

Instrumenteel of relationeel,
symbolic of embodied?

Ontwerp van criteria voor
classificatie van
antwoorden

M.J. Alberink
13 juli 2010

Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
2	Theorie: denkwijzen in de wetenschappelijke literatuur	5
2.1	Niveaus van begrijpen: instrumenteel begrip en relationeel begrip.....	5
2.2	The three worlds of mathematics: de embodied en de symbolic world.....	6
3	Doelstellingen voor de classificatiecriteria	7
4	Procedures.....	8
4.1	Procedure voor de ontwikkeling van de classificatiecriteria	8
4.2	Procedure voor de classificatie	8
5	Resultaten.....	10
5.1	Werkbladen	10
5.2	Beantwoording van de opgaven.....	10
5.3	Ontwerp van de classificatiecriteria	10
5.3.1	Uitgangspunten voor de classificatie instrumenteel of relationeel	10
5.3.2	Criteria voor de classificatie instrumenteel of relationeel begrip	12
5.3.3	Uitgangspunten voor de classificatie embodied of symbolic world	12
5.3.4	Criteria voor de classificatie embodied of symbolic world	13
5.4	Uitkomsten van de classificatie	13
6	Conclusies	15
7	Discussie en aanbevelingen	16
8	Referenties	17
	Bijlage 1: Werkblad	18
	Bijlage 2: Werkblad opgave 6 en 7 voor Erasmus en Noordik.....	31
	Bijlage 3: Beantwoording van de opgaven	32
	Bijlage 4: Criteria instrumenteel en relationeel begrip	48
	Bijlage 5: Criteria embodied en symbolic world	56
	Bijlage 6: Uitkomsten van de classificatie.....	66

1 Inleiding

In drie klassen 4 vwo werd het berekenen van sinus en cosinus als coördinaten van punten op de eenheidscirkel behandeld in het kader van een lesson study. In deze lessen maakten de leerlingen op meerdere momenten een of meer opgaven op papier over het aspect van het onderwerp dat juist daarvoor was behandeld. Deze opgaven waren zodanig gekozen dat de antwoorden van de leerlingen zicht kunnen geven op de denkprocessen en associaties van de leerlingen bij het beantwoorden van de afzonderlijke vragen.

Door de antwoorden van de leerlingen te analyseren is het mogelijk om kenmerken van de denkprocessen van de leerlingen op verschillende momenten tijdens de lessen boven tafel te krijgen. Het is mogelijk om zulke denkprocessen te beschrijven in termen van redeneringen bij de beantwoording van vragen, van associaties bij bepaalde onderwerpen door leerlingen, en van oplossingsroutes die leerlingen hanteren op weg naar hun eindantwoord.

In dit verslag worden de antwoorden van de leerlingen geanalyseerd, waarbij we niet deze denkprocessen zelf in kaart brengen, maar onderzoeken welke *typen* denkprocessen bij leerlingen hebben plaatsgevonden. Dit betekent dat voor het onderzoek niet maatgevend is of de redeneringen en oplossingsroutes van de leerlingen correct zijn, maar de wijze waarop de leerlingen tijdens de beantwoording van vragen hebben gedacht staat centraal.

In het onderzoek worden twee kenmerken gehanteerd om de denkwijze van de leerlingen bij het maken van de afzonderlijke opgaven te karakteriseren. Deze kenmerken zijn ten eerste of het begrip van leerlingen instrumenteel of relationeel is geweest, en ten tweede of het denken plaatsvond vanuit de embodied world dan wel de symbolic world. Deze kenmerken zijn ontleend aan Tall.

In de lessen maakten de meeste leerlingen de opgaven in groepjes van twee. Het doel van de analyse is om bij ieder afzonderlijk antwoord van alle groepjes de denkwijze te classificeren als instrumenteel dan wel relationeel, en als embodied dan wel symbolic. Door deze classificatie in denkwijzen van alle gegeven antwoorden ontstaat een basis voor nadere analyse van deze gegevens. Zo kunnen overheersende denkwijzen of een verloop in denkwijze van afzonderlijke groepjes in kaart worden gebracht. Ook kunnen de denkwijzen van alle leerlingen bij een van de afzonderlijke vragen worden samengevat.

Voordat de denkwijze bij de antwoorden als instrumenteel dan wel relationeel en als embodied of symbolic kunnen worden geclassificeerd, moeten criteria voor de classificatie van de antwoorden worden opgesteld op basis van de beschrijving van deze kenmerken in de literatuur. Dit verslag beschrijft deze classificatiecriteria en de uitgangspunten die voor het opstellen van de criteria zijn gehanteerd. Vervolgens beschrijft het verslag de uitkomsten van de classificatie op basis van deze opgestelde criteria.

Hoofdstuk 2 van dit verslag bevat de beschrijving van de kenmerken instrumenteel versus relationeel en embodied versus symbolic in de wetenschappelijke literatuur en geeft daarmee de theoretische basis voor het opstellen van de classificatiecriteria.

Hoofdstuk 3 beschrijft de doelstellingen voor wat betreft het opstellen van de classificatiecriteria.

Hoofdstuk 4 beschrijft de inhoudelijke en procesmatige procedure waarlangs het opstellen van de criteria tot stand is gekomen.

Hoofdstuk 5 beschrijft de opgestelde classificatiecriteria zelf, waarna in hoofdstuk 6 de conclusies worden beschreven en in hoofdstuk 7 de discussie en aanbevelingen volgen.

2 Theorie: denkwijzen in de wetenschappelijke literatuur

Voor het kenmerken van denkwijzen wordt in de wetenschappelijke literatuur een aantal concepten genoemd. In dit onderzoek worden voor het achterhalen van de denkwijzen van de leerlingen de gegeven antwoorden geclassificeerd als instrumenteel of relationeel begrip, en als denken in de embodied of in de symbolic world. Hierbij is het ook mogelijk dat leerlingen antwoorden geven die een classificatie in een van beide categorieën niet of niet goed mogelijk maken. De volgende paragrafen in dit hoofdstuk geven beschrijvingen van instrumenteel en relationeel begrip en van denken in de embodied en de symbolic world zoals aangetroffen in de wetenschappelijke literatuur.

2.1 Niveaus van begrijpen: instrumenteel begrip en relationeel begrip

Instrumenteel begrijpen van het genereren van een oplossing voor een gegeven vraagstuk houdt in dat een leerling het vraagstuk dat hij moet oplossen classificeert als een type vraagstuk dat hij kent. Vervolgens associeert de leerling zo'n vraagstuk met een vastliggende oplossingsroute, en voert hij deze zonder verdere overweging uit om het gevraagde antwoord te produceren (Tall, 1979).

In het proces van begrijpen denkt de leerling niet over de opbouw van het vraagstuk na, en eventueel over hoe het is samengesteld. Zijn uitgangspunt is dat het vraagstuk van een type is dat hij geleerd heeft, en hij kan over het hoofd zien dat het bijvoorbeeld geen standaardvraag zou kunnen zijn.

Hij kiest voor het uitvoeren van de oplossingsroute die volgens hem bij dit type vraagstuk hoort, en vraagt zich niet af waarom de oplossingsroute correct is voor het bereiken van het antwoord op de vraag. De leerling combineert geen oplossingsroutes die hij kent, indien de oplossing van het vraagstuk dit zou vereisen.

Bij het uitvoeren van de oplossingsroute voert de leerling de benodigde stappen achter elkaar uit, omdat hij weet dat de oplossingsroute voor het type vraagstuk dat hij in gedachten heeft er zo uit ziet. Hij vraagt zich niet af waarom hij juist de gevraagde stappen moet uitvoeren, waarom in de "voorgeschreven" volgorde en hoe de stappen op elkaar aansluiten. De leerling is op de hoogte van het wat en het hoe van het oplossen van het vraagstuk, maar niet van het waarom.

Bij relationeel begrijpen bij het oplossen van een vraagstuk legt een leerling verbanden tussen elementen uit het gevraagde en andere zaken en verbanden die hij kent. De leerling probeert op deze manier tot een begrip te komen van wat wordt gevraagd, en gaat ook na of hij de juiste middelen ter beschikking heeft om tot het gevraagde antwoord te komen (Tall, 1979).

De leerling redeneert tot hij het probleem begrijpt, en stelt de oplossingsroute samen die de gevraagde oplossing oplevert. Gedurende het proces van het vraagstuk begrijpen en oplossen vindt redeneren en afleiden plaats. Gezocht wordt naar patronen en structuren om tot een oplossing te komen. De leerling hanteert regels die hij kent om in niet-standaardsituaties tot oplossingen te komen. De leerling kan op basis van regels die hij kent nieuwe regels afleiden.

Er vindt voortdurend nadenken en redeneren over structuren plaats. Het uiteindelijke antwoord is op doordachte wijze tot stand gekomen.

2.2 The three worlds of mathematics: de embodied en de symbolic world

The three worlds of mathematics is een door Tall ontwikkelde theorie, waarin het oplossen van wiskundige problemen op drie niveaus van abstractie wordt beschreven (Tall, 2002, 2004). In volgorde van het meest concrete naar het meest abstracte niveau worden de drie werelden de embodied world, de symbolic world en de formal world genoemd.

Hieronder volgt een beschrijving van de eerste twee niveaus: de embodied world en de symbolic world.

Bij denken in de embodied world associeert de leerling elementen uit het gegeven vraagstuk met zaken in de echte wereld zoals hij deze via zijn eigen waarneming heeft vormgegeven (Tall, 2002, 2004). Een standaardvoorbeeld van oplossen in de embodied world is het optellen van twee getallen door op je vingers te tellen.

In de embodied world probeert een leerling zich van zaken uit het gevraagde probleem niet alleen een voorstelling te maken, maar ook deze te koppelen aan zaken uit de bestaande wereld. Wetmatigheden in de bestaande wereld die de leerling kent helpen hem om het gevraagde probleem op te lossen. De leerling ziet als het ware het probleem in de echte wereld.

De leerling leert en bewijst via tastbare en waarneembare objecten. Bij het leren worden wiskundige objecten voorgesteld door concrete objecten uit de echte wereld. Door deze objecten uit de echte wereld te rangschikken of te manipuleren worden wiskundige waarheden of regels gevonden of bewezen. Wiskundige objecten worden hierbij zelfs gevormd op basis van waarnemingen uit de werkelijkheid.

Bij denken in de symbolic world werkt de leerling met wiskundige gereedschappen, zoals formules en symbolen, om een gegeven vraagstuk op te lossen (Tall, 2002, 2004). De leerling werkt met procepts - bewerkingen annex concepten - om waarheden of regels te bewijzen en voor het vinden van oplossingen voor wiskundige problemen (Gray & Tall, 1994).

3 Doelstellingen voor de classificatiecriteria

Het doel van de classificatie is het classificeren van de denkwijze bij ieder gegeven antwoord als instrumenteel of relationeel, en als embodied of symbolic. Voor het uitvoeren van deze classificatie zijn criteria nodig. Deze criteria beschrijven dus hoe de beoordelaars van de denkwijzen bij de antwoorden deze kunnen classificeren als instrumenteel dan wel relationeel, en als embodied dan wel symbolic.

De classificatiecriteria moeten in de eerste plaats de betekenis van de genoemde kenmerken in de wetenschappelijke literatuur weerspiegelen. Daarom worden eerst algemene uitgangspunten voor de criteria geformuleerd, waaruit blijkt dat de criteria aansluiten bij de betekenis van de genoemde kenmerken. Deze algemene uitgangspunten waarborgen ook dat de uitgangspunten voor de antwoorden op de verschillende vragen consistent zijn.

Als basis voor de classificatie worden dus algemene uitgangspunten gehanteerd, die hun weerslag vinden in de wetenschappelijke literatuur. Echter, deze algemene uitgangspunten geven nog niet genoeg houvast voor het classificeren. Dit komt doordat de beoordelaars die de classificatie uitvoeren de uitgangspunten verschillend kunnen interpreteren. Bovendien zal het bij algemene uitgangspunten lastig zijn om ze bij het classificeren van een grote hoeveelheid antwoorden op consequente wijze toe te passen. Een factor die dit consequent toepassen nog bemoeilijkt is het feit dat antwoorden van leerlingen niet altijd compleet en zorgvuldig zijn uitgewerkt of samenhangen missen, en dat expliciete vermeldingen van motivaties of gedachtegangen door leerlingen vaak ontbreken.

In verband met deze omstandigheden worden de algemene uitgangspunten voor de classificatie bij iedere vraag uitgedetailleerd tot classificatiecriteria die direct op de antwoorden bij die vraag van toepassing zijn. Dit maakt de algemene uitgangspunten concreter en ondersteunt de beoordelaars bij het consequent toepassen van de classificatiecriteria. Aspecten van de gegeven antwoorden van de leerlingen worden in de criteria verwerkt, waardoor de antwoorden op basis van de opgestelde criteria ook daadwerkelijk classificeerbaar worden.

Als een gegeven antwoord niet kan worden geclassificeerd op basis van de specifieke classificatiecriteria bij een vraag, kan op de algemene uitgangspunten voor de classificatie worden teruggevallen.

Voor de validatie van de classificatiecriteria is de werkwijze die is beschreven in hoofdstuk 4 gevolgd bij het tot stand brengen van de classificatiecriteria.

4 Procedures

Het instrument voor de classificatie van de denkwijzen bij de antwoorden van de leerlingen is een lijst met criteria. Hiermee worden de denkwijzen van de leerlingen geclassificeerd in enerzijds instrumenteel of relationeel begrip, en anderzijds in redeneren in de embodied dan wel de symbolic world.

Voorafgaand aan de classificatie van de denkwijzen bij de antwoorden werd een gevalideerde criterialijst ontwikkeld. Door de gevalideerdheid van de criteria kunnen de classificatieresultaten op basis van de criterialijst in wetenschappelijke publicaties worden opgenomen.

Dit hoofdstuk beschrijft de procedure voor de ontwikkeling van de gevalideerde criterialijst en de classificatieprocedure op basis van de ontwikkelde lijst.

