.

Het feit dat opgave 8 in de test kinematica in de groep VWO-6 substantieel beter is gedaan is goed te verklaren. Deze opgave vereist een inzicht in het feit dat bij gelijke afstand in een v-t diagram de oppervlakte onder de grafiek gelijk moet zijn. Een vaardigheid die binnen het onderwerp integreren naar voren komt. In VWO-6 heeft men het onderwerp integreren al gehad en heeft men meer ervaring met de implicaties van oppervlakte onder een grafiek.

Uit de mondelinge test kwam naar voren dat de leerlingen massaal een betere conceptie van hoogte en helling hadden als er alleen sprake was van rechte lijnen. Zodra een grafiek niet meer uit rechte lijnen bestond werden er veel meer fouten gemaakt, duidelijk was hier te zien dat het dan ging om begripsfouten en niet om slordigheidsfouten. Het was zeer opvallend dat leerlingen uit VWO-6 substantieel beter inzagen dat in een x-t diagram een top en een dal stilstand betekenen. De mensen die dit beter deden, waren ook stuk voor stuk goed in staat om op een goede manier te redeneren bij de opgaven over differentiëren.

Deze observaties geven reden om te denken dat de kinematica voor VWO-4 op begripsniveau bestaat uit een set van standaardtrucs. Zolang er sprake is van standaardsituaties (rechte lijn in het x-t diagram betekent een eenparige beweging, een rechte lijn in het v-t diagram betekent een eenparig versnelde beweging) dan is er sprake van een goed begrip, maar zodra een grafisch beschreven beweging niet binnen de standaard kaders valt dan is een groot deel van het begrip weg. Iets wat bij de groep VWO-6 niet het geval is. Vermoedelijk is dit te danken aan het betere inzicht van het differentiëren en het feit dat er transfer heeft plaatsgevonden vanuit het differentiëren. De ervaring met gekromde lijnen en niet-standaard situaties binnen het differentiëren lijken een zeer positieve invloed te hebben op het begrip van kinematische grafieken.

Een ander opvallende zaak bij de mondelinge testen was het feit dat het begrip van de grootte versnelling heel simplistisch is. Mensen hebben massaal niet door wat de grootte überhaupt inhoudt en ook de koppeling met de snelheid wordt niet ingezien. Ook enkele leerlingen die goed in staat zijn om te differentiëren en vanuit een afgeleide terug te redeneren doen dit fout. Op een goede manier inzien wanneer er sprake is van een versnelling bleek alleen mogelijk bij een persoon die ook een zeer goede conceptie van het differentiëren had. Uiteraard kan hier geen direct verband worden gevonden, maar het geeft wel aan dat op dit gebied een dieper

inzicht nodig is. Het vermoeden bestaat dat er transfer kan plaatsvinden vanuit het omgaan met toenemend stijgend en toenemend dalende grafieken en het inzien wanneer er sprake is van versnelling.

Het laatste opvallende punt is het feit dat bijna niemand inziet dat versnelling de afgeleide van snelheid is. Bij het bekijken van de wiskundeboeken zou de afgeleide wel binnen die context besproken moeten zijn. Klaarblijkelijk heeft op dit punt weinig tot geen transfer plaatsgevonden.

Conform het vermoeden blijkt dat in de groep VWO-4 geen significante correlaties aanwezig zijn, maar dat in de VWO-6 groep juist wel correlaties aanwezig zijn: 1 zeer significante correlatie en 2 minder significante correlaties.

De drie statistische verbanden die zijn gevonden in de resultaten van schriftelijke testen zijn interessant om nader te bekijken. De correlatie MC2-VD2 blijkt sterk en een verband lijkt bijna zeker. De vraag is alleen of het verband causaal is, en zo ja, welke kant het op werkt. Aangezien dit onderzoek gericht is op de vraag of het begrip van differentiëren invloed heeft op de concepties van kinematica, is het voor de hand liggend om ook op die manier naar het statistische verband te kijken.

Het is uiteraard niet met zekerheid te zeggen, maar het lijkt er sterk op dat een goed begrip van de onder VD1 beschreven gebieden van het differentiëren een positieve invloed hebben op de conceptie die is beschreven onder MC1. Met andere woorden: als leerlingen goed in staat zijn om in te zien dat een helling negatief is als de grafiek afneemt en dat een afnemende grafiek resulteert in een negatieve afgeleide, dat het inzicht in de betekenis van negatieve snelheid en negatieve versnelling dan ook beter is. De correlatie is daarom in overeenstemming met het vooraf geformuleerde vermoeden.

Op dezelfde wijze kan het tweede verband (MC4-VD4) worden geanalyseerd. Dit verband is een stuk minder solide aangetoond, maar hier kan een voorzichtig vermoeden worden geuit. Als leerlingen op een goede manier in staat zijn om in te zien dat een top resulteert in een nulpunt in de afgeleide en andersom dan lijkt dit een positieve invloed te hebben op de misconceptie waarbij de verschillende grootheden worden verward. Dit verband heeft een minder logische ruggegraat dan het eerste statistische verband, maar de positieve invloed lijkt aanwezig.

Het derde verband (MC5-VD5) doet vermoeden dat een betere vaardigheid bij het terugredeneren vanuit een afgeleide ervoor zorgt dat het begrip wat betreft de consequenties van snelheid achteruit gaat. Het vermoeden was vooraf aanwezig dat de vaardigheden uit het differentiëren een positieve invloed zouden hebben op de conceptie van kinematica, maar het tegendeel lijkt waar. Het vermoeden kan daarom worden geuit dat er sprake is van negatieve transfer; een effect waarbij een gedetailleerder begrip van het differentiëren er juist voor zorgt dat het begrip van kinematica achteruit gaat op dit specifieke gebied. Een andere factor die mee zou kunnen spelen is het feit dat bij deze misconceptie kinematica een beter begrip van oppervlakte (integreren) nodig is. Dit is niet hetzelfde als het terugredeneren vanuit de afgeleide.

De rest van de gezochte verbanden blijken statistisch niet aantoonbaar te zijn en kunnen de vooraf gedefinieerde verbanden daarom ook niet hard maken.

4.3 Aanbevelingen

De gevonden resultaten geven aanleiding tot het geven van enkele interessante aanbevelingen voor een beter onderwijs in de kinematica.

Om te komen tot een beter begrip van snelheid en versnelling, in het bijzonder het begrip van negatieve snelheid en versnelling kan het volgende worden voorgesteld:

- Het expliciet benoemen van deze grootheden als zijnde vectorgrootheden. Omdat plaats, snelheid en versnelling over het algemeen 1-dimensionaal worden benaderd in het natuurkunde-onderwijs wordt het vectorkarakter vaak onderbelicht. Omdat ook op 1-dimensionale schaal er sprake is van een vectorgrootheid (het getal kan positief en negatief zijn) kan

dit een beter inzicht geven in de betekenis van negatieve snelheid en versnelling. Ook kan op deze manier de betekenis van negatieve snelheid en versnelling worden benadrukt en onderstreept.

- Vectorrekening betrekken bij het benaderen van het onderwerp differentiëren. Strict gezien is de afgeleide van een functie een 1-dimensionale gradiënt van een functie. Uiteraard hoeft het onderwerp gradiënt niet te worden behandeld, maar er kan wel nadruk op worden gelegd dat zowel een functie als zijn afgeleide vectoren zijn. Dit zou een beter begrip van de betekenis van de afgeleide kunnen geven.

Aan de hand van het tweede statistische verband (MC4-VD4) kan het volgende worden geprobeerd in de klassenpraktijk:

- Expliciet oefenen van vaardigheden bij het interpreteren van grafieken en het omzetten naar de werkelijkheid of afgeleide grafieken. Dit kan zowel bij wiskunde als bij natuurkunde worden gedaan. Er kan worden geoefend om in te zien dat toppen in x-t grafieken resulteren in nulpunten in corresponderende v-t diagrammen en andersom.

Ook de negatieve correlatie (MC5-VD5) geeft aanleiding tot een andere benadering:

- Het expliciet koppelen van vaardigheden differentiëren aan betekenisvolle elementen binnen de kinematica. Er valt te denken aan het expliciet aangeven dat de snelheidsfunctie de afgeleide van de plaatsfunctie is, maar ook dat een top in een plaats-tijd grafiek exact hetzelfde tot gevolg heeft als een top in een x-y grafiek, namelijk dat de afgeleide daar een nulpunt heeft. Het gaat er om dat de abstracte ‘trucs’ binnen het differentiëren concreet worden geadresseerd binnen de kinematica.

