Wiskundig Voorspellen

Differentiaalvergelijkingen

Een Introductieles en het effect ervan

J Sillessen B Dijkstra

wiskundig voorspellen

een Introductiemiddag over

Differentiaalvergelijkingen

26-6-2011 1

wiskundig voorspellen

een Introductiemiddag over

Differentiaalvergelijkingen

26-6-2011 2

programma

- Onderzoek in Wiskunde
- Onderzoek in Onderwijs
- Conclusies en Discussie

26-6-2011 3

Onderzoek in Wiskunde

[redacted]

4

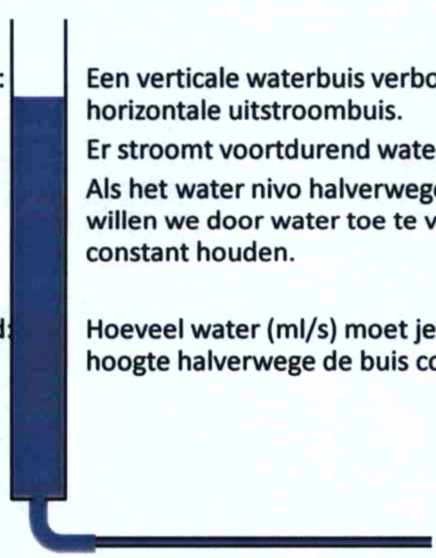
[redacted]

26-6-2011

Onderzoek in Wiskunde

26-6-2011 5

Onderzoek in Wiskunde



Gegeven: Een verticale waterbuis verbonden met een horizontale uitstroombuis.

Er stroomt voortdurend water uit.

Als het water nivo halverwege de buis staat willen we door water toe te voegen de waterhoogte constant houden.

Gevraagd: Hoeveel water (ml/s) moet je toevoegen om de water hoogte halverwege de buis constant te houden?

26-6-2011 6

Discussie OiW

Inhoud van de Presentatie

Onderzoek in Onderwijs

De onderzoeksvraag luidt:

Kunnen leerlingen,
na het doorlopen van een modelleercyclus die leidt tot een differentiaalvergelijking,
zelf een differentiaalvergelijking opstellen?

Onderzoek in Onderwijs

Opdracht

Natuurpark de Hoge Veluwe wil onderzoeken hoeveel vossen en konijnen er in het natuurpark leven. Boswachters tellen al jaren de konijnen en vossen, maar de resultaten verschillen nogal.

Je krijgt de opdracht om met behulp van onderstaande data het aantal konijnen en vossen uit te rekenen in een stabiele toestand, met andere woorden de aantallen konijnen en vossen zijn constant.

De volgende gegevens zijn bekend: ………………….

Onderzoek in Onderwijs

	A		B		C			D		
naam	As	Ai	Bv	Be	Ci	Cw	Cd	Da	Dd	Dr
actie 1										
actie 2										
actie n										

© Joke Zwarteveen

Onderzoek in Onderwijs

Tabel 1
Resultaat leerling S.

S.	A		B		C			D		
	As	Ai	Bv	Be	Ci	Cw	Cd	Da	Dd	Dr
Lezen van de opgave	o									
Aantallen konijnen en vossen zijn relevante variabelen			o							

Tabel 2
Resultaat leerling R.

R.	A		B		C			D		
	As	Ai	Bv	Be	Ci	Cw	Cd	Da	Dd	Dr
De eerste 3 minuten	●									
Legt verbanden		●								
Stel K, Stel V			●							

26-6-2011 11

Conclusie OiO

Voor beide leerlingen heeft de introductieles geen effect gehad.

Beide hebben geen DV opgesteld tijdens de hardop-denk-sessie.

26-6-2011 12

Discussie OiO

Hardop-denk-sessie

S.

Verzandt in moeras van getallen

R.

Gaat analytisch te werk

Wiskundig voorspellen

Een introductieles differentiaalvergelijkingen

Bestaande uit de delen

I. PowerPoint Presentatie

II. Docenten handleiding

III. Leerlingen handleiding

IV. Onderzoek in Onderwijs

Wiskundig voorspellen

Introductieles

Differentiaalvergelijkingen

PowerPoint Presentatie

J. Sillessen B. Dijkstra

Wiskundig voorspellen

Introductieles differentiaalvergelijkingen

Welkom bij deze introductieles over differentiaalvergelijkingen.

Iedereen voorstellen.

In wiskunde D deel 4 van Getal en Ruimte krijgen jullie voor de eerste keer te maken met DV. In dit hoofdstuk wordt al direct bij opgave 1 een DV gegeven en start het rekenen ermee. Een DV is, het woord zegt het al, een vergelijking en vergelijkingen kun je oplossen. Welnu, hoofdstuk 15, maar ook allerlei andere, vooral Engelstalige boeken staan boordevol met oplossingsstrategieën. Wij willen vandaag vooral stilstaan bij hetgeen wat eigenlijk voor deze opgave 1 had moeten staan. Een uitgebreide oriëntatie op DV.

De les heet "wiskundig voorspellen".
Op basis van meetgegevens (data) kun je proberen om iets wat je nog niet weet via berekening te voorspellen.

Wat zou je willen voorspellen ?
-het weer van morgen, of volgende week wil je voorspellen,
-een tropische storm of tsnunami wil je voorspellen, liefst zo vroeg mogelijk want dan kun je op tijd maatregelen nemen, het zelfde geldt voor
-een vulkaanuitbarsting of een aardbeving,
-Wat je ook zou willen kunnen voorspellen is hoe een constructie zich gedraagt onder extreme omstandigheden .....

....., bijvoorbeeld een flatgebouw bij een aardbeving.
Als je weet hoe een constructie zich gedraagt kan je maatregelen nemen om zo'n constructie nog veiliger te maken.

Dat kan door uit te proberen, te testen, hoe zo'n constructie reageert onder die omstandigheden.

Introductie

- http://news.discovery.com/videos/tech-earthquake-shake-table-rocks-buildings.html

4 [illegible] 2011 Differentiaalvergelijkingen 3

In het volgende filmpje wordt getest of een flat van 7 verdiepingen aardbevingbestendig is.
De flat is hiervoor geplaatst op een platform dat heen en weer kan bewegen en zo een aardbeving simuleert.
Zo'n platform heet een 'shake table'.

Alle overbodige zaken zijn weggelaten, alleen de constructie staat.

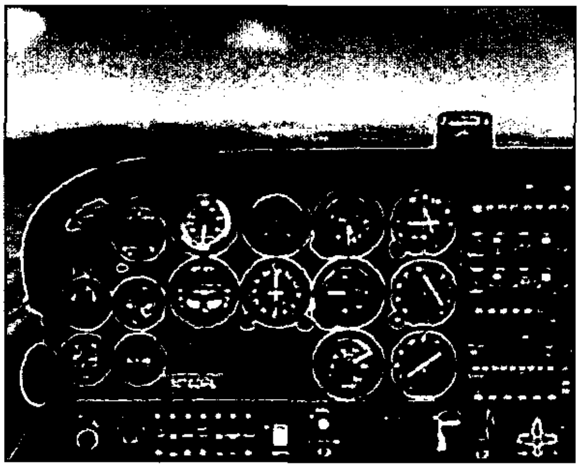
-------------------------FILM AFSPELEN-------------------------

Je kunt je voorstellen dat dit een hele kostbare en tijdrovende methode is.
Je moet voor verschillende scenario's testen of de constructie stand houd en als dat niet het geval is moet je weer opnieuw beginnen.

Het zou handig zijn als je alle denkbare omstandigheden kunt uit proberen zonder iets kapot te maken.
Dit kun je o.a. doen door er een wiskundig model van te maken.

In een wiskundig model zitten alle karakteristieken van het origineel, maar dan vertaald in wiskundige vorm, in formules.
Hiermee kun je rekenen en vervolgens voorspellingen doen. Bijvoorbeeld of een constructie sterk genoeg is om allerlei verschillende stress situaties te doorstaan.

Introductie



Een flight simulator (programma voor PC) is een mooi voorbeeld van een wiskundig model. Het bevat alle karakteristieken / eigenschappen van een echt vliegtuig in wiskundige vorm; formules.

De PC berekent aan de hand van de karakteristieken van het vliegtuig en de input van de gebruiker hoe een vliegtuig in het echt zou reageren, het programma gedraagt zich dus als een echt vliegtuig.
Je kunt zo (leren) vliegen en al doende duizend keer crashen zonder dat er iets stuk gaat.

Een wat geavanceerdere versie van zo'n flight simulator wordt gebruikt voor het opleiden van piloten, om dezelfde reden,
Piloten kunnen oefenen onder allerlei extreme situaties (met een druk op een knop krijg je onweer, storm, wat je maar wilt)
zonder echte brokken te maken .
Extra voordeel is dat je een 'hoop vlieguren' kan maken zonder echt in een duur toestel rond te vliegen. (denk alleen al aan de huidige brandstofprijs)

Bij dit soort (wiskundige) modellen spelen differentiaalvergelijkingen een grote rol want met name die DV zijn de (wiskundige) formules die in dat model zitten.
Zij beschrijven hoe bepaalde grootheden veranderen.

Programma

- Het Weer
- Wiskundige modellen
- Differentiaalvergelijkingen
- Pauze
- Opdrachten
- Afsluiting

4 juli 2011 Differentiaalvergelijkingen 5

Het programma voor vanmiddag:

We beginnen met het weer ... en met name het voorspellen ervan.
Tegenwoordig gaat dat op een wiskundige manier, de weersvoorspelling wordt berekend.
Een weersvoorspelling is gebaseerd op een wiskundig model van onze atmosfeer.

Vervolgens het wiskundig modelleren, in een voorbeeld wordt een zogenaamde modelleercyclus stap voor stap met jullie doorlopen en zul je zien dat een DV een mooi wiskundig stuk gereedschap is om een bepaald verschijnsel mee te beschrijven.

Dan een stukje theorie over DV. Onder andere het grafisch numeriek oplossen van een DV.

Na het bespreken van deze twee onderwerpen hebben jullie hopelijk voldoende kennis opgedaan om een tweetal opdrachten op te lossen.
Dit is het doel van deze les.

Het weer

Weten wat het weer gaat doen, vanmiddag, morgen, volgende week is belangrijk voor ons.
Schijnt de zon of gaat het regenen.
Ga je met de fiets of met de bus naar school ?

Als je in Nederland buitenactiviteiten plant moet je rekening houden met het weer.

Maar hoe weten we nu wat het weer gaat doen ?

Vroeger werd het weer voorspeld op basis van bekende patronen uit het verleden of via volkswijsheden bijvoorbeeld:.......

Het weer

'Ochtendrood geeft water in de sloot'

Ochtendrood geeft water in de sloot
"ochtendrood" (een rode lucht bij het opgaan van de zon) wordt vaak veroorzaakt door stof- en dampdeeltjes in de lucht, waardoor zich makkelijk wolken vormen die vervolgens uitregenen.

Deze voorspelling is gebaseerd op 1 variabele (wel of geen ochtendrood)
En soms komt ie uit, en soms ook niet.
Dit is lokaal misschien wel een aardige indicatie maar om een weersvoorspelling te doen voor een klein landje als Nederland en liefst enige tijd voor het weer zich voordoet voldoet dit niet.

De factor tijd is namelijk ook erg belangrijk, je wilt nu weten wat het weer morgen gaat doen. Als je dat morgen pas hoort heb je geen voorspelling nodig, dan kun je het zelf zien.

Er spelen natuurlijk veel meer variabelen een rol:

- temperatuur
- windrichting, -snelheid
- hoeveelheid zon (bewolking)
- luchtdruk
- vochtigheid,
- neerslag.

-Het weer is een enorm complexe verzameling van factoren.

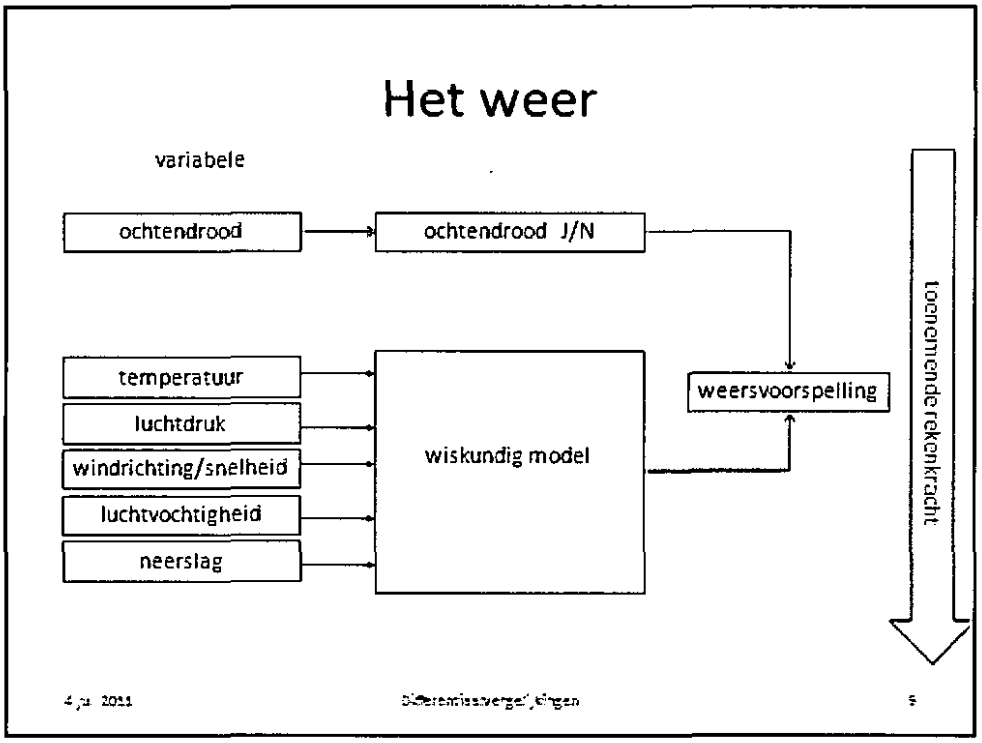
Het weer

- Weersvoorspelling Richardson

Weerpionier Richardson (begin vorige eeuw) wilde het weer **wiskundig voorspellen** (berekenen).

Er is echter geen formule voor het weer,
maar je kunt wel de processen beschrijven die zich in onze atmosfeer afspelen, de processen die het weer bepalen.
Je kunt een model van de atmosfeer, van het weer maken.

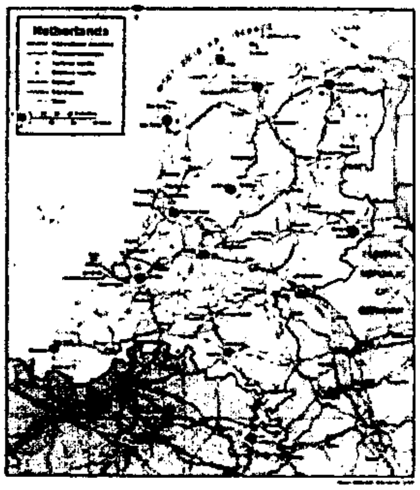
In Engeland is een instituut,ECMWF, die weersvoorspellingen voor Europa maakt.
Naast het verzamelen en opslaan van meetgegevens ontwikkelt men daar wiskundemodellen om het gedrag van de atmosfeer na te bootsen.
Men maakt een weersverwachting met een rekenmodel met hoge resolutie (roosterpuntsafstand ~16km). Deze berekening wordt 51 maal herhaald. Dit gebeurt met een model met lagere resolutie (T639 , roosterpuntsafstand ~ 32 km)



toenemend aantal variabelen
toenemend aantal DV
ingewikkeldere DV

Leidt tot preciezere voorspelling

Het weer



Als voorbeeld nemen we hier de luchtdruk.
Als de luchtdruk in twee regio's **verschilt** dan zal zich lucht gaan verplaatsen van het hoge naar het lage druk gebied (wind).
(Vergelijk maar met het leeglopen van een opgeblazen ballon)

Er gebeurt iets tengevolge van een verschil, een verschil van luchtdruk.
Het woord **verschil** heet ook wel **differentie**.
Een vergelijking die beschrijft wat er gebeurt ten gevolge van een verschil (een differentie) heet dan ook een differentiaalvergelijking.

Stel je hebt een luchtdrukverschil **ΔP**.
Dan zal er ten gevolge van dat luchtdrukverschil iets veranderen, er gaat lucht gaan stromen van het gebied met een hogere luchtdruk naar een gebied met lagere luchtdruk.
Die verandering kun je beschrijven per tijdsinterval, per uur, per dag, per seconde, per **Δt**.

De verandering van de luchtdruk per tijdseenheid is dan $\Delta P/\Delta t$, voor kleine Δt wordt het **dP/dt** oftewel **P'**.

Een vergelijking die een afgeleide bevat noemen we een **Differentiaalvergelijking.**

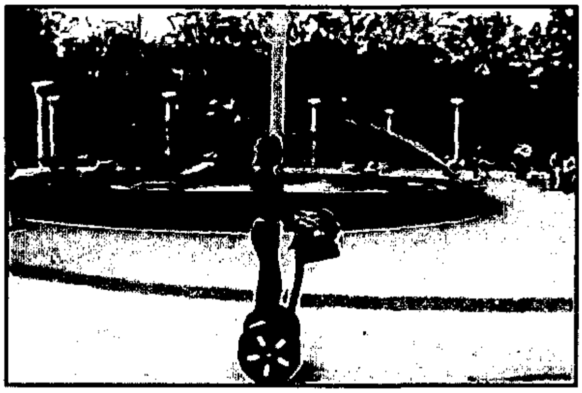
Met DV beschrijven we dus vooral processen waarbij allerlei veranderingen plaats vinden.

Dit gebeurt, in geval van het weer, voor luchtdrukverschillen, maar ook voor temperatuursverschillen, luchtvochtigheidsverschillen etc. etc.

Op die manier krijg je een stelsel van DV, een model, die samen beschrijven wat er allemaal in onze atmosfeer gebeurt.
Een model waarmee je uit kunt rekenen, kunt voorspellen, hoe het weer zich gaat ontwikkelen.

Hoe maak je nu zo'n model ?
Dat kan met behulp van de modelleercyclus.

wiskundige modellen



Hoe maak je zo'n model ?   Dat gaan we illustreren aan hand van de segway PT.

De segway PT.

Een transportmiddel op twee wielen dat zichzelf + bestuurder voortbeweegt en keurig in balans houdt met elektromotoren.
De motoren oefenen een kracht uit die elke onbalans neutraliseert en de bestuurder keurig in evenwicht houdt. Die kracht wordt berekend met een model.

Waarom een model ?   Je kunt natuurlijk ook gebruik maken van een regel circuit dat voortdurend corrigeert voor de uitwijking op dat moment.

Demo stokje.

Dat wil zeggen als je naar voren leunt beweegt de segway ook een beetje naar voren tot je recht staat en andersom.
Maar als je regelt kom je nooit precies goed uit, je blijft dus corrigeren, daar kun je zeeziek van worden.
Het zou veel mooier zijn als je altijd precies genoeg corrigeert om in balans te blijven.
Dan blijven de uitwijkingen minimaal en heb je helemaal niet in de gaten dat er gecorrigeerd wordt.
Hoe je dat kunnen realiseren.

Model vs proberen.

Door alle denkbare mogelijkheden uit te proberen en de vereiste correctie vast te stellen.
Alle denkbare mogelijkheden zijn er een hele hoop, dat is onbegonnen werk.
Het apparaat wordt gebruikt door verschillende mensen met verschillende gewichten, verschillende klengtes, verschillende houdingen en ze bewegen ook nog eens anders.
Het apparaat beweegt zelf ook, met verschillende snelheden, het trekt op en remt af en maakt bochtjes en dan hebben we het nog niet gehad over drempels en kuilen.
Als je voor al die mogelijkheden de exact juiste correctie wil bepalen, ben je wel even bezig.
Experimenteren kost veel tijd en geld en je weet nooit of je echt alle mogelijkheden hebt afgedekt.

Stel je voor, je ziet een mogelijkheid over het hoofd.
Bij een crash met een Segway zal de schade beperkt blijven.
Maar als het om de automatische piloot van een verkeersvliegtuig gaat, of de constructie van een wolkenkrabber ?

Je kunt ook gebruik maken van een model.

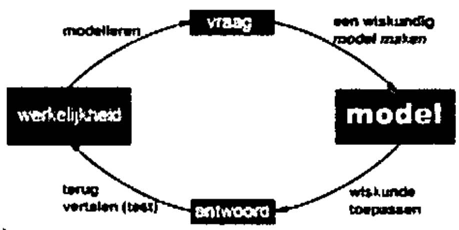
Een model dat de segway beschrijft kan voor elke situatie precies de juiste correctie uitrekenen.
Je hoeft dan niet elke situatie uit te proberen.
Het model bevat alle relevante karakteristieken/eigenschappen.
Elke situatie is afgedekt.

Zo'n model maken we met behulp van de modelleercyclus.

wiskundige modellen

De modelleer cyclus:

1. Conceptualiseren
2. Mathematiseren
3. Analyseren
4. Interpreteren & valideren



De modelleercyclus is cyclisch, rond. Dat is niet voor niets, vaak moet je een paar rondjes doen voor je echt klaar bent, voor je een goed model hebt.

Links de werkelijkheid, rechts een model (van die werkelijkheid).
In de werkelijkheid zit een vraag die we willen beantwoorden, met een model van die werkelijkheid kunnen we de oplossing berekenen.

Boven een vraag, onder een antwoord.
Je maakt de vraag concreet, met je model vind je een antwoord op die vraag.

Het model maak je dus met als doel je vraag te beantwoorden, het bevat alle zaken uit de werkelijkheid die relevant zijn voor de vraag.
Zaken die niet relevant zijn laat je weg **DIT IS CRUCIAAL**.
Het model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid maar bevat alle karakteristieken, alle eigenschappen van die werkelijkheid die relevant zijn voor de vraag.

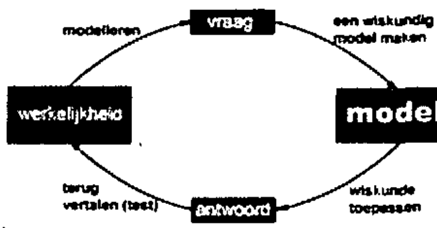
Het antwoord dat je met je model berekent toets je vervolgens aan de werkelijkheid, klopt het wel ?

Het kan zijn dat je na een eerste rondje nog niet alle relevante aspecten van de werkelijkheid in je model hebt
(het model is weliswaar een vereenvoudiging maar in deze fase iets te eenvoudig),
dan maak je dus een tweede rondje waarin je het model aanpast.
Net zolang totdat het antwoord op je vraag voldoet voor de werkelijkheid.

wiskundige modellen

De modelleer cyclus:

1. **Conceptualiseren**
2. Mathematiseren
3. Analyseren
4. Interpreteren & valideren



4 juli 2011 Differentiaalvergelijkingen 14

Eerste fase van het modelleren is de conceptualiseer fase.

We kijken naar de werkelijkheid en stellen een vraag die we willen beantwoorden.
We inventariseren welke aspecten, grootheden, variabelen van belang zijn.

We observeren en denken na ....

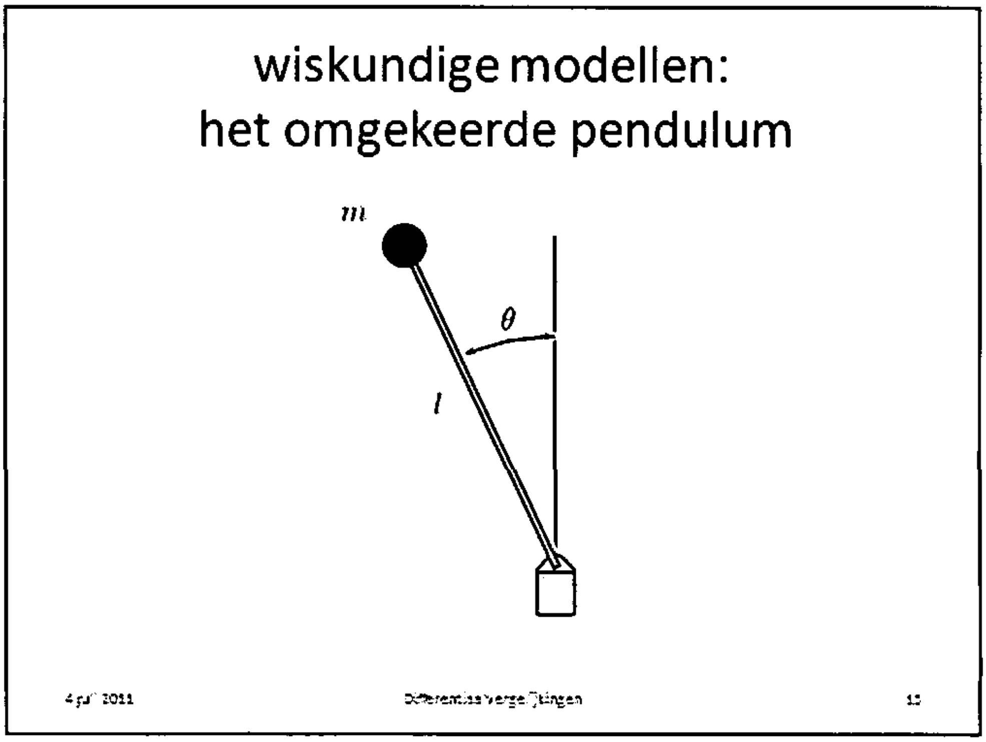
Welke vraag wil je beantwoorden ?

Welke kracht moeten de motoren leveren om segway + bestuurder in evenwicht te brengen / houden?

Welke aspecten, grootheden, variabelen zijn van belang ?

Een schematische voorstelling ......

Laten we de bestuurder weergeven als een massa op een bepaalde afstand van het draaipunt.



De bestuurder geven we schematisch weer als een massa op een bepaalde afstand van het draaipunt.

In balans: geen probleem.
Uit balans: de massa valt, hij beweegt steeds sneller, hij ondervindt een versnelling

Welke **grootheden** (*kracht*) en **variabelen** (wet van Newton *massa* en versnelling) spelen een rol ?

We willen een **kracht** uitrekenen, we hebben een **massa** op een **afstand** l van het draaipunt die een **hoek Θ** maakt met de normaal die een **versnelling** ondervindt.

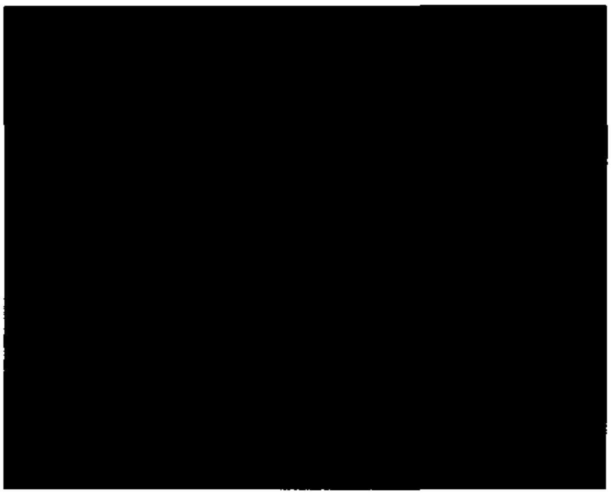
Kunnen we het proces beschrijven ?
(We zijn nog steeds aan het nadenken over / kijken naar het probleem)

Dit proces is lastig te beschrijven, voor je het weet is het voorbij.
Maar als je de boel omdraait, het draaipunt boven in plaats van beneden, het ding is het zelfde het proces is hetzelfde, het verschil is dat
draaipunt boven: een uitwijking naar links een versnelling naar rechts veroorzaakt, en
draaipunt beneden: een uitwijking naar links een vesnelling naar links veroorzaakt.

De richting is tegengesteld, dat kunnen we corrigeren met een tekenverandering.
(links = - rechts)

Dat proces / de beweging hebben we voor jullie beschreven:

wiskundige modellen



April 2011 Differentiaalvergelijkingen 16

-------------------------FILM AFSPELEN--------------------------

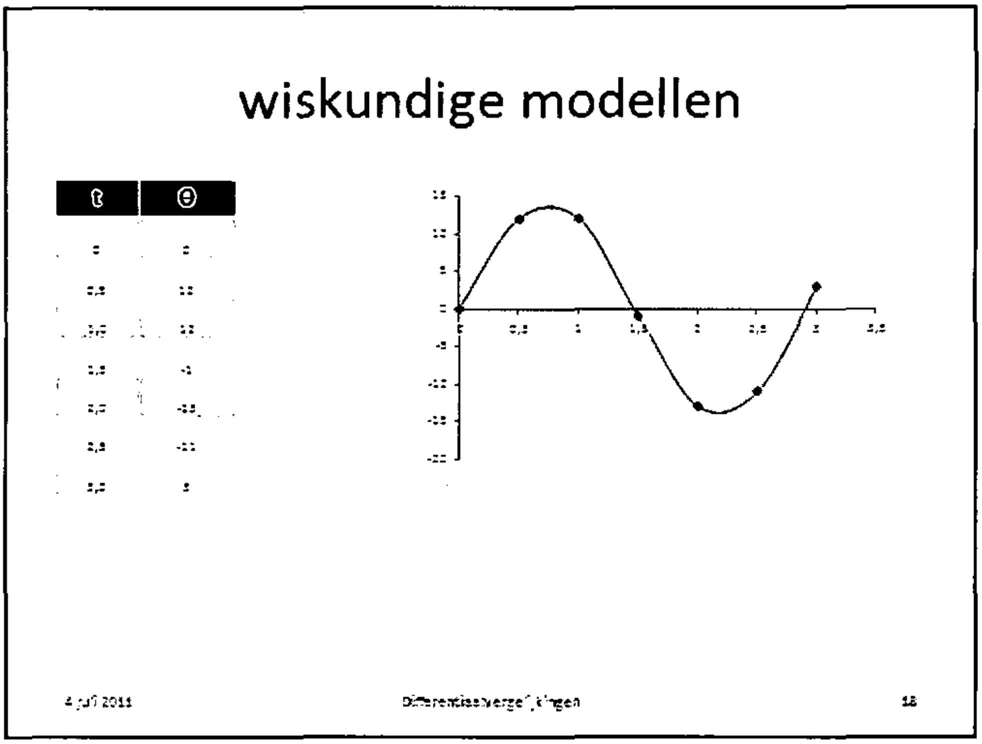
We hebben een pendulum gemaakt, een gewichtje aan een stuk touw.
Natuurlijk niet helemaal een pendulum, want touw is flexibel, maar als experiment voldoet dit.

We noteren de hoek Θ als functie van de tijd.

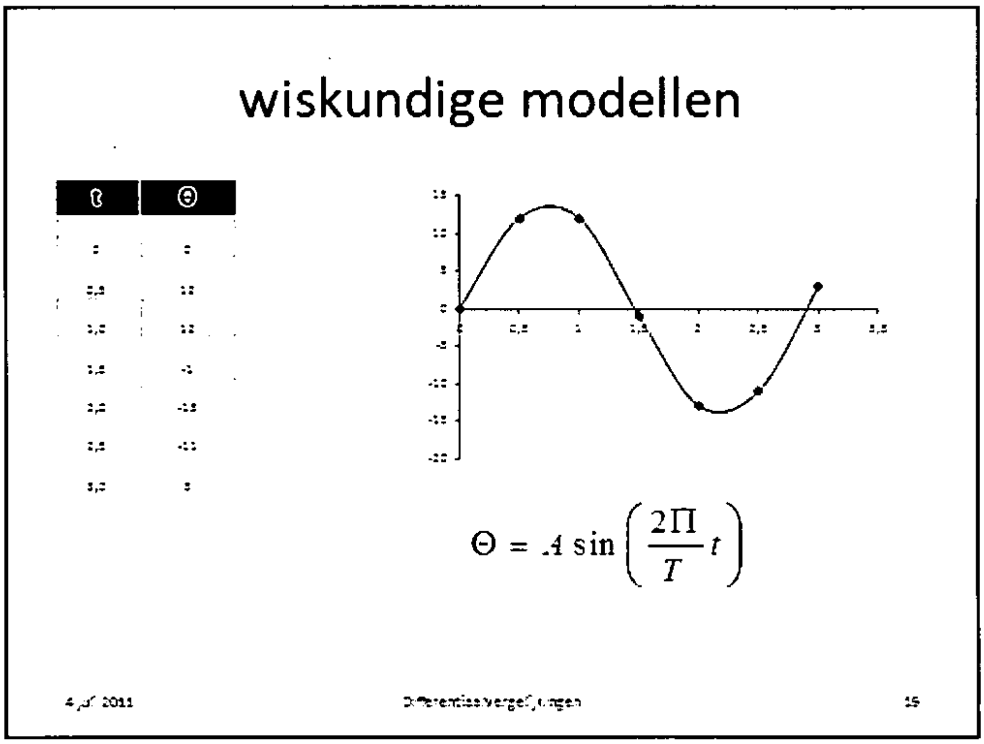
wiskundige modellen

t	Θ
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]

t = 0 als slotje door evenwichtsstand (Θ = 0°) gaat.



Voor overzichtelijkheid zijn minder datapunten gebruikt als werkelijk vergaard.
Bij gebruik van alle datapunten is de sinusvorm veel duidelijker.



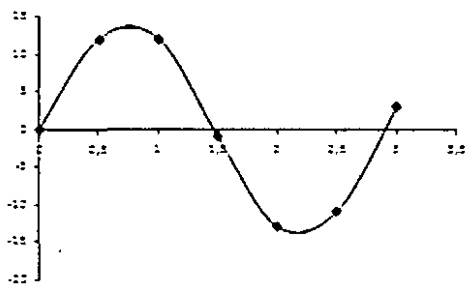
En uit grafiek en tabel volgt de formule.

$\Theta = A \sin \omega t$; met $A = 14$, en

$\omega = 2\pi/T$, $T = 2{,}9$s; dus $\omega = 2\pi/2{,}9$

wiskundige modellen

t	Θ
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]



$$\Theta = 14\sin\left(\frac{2\Pi}{2,9}t\right)$$

Deze formule beschrijft de positie van de slinger bij een bepaalde beginhoek.

Kunnen we hiermee de vraag beantwoorden:

welke kracht moeten de motoren leveren om de segway in evenwicht te brengen beantwoorden ?

Nee,

Hier kunnen we nog niet zoveel mee.

wiskundige modellen

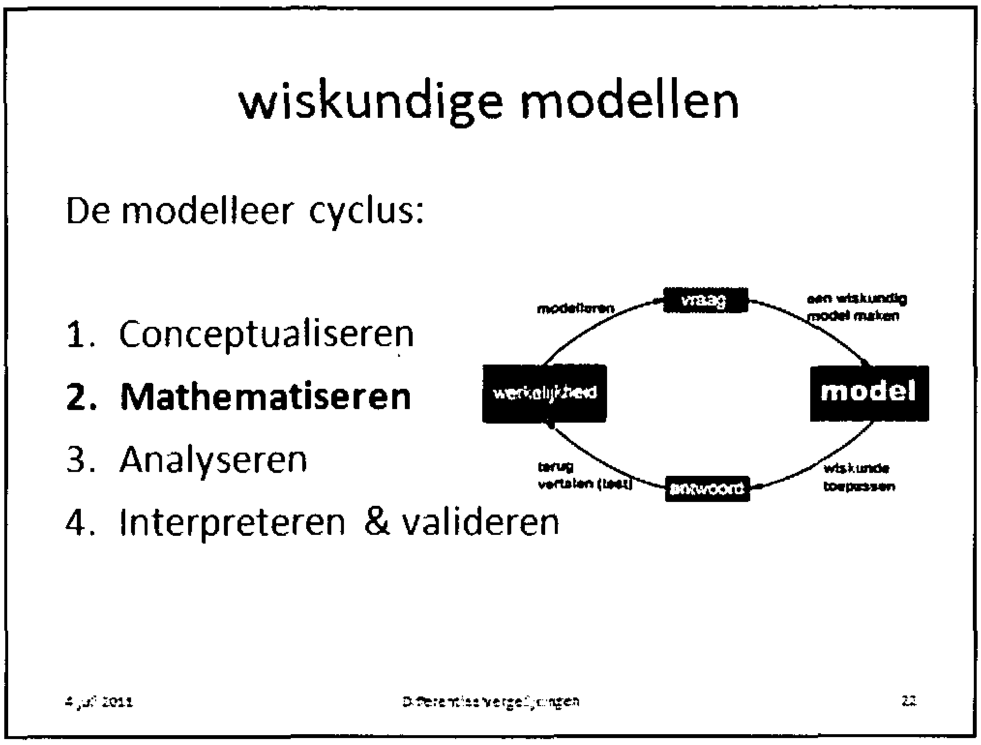
grootheden en variabelen

- Kracht **F**
- massa **m**
- lengte **l**
- hoek **Θ**
- versnelling **a**

$$\Theta = 14\sin\left(\frac{2\Pi}{2{,}9}t\right)$$

4 juli 2011 Differentiaalvergelijkingen 21

Samenvattend .....



We gaan mathematiseren, een verband zoeken tussen grootheden en variabelen, we gaan een model maken.

Een model waarmee we antwoord kunnen geven op de vraag: 'welke kracht moeten de motoren leveren om de segway in evenwicht te brengen'.

wiskundige modellen

Verband tussen grootheden en variabelen

- Kracht	**F**
- massa	**m**
- lengte	**l**
- hoek	**Θ**
- versnelling	**a**

$$\Theta = 14\sin\left(\frac{2\Pi}{2{,}9}t\right)$$

Kunnen we hier een verband uit halen ?

Verband tussen grootheden en variabelen: F = m . A (wet van Newton)

Als de massa van de bestuurder bekend is (wegen) en de versnelling links om of rechts om is bekend dan kun je de benodigde kracht F uitrekenen.
Als F bekend is kun je de exacte hoeveelheid (electrische) energie toevoeren om die kracht uit te oefenen.

wiskundige modellen

Verband tussen grootheden en variabelen

$$F = m \cdot a$$

4 juli 2011 Differentiaalvergelijkingen 24

De massa van een bestuurder kun je wegen.