4.1 Procedure voor de ontwikkeling van de classificatiecriteria

Het ontwikkelproces van de criteria dat hun validiteit waarborgt verliep als volgt.

1. Ontwikkeling van de conceptversie van de criteria.
2. Bespreking van de conceptcriteria in de CoL (Community of Learners). Op basis van de discussie in de CoL over de criteria werden deze aangescherpt.
3. Een onafhankelijk ervaringsdeskundige en de ontwikkelaar van de criteria classificeerden ieder voor zich met de aangescherpte criteria de antwoorden van de leerlingen. Op basis van de verschillen die na het classificeren optraden kwamen deze beoordelaars tot overeenstemming over de omschrijving van de criteria.

Hiermee was het instrument voor de classificatie, de nu verkregen criterialijst, valide.

4.2 Procedure voor de classificatie

Het proces voor de classificatie van de antwoorden van de leerlingen verliep als volgt.

1. De antwoorden van dubblanten worden uit de gegevens verwijderd.
2. Drie docenten classificeerden onafhankelijk van elkaar de antwoorden van de leerlingen op basis van de ontwikkelde criterialijst.
3. De drie docenten bespraken samen de verkregen resultaten en kwamen, eventueel op basis van meerderheid van stemmen, tot één lijst met hun classificatie van de antwoorden.
4. De ontwikkelaar van de criteria classificeerde de antwoorden van de leerlingen onafhankelijk van de docenten. Deze classificatielijst werd vergeleken met de classificatielijst van de docenten. Uit deze twee classificatielijsten werd één classificatielijst overeengekomen.

Hiermee waren de antwoorden van de leerlingen op valide wijze geclassificeerd.

5 Resultaten

In drie lessen, waarin het berekenen van de sinus en de cosinus in de vier kwadranten op basis van de eenheidscirkel werd behandeld, hebben de leerlingen tussentijds gewerkt aan het beantwoorden van vragen op papier. De lessen vonden in drie klassen op drie verschillende scholen plaats.

Paragraaf 5.1 beschrijft het leerlingmateriaal in de werkbladen. Paragraaf 5.2 bevat de beantwoording van de opgaven door de leerlingen, en paragraaf 5.3 beschrijft het ontwerp van de classificatiecriteria voor de denkwijzen van de leerlingen en de uitgangspunten die voor de criteria zijn gehanteerd.

5.1 Werkbladen

Het leerlingmateriaal was een werkblad met daarin de opgaven die de leerlingen tijdens de les maakten. Voor de les op het Marianum is het werkblad in bijlage 1 gebruikt. In de lessen op het Erasmus en het Noordik waren de opgaven 1 tot en met 5 dezelfde als voor het Marianum, en de opgaven 6 en 7 zoals opgenomen in bijlage 2. De lessen op het Erasmus en het Noordik werden eerder gegeven dan de les op het Marianum. Voor de les op het Marianum zijn de opgaven 6 en 7 aangepast om de leerlingen te stimuleren om op te schrijven hoe ze tot hun eindantwoord zijn gekomen.

5.2 Beantwoording van de opgaven

De antwoorden van de leerlingen in de drie klassen op de opgaven op de werkbladen zijn beschreven in de tabel in bijlage 3. De tabel bevat de letterlijke formulering van de antwoorden door de leerlingen. De tabel beschrijft ook de tekeningen die de leerlingen bij de beantwoording hebben gemaakt.

5.3 Ontwerp van de classificatiecriteria

Aan de classificatiecriteria liggen uitgangspunten ten grondslag. Paragraaf 5.3.1 beschrijft en onderbouwt de uitgangspunten voor de classificatie van antwoorden als instrumenteel of relationeel begrip. Paragraaf 5.3.2 beschrijft de criteria zelf voor de classificatie van antwoorden als instrumenteel of relationeel begrip.

Paragraaf 5.3.3 beschrijft en onderbouwt de uitgangspunten voor de classificatie van antwoorden als denken in de embodied of de symbolic world. Paragraaf 5.3.4 beschrijft de criteria zelf voor de classificatie van antwoorden als denken in de embodied of in de symbolic world.

5.3.1 Uitgangspunten voor de classificatie instrumenteel of relationeel

Voor het ontwerp van de classificatiecriteria voor instrumenteel of relationeel begrip zijn de volgende uitgangspunten gehanteerd.

Om een denkwijze als relationeel begrip te classificeren moet uit het antwoord ook echt blijken dat er wordt geredeneerd, omdat dit het primaire kenmerk van relationeel begrip is (Tall, 1979). Evenzo moet voor de classificatie instrumenteel begrip in het antwoord een instrumentele toelichting staan, dat wil zeggen een productie van het antwoord aan de hand van gememoriseerde gegevens en oplossingsroutes (Tall, 1979).

Als uitgangspunt worden antwoorden zonder toelichting niet geclassificeerd als relationeel of als instrumenteel.

In sommige gevallen blijkt uit een antwoord zonder toelichting toch inzicht. Deze gevallen zijn in de criteria verwerkt. Inzicht blijkt bijvoorbeeld als leerlingen opschrijven dat $\sin(120^\circ) = \sin(60^\circ)$ zonder een toelichting te geven, omdat leerlingen dit antwoord niet zomaar bedenken zonder het bijbehorende inzicht te hebben.

Daarom hebben wij dit antwoord als relationeel begrip geclassificeerd.

1. Een antwoord dat wordt beredeneerd met iets wat ter zake doet duidt op relationeel begrip.
2. Een antwoord dat alleen met letterlijke gegevens wordt toegelicht of gemotiveerd is instrumenteel begrip.
3. Relationeel begrip is bovenliggend aan instrumenteel begrip: wanneer een groepje meerdere antwoorden bij een vraag geeft, en minimaal één van deze afzonderlijke antwoorden wordt geclassificeerd als relationeel begrip, dan wordt het complete antwoord geclassificeerd als relationeel begrip.
4. Geen antwoord, een antwoord zonder motivatie (dit zijn ja/nee, omschrijvingen daarvan, en kreten), of een antwoord dat verwijst naar ontbrekende voorkennis is noch instrumenteel, noch relationeel begrip.

Foute en onvolledige antwoorden kunnen geclassificeerd worden. Zoals beschreven staat in dit onderzoek de denkwijze die uit de antwoorden van leerlingen naar voren komt centraal. Hiervoor hoeven de gegeven antwoorden dus niet volledig of zelfs correct te zijn.

We streven ernaar om van de voorkomende antwoorden er zo veel mogelijk te categoriseren, en om dus zo weinig mogelijk antwoorden niet categoriseerbaar te verklaren. Het komen tot een zo hoog mogelijk aantal categoriseerbare typen antwoorden geven we vorm door de inbreng van verschillende deskundigen voor de formulering van de verschillende criteria te wegen, waardoor veel zinvolle argumenten en invalshoeken onder de loep worden genomen.

Uiteraard zijn er antwoorden die echt niet classificeerbaar zijn, zoals in het algemeen een ongemotiveerd "Ja.", "Nee.", "Ik weet het niet.", of wanneer geen antwoord is gegeven.

Als bij een vraag geen antwoord is gegeven vindt van dit antwoord geen classificatie plaats. Dit is een handelswijze die in wetenschappelijk onderzoek gebruikelijk is. Een gegeven onzinnig antwoord zonder motivatie biedt ook geen basis voor classificatie en wordt dan ook niet geclassificeerd.

5.3.2 Criteria voor de classificatie instrumenteel of relationeel begrip

De classificatiecriteria voor het classificeren van de antwoorden als instrumenteel of relationeel begrip zijn opgenomen in bijlage 4.

Aan het begin van iedere vraag staan de algemene uitgangspunten voor de classificatie vertaald naar de antwoorden bij die vraag. Deze uitgangspunten dienen ervoor om bij lastige gevallen houvast te bieden, en om inzichtelijk te maken dat de beoordelingscriteria consistent zijn over de verschillende vragen heen.

Onder deze algemene uitgangspunten staan per vraag steeds een aantal kant-en-klare classificatiecriteria voor de meest voorkomende antwoorden bij de vragen. Voor het classificeren van het merendeel van de antwoorden kan hiervan direct gebruik worden gemaakt.

In de uitgangspunten valt te zien dat het kan voorkomen dat bepaalde gegeven antwoorden niet als instrumenteel begrip of als relationeel begrip kunnen worden geclassificeerd.

5.3.3 Uitgangspunten voor de classificatie embodied of symbolic world

Voor het classificeren van denken in de embodied of in de symbolic world is het basisuitgangspunt dat wordt bekeken of een antwoord is gebaseerd op een figuur of elementen daaruit of daarnaar toe werkt. Als dat het geval is is de classificatie embodied, omdat dan is uitgebeeld dat voor de oplossing is gezocht naar een voorstelling van het probleem. Het voorstellen van het probleem is primair kenmerkend voor denken in de embodied world (Tall, 2002, 2004).

Als een antwoord is gebaseerd op het gebruik van formules of symbolen, en een figuur wordt eventueel alleen ter toelichting gebruikt, dan is de classificatie symbolic (Tall, 2002, 2004).

De aanwezigheid van een figuur in de toelichting is dus op zich niet bepalend voor de classificatie; het gaat erom of die figuur de basis van de redenering bij het antwoord is geweest.

1. Een antwoord dat wordt beredeneerd op basis van (elementen uit) een figuur is embodied niveau.
2. Een antwoord met een redenering alleen op basis van symbolen of formules is symbolic niveau.
3. Geen antwoord, een antwoord zonder motivatie (dit zijn ja/nee, omschrijvingen daarvan, en kreten), of een antwoord dat verwijst naar ontbrekende voorkennis is noch embodied noch symbolic niveau.

Foute en onvolledige antwoorden kunnen ook in deze gevallen geclassificeerd worden. Zoals beschreven staat in dit onderzoek de denkwijze die uit de antwoorden van leerlingen naar voren komt centraal. Hiervoor hoeven de gegeven antwoorden dus niet volledig of zelfs correct te zijn.

We streven ernaar om van de voorkomende antwoorden er zo veel mogelijk te categoriseren, en om dus zo weinig mogelijk antwoorden niet categoriseerbaar te verklaren. Het komen tot een zo hoog mogelijk aantal categoriseerbare typen antwoorden geven we vorm door de inbreng van verschillende deskundigen voor de

formulering van de verschillende criteria te wegen, waardoor veel zinvolle argumenten en invalshoeken onder de loep worden genomen. Uiteraard zijn er antwoorden die echt niet classificeerbaar zijn, zoals in het algemeen een ongemotiveerd "Ja.", "Nee.", "Ik weet het niet.", of wanneer geen antwoord is gegeven.

Als bij een vraag geen antwoord is gegeven vindt van dit antwoord geen classificatie plaats. Dit is een handelswijze die in wetenschappelijk onderzoek gebruikelijk is. Een gegeven onzinnig antwoord zonder motivatie biedt ook geen basis voor classificatie en wordt dan ook niet geclassificeerd.

5.3.4 Criteria voor de classificatie embodied of symbolic world

De classificatiecriteria voor het classificeren van de antwoorden als denken in de embodied of de symbolic world zijn opgenomen in bijlage 5.

Aan het begin van iedere vraag staan de algemene uitgangspunten voor de classificatie vertaald naar de antwoorden bij die vraag. Deze uitgangspunten dienen ervoor om bij lastige gevallen houvast te bieden, en om inzichtelijk te maken dat de beoordelingscriteria consistent zijn over de verschillende vragen heen.

Onder deze algemene uitgangspunten staan per vraag steeds een aantal kant-en-klare classificatiecriteria voor de meest voorkomende antwoorden bij de vragen. Voor het classificeren van het merendeel van de antwoorden kan hiervan direct gebruik worden gemaakt.

In de uitgangspunten valt te zien dat het kan voorkomen dat bepaalde gegeven antwoorden niet als denken in de embodied world of in de symbolic world kunnen worden geclassificeerd.

5.4 Uitkomsten van de classificatie

Bijlage 6 bevat de uitkomsten van de classificatie. De gedrukte letters I, R, E en S in de tabel geven respectievelijk de classificaties instrumenteel, relationeel, embodied en symbolic aan die de docenten hebben gegeven aan het antwoorden van het betreffende groepje op de betreffende vraag. Een liggend streepje betekent dat het antwoord op de betreffende vraag niet is geclassificeerd.

De met de hand bijgeschreven letters geven de classificatie van de ontwikkelaar van de criteria aan, waar deze afweek van die van de docenten. De met de hand bijgeschreven letters hebben hierbij dezelfde betekenis als de gedrukte letters, evenals het streepje als aanduiding voor geen classificatie.

De kruisjes achterin de vakjes geven aan waar de classificatie van de docenten afweek van die van de ontwikkelaar van de criteria.

Van enkele vaak optredende verschillen in de classificaties is de oorzaak achterhaald. Deze worden hieronder toegelicht.

Vraag 6(1) en 7(1)

Bij vraag 6(1) en 7(1) classificeerden de docenten veel antwoorden als de embodied world. De ontwikkelaar van de criteria had deze antwoorden niet geclassificeerd. In de betreffende gevallen hadden de leerlingen wel lijnen getekend in de tekening, maar

de waarden van $\sin(40^\circ)$ en $\cos(40^\circ)$ of $\sin(220^\circ)$ en $\cos(220^\circ)$ uiteindelijk met de grafische rekenmachine berekend.

Vanwege de getekende lijnen classificeerden de docenten deze antwoorden als embodied. Omdat de antwoorden van deze groepjes overeenkwamen met de uitkomsten die de grafische rekenmachine geeft, hadden leerlingen de getekende lijnstukken niet gemeten om hun antwoord te bepalen, maar de antwoorden met de grafische rekenmachine berekend. Deze oplossingsroute is noch de embodied world, noch de symbolic world.

Vraag 6(2)

Bij vraag 6(2) classificeerden de docenten veel antwoorden als de embodied world. De ontwikkelaar van de criteria had deze antwoorden geclassificeerd als de symbolic world. In de betreffende gevallen hadden de leerlingen in hun figuur lijnen getekend, de lengtes van deze lijnen gemeten en op basis hiervan de waarden van $\sin(40^\circ)$ en $\cos(40^\circ)$ berekend.