Op basis van de vermoedens die naar voren kwamen bij de mondelinge testen kunnen geen directe en concrete voorstellen worden gedaan. Wel kan een algemene aanbeveling worden gedaan om op zowel het gebied van differentiëren als het gebied van kinematica een beter begrip te bereiken.

- Op hetzelfde moment plannen van zowel het onderwerp differentiëren en het onderwerp kinematica. Wellicht kan er iets eerder met differentiëren worden begonnen. Een argument om dit te doen is ook dat bij het onderwerp differentiëren kinematica als context wordt gekozen. Bij het tegelijk behandelen worden leerlingen sterk geconfronteerd met de koppeling tussen deze twee. De kans op transfer wordt daarom verhoogd.
- Het benadrukken van snelheid en versnelling als grootheden die momentaan kunnen zijn. Hierbij kan worden benadrukt dat de afgeleide ook in een punt kan worden bepaald. Tijdens de natuurkundeles moet dus worden teruggegrepen op “de afgeleide”.
- Het benadrukken van het feit dat rechte lijnen in kinematische grafieken specifieke gevallen zijn, waarin sprake is van een lineaire functie. Hierbij kan worden benadrukt dat de meeste bewegingen geen rechte lijnen zijn.
- Het expliciet benaderen van plaats, snelheid en versnelling als de respectievelijke afgeleiden van elkaar.

Over het algemeen kan naar aanleiding van de verkregen resultaten de aanbeveling worden gedaan dat er een nauwere samenwerking wordt gevonden tussen het vak wiskunde en het vak natuurkunde op dit gebied. De meeste simpele vorm is het afstemmen van de tijdsplanning, maar in verdergaande afstemmingen kunnen bovenstaande aanbevelingen worden aangemeten. Uiteraard betekent dit niet dat succes is verzekerd, maar de aanbevelingen kunnen ook worden meegenomen in verder onderzoek.

Bibliografie

- Beichner, R. J. (1994). Testing student interpretation of kinematics graphs. *American Journal of Physics*, 62(8), 750–762.
- Bransford, J. (2000). *How people learn: Brain, mind, experience, and school*. Washington, D.C.: National Academies Press.
- Byrnes, J. P. (1996). *Cognitive development and learning in instructional contexts*. Allyn & Bacon.
- Daemen, J., & Roorda, G. (2008). Handboek vakdidactiek wiskunde. In A. Van Streun, B. Zwaneveld, & P. Drijvers (Eds.), (chap. De afgeleide in breed perspectief). Utrecht: ELWIEr/Freudenthal instituut.
- Doorman, L. M. (2000). Natuurkunde en wiskunde, praktisch hetzelfde?! *Nieuwe Wiskrant*, 4, 4–9.
- Doorman, L. M. (2003). Inzicht in snelheid en afgelegde weg via grafieken. *Tijdschrift voor Didactiek der Beta-wetenschappen*, 1, 1–25.
- Hale, P. (2000). Kinematics and graphs: Students' difficulties and cbls. *Mathematics Teacher*, 93(5), 414–417.
- McDermott, L. C., Rosenquist, M. L., & Zee, E. H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. *American Journal of Physics*, 55(6), 503–513.
- Thorndike, E. L. (1913). Educational psychology (vols. 1 and 2). *New York: Columbia University, Teachers College*.
- Thorndike, E. L., & Woodworth, R. S. (1901). The influence of improvement in one mental function upon the efficiency of other functions. ii. the estimation of magnitudes. *Psychological Review*, 8(4), 384–395.
- Trowbridge, D. E., & McDermott, L. C. (1980). Investigation of student understanding of the concept of velocity in one dimension. *American Journal of Physics*, 48(12), 1020–1028.
- Trowbridge, D. E., & McDermott, L. C. (1981). Investigation of student understanding of the concept of acceleration in one dimension. *American Journal of Physics*, 49(3), 242–253.

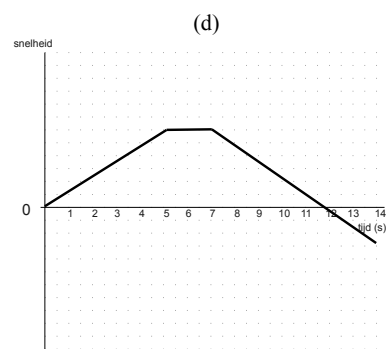
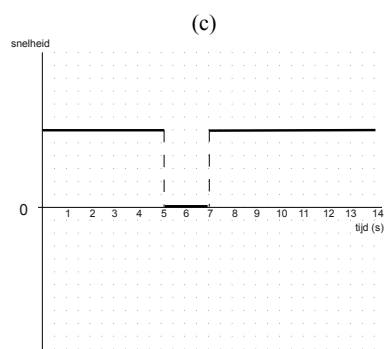
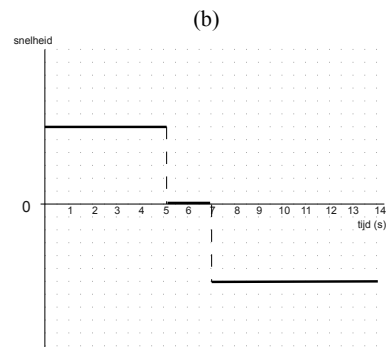
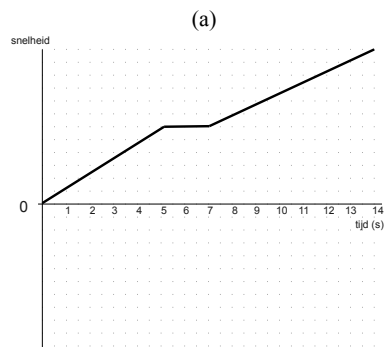
Test kinematica

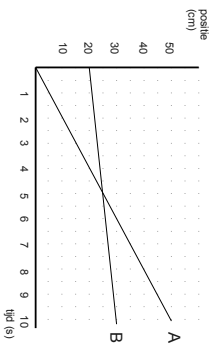
Test beweging en snelheid

Opgave 1. Touwtrekken

Twee groepen gaan tegen elkaar touwtrekken. Als het startschot heeft geklonken is de groep die rechts staat aan de winnende hand en beweegt het touw met een constante snelheid naar rechts. Na 5 seconden blijft het touw ongeveer 2 seconden in evenwicht, waarna de linkse groep het touw naar links weet te bewegen. Ze doen dit ongeveer 10 seconden met constante snelheid, zodat ze winnen.

Welke van de volgende snelheid-tijd grafieken komt het beste overeen met deze beschrijving? *Licht je antwoord toe!*



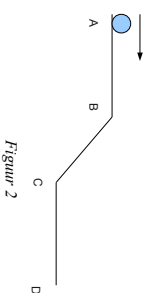


Figuur 1

Opgave 2. Twee auto's

In figuur 1 zijn de bewegingen van twee auto's (auto A en auto B) weergegeven. Beide auto's rijden op dezelfde weg. Welke van de twee auto's heeft op het tijdstip $t = 2s$ de grootste snelheid? *Licht je antwoord toe!*

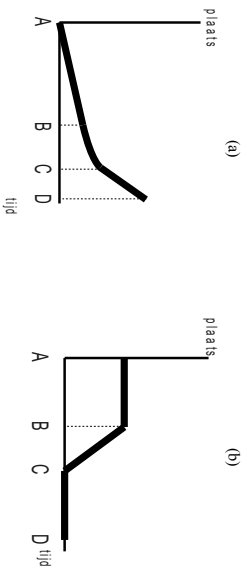
- A) Auto A.
- B) Auto B.
- C) Beide auto's gaan even snel.



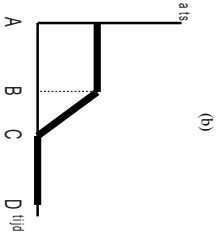
Figuur 2

Opgave 3. Balletje op een helling

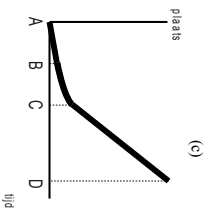
Zie voor deze opgave figuur 2. Een balletje krijgt bij punt A een duwje, zodat deze naar rechts begint te rollen. Het balletje rolt vervolgens van de helling af en rolt daarna weer verder naar D. Ga uit van een beweging die geen wrijving ondervindt. Welk plaats-tijd diagram past het beste bij de beweging van het balletje? *Licht je antwoord toe.*



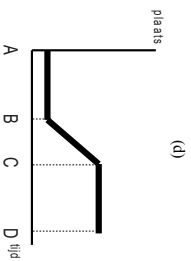
(a)



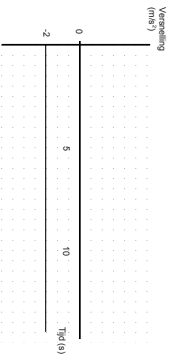
(b)



(c)



(d)

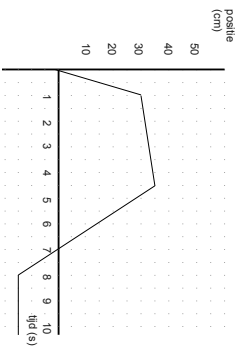


Figuur 3

Opgave 4. Versnellen of vertragen

Een auto heeft een beginsnelheid van 20 m/s. In figuur 3 is de versnelling-tijd grafiek te zien van deze auto. Welk van de volgende vier uitspraken hoort bij deze grafiek? *Licht je antwoord toe!*

- A) De auto gaat steeds langzamer rijden, tot deze tot stilstand komt.
- B) De auto blijft even snel rijden.
- C) De auto gaat langzamer rijden, komt op een gegeven moment tot stilstand en versnelt dan in tegenovergestelde richting.
- D) De auto gaat steeds sneller rijden.