Welke versnelling ondervindt die massa ?
Kunnen we met de beschikbare data de a bepalen ?

wiskundige modellen

Verband tussen grootheden en variabelen

$$F = m \cdot a$$

$$\Theta = 14\sin\left(\frac{2\Pi}{2{,}9}t\right)$$

We hebben data die de positie beschrijft als functie van de tijd (bij een bepaalde maximale uitwijking). De afgeleide van positie als functie van tijd is snelheid, en de afgeleide van snelheid als functie van tijd is de versnelling.
De versnelling is dus de tweede afgeleide van de positie als functie van de tijd.

In het algemeen (op bord):

$S(t) =$	$S_0 + v_0t + 1/2at^2$	
$dS/dt =$	$v(t)$	$= v_0 + at$
$d^2S/dt^2 =$	$= dV/dt$	$= a$

wiskundige modellen

$$\Theta = 14\sin\left(\frac{2\Pi}{2,9}t\right)$$

4 juli 2011 Differentiaalvergelijkingen 25

Dus we kunnen door te differentieren een formule voor de versnelling krijgen.
De versnelling is namelijk de tweede afgeleide van de positie.

wiskundige modellen

$$\Theta = 14\sin\left(\frac{2\Pi}{2,9}t\right)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \left(\frac{2\Pi}{2,9}\right)14\cos\left(\frac{2\Pi}{2,9}t\right)$$

wiskundige modellen

$$\Theta = 14\sin\left(\frac{2\Pi}{2{,}9}t\right)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \left(\frac{2\Pi}{2{,}9}\right)14\cos\left(\frac{2\Pi}{2{,}9}t\right)$$

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\left(\frac{2\Pi}{2{,}9}\right)^2 14\sin\left(\frac{2\Pi}{2{,}9}t\right)$$

4 juni 2011 Differentiaalvergelijkingen 28

Van de formule die de positie van de pendulum beschrijft kunnen we door te differentieren een formule voor de versnelling maken.

De versnelling is afhankelijk van de beginhoek (Θ) en van de tijd t.
En dat is niet handig.
Je wilt een formule die voor alle situaties een antwoord geeft, die **universeel** is.

Je kunt die formule universeel maken door substitutie van Θ.

wiskundige modellen

$$\Theta = 14\sin\left(\frac{2\Pi}{2{,}9}t\right)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \left(\frac{2\Pi}{2{,}9}\right)14\cos\left(\frac{2\Pi}{2{,}9}t\right)$$

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\left(\frac{2\Pi}{2{,}9}\right)^2 14\sin\left(\frac{2\Pi}{2{,}9}t\right)$$

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\left(\frac{2\Pi}{2{,}9}\right)^2 \Theta$$

Wat is kenmerkend voor een goed model ?

-Het is universeel, onafhankelijk van de begintoestand.
Als je een experiment herhaalt met een andere begintoestand krijg je hetzelfde model.
$\Theta(t)$ wordt anders, want de maximale uitwijking (amplitude: in dit geval 33) is anders.
$d^2\Theta/dt^2$ blijft gelijk want de beginhoek zit niet in het model.
Dus deze formule beschrijft de versnelling het pendulum voor alle hoeken, onafhankelijk van de tijd.

wiskundige modellen

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\left(\frac{2\Pi}{2{,}9}\right)^2 \Theta$$

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = \left(\frac{2\Pi}{2{,}9}\right)^2 \Theta$$

Rest toch een teken verandering. (demonstreren)

wiskundige modellen

$$F = m \cdot a \qquad a = \left(\frac{2\Pi}{2,9}\right)^2 \Theta$$

$$F = m \cdot \left(\frac{2\Pi}{2,9}\right)^2 \Theta$$

4 juli 2011 Differentiaalvergelijkingen 31

Dus als de slinger afwijkt van de middenstand (met hoek Θ) krijgt hij een versnelling.
Als Θ bekend is kan ik uitrekenen welke versnelling op de massa werkt.
Daarmee kan je uitrekenen met welke (tegen-) kracht die versnelling te niet wordt gedaan
(F = m • a, massa is bekend),

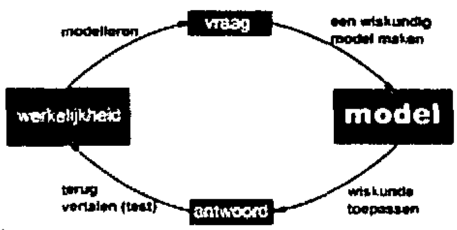
en ook
met welke (tegen -) kracht ik de **afwijking ongedaan** kan maken,
met andere woorden hoe ik weer precies in de evenwichtsstand kom.

(En voor de mensen die zich afvragen waar de lengte l (afstand tussen draaipunt en massa) is gebleven ......
De lengte van het koord bepaald de periode T, dus hoe langer l, hoe langer T.)

wiskundige modellen

De modelleer cyclus:

1. Conceptualiseren
2. Mathematiseren
3. **Analyseren**
4. Interpreteren & valideren



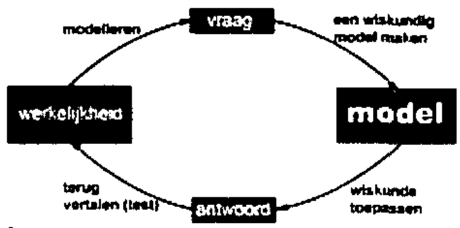
[illegible] 2011 [illegible] 33

De wiskundige stap: een wiskundig antwoord op het wiskundig model.
Je zoekt het antwoord op je vraag door in je model wiskundige berekeningen toe te passen.

wiskundige modellen

De modelleer cyclus:

1. Conceptualiseren
2. Mathematiseren
3. Analyseren
4. **Interpreteren & valideren**

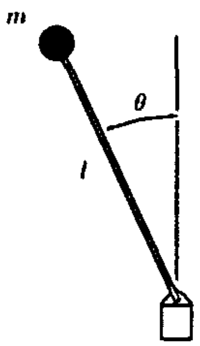


4 juli 2011 Differentiaalvergelijkingen 34

Interpreteren en valideren,

Dat is een kwestie van testen.

wiskundige modellen



Echter:

Het model van de segway is natuurlijk niet zo eenvoudig.
We hebben een model gemaakt van een pendulum voor een
-statische toestand (het draaipunt staat stil)
-met een bepaalde afstand tot het draaipunt
-Voor een beperkte hoek (<30°),
-mensen zijn verschillend groot,
-hebben verschillende houdingen
-en het ergste van alles: ze bewegen.
Bovendien, de segway kan ook bewegen;
-voor en achteruit,
-optrekken en afremmen,
-bochtjes maken,
-berg op en berg af, over drempels en door kuilen rijden.

-En onder alle denkbare omstandigheden moet hij rechtop blijven staan.

Je kunt je voorstellen dat het echte model van de segway een stuk ingewikkelder is,
Dit was een eerste rondje modelleercyclus, voor je met de segway klaar bent moet je nog een paar keer.

Differentiaalvergelijkingen

$$y' = 2x$$

Hoe los je een DV vergelijking op, dat wil zeggen hoe vind je de formule voor y als bijvoorbeeld **$y' = 2x$**
(Het meest eenvoudige voorbeeld van een differentiaalvergelijking)

Dit zal jullie hopelijk bekend voorkomen; de **afgeleide** van de functie $y = x^2$ (OF $y = x^2 + 3$)

Wat betekent dat, de afgeleide ?
-de richtingscoëfficiënt VAN DE RAAKLIJN in een punt, en die richtingscoëfficiënt is in dit geval afhankelijk van x.
VOORBEELD; IN HET PUNT (3,9) IS DE RC=$2\cdot3$=6

Differentiaalvergelijkingen

y', de afgeleide van y, dy/dx , is de richtingscoëfficient van de raaklijn in een punt.

Wat moet ik me daar ook al weer bij voorstellen ?

We nemen opnieuw de grafiek van **$y = x^2$.**
We nemen het punt **A(1,1)**
Zoom in op de grafiek,(met het wieltje op de muis) zoom steeds verder in totdat je ziet dat de parabool in een rechte lijn overgaat

Neem **2 punten B en C** en trek er **een lijn** door. Je ziet dat je inderdaad een rechte lijn gekregen hebt. De parabool is op microniveau bij een punt een piepklein stukje rechte lijn (local straightness).

Zoom nu uit totdat de parabool, echter nu met de rechte lijn, weer in beeld komt. Je ziet dat de rechte lijn nu de raaklijn is in het punt A (1,1).
De rechte lijn snijdt de y-as in het punt (0,-1). **inzoomen**
De richtingscoëfficient van de RECHTE LIJN IS a $=\Delta y/\Delta x = (Y_B - Y_A)/(X_B - X_A)$ DUS HIER $=(-1-1)/(0-1)=2$

Zoom uit.

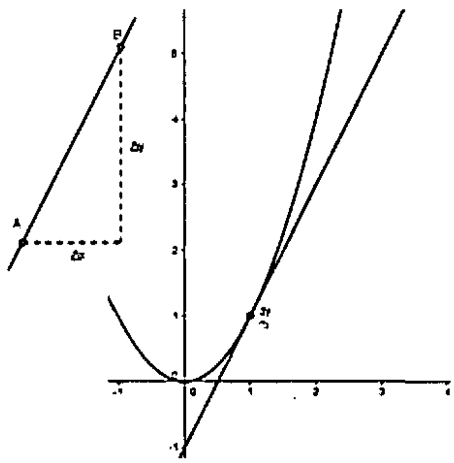
Als je vanuit (1,1) dus een piepklein stukje naar rechts gaat ($\Delta x= 0{,}03$) en daarna $\Delta y=2\cdot 0{,}03$ omhoog dan ligt dit punt nagenoeg ook op de parabool.

Algemeen:
Stel je hebt een punt (x,y) en een rc a.
De y-waarde die hoort bij de x - coordinaat $(x+\Delta x)$ is dan $(y+\Delta y) = (y+a\Delta x)$ DUS HIER X=1+0,03 DAN Y=1+2·0,03=1,06

De richtingscoëfficiënt beschrijft dus hoeveel de functie in dat punt verandert.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\frac{dy}{dx} \leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Differentiaalvergelijkingen

Nog iets over de notatie:

Δy/Δx heet een differentie quotient
dy/dx heet een differentiaal quotient.

Als het gaat om meetbare stukjes hebben we het over Δ.
Als de stukjes zo klein zijn dat we ze niet meer kunnen meten noemen we het d.

As die dy/dx (of een hogere afgeleide) voorkomt in een vergelijking spreken we van een differentiaalvergelijking

Differentiaalvergelijkingen

de afgeleide y' is

- de mate waarin de grafiek verandert
- de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een punt van de grafiek.

Differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dy}{dx} = 2x \qquad y' = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = y \qquad y' = y$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0 \qquad y'' + y = 0$$

Dus y' = 2x is een differentiaalvergelijking

Maar y' = y ook.

Bij y' = 2x is de afgeleide y' een functie van x.
Bij y' = y is de afgeleide y' een functie van y.

Dit is een bijzondere groep binnen de differentiaalvergelijkingen, een differentiaalvergelijking waarin y vaker dan 1 keer staat, als zichzelf of een eerste of hogere orde afgeleide.

De eerste DV is gemakkelijk algebraïsch op te lossen. Als y' een functie is van x kun je de primitieve bepalen door te integreren (een standaardtrucje). $y= x^2$ of $y=x^2+3$.

DE oplossing van een DV is geen getal(len) (zoals bij 2x + 4= 10) maar formules.
(Een oplossing van een DV is een formule die bij substitutie in de DV een juiste bewering oplevert.)

Als y' een functie is van y kan dat niet. Bij y'= y is de oplossing **niet** $y=0{,}5y^2$.
Dit kan niet want y = een functie van x, en niet een functie van y.
Het algebraïsch oplossen van zo'n DV heeft meer voeten in de aarde, sterker nog voor de meesten kan dit niet.
(In dit geval is dit nog niet zo lastig want als y' = y dan $y = e^x$)

Je kunt het wel grafisch numeriek oplossen,
De afgeleide van een functie is namelijk een maat voor de verandering van die functie in een punt.

Als je een punt van de functie kent en weet hoe die veranderd kun je het volgende punt uitrekenen.

Differentiaalvergelijkingen

Stel:
Een functie gaat door het punt (1,1)
De afgeleide van de functie $y' = 2x$.

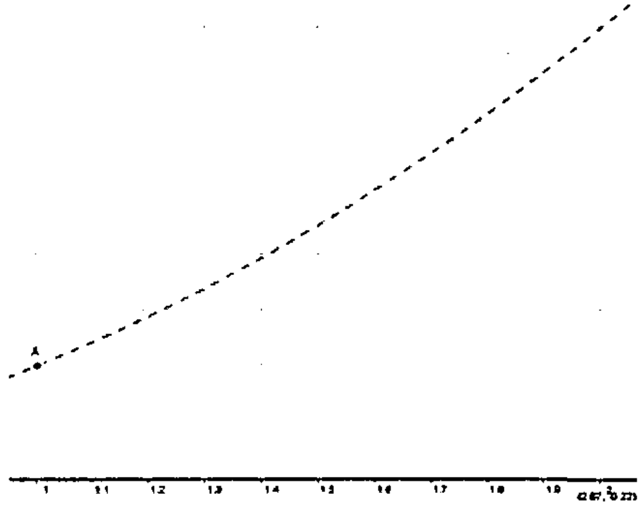
Welke grafiek hoort daarbij ?

Stel: je kent alleen de afgeleide van een functie, en niet de functie zelf
Dan kan je de functie grafisch numeriek reconstrueren.

Natuurlijk is de grafiek die bij $y' = 2x$ hoort bekend. Even integreren en $y = x^2$.
Maar voor verreweg de meeste differentiaalvergelijkingen is de primitieve niet te vinden.

Dan zal het op een andere manier moeten. Dit illustreren we aan de hand van $y' = 2x$.

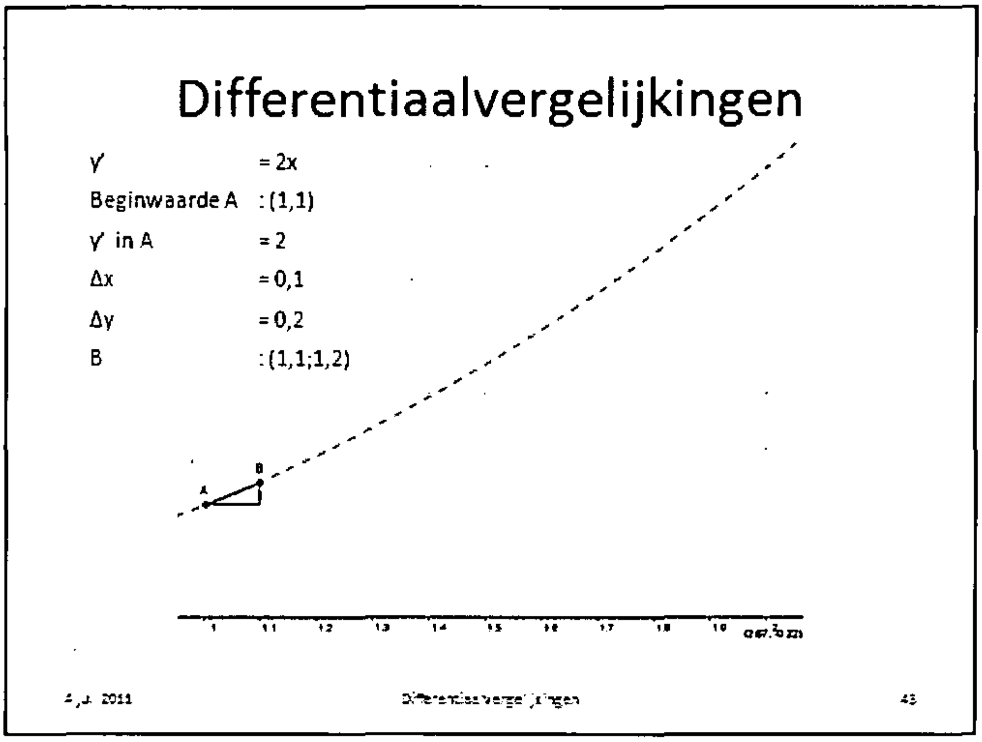
Differentiaalvergelijkingen



Een grafiek gaat door het punt A(1,1).
Voor de afgeleide van de functie geldt Y'=2X

We gaan een grafiek maken van een functie met
-differentiaalvergelijking **y' = 2x**
-stapgrootte = **0,1**
-beginwaarde A**(1,1)**

Bereken het eerstvolgende punt.

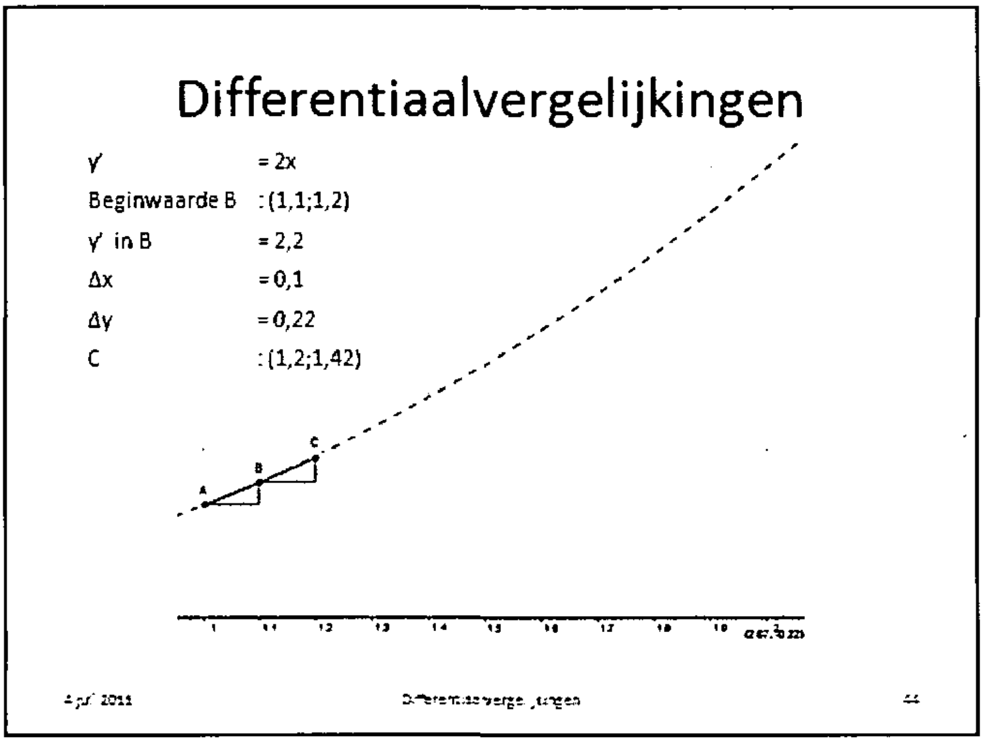


Welke y-waarde zou horen bij x = 1,1 ?

Y'=2X
Beginwaarde A:(1,1)
Richtingcoëfficiënt raaklijn in A: $2 \cdot 1 = 2$

$\Delta x = 0{,}1$;
$\Delta y = 2 \bullet \Delta x = 2 \bullet 0{,}1 = 0{,}2$
$y_{(x=1,1)} = 1 + 0{,}2 = 1{,}2$

B:(1,1;1,2)

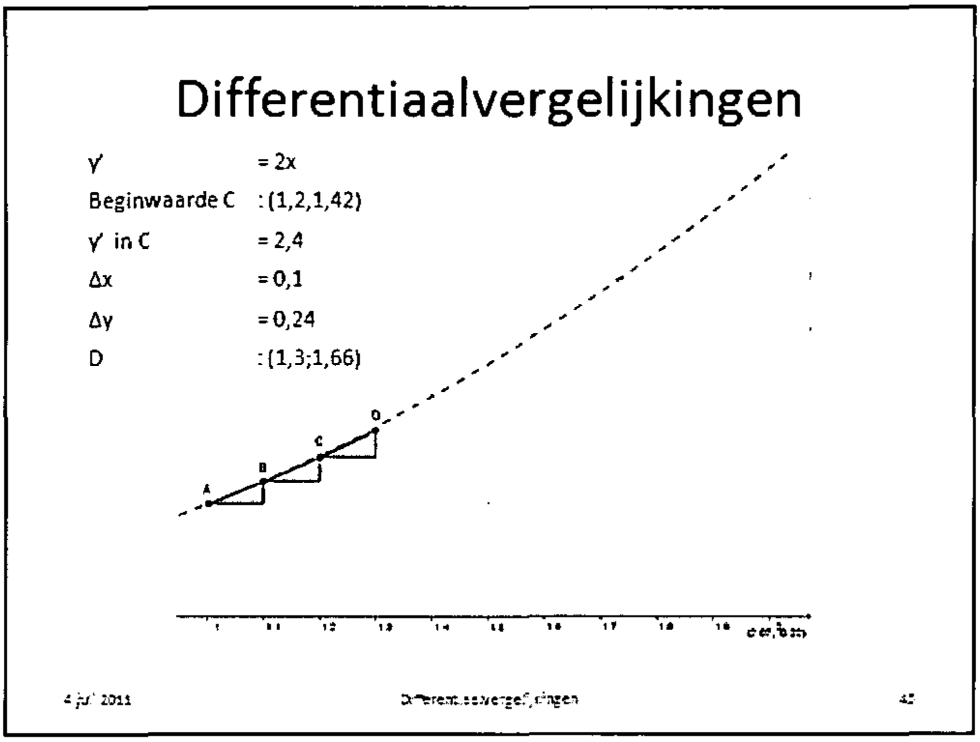


Welke y-waarde zou horen bij $x = 1,2$?

Richtingcoëfficiënt raaklijn in B (1,1;1,2): $2 \bullet 1,1 = 2,2$.

$\Delta x = 0,1$;
$\Delta y = 2,2 \bullet \Delta x = 2,2 \bullet 0,1 = 0,22$
$y_{(x=1,2)} = 1,2 + 0,22 = 1,42$

C:(1,2;1,42)

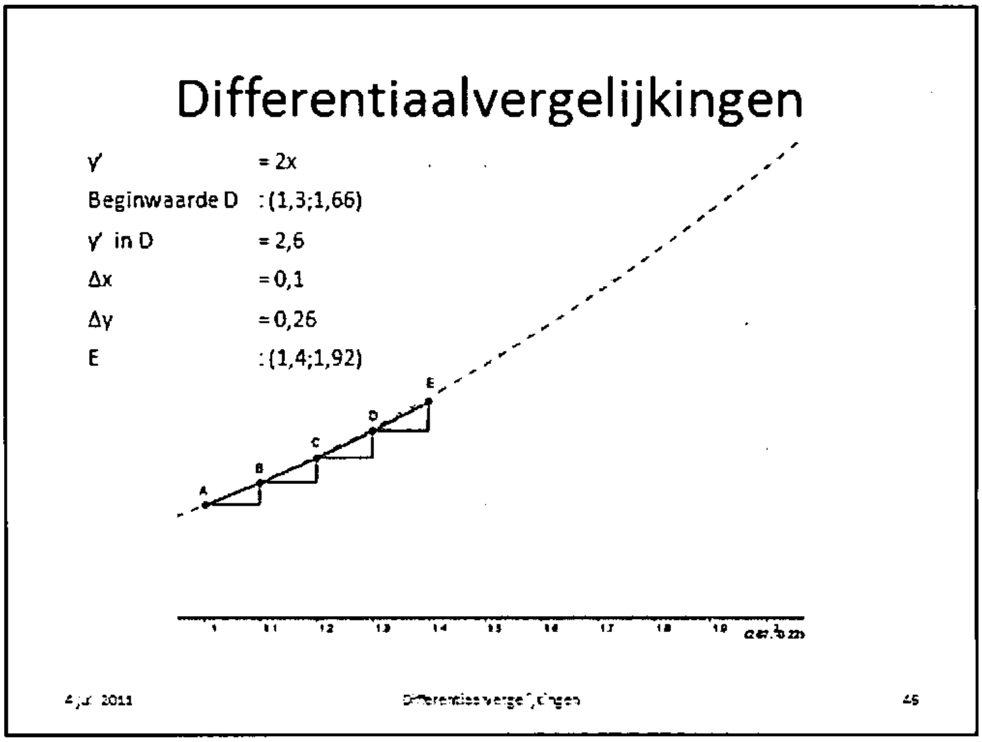


Welke y-waarde zou horen bij x = 1,3 ?

De afgeleide in C(1,2;1,42) = 2 • 1,2 = 2,4.

Δx = 0,1;
Δy = 2,4 • Δx = 2,4 • 0,1 = 0,24
$y_{(x=1,3)}$ = 1,42 + 0,24 = 1,66

D:(1,3;1,66)



Welke y-waarde zou horen bij $x = 1,4$?

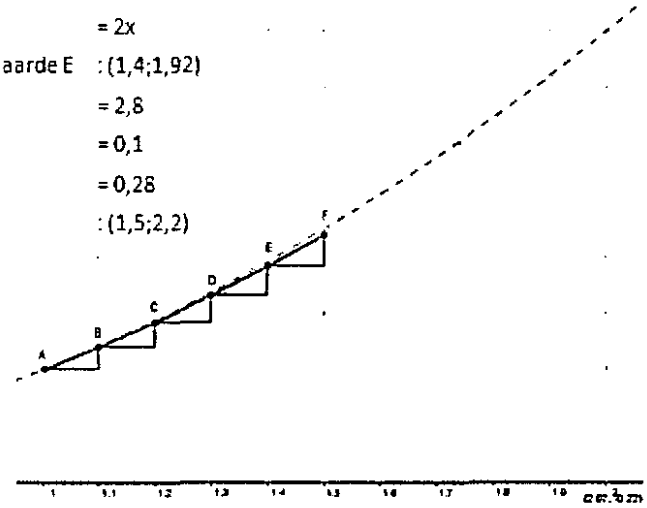
De afgeleide in D(1,3;1,66) $= 2 \bullet 1,3 = 2,6$.

$\Delta x = 0,1$;
$\Delta y = 2,6 \bullet \Delta x = 2,6 \bullet 0,1 = 0,26$
$y_{(x=1,4)} = 1,66 + 0,26 = 1,92$

E:(1,4;1,92)

Differentiaalvergelijkingen

y'	= 2x
Beginwaarde E	: (1,4;1,92)
y' in E	= 2,8
Δx	= 0,1
Δy	= 0,28
F	: (1,5;2,2)

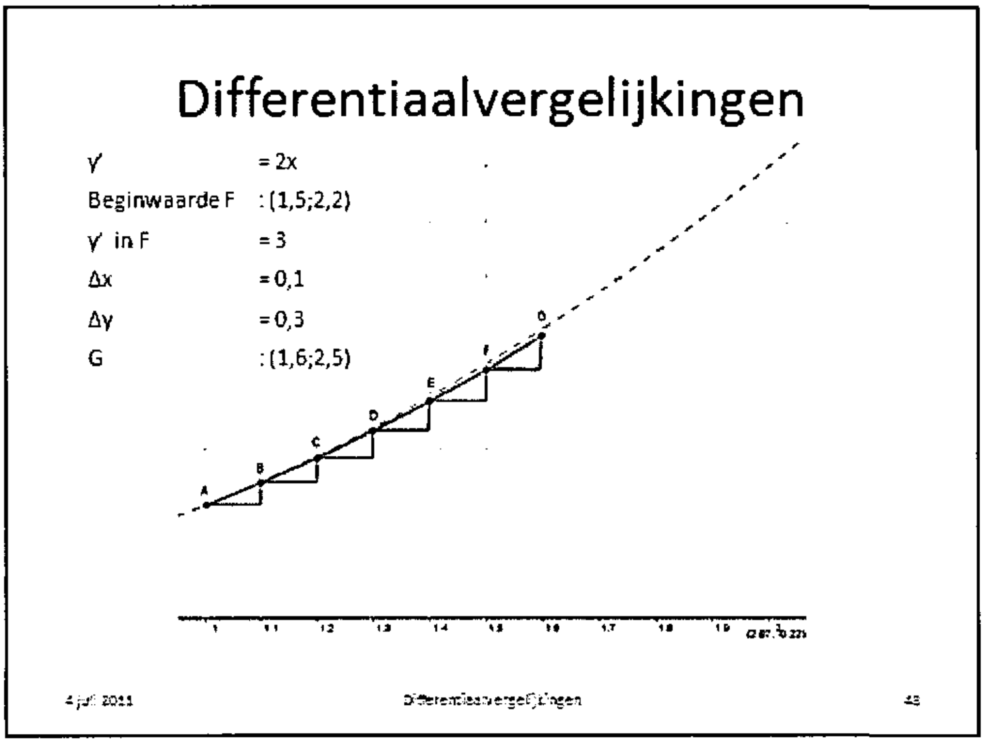


Welke y-waarde zou horen bij x = 1,5 ?

De afgeleide in E(1,4;1,92) = 2 • 1,4 = 2,8.

Δx = 0,1;
Δy = 2,8 • Δx = 2,8 • 0,1 = 0,28
$y_{(x=1,5)}$ = 1,92 + 0,28 = 2,2

F:(1,5;2,2)

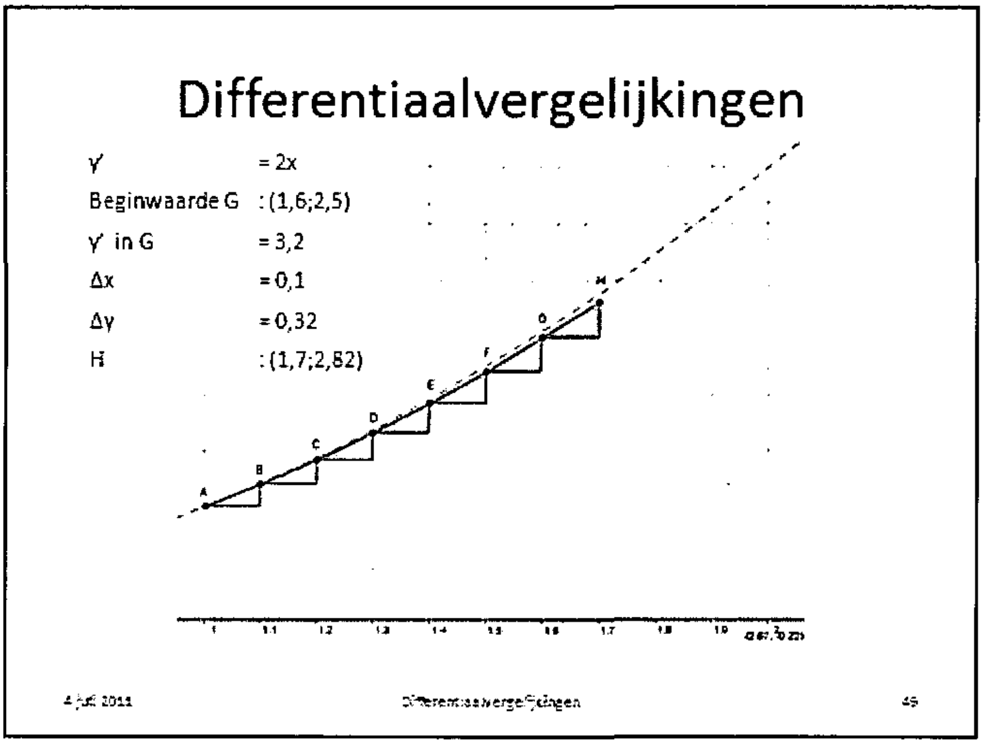


Welke y-waarde zou horen bij x = 1,6 ?

De afgeleide in F(1,5;2,2) = 2 • 1,5 = 3.

$\Delta x = 0{,}1$;
$\Delta y = 3 \bullet \Delta x = 3 \bullet 0{,}1 = 0{,}3$
$y_{(x=1,6)} = 2{,}2 + 0{,}3 = 2{,}5$

G:(1,6;2,5)

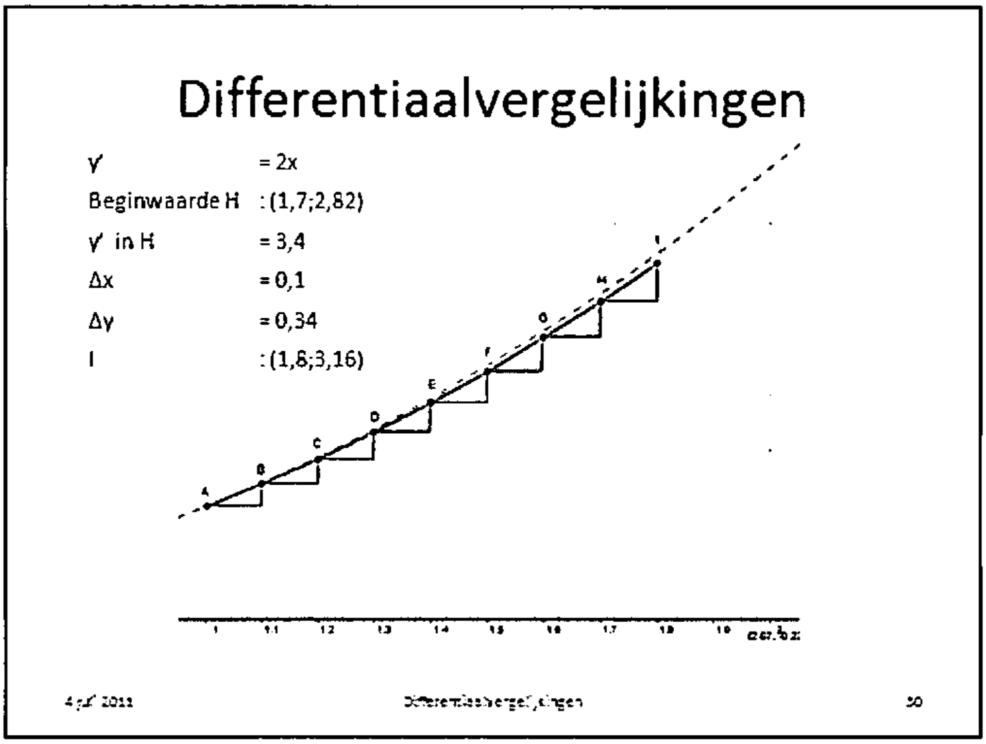


Welke y-waarde zou horen bij x = 1,7 ?

De afgeleide in G(1,6;2,5) = 2 • 1,6 = 3,2.

Δx = 0,1;
Δy = 3,2 • Δx = 3,2 • 0,1 = 0,32
$y_{(x=1,7)}$ = 2,5 + 0,32 = 2,82

H:(1,7;2,82)

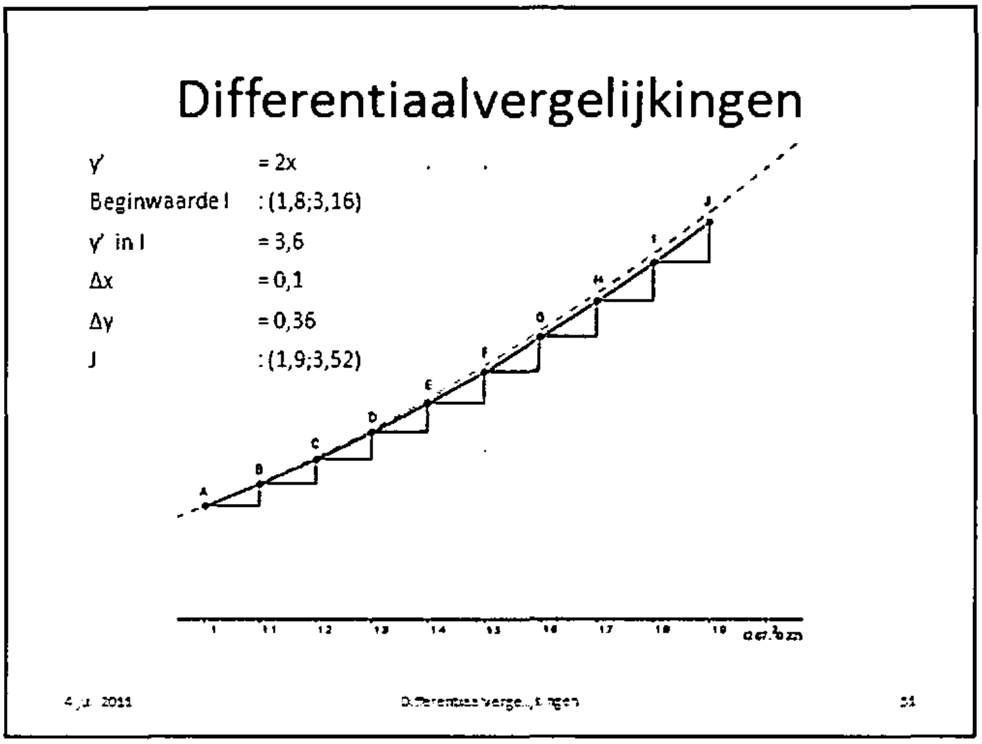


Welke y-waarde zou horen bij x = 1,8 ?

De afgeleide in H(1,7;2,82) = 2 • 1,7 = 3,4.

$\Delta x = 0{,}1$;
$\Delta y = 3{,}4 \bullet \Delta x = 3{,}4 \bullet 0{,}1 = 0{,}34$
$y_{(x=1,8)} = 2{,}82 + 0{,}34 = 3{,}16$

I:(1,8;3,16)

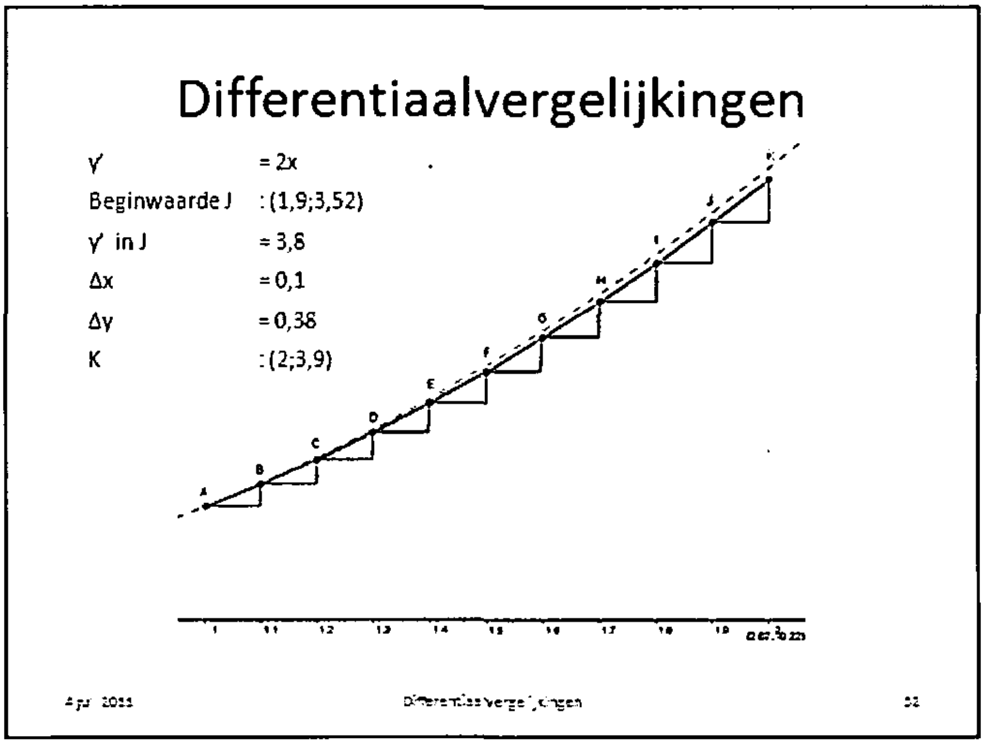


Welke y-waarde zou horen bij x = 1,9 ?