Vanwege de getekende lijnen classificeerden de docenten deze antwoorden als de embodied world. De berekening van de uitkomsten door de leerlingen was in deze gevallen gebaseerd op de formule $\sin(\alpha) = (\text{overstaande zijde})/(\text{schuine zijde})$. De leerlingen tekenden en maten de lengten van de zijden om de antwoorden te berekenen. Omdat voor het berekenen van de oplossing de genoemde formule centraal stond - waarvoor weliswaar lijnstukken moesten worden opgemeten om hem te kunnen toepassen - is de bijbehorende classificatie van het antwoord de symbolic world. Hadden de leerlingen voor hun antwoord een eenheidscirkel getekend en de antwoorden berekend door de x- en y-coördinaat op de eenheidscirkel bij een hoek van 40° af te lezen door meten van de bijbehorende afstand, dan zou de embodied world de bijbehorende classificatie zijn.

6 Conclusies

Het doel van het onderzoek was het opzetten van classificatiecriteria voor wat betreft de denkwijze van leerlingen. Op basis van deze criteria moest het mogelijk worden om de denkwijze van leerlingen te classificeren als instrumenteel of relationeel begrip, en als denken in de embodied of in de symbolic world, door middel van beoordeling van antwoorden van leerlingen uit een lesson study.

Het is gelukt om uitgaande van de beschrijvingen van de genoemde kenmerken in de literatuur zulke classificatiecriteria op te stellen. Van de 544 classificaties door zowel de docenten als de ontwikkelaar van de criteria bleken er in eerste instantie 117 tussen hen te verschillen. Na een eerste vergelijk verschilden er nog 91. 83% van de classificaties kwam hierna dus overeen.

Bij het opstellen van de criteria op basis van de beschrijving van de kenmerken in de literatuur was het niet voldoende om te volstaan met de algemene uitgangspunten of richtlijnen voor de classificatie die in de paragrafen 5.3.1 en 5.3.3 zijn besproken. De reden hiervoor was dat deze uitgangspunten nog te algemeen zijn om de antwoorden consequent volgens de uitgangspunten te classificeren. Algemene uitgangspunten zijn echter wel nodig om aan te tonen dat de uitgedetailleerde classificatiecriteria op gelijke uitgangspunten berusten. Voor de uitdetaillering van de classificatiecriteria was het bovendien nodig om te kijken naar de typen antwoorden die leerlingen hadden gegeven. Enerzijds werd hierdoor gewaarborgd dat de criteria op de gegeven antwoorden van toepassing kunnen zijn, en anderzijds dat ze voor de antwoorden op iedere vraag uit de algemene uitgangspunten voortkomen.

De aansluiting van de criteria op de werkelijke denkwijze van de leerlingen tijdens het beantwoorden is gewaarborgd door tijdens het formuleren van de criteria met meerdere ervaringsdeskundigen hierover te discussiëren, met name op punten waar de interpretatie van de antwoorden van de leerlingen niet direct voor de hand lag. Een voorbeeld van zo'n situatie is wanneer leerlingen opschrijven dat de sinus van 120° gelijk is aan de sinus van 60° , zonder daarbij een toelichting te geven. De conclusie voor het opstellen van de criteria werd uiteindelijk dat leerlingen dit niet kunnen beweren zonder te snappen waarom het zo is, zodat het genoemde antwoord relationeel begrip aanduidt.

De classificaties van de antwoorden van de twee versies van vraag 6 verschilden opvallend van elkaar. Bij 6(2) moesten de leerlingen zelf een figuur tekenen voor het berekenen van $\sin(40^\circ)$ en $\cos(40^\circ)$, bij vraag 6(1) was de figuur voor het berekenen in de opgave gegeven.

In de gevallen waarin leerlingen zelf de figuur moesten tekenen waren de classificaties grotendeels relationeel begrip en symbolic world, waar de classificaties overwegend instrumenteel begrip en embodied world waren wanneer de leerlingen met een gegeven figuur moesten werken. De verschillen in classificatie zijn zo prominent dat het erop lijkt dat in dit geval het zelf moeten tekenen van een figuur de leerlingen tot relationeel denken heeft verleid, of zelfs gedwongen. Dit doet vermoeden dat de wijze van vragen stellen van invloed is op de denkwijzen die leerlingen bij de beantwoording hanteren.

7 Discussie en aanbevelingen

Voor het waarborgen van de kwaliteit van de classificatiecriteria en hun overeenstemming met de werkelijke denkwijzen van leerlingen zijn de criteria volgende een validerende procedure ontwikkeld. Hierbij zijn zaken vanuit verschillende gezichtspunten belicht door discussies waarbij ervaringsdeskundigen waren betrokken.

Een overeenstemming van 83% van de classificaties is niet slecht, maar niet hoog genoeg om de eenduidigheid van de criteria overtuigend aan te tonen. Hierbij moet nog wel in ogenschouw worden genomen dat over de verschillen die nu nog bestaan nog geen aanvullend vergelijk tussen de twee partijen die geclassificeerd hebben heeft plaatsgevonden.

In de conclusies werd al vastgesteld dat in het uitgevoerde onderzoek de manier van vragen stellen van invloed was op de classificatie-uitkomsten van de denkwijzen. Van tevoren goed nadenken over de vraagstelling, eventueel gekoppeld aan de denkwijze(n) waartoe je leerlingen zou willen verleiden, lijkt dus van belang voor de uitkomst van de classificatie. Zo zouden vragen die relationeel denkende leerlingen ook daadwerkelijk op relationele wijze tot hun oplossing laten komen als nut hebben dat zichtbaar wordt welke leerlingen van de groep het relationele denken in zich hebben. De anderen van de groep zouden dan in het antwoord een instrumentele oplossingsroute laten zien.

Een ander gewenst aspect van het ontwerpen van de vraagstelling is een hoge effectiviteit ervan, in de zin dat het aantal niet te classificeren antwoorden zo klein mogelijk zou moeten zijn. Uit niet geclassificeerde antwoorden valt immers niets op te maken, wat in feite een gemiste kans in het onderzoek betekent.

Aanvullende kenmerken om in antwoorden van leerlingen te sporen zijn of hun antwoorden voortkomen uit conceptueel leren of uit procedureel leren. Uit onderzoek volgt dat leerling die leren volgens de strategie van conceptueel leren beter met problemen in een onbekende context uit de voeten kunnen (Tall, 2001). Classificatiecriteria voor deze kenmerken kunnen in analogie met de methode die in dit onderzoek is gehanteerd worden ontwikkeld.

8 Referenties

- Gray, E.M. & Tall, D.O. (1994). Duality, ambiguity and • exibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 115–141.
- Tall, D.O. (1979). The Dynamics of Understanding Mathematics. *Mathematics Teaching*, 81, 50-52.
- Tall, D.O, Gray, E.M., Bin Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M., and Yusof, Y. (2001). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 1, 81–104.
- Tall, D.O. (2002). *Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics*. Warwick UK: Mathematics Education Research Centre, University of Warwick.
- Tall, D. O., (2004), Thinking through three worlds of mathematics, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen, Norway.

Bijlage 1: Werkblad

De eenheidscirkel

Naam1: -----

Naam2: -----

Spelregels:

Geef bij je antwoorden een toelichting, verklaring of motivatie.

Vul het formulier met z'n tweeën in.

Geen boek, schrift, **geen GRM** en niet typexen.

Alles inleveren.

Je hebt een passer nodig.....

Je hebt een geodriehoek nodig

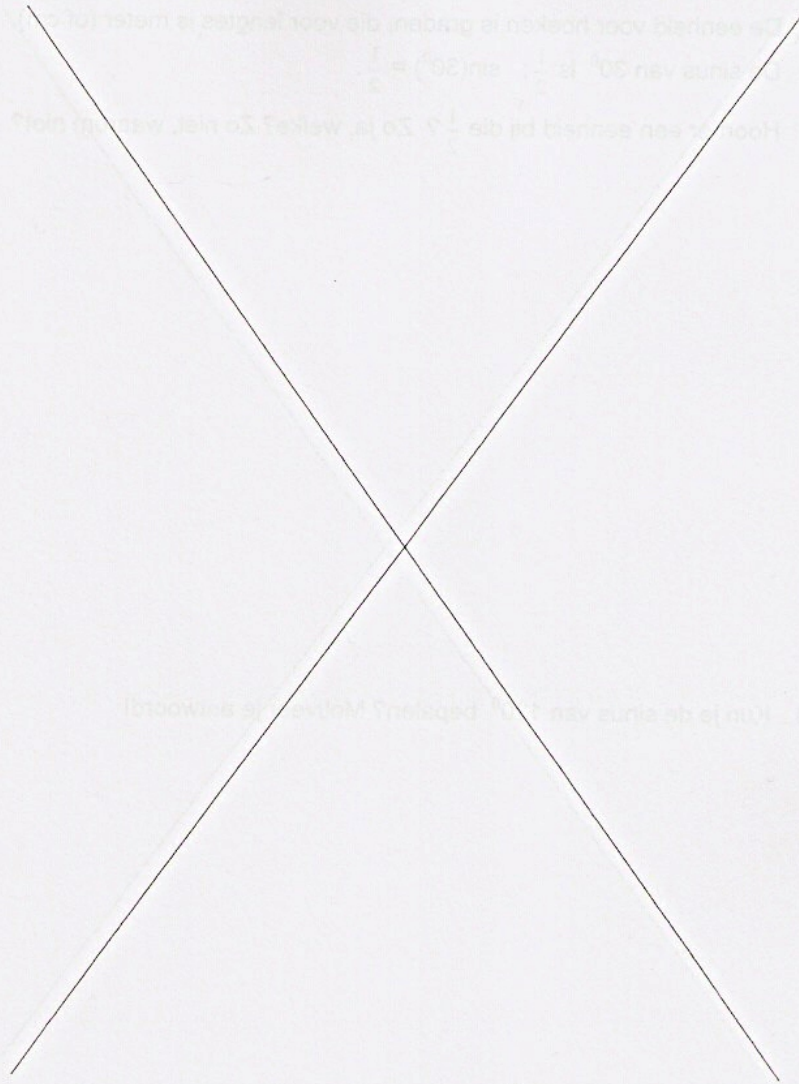
Pag. 1

14 april 2008 -- VWO 4 Wiskunde B

1. Schrijf alles op wat je weet over sinus.

De eenheidscirkel

-- DEZE PAGINA NIET BESCHRIJVEN --



WACHT MET OMSLAAN TOTDAT HET GEZEGD WORDT!

Pag. 3

14 april 2008 -- VWO 4 Wiskunde B

2. De eenheid voor hoeken is graden, die voor lengtes is meter (of cm).

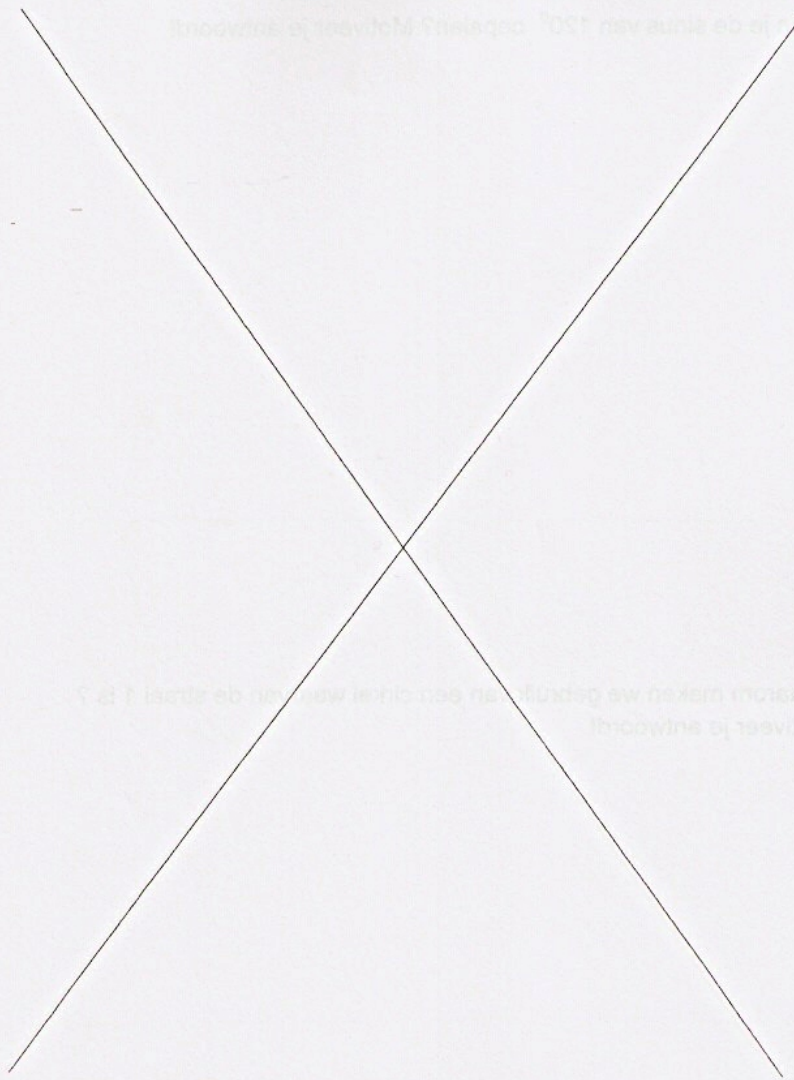
De sinus van 30° is $\frac{1}{2}$; $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$.

Hoort er een eenheid bij die $\frac{1}{2}$? Zo ja, welke? Zo niet, waarom niet?

3. Kun je de sinus van 120° bepalen? Motiveer je antwoord!

De eenheidscirkel

-- DEZE PAGINA NIET BESCHRIJVEN --



WACHT MET OMSLAAN TOTDAT HET GEZEGD WORDT!