Figuur 4

Opgave 5. Speelgoedtreintje

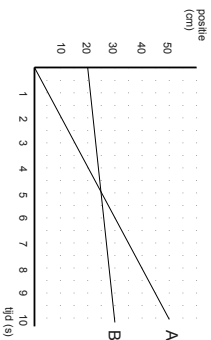
In figuur 4 is de beweging van een speelgoed treintje over een recht stuk spoor grafisch weergegeven in een plaats-tijd diagram. Op welk moment staat het treintje stil? *Licht je antwoord toe!*

- A) Op tijdstip $t = 0,5$ s.
- B) Op tijdstip $t = 4$ s.
- C) Op tijdstip $t = 7$ s.
- D) Op tijdstip $t = 9$ s.

Natuurkunde

4

Test beweging



Figuur 5

Opgave 6. Skelters

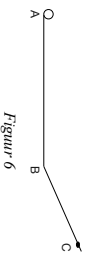
In figuur 5 is de beweging van twee skelters, die op dezelfde weg rijden, weergegeven; skelter A en skelter B. Is er een moment waarop beide skelters even snel gaan?

- A) Ja. *Geef aan op welk tijdstip en licht toe waarom.*
- B) Nee. *Licht toe waarom.*

Natuurkunde

5

Test beweging

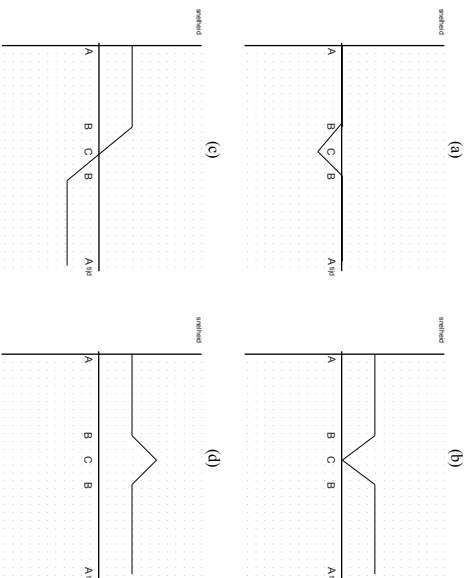


Figuur 6

Opgave 7. Bal op een baan

In figuur 6 is schematisch een baan weergegeven, waarop een balletje gaat rollen. Op tijdstip $t = 0$ s wordt deze de baan op getuwd en krijgt daarmee een beginsnelheid. Het balletje begint naar rechts te rollen en gaat op een gegeven moment een helling op, vanaf punt B. Op punt C draait de beweging van het balletje om en rol het balletje weer terug. Ga uit van een beweging die geen wrijving ondervindt.

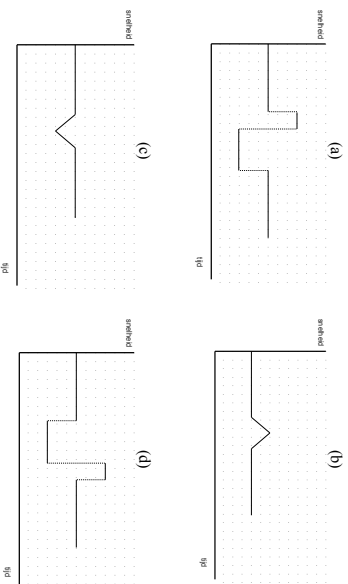
Welke snelheid-tijd grafiek geeft het beste de beweging van het balletje weer?
Licht je antwoord toe!



Opgave 8. Fietstocht

Frits gaat een fietsocht maken en legt een mooi parcours af. De eerste 3 km fietst hij vlak, dan rijdt hij een berg op om er vervolgens ook vanaf te rijden. Zowel de klim als de afdaling zijn ongeveer 1 km lang. De laatste 3 km fietst hij weer vlak naar huis. Ga er vanuit dat Frits het hele parcours dezelfde kracht op zijn pedalen zet en dat de berg overal even steil is.

Welke van onderstaande snelheid-tijd grafieken komt volgens jou het beste overeen met de beschrijving van de fietsocht van Frits? *Licht je antwoord toe.*



Einde van deze test.

Test differentiëren

Test differentiëren

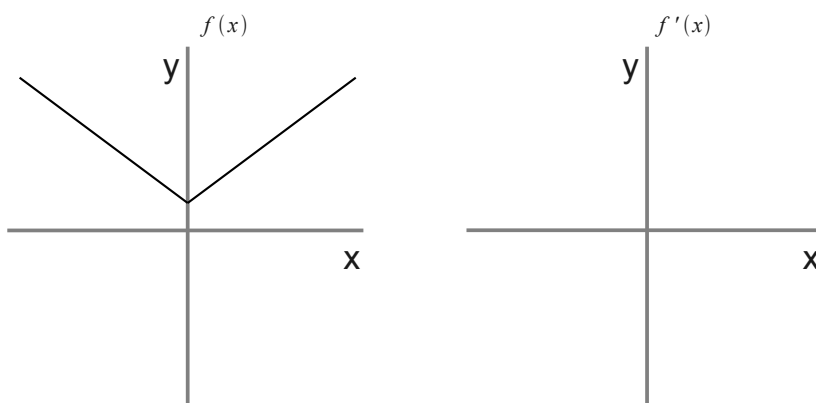
Lees de vragen goed!

Naam:
Klas:.....

Opgave 1.

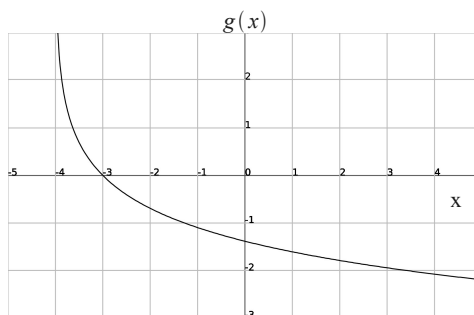
In het linker assenstelsel is de grafiek, die hoort bij de functie $f(x)$ gegeven.

- Teken in het rechter assenstelsel zo goed mogelijk **globaal** de afgeleide $f'(x)$ van deze functie. Het gaat daarbij vooral om de vorm.



Opgave 2.

Gegeven is de functie $g(x)$ in de volgende figuur.

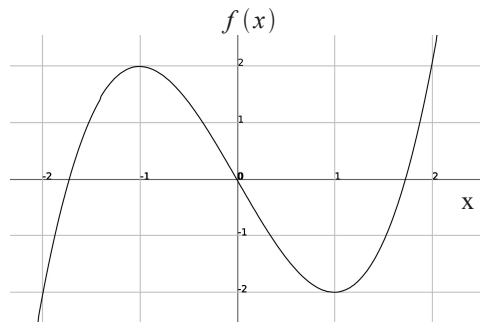


- Bepaal de helling in het punt $x=1$; laat in de figuur zien hoe je dit gedaan hebt en noteer je antwoord.

.....

Opgave 3.