De afgeleide in I(1,8;3,16) = 2 • 1,8 = 3,6.

$\Delta x = 0,1$;
$\Delta y = 3,6 \bullet \Delta x = 3,6 \bullet 0,1 = 0,36$
$y_{(x=1,9)} = 3,16 + 0,36 = 3,52$

J:(1,9;3,52)



Welke y-waarde zou horen bij x = 2 ?

De afgeleide in J(1,9;3,52) = 2 • 1,9 = 3,8.

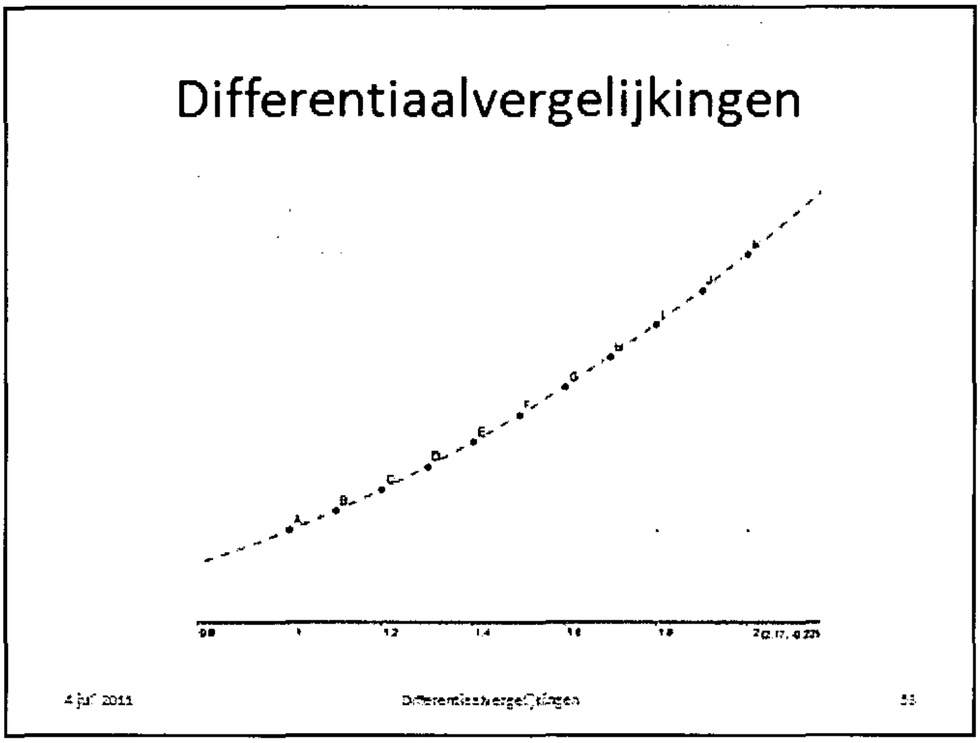
$\Delta x = 0{,}1;$
$\Delta y = 3{,}8 \bullet \Delta x = 3{,}8 \bullet 0{,}1 = 0{,}38$
$y_{(x=2)} = 3{,}52 + 0{,}38 = 3{,}9$

K:(2;3,9)

Volgens $y = x^2$ zou de y – waarde bij x = 2 4 moeten zijn.

Bij het reconstrueren maken we een fout.

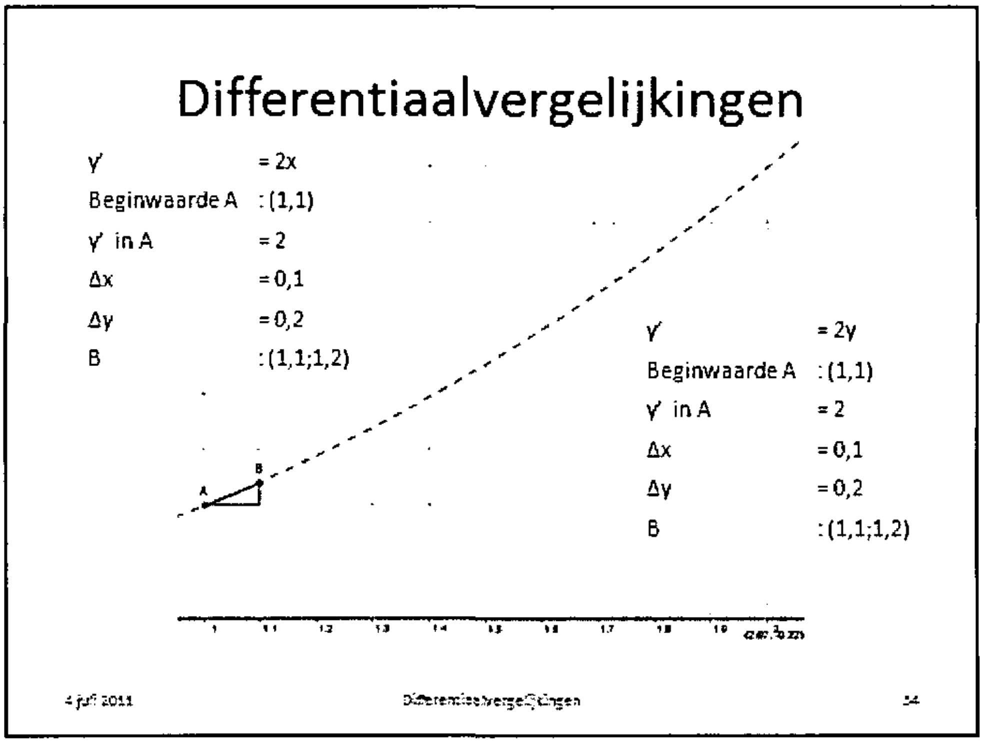
Als je je nu afvraagt waarom een weersverwachting soms niet uitkomt is dit een van de oorzaken.



De fout kan je kleiner maken met een kleinere stapgrootte, maar dan moet je meer rekenen.

Grafiek met stapgrootte 0,01.
100 punten tussen x=1 en x=2.
Hiervan zijn er 10 getekend.

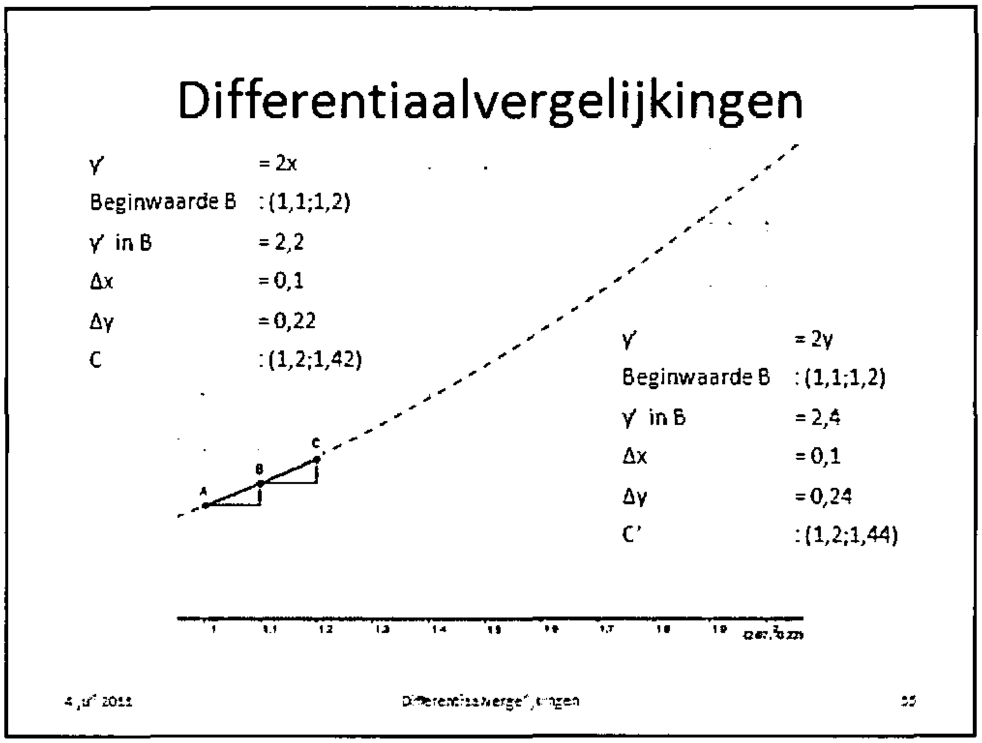
Dat is o.a. de reden dat bij dat instituut in Engeland een SUPERcomputer staat. Het moet naast veel gegevens opslaan ook veel rekenen.



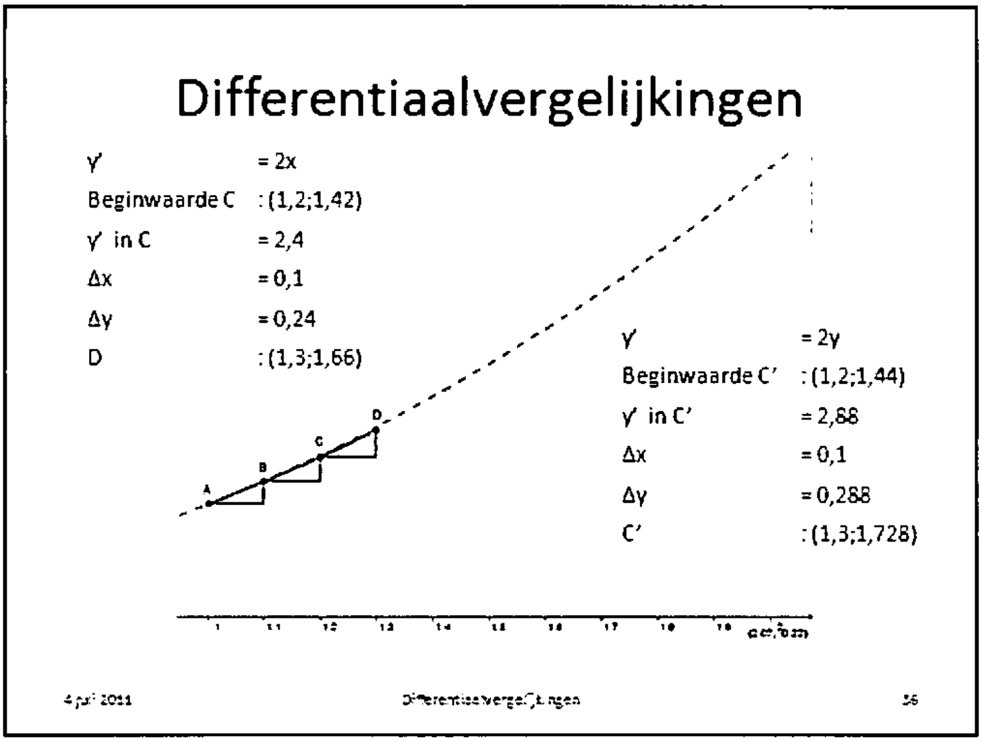
Je hebt nu op een grafische manier de DV y'=2x opgelost. De oplossing is $y = x^2$ met beginconditie het punt (1,1)

We doen nu hetzelfde maar nu met y'=2y
y' = 2y
Beginwaarde A: (1,1)
Richtingscoëfficiënt raaklijn in A: 2·1=2
Δx = 0,1
Δy= 2·0,1=0,2
B: (1,1;1,2)

Nog geen verschil.



y' = 2y
Beginwaarde B: (1,1;1,2)
y' in B= 2,4
Δx = 0,1
Δy= 0,24
C: (1,2;1,44) dit punt ligt iets hoger dan bij y'=2x



y' = 2y
Beginwaarde C: (1,2;1,44)
y' in C= 2,88
Δx = 0,1
Δy= 0,288
D: (1,3;1,728) weer een stukje hoger

etc.

Op deze manier ontstaat er een grafiek ook door (1,1) die sneller stijgt dan de grafiek van $y = x^2$. Deze grafiek is dan de oplossing van de DV y'=2y

Voor de liefhebbers; de formule van deze grafiek is $y=1/e^2 \cdot e^{(2x)}$

Differentiaalvergelijkingen

Als de afgeleide van een functie bekend is dan weet je de verandering in elk punt.

Dan kun je de functie reconstrueren.

Conclusie: als je de **afgeleide** van een functie kent, **en één punt** van die functie kun je de grafiek van die functie PUNT VOOR PUNT reconstrueren.

Of, anders gezegd, je kunt **wiskundig voorspellen** wat de functiewaarde zal zijn voor een bepaalde x.

Dit is natuurlijk heel veel rekenwerk maar met de huidige computers is dat geen probleem.

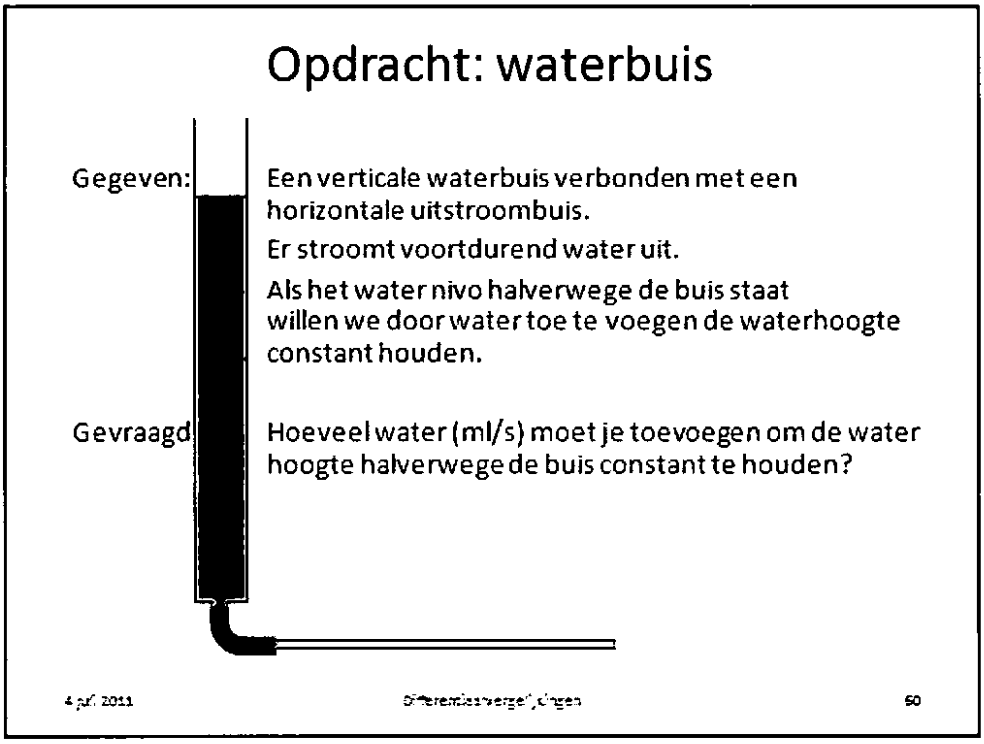
Een Differentiaalvergelijking

Is een wiskundige vergelijking
die beschrijft
hoe een grootheid verandert.

PAUZE

4 juli 2011 Differentiaalvergelijkingen 59

Na de pauze gaan jullie zelf aan de slag, in groepjes van twee, evt drie.
Gebruik de tijd om groepjes te maken.



Constructie laten zien ....

Diameter verticale buis:	D = 2,38 cm
Lengte verticale buis:	L = 200 cm
Diameter horizontale buis:	d = 1,25 mm
Lengte horizontale buis:	l = 41,5 cm

Waterhoogte verticale buis: h = 180 cm

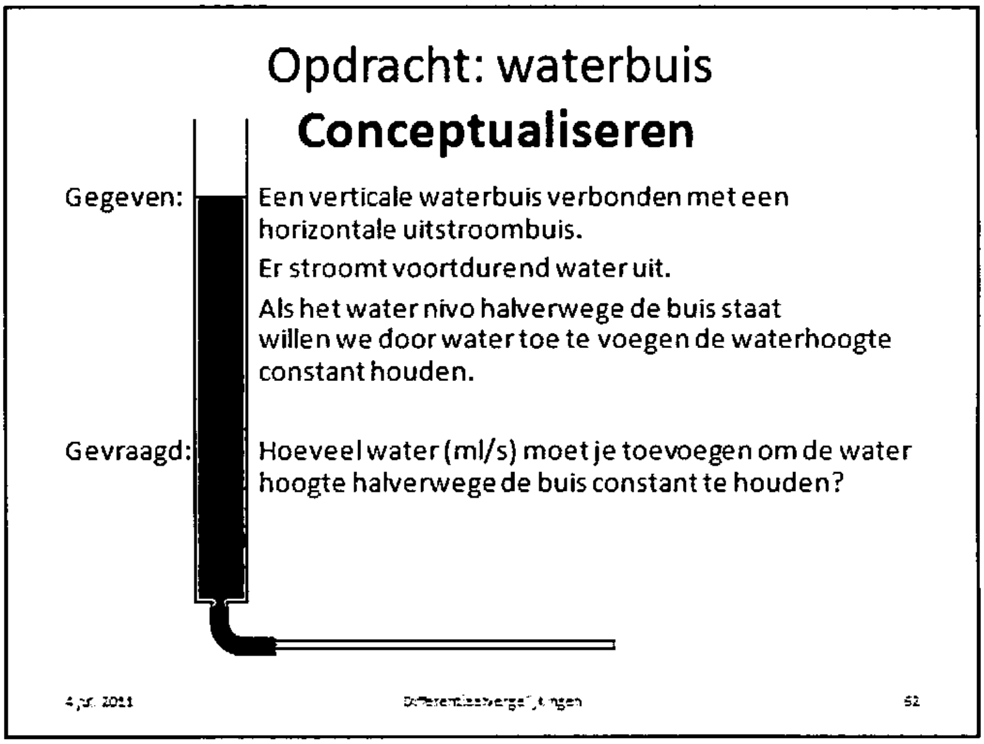
Opdracht: waterbuis

Hoe pakken we dit aan ?

4 juli 2011 Differentiaalvergelijkingen 61

Denk er eens 5 minuten over na

Met de modelleercyclus.



Stap 1: Conceptualiseren

Kijk naar het watervat en beschrijf wat je ziet, beschrijf het proces.

De waterbak loopt leeg, in het begin snel, aan het eind langzamer, zie je aan de uitstroomsnelheid van het water, waterstraal is 'langer". Hoe zou dat komen, afhankelijk van de tijd ? *Nee, kijk maar als ik met andere hoogte begin en waarnemingen vergelijk lijkt uitstroomsnelheid afhankelijk van hoogte in het vat, is plausibel, grotere druk, bij hogere waterhoogte.* Tweede experiment ter verificatie

Je kan een wiskundig model maken door gebruik te maken van kwantificeerbare grootheden (dat zijn grootheden die door getallen kunnen worden uitgedrukt) en de verbanden ertussen.
Denk eraan: de eenheden van de betreffende grootheden kunnen je vaak naar de juiste weg leiden.

Welke grootheden spelen een rol bij de uitstroomhoeveelheid ?
de waterhoogte in het vat.
De tijd. (werken naar debiet: $\Delta V/\Delta t \rightarrow \Delta h/\Delta t$*)*

Kan ik het proces (het leeglopen van de waterbak) beschrijven ? Welke grootheid verandert er in de tijd? (hoogte, volume)

Ja, met een meting.
Wat kan ik meten ?
1.De waterhoogte als functie van de tijd. (meet waterhoogte op vastgestelde intervallen)
2.De uitstroomhoeveelheid als functie van de hoogte. (meet tijdsinterval waarin bepaalde hoeveelheid uitstroomt voor verschillende hoogten)
3.De instroomhoeveelheid als functie van de hoogte. (meet tijdinterval nodig om bepaalde hoeveelheid water toe tevoegen bij constante waterhoogte voor verschillende hoogten)

--------------------------FILM AFSPELEN--------------------------

Het was de bedoeling om jullie zelf te laten experimenteren met een opstelling.
Dat hebben we uiteraard eerst zelf uitgeprobeerd. Dit bleek veel meer tijd te kosten dan we aanvankelijk dachten.
We hebben de experimentjes gefilmd en de meetresultaten verzameld zodat jullie in elk geval met de data verder kunnen.

Opdracht: waterbuis
Conceptualiseren

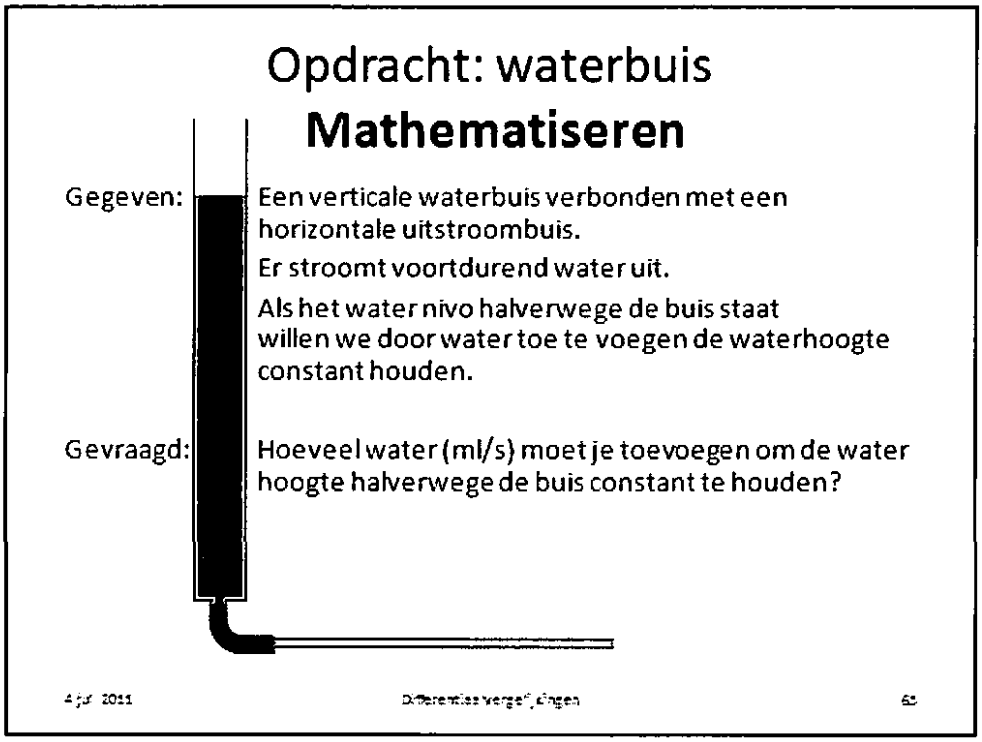
Set 1		Set 2			Set 3	
t	h	h	ΔV	Δt	ΔV	Δt
0	180,8	180,8	-50	54,72	-50	57
60	170	132	-50	76,78	-50	61
120	159,8	95,5	-50	100,66	-50	65,3
180	150				-50	68,9
240	141				-50	75,1
300	132,5				-50	81
360	124,5				-50	88
420	116,6				-50	98
480	109				-50	109
540	102				-50	125
600	95,5					

4 juli 2011 Differentiaalvergelijkingen 64

Uit set 2 (en 3) blijkt dat ΔV/Δt afhankelijk is van de waterhoogte in de buis.

Met de vergaarde informatie kunnen we de vraag (hoeveel water erbij moet om de waterhoogte constant te houden op een bepaalde hoogte) niet beantwoorden voor **alle mogelijke** waterhoogten.

Hiervoor moet de data gemanipuleerd worden, veranderd in een vorm waarmee wel een antwoord berekend kan worden.



Stap 2: Mathematiseren

Vraag: Hoeveel water (ml/s) moet je toevoegen om de waterhoogte halverwege de buis constant te houden?

Als waterhoogte constant dan $\phi_{in} = \phi_{uit}$ ϕ = debiet (cm^3/s)

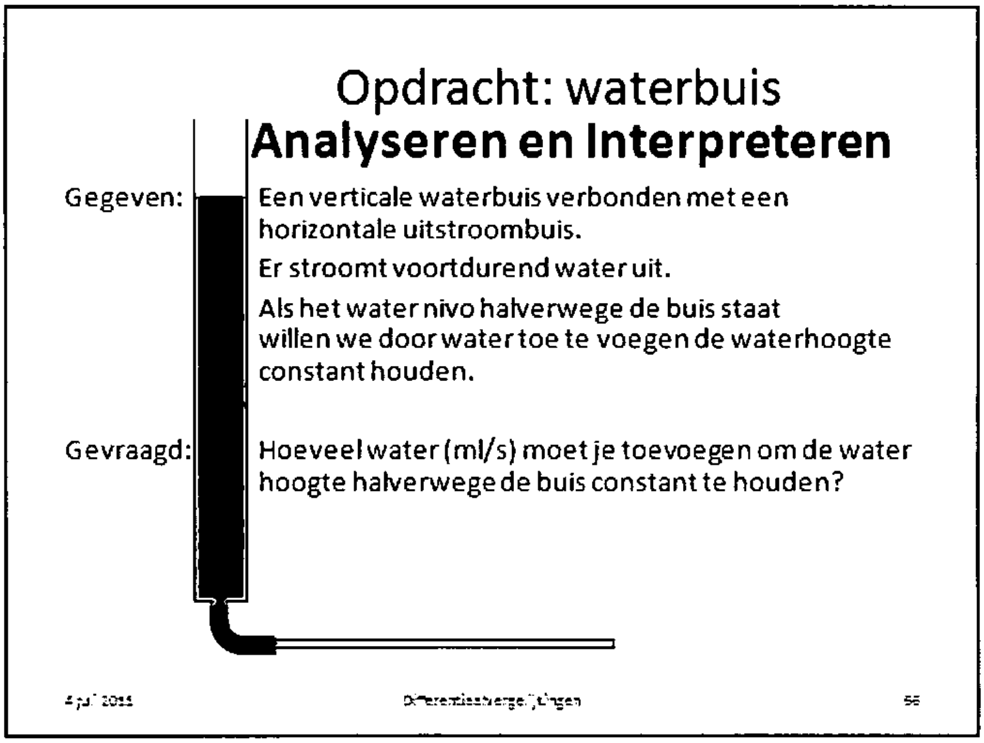
$\phi_{uit} = A\,\Delta h/\Delta t$

$\Delta h/\Delta t$ kun je met de gemeten data uitrekenen.
Als je $\Delta h/\Delta t$ uitzet tegen de hoogte, dan kun je voor elke hoogte bepalen hoe groot $\Delta h/\Delta t$ is.

Vind een formule voor $\Delta h/\Delta t = f(h)$

We hebben nu een wiskundig model, in dit model (vergelijking) staan zowel h als de afgeleide van h (dh/dt, is $\Delta h/\Delta t$ voor kleine Δ), dit model is dus een differentiaalvergelijking.

(Met deze stap hebben we de context (de waterbuis) verlaten.
Het model/de DV is geen waarneembaar iets, je kunt het wel terugvertalen en er een idee bij hebben maar het is niet grijpbaar, niet aanwijsbaar, niet zichtbaar. We hebben de stap naar wereld 2 gemaakt de wereld van symbolen.)



Stap 3: Oplossen of analyseren

Als waterhoogte constant dan $\phi_{in} = \phi_{uit}$ ϕ = debiet (m^3/s)

$\phi_{uit} = A\ \Delta h/\Delta t$, dus
$\phi_{in} = A\ \Delta h/\Delta t$

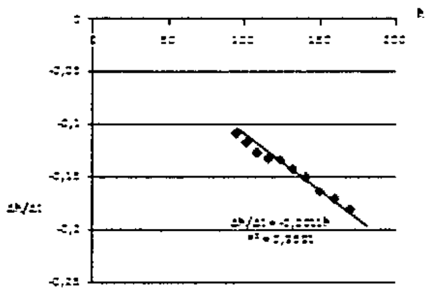
A is bekend, $\Delta h/\Delta t$ is in stap 2 bepaald, .dus ϕ_{in} is te berekenen.

Stap 4: *Interpreteren & Valideren.*

In deze stap zou getoetst moeten worden of de berekende hoeveelheid ϕ_{in} inderdaad leidt tot de gewenste hoogte.
Deze meting hebben we eigenlijk al uitgevoerd, we hebben gemeten bij drie hoogtes hoeveel water erbij moet om de hoogte constant te houden.

Opdracht: waterbuis
Resultaten

[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]



67

Posterpresentatie per groepje?

Vergelijking van de gevonden modellen.
Verklaring van de verschillen.

-Δ gemeten, d in de formule
-afleesfouten bij het meten.
-afrondingsfouten bij het berekenen.

Opdracht: waterbuis
Resultaten

volumedebiet$_{in}$ = volumedebiet$_{uit}$

$$\Phi_{in} = -\Phi_{uit}$$

$$\Phi_{uit} = \frac{\Delta h}{\Delta t} \cdot A_{buis}$$

Als $\Delta t \rightarrow 0$ dan $\Phi_{uit} = \frac{dh}{dt} \cdot A_{buis}$

$$\Phi_{uit} = -0,0011 \cdot h \cdot A_{buis}$$

$$\Phi_{uit} = -0,0011 \cdot h \cdot \Pi \cdot 1,19^2$$

$$\Phi_{uit} \approx -0,0049 \cdot h \left(\frac{ml}{s}\right)$$

$$\Phi_{in} = -\Phi_{uit} \approx 0,0049 h \left(\frac{ml}{s}\right)$$

4 juli 2011 Differentiaalvergelijkingen 53

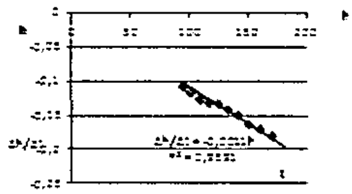
Stel h = 100 .....

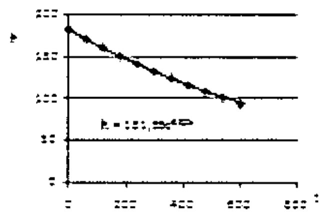
Φin = +/- 0,49 ml/s

Deze formule geldt voor elke hoogte, ook voor een langere buis van dezelfde diameter

Opdracht: waterbuis
Resultaten

[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]





Wat is nu het grote voordeel van
I de DV (de $\Delta H/\Delta T$ f(H)) vergeleken met
II de oplossing (de H-T grafiek) ??

Bij I is het universeel, het beschrijft het proces ongeacht de beginhoogte. Bij starthoogte (0,300) krijg je andere meetpunten maar de reschte lijn door de oorsprong blijft gelijk.
Bij II bepaalt de beginhoogte mede de grafiek. Bij starthoogt (0,300) krijg je een andere grafiek die hoger ligt.

opdracht: verontreinigd meer 1

Er was eens een meer …….
Het meer wordt gevoed met schoon water door een rivier, een andere rivier voert water uit het meer af.
Aan de rand van het meer staat een fabriek

Tijdens een bedrijfsongeluk in de fabriek zijn er gevaarlijke stoffen geloosd waardoor het meer is verontreinigd.

De directie geeft jou de opdracht uit te zoeken hoe lang het duurt voor het meer weer schoon is.

Hoe pakken we dit aan ?

Denk er eens 5 minuten over na.

Met de modelleercyclus.

opdracht: verontreinigd meer 1
Conceptualiseren

Er was eens een meer ....
Het meer wordt gevoed met schoon water door een rivier, een andere rivier voert water uit het meer af.
Aan de rand van het meer staat een fabriek

Tijdens een bedrijfsongeluk in de fabriek zijn er gevaarlijke stoffen geloosd waardoor het meer is verontreinigd.

De directie geeft jou de opdracht uit te zoeken hoe lang het duurt voor het meer weer schoon is.

4 juli 2011 Differentiaalvergelijkingen 72

Kijk naar de situatie en beschrijf wat je ziet.

Meer met bepaalde hoeveelheid verontreiniging.
Er stroomt schoon water in en vervuild water uit, dus de hoeveelheid vervuiling in het meer neemt af.
Wordt het meer ooit weer helemaal schoon ?

Je kan een wiskundig model maken door gebruik te maken van kwantificeerbare grootheden (dat zijn grootheden die door getallen kunnen worden uitgedrukt) en de verbanden ertussen.

Welke grootheden spelen een rol in deze situatie ?

hoeveelheid verontreiniging in het meer 100 kilogram
hoeveelheid water in het meer 30 miljoen kubieke meter water
hoeveelheid water dat door de rivieren wordt aan c.q. afgevoerd. Door beide rivieren stroomt 6000 kubieke meter water per uur.
Wanneer noemen we het meer schoon ? als het minder dan 500 gram verontreiniging bevat.
Zijn er concentratieverschillen in het meer ? Nee, het water in het meer wordt voortdurend goed gemengd

<u>Aandacht voor details</u> Welke aspecten zijn van belang bij het modelleren ?

We gaan er van uit dat de waterhoogte in de meren en de rivieren constant blijven, dat is in werkelijkheid natuurlijk niet zo.
Goed roeren, oplosbaar, vs meteen naar de bodem zakken.
Dus als niet roeren dan een veel moeilijker model, komt veel meer wiskunde bij kijken.
Meer in stukjes verdelen en DV voor elk stukje (en interactie met andere stukjes) opstellen.
Kan, maar vraagt nogal wat rekenkracht van computers.

opdracht: verontreinigd meer 1
Mathematiseren

Er was eens een meer ....
Het meer wordt gevoed met schoon water door een rivier, een andere rivier voert water uit het meer af.
Aan de rand van het meer staat een fabriek

Tijdens een bedrijfsongeluk in de fabriek zijn er gevaarlijke stoffen geloosd waardoor het meer is verontreinigd.

De directie geeft jou de opdracht uit te zoeken hoe lang het duurt voor het meer weer schoon is.

opdracht: verontreinigd meer 1
Mathematiseren

1^e uur?

100 kg verdeeld over 30 miljoen m^3 water en daarvan stroomt er 6000 m^3 weg.
Dat is (6000/30 miljoen)*100 kg = 0.02 kg verontreiniging.
Dan blijft er 99,98 kg over.

2^e uur?
99,98 kg verdeeld over 30 miljoen m^3 water en daarvan stroomt 6000 m^3 weg
Dat is (6000/30 miljoen) * 99,98 kg = 0.019996 kg verontreiniging.
Dan blijft er 99.960004 kg over.

x^e uur?
V kg verdeeld over 30 miljoen m^3 water en daarvan stroomt 6000 m^3 weg
Dat is (6000/30 miljoen) * V kg = 0,0002*V kg verontreiniging.

Dus $\frac{\Delta V}{\Delta t} = -0.0002 \times V$

4 juli 2011 Differentiaalvergelijkingen 74

Hoeveel verontreiniging stroomt er in het eerste uur na de lozing uit het meer ?

100 kg verdeeld over 30 miljoen m^3 water en daarvan stroomt er 6000 m^3 weg per uur.
Dus (6000/30 miljoen)*100 kg = 0,02 kg.
Dan blijft er 99,98 kg over.

Zal er in het tweede uur evenveel uitstromen ?

In het tweede uur:

99,98 kg verdeeld over 30 miljoen m^3 en daarvan stroomt 6000 m^3 weg
Dus (6000/30 miljoen) * 99,98 kg = 0,019996 kg.
Dan blijft er 99,960004 kg over.

Kan een slimme manier uitkomst bieden?

De hoeveelheid die er in een uur uit stroomt is (6000/30 miljoen) * de hoeveelheid die er in zit.
V: de hoeveelheid verontreiniging in het meer in kilogram.
t: tijd in uren.

$\Delta V/\Delta t$ = - (6000/30 miljoen) * V

En als ik mijn Δt heel klein maak wordt dat:
dV/dt = - (6000/30 miljoen) * V
dV/dt = - 0,0002* V

We hebben nu een wiskundig model, in dit model (vergelijking) staan zowel V als de afgeleide van V, dit model is dus een differentiaalvergelijking.

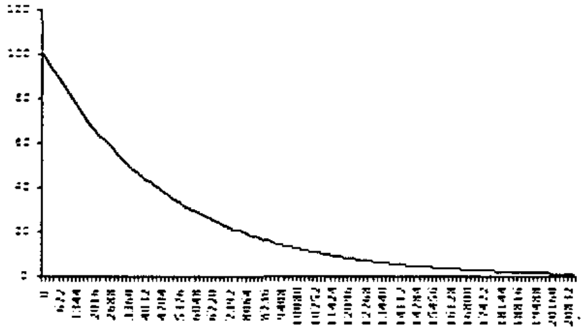
opdracht: verontreinigd meer 1
Mathematiseren

$$\frac{dV}{dt} = -\left(\frac{6000}{30000000}\right)\times V$$

$$\frac{dV}{dt} = -0{,}0002\times V$$

opdracht: verontreinigd meer 1

Analyseren en Interpreteren



Van model terug naar werkelijkheid

Stap 3: Oplossen of analyseren

Reconstrueer de grafiek van V(t) die bij deze situatie hoort zoals we eerder bij y' = 2x hebben gedaan. begin bij startpunt, bereken mbv differentiaalvergelijking volgende punt, neem interval van een half jaar (Δt=4380).
volgende punt is startpunt en ga verder.

Nu rest nog uit te rekenen voor welke t V gelijk minder is dan 0,5.
Na 1,5 jaar. (3 rekenstappen)

Is dit een nauwkeurig antwoord ?