Pag. 5

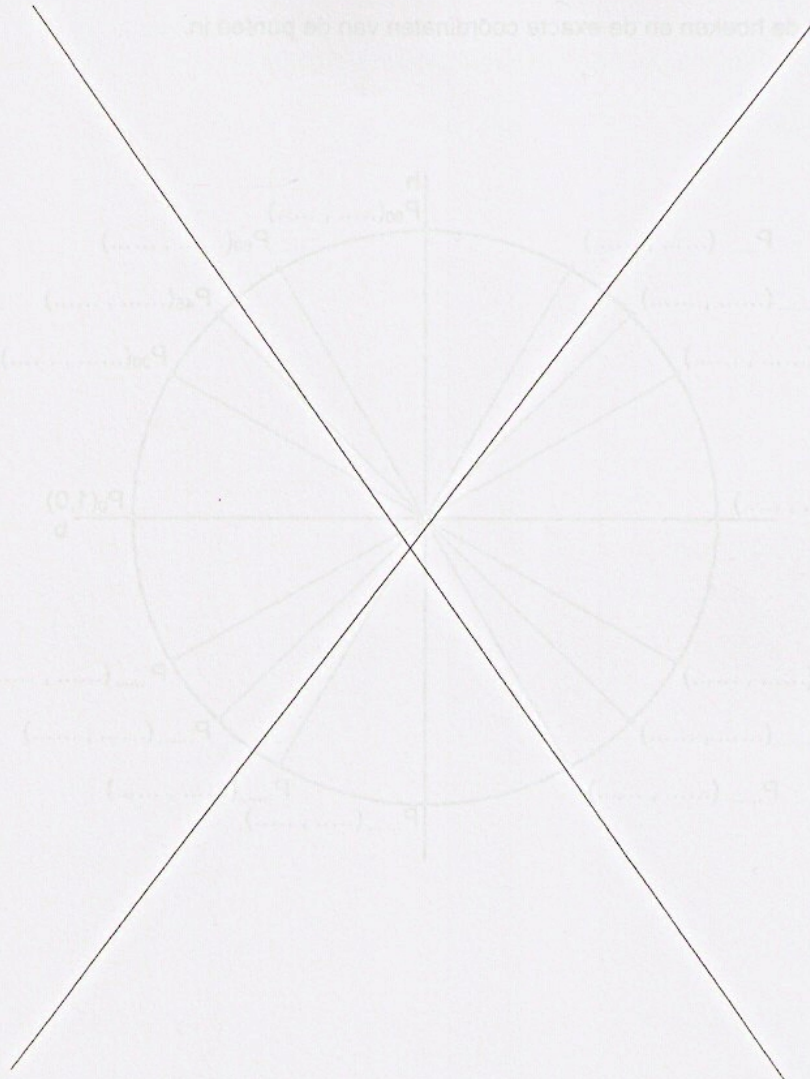
14 april 2008 -- VWO 4 Wiskunde B

3*. Kun je de sinus van 120° bepalen? Motiveer je antwoord!

4. Waarom maken we gebruik van een cirkel waarvan de straal 1 is ?
Motiveer je antwoord!

De eenheidscirkel

-- DEZE PAGINA NIET BESCHRIJVEN --

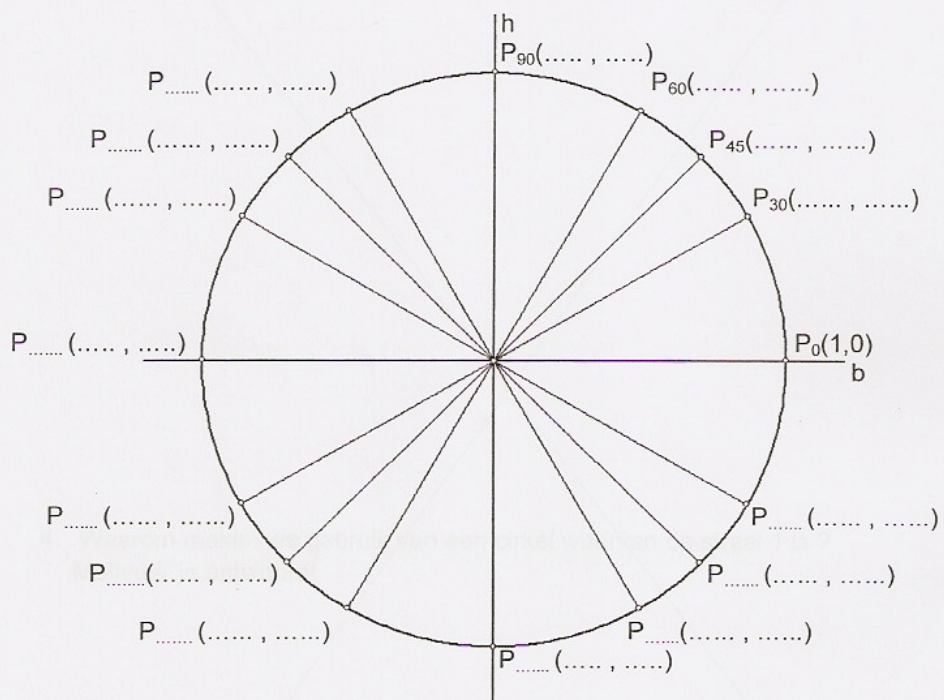


WACHT MET OMSLAAN TOTDAT HET GEZEGD WORDT!

Pag. 7

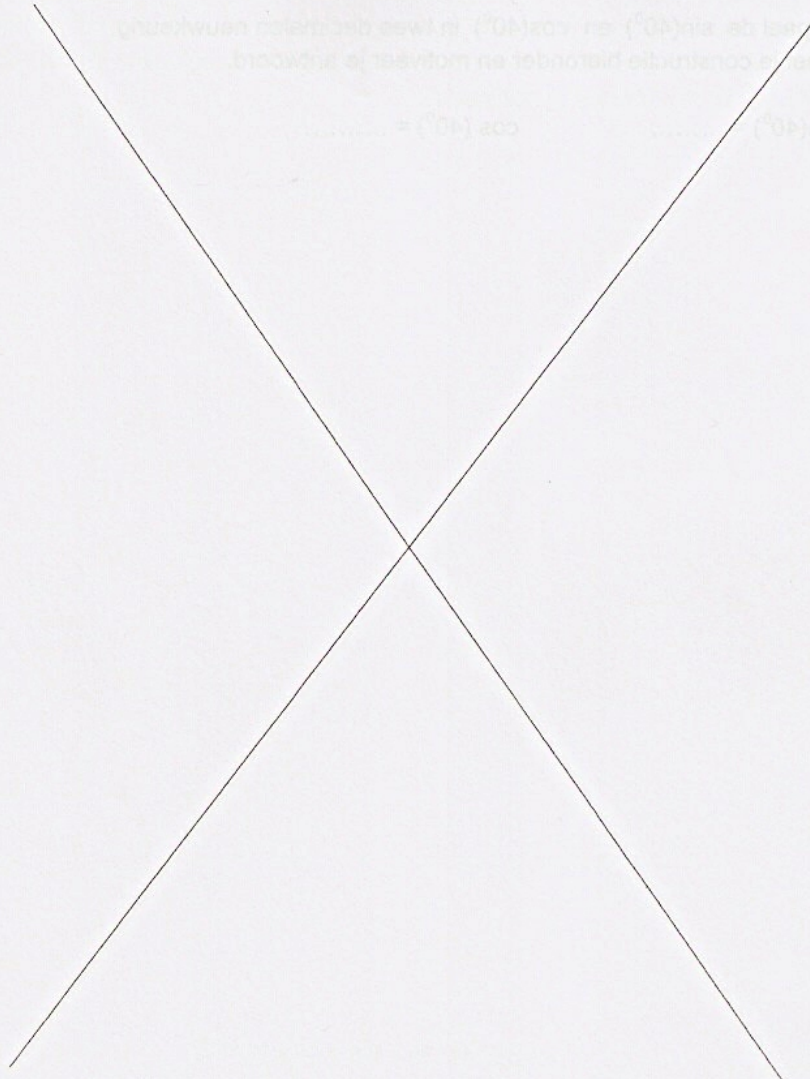
14 april 2008 -- VWO 4 Wiskunde B

5. Vul de hoeken en de exacte coördinaten van de punten in.



De eenheidscirkel

-- DEZE PAGINA NIET BESCHRIJVEN --



WACHT MET OMSLAAN TOTDAT HET GEZEGD WORDT!

Pag. 9

14 april 2008 -- VWO 4 Wiskunde B

De eenheidscirkel

6. Bepaal de $\sin(40^\circ)$ en $\cos(40^\circ)$ in twee decimalen nauwkeurig.
Geef je constructie hieronder en motiveer je antwoord.

$\sin(40^\circ) = \dots\dots\dots$ $\cos(40^\circ) = \dots\dots\dots$

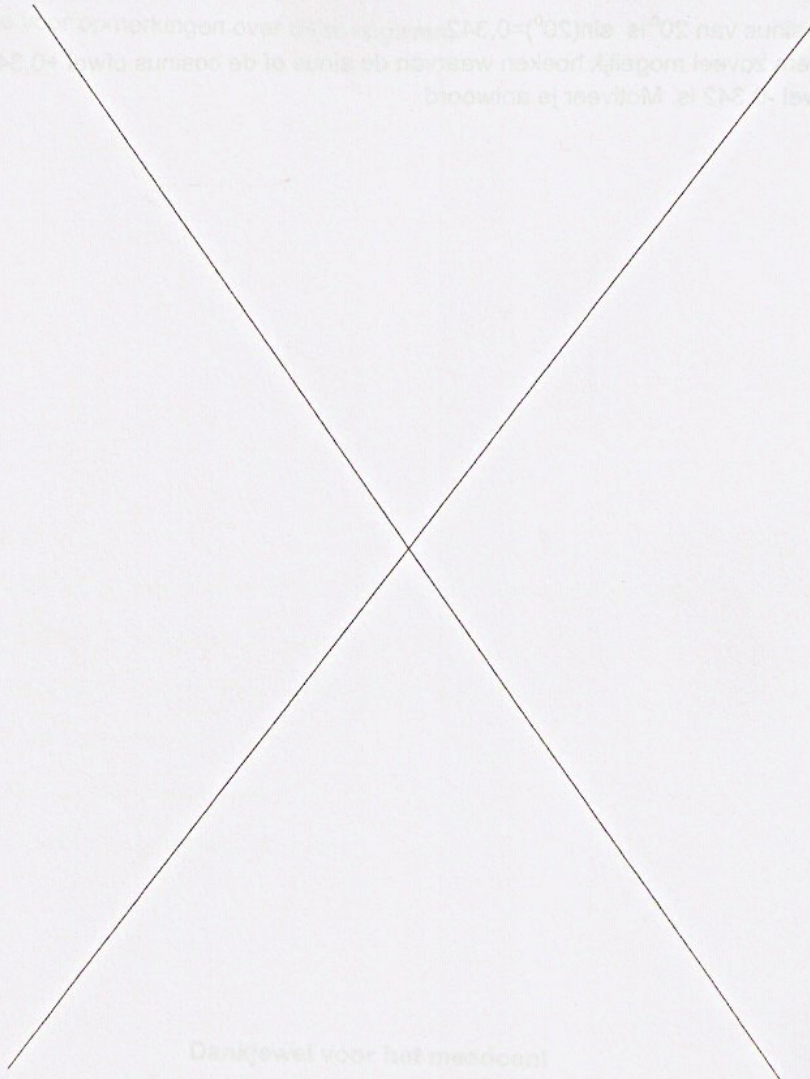


Pag. 10

14 april 2008 -- VWO 4 Wiskunde B

De eenheidscirkel

-- DEZE PAGINA NIET BESCHRIJVEN --



WACHT MET OMSLAAN TOTDAT HET GEZEGD WORDT!

Pag. 11

14 april 2008 -- VWO 4 Wiskunde B

De eenheidscirkel

7. De sinus van 20° is $\sin(20^\circ)=0,342$.
Noem zoveel mogelijk hoeken waarvan de sinus of de cosinus ofwel $+0,342$
ofwel $-0,342$ is. Motiveer je antwoord.

De eenheidscirke

Ruimte voor opmerkingen over deze opgaven:

Spelregels

Ges! bij je antwoorden een toelichting, verduaring of motivatie.

Vul het formulier dus, z'n tweeën in.

Geen boek, schrift, geen GRM of wat ook ever.

Alles leveren.

Je hebt een passer nodig.

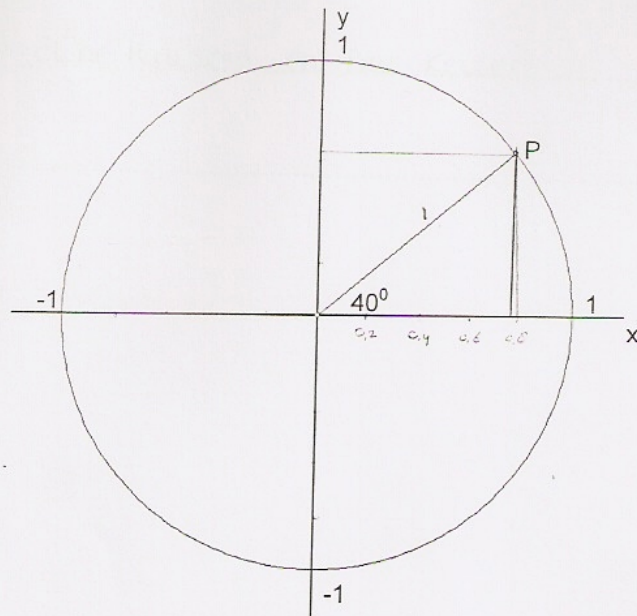
Je hebt een geodriestboek nodig.

Dankjewel voor het meedoen!