In onderstaande grafiek is een deel van de functie $f(x)$ grafisch weergegeven:



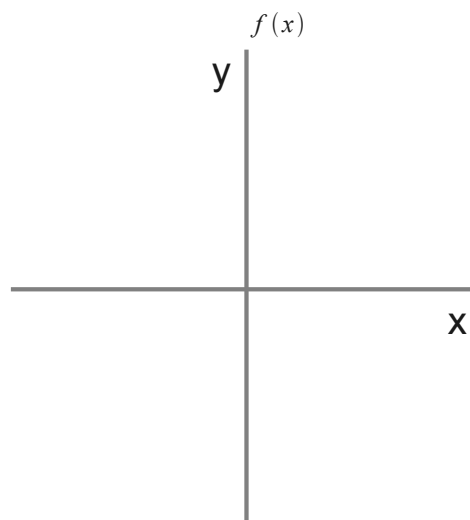
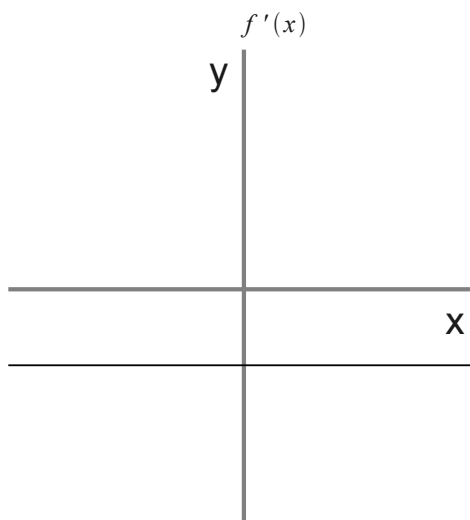
- Geef aan op welke x-coördinaten de *afgeleide* van deze functie de horizontale as snijdt:

.....

Opgave 4.

Stel: een functie $f(x)$. In de linker grafiek is de afgeleide $f'(x)$ globaal weergegeven.

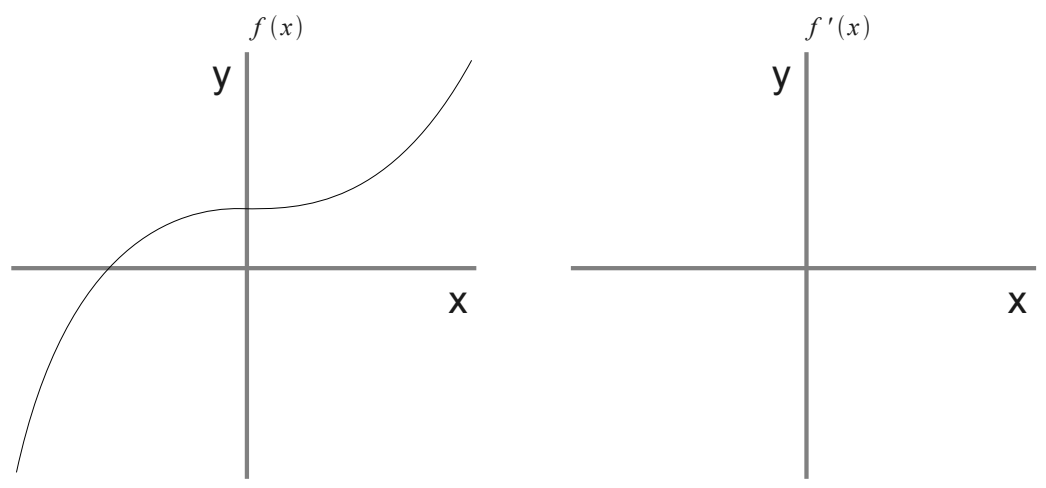
- Teken in de rechter grafiek *globaal* hoe de functie $f(x)$ er volgens jou uit *kan* zien.



Opgave 5.

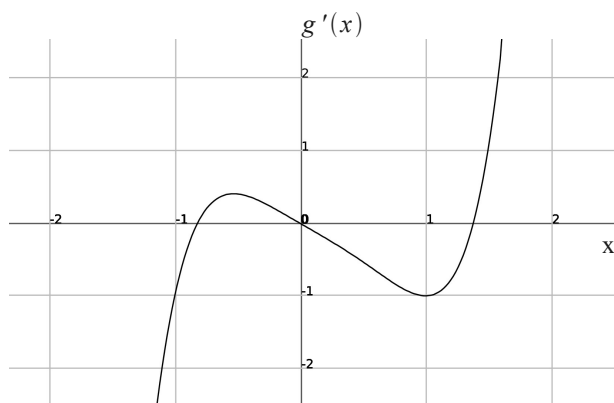
In het linker assenstelsel is een grafiek gegeven die hoort bij de functie $f(x)$.

- Teken in het rechter assenstelsel zo goed mogelijk **globaal** de afgeleide $f'(x)$ van deze functie. Het gaat daarbij vooral om de vorm.



Opgave 6.

Stel: een functie $g(x)$. In onderstaande grafiek is de afgeleide van deze functie, $g'(x)$, weergegeven.



- Geef aan bij welke x-coördinaten van $g(x)$ er sprake is van een top of een dal. Geef ook aan of het een top of een dal betreft.

.....

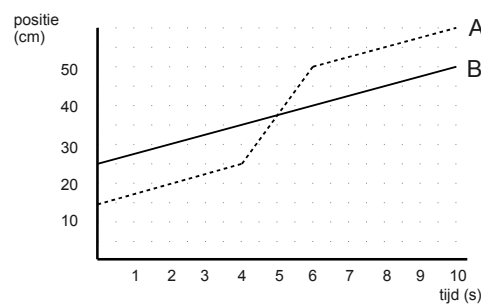
Einde van deze test.

Mondelinge test

Mondelinge test beweging, snelheid en differentiëren

Handleiding voor degene die de test afneemt.

Opgave 1. Beweging van twee speelgoedauto's



Tegen de leerling zeggen:

- Gegeven is het volgende diagram met de bewegingen van twee speelgoedauto's die over dezelfde weg rijden.
- Geef aan waar beide auto's even snel gaan en geef aan waarom je dat denkt.
- Denk hardop na en wijs aan waaraan je het antwoord op de vraag kunt zien.

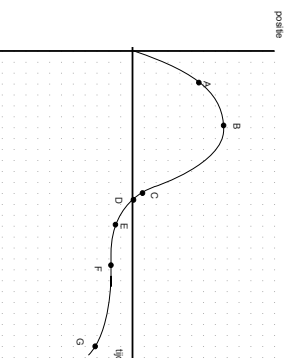
Goede concepties:

- De leerling geeft er blijk van te doorzien dat het om een positie-tijd diagram gaat en dat de snelheid in de grafiek de helling moet zijn. (correcte conceptie)
- De leerling wijst de tijdspannen tussen 0 en 4 seconde en de tijdspanne tussen 6 en 10 seconde aan. (correcte conceptie)

Misconcepties:

- De leerling geeft er geen blijk van te zien dat het om een positie-tijd diagram gaat.
- De leerling wijst het tijdstip 5 seconde aan, omdat de lijnen elkaar daar kruisen. (misconceptie).
- Eventuele andere misconcepties: ze gaan geen enkele keer even snel.

Opgave 2. Beweging van een object



Mededelingen voor de leerling:

- In het volgende diagram is de beweging van een object schematisch weergegeven.
- Geef aan op welk punt of punten het object stil staat en vertel waarom je dat denkt.
- Geef aan op welk punt of punten het object versnelt en vertel waarom je dat denkt.
- Geef aan op welk punt het object omdraait en vertel waarom je dat denkt.

Goede concepties:

- De leerling geeft de kernen te doorzien dat het om een x-t diagram gaat en dat de snelheid de helling is.
- De leerling geeft aan dat het object stilstaat op de momenten dat de raaklijn horizontaal is: B en F.
- De leerling doorziet dat versnelling betekent dat de grafiek toenemend stijgt of toenemend daalt: G.
- De leerling doorziet dat het object omdraait bij een top of een dal.

Misconcepties:

- De leerling denkt dat het object stil staat als de grafiek de horizontale as snijdt.
- De leerling denkt dat versnelling betekent dat de grafiek stijgt.
- De leerling denkt dat het object omdraait als de grafiek de horizontale as snijdt.

Andere misconceptie:

.....

Natuurkunde

2

Test beweging

Opgave 3. Windtunnel



Mededelingen aan de leerling:

- Stel je voor: een windtunnel. In deze windtunnel is een vrijvingskoze baan waar iemand een bal op naar binnen duwt. De bal beweegt in eerste instantie tegen de wind in, maar als gevolg van de wind komt de bal tot stilstand en begint deze zelfs de andere kant op te bewegen. Neem aan dat de wind de enige kracht is. De situatie is in de volgende figuur te zien.
- Teken in een globale snelheid-tijd grafiek wat er met de snelheid van de bal gebeurt en licht toe.
- Teken in een globale versnelling-tijd grafiek de versnelling die de bal ondervindt en licht toe waarom je denkt dat dit zo is.

Goede concepties:

- De leerling tekent een v-t grafiek waarbij de snelheid lineair afneemt (begint positief) en snijdt daarbij de horizontale as.
- De leerling tekent een a-t grafiek waarbij de versnelling een negatieve constante is (een horizontale lijn).