Stappen van een half jaar:	4380 uur	na 1,5 jaar	
Stappen van een maand:	720 uur	na 35 maanden	2 jaar en 11 maanden
Stappen van een week:	168 uur	na 156 weken	3 jaar
Stappen van een dag:	24 uur	na 1102 dagen	3 jaar en 7 dagen
Stappen van een uur:	1 uur	na 26489 uur	3 jaar en 8 dagen en 17 uur

Dus nee, stappen van een half jaar geeft geen nauwkeurige uitkomst.
Nauwkeuriger kan, maar dat kost een hoop rekenwerk. (doen met een computer)

Alternatief:

Elk uur stroom 0.2% verontreiniging weg, dus groeifactor = 0,9998
Formule voor exponentiele groei: $Y = B*g^t$
Dus $V = 100*0,9998^t$

opdracht: verontreinigd meer 1

- Welke aspecten waren van belang bij het modelleren ?
- Wat als anders ?

Aandacht voor details
Welke aspecten zijn van belang bij het modelleren ?
Goed roeren, oplosbaar, meteen naar de bodem zakken.
Dus als niet roeren dan een veel moeilijker model, komt veel meer wiskunde bij kijken.
Meer in stukjes verdelen en DV voor elk stukje (en interactie met andere stukjes) opstellen.
Kan, maar vraagt nogal wat rekenkracht van computers.

opdracht: verontreinigd meer 2

- Uitbreiding van de vorige opgave.
- De rivier die het verontreinigde water van het meer afvoert komt uit in een tweede meer.
- De directie wil graag weten hoe de verontreiniging in dat tweede meer zich gaat ontwikkelen. (in verband met drinkwater, vissterfte etc).
- Aan jou de eer om dat inzichtelijk te maken.

Hoe pakken we dit aan ?

opdracht: verontreinigd meer 2
Conceptualiseren

- De rivier die het verontreinigde water van het meer afvoert komt uit in een tweede meer.
  Ook het tweede meer voert water via een rivier af.
- De directie wil graag weten hoe de verontreiniging in dat tweede meer zich gaat ontwikkelen. (in verband met drinkwater, vissterfte etc).
- Aan jou de eer om dat inzichtelijk te maken.

2011 79

Kijk naar de situatie en beschrijf wat je ziet.

Meer is in eerste instantie schoon.
Er stroomt vervuild water in, dus de vervuiling neemt toe. Naarmate de tijd voorbijgaat zal het instromende water steeds schoner worden. Er stroomt vervuild water uit, dus uiteindelijk zal ook hier de verontreiniging weer af nemen.
Wordt het meer ooit weer helemaal schoon ?

Je kan een wiskundig model maken door gebruik te maken van kwantificeerbare grootheden (dat zijn grootheden die door getallen kunnen worden uitgedrukt) en de verbanden ertussen.

Welke grootheden spelen een rol in deze situatie ?

hoeveelheid water in het meer 20 miljoen kubieke meter
water
hoeveelheid water dat door de rivieren wordt aan c.q. afgevoerd. Door beide rivieren stroomt
6000 kubieke meter water per uur.
Wanneer noemen we het meer schoon ? als het
minder dan 500 gram verontreiniging bevat.
Zijn er concentratieverschillen in het meer ? Nee, het water in het meer
wordt voortdurend goed gemengd

opdracht: verontreinigd meer 2
Mathematiseren

- De rivier die het verontreinigde water van het meer afvoert komt uit in een tweede meer.
- De directie wil graag weten hoe de verontreiniging in dat tweede meer zich gaat ontwikkelen. (in verband met drinkwater, vissterfte etc).
- Aan jou de eer om dat inzichtelijk te maken.

80

V1: hoeveelheid verontreiniging in meer 1 (kilogram)
V2: hoeveelheid verontreiniging in meer 2 (kilogram)

Meer 1: $dV1/dt = -(6000/30 \text{ miljoen}) * V1$

Dus de hoeveelheid verontreiniging die meer 2 instroomt is:
$\Theta_{in} = (6000/30 \text{ miljoen}) * V1$

Hoeveel stroomt er uit ?

$\Theta_{uit} = -(6000/20 \text{ miljoen}) * V2$

$dV2/dt = \Theta_{in} - \Theta_{uit}$
$dV2/dt = (6000/30 \text{ miljoen}) * V1 - (6000/20 \text{ miljoen}) * V2$

De hoeveelheid verontreiniging in meer 2 wordt bepaald door 2 DV's.

opdracht: verontreinigd meer 2
Mathematiseren

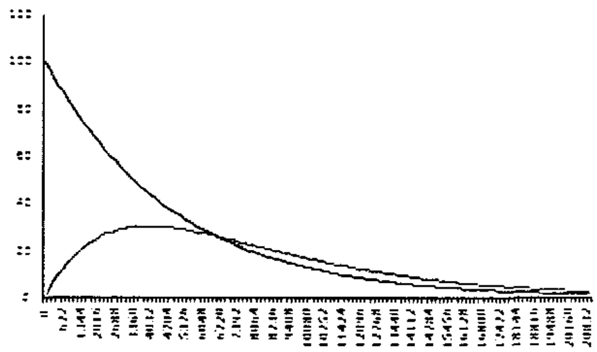
$$\frac{dV_1}{dt} = -\left(\frac{6000}{30000000}\right) \times V_1$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \left(\frac{6000}{30000000}\right) \times V_1 - \left(\frac{6000}{20000000}\right) \times V_2$$

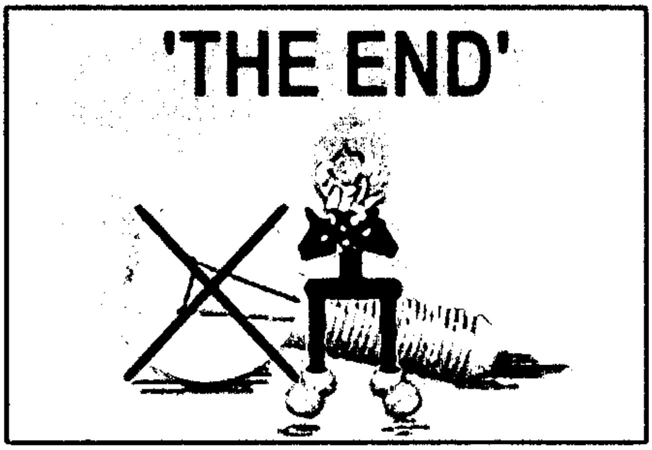
Een DV die de veranderende hoeveelheid verontreiniging in meer 1 beschrijft, en dus ook de inkomende hoeveelheid in meer 2 bepaalt.
Een DV die de veranderende hoeveelheid verontreiniging in meer 2 beschrijft.

opdracht: verontreinigd meer 2

Analyseren en Interpreteren



Dit is met simulatieprogramma's door te rekenen. (MATLAB)


'THE END'

Wiskundig voorspellen

Introductieles Differentiaalvergelijkingen Docentenhandleiding

J Sillessen B Dijkstra

Inhoud

GW-34136-23 september 2011

Inleiding.

In het schoolboek wiskunde vwo D deel 4 van de wiskundemethode "Getal en Ruimte" hoofdstuk 15 "Continue dynamische modellen" komen vwo leerlingen met wiskunde D in hun pakket voor het eerst in aanraking met differentiaalvergelijkingen (DV).
In dit hoofdstuk wordt weinig aandacht besteedt aan het opstellen van een DV. Te snel wordt overgestapt op het algebraïsch oplossen ervan. Ook in de eerstejaarscolleges op universiteiten en in de daarbij gehanteerde studieboeken wordt te weinig stilgestaan bij het opstellen van een DV.
Aangezien DV in het technisch hoger onderwijs een belangrijk onderwerp vormen en door veel studenten vaak als moeilijk wordt ervaren lijkt het ons zinvol om bij de introductie van DV meer aandacht te besteden aan het opstellen van DV.
In het kader van onze opleiding tot 1^e^ graads docent wiskunde aan de universiteit Twente (Toppers van 2 naar 1) hebben wij een gecombineerd onderzoek gedaan voor het onderzoek in de wiskunde (OiW) en onderzoek in onderwijs (OiO).

Voor het OiW hebben we een lesmiddag samengesteld die door de leerstoel MSCT gebruikt kan worden als voorlichtingsles voor middelbare scholieren met als onderwerp differentiaalvergelijkingen.
Het OiW bestaat uit een powerpoint presentatie, een docentenhandleiding en een dictaat voor studenten. Dit als geheel is natuurlijk ook prima te gebruiken door docenten die lesgeven aan 5/6V leerlingen (met wi D in het pakket?).
Hiermee willen wij een aanzet doen om het begrip DV enige inhoud te geven. Een leerling moet een beeld hebben van wat een DV is voordat hij/zij zich gaat bezig houden met allerlei oplossingsstrategieën.

Voor het OiO hebben we onderzocht of leerlingen na het volgen van deze lesmiddag in staat zijn om zelf een differentiaalvergelijking op te stellen. Het OiO bevat een theoretisch kader over het onderwijs van differentiaalvergelijkingen en het onderzoek naar het effect van de lessen

Scan nummer 1 van 1 - Scanpagina 92 van 193

Invulling van de presentatie

In de lesmiddag gaan we een proces modelleren. We richten ons hierbij volledig op het waarneembare en proberen dat te beschrijven. Het doel van de les is een link te creëren tussen de 'embodied world' en de 'conceptual world' (David Tall) van de DV, een link tussen de 'werkelijkheid' en het model van die werkelijkheid, de DV.

De powerpoint presentatie bestaat uit een reeks dia's, elke dia is middels een notitie voorzien van een 'verhaal'.
De les omvat 3 lesuren van 50 minuten. Een optie kan zijn om er een praktische opdracht van te maken.
De presentatie is globaal onderverdeeld in de volgende onderdelen:

- Inleiding
- Het weer, de weersvoorspelling
- Wiskundig modelleren
- DV oplossen, grafisch numeriek
- Praktische opdrachten

Bij de lessen hoort een studentenhandleiding waarin de belangrijkste leerstof beknopt wordt weergegeven en waarin werkbladen zitten waarop de verschillende opdrachten kunnen worden uitgewerkt.
De docentenhandleiding bevat een motivatie van de gemaakte keuzes en een verdieping van de lesstof zodat de docent voorbereid is op eventuele vragen vanuit de klas.

Achtergronden bij de samenstelling van de les.

Uit de opdracht, zoals vermeld in de inleiding, volgen een aantal eisen:

- Een voorlichting of promotieles moet de leerlingen enthousiast maken voor wiskunde of een technische studie.
- Ze moeten naar huis gaan met het idee iets nuttigs opgestoken te hebben, iets waar ze verder mee willen, iets dat ze verder willen onderzoeken.
- De les moet effectief zijn, leerlingen moeten er iets van opsteken.

Dit wordt getoetst bij het onderzoek in onderwijs.

Kernpunten van de les

In het theoretisch kader van het OiO zijn een tweetal kernpunten voor de les gekozen

- Het concept afgeleide als maat voor verandering.
  De les bevat een uitgebreide introductie over het concept afgeleide.
- De link tussen "the embodied world" en "the proceptual world" van DV (David Tall).
  Bij het onderdeel modelleren wordt de 'werkelijkheid' gelinkt aan een DV.
  De focus ligt op het waarneembare, "the embodied world" en de transitie naar "the proceptual world", de DV.
  De DV wordt niet theoretisch afgeleid.

Keuze van de opdrachten

Bij de start van het onderzoek waren er vier opdrachten die geschikt leken om met behulp van de modelleercyclus tot een differentiaalvergelijking te komen:

- een leeglopend watervat,
- een pendulum
- een afkoelend kopje koffie.
- een zoutoplossing

Uiteindelijk beperken ons tot twee opdrachten omdat

- de beschikbare tijd, een middag, beperkt is
- we het risico willen vermijden dat we het publiek verwarren / verliezen met vier onafhankelijke opdrachten die ogenschijnlijk niet samenhangen

De keuze is gevallen op de waterbuis en de zoutoplossing vertaald naar een verontreinigd meer.

Kijken en beschrijven (fase 1 en 2 van de modelleercyclus) leidt voor alle opdrachten tot een wiskundige formule.
Bij het watervat en het kopje koffie kan uit de vraag afgeleid worden dat er naar een 1^e orde differentiequotient (→ 1^e afgeleide, →1^e orde DV) gewerkt moet worden.

De DV voor een pendulum is een tweede orde DV. Om die DV te verkrijgen moet de positie(t) formule twee keer gedifferentieerd worden. Maar waarom twee keer en niet een keer of drie keer of 10 keer ?
Aangezien de les gericht is op de link tussen het waarneembare en de DV en de theoretische afleiding mijdt is de pendulum minder geschikt als opdracht.
Jammer, want via de pendulum kom je elegant bij de segway en het verschil van een model ten opzichte van regelen.
Daarom is het voorbeeld van de pendulum gebruikt bij het illustreren van de modelleercyclus. De afleiding wordt gepresenteerd. Leerlingen hoeven dus niet zelf te ontdekken waarom het een 2^e orde afgeleide moet zijn. De Segway is zo wel deel van de les

Bij de keuze tussen het watervat en het afkoelend kopje koffie is de keuze gevallen op het watervat. Bij het kopje koffie kan alleen de temperatuur als functie van de tijd gemeten worden, dit heeft bovendien zijn tijd nodig. Bij het leeglopende watervat kan de hoogte als functie van de tijd gemeten worden, maar bijvoorbeeld ook hoeveel water per tijdseenheid moet worden toegevoegd om voor verschillende hoogtes de hoogte constant te houden. Bovendien is de duur van de meting makkelijk te beïnvloeden door dikte en hoogte van de buis handig te kiezen. De uitstroomopening hebben we klein gehouden (+/- een millimeter) waardoor de te verkrijgen grafiek $\Delta h/\Delta t(h)$ lineair is. Op die manier kan betrekkelijk eenvoudig naar een e-macht gerelateerd worden.

Benodigde voorkennis.

We hebben deze lescyclus in de vorm van een lesmiddag verzorgt aan een 5V wiskunde D cluster in mei 2011. Als voorkennis zijn we ervan uitgegaan dat in de wiskunde B lessen de volgende hoofdstukken van de methode "Getal en Ruimte, versie 2007" waren behandeld

Hoofdstuk 3: De afgeleide functie, m.n.
§3.2 Differentiequotiënt
§3.4 en §3.5 Differentiaalquotiënt
Hoofdstuk 7 Differentiaalrekening
Hoofdstuk 9: Exponentiële en logaritmische functies, m.n.
§9.3 Het grondtal e, het differentiëren van e-macht functies
Hoofdstuk 10: Integraalfuncties, m.n. §10.3 Primitieve functies

Voorbereiding op vragen van leerlingen.

We hebben de presentatie zo proberen te maken dat zoveel mogelijk vragen zijn afgedekt. De achterliggende theorie is verwerkt in deze docentenhandleiding. Alle tips en hints die we in de loop van deze opdracht kregen zijn verwerkt in de presentatie en / of de docentenhandleiding.
Natuurlijk zullen er vragen gesteld worden waarop we niet geanticipeerd hebben.

'Examinations are formidable even to the best prepared, for the greatest fool may ask more than the wisest man can answer.' (Charles Caleb Colton)

Als de presentatie een aantal keren is gedaan met verschillend publiek kan deze aangepast worden om hierop in te spelen en/of kan een soort van database met vragen (en antwoorden) gemaakt worden.
En ook daarna zullen er nog verrassende vragen komen....

Achtergronden bij de presentatie

Introductie:

Inleiding waarin aan de hand van een paar praktische voorbeelden de leerlingen voor het eerst een beetje kennis maken met de begrippen (wiskundig) model en differentiaalvergelijking.

Bij "De Taipei 101", een wolkenkrabber met 101 verdiepingen en een hoogte van 508 meter in de Taiwanese hoofdstad Taipei, heeft men rekening gehouden met wind en aardbevingen. In de top van het gebouw zit een "tuned mass damper". Dit is een reusachtig bolvormig gewicht van ruim 800 ton die een deel van de bewegingsenergie opneemt van het gebouw, wanneer zich trillingen voordoen, bijvoorbeeld bij stormen of aardbevingen.
Voor de constructie van de "tuned mass damper" is natuurlijk van belang te weten hoe het gebouw zich gedraagt bij een bepaalde windkracht of tijdens een aardbeving. En aangezien je dat niet in het echt kan of wil uitproberen maak je een wiskundig model waarmee je het gedrag onder verschillende omstandigheden kan berekenen.

Wiskundige modellen worden gebruikt om te voorspellen hoe een systeem zal reageren op een zekere verandering, om simulaties mee uit te voeren ter vervanging van metingen.
De bewegingen die een nieuw type supertanker gaat maken door de golven op zee kunnen tegenwoordig beter en goedkoper gesimuleerd worden op de computer dan dat ze bijvoorbeeld met een schaalmodel gemeten zouden kunnen worden.
Sommige metingen zijn zelfs onmogelijk, zoals metingen aan het klimaat van de komende eeuw, of de structuur van een quark, of de verspreiding van een nieuw virus.

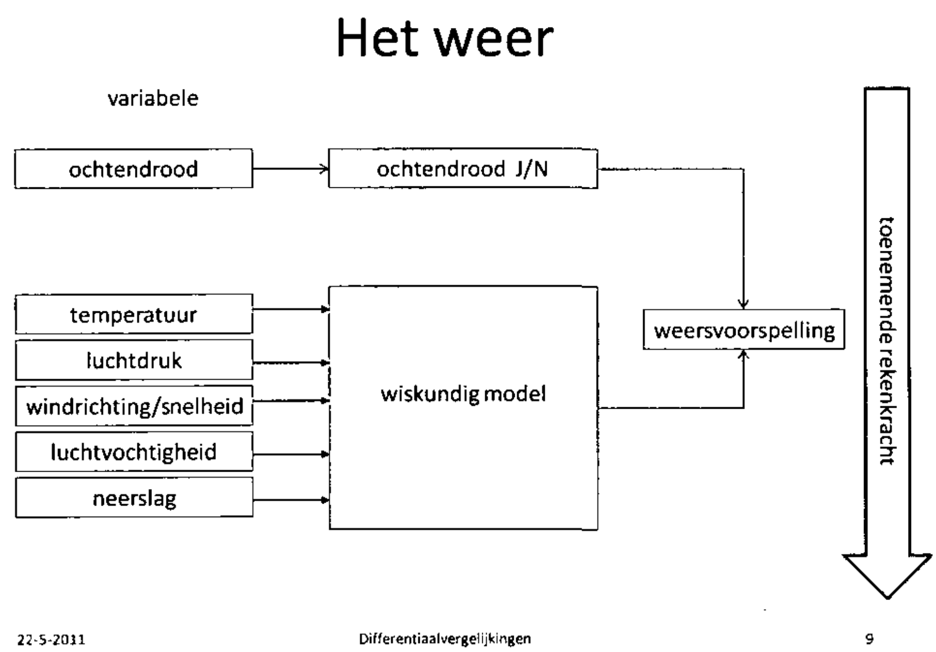
Modellen geven echter vooral ook inzicht. Met een model is het systeem geen black box meer, maar er is bekend welke grootheden van invloed zijn en welke verbanden die onderling hebben (bijvoorbeeld de ene grootheid is evenredig met een andere, of de ene grootheid is de afgeleide naar de tijd van een andere). De wetenschap van de natuurkunde bestaat uit een heel bouwsel van modellen voor de fysische werkelijkheid, een bouwsel waar voordurend aan verder wordt gewerkt. Als je, met behulp van een model, begrijpt (of uit kunt rekenen) hoe de grootheden in het systeem van elkaar afhangen, dan kan je ook gaan sturen; het gedrag beïnvloeden, regelen, optimaliseren.

Een differentiaalvergelijking is zo'n wiskundig model, een model dat beschrijft hoe een functie verandert ten gevolge van bepaalde ingangsvariabelen, bijvoorbeeld wind of trillingen in de grond. En als je kunt berekenen / voorspellen hoe een functie verandert ten gevolge van veranderende ingangsvariabelen kan je daar op anticiperen, je kunt maatregelen nemen, de functie beïnvloeden, regelen, door bijvoorbeeld een tuned mass damper te installeren.
Door modellen te maken van processen die door differentiaalvergelijkingen beschreven kunnen worden (pendulum, het leeglopen van een waterbuis, verontreiniging van een meer) willen we aansluiten bij de belevingswereld van onze leerlingen.

GW-34136-23 september 2011

Het weer:

Met behulp van meetgegevens kun je processen in de atmosfeer beschrijven, met name hoe grootheden veranderen.



Scan nummer 1 van 1 - Scanpagina 97 van 193

Wiskundig modelleren.

Het opstellen van een DV is van wezenlijk belang voor het begrip van het concept DVn. Vandaar dat deze les onder meer is gericht op het opstellen van een DV door middel van wiskundig modelleren.
Wiskundig modelleren is een proces waarbij de werkelijkheid wordt vertaald in wiskunde en wiskundige resultaten worden geïnterpreteerd in de werkelijkheid.
Leerlingen krijgen tijdens de les een tweetal opdrachten waarbij ze, om de opdracht op te kunnen lossen, een wiskundig model moeten maken.

De modelleercyclus, een beschrijving van het modelleerproces, is beschreven in de notitiepagina's van de presentatie.
Voor meer informatie verwijzen we naar:
Startmodule wiskundig modelleren; van het steunpunt wiskunde D van de universiteit Twente.

Als illustratie van het modelleerproces is gekozen voor de Segway PT.

In eerste instantie was het modelleren van de Segway een praktische opdracht voor de leerlingen. Dit omdat leerlingen na afloop van de introductieles een stukje met de Segway mogen rijden.
Bij de uiteindelijke keuze is daar echter vanaf gezien omdat

- het opzetten van een testopstelling, waarbij de benodigde data goed afleesbaar is, lastig is, en
- de uit het experiment verkregen data niet intuïtief tot een goed model leidt.

Om toch een link te houden met het rijden met de Segway is de Segway gekozen als illustratie voor de modelleercyclus.
Om eerder genoemde problemen te omzeilen is

- het experiment gefilmd,
- de gemeten data in de presentatie gegeven en
- de afleiding van het model uit de gemeten data in de presentatie opgenomen.

De modelleerfasen zijn beschreven in de notitiepagina's van de presentatie.
Enkele aanvullingen zijn apart vermeld.

Conceptualiseren

Het beschrijven van de beweging van een pendulum leek een eenvoudig experiment, een gewichtje aan een touwtje aan het plafond en meten maar.
Dit bleek nog niet zo makkelijk.

Voor het meten van de uitwijking (Θ) is een grote bord – geodriehoek gebruikt en voor het meten van de tijd een stopwatch. Het bleek echter onmogelijk om zo de uitwijking als functie van de tijd vast te leggen, het pendulum beweegt hiervoor te snel.
Vervolgens is de beweging gefilmd en vertraagd afgespeeld. Dit maakt de beweging van het pendulum langzaam genoeg om te beschrijven, de film kan bovendien stopgezet worden, maar de afleesbaarheid van de stopwatch op film bleek niet voldoende.
Het opzetten van een testopstelling die zich goed laat filmen vraagt nogal wat geduld en gepruts en dat wil je niet tijdens een practicum middag waar het voornamelijk gaat om de verwerking van de gevonden data. Dit is een van de redenen waarom de keuze voor de praktische opdracht niet op het pendulum is gevallen.

Het blijkt dat Θ als functie van tijd een sinus of cosinus-vormige (afhankelijk van start meting) grafiek heeft met de algemene formule:

$\theta = Asin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ Met A = 14° en T = 2,9 seconde.

Deze data is gebruikt in de presentatie.
Er zijn verschillende tests gedaan, met verschillende startuitwijkingen. Het blijkt dat bij gelijkblijvende koordlengte de trillingstijd T gelijk blijft. Alleen de A veranderd.

Mathematiseren

Het gevraagde model wordt verkregen door de positie twee keer te differentiëren.
Dit blijkt uit de theoretische afleiding, maar niet uit de vraag of uit de testdata.

De link tussen het waarneembare en het model ligt hier niet voor de hand. Ook dit is een reden om het pendulum niet te gebruiken als praktische opdracht.

Differentiëren van de algemene formule van $\theta(t)$: $\theta = Asin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ levert:
na 1 keer differentieren: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{T}Acos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$
na 2 keer differentieren: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 Asin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$
na substitueren van $Asin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ door θ: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \theta$
De laatste vergelijking is universeel. Hij berekend voor elke hoek θ, onafhankelijk van de starthoek de versnelling.

Afleiding van het model

We leiden het model van het pendulum op twee manieren af:

- met de wet van Newton.
- met de wet van behoud van energie.

Afleiding met de wet van Newton:

De som van alle krachten = massa * versnelling (F=m*a).

Hiertoe brengen we alle krachten die op de massa werken in kaart.

Bij een hoek Θ is de zwaartekracht (mg) te splitsen in een component in de richting van het koord, de spankracht: m•g•cosΘ, en een kracht loodrecht hierop, die voor een versnelling zorgt: m•g•sinΘ.

Aangezien de kracht die voor de versnelling zorgt tegengesteld gericht is aan de hoek Θ geldt:

$F = -\, m \cdot g \cdot sin\theta$

$m \cdot a = -\, m \cdot g \cdot sin\theta$

Dus voor de versnelling a geldt:

$a = -\, g \cdot sin\theta$

De versnelling a is te schrijven als de tweede afgeleide van de positie: $\frac{d^2s}{dt^2}$

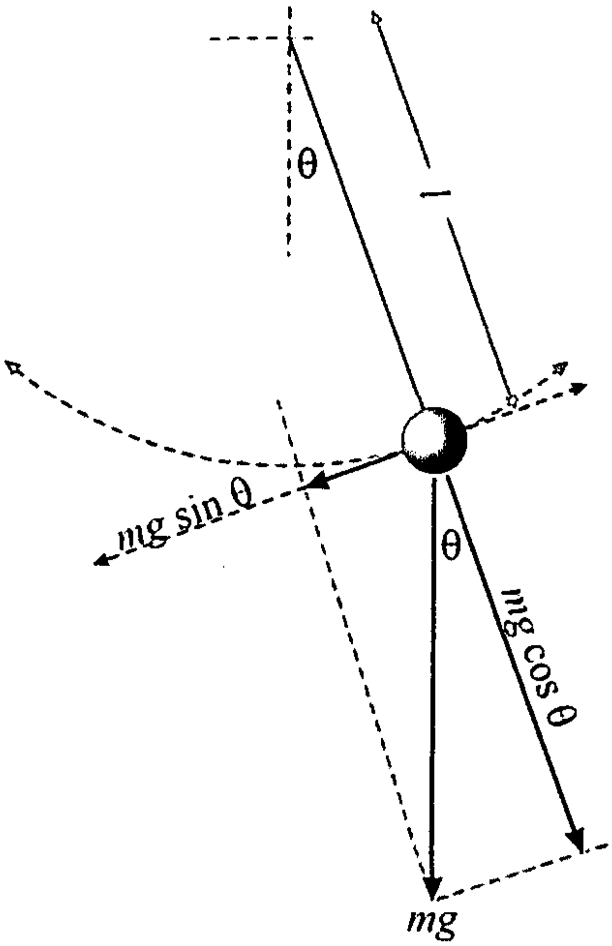
De massa verplaatst zich langs een cirkelboog, dus $s = l \cdot \theta$

Gecombineerd: $a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d^2 l \bullet \theta}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$

Bij substitutie van $l\frac{d^2\theta}{dt^2}$ voor a

$$l\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\, g \cdot sin\theta$$

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} sin\Theta$$



Scan nummer 1 van 1 - Scanpagina 100 van 193

Afleiding met de wet van behoud van energie.

De som van kinetische en potentiële energie is constant: $E_k + E_p = c$

$$E_k + E_p = C$$
$$E_k = C - E_p$$
$$\frac{1}{2}mv^2 = C - mgh$$
$$mv^2 = 2C - 2mgh$$
$$v^2 = \frac{2C}{m} - 2gh$$

Dan ook:

$$(v^2)' = \left(\frac{2C}{m} - 2gh\right)'$$
$$2v\frac{dv}{dt} = -2g\frac{dh}{dt}$$

$$v = l\frac{d\theta}{dt}$$
$$\frac{dv}{dt} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$h = h_0 - l\cos\theta$$
$$\frac{dh}{dt} = l\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$2l\frac{d\theta}{dt}l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2gl\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$
$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta$$
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

Link tussen experiment en afleiding

Beide afleidingen leiden tot: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} sin\theta$

Het experiment leidt tot: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \theta$

In dit geval met T = 2,9 s

Het resultaat van het experiment is een eenvoudiger model dan het resultaat van de afleidingen. Het voldoet voor kleine uitwijkingen,
voor kleine θ (< 30°) is $sin\theta \approx \theta.$
Het resultaat van de afleiding voldoet voor alle $\theta.$
$\frac{g}{l} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ hieruit volgt dat $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
De trillingstijd T van het pendulum wordt bepaald door de lengte van het koord.
Bij trillingstijd T van 2,9 seconden hoort een een koordlengte van +/- 2,06 m.

Analyseren

Het numeriek oplossen van de DV.

Beide DV's zijn numeriek op te lossen met de methode die tijdens de presentatie wordt uitgelegd. Door gebruik te maken van een spreadsheet programma als b.v. exel kan eenvoudig een grote hoeveelheid datapunten worden berekend.
Uit $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ kan $\frac{d\theta}{dt}$ bepaald worden en vervolgens θ. De oplossing kan niet in één keer worden berekend maar vereist een tussenstap $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$. Dit is niet heel intuïtief maar kan natuurlijk wel uitgelegd worden.

In exel dienen de cellen als volgt gevuld te worden

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Δt	t		θ''	θ'	θ		θ''	θ'	θ
2	0,1	0		=-4,6*F2	0	0,3		=-4,6sin(J2)	0	0,3
3	=A2	=B2+A3		=-4,6*F3	=E2+D2*A3	=F2+E2*A3		=-4,6sin(J3)	=I2+H2*A3	=J2+I2*A3

De gekleurde cellen moeten gevuld worden gevuld met startwaarden.
Regel 3 kan naar believen gekopieerd worden.
Van de berekende datapunten kan vervolgens een grafiek gemaakt worden.

Het algebraïsch oplossen van de DV.

Voor welke functie $\theta(t)$ geldt dat $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \theta$?

stel: $\theta(t) = e^{\lambda t}$

dan: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 e^{\lambda t}$$
$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 e^{\lambda t} = 0$$
$$\left(\lambda^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right) e^{\lambda t} = 0$$
$$\lambda^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 0$$
$$\lambda^2 = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$
$$\lambda = \mathrm{i}\,\frac{2\pi}{T} \text{ of } \lambda = -\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{T}$$

Dan: $\theta(t) = C_1 e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}t} + C_2 e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}t}$

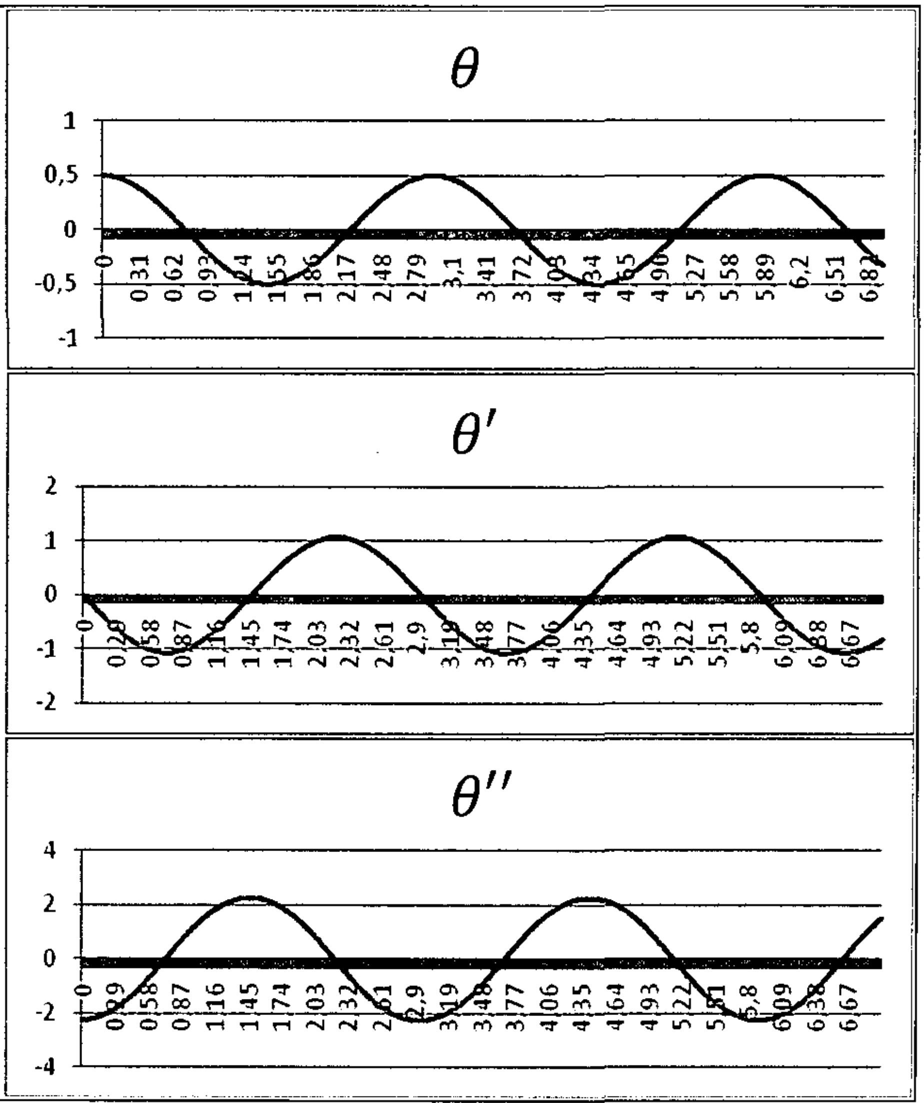
$\theta(t) = C_1 isin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - C_2 isin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$

$\theta(t) = C_1 isin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - C_2 isin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ *(algemene oplossing)*

$\theta(t) = Csin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ (Im(algemene oplossing))

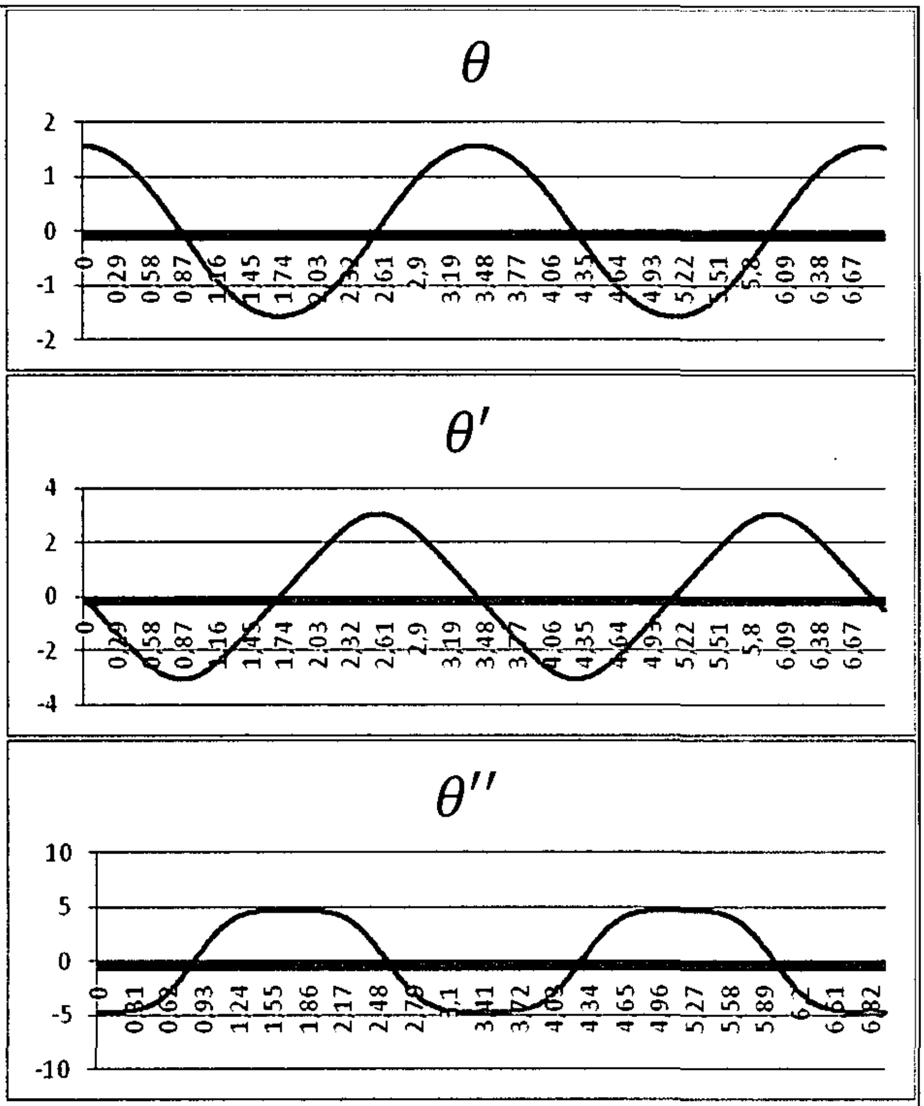
Voor welke functie $\theta(t)$ geldt dat $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} sin\theta$?

Deze functie is niet zomaar op te lossen.
Numeriek oplossen levert de volgende situaties:

$\theta_0 < \frac{\pi}{6}$ $\theta'_0 = 0$	

Voor kleine startuitwijkingen ($\theta_0 < \frac{\pi}{6}$) geldt dat $sin\theta \approx \ \theta$, Dus θ is sinus vormig.