Pag. 13

14 april 2008 -- VWO 4 Wiskunde B

Bijlage 2: Werkblad opgave 6 en 7 voor Erasmus en Noordik



6. Bepaal met behulp van de bovenstaande figuur $\sin(40^\circ)$ en $\cos(40^\circ)$ in twee decimalen nauwkeurig.

$$\sin(40^\circ) = \dots\dots\dots 0.64 \quad \cos(40^\circ) = \dots\dots\dots 0.77$$

7. Bepaal ook $\sin(220^\circ)$ en $\cos(220^\circ)$ in twee decimalen nauwkeurig.

$$\sin(220^\circ) = \dots\dots\dots \quad \cos(220^\circ) = \dots\dots\dots$$

Ruimte voor opmerkingen over deze opgaven:

Bijlage 3: Beantwoording van de opgaven

Het Noordik

	1	2	3a	3b	4	5	6	7
Jeffrey Huang Danny Voortman	sinusrgl + formule o/s	Ja, de eenheid waarmee je rekt, bijvoorbeeld cm. (de zijde van de driehoek is 5 <u>cm</u>) Als er geen eenheid staat is er geen eenheid.	Nee, geen rechte hoek, $90 = \text{rechte}$ hoek $90 + 120 = 210$ dat is teveel voor een driehoek.	Ja, met een eenheidscirkel	Makkelijk rekenen, delen door 1	Correct ingevuld.	0,64 en 0,77 Centimeters afgezet langs assen. 0,2 , 0,4 ... langs x- as gezet. Vanuit P kromme verticale lijn naar x-as getekend.	-0,64 en -0,77 Niet duidelijk hoe waarden zijn bepaald.
Nathan Blanken Eifion Prinsen	o/s, driehoek o-a-s, exacte waarden $\sin 45$, 60, 30	Nee, het is een verhouding.	Nog niet, er is geen rechthoekige driehoek met een hoek van 120 te tekenen.	Ja, met de lengten in de eenheidscirkel. $\sin 120 = 0.5\sqrt{3}$	De lengten van de rechthoeks zijden komen overeen met sinus en cosinus.	Correct ingevuld.	0,64 en 0,77 Centimeters afgezet langs assen, 0,2 , 0,4 ... langs x- as gezet. Vanuit P verticale lijn naar x-as getekend.	-0,64 en -0,77 Hoek 220 aangegeven (foutief getekend) Niet duidelijk hoe waarden zijn bepaald.
Eline Huisjes Bas Keizers	o/s, formule sinusrgl	Nee, 1cm/2cm .	formule sinusrgl	Ja, met de eenheidscirkel	Omdat de schuine zijde dan altijd 1 is, dat is makkelijk om mee te rekenen.	Correct ingevuld.	0,64 en 0,77 Centimeters afgezet langs assen, 0,2 , 0,4 ... langs x- as gezet. Vanuit P verticale lijn naar x-as en horizontale lijn naar y-as getekend. Getal 1 bij de straal gezet.	-
Arjen Muis	o/s,	nee, omdat er geen	ja, is hetzelfde als	Ja, sinus van 120 is	Die waarde wordt	Alle waarden zijn	0,64 en 0,77	-0,64 en -0,77

David van Slooten	formule sinusrgl	eenheid voor bestaat.	de sinus van 60	het tegenovergestelde van de sinus van 60	ook bij standaard driehoeken gebruikt	positief, hier en daar verwisseling van x-, en y-coördinaat.	Centimeters afgezet langs assen, 0,2 , 0,4 ... langs x-as gezet. Vanuit P verticale lijn naar x-as getekend.	Niet duidelijk hoe waarden zijn bepaald.
Toone Boerman Sandra Peeters Jorn Eerhard	o/s, graden/radialen, cirkels/driehoeken, sinusregel, afstand bt SM1998A, inclinatiehoek	Ja, radialen	Nee dan is er geen rechte hoek	tegenovergesteld	Dan komen de driehoeken van 45, 30 en 60 erin voor met V3 en V2	Overall V3 ipv 0,5V3 P270(0,5; -V3) Verder correct.	0,75 en 0,66 Centimeters afgezet langs assen, 0,2 , 0,4 ... langs x-as en y-as gezet. Vanuit P verticale lijn naar x-as en horizontale lijn naar y-as getekend.	-
Marije Schelfhorst Mandy Ligtenberg	o/s, sinusrgl + formule	nee, omdat het abstract is wat je meet	$120 + 90 = 210$ $180 - 210 = -30$ dus nee een hoek van 120 en hoek van 90 en een hoek van 15.	nee! zie 3.	die hebben we ook bij de standaard-driehoekjes. is makkelijk.	P90(1, 1) P120(-0,5; 0,5V2) P240(-0,5; -0,5V2) P270(1, -1) P300(0,5; -0,5V2) Verder correct.	0,64 en 0,77 Centimeters afgezet langs assen, 0,2 , 0,4 ... langs x-as gezet. Vanuit P verticale lijn naar x-as en horizontale lijn naar y-as getekend. Getal 1 bij de straal gezet en 0,6 bij de afstand van P tot de x-as. In tabel gecontroleerd dat $0,6^2 + 0,8^2 = 1$.	-0,64 en -0,77 Hoek 220 aangegeven. Niet duidelijk hoe waarden zijn bepaald.

							Opm: met GRM.	
Marleen Kreijkes Mariska Klein Jan	formule sinusregel, o/s	niet, niet gehad dus of die bestaat weten we niet	je hebt geen rechte hoek: $120 + 90 = 210$ 120-30-30 driehoek getekend.	zelfde als 3	dan kun je gebruik maken vd standaard driehoek	Hoeken in derde en vierde kwadrant lopen van 0...-180, dit is niet fout. Correct ingevuld.	?= $\sin 40^\circ \cdot 1 \approx 0,75$ $0,8/1 \approx 0,6$ Centimeters afgezet langs assen, 0,2 , 0,4 ... langs x- as gezet. Vanuit P verticale lijn naar x-as getekend.	-
Aafke Uithoorn	sos, o/s, formule sinusregel	Ik denk het wel, maar zou niet weten wat voor eenheid (nog nooit behandeld)	-	$120-90=30 \rightarrow 0,5?$	zelfde als bij standaard driehoeken	P135(-0,5V2; 0,5V3) P225(-0,5V2; - 0,5V3) P315(0,5V2; - 0,5V3) Verder correct.	0,64 en 0,77 Centimeters afgezet langs assen, 0,2 , 0,4 ... langs x- as gezet. Vanuit P kromme verticale lijn naar x-as getekend.	-0,64 en -0,77 Hoek 220 aangegeven. Niet duidelijk hoe waarden zijn bepaald.
Frank Gootjes Martijn Blikmans	sinusrgl + formule, o/s	ja, want je kan niet zomaar van meter naar graden	-	Ja, is $120-90 =$ gewoon $\sin(30)$	Kan je makkelijk vermenigvuldigen met andere waarden	Correct ingevuld.	0,64 en 0,76 Centimeters afgezet langs assen, 0,2 , 0,4 ... langs x- as gezet.	-0,64 en -0,76 Niet duidelijk hoe waarden zijn bepaald. Opm: Best wel lastig
Kimriek Schutten Lisa Beld Elsemiek Schepers	o/s, formule sinusregel, voor bepalen grootte hoek of lengte zijde	Nee	Nee, stompe hoek, maar wat?	Ja	makkelijk omrekenen	Hoeken in derde en vierde kwadrant lopen van 0...-180, dit is niet fout. Correct ingevuld.	$\tan 40^\circ \cdot 0,8$ 0,64 $\sin 40^\circ = o/s$ o/1 $o = \sin 40^\circ = 0,64$ $\sin 40^\circ = 0,64$ 0,8 (0,8/1)	-0,64 en -0,80 Niet duidelijk hoe waarden zijn bepaald.

							Centimeters afgezet langs assen, 0,2 , 0,4 ... langs x-as gezet.	
Doremieke van Nieuwland Gido Drent	o/s, bij 1 hoek 90, sinusrgl + formule bij alle driehoeken	nee, geen idee waarom	nee kan niet want er is geen hoek van 90 meer.	ja, maar de sinus word een mingetal	dan heb je steeds de standaard driehoek	Correct ingevuld.	1/? 0,8 0,62 Centimeters afgezet langs assen, 0,2 , 0,4 ... langs x-as gezet. Vanuit P verticale lijn naar x-as en horizontale lijn naar y-as getekend.	-0,62 en -0,80 Hoek 220 aangegeven, vanuit snijpunt met cirkel verticale lijn naar x-as getekend. Niet duidelijk hoe waarden zijn bepaald. Opm: makkie!
Valerie Tijhuis Kirsten Koerssen Marloes Plender	o/s v e rechthoekige driehoek, sinusrgl + formule	nee, het is een factor	ja, = hetzelfde als sin60, want $180 - 120 = 60$	ja, hetzelfde als sin60, want $180 - 120 = 60$	dan kun je het makkelijker berekenen	Hoeken in derde en vierde kwadrant lopen van 0...-180, dit is niet fout. Correct ingevuld.	0,6 en 0,8 Centimeters afgezet langs assen, 0,2 , 0,4 ... langs x-as gezet.	-0,6 en -0,8 Niet duidelijk hoe waarden zijn bepaald.

Het Erasmus

	1	2	3a	3b	4	5	6	7
Ezgi Sahin Asmae Tazi Hnyine	o/s, sos, sinusrgl + formule, driehoek 1-V3-2, driehoek 1-1-V2, exacte waarden sin 30, 60, 45	nee, want je berekent ahw een helling	$180 - 120 = 60 \Rightarrow$ $\sin 120 = \sin 60$, kun je berekenen met driehoek van vraag 1.	assenstelsel met cirkel getekend	dan kun je gemakkelijk werken met de verhoudingsdriehoek. In elke zijde is er een 1.	Alle hoeken tussen 0 en 90 graden. P120(-0,5; V3) Verder correct.	0,64 en 0,77 Vanuit P verticale lijn naar x-as en horizontale lijn naar y-as geschetst.	-0,64 en -0,77 Hoek 220 aangegeven met als basis de negatieve x-as en de getekende straal als tweede been. Niet duidelijk hoe waarden zijn bepaald. Opm: De sin is altijd de y-as en de cos altijd de x-as
Oscar Treffers Rens Dommerholt	o/s, formule sinusregel, exacte waarden sin 90, 45, 180, 0, 135, 360, 270, 30, 225	verhoudingen hebben geen eenheid	zelfde als sin60	$\sin 60 = 0.5\sqrt{3}$	past bij de verhouding. 1 = het makkelijkst.	Correct ingevuld.	0,64 en 0,76 Vanuit P verticale lijn naar x-as en horizontale lijn naar y-as geschetst. Getal 1 bij de straal gezet.	-0,64 en -0,76 Niet duidelijk hoe waarden zijn bepaald. Opm: $\sin 40 = -\sin 40$ $-\sin 40 = \sin 220$
Marco Jansen	o/s, driehoek ABC met $\sin LB = AC/BC$, driehoek 1-1-V2 met exacte waarde sin45,	Nee, want het kan voor verschillende berekening worden gebruikt. Het ligt dus aan de situatie.	Ja, die is hetzelfde als sinus van 30 ?	zie vorige	Zo kun je makkelijk verhoudingen maken.	Correct ingevuld. Driehoeken in de figuur getekend om de coördinaten te berekenen.	0,64 en 0,77 Vanuit P verticale lijn naar x-as en horizontale lijn naar y-as	-0,64 en -0,77 Hoek 220 aangegeven, vanuit snijpunt met cirkel

	driehoek 1-V3-2 met exacte waarden $\sin 30$ en $\sin 60$						getekend. Getal 1 bij de straal gezet.	verticale lijn naar x-as getekend. Niet duidelijk hoe waarden zijn bepaald. Opm: Geen geodriehoek
Niek Bremer Joris Bos	sos, o/s, exacte waarden $\sin 30$, 45, 60, driehoek 1-1-V2, driehoek 1-V3-2, formule sinusregel	Je zet er alleen een eenheid achter, als je niet de gegeven eenheid ook met een eenheid hebt geschreven.	Ja, met de rekenmachine.	Ja, met de eenheidscirkel (0.5, -0.5V3)	Dan is de lijn gelijk aan de $\cos/\sin$ van de hoek.	Correct ingevuld.	0,64 en 0,8 Vanuit P verticale lijn naar x-as en horizontale lijn naar y-as getekend. Getal 1 bij de straal gezet. Bij x-as $\cos$ en bij y-as $\sin$ gezet.	-0,8 en -0,64 Hoek 220 ruwweg aangegeven, vanuit snijpunt met cirkel horizontale lijn naar y-as getekend. Niet duidelijk hoe waarden zijn bepaald.
Wouter Bakhuis Zackaria Tazi	o/s, $\sin^{-1}(o/s)=a$, verhoudingstabel met $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, a,b,c, rechthoekige driehoek, driehoek 1-1-V2 driehoek 1-V3-2	Nee, het is een verhoudingsgetal	Hetzelfde als $\sin 60$	Al beantwoord	Eerste getal, makkelijk mee te rekenen	Correct ingevuld. 1-1-V2 driehoek en 1-V3-2 driehoek getekend.	0,64 en 0,76 Vanuit P verticale lijn naar x-as en horizontale lijn naar y-as getekend. Getal 1 bij de straal gezet.	-0,64 en -0,76 Niet duidelijk hoe waarden zijn bepaald.
Tim Kiewiet	uit derde klas o/s, $\sin$ usrgl + formule, gedeelte H6 af	Het is in verhouding. Hangt van de gegevens af.	$\sin 120 = \sin 60$, zie H6	0.5V3	$\sin = oz/sz$ aangezien de schuine zijde 1 is heb je meteen de hoogte met $\sin(x^\circ)$	Correct ingevuld.	0,64 en 0,8 180 bij negatieve x-as gezet.	-0,64 en -0,8 $180 + 40 = 220$