Misconcepties:

- De leerling tekent een v-t grafiek waarbij de snelheid een v-vorm maakt (er wordt gedacht dat de snelheid niet negatief kan worden).
- De leerling tekent een v-t grafiek waarbij eigenlijk de x-t grafiek wordt getekend (bergparabool).
- De leerling tekent een a-t diagram waarbij tot het moment van stilstand de versnelling negatief is en vervolgens weer positief wordt.
- De leerling tekent een a-t diagram waarbij eigenlijk de v-t grafiek wordt getekend.

Natuurkunde

3

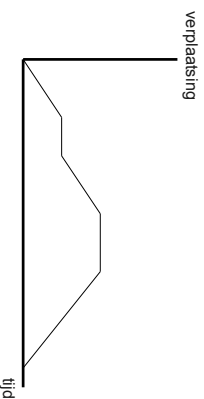
Test beweging

Opgave 4. Beweging

Mededelingen aan de leerling:

- Kijk naar de gegeven figuur en kies het antwoord wat er het beste bij past. Leg uit waarom je dat denkt.

Gegeven is de volgende grafiek van de beweging van een fietser. Geef voor ieder deel van de grafiek aan wat er volgens jou precies gebeurt.



Welke van de volgende uitspraken klopt volgens jou het beste?

- De fietser gaat eerst bergop, om vervolgens een stukje vlak te fietsen. Daarna gaat de fietser weer een stuk bergop, waarna hij na een stukje vlak over de top te hebben gefietst de afdaling in gaat.
- De fietser rijdt eerst een stuk vooruit, vervolgens staat de fietser even stil, om vervolgens weer een stuk vooruit te fietsen. Nadat hij wederom even heeft stil gestaan fietst hij in één keer terug naar zijn beginpunt.
- De fietser versnelt eerst een stukje, waarna hij even op constante snelheid fietst, vervolgens versnelt hij weer, fietst een stuk op constante snelheid en rent dan tot hij stil staat.
- De fietser gaat eerst een stukje bergop. Hij staat midden op de berg even stil om uit te puffen, waarna hij zijn weg omhoog vervolgt. Op de top stopt hij weer even om uit te puffen. Daarna fietst hij in één keer van de berg af.

Natuurkunde

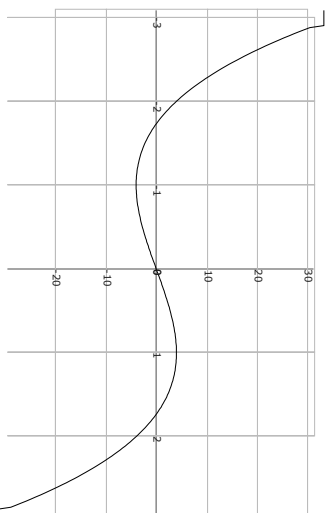
4

Test beweging

Opgave 5. Afgeleide tekenen

Mededelingen aan leerling:

- Nu even iets totaal anders.
- Zie het nu gegeven antwoordvel.
- Gegeven is de gegeven functie $f(x)$.
- Teken hieronder globaal de afgeleide van deze functie. Geef duidelijk aan hoe je redeneert en waar de belangrijke punten liggen.



Begrip:

- De leerling ziet in dat in een stijgend deel van een functie de afgeleide positief is en dat in een dalend deel van de functie de afgeleide negatief is.
- De leerling ziet in dat de afgeleide gelijk is aan 0 op de punten waar de functie op een extremum zit.
- De leerling ziet in dat afnemend stijgende functie betekent dat de afgeleide afneemt.

Natuurkunde

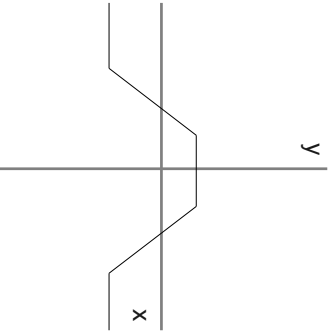
5

Test beweging

Opgave 6.

Mededelingen aan de leerling:

- Zie het nu gegeven antwoordvel.
- Gegeven is de afgeleide van een functie, $f'(x)$. Teken daaronder zo goed mogelijk hoe volgens jou de functie $f(x)$ eruit kan hebben gezien. Denk daarbij aan belangrijke punten, zoals stijgen, afnemen, toppen en dalen. Denk hardop na.



Begrip:

- De leerling ziet in dat een nulpunt in de afgeleide betekent dat er een extremum is in de primitieve.
- De leerling ziet in dat als de afgeleide positief is, dat de primitieve dan stijgt e.d.
- De leerling ziet in dat als de afgeleide stijgt, dat de primitieve dan toenemend stijgt of afnemend daalt e.d.

Verantwoording van de test

Opgave	Type	Te testen (mis)conceptie	Soort interpretatie
Opgave 1.	Kinematica	Problemen met het discrimineren tussen heiling en hoogte en veranderingen in heiling en hoogte.	Interpretatie van grafiek.
Opgave 2.	Kinematica	• Problemen met interpretatie van veranderingen in hoogte en heiling. • Problemen met discrimineren tussen heiling en hoogte.	Interpretatie van grafiek.
Opgave 3.	Kinematica	Problemen met de interpretatie van negatieve snelheid en constante versnelling.	Interpretatie van de werkelijkheid.
Opgave 4.	Kinematica	Ten onrechte overnemen van de vorm van de beweging naar vorm van de grafiek.	Interpretatie van een grafiek.
Opgave 5.	Differentiëren	• De leerling ziet in dat in een stijgend deel van een functie de afgeleide positief is en dat in een dalend deel van de functie de afgeleide negatief is. • De leerling ziet in dat de afgeleide gelijk is aan 0 op de punten waar de functie op een extremum zit. • De leerling ziet in dat afnemend stijgende functie betekent dat de afgeleide afneemt.	
Opgave 6.	Differentiëren	• De leerling ziet in dat een nulpunt in de afgeleide betekent dat er een extremum is in de primitieve. • De leerling ziet in dat als de afgeleide positief is, dan de primitieve dan stijgt e.d. • De leerling ziet in dat als de afgeleide stijgt, dat de primitieve dan toenemend stijgt of afnemend daalt e.d.	

Resultaten mondelinge test

In deze appendix zijn voor de mondelinge test voor alle leerlingen per opgave de antwoorden geïnterpreteerd en concepties en misconcepties opgesomd. De genoemde namen zijn verzonnen en refereren op geen enkele wijze aan de echte namen van de personen.

VWO4

Richard

1. Hij weet in de eerste opgave perfect aan te geven dat de beide auto's even snel gaan als de lijnen evenwijdig lopen.
2. Weet alleen dat rond F de snelheid 0 is, omdat de lijn daar een stuk horizontaal loopt. Ziet niet in dat bij punt B, het draaipunt, de auto ook een klein moment stil staat. Hij ziet niet in wat versnelling precies is in het x-t diagram en wijst stukken aan waar de positie toeneemt. Het draaipunt weet hij direct aan te geven: "Bij B, want daar gaat de lijn naar beneden."
3. Ziet bij opgave 3 niet in dat de snelheid lineair afneemt. Ziet niet in dat de snelheid negatief wordt als de beweging omdraait. Ziet niet in dat versnelling de afgeleide is van de snelheid en begint met een nieuwe - en foute redenering. Hij benadert versnelling op dezelfde manier als snelheid.
4. Hij snapt bij opgave 4 uitstekend wat er gebeurt.
5. Met wat moeite weet hij waar de afgeleide positief, negatief en 0 is, maar weet geen afgeleide te tekenen.
6. Hij weet waar de primitieve een top of een dal heeft, maar weet ook hier de primitieve niet te tekenen.

Mies

1. Ze weet in de eerste opgave goed aan te geven dat de beide auto's even snel gaan als de lijnen evenwijdig lopen.
2. Wijst alleen tussen E en F aan als punt waar de beweging stil staat. Ziet niet in dat dat bij B het geval is. Denkt dat er overal sprake is van versnelling, omdat de lijn nergens horizontaal loopt. Denkt dat de beweging omdraait als de positie negatief wordt.
3. Ziet bij opgave 3 niet in dat de snelheid lineair afneemt. Ziet niet in dat de snelheid negatief wordt als de beweging omdraait. Ziet niet in dat versnelling de afgeleide is van de snelheid en begint met een nieuwe - en foute redenering. Benadert versnelling op dezelfde manier als snelheid.
4. Snapt bij opgave 4 uitstekend wat er gebeurt.
5. Weet niet wat de afgeleide is en kan die dus ook niet tekenen.
6. Idem als bij 5.