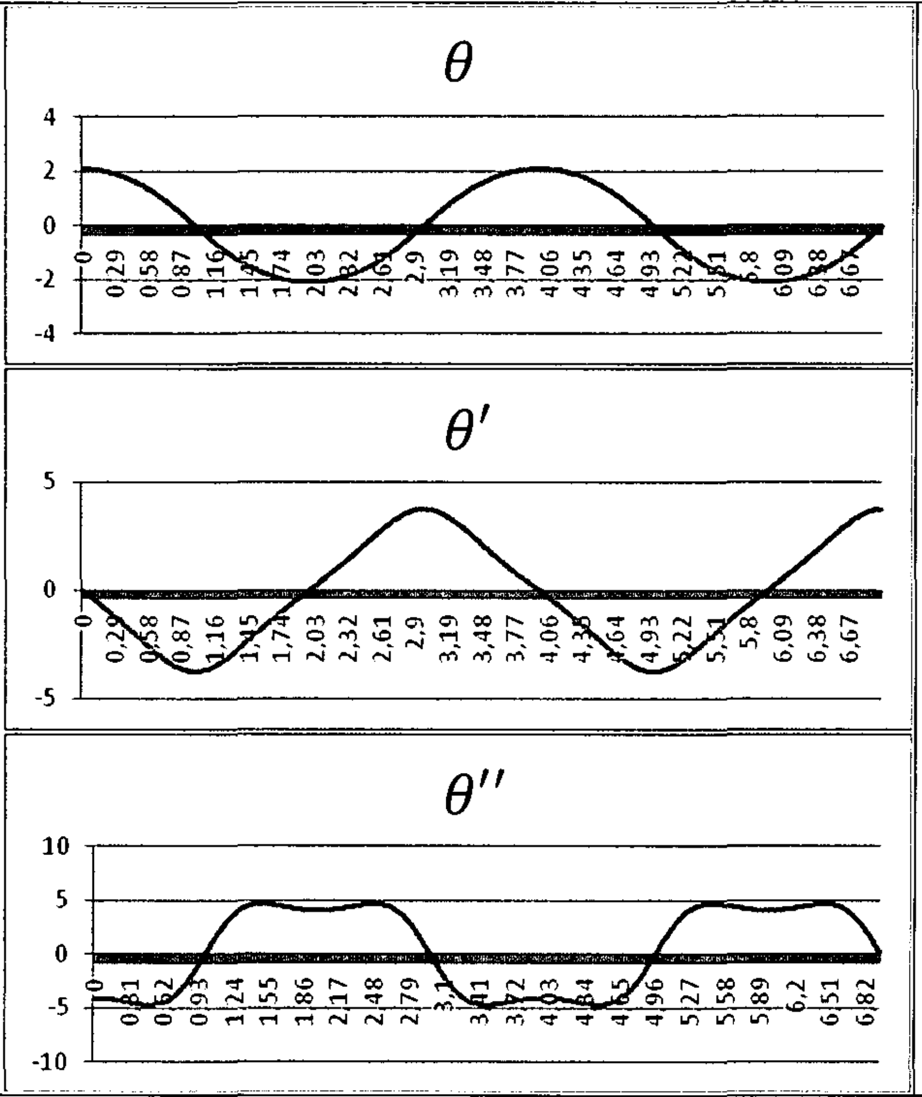
GW-34136-23 september 2011

$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ $\theta'_0 = 0$	

$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, θ lijkt sinusvormig, maar θ' neigt naar een driehoekvormig signaal en θ'' neigt naar een blokvormig signaal.

In de buurt van de maximale uitwijking blijft de component van de zwaartekracht die voor de versnelling zorgt redelijk constant waardoor de signaalvorm van θ'' neigt naar een blokvorm. In die gebieden neemt de snelheid min of meer eenparig toe (of af) waardoor de signaalvorm van de snelheid neigt naar een driehoeksvorm.

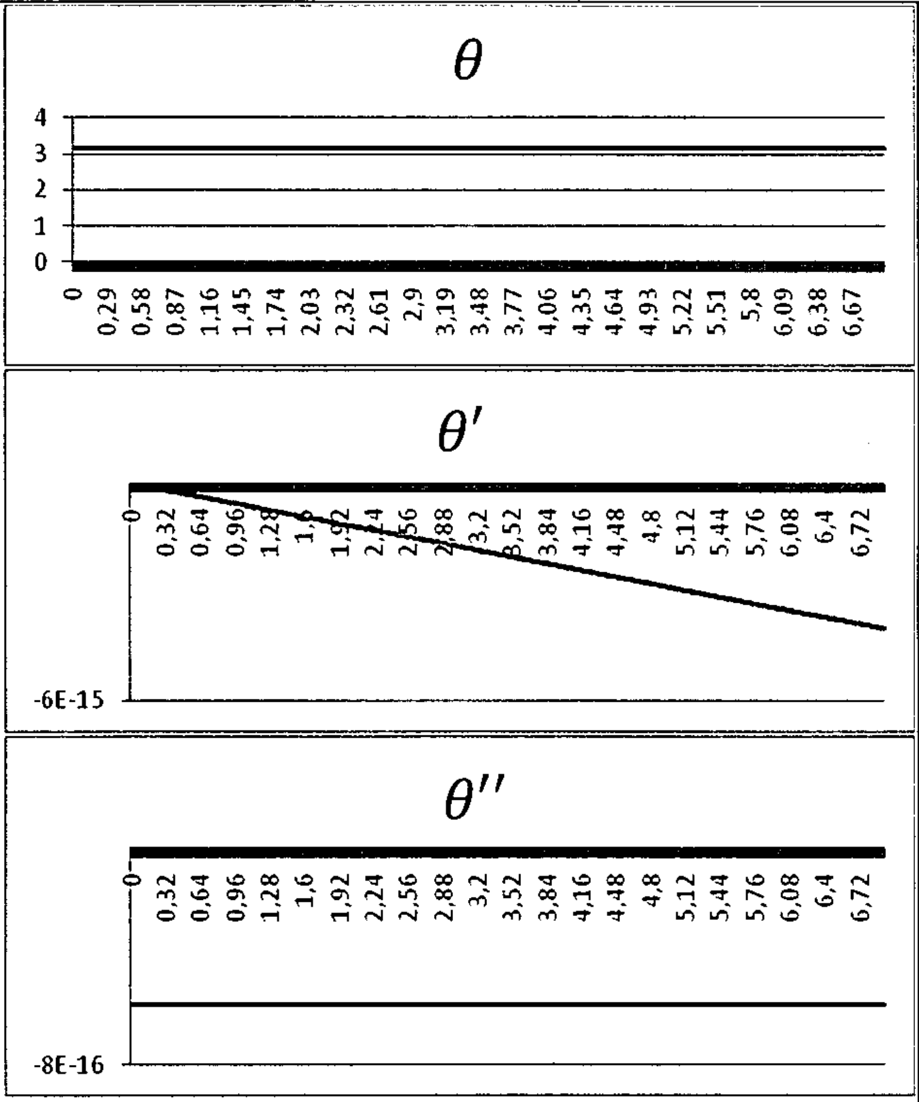
GW-34136-23 september 2011

$\theta_0 = \frac{4\pi}{6}$ $\theta'_0 = 0$	

$\theta_0 = \frac{4\pi}{6}$, bij een $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$ zal θ'' eerst afnemen tot $\theta = \frac{\pi}{2}$ en daarna weer toenemen, vandaar de 'deukjes' op de 'blokjes' van θ''.

Scan nummer 1 van 1 - Scanpagina 106 van 193

GW-34136-23 september 2011

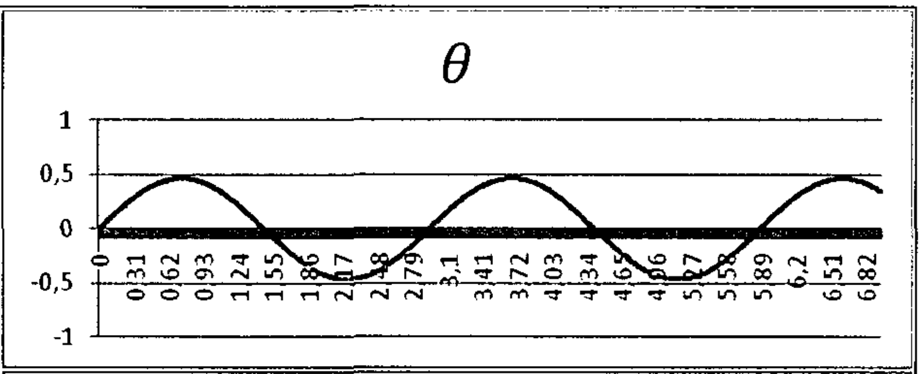
$\theta_0 = \pi$ $\theta'_0 = 0$		

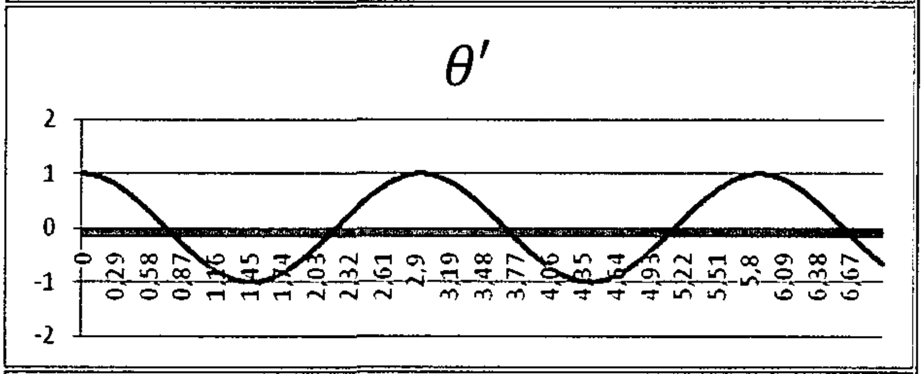
Bij $\theta_0 = \pi$ is het pendulum in (labiel) evenwicht.

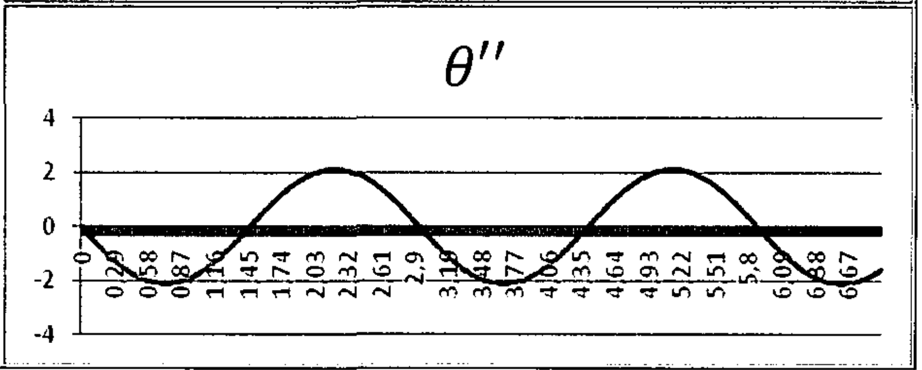
De toename van θ' ten gevolge van de versnelling θ'' heeft te maken met afrondingsfouten. Het aantal decimalen van π in Excel is eindig.

Scan nummer 1 van 1 - Scanpagina 107 van 193

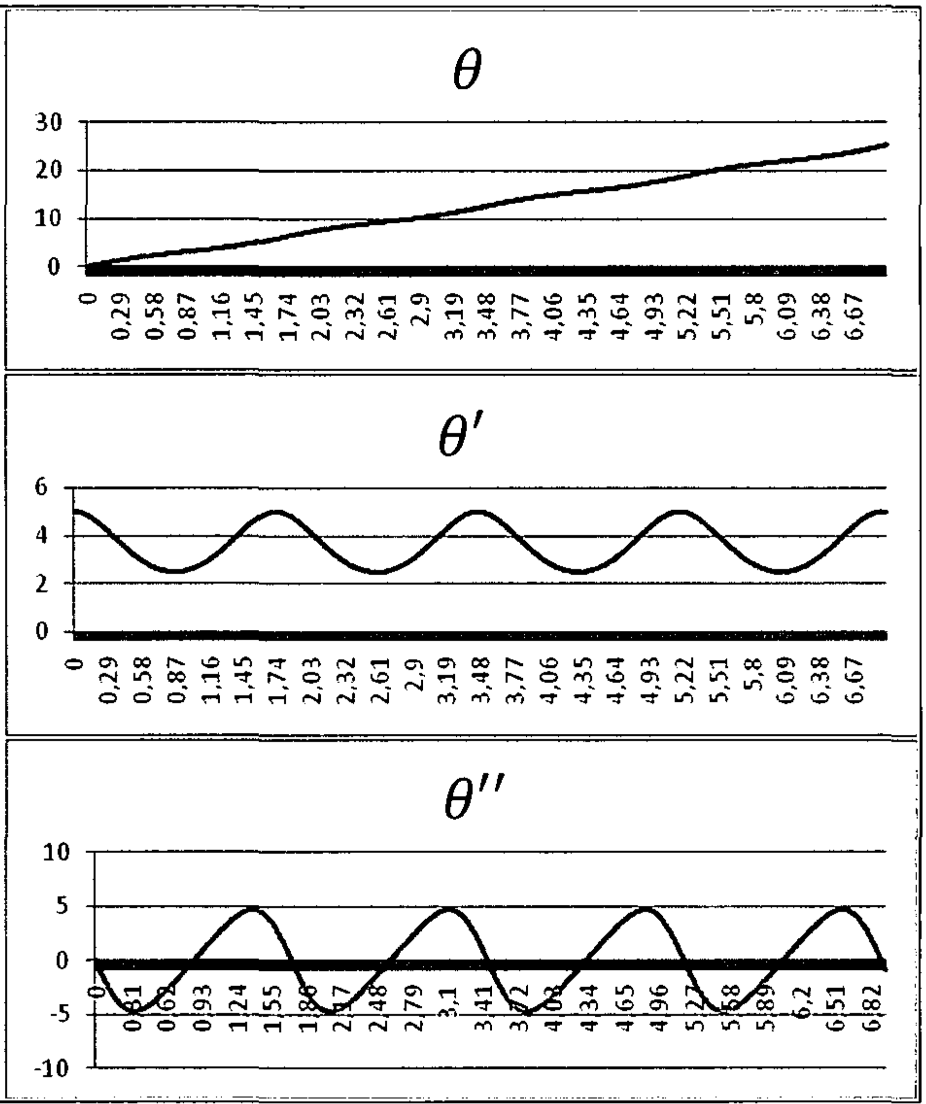
$\theta_0 = 0$
$\theta'_0 = 1$







$\theta'_0 = 1$, bij een $\theta_0 = 0$ met een kleine beginsnelheid ($\theta_{max} < \frac{\pi}{6}$ gedraagt de slinger zich als bij een kleine starthoek zonder beginsnelheid.

$\theta_0 = 0$ $\theta'_0 = 5$	

$\theta'_0 = 5$, bij grotere θ'_0 blijft het pendulum in één richting bewegen waarbij de optredende versnelling zorgt voor een fluctuatie van de snelheid. Daar het pendulum in één richting blijft bewegen neemt θ voortdurend toe.

Differentiaalvergelijkingen

Dit onderdeel bevat

- een korte herhaling van de differentiaalrekening m.b.v. GeoGebra en
- het grafisch numeriek oplossen van een DV.

Er is voor gekozen voor GeoGebra omdat het programma makkelijk via internet verkrijgbaar is (freeware) en eenvoudig te hanteren is.
Via inzoomen van de parabool bij het punt A(1,1) wordt het begrip "local straightness"van Tall gedemonstreerd. Als je maar ver genoeg inzoomt wordt de parabool locaal een recht stukje.
Als de docent er behoefte aan heeft om wat uitgebreider stil te staan bij herhaling van de differentiaalrekening kunnen onderstaande applets eventueel van pas komen.

http://www.plu.edu/~heathdj/java/calc1/Secant.html
Applet waarmee je de definitie van $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(x)$ kunt laten zien.
Werkwijze: Bij "function" eerste rondje aankruisen. Vlak daar boven bij "constant" met de schuifbalk naar links/rechts zodat je bv. $y = x^2$ krijgt. Geheel onderaan staan twee schuifbalken. Met de onderste balk ga je op een punt staan bv. (1,1) en met de balk erboven kun je *h* in stellen. Bij een zo klein mogelijke h ontstaat de blauwe raaklijn.

http://www.plu.edu/~heathdj/java/calc1/Local.html
Applet waarmee we via inzoomen kunnen laten zien dat de kromme grafiek van f steeds meer een rechte lijn wordt en gaat samenvallen met de raaklijn in een punt als je maar ver genoeg inzoomt. (Tall)
Werkwijze: Dezelfde instelling als zojuist $y = x^2$. Met de onderste balk ga je opnieuw op het punt (1,1) staan. De schuifbalk erboven verschuif je van rechts naar links om in te zoomen. Je ziet in de onderste tekening de gebogen lijn overgaan in een rechte. Van de rechte lijn kun je dan via hokjes tellen (3 naar rechts, 6 omhoog) aflezen dat de helling 2 is.

http://www.plu.edu/~heathdj/java/calc1/Deriv.html

Applet waarmee je laat zien dat f'(x) de rc van de raaklijn in een punt is. De handjesmethode van Tall is hierbij goed zichtbaar. Bovendien wordt de hellinggrafiek getekend.
Werkwijze: Dezelfde instelling als zojuist $y = x^2$. Met de onderste balk schuif je van links naar rechts. In het punt wordt met groen de raaklijn getekend en met blauw ontstaat de hellinggrafiek.
Mooi ook met de functie $y = \sin(2x)$ en onderste balk redelijk snel van links naar rechts schuiven. (handjesmethode Tall)
Zeer belangrijk voor DV; bij "function" 2^e^ rondje aankruisen. Onderste schuifbalk helemaal naar rechts en daarna de schuifbalk "constant" bovenaan heen en weer schuiven zodanig dat rood en blauw samenvallen. Daar heb je de e-machtfunctie. Belangrijk omdat bij eerste orde lineaire DV de e-machtfunctie essentieel is.

Het grafisch numeriek benaderen van de oplossing van een differentiaal vergelijking mbv de methode van Euler. Het begint met de DV y'= 2x met beginconditie (1,1) omdat de werkelijke oplossing hiervan makkelijk te vinden is via primitiveren. De nadruk ligt vooral op de foutmarge afhankelijk van de stapgrootte en het opstapelen van fouten.
Deze grafisch numerieke methode is vervolgens bruikbaar bij DV (zoals y'=2y) waarvan de leerling niet zo snel kan zien wat de oplossing is, maar vooral ook wanneer de DV helemaal niet algebraïsch oplosbaar is.

Als een oplettende leerling aan het eind vraagt wat nu eigenlijk de oplossingen zijn van de DV op dia , hierbij de oplossingen.

$$y' = y \quad Neem\ y = e^{rx}$$
$$y' = re^{rx}$$
$$y' - y = 0$$
$$r\ e^{rx} - e^{rx} = 0$$
$$e^{rx}(r-1) = 0$$
$$r = 1$$
$$y = ce^{x}$$

$$y'' = y' \quad Neem\ y = e^{rx}$$
$$y' = re^{rx}$$
$$y'' = r^2e^{rx}$$
$$y'' - y' = 0$$
$$r^2e^{rx} - re^{rx} = 0$$
$$re^{rx}(r-1) = 0$$
$$r = 1$$
$$y = ce^{x}$$

$$y'' + y = 0 \quad Neem\ y = e^{rx}$$
$$y' = re^{rx}$$
$$y'' = r^2e^{rx}$$
$$r^2e^{rx} + e^{rx} = 0$$
$$e^{rx}(r^2+1) = 0$$
$$r^2 = -1$$
$$r = 0 - i\ of\ r = 0 + i$$
$$y = e^{ox}(c_1\cos(1x) + c_2\sin(1x))$$
$$y = c_1\cos(x) + c_2\sin(x)$$

En bij

$$y' = 2y \quad met\ beginconditie\ (1,1) \qquad Neem\ y = e^{rx}$$
$$y' = re^{rx}$$
$$y' - 2y = 0$$
$$re^{rx} - 2e^{rx} = 0$$
$$e^{rx}(r-2) = 0$$
$$r = 2$$
$$y = ce^{2x}$$
$$(1,1)\ invullen\ ce^2 = 1$$
$$c = \frac{1}{e^2}$$
$$y = \frac{1}{e^2}e^{2x}$$

Of via separatie van variabelen:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot y$$
$$\frac{1}{y}\,dy = 2 \cdot dx$$
$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 2 \cdot dx$$
$$\ln(y) = 2x + c$$
$$y = e^{2x+C}$$
$$y = e^{c} \cdot e^{2x}$$
$$Door(1,1)\ 1 = e^{c} \cdot e^{2}$$
$$e^{c} = \frac{1}{e^2}$$
$$dus\ y = \frac{1}{e^2} \cdot e^{2x}$$

Opdracht 1: De waterbuis.

Inleiding:

Een differentiaalvergelijking die een verband aangeeft tussen een grootheid en de verandering van die grootheid in de tijd is een wiskundig model dat van een natuurkundig verschijnsel, in dit geval een dynamisch systeem, een wiskundige beschrijving geeft van het gedrag. In dit voorbeeld kan dit prima met h en Δh/Δt.

Conceptualiseren.

Het proces is goed aanschouwelijk te maken (Tall). Een film van de gedane proeven dragen ertoe bij dat de leerlingen een goede voorstelling hebben van het proces, de grootheden die daarbij een rol spelen en de gestelde vraag. Het daagt leerlingen uit om over de lastige vraag na te denken.

Mathematiseren:

Essentieel bij de opdracht is wat leerlingen moeten gaan doen met de gegeven meetresultaten. Ze moeten op het idee komen om nieuwe kolommen toe te voegen waar in elk geval h en Δh/Δt in voor komen. Vervolgens daarvan een grafiek maken. Herkennen dat er nagenoeg een lineair verband is. Door de puntenwolk een rechte lijn trekken door de oorsprong. Uit de tekening de richtingscoëfficiënt van die lijn berekenen en daarna de DV vergelijking opstellen. Dit zijn heel wat denkstappen waarbij het voor de docent belangrijk is om een aantal keren sturing aan te brengen.

Analyseren:

De DV zelf $\frac{dh}{dt} \approx -0{,}0011 \cdot h$ hoeft niet opgelost te worden. Hij moet gesubstitueerd worden in een andere formule $\varphi_{uit} = \frac{dh}{dt} \cdot A_{buis}$, zodat dit overgaat in

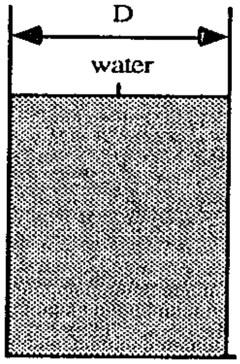
$$\varphi_{uit} = -0{,}0011 \cdot h \cdot A_{buis}$$

$$\varphi_{uit} = -0{,}0011 \cdot 100 \cdot \pi \cdot 1{,}19^2 \approx -0{,}49\, {}^{ml}/_{s}$$

om uiteindelijk antwoord te krijgen op de gestelde vraag.

Hierna volgt een formele afleiding van een differentiaalvergelijking behorende bij het leeglopen van een waterbuis. Hiermee geven we tevens een verantwoording waarom we bij opdracht 1 gekozen hebben voor de uiteindelijk gehanteerde proefopstelling.

Leegstromen waterbuis: (1)
Zie figuur hiernaast; d=diameter uitstroomopening rechtsonder [m]



Formules:

$$massa = dichtheid \cdot volume$$
$$m[kg] = \rho\left[\frac{kg}{m^3}\right] \cdot V[m^3]$$
$$massadebiet = \frac{massa}{tijd} = volumedebiet \cdot dichtheid$$
$$\varphi_m = \frac{m}{t}\left[\frac{kg}{s}\right] = \varphi_V\left[\frac{m^3}{s}\right] \cdot \rho\left[\frac{kg}{m^3}\right]$$
$$volumedebiet\ (flow) = \frac{volume}{tijd} = oppervlakte \cdot snelheid$$

$$\varphi_V = \frac{V}{t}\left[\frac{m^3}{s}\right] = A[m^2] \cdot v\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$kracht = massa \cdot versnelling \quad F[N] = m[kg] \cdot a\left[\frac{m}{s^2}\right]$$
$$energie = kracht \cdot afstand \quad E[J] = F[N] \cdot s[m]$$
$$druk = \frac{kracht}{oppervlakte} \quad p\left[\frac{N}{m^2}\right] = \frac{F[N]}{A[m^2]}$$

Wet van behoud van massa $\frac{dm}{dt}\left[\frac{kg}{s}\right] = debiet_{in}\left[\frac{kg}{s}\right] - debiet_{uit}\left[\frac{kg}{s}\right]$

$debiet_{in} = 0 \quad geeft$ $\frac{dm}{dt}\left[\frac{kg}{s}\right] = -debiet_{uit}\left[\frac{kg}{s}\right]$

$$\frac{dm}{dt}\left[\frac{kg}{s}\right] = -\varphi_{m,uit}\left[\frac{kg}{s}\right]$$

$$\frac{d(\rho \cdot V)}{dt}\left[\frac{kg}{s}\right] = -\varphi_{m,uit}\left[\frac{kg}{s}\right]$$

$$\rho \cdot \frac{dV}{dt}\left[\frac{kg}{s}\right] = -\varphi_{m,uit}\left[\frac{kg}{s}\right]$$
$$\rho \cdot \frac{dV}{dt}\left[\frac{kg}{s}\right] = -\varphi_{V,uit}\left[\frac{m^3}{s}\right] \cdot \rho_{uit}\left[\frac{kg}{m^3}\right]$$

$$\rho \cdot \frac{dV}{dt}\left[\frac{kg}{s}\right] = -A_{uit}[m^2] \cdot v_{uit}\left[\frac{m}{s}\right] \cdot \rho_{uit}\left[\frac{kg}{m^3}\right]$$

Waarbij: v_{uit} de snelheid waarmee het water de buis in de opening met doorsnede A_{uit} rechtsonder verlaat.

$\rho = \rho_{uit} \quad geeft$ $\frac{dV}{dt}\left[\frac{m^3}{s}\right] = -A_{uit}[m^2] \cdot v_{uit}\left[\frac{m}{s}\right]$

$$\frac{1}{4}\pi D^2[m^2] \cdot \frac{dh}{dt}\left[\frac{m}{s}\right] = -\frac{1}{4}\pi d^2[m^2] \cdot v_{uit}\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{d^2}{D^2} \cdot v_{uit}$$

Maar we willen een verband tussen $\frac{dh}{dt}$ $en \quad h$

Wet van behoud van energie (geen wrijving)

$E_k + E_p$ = constant

$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$

$$\frac{1}{2}\cdot\rho_{in}\cdot v_1{}^2+\rho_{in}\cdot g\cdot h_1=\frac{1}{2}\cdot\rho_{uit}\cdot v_2{}^2+\rho_{uit}\cdot g\cdot h_2$$

Waarbij: v_1 de snelheid waarmee het water in de verticale buis zakt.

v_2 de snelheid waarmee het water de horizontale buis verlaat.

h_1 de hoogte van het waterniveau in de vertikale buis t.o.v. de onderkant van de buis.

h_2 de hoogte van het waterniveau in de horizontale buis (aanname $h_2 = 0$)

Qua eenheden $[\frac{kg}{m^3}\frac{m^2}{s^2}]$=$[\frac{Nm}{m^3}]$=$[\frac{J}{m^3}]$ energie per volume-eenheid= $[\frac{N}{m^2}]$ druk

$\rho_{in} = \rho_{uit}$ en $h_2 = 0$ geeft $\frac{1}{2}\cdot v_1{}^2+g\cdot h_1=\frac{1}{2}\cdot v_2{}^2$

$v_1 << v_2$ geeft $g\cdot h_1=\frac{1}{2}\cdot v_2{}^2$

$$v_2{}^2 = 2\cdot g\cdot h$$

$$v_2=\sqrt{2\cdot g\cdot h}$$

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{d^2}{D^2}\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot h}$$

Oftewel kort genoteerd $\frac{dh}{dt}=k\cdot\sqrt{h}$. Nu hebben we een lineair verband tussen $\frac{dh}{dt}$ en $\sqrt{h}$.

Oplossing met separatie van variabelen:

$$\frac{dh}{dt}=k\cdot\sqrt{h}$$

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\,dh=k\cdot dt$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{h}}\,dh=\int k\cdot dt$$

$$2\cdot\sqrt{h}=kt+c$$

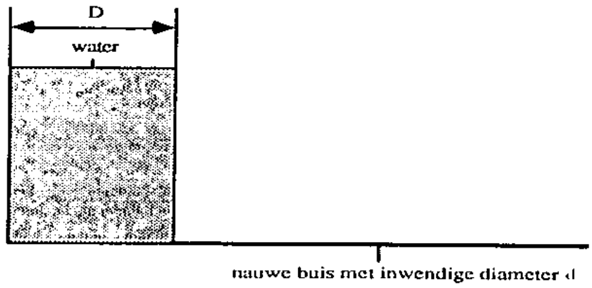
$$\sqrt{h}=\frac{kt+c}{2}$$

$$h=\left(\frac{kt+c}{2}\right)^2$$

Om grafisch de waarde van de constante k te bepalen moet je een grafiek tekenen van $\frac{dh}{dt}$ tegen $\sqrt{h}$. Dit wordt een rechte lijn. Leerlingen hebben niet vaak gewerkt met $\sqrt{h}$ langs de x-as.. Bovendien ligt de oplossing van $\frac{dh}{dt}=k\cdot\sqrt{h}$ ook niet zo voor de hand.

Vandaar dat we nog even verder gezocht hebben naar een meer bruikbare DV.

Aan de rechteronderkant komt een lange dunne buis met lengte L [m], zodat er een duidelijke wrijvingsweerstand is. Zie figuur hiernaast.



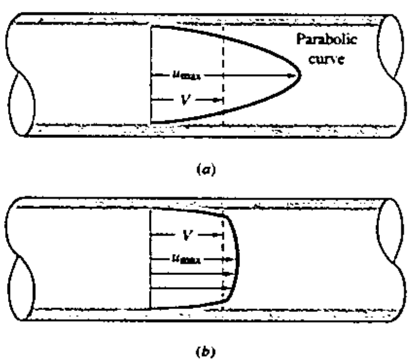
Wet van behoud van energie (met wrijving; Bernoulli)

$E_{k1} + E_{p1} + E_{w1} = E_{k2} + E_{p2} + E_{w2}$

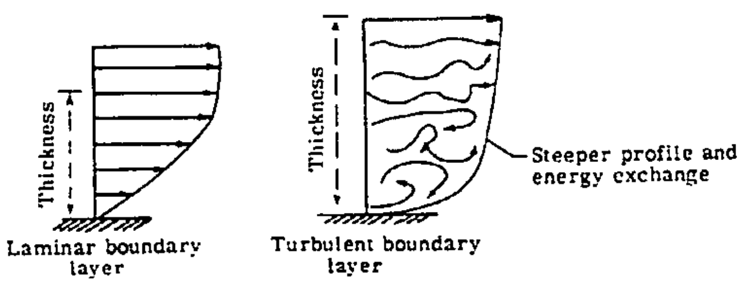
$$\frac{1}{2} \cdot \rho_{in} \cdot v_1^2 + \rho_{in} \cdot g \cdot h_1 + W_{w1} = \frac{1}{2} \cdot \rho_{uit} \cdot v_2^2 + \rho_{uit} \cdot g \cdot h_2 + E_{w2}$$

Informatief: Soorten stromingen

Er bestaan twee soorten stromingen: laminair en turbulent. Bij laminaire stroming snijden de stroomlijnen elkaar niet. Bij turbulente stroming snijden de stroomlijnen elkaar voortdurend, oftewel de individuele stromende deeltjes volgen niet de hoofdstroomrichting.



Figuur 1: Snelheidsprofielen



Figuur 2: Stroomlijnen

Het bepalen van de stromingssoort gaat met een dimensieloos getal: het Reynoldsgetal. Deze is gedefinieerd als:

$$Re = \frac{\rho \cdot d \cdot v}{\eta}$$

waarbij voor vloeistoffen door een cilindrische buis geldt dat ρ de dichtheid van de vloeistof is, d de diameter van de buis, v de snelheid van de vloeistof en η de viscositeit van de vloeistof. Als het Reynoldsgetal onder de 2000 ligt is er sprake van laminaire stroming, boven de 2300 spreekt men van turbulente stroming. Over het algemeen kan dus worden gesteld dat laminaire stroming optreedt wanneer de dichtheid laag is, de diameter klein is, de snelheid laag is en/of de viscositeit hoog is.

$\rho_{in} = \rho_{uit}$, $h_2 = 0$ en aaname $E_{w1} = 0$ geeft $\frac{1}{2} \cdot {v_1}^2 + g \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot {v_2}^2 + E_{w2}$

$E_{w2} = 4f \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{1}{2} \cdot {v_2}^2$ (f = frictieconstante, afhankelijk van soort stroming)

$4f = \frac{64}{Re}$ (mits Re < 2000 $Re = het\ Reynolds$getal; mits laminaire stroming)

$Re = \frac{\rho \cdot d \cdot v_2}{\eta}$ (η = viscositeit)

$$\frac{1}{2} \cdot {v_1}^2 + g \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot {v_2}^2 + \frac{64 \cdot \eta}{\rho \cdot d \cdot v_2} \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{1}{2} \cdot {v_2}^2$$

$v_1 << v_2$ geeft $$g \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot {v_2}^2 + \frac{32 \cdot \eta \cdot L \cdot v_2}{\rho \cdot d^2}$$

$Indien\ 0 < v_2 < 0{,}4 \quad {v_2}^2 << v_2 \quad dan\ g \cdot h_1 = \frac{32 \cdot \eta \cdot L \cdot v_2}{\rho \cdot d^2}$

$$v_2 = \frac{\rho \cdot g \cdot d^2}{32 \cdot \eta \cdot L} \cdot h_1$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{d^2}{D^2} \cdot \frac{\rho \cdot g \cdot d^2}{32 \cdot \eta \cdot L} \cdot h$$

Oftewel kort genoteerd $\frac{dh}{dt} = k \cdot h$. Nu hebben we een lineair verband tussen $\frac{dh}{dt}$ en h.
Om grafisch de waarde van de constante k te bepalen moet je een grafiek tekenen van $\frac{dh}{dt}$ tegen h. Dit wordt een rechte lijn. Aangezien er langs de x-as gewoon h komt te staan is dat voor de leerling een stuk prettiger. Bovendien kun je bij deze DV makkelijker aanvoelen dat de oplossing een e-macht moet zijn. (Deze is veel makkelijker in te zien dan de kwadratische oplossing)

$$\frac{dh}{dt} = k \cdot h$$
$$\frac{1}{h}\, dh = k \cdot dt$$
$$\int \frac{1}{h}\, dh = \int k \cdot dt$$
$$\ln(h) = kt + c$$
$$h = e^{kt+c}$$

En nu is er een lineair verband tussen $\frac{dh}{dt}$ en h.
We hebben bij de proefopstelling van de waterbuis derhalve een nauwe horizontale buis genomen om een lineair verband tussen $\frac{dh}{dt}$ en h zo veel mogelijk na te streven.

Proefopstelling:
Een doorzichtige buis met een diameter van D=2,38 cm en een lengte van 2 m wordt in een statief geklemd. Onderin zit een kurk met daar doorheen een kort glazen pijpje. Hieraan zit bevestigd een rubberen slangetje met daaraan een slangklemmetje. Aan het uiteinde zit een smal glazen buisje met een diameter van d=1,25 mm en een lengte L=41,5 cm dat horizontaal op de tafel ligt.
We vullen de buis met gekleurd water tot een hoogte van 180 cm.

De meetresultaten zijn verwerkt met het programma Excel omdat hiermee een trendlijn en de bijbehorende formule gevonden kan worden.
Indien leerlingen de beschikking hebben over een laptop. (of in een computerlokaal zitten) kunnen ze de meetresultaten verwerken in Excel.
Voor het analyseren (beantwoorden van vraag met model) van de opdrachten kan gebruik worden gemaakt van Excel of matlab.
Matlab is een geavanceerd wiskunde programma dat gebruikt wordt op de UT.
Het is geen freeware zoals GeoGebra en dus niet makkelijk toegankelijk.
Een Matlab script is te gecompliceerd om uit te leggen aan middelbare scholieren.
Dit vereist kennis van hoe je een DV of een stelsel van DV's oplost.
Natuurlijk kan gebruik worden gemaakt van een script met een grafisch user interface (GUI).
Dit is echter een back box; je stopt er iets in en er komt iets uit, het verband tussen input en output is niet evident.

Excel (of een vergelijkbaar spreadsheetprogramma) is geïnstalleerd op vrijwel iedere PC, de open office variant CALC is freeware en dus voor iedereen toegankelijk.
Voor eenvoudige opdrachten met niet te veel datapunten werkt Excel (of CALC) goed, het programmeren van de spreadsheet vereist geen extra kennis. Bij het oplossen van de vraag kan de eerder aangeboden numerieke oplosstrategie gebruikt worden.
Door het toepassen van de theorie wordt de stof nog eens herhaald.

Tabel invoeren.

t(sec)	**h(cm)**	**Δh/Δt**
0	180,8	
60	170	-0,18
120	159,8	-0,17

Selecteren van twee kolommen,daarna optie invoegen, spreiding, puntengrafiek
met rechtermuis op 1 punt klikken, trendlijn toevoegen, kies lineair en door (0,0).

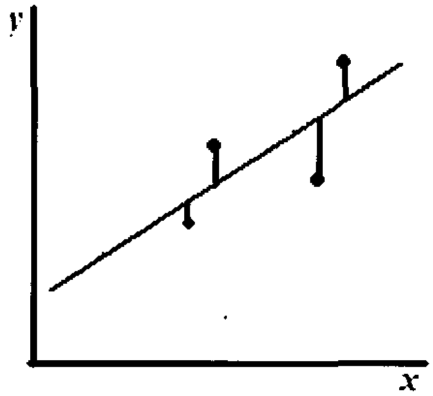
Als trendlijn in de h-Δh/Δt grafiek is gekozen voor lineair (zie voorgaande) en door de oorsprong omdat makkelijk te beredeneren is dat Δh/Δt=0 als h=0.
Als dit niet mogelijk is moeten de leerlingen tijdens de lesmiddag zelf tekenen op roosterpapier en een schatting van de trendlijn geven.
Een slimme leerling zou hierbij de GR TI-84 kunnen gebruiken met de optie STAT-EDIT en STAT CALC – LINREG.

Tijdens het conceptualiseren is sturing door de docent vereist om op het idee te komen om een grafiek van $\Delta h/\Delta t$ tegen h uit te zetten. Vanuit het blok differentiëren waar ze $\frac{dy}{dx} = 2y$ hebben gehad is het belangrijk dat ze hier een DV maken waarin in elk geval een grootheid h en de verandering van diezelfde grootheid in de tijd ($\Delta h/\Delta t$) staat.