								Niet duidelijk hoe waarden zijn bepaald.
Sarah de Lange Mariska Wevers	o/s, rechthoekige driehoek met o en s, exacte waarden sin 30, 45, 60, driehoek 1-1-V2 driehoek 1-V3-2, formule sinusregel	je kunt er alleen een eenheid achter zetten als die wordt gegeven	met de GR	assenstelsel met cirkel getekend, hoek van 120 graden, snijpunt P van tweede been met cirkel. $\sin 120 = \sin 60 = 0.5\sqrt{3}$ $\sin = \#as$ $\cos = \#as$	-	Correct ingevuld. Bij x-as is cos gezet, bij y-as sin.	0,6 en 0,8 Vanuit P verticale lijn naar x-as getekend. Bij x-as cos en bij y-as sin gezet.	-0,6 en -0,8 Hoek 220 ruwweg aangegeven, foutief als 120 aangegeven, vanuit snijpunt met cirkel verticale lijn naar x-as getekend. Niet duidelijk hoe waarden zijn bepaald.
Eline Yvonne	o/s, driehoek meto, a en s, $AB=BC/AC$, formule sinusregel met driehoek, exacte waarde sin30, driehoek 1-V3-2	nee, de eenheden hoeft je niet te gebruiken, er wordt in de som geen eenheden gegeven. Dus je zou niet af kunnen leiden watvoor eenheid je moet gebruiken. De 0.5 staat voor een verhouding.	assenstelsel getekend met cirkel en hoek 30, en deze gespiegeld in de y-as. Hoekboog naar hoek in 2e kwadrant. $\sin 120 = -1$	assenstelsel getekend met eenheidscirkel. Driehoek 30-60-90 in tweede kwadrant, hoekboog naar 120. dus $0.5\sqrt{3}$ want $\sin 120 = 60$	Dit is een makkelijke methode, want een cirkel is 360, een helft is 180, dan kun je makkelijk gebruik van maken door het op te delen in een helft (->180) en een kwart (-90)	Coördinaten van P210 en P240 en van P300 en P330 verwisseld. Verder correct.	0,65 en 0,79 Vanuit P verticale lijn naar x-as en horizontale lijn naar y-as getekend.	-0,65 en -0,79 Hoek 220 getekend, vanuit snijpunt met cirkel verticale lijn naar x-as en horizontale lijn naar y-as getekend.
Sven	sinusrgl + formule, o/s	nee het is het hellingsgetal daar kun je de hoek mee berekenen en het hellingspercentage	ja, het is hetzelfde als sin30. er is een hoek van 90 bij dat hoeft je dan niet mee te tellen.	-	$\sin 90 = 1$ en $\cos 90 = 1$ $\sin 180 = 0$ $\sin 270 = -1$ $\cos 180 = -1$ dus makkelijk	Coördinaten van P120 en P150 verwisseld. Verder correct.	0,64 en 0,77 Vanuit P verticale lijn naar x-as en horizontale lijn naar y-as geschetst.	-0,64 en -0,77 Hoek 220 ruw geschetst, vanuit snijpunt met cirkel verticale lijn naar x-as en horizontale

								lijn naar y-as ruw geschetst. Niet duidelijk hoe waarden zijn bepaald.
Laura van Schie Lisa Mulder	sos, o/s, rechthoekige driehoek als voorbeeld, zijden kloppen niet, o/s wel goed toegepast, sinusrgl + formule	Het heeft geen eenheid, het is een soort schaal ??	Nee, je hebt geen rechte hoek?? Driehoek met een hoek van 120 getekend.	Assenstelsel met eenheidscirkel getekend, driehoek met hoek van 120 met een been op x-as getekend. Afstand van snijpunt met eenheidscirkel tot y-as getekend met 0.5 erbij geschreven. 1.5?	is makkelijk mee te rekenen	Correct ingevuld.	0,64 en 0,77 Vanuit P verticale lijn naar x-as en horizontale lijn naar y-as geschetst. Bij x-as cos en bij y-as sin gezet.	-0,64 en -0,77 Niet duidelijk hoe waarden zijn bepaald.
Mitchel van Straaten	o/s, verhoudingstabel met sina, sinb, sing, a,b,c, exacte waarde sin90	hoort niks achter, het zijn verhoudingen	Ja, sinusregel	Ja, eenheidscirkel	Bij een ander getal moet je met verhoudingen uitrekenen. Bij 1 kan je het met sin = en cos =	P320 ipv P300 P335 ipv P315 P350 ipv P330 Verder correct.	0,64 en 0,77 Vanuit P verticale lijn naar x-as en horizontale lijn naar y-as getekend. Bij x-as 0,77 en bij P 0,64 gezet.	-0,64 en -0,77 Hoek 220 getekend. Niet duidelijk hoe waarden zijn bepaald.
Britt van der Arend Lisa Engberts	o/s, rechthoekige driehoek ACB getekend, sinLA=BC/AB, sinLB=AC/AB, SOSCASTOA met SOS onderstreept,	nee, tenzij er een eenheid is gegeven	Assenstelsel met eenheidscirkel getekend, hoek 120 met cirkelboog en hoek a, snijpunt P met eenheidscirkel hoeken 30 en 60 in	z.o.z.	assenstelsel getekend met cirkel om O met straal 2. sin90 ≠ 2. anders krijg je niet uit sin90 = 1, dus het	Correct ingevuld.	0,6 en 0,8 Vanuit P verticale lijn naar x-as en horizontale lijn naar y-as getekend.	-0,6 en -0,8 Hoek 220 ruw geschetst, vanuit snijpunt met cirkel verticale lijn naar x-as en horizontale

	driehoek ABC 1-V3-2, hieruit exacte waarden berekend van $\sin 60$ en $\sin 30$, formule sinusregel voor driehoek zonder rechte hoek		tweede kwadrant, zijde AB langs de negatieve x-as. Als $\alpha = 120$ graden is $-90 = 30/(6 \text{ of } 3)0$ $\sin 60 = AP/BP = AP/1$ $\sin 60 = AP$ $\sin 60 = 0,5\sqrt{3}$ $\sin 120 = 0,5\sqrt{3}$, dus het kan		kan niet		Bij x-as 0,77 en bij P 0,64 gezet. Getal 1 bij de straal gezet. Bij O A en bij (0,8 ; 0) B gezet. 180 langs de negatieve x-as en 270 langs de negatieve y-as gezet.	lijn naar y-as ruw geschetst. Niet duidelijk hoe waarden zijn bepaald. Opm: $AB = 0,8$ $AP = 1$ $\cos 40 = 0,8/1 = 0,8$ $\sin 40 = 0,6/1 = 0,6$ $\sin 220 = -0,6$ $\cos 220 = -0,8$
Katya A Carlijn W	o/s, driehoek 1-1-V2, hieruit exacte waarde van $\sin 45$, driehoek 1-V3-2, hieruit exacte waarden van $\sin 30$ en $\sin 60$	niet, omdat het een verhouding is.	assenstelsel getekend met eenheidscirkel $\sin = 0,5\sqrt{3}$. $180 - 90 = 60$, $\sin$ van 60	zie vraag 3	Omdat de zijde ook 1 is.	P190 ipv P210 P205 ipv P225 P220 ipv P240 P300(0,5; -0,5 $\sqrt{2}$) Verder correct.	0,63 en 0,80 Vanuit P verticale lijn naar x-as en horizontale lijn naar y-as getekend. Bij P $\cos \sin (0,8, 0,7)$ gezet. Langs positieve en negatieve x-as $\cos$ gezet en langs positieve en negatieve y-as $\sin$ gezet	-0,63 en -0,80 Hoek 220 getekend, vanuit snijpunt met cirkel verticale lijn naar x-as en horizontale lijn naar y-as getekend. Bij snijpunt met cirkel $\cos \sin (-0,8; -0,63)$ gezet.
Stephanie Bekhuis Fleur Schroeten	sinusrgl + formule, o/s, driehoek 1-V3-2, driehoek 1-1-V2,	Er hoort geen eenheid achter, want het zijn verhoudingen.	Driehoek ABC getekend met $B = 120$ graden, $AB = 3$, $BC = 6$.	$120/30 = 4$ assenstelsel met cirkel getekend, 4	makkelijk getal	Hoeken in derde en vierde kwadrant lopen van 0...-180, dit is niet fout.	0,64 en 0,77 Vanuit P verticale lijn naar x-as	-0,64 en -0,77 Hoek 220 getekend, vanuit

	hieruit berekend de exacte waarden van $\sin 30$, 60 , 45 en $\cos 30$, 45 , 60 SOS CAS TOA		Met de sinusregel $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ $\frac{6}{\sin A} = \frac{b}{\sin 120} = \frac{3}{\sin C}$	aanliggende hoeken van 30 getekend, bij het been van hoek 120 1 gezet, vanuit snijpunt van hoek 120 met cirkel verticale lijn naar de x-as.		Bij x-coördinaten in tweede kwadrant mintekens vergeten. $P_{240}(-0,5\sqrt{3}; -0,5)$ Verder correct.	getekend. Langs positieve x-as $0,77$ gezet.	snijpunt met cirkel verticale lijn naar x-as geschetst. Langs negatieve x-as $-0,77$ gezet. Opm: verhoudingstabel getekend met $\sin 40$, x en 1 , 1 . $x=0,64$ verhoudingstabel getekend met $\cos 40$, y en 1 , 1 . $y=0,77$ Rechthoekige driehoek getekend met een hoek van 40 en schuide zijde 1 . Dan tekenen in cirkel, het is omgekeerde in de min. Dus zelfde getallen met minteken ervoor.
Joris Pasop Steven Koolhaas	schets van grafiek van $y=\sin a$, o/s, exacte waarden van $\sin 90$, 0 , 180 , 270 , formule sinusregel	radialen. Assenstelsel met cirkel getekend, hoeken 30 en 60 getekend, stippellijnen vanuit snijpunten van de benen van deze	$0,5\sqrt{3}$, zie 2 Assenstelsel met cirkel getekend, tweede been van hoek van 120 , vanuit snijpunt van dit been met de cirkel stippellijnen	Ja $0,5\sqrt{3}$ Zelfde tekening als bij 3a.	makkelijk, kun je narekenen met de rekenmachine	$P_{315}(-0,5\sqrt{2}; 0,5\sqrt{2})$ Verder correct.	$0,64$ en $0,77$ Vanuit P verticale lijn naar x-as en horizontale lijn naar y-as getekend.	$-0,64$ en $-0,77$ Hoek 220 getekend, vanuit snijpunt met cirkel verticale lijn naar x-as en horizontale lijn naar y-as geschetst.

		hoeken met de cirkel naar de twee assen, stippellijn horizontaal vanuit snijpunt van been van hoek van 60 naar snijpunt van hoek van 120 met cirkel, stippellijn verticaal vanaf dit snijpunt naar de horizontale as. Op basis van deze figuur de exacte waarden van $\sin 30$, $\sin 60$, en $\sin 120$ en $\cos 30$, $\cos 60$ en $\cos 120$ bepaald.	naar beide assen, -0.5 gezet bij snijpunt stippellijn met x-as, -0.5V3 gezet bij snijpunt stippellijn met y-as.					Opm: Gebruik een rekenmachine.
--	--	---	--	--	--	--	--	---------------------------------------

Het Marianum

	1	2	3a	3b	4	5	6	7
Geert ten Have Koen Lammerts van Bueren	verhouding, o/s, sos, sinusrgl + formule	er zit geen eenheid bei want het is een verhouding het is afstand: afstand. er kan geen eenheid bij. het is een verhouding.	ja, dat kan, maar we weten niet meer hoe. het is de sinus van 90 - die van 30 zoiets.	ja, want het is hetelfde als 30 alleen is de cos in de min	dat is makkelijk met de verhoudingen van de andere zijden in de driehoek	Correct ingevuld.	0,66 en 0,76 Driehoek getekend met hoek van 40. $\sin = 3,8/5,8$ o/s = 0,66 $\cos = 4,4/5,8$ a/s = 0,76	sin: 110, 200, 290, 20 cos: 70, 160, 250, 340 Opm: 't was toppie!
Jennifer van den Berg Sanne ten Have	o/s, s = o/sin, exacte waarden sin0...sin90	Nee, het is een verhouding van de lengtes, maar geen lengte op zich.	nee, je kunt alleen maar een sinus gebruiken met één hoek in de driehoek die 90 is. Driehoek getekend met een hoek van 120. Hier heb je geen hoek van 90 meer in de driehoek.	Ja, met de eenheidscirkel.	Dat is handig. je kunt dan gemakkelijk de sinus en de cosinus waarden bepalen.	P315(0,5V3; - 0,5V3) Verder correct.	0,60 en 0,80 Assenstelsel getekend met rechthoekige driehoek waarvan schuine zijde onder 40 graden. Schuine zijde is 5 cm, hierbij het getal 1 gezet. Bij horizontale rechthoekszijde $4/5$ = 0,80 gezet, bij verticale rechthoekszijde $3/5$ = 0,60 $\cos = 4,4/5,8$ a/s = 0,76	sin 160, 340, 200 cos 70, 110, 250, 290 Assenstelsel getekend met hoeken 20, 160, 200 en 340.
Stijn Bomers	o/s, 1 hoek is 90	-	Ja, Je moet eerst	Ja, want je hebt	Dan kan je	Correct ingevuld.	2,5/4 en 3/4	340, 160, 200

Rik Waenink Daan Verheijen	sinusrgl + formule + benodigde geg.		gewoon de sinus uitrekenen, dan trek je het van 180 af. Dit zie vaak bij 6- hoeken?	nog steeds de schuine en de overstaande zijde. alleen is er een min	makkelijk gebruik maken van de standaard- driehoeken		Cirkel getekend met hoek 40 en de twee rechthoekszijden.	
Twan Heller Gert-Jan	o/s sinusrgl + formule	Ja	Ja, maar dan moet je de verhouding weten of met 2 driehoeken en dan samenvoegen of zoiets.	Ja, blijkbaar.	Zodat je de schuine zijde dan weet en zo kun je de andere zijden berekenen.	Hoeken correct. P30(V3; 0,5) P45(0,5; 0,5) P60(0,5; 0.5V3) Coördinaten van P45 zijn foutief berekend met behulp van een 1- 1-V2 driehoek in de figuur. Overige gegevens ontbreken.	3,2/5,2 $\approx$ 0,615 en 3,2/4=0,8 Decimale breuk 3,2/5,2 berekend met kolomrekenen. Rechthoekige driehoek getekend met hoek van 40, lengtes 3,2-4-5,2 langs de zijden gezet.	sinus(340) en sinus(20)
Inge Merel Chantal	o/s, i e rechth drh sinusrgl + formule sin90 = 1 driehoek 30	Nee, het zijn gewoon verhoudingen.	Ja Tekening van driehoek verdeeld in twee driehoeken waarvan een met een hoek van 120	Ja, met behulp van de eenheidscirkel.	Dan blijven de verhoudingen simpel.	Correct ingevuld.	2,7/4 en 3,2/4 Rechthoekige driehoek getekend met hoek van 40, lengtes 3,2-2,7-1 langs de zijden gezet.	Assenstelsel met cirkel getekend. Hoeken 20, 160, 200 en 340 getekend. Hoeken 20 tov x-as aangegeven. Langs de positieve x-as 0/360 gezet, langs de negatieve x-as 180 en langs de positieve y-as 90.