Kim

1. Snapt dat de beide auto's even snel gaan als de lijnen evenwijdig lopen.
2. Denkt dat de beweging stilstaat bij D, omdat de plaats dan 0 is. Snapt niet waar het object versnelt, kijkt alleen naar de steilheid. Denkt dat de beweging omdraait bij punt

D, als de plaats weer 0 is.

3. Snapst wel dat de snelheid lineair afneemt tot 0, maar niet dat de snelheid daarna negatief wordt. Begint bij het a-t diagram opnieuw met redeneren en ziet niet in dat dit de afgeleide is van de snelheid. Denkt dat de versnelling-tijd grafiek hetzelfde er uit moet zien als de snelheid-tijd grafiek.
4. Interpreteert het x-t diagram als een v-t diagram en kiest daardoor het verkeerde antwoord.
5. Denkt dat de afgeleide van 0 gelijk is aan 0. Snapst helemaal niet hoe ze dit moet doen.
6. Snapst ook hier totaal niet wat ze aan het doen is.

Ellie

(Interview niet helemaal afgemaakt)

1. Denkt dat er sprake is van dezelfde snelheid op het moment dat ze elkaar inhalen.
2. Denkt dat de snelheid 0 is als de grafiek de tijd-as snijdt en denkt ook dat daar het object omdraait.
3. Ziet niet in dat de snelheid lineair afneemt, maar wel dat de snelheid negatief wordt als de beweging omdraait. Ziet niet in dat versnelling de afgeleide is van de snelheid en begint opnieuw met redeneren en beschouwt de versnelling op dezelfde manier als de snelheid.
4. Ziet prima in wat hier gebeurt.
5. Weet totaal niet wat de afgeleide inhoudt.
6. Idem zie 5.

Klaas

1. Snapst dat de auto's even snel gaan als de lijnen evenwijdig lopen.
2. Hij denkt dat het object omdraait als de positie 0 is en denkt ook dat daar de snelheid 0 is. Denkt dat er een versnelling is als de grafiek stijgend is.
3. Ziet niet in dat de snelheid lineair afneemt, maar wel dat de snelheid negatief wordt. Ziet niet in dat de versnelling de afgeleide van de snelheid is en geeft een foutieve redenering; hij benadert de versnelling hetzelfde als de snelheid.
4. Begrijpt prima wat hier aan de hand is.
5. Blijkt uiteindelijk prima door te hebben wat de afgeleide precies inhoudt.
6. Ook hier snapst hij prima wat hij moet doen.

VWO 6

Ruud

1. Snapst dat de auto's even snel gaan als de lijnen evenwijdig lopen.
2. Snapst dat het object stil staat als de afgeleide van de grafiek gelijk is aan 0. Hij ziet goed waar het object omdraait. Weet half wanneer er sprake is van versnelling, maar kan met die kennis geen goed antwoord formuleren.
3. Tekent een perfect snelheid-tijd diagram; hij ziet in dat de snelheid lineair afneemt en dat deze negatief wordt. Hij weet geen correct a-t diagram te tekenen; ziet wel in dat de versnelling de afgeleide is van de snelheid, maar tekent de primitieve i.p.v. de afgeleide. Begint bij het a-t diagram opnieuw met redeneren.
4. Snapst prima wat er aan de hand is.
5. Tekent een perfecte afgeleide en weet de belangrijke punten goed aan te geven.
6. Tekent een perfecte primitieve en weet op welke belangrijke punten hij moet letten.

Peter

1. Snapst dat de auto's even snel gaan als de lijnen evenwijdig lopen.
2. Ziet goed in wanneer het object stilstaat. Denkt dat er nergens sprake is van een ver-

snelling. Denkt dat het object omdraait als de positie negatief wordt.

3. Ziet niet in dat de snelheid lineair afneemt en ook niet dat deze negatief wordt. Bij de versnelling begint hij opnieuw te redeneren en ziet niet in dat de versnelling de afgeleide van de snelheid is.
4. Ziet hier goed in wat er gebeurt.
5. Na wat langer nadenken weet hij een kloppende afgeleide te tekenen. Houdt goed rekening met de belangrijke punten.
6. Weet een goede primitieve te tekenen en houdt goed rekening met de belangrijke punten.

Maarten

(Noemt de afgeleide bij de kinematica-sommen, duidelijk sprake van transfer.)

1. Snapt dat de auto's even snel gaan als de lijnen evenwijdig lopen.
2. Ziet in dat het object stilstaat in punt B en F, omdat hij zegt dat de richtingscoëfficiënt daar 0 is. Hij weet wanneer er sprake is van versnelling, maar weet dit niet goed toe te passen in de gegeven grafiek. Na wat doorvragen weet hij één correct stukje te geven waar er sprake is van een versnelling. Hij denkt dat het object omdraait als de positie weer 0 is, na wat doorvragen ziet hij wel in dat het object in punt B omdraait.
3. Tekent een perfect v-t diagram en een perfect a-t diagram. Benoemt dat de versnelling de afgeleide is van de snelheid.
4. Heeft perfect door wat hier gebeurt.
5. Weet een kloppende afgeleide te tekenen en houdt hierbij goed rekening met de belangrijke punten.
6. Weet hier een goede primitieve te tekenen en weet op de juiste intervallen de juiste primitivering te produceren.

Mieke

1. Denkt dat de beide auto's helemaal niet even snel gaan.
2. Denkt dat de snelheid 0 is bij D, omdat de positie daar 0 is. Denkt dat er sprake is van versnelling tussen A en B, omdat er daar verplaatsing is. Denkt ook dat het object omdraait bij D, omdat de positie daar negatief wordt.
3. Ziet niet in dat de snelheid negatief wordt. Ziet niet in dat de versnelling de afgeleide is van de snelheid, begint dus opnieuw met redeneren. Benadert de versnelling hetzelfde als de snelheid.
4. Snapt goed wat hier gebeurt.
5. Weet totaal niet hoe ze een afgeleide moet tekenen.
6. Idem als bij 5.

Deborah

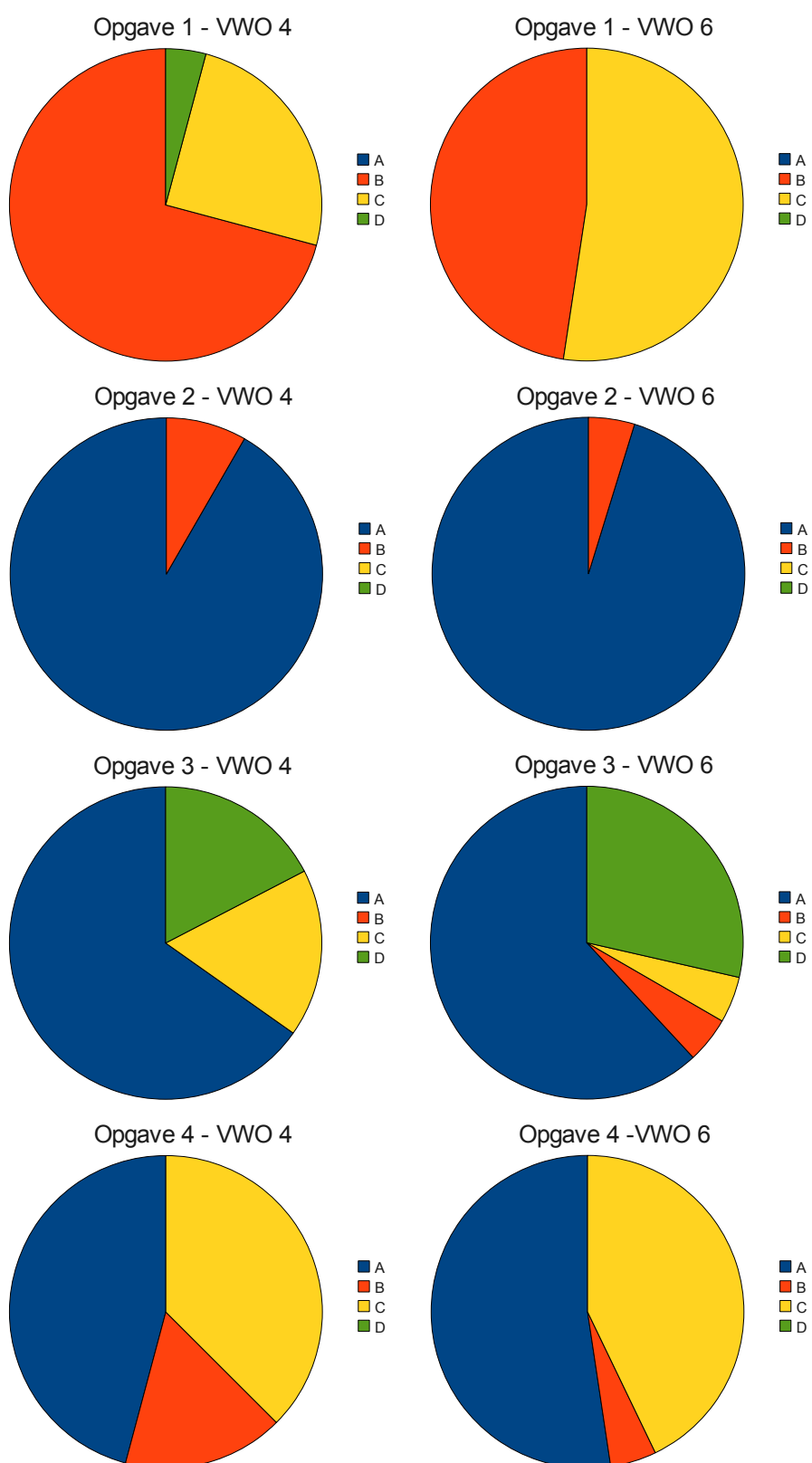
1. Denkt dat beide auto's even snel rijden als ze op dezelfde positie zitten.
2. Snapt dat het object stilstaat als de raaklijn horizontaal loopt. Denkt dat het object versnelt bij punt A en D, omdat daar de raaklijn volgens haar het stijlt is. Denkt dat het object omdraait bij D, omdat daar de positie negatief wordt.
3. Ziet niet in dat de snelheid negatief wordt. Ziet niet in dat de versnelling de afgeleide van de snelheid is en begint opnieuw met redeneren; benadert versnelling hetzelfde als snelheid. Ziet wel in dat de versnelling negatief is, maar denkt dat deze positief is als de beweging omdraait.
4. Interpreteert x-t diagram als v-t diagram.
5. Heeft in eerste instantie geen flauw idee wat de afgeleide betekent. Weet na doorvragen alleen dat bij de toppen de afgeleide 0 is.
6. Idem als bij 5. Weet de toppen te reproduceren, maar is niet secuur op de rest van de resulterende grafiek.