In Excel staat bij de trendlijn een waarde voor R^2(de determinantiecoëfficiënt) . Dit is een maat die aangeeft hoe goed de trendlijn (=regressielijn) bij de losse datapunten past. Er geldt $0 \leq R^2 \leq 1$.

Voorbeeld: 4 datapunten

x	y
2	18
6	24
13	26
16	36



In de figuur ernaast staan de 4 punten getekend. Gezocht wordt nu een lijn (in dit voorbeeld een rechte lijn) die zo goed mogelijk bij deze 4 datapunten past. Zo'n lijn heet een regressielijn. Het is een model om bij een gegeven *x* een voorspelling te geven van *y*. Zo'n voorspelde waarde van y geven we aan met $\hat{y}$.
Het residu bij een waarde van *x* is het verschil tussen de waargenomen *y* en de door de formule van de regressielijn voorspelde $\hat{y}$, dus *residu* $r = y - \hat{y}$

De methode van de kleinste kwadraten zegt nu, dat voor de beste lijn geldt dat de som van "alle residuen in het kwadraat" minimaal moet zijn:

Dus er moet gelden $\sum r_i{}^2 \ is\ minimaal$

Als de regressielijn de lijn $y = ax + b$ *is dan geldt voor de residuen*
$r_i = y_i - (ax_i + b) = y_i - ax_i - b$

Neem $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$ en $\Delta y_i = y - \bar{y}$
$r_i = y_i - a\,x_i - b = y_i - \bar{y} + \bar{y} - ax_i - a\bar{x} + a\bar{x} - b = (\Delta y_i - a\Delta x_i) - (b - \bar{y} + a\bar{x})$

$\sum r_i{}^2 = \sum\big((\Delta y_i - a\Delta x_i) - (b - \bar{y} + a\bar{x})\big)^2$
$= \sum(\Delta y_i - a\Delta x_i)^2 - 2\sum(\Delta y_i - a\Delta x_i)(b - \bar{y} + a\bar{x}) + \sum(b - \bar{y} + a\bar{x})^2$

Als je van de middelste term de haakjes wegwerkt dan ontstaan er 6 termen waarbij in elke term $\sum \Delta x_i\ of\ \sum \Delta y_i\ zit.$ Deze zijn nul omdat de totale afwijkingen van het gemiddelde nul zijn en daardoor is de gehele middelste term gelijk aan nul.

Scan nummer 1 van 1 - Scanpagina 118 van 193

Er blijven twee termen over die beiden positief zijn en het zijn kwadraten. De som daarvan is minimaal als beide minimaal zijn.

De eerste term $\sum(\Delta y_i - a\Delta x_i)^2 = \sum \Delta y_i{}^2 - 2a\sum \Delta x_i \Delta y_i + a^2 \sum \Delta x_i{}^2$ heeft de vorm van een tweede graads formule, dus de grafiek is een dalparabool. Minimaal in de top.

$$a_{top} = \frac{-b}{2a} = \frac{2\sum \Delta x_i \Delta y_i}{2\sum \Delta x_i{}^2} = \frac{\sum \Delta x_i \Delta y_i}{\sum \Delta x_i{}^2}$$

De laatste term $\sum(b - \bar{y} + a\bar{x})^2$ is minimaal als $b - \bar{y} + a\bar{x} = 0\ dus\ b = \bar{y} - a\bar{x}$

Voor de 4 datapunten betekent dit:

$\bar{x} = \frac{37}{4} = 9{,}25 \quad en\ \bar{y} = \frac{104}{4} = 26$

x_i	y_i	Δx_i	Δy_i	$\Delta x \Delta y_i$	$\Delta x_i{}^2$
2	18	-7,25	-8	58	52,5625
6	24	-3,25	-2	6,5	10,5625
13	26	3,75	0	0	14,0625
16	36	6,75	10	67,5	45,5625

$$a = \frac{132}{122{,}75} \approx 1{,}075$$
$$b = 26 - 9{,}25 \cdot 1{,}0754 \approx 16{,}053$$

De formule die bij de regressielijn hoort is dan $\hat{y}$ *=1,0754x + 16,053.*
(Ook te vinden met de TI-84 Via STAT_EDIT lijst invoeren, vervolgens via STAT CALC LINREG(ax + b)). Hiermee kunnen we de tabel uitbreiden :

x_i	y_i	$\hat{y}_i$	Δy_i	$\Delta y_i{}^2$	$(r_i)^2$
2	18	18,2	-8	64	0,04
6	24	22,5	-2	4	2,24
13	26	30,0	0	0	16,27
16	36	33,3	10	100	7,51

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} \Delta y_i{}^2 - \sum_{i=1}^{4} (r_i)^2}{\sum_{i=1}^{4} \Delta y_i{}^2}$$

$$R^2 = \frac{168 - 26{,}06}{168} = 0{,}845$$

Des te dichter R^2 bij de 1 zit des te beter de regressielijn bij de punten past.

We hadden

$$a = \frac{\sum \Delta x_i \Delta y_i}{\sum \Delta {x_i}^2}$$

Voor de x en y waarden van de datapunten geldt

de standaardafwijking $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum \Delta {x_i}^2}{n}}$ en $\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum \Delta {y_i}^2}{n}}$

$${\sigma_x}^2 = \frac{\sum \Delta {x_i}^2}{n}$$

$$\sum \Delta {x_i}^2 = n{\sigma_x}^2$$

$$\sigma_{xy} = Cov(x,y) = \frac{\sum \Delta x_i \Delta y_i}{n}$$

$$\sum \Delta x_i \Delta y_i = n\sigma_{xy}$$

Dus $a = \frac{\sum \Delta x_i \Delta y_i}{\sum \Delta {x_i}^2} = \frac{n\sigma_{xy}}{n{\sigma_x}^2} = \frac{\sigma_{xy}}{{\sigma_x}^2}$

De covariantie is geen goede correlatiemaat omdat deze afhankelijk is van de gebruikte eenheden . Deel je door de standaardafwijkingen σ_x *en* σ_y dan ontstaat een maat die onafhankelijk is van de gebruikte eenheden.

$$De\ correlatiecoefficient = r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$dus\ r = a\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

We hadden $r_i = y_i - ax_i - b$

$$y_i = ax_i + b + r_i$$

$$y_i = ax_i + \bar{y} - a\bar{x} + r_i$$

$$y_i - \bar{y} = a(x_i - \bar{x}) + r_i$$

$$\Delta y_i = a\Delta x_i + r_i$$

$$\sum \Delta {y_i}^2 = \sum (a\Delta x_i + r_i)^2 = a^2 \sum \Delta {x_i}^2 + 2a \sum \Delta x_i r_i + \sum {r_i}^2$$

De middelste term is nul want

$$\sum \Delta x_i r_i = \sum \Delta x_i(\Delta y_i - a\Delta x_i) = \sum \Delta x_i \Delta y_i - a\sum \Delta {x_i}^2 = \sum \Delta x_i \Delta y_i - \frac{\sum \Delta x_i \Delta y_i}{\sum \Delta {x_i}^2}\sum \Delta {x_i}^2 = 0$$

$$\sum \Delta {y_i}^2 = a^2 \sum \Delta {x_i}^2 + \sum {r_i}^2$$

$$R^2 = \frac{\sum \Delta {y_i}^2 - \sum {r_i}^2}{\sum \Delta {y_i}^2} = \frac{a^2 \sum \Delta {x_i}^2 + \sum {r_i}^2 - \sum {r_i}^2}{\sum \Delta {y_i}^2} = (a\frac{\sigma_x}{\sigma_y})^2 = r^2$$

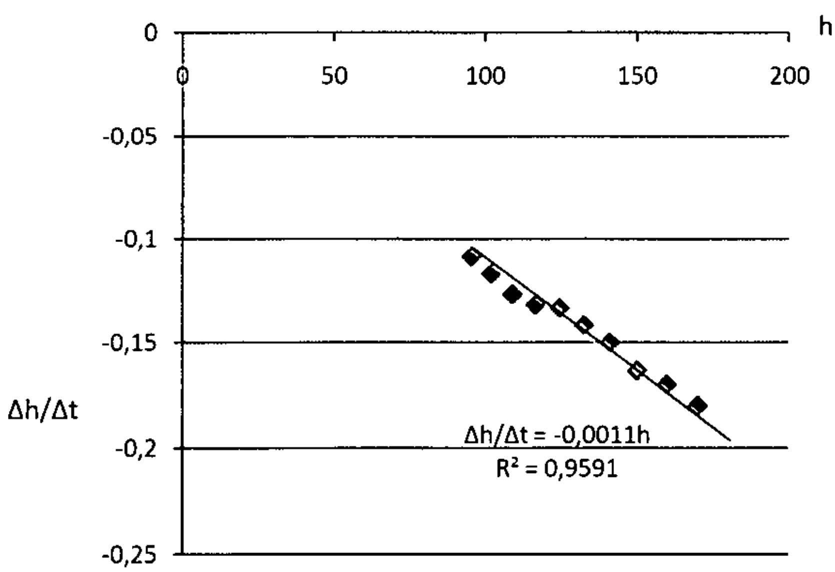
Waaruit blijkt dat de determinantiecoëfficiënt gelijk is aan de correlatiecoëfficiënt in het kwadraat

Uitwerkingen metingen waterbuis:

Meting Set 1

We openen de slangklem en geven op de buis met stift telkens de waterhoogte na 1 minuut aan. Na 10 metingen wordt met een rolmaat de afstand van elk streepje tot de onderkant van de buis opgemeten.
Tijdens het weglopen van het water is duidelijk te zien dat in het begin van de meting het water er bij het uiteinde met een grotere boog uitstroomt dan aan het einde van de meting.

t(sec)	h(cm)	Δh/Δt
0	180,8	
60	170	-0,18
120	159,8	-0,17
180	150	-0,16333
240	141	-0,15
300	132,5	-0,14167
360	124,5	-0,13333
420	116,6	-0,13167
480	109	-0,12667
540	102	-0,11667
600	95,5	-0,10833



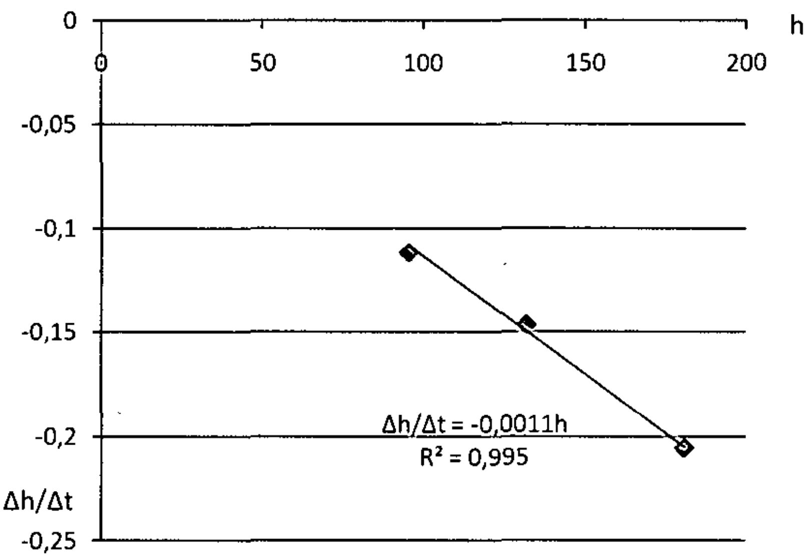
GW-34136-23 september 2011

Meting set 2

We nemen een bepaalde hoogte. Openen de slangklem. We voegen gelijkmatig 50 ml water toe zodat het niveau constant blijft. We meten de tijd totdat de 50 ml water op is.

Bedenk: $\Delta V = A \cdot \Delta h \ \ dus \ \ \Delta h = \dfrac{-50}{\pi \cdot 1{,}19^2} = -11{,}24$

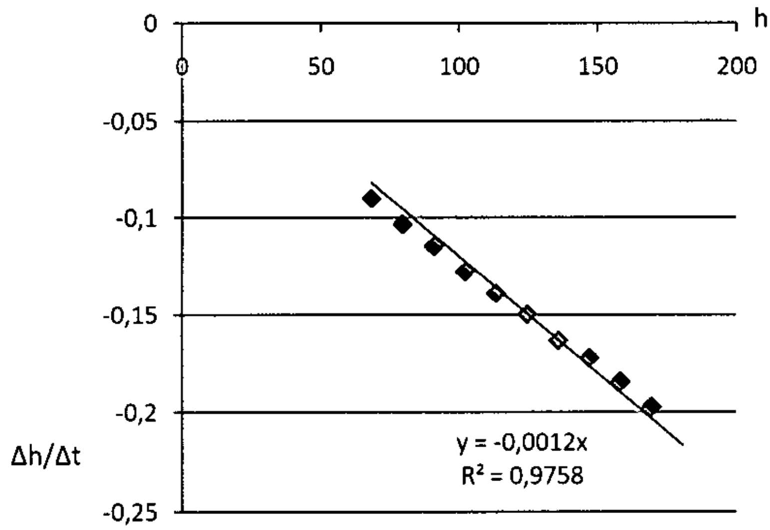
h(cm)	ΔV(cm^3)	Δt(sec)	Δh(cm)	Δh/Δt
180,8	-50	54,72	-11,24466	-0,20549
132	-50	76,78	-11,24466	-0,14645
95,5	-50	100,66	-11,24466	-0,11171



Scan nummer 1 van 1 - Scanpagina 122 van 193

Meting set 3
We openen de slangklem en laten telkens een maatbeker tot 50 ml vollopen. Met de stopwatch meten we telkens de tijd die het duurt om 50 ml te laten weglopen.
De beginhoogte van het water is 180,8 cm.

ΔV	Δt	Δh	h	Δh/Δt
			180,8	
-50	57	-11,24	169,56	-0,19719
-50	61	-11,24	158,32	-0,18426
-50	65,3	-11,24	147,08	-0,17213
-50	68,9	-11,24	135,84	-0,16313
-50	75,1	-11,24	124,6	-0,14967
-50	81	-11,24	113,36	-0,13877
-50	88	-11,24	102,12	-0,12773
-50	98	-11,24	90,88	-0,11469
-50	109	-11,24	79,64	-0,10312
-50	125	-11,24	68,4	-0,08992



Bij alle drie de metingen komt nagenoeg dezelfde DV uit:

$$\frac{dh}{dt} \approx -0{,}0011 \cdot h \qquad \textit{of anders geschreven} \qquad h'(t) = -0{,}0011 \cdot h(t)$$

Dit is een eerste orde (=eerste afgeleide) lineaire (van de vorm y=ax + b) differentiaalvergelijking. (=een formule waarin het verband tussen $\frac{dh}{dt}$ en h wordt beschreven).

Als nu de vraag is:

Hoeveel water (ml/s) moet je toevoegen om de waterhoogte halverwege de buis constant te houden?
Antwoord:
Halverwege de buis is op 100 cm hoogte. (h=100)

$$\text{Volumedebiet}_{in} = \text{Volumedebiet}_{uit}$$

$$\varphi_{in} = \varphi_{uit}$$

$$\varphi_{uit} = \frac{\Delta h}{\Delta t} \cdot A_{buis}$$

$$Als\ \Delta t \to 0\ dan \quad \varphi_{uit} = \frac{dh}{dt} \cdot A_{buis}$$

$$\varphi_{uit} = -0{,}0011 \cdot h \cdot A_{buis}$$

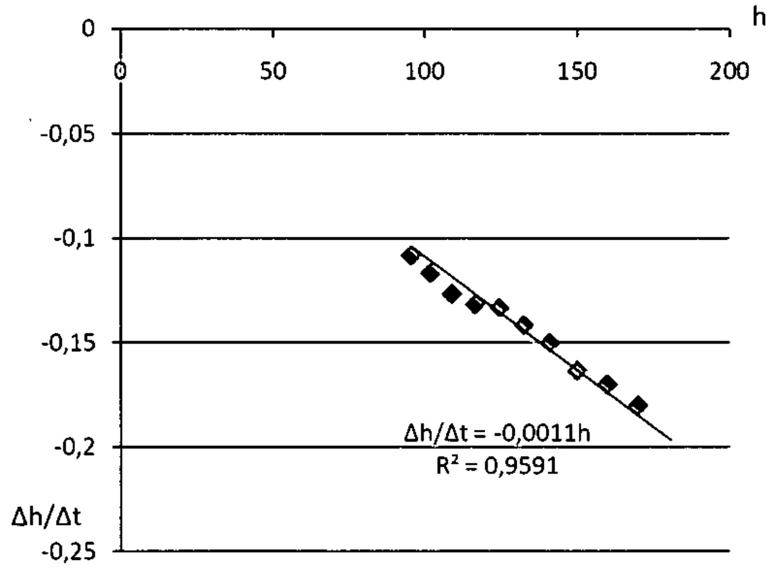
$$\varphi_{uit} = -0{,}0011 \cdot 100 \cdot \pi \cdot 1{,}19^2 \approx -0{,}49\, {}^{ml}/_{s}$$

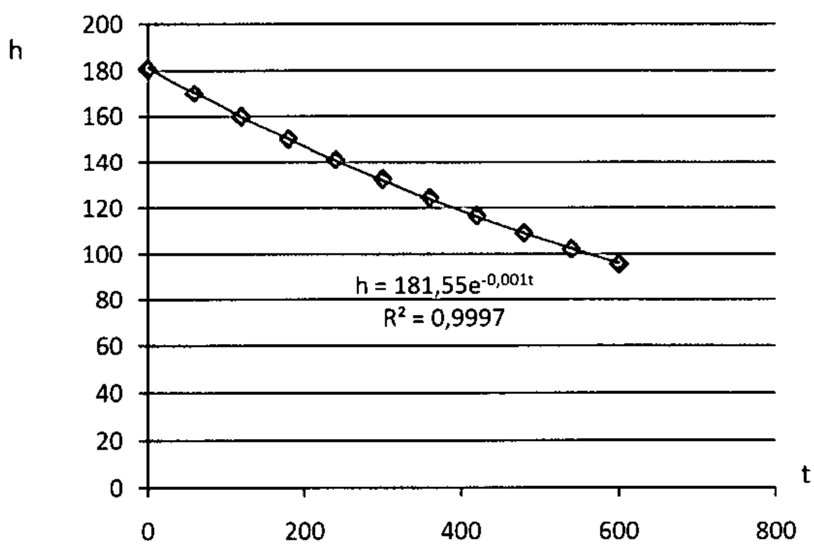
$$\varphi_{in} = \varphi_{uit} \approx -0{,}49\, {}^{ml}/_{s}$$

Suggestie om hier uitgebreider stil te staan bij het oplossen van een DV.
Het oplossen van een DV levert geen getal of getallen op zoals bij
$2x + 3 = 11 \quad of \quad x^2 + 5x + 6 = 0$, maar een nieuwe formule die het verband geeft tussen $h\ en\ t\ of\ anders\ geschreven\ tussen\ h(t) en\ t$

We gaan even terug naar de meting van set 1. We kunnen met de gegevens uit de tabel ook de h-t grafiek tekenen.

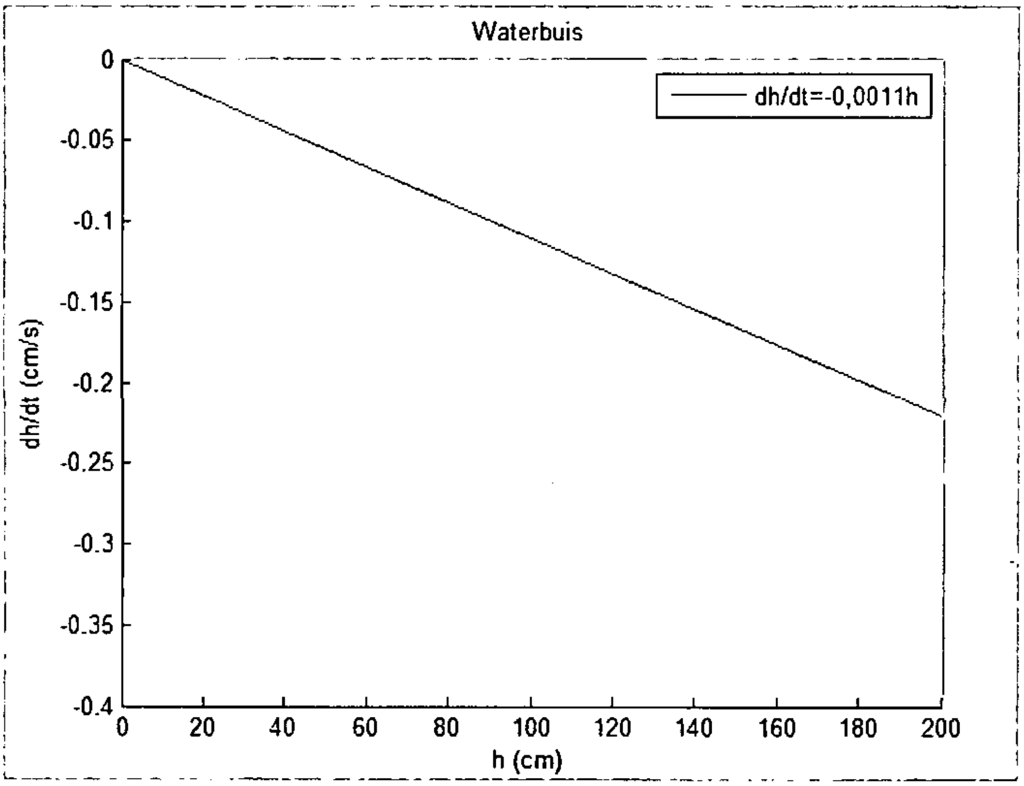
t(sec)	h(cm)	Δh/Δt
0	180,8	
60	170	-0,18
120	159,8	-0,17
180	150	-0,16333
240	141	-0,15
300	132,5	-0,14167
360	124,5	-0,13333
420	116,6	-0,13167
480	109	-0,12667
540	102	-0,11667
600	95,5	-0,10833





De formule die bij de h-t grafiek hoort is dus de oplossing van de DV $\frac{dh}{dt} \approx -0{,}0011 \cdot h$
In dit geval $h = 181{,}55 \cdot e^{-0{,}001t}$

Als we nu de grafiek van de DV $\frac{dh}{dt} \approx -0{,}0011 \cdot h$ tekenen dan ontstaat er natuurlijk een rechte lijn door de oorsprong.



h	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
$\frac{dh}{dt}$	0	-0,22	-0,44	-0,66	-0,88	-1,1	-1,32	-1,54	-1,76	-2

Stel dat we nu alleen maar de DV hebben en als beginpunt (0,180). Is hiermee dan de h-t grafiek terug te vinden.

Probleem is dat we qua tijd alleen weten dat op tijdstip t=0 de hoogte h=180. Meerdere gegevens over de tijd t hebben we niet. We kunnen dus niet zomaar een t-h-tabel maken en daarbij de grafiek tekenen.

We moeten ons eerst goed realiseren wat het punt $(180, -2)$ in bovenstaande grafiek betekent. Als het water op een hoogte van 180 cm staat neemt die hoogte op dat moment met 2 $\frac{cm}{s}$ af. Staat het water even later op een hoogte van 160 cm dan neemt die hoogte niet 2 $\frac{cm}{s}$ maar 1,76 $\frac{cm}{s}$ af. Dus naarmate de hoogte afneemt neemt de snelheid waarmee die hoogte afneemt ook af en uiteindelijk als de hoogte 0 is dan neemt de hoogte niet meer af. De grafiek van h als functie van t zal dus geen constant dalende rechte lijn zijn, maar een afnemend dalende lijn.

Terug naar het punt $(180, -2)$. Dit betekent voor de h-t-grafiek, dat bij een hoogte van 180 de rc van de raaklijn -2 moet zijn. In de volgende applet stelt de x-as de tijd *t (s)* voor en de y-as de hoogte van het water *h(cm)*. We weten dat op een hoogte van 160 cm de rc van de raaklijn $-1{,}76$ is, ***echter we weten niet welk tijdstip hier bij hoort.*** *Dit lossen we op door op een hoogte van 160 cm meerdere lijntjes te tekenen allemaal met rc* $-1{,}76$*. In dit voorbeeld zijn er 20 lijntjes allen met rc* $-1{,}76$ *van links naar rechts getekend.*
Op dezelfde manier op een hoogte van 140 cm 20 lijntjes met rc $-1{,}54$.
Op dezelfde manier op een hoogte van 120 cm 20 lijntjes met rc $-1{,}32$.
Etc.
Open de volgende applet.

http://www.math.rutgers.edu/~sontag/JODE/JOdeApplet.html

In de applet dienen de volgende instellingen worden ingevuld:

Eqn #1: dy/dx = $\boxed{-0.0011 * y}$

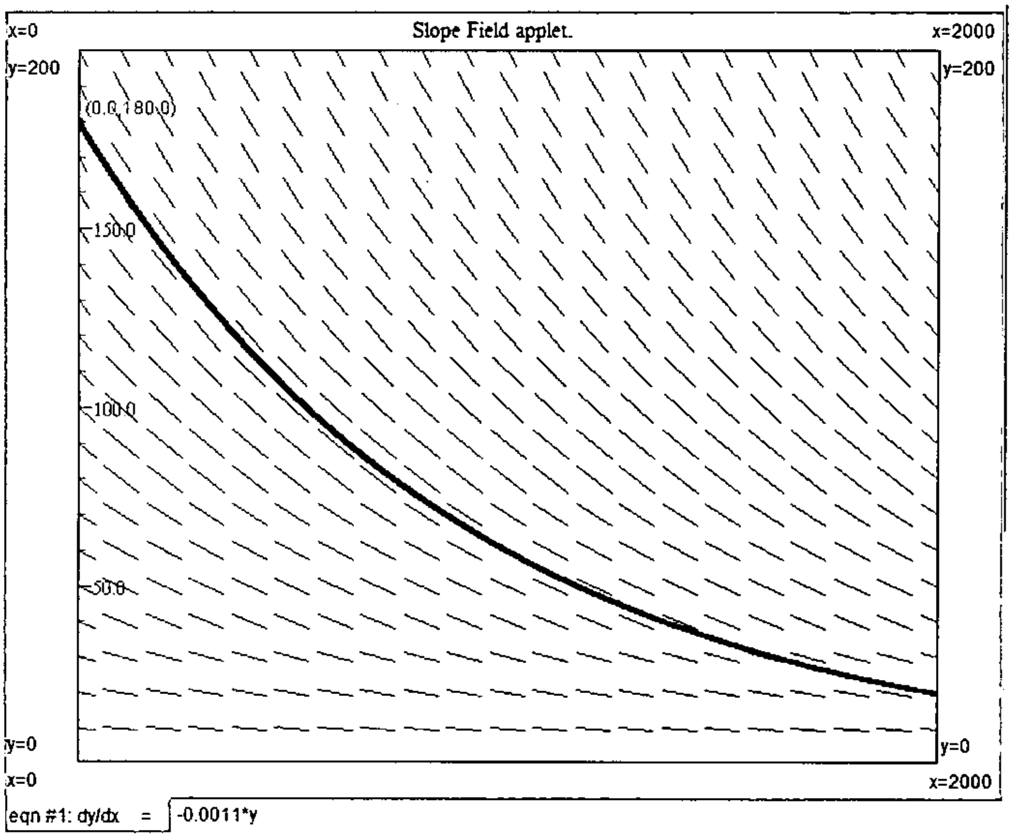
Min. x	0	Max. x	2000
Min. y	0	Max. y	200
Num of segs: x	20	y	20

Klik op Submit All

Zo ontstaat een zogenaamd richtingsveld (het lijkt een beetje op een magnetisch veld dat je misschien al eens bij natuurkunde hebt gehad.)
Nu hebben we nog steeds geen grafiek. Maar, we weten dat het water in het begin (op tijdstip t=0) op een hoogte van 180 cm (h=180) staat. Dit noemen we de *beginconditie.* Dit levert ons één punt van de grafiek op, namelijk (0, 180), en dit ene punt samen met het richtingsveld levert ons de h-t-grafiek op.
In de applet dient de volgende instelling worden ingevuld:

Add. Init. Cond.: x 0 y 180

Klik op Submit



En we krijgen in rood de h-t-grafiek. Je ziet dat hij in (0,180) begint en daarna zo goed mogelijk in gelijke richting met de lijntjes moet lopen zodat de rc van de raaklijn in elk punt klopt met je gegevens van de tabel, dus met de DV. Er ontstaat inderdaad een afnemend dalende lijn.

Als we de buis met water hadden gevuld tot een hoogte van 300 cm dan hadden we een andere beginconditie gehad en dus ook een andere grafiek.
In de applet dient de volgende instelling worden ingevuld:

Add. Init. Cond.: x 0 y 300

Klik op Submit

Als we de buis met water hadden gevuld tot een hoogte van 1m dan hadden we een andere beginconditie gehad en dus ook een andere grafiek.
In de applet dient de volgende instelling worden ingevuld:

Add. Init. Cond.: x 0 y 100

Klik op Submit

Je ziet 3 rode lijnen. Opvallend is dat ze alle 3 naar de x-as lopen. In werkelijkheid is de buis op een bepaald moment leeg. In ons model kruipt de grafiek steeds dichter naar de x-as toe zonder deze te raken, m.a.w. ze hebben allen de x-as als Horizontale Asymptoot.

Tot slot gaan we een poging doen om een formule te vinden die bij de middelste grafiek past.

Enkele conclusies uit het voorgaande:

Als we een functie met een H.A.: $h = 0$ zoeken, dan komen we al snel uit bij een exponentiële functie. $h = bg^t$

Beginpunt (0,180) invullen in $h = bg^t$

$$180 = b \cdot g^0$$
$$180 = b \cdot 1$$
$$b = 180 \quad dus\, h = 180g^t$$

Een erg mooie exponentiële functie is $f(x) = e^x \; omdat\, f'(x) = e^x$

$$f(x) = e^{kx} \qquad f'(x) = ke^{kx}$$

We proberen $h = 180e^{kt}$

$$h' = 180ke^{kt}$$

Er moet gelden $h' = -0{,}0011 \cdot h$

$$h' + 0{,}0011h = 0$$
$$180ke^{kt} + 0{,}0011 \cdot 180e^{kt} = 0$$
$$180e^{kt}(k + 0{,}0011) = 0$$
$$(k + 0{,}0011) = 0$$
$$k = -0{,}0011$$

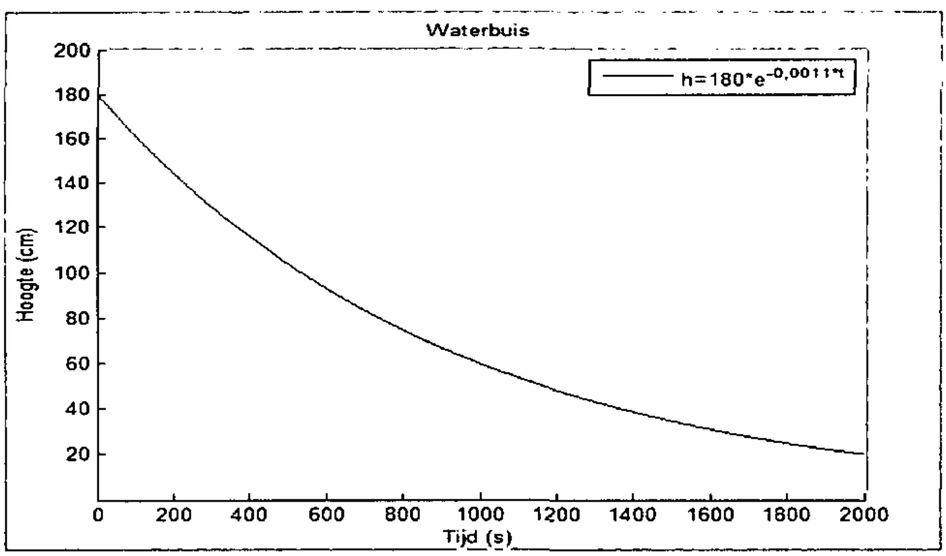
$$dus \qquad h = 180e^{-0{,}0011t}$$

De oplossing van de DV

$\frac{dh}{dt} = -0{,}0011h \quad met\ beginconditie\ h(0) = 180 \quad is\ dus\ h = 180e^{-0{,}0011t}$

Wil een exponentiële functie $h = bg^t$ een overal dalende grafiek zijn dan moet gelden $0 < g < 1$. Klopt het nu wel? $e \approx 2{,}7 \; echter \; g = e^{-0{,}0011} = \frac{1}{e^{0{,}0011}} = \frac{1}{1{,}0011} < 1$

De h-t grafiek is dus:



De buis is na ongeveer $500s \approx 8min$ voor de helft leeg.

Algemeen: $\frac{dh}{dt} = k \cdot h \quad met\ beginconditie\ h(0) = h_0 \quad dan\ h = h_0 \cdot e^{kt}$

We gaan nu bekijken wat het effect is als we de waarde k in de DV $\boxed{\frac{dh}{dt} = k \cdot h}$ gaan veranderen.
Daartoe gebruiken we de volgende applet:

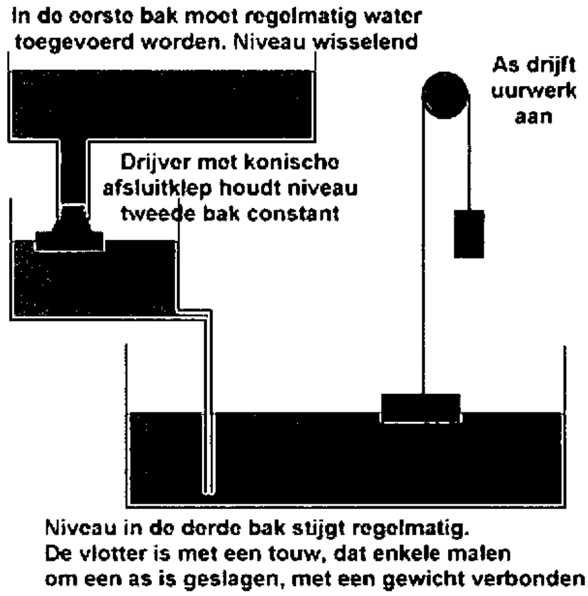
http://www.math.montana.edu/frankw/ccp/modeling/continuous/onevar/appletonly.htm

Linksboven in het groen staat de grafiek van de DV. Dus in ons voorbeeld, de x-as (rood) is de hoogte h en de y-as (denkbeeldige vertikale lijn door de rode punt) is de verandering in de hoogte $\frac{dh}{dt}$.
Eronder staat een figuur bestaande uit alleen de rode x-as met in het midden dezelfde rode punt (de oorsprong) . Onder deze as staan een aantal pijltjes en erboven staat 1 pijltje.
Rechtsboven in het blauw staat de *h*-*t*-grafiek. De y-as (opnieuw rood) is de hoogte h (was in de linkerfiguur de x-as) en de x-as is de tijd t. De rode punt en het pijltje langs de y-as is dezelfde als in de linkerfiguur.
Rechtsonder staat een blauwe balk.
Als je bij de groene figuur linksboven ergens aan de rechterzijkant van de figuur klikt zie je dat je daarmee de helling van de rechte lijn kunt wijzigen. Als je een klein stukje onder de x-as klikt dan zou je een rechte lijn met rc = $k = -0{,}0011$ kunnen benaderen. In de blauwe figuur rechtsboven zet je het pijltje bij het 4e lijntje boven de x-as ($h_0 = 180$) . Klik rechtsonder op de blauwe balk. Je krijgt nu de *h*-*t*-grafiek.
We gaan nu de k variëren. Klik bij de groene figuur aan de rechterzijkant van die figuur helemaal rechtsonderin ($k = -1$). Klik rechtsonder op de blauwe balk.
Klik bij de groene figuur ietsje hoger dan daarnet ($k = -\frac{4}{5}$) en opnieuw op de blauwe balk.
Herhaal dit proces en varieer k *van* $-\frac{3}{5}$, $-\frac{2}{5}$, ...0, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, ..., 1 en kijk wat er met de *h*-*t*-grafiek gebeurd. Als $k < 0$ dan gaat de grafiek na verloop van tijd naar h=0, des te kleiner k des te sneller dit effect optreedt. Als $k > 0$ dan een toenemend stijgende grafiek die geen hor. Asymptoot heeft.
Dit wordt nog eens extra geïllustreerd met de figuur linksonder, de horizontale h-as met de pijltjes eronder. Als $k < 0$ dan wijzen de pijltjes naar de oorsprong. Als $k > 0$ dan wijzen ze juist de andere kant op. Als je de as nu voorstelt als een rivier waar je, ongeacht de plek, een stuk hout ingooit dan zal het voor $k < 0$ naar de oorsprong toe drijven en op die plaats blijven liggen. We spreken dan van een stabiele toestand en h=0 is een evenwichtpunt. Voor $k > 0$ zal het hout links of rechts wegdrijven en niet op een bepaalde plek blijven liggen, er is dan sprake van een instabiele toestand.
Nu is het de kunst om een systeem zodanig te regelen om het van instabiele naar een stabiele toestand te brengen.
Voorbeeld
$\frac{dh}{dt} = 0{,}15 \cdot h$ is instabiel; $\frac{dh}{dt} = 0{,}15 \cdot h + b \cdot u$ met $b \in R$ is regelbaar mits $b \neq 0$. Neem bv. $b \cdot u = -2 \cdot h$ dan wordt het systeem stabiel

Een zijsprongetje:

GW-34136-23 september 2011

In 1205 wordt in een Arabisch manuscript een waterklok beschreven, die zich bevond in een paleis in de omgeving van Bagdad. Met een systeem van draaiende schijven werden de standen van zon, maan, planeten en sterren aangegeven. Het verstrijken der uren werd aangegeven met openende ramen, muziek makende poppen en dergelijke. Het mechanisme om al deze bewegingen uit te voeren was een mengeling van elementen uit de mechanische traditie van die tijd en enkele nieuwe ideeën. De aandrijving van de waterklok was een reservoir dat door een toevoer met een conische afsluitklep verbonden was met een vlotterkamer waarin op deze manier het water op een constante hoogte werd gehouden en dus een constante waterdruk heerste. Vanuit deze vlotterkamer stroomde het water in een volgend reservoir waarin een drijver (vlotter) met een touw, dat over een as loopt, verbonden was met een gewicht. Zo werd de stijging van het water omgezet in een draaiende beweging. Dit principe werd al beschreven door **Ctesibius** van Alexandrië (ca. 250 v. Chr.) en is het **oudst bekende voorbeeld van een regeling met terugkoppeling**.



