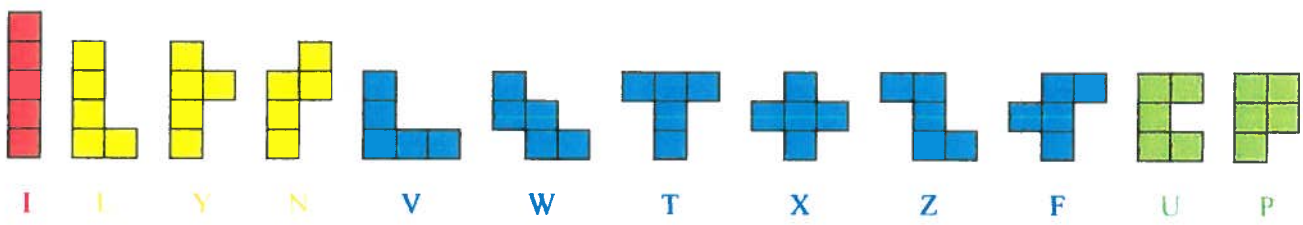


Instrumenteel en symbolisch denken niet toereikend voor hogere wiskunde?

**SPELTHEORIE
5 VWO**



Peter van Dorenvanck &
Jasper Klomp

UTwente 2010

Inhoud

| | |
|---|----|
| Inleiding | 3 |
| Theoretisch Kader | 5 |
| Methode van ons onderzoek..... | 9 |
| <i>Deelnemers</i> | 9 |
| <i>Materiaal</i> | 10 |
| <i>Onderzoeksinstrumenten</i> | 12 |
| Procedure..... | 13 |
| <i>Verzamelen & Verwerken van de data [E5].</i> | 13 |
| <i>Analyseren van de data</i> | 14 |
| Resultaten en conclusies..... | 18 |
| Discussie en aanbevelingen [E7] & [E8] | 19 |
| Tot slot..... | 19 |
| Referenties..... | 20 |
| Referenties..... | 20 |
| Bijlagen | 20 |

Inleiding

Wij, Peter en Jasper, zijn bevoegde tweedegraads docenten. Peter heeft vele jaren ervaring in het tweedegraadsgebied; Jasper heeft ervaring in zowel het tweedegraads als het eerstegraads gebied. Beiden zijn we zij-instromers zoals dat heet.

De titel van ons verslag heeft betrekking op een slotconclusie van ons onderzoek. We willen hiermee onze conclusie onderstrepen.

De universiteit Twente en het Platform Bètatechniek beginnen in 2008 samen met scholen in de regio een opleidingstraject met de naam "*Toppers van 2 naar 1 traject*". Deelnemers aan dit traject kunnen in gemiddeld drie jaar hun eerstegraads bevoegdheid halen. Scholen die hieraan meewerken, stellen deze leerkrachten drie jaar lang in staat, twee dagen in de week te studeren aan de universiteit. Het ministerie van onderwijs verleent zijn medewerking aan dit traject, omdat het aantal bevoegde exacte eerstegraads docenten landelijk niet voldoet aan de vraag van de markt. Om de kwaliteit van het Voortgezet Onderwijs te waarborgen dienen scholen zoveel mogelijk bevoegde docenten, voor zowel onderbouw als bovenbouw, te hebben.

Na een voorselectie in 2008 beginnen tien wiskundedocenten aan dit traject. Wegens ziekte stopt één docent binnen een half jaar met zijn studie. Het is een individueel leertraject, waarin elke deelnemer een op maat gesneden leerovereenkomst aangaat. Jasper is de enige van de deelnemers die al een aantal eerstegraads vakken behaald heeft (RUG in Groningen). Vandaar dat hij nu aan het eind van het tweede leerjaar in 2010 kan afstuderen. Het advies van de UTwente is de onderzoeksvakken in tweetallen te doen. De plannings van Jasper en Peter sluiten goed op elkaar aan, zodat samenwerken mogelijk is.

De onderzoeksvakken aan de universiteit betreffen "Onderzoek in de Wiskunde" en een "Onderzoek in het Onderwijs". Doordat we al meerdere jaren in de praktijk lesgeven, is ons de mogelijkheid geboden beide onderzoeken te combineren. Dit werkt als volgt: We kiezen een leerstoel, met daaraan gekoppeld twee keuzevakken; in ons geval de discrete leerstoel, met de keuzevakken Speltheorie (Gametheory) en Deterministisch Modelleren. Na het bestuderen van deze keuzevakken begint ons daadwerkelijke onderzoek.

Voor het "Onderzoek in de Wiskunde" bedenken we een afgeleid spel van *pentomino*, een tweespeler Pentominospel, waarin we op zoek zijn naar winnende strategieën voor speler 1. We beginnen eerst eenvoudige Nim-spelen te onderzoeken en verwachten door uitbreiding naar het spel pentomino een patroon in de oplossingen te ontdekken. We maken een computerprogramma dat we de naam "*Pento*" geven, waarmee het spel digitaal te spelen is. Zoals zo vaak in een onderzoek blijken er te veel mogelijkheden te zijn om de uitkomsten te beschrijven. De enige oplossing die we zien, is het schrijven van een computerprogramma die domweg alle mogelijkheden nagaat.