Data schriftelijke testen

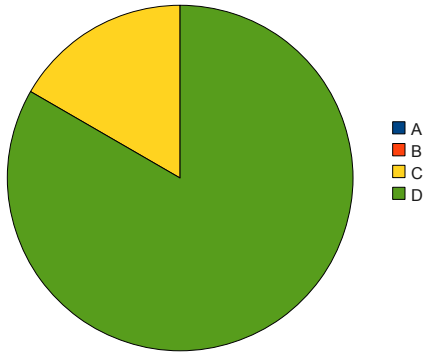
Tabel E.1: Alle gegeven antwoorden van de kinematicatest.

	Opgaven	1	2	3	4	5	6	7	8
	Corr. Antw.	B	A	A	C	D	B	C	D
VWO 4	Leerling 1	B	B	D	B	D	B	C	D
	Leerling 2	C	A	D	C	D	B	B	C
	Leerling 3	B	A	A	B	C	B	B	C
	Leerling 4	D	A	A	A	D	B	B	D
	Leerling 5	B	A	A	B	D	B	C	D
	Leerling 6	B	A	A	A	D	B	B	D
	Leerling 7	B	A	C	C	C	B	B	C
	Leerling 8	B	A	A	C	D	B	C	D
	Leerling 9	B	A	A	C	D	B	C	D
	Leerling 10	C	A	C	C	D	B	B	D
	Leerling 11	B	A	A	A	D	A	C	C
	Leerling 12	B	A	A	C	D	A	B	A
	Leerling 13	B	A	C	B	D	A	B	C
	Leerling 14	B	A	-	C	D	B	C	D
	Leerling 15	C	A	A	C	D	B	B	C
	Leerling 16	B	A	A	A	D	B	C	C
	Leerling 17	C	A	A	A	C	B	B	D
	Leerling 18	B	A	A	A	D	B	C	D
	Leerling 19	B	A	A	A	D	B	B	C
	Leerling 20	C	A	C	A	D	B	B	D
	Leerling 21	B	B	D	C	C	B	C	C
	Leerling 22	B	A	A	A	D	B	B	D
	Leerling 23	B	A	D	A	D	A	B	C
	Leerling 24	C	A	A	A	D	B	B	C
VWO 6	Leerling 1	C	B	D	C	D	B	B	D
	Leerling 2	B	A	C	C	D	B	C	D
	Leerling 3	B	A	B	C	D	B	C	D
	Leerling 4	B	A	A	C	D	B	C	D
	Leerling 5	B	A	D	A	D	B	B	D
	Leerling 6	C	A	A	C	D	B	B	C
	Leerling 7	C	A	A	A	D	B	B	D
	Leerling 8	B	A	D	C	D	B	B	D
	Leerling 9	C	A	A	A	D	B	B	D
	Leerling 10	C	A	A	A	D	A	B	D
	Leerling 11	C	A	A	A	D	B	B	D
	Leerling 12	B	A	A	C	D	B	C	D
	Leerling 13	C	A	A	A	D	B	B	C
	Leerling 14	C	A	A	B	D	A	B	C
	Leerling 15	C	A	D	A	C	B	B	D
	Leerling 16	C	A	D	A	D	B	B	D
	Leerling 17	B	A	A	C	D	B	C	D
	Leerling 18	C	A	A	A	D	B	B	D
	Leerling 19	B	A	A	A	D	B	C	D
	Leerling 20	B	A	A	C	D	B	C	D
	Leerling 21	B	A	D	A	A	A	B	C

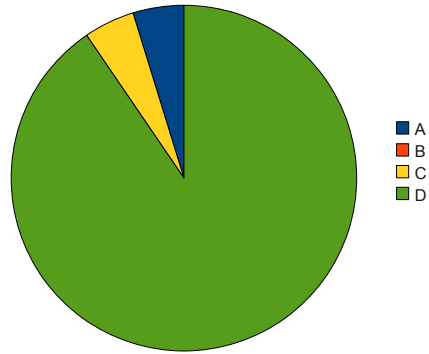
Cirkeldiagrammen met de gekozen antwoorden:



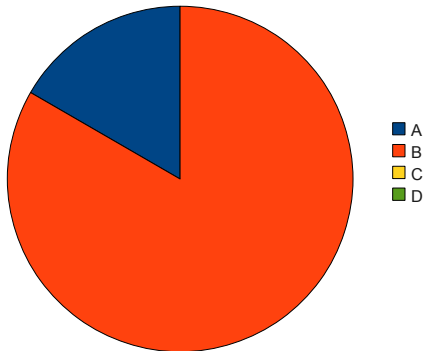
Opgave 5 - VWO 4



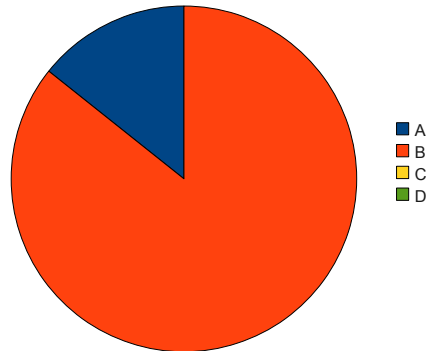
Opgave 5 - VWO 6



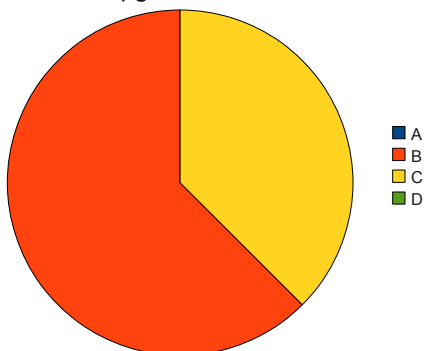
Opgave 6 - VWO 4



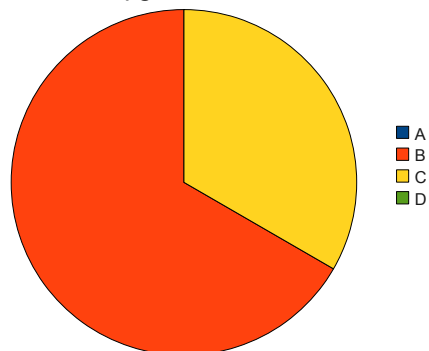
Opgave 6 - VWO 6



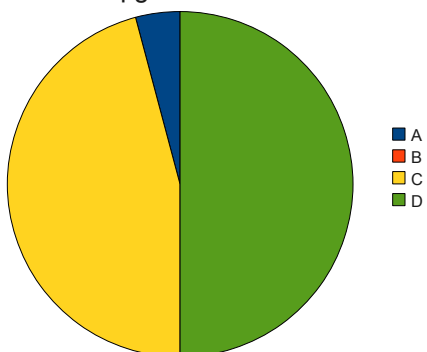
Opgave 7 - VWO 4



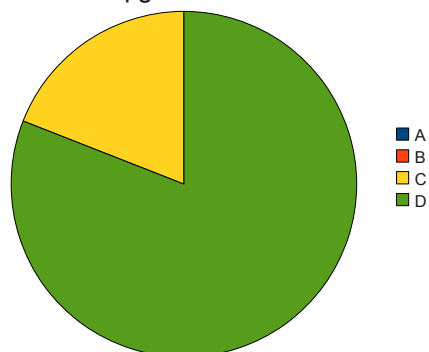
Opgave 7 - VWO 6



Opgave 8 - VWO 4



Opgave 8 - VWO 6



Appendix F

Resultaten test kinematica

		Neg sn. en versn.			Tot	Hoogte/ helling			Tot	Vorm bew/graf			Tot	Verw. diagr.			Tot	Misc. snelh.			Tot
		Op.1	Op.4	Op.7	MC2	Op.2	Op.5	Op.6	MC1	Op.3	Op.7	Op.8	MC3	Op.1	Op.3	Op.4	MC4	Op.3	Op.8	MC5	
VWO6	Leerling 1	1		1	2				0				0		1		1			0	
	Leerling 2				0				0				0				0	1		1	
	Leerling 3				0				0	1			1				0			0	
	Leerling 4				0				0				0				0			0	
	Leerling 5		1	1	2				0				0		1		1			0	
	Leerling 6	1	1	1	3				0				0				0			0	
	Leerling 7	1	1	1	3				0				0				0			0	
	Leerling 8	1	1	1	3			1	1				0				0			0	
	Leerling 9	1	1	1	3				0				0				0			0	
	Leerling 10				0				0				0				0			0	
	Leerling 11	1	1	1	3				0				0				0		1	1	
	Leerling 12	1		1	2			1	1				0		1	1	1		1	1	
	Leerling 13	1	1	1	3				0				0		1		1			0	
	Leerling 14				0				0				0				0			0	
	Leerling 15		1		1				0				0				0			0	
	Leerling 16				0				0				0				0			0	
	Leerling 17		1		1			1	1				0		1		1		1	1	
	Leerling 18			1	1				0				0		1		1			0	
	Leerling 19	1	1	1	3			1	1				0		1		1			0	
	Leerling 20	1	1	1	3				0				0				0			0	
	Leerling 21	1		1	2				0				0				0		1	1	
VWO4	Leerling 1				0				0				0		1	1	2			0	
	Leerling 2			1	1			1	1				0		1	1			1	1	
	Leerling 3		1	1	2				0				0	1			1			0	
	Leerling 4				0				0				0			1	1			0	
	Leerling 5		1	1	2				0				0				0			0	
	Leerling 6			1	1			1	1				0				0	1	1	2	
	Leerling 7				0				0				0				0			0	
	Leerling 8	1		1	2				0				0				0		1	1	
	Leerling 9		1		1			1	1				0				0		1	1	
	Leerling 10			1	1			1	1				0				0			0	
	Leerling 11			1	1				0				0			1	1	1	1	2	
	Leerling 12				0				0				0				0			0	
	Leerling 13		1		1				0				0				0		1	1	
	Leerling 14	1	1	1	3			1	1				0				0			0	
	Leerling 15		1		1				0				0				0			0	
	Leerling 16		1	1	2				0				0				0		1	1	
	Leerling 17	1	1	1	3				0				0				0	1		1	
	Leerling 18				0			1	1				0		1		1		1	1	
	Leerling 19		1	1	2				0				0				0			0	
	Leerling 20	1	1	1	3				0				0				0		1	1	
	Leerling 21	1		1	2				0				0		1		1		1	1	
	Leerling 22				0				0				0				0			0	
	Leerling 23			1	1				0				0	1			1		1	1	
	Leerling 24		1	1	2			1	1				0		1		1		1	1	

Resultaten test differentiëren

		Opgaven															
		1		2		3	4		5			6					
		a	b	a	b		a	b	a	b	c	a	b	VD2	VD1	VD4	VD5
VWO6	Leerling 1										1			0	0	1	0
	Leerling 2			1										0	1	0	0
	Leerling 3													0	0	0	0
	Leerling 4												1	0	0	0	1
	Leerling 5	1		1	1	1	1	1				1	1	2	1	2	4
	Leerling 6				1			1				1	1	2	0	1	3
	Leerling 7				1									1	0	0	0
	Leerling 8	1	1		1			1				1	1	3	0	1	3
	Leerling 9							1				1	1	1	0	1	3
	Leerling 10													0	0	0	0
	Leerling 11				1	1						0,5		1	0	1,5	0,5
	Leerling 12	1	1		1				1	1	1	0,5	1	2	0	1,5	1,5
	Leerling 13	1			1		1	1		1	1	0,5		2	0	1,5	2,5
	Leerling 14													0	0	0	0
	Leerling 15				1							1	1	1	0	1	2
	Leerling 16													0	0	0	0
	Leerling 17													0	0	0	0
	Leerling 18				1						1	0,5		0	0	0,5	0,5
	Leerling 19											0,5	1	1	0	1,5	1,5
	Leerling 20			1	1	0,5			1	1	1	0,5	1	1	1	2	1,5
	Leerling 21				1							0,2		1	0	0	0
VWO4	Leerling 1				1									1	0	0	0
	Leerling 2	1			1									1	0	0	0
	Leerling 3	1		1	1				1	1				1	1	0	0
	Leerling 4	1		1	1	1	1	1			1	1	1	2	1	3	4
	Leerling 5	1		1	1				1		1			1	0	1	0
	Leerling 6	1	1	1	1	1				1	1	1	1	2	1	3	2
	Leerling 7				1				1	1	1			1	0	1	0
	Leerling 8				1							1	1	1	0	1	2
	Leerling 9	1	1	1	1	1						1		2	1	2	1
	Leerling 10	1	1				1	1						2	0	0	2
	Leerling 11	1		1							1	0,5		0	1	1,5	0,5
	Leerling 12	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	0	3	4
	Leerling 13	1		1	1						1			1	1	0	0
	Leerling 14			1	1									1	1	0	0
	Leerling 15				1							1	1	1	0	1	2
	Leerling 16	1									1			0	0	1	0
	Leerling 17	1	1		1						1	1	1	2	0	1	1
	Leerling 18						1					1	1	1	0	1	3
	Leerling 19									1			1	0	0	0	1
	Leerling 20									1				0	0	0	0
	Leerling 21													0	0	0	0
	Leerling 22													0	0	0	0
	Leerling 23													0	0	0	0
	Leerling 24													0	0	0	0

Toelichting bij de vaardigheden zoals aangegeven in de kolommen 1a t/m 6b.

Opgave 1.

- De leerling ziet in dat bij een lineaire functie de afgeleide horizontaal is.
- De leerling ziet in dat in een stijgend deel van een functie de afgeleide positief is en dat in een dalend deel van de functie de afgeleide negatief is.

Opgave 2.

- De leerling is in staat om de helling in een punt te bepalen en hier een raaklijn bij te gebruiken.
- De leerling is in staat om in te zien dat de helling hier afloopt en dus negatief is.

Opgave 3.

- De leerling ziet in dat de afgeleide gelijk is aan 0 op de punten waar de functie op een extremum zit.

Opgave 4.

- De leerling is in staat om terug te redeneren van een simpele afgeleide (horizontale lijn) naar de oorspronkelijke functie (lineaire functie).
- De leerling ziet in dat een negatieve afgeleide betekent dat de oorspronkelijke functie een dalend patroon oplevert.

Opgave 5.

- De leerling ziet in dat een stijgende functie betekent dat de afgeleide positief is.
- De leerling ziet in dat afnemend stijgende functie betekent dat de afgeleide afneemt.
- De leerling ziet in dat een toenemend stijgende functie betekent dat de afgeleide toeneemt.

Opgave 6.

- De leerling is in staat om in te zien dat een nulpunt in de afgeleide betekent dat de primitieve daar een extremum heeft.
- De leerling is in staat om in te zien dat een stijgend nulpunt betekent dat de primitieve daar een dal heeft en dat een dalend nulpunt betekent dat de primitieve daar een top heeft.