Afbeelding uit een 16e eeuwse uitgave van 'De Architectura' van Vitruvius, waarin het wateruurwerk van Ctesibius wordt weergegeven. Duidelijk is de drijver en het tegengewicht te zien, en het om een as geslagen touw dat het raderwerk in beweging zet.

Scan nummer 1 van 1 - Scanpagina 131 van 193

Afkoelen kopje koffie:

Nu kunnen we de DV die hoort bij het afkoelen van koffie op dezelfde manier via natuurkundige wetten benaderen als bij de waterbak, we doen het dit keer iets sneller met de volgende applet waarbij het evenwichtspunt niet meer bij 0 ligt.

http://www.aw-bc.com/ide/idefiles/media/JavaTools/nlhcdata.html

Als je rechtsonder op de balk "Show Coffee Data" klikt, verschijnen er in de tekening een aantal meetpunten. Met de verticale schuifknoppen kun je achtereenvolgens, de begintemperatuur T_0, de eindtemperatuur T_e en de mate van snelheid van afkoeling k instellen. Met deze schuifbalken kun je ervoor zorgen dat de gele grafiek en de datapunten netjes met elkaar samenvallen.
Je vindt dan de waarden $T_0 = 200°\text{F}\ (\approx 93°\text{C}),\ T_e = 70°\text{F}(\approx 21°\text{C})$ en $k = -0{,}03$

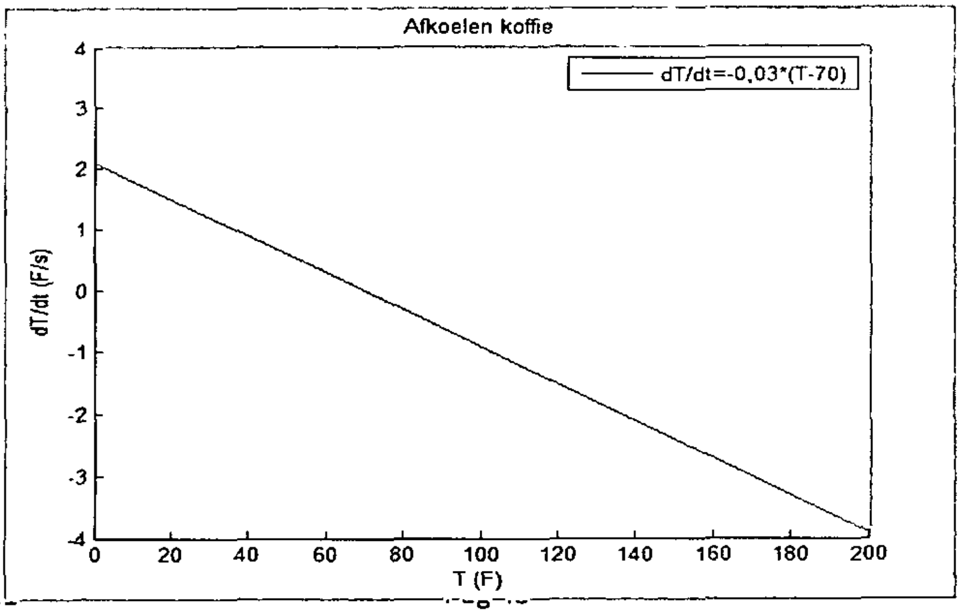
In ons eerste voorbeeld $\frac{dh}{dt} = -0{,}0011 \cdot h$ hebben we gezien dat het evenwichtspunt bij $h = 0$ ligt. Dit is te berekenen door de vergelijking $\frac{dh}{dt} = 0$ op te lossen. Immers als $\frac{dh}{dt} = 0$ verandert de hoogte niet meer. $dus\ -0{,}0011 \cdot h = 0$

$$h = 0$$

Bij de koffie ligt het evenwichtspunt bij T=70, want daar verandert de temperatuur niet meer.
Dat betekent dat $\frac{dT}{dt} = k \cdot T$ niet meer klopt.
Dit is makkelijk op te lossen door $\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - 70)$ te nemen.
Ga maar na: evenwicht bij $\frac{dT}{dt} = 0$

$$k \cdot (T - 70) = 0$$
$$T - 70 = 0$$
$$T = 70$$

De DV wordt in ons voorbeeld dus $\boxed{\frac{dT}{dt} = -0{,}03 \cdot (T - 70)}$
Als we de grafiek van de DV tekenen dan ontstaat er een rechte lijn niet door de oorsprong maar door $(0;-0{,}03 \cdot -70)\ oftewel\ (0;2{,}1)$



Als we deze formule invullen in de applet van het richtingsveld:
http://www.math.rutgers.edu/~sontag/JODE/JOdeApplet.html

In de applet dienen de volgende instellingen worden ingevuld:

Eqn #1: dy/dx = $\boxed{-0.03 * (y - 70)}$

Min. x $\boxed{0}$ Max. x $\boxed{300}$
Min. y $\boxed{0}$ Max. y $\boxed{300}$
Num of segs: x $\boxed{20}$ y $\boxed{20}$

Klik op $\boxed{\text{Submit All}}$

Add. Init. Cond.: x $\boxed{0}$ y $\boxed{200}$

Klik op $\boxed{\text{Submit}}$

Het mooie van dit voorbeeld is dat je als beginpositie bv (0,40) kunt invoeren (het halen van een fles melk uit de koelkast (40°F $\approx$ 5°C) zal *opwarmen*) komt overeen met de dT/dt-T-grafiek als $40 < T < 70$ dan is dT/dt positief. Je krijgt dan een overal afnemende *stijgende* grafiek.

Als we voor de oplossing van deze DV nu precies op dezelfde manier aan het werk gaan als bij de waterbuis, krijgen we:
Als we een functie met een H.A: $T = 70$ zoeken, dan komen we al snel uit bij een exponentiële functie. $T = bg^t$+70
Beginpunt (0,200) invullen in $T = bg^t + 70$

$$200 = b \cdot g^0 + 70$$
$$200 = b \cdot 1 + 70$$
$$b = 130 \quad dus\, h = 130g^t + 70$$

Een erg mooie exponentiële functie is $f(x) = e^x\ omdat\, f'(x) = e^x$

$$f(x) = e^{kx} \qquad f'(x) = ke^{kx}$$

We proberen $T = 130e^{kt} + 70$

$$T' = 130ke^{kt}$$

Er moet gelden $T' = -0{,}03 \cdot (T - 70)$

$$T' + 0{,}03 \cdot (T - 70) = 0$$
$$130ke^{kt} + 0{,}03 \cdot (130e^{kt} + 70 - 70) = 0$$
$$130e^{kt}(k + 0{,}03) = 0$$
$$(k + 0{,}03) = 0$$
$$k = -0{,}03$$

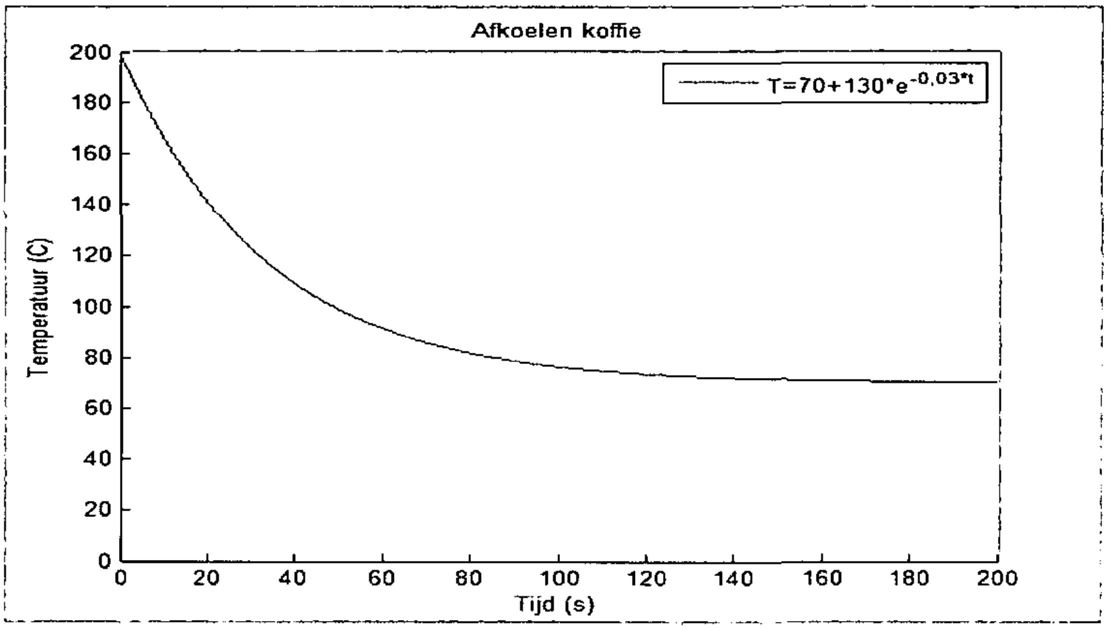
$$dus \qquad T = 130e^{-0{,}03t} + 70$$

De oplossing van de DV

$\frac{dT}{dt} = -0{,}03 \cdot (T - 70)\ met\ beginconditie\ h(0) = 200$

$$is\ dus\, T = 30e^{-0{,}03t} + 70$$

De T-t grafiek wordt dus:



Algemeen: $\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - T_e)$ $met\ beginconditie\ T(0) = T_0$ $\quad dan\ T = (T_0 - T_e) \cdot e^{kt} + T_e$

Waarom we de proef niet feitelijk uitgevoerd hebben tijdens de lesmiddag ?

In verband met de beperkte tijd hebben we besloten de feitelijke proef niet te laten uitvoeren tijdens de les. Dit is helaas niet volgens onze Tall-theorie.
De experimenten hebben we zelf uitgevoerd en gefilmd. De verkregen data bieden we de leerlingen aan. Tijdens het doen van de experimenten bleek dat het voorbereiden en uitvoeren toch nog wel een hoop tijd kost.
Van de drie experimenten is de data van twee rechtstreeks verwerkt, data van de derde is enigszins aangepast om een mooie grafiek te verkrijgen.

We hopen dat het filmpje in elk geval aangeeft dat de proeven werkelijk zijn uitgevoerd op de manier zoals verteld. De data zijn echt. Er is geen sprake van gedachten- experimenten met gefingeerde data.
Op die manier hebben we geprobeerd om de theorie van David Tall nog enigszins tegemoet te komen..

Opdracht 2 Verontreinigd meer I en II.

Blok Verontreinigd meer I en II.

Inleiding

Dit is een standaardopgave zoals die regelmatig in de literatuur terug komt.

Conceptualiseren

Dit is een probleem dat makkelijk voorstelbaar is (Tall) en waarbij uit de vraag blijkt hoe het opgelost moet worden.
De vraag is zo open mogelijk gehouden om leerlingen zelf te laten nadenken over welke aspecten relevant zouden kunnen zijn voor het beantwoorden van de vraag.
Als de relevante grootheden en variabelen bepaald zijn geven we de waarden.

Mathematiseren:

Indien de leerlingen er zelf niet uit komen kunnen twee numerieke voorbeelden gegeven worden gevolgd door een veralgemenisering (op dia in presentatie).

Analyseren:

Leerlingen kunnen de DV algebraïsch of numeriek oplossen.

Algebraïsch met behulp met behulp van een exponentiële vergelijking: $V = V_0 g^t$.
Daar $\frac{dV}{dt} = -0{,}0002V$ zal elke Δt 0,02% van de verontreiniging het meer verlaten, de groeifactor is dus 0,9998. Dit leidt tot:

$$V = V_0 * 0{,}9998^t$$

Algebraïsch door middel van separatie van variabelen. (zal niet bekend zijn)

$$\frac{dV}{dt} = -0{,}0002V$$
$$\frac{1}{V}dV = -0{,}0002dt$$
$$ln|V| = -0{,}0002t + C$$
$$|V| = e^{-0{,}0002t+C}$$
$$|V| = e^{-0{,}0002t}e^C$$
$$|V| = ce^{-0{,}0002t}$$

Aangezien de verontreiniging niet negatief kan worden

$$V = ce^{-0{,}0002t}$$

Met c = V_0.

$$V = V_0 e^{-0{,}0002t}$$

Daar $e^{-0{,}0002t} = (e^{-0{,}0002})^t = 0{,}9998^t$ zijn beide formules gelijk.

Numeriek met behulp van een spreadsheet, als laptops aanwezig zijn kunnen leerlingen het zelf, anders demonstreren met behulp van projector.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Δt	t	V	ΔV			
2	1	0	100	=-0,0001*C2*A2			
3	=A2	=B2+A3	=C2+D2	=-0,0001*C3*A3			

Regel 3 kan naar believen worden gekopieerd.

De gekleurde cellen moeten gevuld worden gevuld met startwaarden.

Invloed stapgrootte aangeven.

stapgrootte	Δt (uren)		aantal stappen tot oplossing	t
half jaar	4380	(365*24)/2	3	1,5 jaar
maand	720	(30*24)	35	2 jaar en 11 maanden
week	168	(7*24)	156	3 jaar
dag	24		1102	3 jaar en 7 dagen

Als een stapgrootte van een jaar (4760 uur) wordt gebruikt oscilleert de grafiek. Deze stapgrootte is dus te groot.

Verontreinigd meer 2

Een iets gecompliceerdere opgave Het verloop van de hoeveelheid verontreiniging in het tweede meer is afhankelijk van het verloop van de verontreiniging in het eerste meer.

Voor het eerste meer is het verloop bekend. Deze DV kan hergebruikt worden.

De instroom van meer 2 is de uitstroom van meer 1, deze is bekend (exel), een tekenverandering volstaat. (bij meer 1 stroomt het uit (-) bij meer 2 stroomt het erin (+). De uitstroom van meer 2 volgt uit een herhaling van zetten van opgave 1.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Δt	t	V1	ΔV1		V2	ΔV2
2	1	0	100	=-0,0001*C2*A2		0	=-D2-0,0001*F2*A2
3	=A2	=B2+A3	=C2+D2	=-0,0001*C3*A3		=F2+G2	=-D3-0,0001*F3*A3

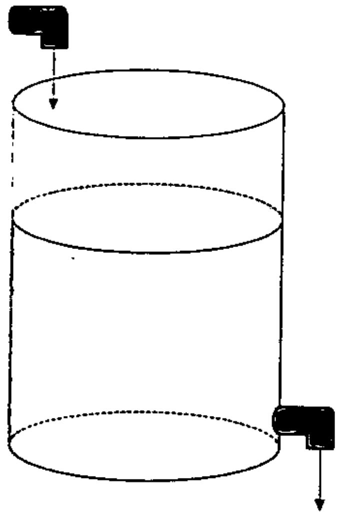
Regel 3 kan naar believen worden gecopieerd.

Aanvullende Opgaven

De oorspronkelijke gedachte was om hier uit te gaan van een zoutoplossing. Om het wat aanschouwelijker te maken hebben we een vertaalslag gemaakt naar verontreiniging van een meer. De opdrachten die hierna vermeld staan als zoutoplossing 1 t/m 3 kunnen daardoor prima dienst doen als extra huiswerkopgaven.

Zoutoplossing I

Hiernaast staat een bak gevuld met 100 liter water.
Op tijdstip t=0 stroomt bovenin een zoutoplossing met een concentratie van 2 $\left[\frac{g}{l}\right]$ met een snelheid van 5 $\left[\frac{l}{min}\right]$ in de bak.
Op hetzelfde moment draait men aan de onderkant de kraan open zodat er 5 $\left[\frac{l}{min}\right]$ zoutoplossing wegstroomt en er constant 100 liter zoutoplossing aanwezig is. De zoutoplossing wordt de gehele tijd goed gemengd.
Gebruik voor de hoeveelheid zout in de bak de variabele z [g].

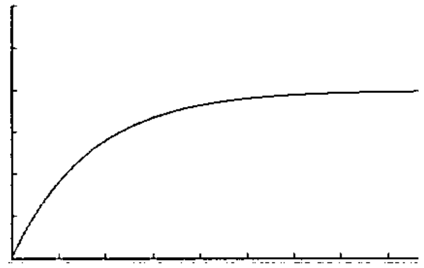


Opdracht:
Wat is z_0
Wat is z_e
Schets de z-t-grafiek
Bereken $debiet_{in}$ $\left[\frac{g}{min}\right]$
Bereken $debiet_{uit}$ $\left[\frac{g}{min}\right]$
Stel de DV op
Los deze op.

Uitwerking:

$$z_0 = 0\ g$$

$$Concentratie\ in\ de\ bak\ wordt\ uiteindelijk\ 2\left[\frac{g}{l}\right] dus\ z_e = 2 \cdot 100 = 200g$$



$$debiet_{in} = 2\left[\frac{g}{l}\right] \cdot 5\left[\frac{l}{min}\right] = 10\left[\frac{g}{min}\right]$$

$debiet_{uit} = \frac{z}{100}\left[\frac{g}{l}\right] \cdot 5\left[\frac{l}{min}\right] = 0{,}05z\left[\frac{g}{min}\right]$ Bedenk dat de concentratie zout in de bak telkens verandert. De concentratie is telkens de hoeveelheid zout z gedeeld door het volume en dat blijft constant op 100.

$$\frac{dz}{dt}\left[\frac{g}{min}\right] = debiet_{in}\left[\frac{g}{min}\right] - debiet_{uit}\left[\frac{g}{min}\right]$$

$$\frac{dz}{dt}\left[\frac{g}{min}\right] = 10\left[\frac{g}{min}\right] - 0{,}05z\left[\frac{g}{min}\right]$$

$$\frac{dz}{dt} = 10 - 0{,}05z$$

$$\frac{dz}{dt} = -0.05(-200 + z)$$

$$\frac{dz}{dt} = -0.05(z - 200)$$

Volgens voorbeeld koffie $z = (z_0 - z_{e)} \cdot e^{kt} + z_e$

Dus: $z = -200e^{-0{,}04t} + 200$

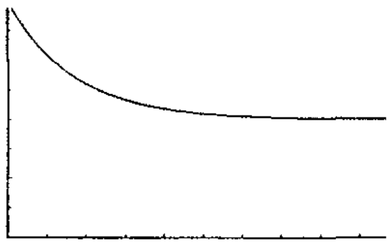
Zoutoplossing II

Dezelfde situatie als bij I, maar nu is er op tijdstip t=0 al 400g zout in de 100 liter water opgelost.

Uitwerking:

$$z_0 = 400\ g$$

$$Concentratie\ in\ de\ bak\ wordt\ uiteindelijk\ 2\left[\frac{g}{l}\right]\ dus\ z_e = 2 \cdot 100 = 200g$$



$$debiet_{in} = 2\left[\frac{g}{l}\right] \cdot 5\left[\frac{l}{min}\right] = 10\left[\frac{g}{min}\right]$$

$debiet_{uit} = \frac{z}{100}\left[\frac{g}{l}\right] \cdot 5\left[\frac{l}{min}\right] = 0{,}05z\left[\frac{g}{min}\right]$ Bedenk dat de concentratie zout in de bak telkens verandert. De concentratie is telkens de hoeveelheid zout z gedeeld door het volume en dat blijft constant op 100.

$$\frac{dz}{dt}\left[\frac{g}{min}\right] = debiet_{in}\left[\frac{g}{min}\right] - debiet_{uit}\left[\frac{g}{min}\right]$$

$$\frac{dz}{dt}\left[\frac{g}{min}\right] = 10\left[\frac{g}{min}\right] - 0{,}05z\left[\frac{g}{min}\right]$$

$$\frac{dz}{dt} = 10 - 0{,}05z$$

$$\frac{dz}{dt} = -0.05(-200 + z)$$

$$\frac{dz}{dt} = -0.05(z - 200)$$

Volgens voorbeeld koffie $z = (z_0 - z_{e)} \cdot e^{kt} + z_e$

Dus: $z = (400 - 200)e^{-0{,}04t} + 200$

Dus de DV is hier hetzelfde, alleen de beginconditie is anders.

Zoutoplossing III

Dezelfde situatie als bij II, echter de kraan beneden wordt een beetje verder dichtgedraaid zodat er $3\left[\frac{l}{min}\right]$ zoutoplossing uitstroomt i.p.v. $5\left[\frac{l}{min}\right]$ .We gaan ervan uit dat er in de bak maximaal 500 liter kan.

Opdrachten:

Opdracht:

Na hoeveel minuten is de bak vol.

Bereken $debiet_{in}\left[\frac{g}{min}\right]$

Bereken $debiet_{uit}\left[\frac{g}{min}\right]$

Stel de DV op

Uitwerking:

Er komt telkens 5-3=2 liter per min. bij.

400:2=200 min.

$$debiet_{in} = 2\left[\frac{g}{l}\right]\cdot 5\left[\frac{l}{min}\right] = 10\left[\frac{g}{min}\right]$$

$debiet_{uit} = \frac{z}{100+2t}\left[\frac{g}{l}\right]\cdot 3\left[\frac{l}{min}\right] = \frac{3z}{100+2t}\left[\frac{g}{min}\right]$ Bedenk dat het volume van de zoutoplossing niet V= 100 blijft maar V=100+2t wordt. De concentratie is telkens de hoeveelheid zout z gedeeld door het volume dus $C = \frac{z}{100+2t}$.

$$\frac{dz}{dt}\left[\frac{g}{min}\right] = 10\left[\frac{g}{min}\right] - \frac{3z}{100+2t}\left[\frac{g}{min}\right]$$

$\frac{dz}{dt} = 10 - \frac{3z}{100+2t}$ je ziet dat $\frac{dz}{dt}$ nu niet meer alleen afhankelijk is van z maar ook van t.

Evaluatie van de 1e Introductieles

Inleiding

De introductieles differentiaalvergelijkingen werd 25 mei 2011 gehouden op het Canisius te Almelo voor een 5V wiskunde D cluster bestaande uit 5 jongens en 2 meisjes. Één van de leerlingen (meisje) had geen natuurkunde in haar profiel.

In deze lesevaluatie geven we weer wat wij van de les geleerd hebben op het vlak van didactiek, hoe ervoeren we de les,wat zouden we een volgende keer anders doen, en op het vlak van wiskunde.

Het presentatie medium

De opdracht voor dit project was het ontwerpen van een les over differentiaalvergelijkingen die na overdracht aan de leerstoel direct bruikbaar is.
Om die reden is gekozen voor Microsoft Powerpoint als presentatie medium.

De powerpoint presentatie bevat een reeks dia's die tijdens de presentatie op een digibord geprojecteerd worden. De verhalen bij de dia's staan op de corresponderende notitiepagina's.
De zo verkregen structuur maakt de les direct bruikbaar en het beheer ervan is beperkt één document.

De powerpoint dicteert, door volgorde van de dia's, de instructie, de les ligt helemaal vast. Daarmee heeft de docent weinig of geen ruimte om in te spelen op wat er in de klas gebeurd. Bovendien neigt de docent ertoe in de lijn van de presentatie te denken waardoor eigen creativiteit en inbreng worden beperkt wat weer als gevolg heeft dat de docent te snel door het verhaal te gaat

Als je als docent instructie geeft vanuit een eigen 'instructieproces' is er veel meer ruimte om invulling te geven aan de instructie, dat wil zeggen in te spelen op de ontvanger. Te denken valt aan het geven van rustmomenten, het geven van samenvattingen en het stellen van vragen om te voorkomen dat leerlingen afhaken.

Het publiek neigt, bij een powerpoint presentatie, meer tot consumeren dan bij een meer open verhaal. Het verhaal komt immers gestructureerd binnen en vraagt minder inspanning om te verwerken, zeker in het begin, waardoor later, als activiteit gewenst, is de boot wordt gemist. Het publiek maakt geen aantekeningen, het is passiever, dat zie je al aan de houding, men gaat achterover zitten.

GW-34136-23 september 2011

Als een docent een opgave op het bord doet is hij gedwongen om de tussenstappen te maken die bij voor het oplossen noodzakelijk zijn, hij moet de opgave immers zelf ook oplossen. Zo is bij elke stap discussie met het publiek mogelijk, "snappen jullie dit ?'

Bij een powerpoint doet de docent niet mee aan het oplosproces. Een van te voren gemaakte uitwerking wordt gepresenteerd. Het resultaat hiervan is een minder goed voorbereide docent, de som hoeft niet door de docent opgelost te worden, de uitwerking staat immers al op dia, men vaart meer op de automatische piloot.

Conclusie / Discussie

Gezien de opdracht, het ontwerpen van een les die bij wijze van spreken zo vanaf het schap gepresenteerd kan worden, is powerpoint ideaal als presentatie medium.
De nadelen blijven.

De onderwerpen

Introductie

Door middel van de voorbeelden 'flat op shake table' en fight simulator wilden we de voordelen aangeven van het doorrekenen (modelleren) versus het uitproberen (testen).

We zijn tevreden met de onderwerpen, de voordelen van wiskundig modelleren mogen meer benadrukt worden.

Het weer

Het weer is een mooi onderwerp om aan te geven dat
DV een brede toepassing vinden in ons dagelijks leven.
'voorspellen' gepaard gaat met een kans op fouten, en dat die kans bij verder vooruitkijken groter wordt.
DV een verandering beschrijven.

Het beschrijven van een verandering met behulp van een DV (differentie quotiënt) is niet voldoende overgekomen. Dit verdient een grotere rol in het verhaal.

Scan nummer 1 van 1 - Scanpagina 143 van 193

Modelleren

De modelleercyclus is een middel om tot een DV te komen. Het is een gestructureerde werkwijze om een (ingewikkelde) vraag te beantwoorden.
De Segway is als illustratie van het modelleerproces gekozen omdat het de bedoeling was om de segway ook daadwerkelijk te demonstreren en leerlingen een stukje erop te laten rijden.

Dit bleek uiteindelijk niet haalbaar waardoor de segway een los item in het verhaal werd zonder toegevoegde waarde.
Het model van de geinverteerde slinger (schematische voorstelling van de segway) is een tweede orde DV. Dit maakt het modelleer proces onnodig moeilijk, en biedt geen basis voor de opdrachten die later tijdens de les moeten worden uitgevoerd.

Tijdens het modelleervoorbeeld zijn we niet ingegaan op niet relevante variabelen.
Een gevaar van het bespreken van niet relevante aspecten is dat de aandacht van de hoofdvraag wordt afgeleid.
Door het bespreken van alle genoemde variabelen, ook de niet relevante, worden leerlingen echter gedwongen om na te denken over de situatie.

DV's oplossen

Voor het oplossen van DVn is in deze presentatie gekozen voor de grafisch numerieke methode omdat die altijd werkt. Algebraïsche methoden leidden niet altijd naar een oplossing.

We hadden een voorbeeld van een exotische algebraïsch niet oplosbare DV kunnen gebruiken om aan te tonen dat de grafische methode wel altijd werkt.
Maar de oplossing van y'= 2y is voor leerlingen even onoplosbaar dus op dit nivo maakt dat niets uit.

Overigens hadden we als mogelijke oplossing van y'= 2y gebruik kunnen maken van de formule voor exponentiële groei: $V = V_0 g^t$ met V_0 is de beginwaarde en g de groeifactor.
Deze formule zou bij 5V leerlingen bekend moeten zijn.

Bij praktische opdracht 2 zou de grafisch numerieke methode toegepast moeten worden, maar deze opdracht is helaas wegens tijdgebrek niet uitgevoerd.

Opdracht: waterbuis

De opdracht van de waterbuis was te moeilijk. Leerlingen worstelden met de meetdata. Het ontbrak aan oplossingsstrategie, terwijl we juist dat met onze presentatie, met name de modelleercyclus, beoogden.

Essentie van ons verhaal, $\Delta h/\Delta t$, is niet overgekomen, dwz niet door leerlingen gebruikt bij het oplossen van de opdracht.

Wij veronderstelden meer voorkennis.
Dit leidde hier en daar tot haperingen in het verhaal.

Opdracht: verontreinigd meer I en II

Deze opdracht is door tijdgebrek niet gedaan.

Conclusie / Discussie

Gezien de moeite die de leerlingen hadden met de praktische opdracht is het aan te bevelen om in het theorieverhaal die opdracht in te leiden zodat leerlingen meer gericht naar een oplossing (DV) toe kunnen werken.
Een mogelijkheid is om in plaats van de segway als illustratie van de modelleercyclus een voorbeeld te nemen met een vergelijkbare oplosstrategie als de praktische opdracht waardoor die strategie dan niet helemaal zelf uitgevonden hoeft te worden.
Het verontreinigde meer kan bijvoorbeeld fungeren als voorbeeld want:
het is een voorstelbaar probleem (Tall).
het leidt tot een eerste orde DV.
het gaat nadrukkelijker om het beschrijven van verandering als functie van de tijd (ΔV/Δt).
eenvoudige getallenvoorbeelden zijn mogelijk waardoor makkelijker naar een algemene vergelijking kan worden gewerkt.

Het beantwoorden van de bijbehorende vraag kan aan het einde van het blok DV. De benodigde theorie wordt in dat blok behandeld, dit blok kan uitgebreid worden met een voorbeeld van hoe je een DV daadwerkelijk op kunt lossen, in dit geval kan dat op twee manieren:
grafisch numeriek, zoals behandeld in dit blok, met behulp van excel of een andere spreadsheet kan een grafiek gemaakt worden van de bijbehorende functie, of
door middel van een exponentiële vergelijking, 5V leerlingen hebben de de formule voor exponentiële groei ($V(t) = V_0 \cdot Groeifactor^t$) gehad.

Het twee keer gebruiken van dezelfde opdracht, biedt meer herkenning bij het publiek.

Wij verwachten dan bij de opdracht van de waterbuis meer focus voor het opstellen van een DV en minder geworstel met de aangeboden meetdata.

De leerlingen kregen op de lesmiddag behoorlijk wat informatie te verwerken.
Het is aan te bevelen om de leerlingen die zo'n middag bijwonen vooraf een introductie te geven door hun eigen docent die een basis kan leggen voor de begrippen waardoor op de middag zelf meer aandacht kan uitgaan naar de aspecten die op de UT van belang zijn.

GW-34136-23 september 2011

Tijd

Het theorieverhaal heeft in onze les ongeveer 60 minuten geduurd.
De opdracht heeft ruim 90 minuten geduurd.

Conclusie / Discussie

Door twee keer 50 minuten te reserveren voor de theorie is er voldoende tijd voor de behandelde stof en de aangegeven aanvullende voorbeelden .

De praktische opdracht zou iets sneller kunnen als de voorbereiding effectiever is, maar door verslaglegging te vragen is twee lesuren heel reëel. De verslaglegging noopt leerlingen tot bezinning over het wat, hoe en waarom van wat ze hebben gedaan waardoor de DV puzzelstukjes wellicht beter op hun plaats vallen. Bovendien is nabespreking aan de hand van verslagen veel efficiënter.
Hier is tijdens onze lesmiddag te weinig aandacht voor geweest, met name vanwege het late tijdstip.

Scan nummer 1 van 1 - Scanpagina 147 van 193

Didactische werkvormen

Het theorie stuk is eenrichtingsverkeer. Dit is geen bewuste keuze geweest maar een gevolg van de keuze voor powerpoint.

Het eenrichtingsverkeer en het gebruik van powerpoint leidt tot passief consumeren, dit is niet wenselijk, bovendien is het luisteren naar een lang verhaal niet efficiënt.

Conclusie / Discussie

In het eerste stuk theorieverhaal hadden wat korte opdrachtjes moeten zitten om de leerlingen te activeren.

Bijvoorbeeld bij de instructie over het grafisch numeriek oplossen van een DV:
het eerste punt voordoen, het tweede en derde punt laten doen.
en nu voor y'= y.
de meren opdracht biedt, naast de illustratie van de modelleercyclus, voldoende ruimte voor zelf doen.
Dit kost niet veel tijd en zorgt voor een beter beklijven van de lesstof.

Wiskunde

Alles dat we hebben geleerd op wiskundig vlak bij het uitwerken van de opdracht en het maken van de presentatie is verwerkt in de presentatie zelf en in de docentenhandleiding.

In die zin heeft de les voor het leren op wiskundig vlak weinig bijgedragen.

Een wiskunde gerelateerd (maar ook didactisch) punt is dat de leerlingen bij het doen van een praktische opdracht grote moeite hebben om een strategie te bepalen, een richting uit te zetten die naar een oplossing leidt.

Leerlingen lezen de opdracht, krijgen de data en gaan dan onmiddellijk met de data aan het werk, er wordt gerekend, ieder met z'n eigen dataset. Maar dit rekenen gaat zonder strategie en leidt dus ook niet naar een oplossing.
Wij hebben relatief veel moeite gedaan om richting te geven, dit leidde ook tot 3 oplossingen, maar bij een volgende opdracht zal dezelfde stuurloosheid zich waarschijnlijk weer voordoen.

Wiskundig voorspellen

Introductieles differentiaalvergelijkingen

Naam:

Programma

- Het Weer
- Wiskundige modellen
- Differentiaalvergelijkingen
- Pauze
- Opdrachten
- Afsluiting

Een Differentiaalvergelijking

Is een wiskundige vergelijking
die beschrijft
hoe iets veranderd.

wiskundige modellen

De modelleer cyclus:

1. Conceptualiseren
2. Mathematiseren
3. Analyseren
4. Interpreteren & valideren

1. *Conceptualiseren* Je kijkt naar de werkelijkheid en stelt jezelf een vraag die je wilt oplossen: de probleemstelling.
Je bedenkt welke variabelen een rol spelen.

2. *Mathematiseren* Je vereenvoudigt de werkelijkheid door aannames te doen en ontwerpt een wiskundig model dat zo goed mogelijk bij de situatie of je probleemstelling past.
Je legt een relatie tussen de grootheden en variabelen.

3. *Oplossen* of *analyseren* De wiskundige stap: een wiskundig antwoord op het wiskundig model.
Je zoekt het antwoord op je vraag door in je model wiskundige berekeningen toe te passen.

4. *Interpreteren & Valideren.* Interpreteren is het beschrijven van de gevonden oplossing in de terminologie van de context. Je moet als het ware je nog wiskundige antwoord 'terug vertalen' naar de werkelijkheid.

Valideren is het kritisch tegen het licht houden van de gevonden oplossing.
Je kijkt of je antwoord wel past bij de werkelijkheid.
Als dat kan ontwerp je ook een test. Daarmee onderzoek je of je model goed genoeg was of moet worden bijgesteld

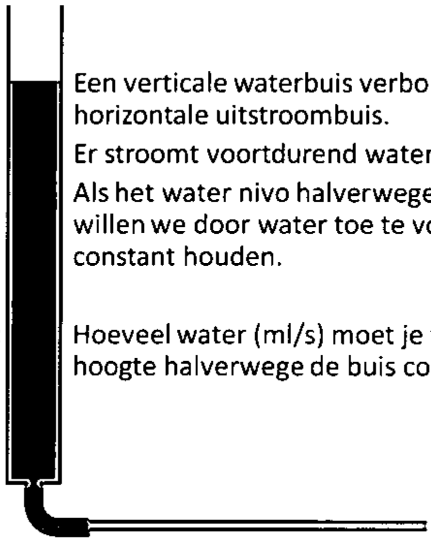
Opdracht: waterbuis

Gegeven: Een verticale waterbuis verbonden met een horizontale uitstroombuis.

Er stroomt voortdurend water uit.

Als het water nivo halverwege de buis staat willen we door water toe te voegen de waterhoogte constant houden.

Gevraagd: Hoeveel water (ml/s) moet je toevoegen om de water hoogte halverwege de buis constant te houden?



GW-34136-23 september 2011

1. Conceptualiseren

Scan nummer 1 van 1 - Scanpagina 155 van 193

Meetdata

Set 1:

t	h
0	180,8
60	170
120	159,8
180	150
240	141
300	132,5
360	124,5
420	116,6
480	109
540	102
600	95,5

Set 2:

h	ΔV	Δt
180,8	-50	54,72
132	-50	76,78
95,5	-50	100,66

Set 3:

		ΔV	Δt
starthoogte	180,8		
		-50	57
		-50	61
		-50	65,3
		-50	68,9
		-50	75,1
		-50	81
		-50	88
		-50	98
		-50	109
		-50	125

2. Mathematiseren

3. Analyseren

opdracht: verontreinigd meer 1

Er was eens een meer ....
Het meer wordt gevoed met schoon water door een rivier, een andere rivier voert water uit het meer af.
Aan de rand van het meer staat een fabriek

Tijdens een bedrijfsongeluk in de fabriek zijn er gevaarlijke stoffen geloosd waardoor het meer is verontreinigd.

De directie geeft jou de opdracht uit te zoeken hoe lang het duurt voor het meer weer schoon is.

1. Conceptualiseren

2. Mathematiseren

3. Analyseren

opdracht: verontreinigd meer 2

- Uitbreiding van de vorige opgave.
- De rivier die het verontreinigde water van het meer afvoert komt uit in een tweede meer.
- De directie wil graag weten hoe de verontreiniging in dat tweede meer zich gaat ontwikkelen. (in verband met drinkwater, vissterfte etc).
- Aan jou de eer om dat inzichtelijk te maken.

1. Conceptualiseren

GW-34136-23 september 2011

2. Mathematiseren

Scan nummer 1 van 1 - Scanpagina 167 van 193

3. Analyseren

GW-34136-23 september 2011

Wiskundig voorspellen

Onderzoek naar het Effect van een Introductieles Differentiaalvergelijkingen

J Sillessen B Dijkstra

GW-34136-23 september 2011

Inhoudsopgave

Scan nummer 1 van 1 - Scanpagina 170 van 193

Inleiding

In het kader van onze opleiding tot 1^e graads docent wiskunde aan de universiteit Twente (Toppers van 2 naar 1) hebben wij een gecombineerd onderzoek gedaan voor het onderzoek in de wiskunde (OiW) en onderzoek in onderwijs (OiO).

Voor het OiW hebben we een les samengesteld die door de leerstoel MSCT gebruikt kan worden als promotie / voorlichtingsles voor middelbare scholieren met als onderwerp differentiaalvergelijkingen. Het OiW bestaat uit "de les"; een draaiboek, een docentenhandleiding en een dictaat voor studenten.
Voor het OiO hebben we onderzocht of leerlingen na het volgen van deze les in staat zijn om zelf een differentiaalvergelijking op te stellen. Het OiO bevat een theoretisch kader over het onderwijs van differentiaalvergelijkingen en het onderzoek naar het effect van de les.