								20, 160, 200, 320
Jelmer Everink Joren Woeltjes	driehoek 1-1-V2, driehoek, V2, o/s, sos cosinus, tangens sin-1, sina2 sinusregel sin/a*cos/a=tan/a a2*b2=g2	sin30	kan wel met sinusregel	Met behulp van een eenheidscirkel	Omdat het makkelijker is	Correct ingevuld.	45 0.5V2 0.5V2 30 0.5V3 0.5 60 0.5 0.5V3 40 1/3 <->1/3V3 1 1/120 <-> 1/120V3 40 1/3V3 1/3 P40(1/3V3, 1/3)	sin160 sin200 sin340
Kees Wenelink Marnick van Lith	o/s, bij hoek 90 sinusrgl + formule sin=cos/tan?	Lengte eenheid ja dus want sin = o/s = 1/2 1-V3-2 driehoek getekend	M: het kan niet want je hebt geen driehoek meer K: Met de standaardwaarden kan het + eenheidscirkel Assenstelsel getekend met cirkel, hoek van 120 getekend met eerste been op positieve y-as. verticale lijn vanaf snijpunt van tweede been met cirkel naar de x-as getekend.	Assenstelsel getekend met cirkel, hoek van 120 getekend met eerste been op positieve x-as. horizontale lijn vanaf snijpunt van tweede been met cirkel naar de y-as getekend. -0.5V3	-	Hoek 240 ontbreekt. P120(-0,5V3; 0,5) P210(-0,5V3; 0,5) P<240>(-0,5V3; - 0,5) P300(0,5V3; -0,5) P330(-0,5; 0,5V3) Verder correct.	0,625 en 0,75 Cirkel getekend, diameter horizontaal getekend, hoek van 40 met diameter geschetst sin = 2,5/4 cos = 3/4 0,625	20, 70, 110, 160, 200, 250, 290, 340, 380, 430, 470 -20, -70, -110, -160, -200, -250, -290, -340, -380, -430, -470
Roy Sophie	o/s sinusrgl + formule sin30, 45, 60, 90 "verhouding van	Nee, want je weet niet om welke grootte het gaat (<u>m</u> of <u>cm</u>)	Nee, je weet niet hoelang de zijde van het figuur is. (Overstaande en	Ja, -0.5 = breedte cosinus 0.5V3 = lengte	Dan kun je meteen de sinus en de cosinus kunt uitrekenen.	P210(-0,5; -0,5V3) P240(-0,5V3; -0,5) P300(0,5V3; -0,5) P330(0,5; -0,5V3)	2/3 en 5/6 sin = o/s = sin40 = o/1 o = sin40*1	-

	driehoeken" driehoek1-1-V2 driehoek1-V3-2	Ja er hoort een eenheid bij maar weet niet welke, m of cm	schuine)	sinus		Verder correct.	Rechthoekige driehoek getekend met hoek van 40, lengtes 4-5-6 en 2/3-5/6-1 langs de zijden gezet. $\sin 40 = 2/3$ $\cos 40 = 5/6$ Je kunt doorgaan de hele cirkel rond.	
--	---	--	----------	-------	--	-----------------	--	--

Bijlage 4: Criteria instrumenteel en relationeel begrip

Criteria instrumenteel en relationeel begrip

v1.0

Versienr.	Datum	Auteur	Omschrijving
v1.0	30 mei 2010	Martin Alberink	Overeenstemming Nico en Martin
v0.2	14 mei 2010	Martin Alberink	Aanscherping na CoL 10 mei
v0.1	10 mei 2010	Martin Alberink	Concept

1. Schrijf alles op wat je weet over sinus.

Uitgangspunten:

- Een zinnig antwoord met een toelichting of redenering duidt op relationeel begrip.
- Een zinnig antwoord zonder redenering geeft instrumenteel begrip aan.
- Geen antwoord of een "kreet" betekent noch instrumenteel, noch relationeel begrip.

Hieronder deze uitgangspunten uitgewerkt voor veel voorkomende antwoorden.

Overstaande zijde/schuine zijde

1. Indien "sinus = overstaande zijde/schuine zijde" met een tekening van een rechthoekige driehoek en eventueel de overstaande, aanliggende en schuine zijde
=> relationeel begrip.
2. Indien "sinus = overstaande zijde/schuine zijde in een rechthoekige driehoek"
=> relationeel begrip.
3. Indien "sinus = overstaande zijde/schuine zijde" uitsluitend gebaseerd op SOS
=> instrumenteel begrip.
4. Indien "sinus = overstaande zijde/schuine zijde" zonder toelichting
=> instrumenteel begrip.

Sinusregel

1. Indien de term "sinusregel" en/of de formule van de sinusregel, met daarbij "in elke driehoek" of een tekening van een niet-rechthoekige driehoek
=> relationeel begrip.
2. Indien alleen de term "sinusregel" en/of de formule van de sinusregel (de formule eventueel in een verhoudingstabel)
=> instrumenteel begrip.

Exacte waarden

1. Indien de berekening van exacte waarden in een standaarddriehoek is getoond
=> relationeel begrip.
2. Indien exacte waarden zijn gegeven, zoals $\sin(30^\circ)$, $\sin(45^\circ)$ en $\sin(90^\circ)$
=> instrumenteel begrip.

Overige zinnige antwoorden

Richtlijn:

Zonder redenering => instrumenteel begrip, met redenering => relationeel begrip.

Geen antwoord of geen zinnig antwoord (alleen een "kreet")

=> geen instrumenteel en geen relationeel begrip.

2. **De eenheid voor hoeken is graden, die voor lengtes is meter (of cm).
De sinus van 30° is 0,5; $\sin(30^\circ) = 0,5$.
Hoort er een eenheid bij die 0,5? Zo ja, welke? Zo niet, waarom niet?**

Uitgangspunten:

- Een antwoord waaruit blijkt dat gezien is dat het gaat om een verhouding (van gelijke grootheden), of een antwoord dat wordt beredeneerd met iets anders wat ter zake doet, duidt op relationeel begrip.
- Een antwoord dat alleen met letterlijke gegevens wordt toegelicht of gemotiveerd is instrumenteel begrip.
- Geen antwoord, een antwoord zonder motivatie (dit zijn ja/nee, omschrijvingen daarvan, en kreten), of een antwoord dat verwijst naar ontbrekende voorkennis is noch instrumenteel, noch relationeel begrip.

De uitgangspunten uitgewerkt voor veel voorkomende antwoorden:

Nee, want het is een verhouding en die heeft geen eenheid

=> relationeel begrip.

Nee, want je berekent een helling

=> relationeel begrip.

De eenheid is een lengte-eenheid (bijv. cm), want dat is de eenheid waarmee je rekent

=> instrumenteel begrip.

Geen antwoord/ja/nee/ik denk het wel/vast wel/radialen/er bestaat geen eenheid voor/
er is geen eenheid gegeven/hebben we nooit gehad

=> geen instrumenteel en geen relationeel begrip.

3a. Kun je de sinus van 120° bepalen? Motiveer je antwoord!

Uitgangspunten:

- Een antwoord waarin wordt beredeneerd waarom het (nu nog) niet kan of waarin wordt uitgelegd waarom het wel kan is relationeel begrip.
- Een antwoord dat alleen met letterlijke gegevens wordt toegelicht of gemotiveerd is instrumenteel begrip.
- Geen antwoord, een antwoord zonder motivatie (dit zijn ja/nee, omschrijvingen daarvan, en kreten), of een antwoord dat verwijst naar ontbrekende voorkennis is noch instrumenteel, noch relationeel begrip.

De uitgangspunten uitgewerkt voor veel voorkomende antwoorden:

Nee, in een rechthoekige driehoek kan een hoek niet 120° zijn/met een hoek van 120° is in een driehoek geen rechte hoek mogelijk
=> relationeel begrip.

Ja, dit is gelijk aan $\sin(60^\circ)$ /dit is gelijk aan $0,5\sqrt{3}$
=> relationeel begrip (ook zonder toelichting).

Ja, dit is gelijk aan $-\sin(60^\circ)$ /dit is gelijk aan $\sin(30^\circ)$
Zonder toelichting => geen instrumenteel en geen relationeel begrip,
met toelichting => relationeel begrip.

Ja, via de sinusregel
Zonder toelichting => instrumenteel begrip, met toelichting => relationeel begrip.

Geen antwoord/ja/nee/ik denk het wel/vast wel/met de GR/zie H6 boek/weet ik niet/hebben we nooit gehad
=> geen instrumenteel en geen relationeel begrip.

3b. Kun je de sinus van 120° bepalen? Motiveer je antwoord!

Uitgangspunten:

- Een antwoord waarin wordt uitgelegd waarom het kan of waarin wordt beredeneerd waarom het niet kan is relationeel begrip.
- Een antwoord "Ja, dit is gelijk aan $\sin(60^\circ)$ " of "Ja, dit is gelijk aan $0,5\sqrt{3}$ " is relationeel begrip.
- Een antwoord dat alleen met letterlijke gegevens wordt toegelicht of gemotiveerd is instrumenteel begrip.
- Geen antwoord, een antwoord zonder motivatie (dit zijn ja/nee, omschrijvingen daarvan, en kreten), of een antwoord dat verwijst naar ontbrekende voorkennis is noch instrumenteel, noch relationeel begrip.

De uitgangspunten uitgewerkt voor veel voorkomende antwoorden:

Ja, met de eenheidscirkel

Zonder toelichting => instrumenteel begrip, met toelichting => relationeel begrip.

Ja, dit is gelijk aan $\sin(60^\circ)$ /dit is gelijk aan $0,5\sqrt{3}$

=> relationeel begrip (ook zonder toelichting).

Ja, dit is gelijk aan $-\sin(60^\circ)$ /dit is gelijk aan $\sin(30^\circ)$

Zonder toelichting => geen instrumenteel en geen relationeel begrip,
met toelichting => relationeel begrip.

Geen antwoord/ja/nee/ik denk het wel/vast wel/met de GR/zie H6 boek/zie 3a/weet ik niet/hebben we nooit gehad

=> geen instrumenteel en geen relationeel begrip.

4. Waarom maken we gebruik van een cirkel waarvan de straal 1 is?

Uitgangspunten:

- Een antwoord waarin wordt geredeneerd over de relatie van de y- en x-coördinaat van het snijpunt met de sinus en cosinus van de hoek, of een antwoord waarin wordt verwezen naar de schuine zijde van de standaarddriehoeken duidt op relationeel begrip.
- Een antwoord dat alleen met letterlijke gegevens wordt toegelicht of gemotiveerd (zoals "dat rekt gemakkelijk want je deelt door 1") is instrumenteel begrip.
- Een antwoord waarin wordt verwezen naar standaarddriehoeken, maar niet expliciet naar de schuine zijde ervan, is noch instrumenteel, noch relationeel begrip.
- Geen antwoord, een antwoord zonder motivatie, of een antwoord dat verwijst naar ontbrekende voorkennis is noch instrumenteel, noch relationeel begrip.

De uitgangspunten uitgewerkt voor veel voorkomende antwoorden:

Dan komen de sinus en cosinus overeen met de y- en x-coördinaat van het snijpunt of Dan zijn de driehoeken met 30° , 45° en 60° gelijk aan de standaarddriehoeken met schuine zijde 1

=> relationeel begrip.

Gemakkelijk rekenen want je deelt dan door 1 (om de sinus te berekenen).

=> instrumenteel begrip.

Geen antwoord/gemakkelijk rekenen/makkelijk getal/kun je met GR narekenen/zelfde als standaarddriehoeken/weet ik niet/hebben we nooit gehad

=> geen instrumenteel en geen relationeel begrip.

5. Vul de hoeken en de exacte coördinaten van de punten in

Behalve de ingevulde waarden volgt uit notaties in de tekening dat voor de x-coördinaat de cosinus van de hoek is ingevuld en/of voor de y-coördinaat de sinus

=> relationeel begrip.

Alleen waarden zijn ingevuld.

=> instrumenteel begrip.

6(1). Bepaal met behulp van de bovenstaande figuur $\sin(40^\circ)$ en $\cos(40^\circ)$ in twee decimalen nauwkeurig

Veel ingevulde waarden komen heel mooi overeen met de waarden die de GR geeft. Vaak zijn langs de assen centimeters afgezet met de waarden 0,2 , 0,4 , enzovoort erbij. Ook zijn vanaf P vaak lijnen naar de x-as en y-as getrokken.

Uit notaties blijkt dat lijnstukken zijn gemeten en de antwoorden hieruit zijn berekend
=> relationeel begrip.

Er blijkt niet dat lijnstukken zijn gemeten
=> instrumenteel begrip.

6(2). Bepaal de $\sin(40^\circ)$ en $\cos(40^\circ)$ in twee decimalen nauwkeurig. Geef je constructie hieronder en motiveer je antwoord.

Vaak is een driehoek getekend of een eenheidscirkel met een hoek van 40° .

Uit notaties blijkt dat lijnstukken zijn gemeten en het antwoord hieruit is berekend
=> relationeel begrip.

Er blijkt niet dat lijnstukken zijn gemeten
=> instrumenteel begrip.

7(1). Bepaal ook $\sin(220^\circ)$ en $\cos(220^\circ)$ in twee decimalen nauwkeurig

Vaak staan alleen de waarden vermeld. Soms is de hoek 220° in de figuur aangegeven.