Het concept differentiaalvergelijkingen (DVn) is in het technisch hoger onderwijs een belangrijk onderwerp dat door studenten als moeilijk wordt ervaren (Hulshof, 2007).
In de zesde klas van het vwo komen bij het keuzevak wiskunde D de grondbeginselen van dit concept aan de orde. Aan één onderdeel van dit concept, het opstellen van een DV, wordt in de meeste lesmethodes weinig aandacht besteed. Het concept DVn kan echter niet goed worden begrepen als het opstellen daarvan niet aan de orde is geweest (Chaachoua & Saglam, 2006).
Vandaar dat de les (OiW) is gericht op het opstellen van een DV. Van wezenlijk belang hierbij is begrip van het concept afgeleide (Zwarteveen 2009).
Tijdens de les wordt het concept afgeleide als maat voor verandering uitgelicht en krijgen de leerlingen een opdracht. Om deze opdracht op te kunnen lossen moeten de leerlingen een wiskundig model maken, in dit geval een DV.

Na de les onderzoeken we met behulp van hardop-denk-sessies het effect van de les op het begrip van DVn. Dit onderzoek is een case – study omdat het twee leerlingen betreft.

De onderzoeksvraag luidt:
Kunnen leerlingen na het doorlopen van een modelleercyclus die leidt tot een differentiaalvergelijking zelf een differentiaalvergelijking opstellen?

Theoretisch Kader

Als het om het begrijpen van wiskundige concepten gaat komt in de literatuur het "dubbelzinnige" karakter van de wiskunde en het begrijpen daarvan aan de orde. Zo onderscheidt Sfard (1991) het begrijpen van een wiskundig concept in *operationeel* en *structureel* als twee kanten van dezelfde munt. Dit wordt veroorzaakt door de dualiteit van de wiskundige concepten zelf. Deze dualiteit, een con*cept* is ook een *pro*ces, bracht Gray en Tall tot de introductie van het woord "procept" (Gray & Tall, 1994). Byers (2007) gebruikt het woord ambiguïteit voor de meervoudige betekenis van een wiskundig concept, en kenmerkt het wiskundig denken hierover als een creatieve bezigheid, die wezenlijk iets anders is dan het toepassen van algoritmes.

In het geval van een DV komt dit "dubbelzinnige" karakter naar voren bij het begrip afgeleide en de daarbij behorende notatie dy/dx (Tall, 2009). Met dy/dx wordt niet alleen de mate waarmee y verandert aangegeven, en meetkundig de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van $y(x)$ (het concept). Het is ook (het resultaat van) een proces, namelijk het nemen van de limiet van het differentiequotiënt, en daarmee een verhouding, een deling. De notatie dy/dx is niet voor niets gekozen: hier speelt dezelfde dubbelzinnigheid een rol als bij het procept breuk. Een breuk is immers zowel een deling als het resultaat van die deling, (Meesters, 2010; Thurston, 1990). Zo is ook dy/dx op te vatten als een proces én het resultaat van dat proces met een nieuwe "hogere" betekenis. Aangezien de afgeleide een wezenlijk element van een DV is, speelt deze dualiteit een belangrijke rol als het gaat om het opstellen van een DV.

Verder onderscheidt Tall drie verschillende soorten van wiskundig denken, de "drie denkwerelden van Tall" (Tall 2004) . Naarmate de mens zich wiskundig ontwikkelt reist hij als het ware door die drie werelden, ieder volgens z'n eigen route en met zijn eigen bestemming afhankelijk van talent, beperkingen, belangstelling, ontwikkelmogelijkheden etc.

Tall gaat er van uit dat de ontwikkeling van het wiskundig denken start in "the embodied World ", de wereld van het waarneembare, de werkelijkheid, en zich van daaruit verder ontwikkeld naar "the proceptual world" een wereld bestaande uit symbolen die we gebruiken om te rekenen en te manipuleren bij b.v. rekenen, algebra, calculus etc. Het is een wereld van doen, waarbij de context, de (fysieke) betekenis, niet van belang is. De link met het waarneembare ("the embodied world ") wordt losgelaten.

Het onderwijs van differentiaalvergelijkingen speelt zich hoofdzakelijk af in "the proceptual world". Het oplossen van DVn is een kwestie van manipuleren van symbolen.
De context, de (fysieke) betekenis van een DV ("the embodied world " van de DV), is voor het oplossen ervan niet van belang en daar wordt dus ook weinig aandacht aan besteedt. Het ontbreken van deze link met de werkelijkheid maakt het analyseren van een DV lastig, want leerlingen hebben de benodigde eerste stap in de ontwikkeling van het wiskundig denken over DVn overgeslagen.

Op basis van deze aspecten zijn de volgende kernpunten voor het OiW gekozen:
Het concept afgeleide als mate voor verandering.

De link tussen "the embodied world" en "the proceptual world" van DVn.

Volgens Freudenthal (1983) is wiskunde een taal en een middel om de werkelijkheid te begrijpen. Die werkelijkheid moet dan vertaald worden in wiskunde en de wiskundige resultaten moeten geïnterpreteerd worden in de werkelijkheid. Dit gehele proces heet *modelleren*. Modelleren koppelt "the embodied world" aan "the proceptual world".
Het opstellen van een DV is een speciale vorm van modelleren (Verhulst, 2008).

In dit modelleerproces is de context het middel om een wiskundig concept te leren begrijpen. Dit idee ligt aan de basis van Realistic Mathematics Education (RME) en Emergent Modelling (Gravemeijer, 2007). De mechanica kan bijvoorbeeld dienen als context om differentiaalrekening te leren (Doorman & Gravemeijer, 1999).
In de les wordt een context uit de hydromechanica gebruikt om na het doorlopen van een modelleercyclus tot een DV te komen.

Onderzoeksmethode

De onderzoeksmethode is gebaseerd op de methode van Zwarteveen. (2009).
De deelnemers krijgen een opdracht die ze hardopdenkend moesten oplossen. Deze hardop-denk-sessies zijn door de onderzoeker afgenomen, op video geregistreerd en getranscribeerd, en na reductie in acties in een door Zwarteveen ontwikkeld schema geclassificeerd.
Het onderzoek is een case-study.

De deelnemers kregen vooraf een drietal korte vragen over DVn die ze schriftelijk moesten beantwoorden. De antwoorden op deze vragen werden gebruikt om per leerling een relatie te kunnen leggen tussen de uitkomsten van de hardop-denk-sessie en de opvattingen over het concept DV.

Deelnemers.

De deelnemers aan het onderzoek zijn twee 5VWO leerlingen met Wi-D van S.G. St. Canisius te Almelo, te noemen S. en R., die de introductieles over DV hebben bijgewoond.
S. heeft een EM profiel met wiskunde B zonder natuurkunde.
R. heeft een NT profiel.

Onderzoeksinstrument

Het onderzoeksinstrument is een door Zwarteveen ontwikkeld classificatieschema.

Tabel 1
Classificatieschema

	A		B		C			D		
naam	As	Ai	Bv	Be	Ci	Cw	Cd	Da	Dd	Dr
actie 1										
actie 2										
actie n										

Hierin worden een aantal fases onderscheiden; zie *Figuur 1.*

Figuur 1
Fasen in het classificatieschema

A Verkennen
As: verkennen van de situatie
Ai : identificeren van de relevante grootheden

B Variabelen
Bv: het kiezen van variabelen
Be: het toekennen van eenheden

C Onafhankelijke variabele
Ci: het identificeren van de onafhankelijke variabele
Cw: het onder woorden brengen hoe de afhankelijke grootheid verandert, resp. grootheden veranderen
Cd het onder woorden brengen hoe de afhankelijke grootheid verandert, resp. grootheden veranderen in de vorm van een differentievergelijking.

D DV
Da: het uitdrukken van deze verandering in een DV, voorafgegaan door een differentievergelijking.
Dd: het direct uitdrukken van deze verandering in een DV.
Dr: het noemen van de randvoorwaarden

In het schema worden de benoemde acties geclassificeerd. De kolom waarin een symbool is geplaatst geeft de fase waarin de actie thuis hoort, Het symbool geeft aan of de actie

- correct is en gepaard gaat met inzicht (gesloten symbool: ●) of
- fouten bevat, onvolledig is of zonder inzicht werd verricht (open symbool: ○).

Materiaal

De opdracht (*Figuur 2***Fout! Verwijzingsbron niet gevonden.**), die de leerlingen in de hard-p-denk-sessie voor zich krijgen, bestaat uit het opstellen van twee verschillende DVn binnen eenzelfde context, een 'predator – prey' probleem.

Deze opdracht is een andere dan die door Zwarteveen werd gebruikt. Dit om twee redenen. Allereerst gebruiken we in de les een zelfde context als in de opgave van Zwarteveen. Bij hergebruik van de context bij de hardop-denk-sessie zou een zekere mate van voorkennis verondersteld kunnen worden.
Het probleem is verder zo gekozen dat het analyseren van het context niet te moeilijk is, in ons geval: dieren worden geboren en gaan dood al dan niet door gewelddadige tussenkomst van anderen, zodat alle aandacht en energie besteedt kan worden aan het opstellen van het model, de DV.

Figuur 2

Opdracht hardop-denk-sessie

Opdracht

Natuurpark de Hoge Veluwe wil onderzoeken hoeveel vossen en konijnen er in het natuurpark leven. Boswachters tellen al jaren de konijnen en vossen, maar de resultaten verschillen nogal.

Je krijgt de opdracht om met behulp van onderstaande data het aantal konijnen en vossen uit te rekenen in een stabiele toestand, met andere woorden de aantallen konijnen en vossen zijn constant.

De volgende gegevens zijn bekend:

Konijnen worden gemiddeld 5 jaar oud (als ze niet opgegeten worden) dus 20% van de populatie sterft per jaar aan ouderdom en elk vrouwtje werpt gemiddeld 1 jong per jaar. Er zijn evenveel vrouwtjes als mannetjes.
De kans dat een konijn wordt opgegeten is afhankelijk van het aantal vossen, immers hoe meer vossen, hoe groter de kans dat een konijn er eentje tegenkomt.
De kans dat een willekeurig konijn een willekeurige vos tegenkomt is 1 %.
Bij 60% van deze 'ontmoetingen' wordt het konijn opgegeten.
Vossen worden gemiddeld 20 jaar oud, dus 5% van de populatie sterft van ouderdom. Het aantal jongen dat geboren wordt is afhankelijk van het aantal konijnen, immers hoe meer konijnen hoe minder tijd en energie vossen kwijt zijn met het vangen van prooi, hoe meer tijd er over is voor leuke dingen zoals b.v. voortplanting. Elk vrouwtje werpt gemiddeld q jongen per jaar, met q = 0,0001*aantal konijnen.

Om te voorkomen dat leerlingen in de opgave verzanden kan de onderzoeker bijsturen door middel van interventies. Een interventie kan worden gedaan na minimaal 2 minuten stilte. Een lijst met interventies is toegevoegd in Tabel 2, er zullen geen andere interventies worden gedaan.
De interventies zijn gericht op het activeren van het denkproces en op het doorlopen van de modelleercyclus.

Tabel 2
Interventies

	denkproces	Modelleer cyclus
Stap 1: Conceptualiseren	Beschrijf wat er gebeurt (in het bos)	
		Welke variabelen spelen een rol ?
	Heb je alle relevante data, is er iets vergeten ? (ziekte, voedsel)	
Stap 2: Mathematiseren		Wat kun je zeggen als het konijnen en vossen aantal in evenwicht is ? Hoeveel worden er geboren ? Hoeveel sterven er een natuurlijke dood ? Hoeveel worden er opgegeten ? Kun je hier een vergelijking van maken ?
Stap 3: Analyseren	Reken uit !	
Stap 4: Interpreteren & Valideren.		

Dataverzameling , verwerking en analyse

De dataverzameling bestaat uit een videotape met daarop de twee hardop-denk-sessies. De data op deze tape is bijgevoegd op CD-rom.

De dataverwerking (transcriptie) besloeg het uitschrijven van wat er letterlijk tijdens de hardop-denk-sessie gezegd werd (zie Bijlagen).

De transcripties zijn samengevat en de denkstappen (acties) van de leerlingen zijn gerelateerd aan de stappen van de modelleercyclus.

Deze acties zijn in het classificatieschema geplaatst, en voorzien van open en gesloten symbolen voor de deelfases van de fases A-D. Een gesloten symbool geeft aan dat de actie met inzicht gepaard ging, en een open symbool geeft aan dat de actie fouten bevatte, onvolledig was, of zonder inzicht verricht werd.

Zwarteveen stelde vast dat de meeste leerlingen zonder hulp niet ver komen bij het opstellen van een DV. Het resultaat van Zwarteveen is ons uitgangspunt om te vergelijken of de introductieles differentiaalvergelijkingen effect heeft gehad.

Resultaten en conclusies

Voor beide leerlingen heeft de introductieles geen effect gehad.
Beide hebben geen DV opgesteld tijdens de hardop-denk-sessie.

Tabel 3
Resultaat leerling S.

	A		B		C			D		
S.	As	Ai	Bv	Be	Ci	Cw	Cd	Da	Dd	Dr
Lezen van de opgave	○									
Aantallen konijnen en vossen zijn relevante variabelen			○							

Tabel 4
Resultaat leerling R.

	A		B		C			D		
R.	As	Ai	Bv	Be	Ci	Cw	Cd	Da	Dd	Dr
De eerste 3 minuten	●									
Legt verbanden		●								
Stel K, Stel V			●							

Leerling S.

S. leest de opgave door. Ze vat de opdracht niet samen, geeft geen blijk te begrijpen waar het over gaat.
De fase **Ai**; verkennen van de situatie vindt plaats maar zonder begrip.

Ze geeft aan de gegevens te willen opschrijven

Ze identificeert **niet** de relevante grootheden(As; identificeren van de relevante grootheden); waar gaat het nou om ? Ze schrijft meteen de gegevens die bij de opdracht gegeven zijn op.

Konijnen

20% van de populatie sterft per jaar aan ouderdom
Er zijn evenveel mannetjes als vrouwtjes

Er is 1% kans dat een konijn een willekeurige vos tegenkomt
En bij 60% van die 1% wordt het konijn ook opgegeten

Elk vrouwtje werpt 1 jong per jaar
(later aan gedacht)

Vossen

5% van de vossen sterft per jaar aan ouderdom
Aantal jonge vosjes dat geboren wordt per jaar q = 0,0001 keer het x – aantal konijnen

Alle gegevens zijn door S. benoemd, ze maakt echter een denkfout.
Ze gaat ervan uit dat als 20% van de konijnen per jaar sterft aan ouderdom, dan sterft 80% aan iets anders

Vervolgens vraagt ze zich af wat ze uit moet rekenen (**Ai**;geen begrip) en leest aanwijzing de opdracht nog eens en begint te rekenen, ze neemt daarbij aan dat er 100 konijnen zijn en loop na een aantal minuten vast.

Kennelijk stelt ze vast dat het aantal konijnen een relevante varabele is (Bv: het kiezen van variabelen), maar in plaats van een symbool kent ze er een getal aan toe.
Dit doet ze later met de vossen op dezelfde manier.
De fase **Bv** vindt plaats, maar zonder begrip.
De fase **Be** het toekennen van de eenheden vindt niet expliciet plaats, maar ligt zo voor hand dat dit niet als gemis wordt ervaren.

TIP1: wat kun je zeggen als het aantal konijnen en vossen in evenwicht is ?

Ze trekt de conclusie dat het aantal konijnen (en vossen) dat geboren wordt in evenwicht gelijk is aan het aantal dat sterft.
Ze stelt vast hoeveel konijnen er geboren worden (als er 100 konijnen zijn) berekent hoeveel er een natuurlijke dood sterven (fout; 20% van de 50 die er sterven ipv 20% van de populatie) en dus ook hoeveel er door de vossen worden opgegeten.

Dit probeert ze later ook nog een keer voor de vossen, maar komt ook hier niet verder.

De fasen C en D vinden niet plaats

Leerling R.

De eerste opmerking van R. "Er moet dus een soort van model staan" is treffend. Hij begint niet met een getalvoorbeeld, maar slaat aan het redeneren. Gaat uitzoeken op welke manieren de konijnen dood gaan. Via opeten en ouderdom. Hij probeert wat met de percentages 1,60, 20. Noemt het aantal konijnen K en gaat vervolgens toch een getalvoorbeeld uitproberen. Hiermee loopt hij vast en gaat weer verder met redeneren. Aanvankelijk gooit hij de gegevens van de konijnen en de vossen door elkaar, maar daarna komt hij via redeneren toch op de juiste weg. Hij vindt -0,2K vanwege ouderdom. Het opeten door vossen levert problemen op. Niet zo verwonderlijk want het is uitermate lastig om te komen tot -0,006 VK. Hij komt uiteindelijk bij -0,60K uit. Het aantal konijnen dat er bijkomt door geboorte geeft hij aan door K/2*2, waarbij het K/2 moet zijn. Door de aanwijzing van Berthil (wanneer is er evenwicht) komt hij op het goede idee om er een vergelijking K/2*2=K /100+k*0,20 van te maken. Jammer voor ons is dat op deze manier er geen DV ontstaat waarbij je vervolgens uitgaat van dK/dt=0.
Vervolgens was hij bij de vossen met 1 minuut klaar omdat hij een analoge redenering volgde als bij de konijnen. Zo kwam hij direct op v/100*5 sterft. Moet gelijk zijn aan wat erbij komt. Hier 0,0001K terwijl het 0,0001K*0,5V had moeten zijn (aantal geboortes hangt ook van het aantal vrouwelijke vossen af). Dezelfde moeilijkheidsgraad als daarnet.

Discussie

We hadden verwacht dat het begrip differentiaalvergelijking een rol zou spelen bij de hardop-denk-sessie.
Teleurstellend is dat beide leerlingen tijdens de opdracht geen moment het woord differentiaalvergelijking hebben laten vallen ondanks het feite dat deze sessie volgde op een lesmiddag over DV.

Aan de hardop-denk-sessie gingen drie inleidende vragen over DV vooraf (Zie: bijlage Antwoorden op de inleidende vragen van de hardop-denk-sessie). Ook hieruit bleek dat de essentie van wat wij tijdens de introductieles DV wilden overbrengen niet is overgekomen.

Het is opvallend hoe totaal verschillend beide leerlingen de opdracht probeerden op te lossen.

Tabel 5

Analyse denkproces hardop-denk-sessie

Leerling S.	Leerling R.
S. inventariseert de gegevens en begint te rekenen, zonder strategie. Ze verzandde in een moeras van getallen waardoor ze niet meer in staat was om richting te geven aan haar eigen denkproces .	R. ging analytisch te werk

De hardop-denk-sessie was voor ons een zeer interessante ervaring. Beide leerlingen gaven ons de gelegenheid hun denkproces te volgen.
We concludeerden dat we te weinig stil staan bij hoe leerlingen denken.

De lesmiddag is opgezet als introductieles voor de UT met als de bedoeling het begrip DV te introduceren.
Terugblikkend moeten we concluderen dat het onderwerp DV te groot is voor een lesmiddag.

Als aan de introductieles op de UT vastgehouden wordt is het aan te bevelen de les te laten voorafgaan door een tweetal theorielessen waarin uitgebreid aan de orde komt

- dat een DV een middel is om een verandering te beschrijven.
- hoe zo'n DV eigenlijk in elkaar zit.

De opdracht van het verontreinigde meer kan hierbij een uitgangspunt zijn.

Literatuur

Byers, W. (2007). *How mathematicians think*. Princeton: University Press.

Chaachoua, H., & Saglam, A. (2006). Modelling by differential equations. *Teaching Mathematics and its Applications, 25*(1), 15 – 22.

Doorman, M. & Gravemeijer, K. (1999). Modelleren als organiserende activiteit in het wiskundeonderwijs. *Tijdschrift voor Didactiek der β-wetenschappen*, 16(1), 38-55.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*.

Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. In Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, H.-W. & Niss, M. (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*. (pp. 137-144). New-York: Springer.

Gray, E.M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 115-141.

Hulshof, J. (2007). Echte brrrwiskunde. Gedownload op 28 april 2010 van http://www.math.vu.nl/~jhulshof/echtebrrrwiskunde.pdf

Meesters, R. (2010). Is een breuk hetzelfde als een verhouding? *Euclides, 85*(2), 76-77.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

David Tall (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen, Norway, 4, 281–288.

Tall, D. (2009). *How humans learn to think mathematically*. In press.

Thurston, W. (1990). Mathematical education. *Notices of the American Mathematical Society, 37*, 844-850

GW-34136-23 september 2011

Verhulst, F. (2008). *Modellen en dynamische systemen*. Gedownload op 28 april 2010 van www.epsilon-uitgaven.nl/download.php?key=d1

Zwarteveen, J.A., Verhoef, N.C., Hendrikse H.P., & Pieters, J.M.(2009). Differentiaalvergelijkingen begrijpen. Gedownload op 18 mei 2010 van http://www.vliegendehollanders2006.nl/content/files/GRP1/Dudoc%202008%20Joke%20Zwarteveen%20paper_ORD%20juni%202009.pdf

Scan nummer 1 van 1 - Scanpagina 184 van 193

Bijlagen

Transcriptie leerling S.

tijd	S.	Berthil
00:00	Wat is een differentiaalvergelijking, hmm dat wil zeggen geef een zo uitgebreid mogelijke omschrijving van wat jij allemaal weet over het algemeen begrip differentiaalvergelijkingen.	
00:20	Even kijken, een differentiaalvergelijking is een is een vergelijking met een = teken ertussen, is zeg maar een opgave waardoor je een antwoord eruit krijgt, waarschijnlijk met een onbekende aan de ene kant. Hmm wat weet ik nog meer over differentiaalvergelijkingen ? Meer eigenlijk niet. Zal ik gewoon naar de volgende gaan ?	Ja ga maar verder.
00:55	Ja, geef een voorbeeld van een situatie die met een differentiaalvergelijking beschreven kan worden ?	
01:07	Hmm je kunt een snijpunt met de x-as, hmm, als je een parabool hebt dan kun je een snijpunt met de x-as of met de y-as kun je uitrekenen, of hmm wat kun je nog meer uitrekenen ? Dit komt omdat het zo onvoorbereid is. God jongens. Met een differentiaalvergelijking kun je ook de richtingscoëfficiënt van een parabool van een rechte lijn uitrekenen.	
02:09	Dat was h'm wel denk ik, van welk van de volgende uitdrukkingen zijn de differentiaalvergelijkingen, hmm welk van de volgende uitdrukkingen zijn differentiaalvergelijkingen ?	
02:20	Volgens mij allemaal toch? Hmm nou B zowieso, want daar staat een nul achter, ja dat is bij allemaal eigenlijk, nou volgens mij allemaal alleen bij ... ja volgens mij allemaal.	
02:43	Zullen we nou naar dees gaan	Ja, goed gedaan.
02:45	Ja	ja
02:50	Ok hmm, moet ik deze ook helemaal voorlezen ?	Nee,lees maar voor jezelf even door.
03:00	OK, START; leest opgave door	
04:30	Nou, Ik vind het handig om eerst even alles	

	op te schrijven wat de gegevens zijn. Het eerste gegeven is dat het konijn vijf jaar oud wordt, verder staat er dat 20% van de populatie sterft per jaar aan ouderdom, dus 80% wordt waarschijnlijk gedood door de vos	
05:07	Het volgende cijfer is dat er evenveel vrouwtjes als mannetjes zijn	
05:27	Er is 1 procent kans dat een konijn een willekeurige vos tegenkomt	
05:50	En bij 60% van die 1% wordt het konijn ook opgegeten. Dat geef ik aan met een pijltje.	
06:08	Dan geeft geven ze over de vossen. Vossen worden 20 jaar oud.	
06:18	Dat betekent dat 5% van de vossen per jaar sterft aan ouderdom.	
06:32	95% is aan iets anders	
06:50	Moet er niet ergens staan wat een sterretje betekend?	Dat betekent keer
	OK	
07:08	En dan het aantal jonge vosjes dat geboren wordt per jaar is q=0,0001 keer het x – aantal konijnen	
07:37	Wat moet ik nou uitrekenen eigenlijk ?	Hier staat de opdracht, bovenaan
	OK	
07:55	Ik denk dat ik het beste kan beginnen met de voorstelling. Stel dat er nou 100 konijnen per per jaar zijn dan gaan er 20 per jaar dood ....aan	
08:27	en 1%, hmm die snap ik even niet	
08:38	oe, moeilijke vraag	
08:45	Ho wacht effe ik ben nog wat vergeten, elk vrouwtje werpt 1 jong per jaar, en er zijn dus 50 vrouwtjes en 50 mannetjes dus er zijn 50 jongen en er gaan 20 dood. Dus dat betekent dat de populatie per jaar stijgt.	
09:10	hmmm	
09:20	20, hmm	
09:26	Even kijken wat weten we over de vossen	
09:33	Ik weet niet of het goed is maar de vossen leven 4 keer zo lang dus ik denk dat er wel wat meer vossen zijn dan ... nee ik denk dat er meer konijnen zijn dan vossen.	
09:53	Oh ja, nu zie ik het;er zijn 10000 keer meer konijnen dan vossen.	
10.22	Ik weet alleen nog niet zo goed wat ik met	

	die 1% moet doen, hmm	
10:35	Ja, zo over het algemeen denk ik helemaal niet meer weten wat ik nu moet doen dus	
10:45		We hebben een lijstje gemaakt met dingen we als tip geven
10:58	hmm	TIP1: Wat kun je zeggen als het aantal konijnen en vossen in evenwicht is ?
11:05	Hmm, dat er geen konijnen bij komen en dat er geen vossen bij komen	precies
11:10	Ja, dus en er wordt hier vanuit gegaan dat het aantal konijnen en vossen in evenwicht is	ja
11:20	OK, dan moet ik een getal vinden waardoor er evenveel konijnen dood gaan .... Als er bij komen	
11:34	Maar er gaan natuurlijk niet alleen konijnen dood aan ouderdom .. OK	
11:46	80 % van de konijnen gaat dood door de vos	
11:55	Per jaar	
12:10	Is deze zin dus 20% van de populatie sterft aan ouderdom is dat dus 1/5 van de populatie, daarvan sterft 20% aan ouderdom	ja
	OK	
12:30	Dus 1/5 van de .... 1/5*20 .....dus even kijken hoeveel procent dat is 0,20 keer 0,20 =0,04%. 4% sterft aan ouderdom van de hele populatie hmm	
13:40	Tja, ik denk dat ik iets met die 80% vossen en 1% konijnen moet doen, maar ik denk dat ik weer vast zit	Jouw insteek was goed. Als er evenveel konijnen worden .geb... Er is evenwicht als er evenveel worden geboren als er dood gaan. Nou gaan er 20% per jaar dood aan ouderdom, en geen 4%
	ja	En de andere 80% hoeft niet noodzakelijkerwijs dood te gaan, want een konijn kan 5 jaar worden.
	OK dat wordt wel heel moeilijk.	
14:30	Gaat er maar 1% van de 80% dood aan ... of 1% van 100% gaat dood aan de vos	
14:53	nou	We gaan even terug naar de hint, die heb ik nu toch al gegeven. Je hebt gezegd als het aantal konijnen in evenwicht is gaan er evenveel dood als er geboren worden.
15:03	ja	Probeer daar 'ns mee verder te gaan.

		Daar zit de sleutel van het verhaal.
15:12	Hmja, ok, ehmm per jaar wordt er dus de h... de helft is een vrouw dus per jaar wordt de helft van wat er al was komt er weer bij, maar dan moet er dus ook de helft dood gaan, dus	
15:40	Stel dat er 100 konijnen zijn, dan komen er 50 bij, en dan moeten er dus ook 50 af, en 20% gebeurt dat door, door ouderdom	
16:10	Dus 10, en dan gaat ... moeten er nog 40 konijnen moeten er nog af	
16:20	Waardoor gaan die andere 40 dood, dus door de vos	
16:27	40 konijnen dood door de vos.	
16:39	Ja, ik vind te moeilijk	
17:12	Nou, dus klopt dat er 10000 keer zoveel konijnen zijn dat klopt volgens mij niet want de vos gaat minder snel dood	
17:30	hmm	
17:40	Als ze nu op ...1% van alles wordt opgegeten	
18:00	Hmm, dat klopt ook niet	
18:06	0,0..0,6% wordt opgegeten, hmm	
18:47	Dat zou maar betekenen dat er 3 konijnen worden opgegeten, dat lijkt me niet	
19:00	Maar betekent dit dat 1 konijn 1specifieke vos heeft trouwens ? Omdat ie een, gewoon een vos tegenkomt	Dat is de kans dat elk konijn, een konijn een vos tegenkomt, dus konijnen die huppelen door het bos en van de 100 dagen komen ze 1 dag een vos tegen
19:40	1 op de honderd dagen komen ze een vos tegen, ze hebben 5 jaar, als het goed is, 1 op de 100 dagen komen ze een vos tegen	
20:10	Ja, hmm, ja,	
20:25	ik geloof dat ik weer vast zit, ze worden 5 jaar oud en 1 op de 100, hmm	
21:08	1 op de 100 dat ze een vos tegenkomen dus 5 jaar	
21:27	Dus en maar 5 0,05 jaar en dat gedeelte van hun leven komen ze een vos tegen	
21:40	Even kijken	
21:50	Dan is nog maar 60% kans dan is er 60% kans dat ze worden opgegeten,	
22:05	dus	
23:02	Hmm ik zit echt vast	Pak 'ns een nieuw stukje papier, je hebt vastgesteld dat in evenwicht er evenveel konijnen dood gaan als er geboren worden
23:20	ja	Dat geldt ook voor de vossen

23:24	Oh ja natuurlijk	Je hebt verder vastgesteld, dat als ik 100 konijnen heb, dan gaan er 20 dood aan ouderdom
23:31	Ja	Je hebt ook vastgesteld dat er 50 geboren worden, en dan blijven er 30 over
23:42	Ik heb er 40 trouwens	Dat maakt niet zoveel uit, hmm hoe gaan die andere 40 dood?
23:52	Door de vos	Precies, dat is de enige andere mogelijkheid, of ze sterven van de ouderdom of ze worden opgegeten. Dus tot zover heb je het hartstikke goed voor elkaar. En nou ben je aan het worstelen met die procenten.
24:02		En ik hoor jou praten en denk het is ook wel lastig om dat te zien. Nou heb je niet 1 vos, maar je hebt een x-aantal vossen, dus de kans dat een konijn een vos tegenkomt, dat ie 1 vos tegenkomt is 1%, maar als er 10 vossen zijn is die kans
24:26	Ok, 10%	Dus hoe meer vossen er zijn hoe groter de kans dat een konijn er 1 ziet en dus ook hoe groter de kans dat hij wordt opgegeten. Dus de kans dat een konijn wordt opgegeten is afhankelijk van hoeveel vossen er zijn.
24:38	Ja, dus ik moet nu ergens bezig met hoeveel vossen er zijn	Het grijpt dadelijk in elkaar, je bent een heel eind op weg, ik vind het heel knap hoever je al gekomen bent
24:48	Gelukkig, dan leg ik deze eerst op de kop, dan kan ik niet meer naar de konijnen kijken, ga ik nu met de vossen beginnen.	
24:55	Nou, de vos wordt dus 20 jaar oud, en 5% sterft aan ouderdom	
25:10	Betekent dat ook gelijk dat de rest sterft omdat ze niet genoeg konijnen hebben ?	Niet iedereen hoeft dood he ? Als je 20 konijnen hebt en , ach nee 20 vossen hebt, dan gaat er eentje per jaar dood aan ouderdom, en de anderen blijven doorleven tot ze 20 jaar zijn.
25:28	Ok dus per jaar gaan er 5%	dood
	Maar er moeten ook 5% weer bijkomen	precies
25:36	Ok, ja, hmm, ik ga ervan uit dat er minder vossen dan konijnen zijn, dus laten we hier maar even beginnen met 50	
25:48	Er gaat 5% dood, keer 0,05	
26:00	Laten we dit maar even 10 maken dat is makkelijker rekenen... gedeeld door 20 is .. krijg nou hoofdrekenen, wat erg	

	Dat is nou een half, gaat dood dus	
26:25	Dat is ook 0,5y	
26:40	OK, dan moeten er 0,5 bij, pak even m'n rekenmachine,nou, hier schiet ik nog wat mee op he, och jongens, dus, hmm, en het aantal konijnen dat er bij moet komen is q gaan we dat de formule gelijkstellen aan 0,5, een differentiaalvergelijking dus hmm 0,0001*het aantal konijnen, nou, dan doen we 0,5 keer 10000	
27:35	Dan heb je 5000 met 5000 konijnen zijn.	
27:54	Dus als je als er een halve vos per jaar wil geboren worden moeten er 5000 konijnen zijn	
28:15	Ok, moeten er in totaal 5000 konijnen zijn, ja, dan gaan we weer naar de konijnen, dan moeten dus 5000 konijnen zijn	
28:35	Daarvan sterft twin... hmm er worden er de helft komt erbij dus 2500, komt erbij, geboren, dus moeten er ook 2500 sterven.	
29:06	Even kijken	
29:13	En van die 2500 sterven er 20% van de ouderdom, dud 500 sterven van ouderdom en de andere 2000 sterft door de vos.	
29:52	De vos	
30:00	Hmm, zit ik daar weer mee.	Je bent nu ruim een half uur bezig, als je zegt van ik heb het wel gezien dan mag dat, als je zegt ik wil nog even door, dan mag dat ook
30:30	Nou, ik denk dat ik er niet veel verder meer mee kom.	

Transcriptie leerling R.

tijd	R.	Berthil
5.55	START	
7.43	Er moet dus een soort van model staan	precies
7.53	Er zijn verschillende redenen waarop konijnen dood kunnen gaan	
7.54	Als die een vos tegenkomt, die kans is 1%	
8.15	Dus de kans dat hij een vos tegenkomt is 1%,daarvan wordt 60% opgegeten, andere reden is sterven aan ouderdom is 5%	
8.42	Nee dat is bij vossen, 20% ouderdom	
9.32	Stel het aantal konijnen is K	
9.42	Dan wordt de vergelijking, het gemiddeld aantal jongen per jaar q is 0,0001K. K is afhankelijk van 20% 1% daar weer die 60% van.	
10.12	Dat is wat er af gaat, wat er bij komt zijn, elk vrouwtje 1 jong per jaar	
10.40	Konijnen worden 5 jaar oud dat betekent dus dat elk vrouwtje 5 jongen voortbrengt in haar leven.	
12.25	Stel de populatie konijnen is 100 dan gaat elk jaar 20% sterft, blijven er 80 over, stel de helft zijn vrouwtjes, is 40, elk jaar 1 jong erbij dus aan het eind van het jaar is dat aantal verdubbeld, plus nog 40 mannetjes is 120, van die 120 komt 1% een vos tegen, als het goed is, nee, de kans is dat 1% de vos... nou 1% komt de vos tegen, dat is 1,2 nee dat klopt niet.	
14.25	K is gewoon q/0,0001. Ja dan heb je op zich toch al een model. Toch?	
14.54	Hiermee kun je in elk geval berekenen hoeveel erbij komt elk jaar. Maar dan gaat er ook nog wat af.	
15.30	Als je K deelt door 2 en dat aantal doe je weer keer 2 dan weet je in ieder geval wat erbij komt.	
16.00	K delen door 100 keer 60% wordt opgegeten	
16.19	En K keer 0,20 sterft door ouderdom	
16.42	Ja, heel veel kan ik er eigenlijk niet van maken	Je bent er bijna.
16.51	Ik denk dat ik dit nog moet verwerken in dit model	
	Toch, lijkt mij.	Even terug tot naar wat je al hebt. Je hebt berekend hoeveel konijnen er worden opgegeten. Je hebt berekend hoeveel konijnen dood gaan

		aan ouderdom en hoeveel er konijnen er worden geboren elk jaar. Als nu het aantal konijnen in evenwicht is, daar bedoelen we mee constant blijft. Wat weet je van de dingen die je hebt uitgerekend.
17.28	Dat die hetzelfde blijven elk jaar, of	Dat er dus evenveel konijnen dood gaan als dat er
	OOoo, dus dit is gelijk aan dit.	
17.58	Ja, maar dan weet ik eigenlijk nog niet hoe het moet	Maar je zegt het, schrijf het op wat je zegt.
18.14	Eh, K gedeeld door 2 keer 2. Hoeveel is dit samen. Is K gedeeld door 100 keer 60 plus K keer 0,20. Is dit um?	(klapt in z'n handen)Je bent halverwege.
18.38	Aa, nu nog de vossen	Ja
18.45	Voor de vossen is eigenlijk hetzelfde een beetje.	
18.55	Is V, ehm	
19.07	Ja V door 100 keer 5 sterft, eh.	
19.29	Ja dus 0,0001 keer het aantal konijnen is gelijk aan het aantal vossen dat dood gaat, want die blijft toch ook in evenwicht	Dank je wel, En nu heb je twee vergelijkingen met twee onbekenden en dan kun je het aantal vossen en konijnen oplossen. Super gedaan.
19.58	OK	Goed, hartelijk bedankt

Antwoorden op de inleidende vragen van de hardop-denk-sessie

A Wat is een differentiaalvergelijking? Dat wil zeggen:
Geef een zo uitgebreid mogelijke omschrijving van wat jij allemaal weet over het begrip differentiaalvergelijking.

S. *Vergelijking met een = teken ertussen, waarschijnlijk met een onbekende aan de ene kant*

R. *Heeft te maken met de afgeleide. Universeel, voor veel situaties, bevat quotient, variabele en een constante*

B Geef een voorbeeld van een situatie die met een differentiaalvergelijking beschreven kan worden.

S. *Je kunt een snijpunt met de x-as of met de y-as uitrekenen, richtingscoefficient van parabool en rechte lijn uitrekenen.*

R. *Een voorbeeld van situaties is het maken van een aardbevingsbestendig huis*

C Welke van de volgende uitdrukkingen zijn differentiaalvergelijkingen
(y is een functie van x):

$y' = 3$

$y'' + y' + 3 = 0$

$y' = 3y$

$y' = 3x$

S. *Allemaal*

R. *C*