Uit notaties blijkt dat lijnstukken zijn gemeten en het antwoord hieruit is berekend of er is aangegeven hoe de antwoorden zijn berekend uit de antwoorden van 6(1).
=> relationeel begrip.

Er blijkt niet dat lijnstukken zijn gemeten en de antwoorden zijn niet gemotiveerd
=> instrumenteel begrip.

7(2). De sinus van 20° is $\sin(20^\circ) = 0,342$. Noem zo veel mogelijk hoeken waarvan de sinus of cosinus ofwel $+0,342$ ofwel $-0,342$ is. Motiveer je antwoord.

Een assenstelsel met eenheidscirkel, hoeken of lijnstukken zijn getekend waaruit blijkt hoe de gegeven antwoorden zijn bepaald
of een behoorlijk aantal correcte antwoorden is gegeven
=> relationeel begrip.

Antwoorden zijn gegeven zonder motivatie.
=> instrumenteel begrip.

Bijlage 5: Criteria embodied en symbolic world

Criteria embodied en symbolic world

v1.0

Versienr.	Datum	Auteur	Omschrijving
v1.0	30 mei 2010	Martin Alberink	Overeenstemming Nico en Martin
v0.2	14 mei 2010	Martin Alberink	Aanscherping na CoL 10 mei
v0.1	10 mei 2010	Martin Alberink	Concept

1. Schrijf alles op wat je weet over sinus.

Uitgangspunten:

- Een antwoord dat is gebaseerd op een figuur of dat naar een figuur toewerkt geeft embodied niveau aan.
- Een antwoord dat alleen een (naam van een) formule is zonder illustratie met een figuur duidt op symbolic niveau.
- Geen antwoord of een "kreet" betekent noch embodied, noch symbolic niveau.

1. Indien alleen formules, zoals SOS, overstaande zijde/schuine zijde of de sinusregel
=> symbolic niveau.
2. Indien bij SOS of overstaande zijde/schuine zijde een rechthoekige driehoek is getekend, eventueel met overstaande, aanliggende en schuine zijde
=> embodied niveau.
3. Indien bij de sinusregel een niet-rechthoekige driehoek is getekend
=> embodied niveau.

Exacte waarden

1. Indien exacte waarden, zoals $\sin(30^\circ)$, $\sin(45^\circ)$ en $\sin(90^\circ)$, zijn opgegeven zonder figuur
=> symbolic niveau.
2. Indien de berekening van exacte waarden in een standaarddriehoek is getoond
=> embodied niveau.

Overige zinnige antwoorden

Richtlijn:

Antwoord gebaseerd op een figuur => embodied niveau,
antwoord alleen als formule => symbolic niveau.

Geen antwoord of geen zinnig antwoord (alleen een "kreet")

=> geen embodied en geen symbolic niveau.

2. **De eenheid voor hoeken is graden, die voor lengtes is meter (of cm). De sinus van 30° is 0,5; $\sin(30^\circ) = 0,5$.
Hooft er een eenheid bij die 0,5? Zo ja, welke? Zo niet, waarom niet?**

Uitgangspunten:

- Een antwoord dat wordt beredeneerd op basis van (elementen uit) een figuur is embodied niveau.
- Een antwoord met een redenering alleen op basis van symbolen of formules is symbolic niveau.
- Geen antwoord, een antwoord zonder motivatie (dit zijn ja/nee, omschrijvingen daarvan, en kreten), of een antwoord dat verwijst naar ontbrekende voorkennis is noch embodied noch symbolic niveau.

De uitgangspunten uitgewerkt voor veel voorkomende antwoorden:

Nee, want het is een verhouding en die heeft geen eenheid

=> symbolic niveau.

Nee, want je berekent een helling

=> embodied niveau.

De eenheid is een lengte-eenheid (bijv. cm), want dat is de eenheid waarmee je rekent

=> symbolic niveau.

Geen antwoord/ja/nee/ik denk het wel/vast wel/radialen/er bestaat geen eenheid voor/er is geen eenheid gegeven/hebben we nooit gehad

=> geen embodied en geen symbolic niveau.

3a. Kun je de sinus van 120° bepalen? Motiveer je antwoord!

Uitgangspunten:

- Een antwoord dat wordt beredeneerd op basis van (elementen uit) een figuur is embodied niveau.
- Een antwoord met een redenering alleen op basis van symbolen of formules is symbolic niveau.
- Geen antwoord, een antwoord zonder motivatie (dit zijn ja/nee, omschrijvingen daarvan, en kreten), of een antwoord dat verwijst naar ontbrekende voorkennis is noch embodied noch symbolic niveau.

Nee, in een rechthoekige driehoek kan een hoek niet 120° zijn/met een hoek van 120° is er geen rechte hoek mogelijk

1. Indien de redenering op een figuur wordt gebaseerd, bijvoorbeeld als de onmogelijkheid is getekend in een driehoek
=> embodied niveau.
2. Indien zonder figuur beredeneerd, bijvoorbeeld als het is berekend met behulp van de regel dat de som van de hoeken 180° is
=> symbolic niveau.
3. Indien niet toegelicht
=> geen embodied en geen symbolic niveau.

Ja, dit is gelijk aan $\sin(60^\circ)$ /dit is gelijk aan $0,5\sqrt{3}$

1. Indien in een eenheidscirkel gedemonstreerd
=> embodied niveau.
2. Indien met een berekening aangetoond
=> symbolic niveau.
3. Indien niet toegelicht
=> geen embodied en geen symbolic niveau.

Ja, via de sinusregel

1. Indien een driehoek is getekend bij het aantonen
=> embodied niveau.
2. Indien met alleen een berekening aangetoond
=> symbolic niveau.
3. Indien niet toegelicht
=> geen embodied en geen symbolic niveau.

Geen antwoord/ja/nee/ik denk het wel/vast wel/met de GR/zie H6 boek/weet ik niet/hebben we nooit gehad

=> geen embodied en geen symbolic niveau.

3b. Kun je de sinus van 120° bepalen? Motiveer je antwoord!

Uitgangspunten:

- Een antwoord dat wordt beredeneerd op basis van (elementen uit) een figuur is embodied niveau.
- Een antwoord met een redenering alleen op basis van symbolen of formules is symbolic niveau.
- Geen antwoord, een antwoord zonder motivatie (dit zijn ja/nee, omschrijvingen daarvan, en kreten), of een antwoord dat verwijst naar ontbrekende voorkennis is noch embodied noch symbolic niveau.

Ja, met de eenheidscirkel

1. Indien de redenering in de eenheidscirkel wordt geïllustreerd
=> embodied niveau.
2. Indien zonder figuur beredeneerd
=> symbolic niveau.
3. Indien niet toegelicht
=> geen embodied en geen symbolic niveau.

Ja, dit is gelijk aan $\sin(60^\circ)$ /dit is gelijk aan $0,5\sqrt{3}$

1. Indien geïllustreerd op basis van een tekening
=> embodied niveau.
2. Indien zonder figuur berekend of beredeneerd
=> symbolic niveau.
3. Indien niet toegelicht
=> geen embodied en geen symbolic niveau.

Ja, dit is gelijk aan $-\sin(60^\circ)$ /dit is gelijk aan $\sin(30^\circ)$

1. Indien geprobeerd wordt het op basis van een tekening te illustreren
=> embodied niveau.
2. Indien wordt geprobeerd het te berekenen of te beredeneren
=> symbolic niveau.
3. Indien niet toegelicht
=> geen embodied en geen symbolic niveau.

Geen antwoord/ja/nee/ik denk het wel/vast wel/met de GR/zie H6 boek/zie 3a/weet ik niet/hebben we nooit gehad

=> geen embodied en geen symbolic niveau.

4. **Waarom maken we gebruik van een cirkel waarvan de straal 1 is?**

Uitgangspunten:

- Een antwoord dat wordt beredeneerd op basis van (elementen uit) een figuur is embodied niveau.
- Een antwoord met een redenering alleen op basis van symbolen of formules is symbolic niveau.
- Geen antwoord, een antwoord zonder motivatie (dit zijn ja/nee, omschrijvingen daarvan, en kreten), of een antwoord dat verwijst naar ontbrekende voorkennis is noch embodied noch symbolic niveau.

Dan komen de sinus en cosinus overeen met de y- en x-coördinaat van het snijpunt.

1. Indien de redenering in de eenheidscirkel wordt geïllustreerd
=> embodied niveau.
2. Indien zonder figuur beredeneerd
=> symbolic niveau.
3. Indien niet toegelicht
=> geen embodied en geen symbolic niveau.

Dan zijn de driehoeken met 30° , 45° en 60° gelijk aan de standaarddriehoeken met schuine zijde 1.

=> embodied niveau.

Gemakkelijk rekenen want je deelt dan door 1 (om de sinus te berekenen).

=> symbolic niveau.

Geen antwoord/gemakkelijk rekenen/makkelijk getal/kun je met GR narekenen/zelfde als standaarddriehoeken/weet ik niet/hebben we nooit gehad

=> geen embodied en geen symbolic niveau.

5. **Vul de hoeken en de exacte coördinaten van de punten in**

Het is meestal niet goed zichtbaar hoe de leerlingen aan de waarden zijn gekomen.

1. Indien uit de figuur blijkt dat de waarden zijn afgelezen van de assen of in driehoeken
=> embodied niveau.
2. Indien de waarden met de GR zijn berekend
=> symbolic niveau.
3. Indien niet duidelijk is hoe de waarden zijn berekend
=> geen embodied en geen symbolic niveau.

6(1). Bepaal met behulp van de bovenstaande figuur $\sin(40^\circ)$ en $\cos(40^\circ)$ in twee decimalen nauwkeurig

Uitgangspunten:

- Een antwoord dat wordt beredeneerd op basis van (elementen uit) een figuur is embodied niveau.
- Een antwoord met een redenering alleen op basis van symbolen of formules is symbolic niveau.
- Geen antwoord of een antwoord zonder motivatie is noch embodied noch symbolic niveau.

Veel ingevulde waarden komen heel mooi overeen met de waarden die de GR geeft. Vaak zijn langs de assen centimeters afgezet met de waarden 0,2 , 0,4 , enzovoort erbij. Ook zijn vanaf P vaak lijnen naar de x-as en y-as getrokken.

1. Indien de waarden zijn afgelezen van de assen of in driehoeken
=> embodied niveau.
2. Indien met een formule of een verhouding de antwoorden zijn berekend, en eventueel hiervoor lijnstukken zijn gemeten
=> symbolic niveau.
3. Indien niet duidelijk is gemaakt dat de waarden uit de figuur zijn afgelezen of zijn berekend aan de hand van gemeten lijnstukken, zijn de resultaten met de GR berekend.
=> geen embodied en geen symbolic niveau.

6(2). Bepaal de $\sin(40^\circ)$ en $\cos(40^\circ)$ in twee decimalen nauwkeurig. Geef je constructie hieronder en motiveer je antwoord.

Uitgangspunten:

- Een antwoord dat wordt beredeneerd op basis van (elementen uit) een figuur is embodied niveau.
- Een antwoord met een redenering alleen op basis van symbolen of formules is symbolic niveau.
- Geen antwoord of een antwoord zonder motivatie is noch embodied noch symbolic niveau.

Vaak is een driehoek getekend of een eenheidscirkel met een hoek van 40° .

1. Indien de waarden in een assenstelsel met een eenheidscirkel zijn afgelezen
=> embodied niveau.
2. Indien met een formule of een verhouding de antwoorden zijn berekend, en eventueel hiervoor lijnstukken zijn gemeten
=> symbolic niveau.
3. Indien niet duidelijk is gemaakt dat de waarden uit de figuur zijn afgelezen of zijn berekend aan de hand van gemeten lijnstukken, zijn de resultaten met de GR berekend.
=> geen embodied en geen symbolic niveau.

7(1). Bepaal ook $\sin(220^\circ)$ en $\cos(220^\circ)$ in twee decimalen nauwkeurig

Uitgangspunten:

- Een antwoord dat wordt beredeneerd op basis van (elementen uit) een figuur is embodied niveau.
- Een antwoord met een redenering alleen op basis van symbolen of formules is symbolic niveau.
- Geen antwoord of een antwoord zonder motivatie is noch embodied noch symbolic niveau.

Vaak staan alleen de waarden vermeld. Soms is de hoek 220° in de figuur aangegeven. Vaak zijn langs de assen centimeters afgezet met de waarden 0,2, 0,4, enzovoort erbij. Ook zijn vanaf het snijpunt van de hoek van 220° soms lijnen naar de x-as en y-as getrokken.

1. Indien de waarden van de assen zijn afgelezen
=> embodied niveau.
2. Indien met een formule of een verhouding de antwoorden zijn berekend, en eventueel hiervoor lijnstukken zijn gemeten
=> symbolic niveau.
3. Indien niet duidelijk is gemaakt dat de waarden uit de figuur zijn afgelezen of zijn berekend aan de hand van gemeten lijnstukken, zijn de resultaten met de GR berekend.
=> geen embodied en geen symbolic niveau.

7(2). De sinus van 20° is $\sin(20^\circ) = 0,342$. Noem zo veel mogelijk hoeken waarvan de sinus of cosinus ofwel $+0,342$ ofwel $-0,342$ is. Motiveer je antwoord.

Uitgangspunten:

- Een antwoord dat wordt beredeneerd op basis van (elementen uit) een figuur is embodied niveau.
- Een antwoord met een redenering alleen op basis van symbolen of formules is symbolic niveau.
- Geen antwoord of een antwoord zonder motivatie is noch embodied noch symbolic niveau.

Vaak zijn antwoorden zonder motivatie gegeven.

1. Indien resultaten zijn verkregen door tekenen van hoeken in een assenstelsel met eenheidscirkel en het bepalen van de coördinaten van de snijpunten
=> embodied niveau.
2. Indien resultaten via formules of verhoudingen zijn verkregen
=> symbolic niveau.
3. Indien niet duidelijk is hoe de waarden zijn verkregen
=> geen embodied en geen symbolic niveau.

66

Resultaat 21/6/10 HvdL, RH, FH