Er blijkt echter wel een patroon in de oplossingen van de eenvoudige Nim-spelen te zijn. We zijn dan anderhalve maand aan het werk en hebben geen bevredigende uitkomst. We bespreken deze uitkomst met onze begeleider, Harry Aarts, en bedenken samen een nieuw spel waarin de oplossingen wel op een speltheoretische manier te omschrijven zijn.

Voor “Onderzoek in Onderwijs” willen we een module voor wiskunde D module maken voor 5 vwo over speltheorie, met als doel meer leerlingen te interesseren voor zowel wiskunde D als speltheorie. Wiskunde D heeft sinds de invoering op de meeste scholen te weinig leerlingen. Er zijn zelfs scholen die besluiten het vak niet meer aan te bieden. Voor een technische studierichting is wiskunde D echter een zeer wenselijk vak. Speltheorie is een onbekende studierichting in het voortgezet onderwijs. We zijn van mening dat deze studierichting meer aandacht verdient.

Gerard Jeurnink is aangewezen als onze begeleider. We spreken af dat de module uitgevoerd zal worden op een school in het voortgezet onderwijs. We schrijven een module voor vier lessen, maken er een docentenhandleiding bij en vier lesbrieven.

We gebruiken hierbij onze ervaringen die we opgedaan hebben bij het onderzoek naar het pentomino-spel. Dit heeft twee redenen. De eerste reden is dat in de eenvoudige Nim-spelen een voor de leerlingen begrijpelijke oplossingstructuur zit. De tweede reden is dat we het belangrijk vinden de leerlingen te laten ontdekken, dat niet elke strategie tot één bevredigende oplossing leidt.

In de eerste lesbrieven gaat het om het vinden van een winnende strategie in de eerder genoemde eenvoudige Nim-spelen. In al deze spelen is de “diametrale aanpak” een winnende strategie voor de eerste speler. Om de leerlingen dit zelf te laten ontdekken en ook een groot deel van deze theorie in de lesbrieven te verwerken, besluiten we afzonderlijke lesbrieven mee te geven. Later blijkt dat, vooral de docent één dictaat over het onderwerp handiger vindt. Aangezien we zijn mening kunnen delen besluiten we van de lesbrieven één dictaat te maken.

Een onderzoek vergt een onderzoeksvraag. Om uitspraken te doen over de kwaliteit van onze geschreven wiskunde D module, besluiten we, na een constructief gesprek met begeleiders Nelly Verhoef en Gerard Jeurnink, twee toetsbare hoofdvragen te formuleren:

1. Kunnen leerlingen een speltheoretisch probleem herkennen?
2. Kunnen leerlingen een nieuw speltheoretisch probleem oplossen?

Hieronder beschrijven we een theoretisch kader, waarbinnen het onderzoek zal plaatsvinden en lichten vervolgens onze gebruikte methode toe. Vervolgens beschrijven we de resultaten van het onderzoek en trekken conclusies. Tenslotte doen we aanbevelingen ter verbetering van de module.

Theoretisch Kader

Voor ons onderzoek baseren we ons op de theorie, die ons tijdens de lessen vakdidactiek zijn aangereikt. Het betreft theorie van “David Tall” [C], en van “Richard Skemp” [B]. We hebben in het kader van “Vakdidactiek 2” een demonstratieles [D] in Almelo gevolgd, en waren daar zeer van onder de indruk. Het theoretische kader, waarin we ons kwalitatieve onderzoek [A] plaatsen en de resultaten verantwoorden, is hiermee getypeerd.

In onze referenties staan de artikelen en bronnen, waaruit we onze informatie halen. We verwijzen tijdens het uitleggen van ons theoretische kader en verderop in dit verslag naar de referenties door [...] te gebruiken.

A. Kwalitatief onderzoek

Er zijn twee verschillende manieren om iets te onderzoeken: de kwantitatieve en de kwalitatieve manier. In een kwantitatief onderzoek zijn er meetinstrumenten voor de betrouwbaarheid en validiteit, zoals de steekproefgrootte en standaardafwijking.

Voor een betrouwbaar kwantitatief onderzoek geldt dat het consistent over de tijd is, en dat het een (voldoende) accurate representatie van de totale populatie is. De resultaten in het onderzoek zijn daarmee onder dezelfde condities te reproduceren (herhaalbaarheid).

... The extent to which results are consistent over time and an accurate representation of the total population under study is referred to as reliability and if the results of a study can be reproduced under a similar methodology, then the research instrument is considered to be reliable. (Joppe (2000, p. 1).

Een kwalitatief onderzoek daarentegen, is valide als het meet wat je werkelijk wilt meten.

Validity determines whether the research truly measures that which it was intended to measure or how truthful the research results are. In other words, does the research instrument allow you to hit "the bull's eye" of your research object? Researchers generally determine validity by asking a series of questions, and will often look for the answers in the research of others. Joppe (2000p. 1).

Enkele vragen, die positief dienen te worden beantwoord in een valide onderzoek, zijn:

- Klopt het concept dat we hanteren?
- Beantwoorden de vragen datgene dat we willen weten?
- Zijn onze aannames correct?

Wainer and Braun (1998) describe the validity in quantitative research as “construct validity”. The construct is the initial concept, notion, question or hypothesis that determines which data is to be gathered and how it is to be gathered.

Onder een kwalitatief onderzoek verstaan we een onderzoek, dat door een natuurlijke benadering in een “werkelijke wereld” setting, zonder invloed of manipulatie van de onderzoeker gegevens destilleert (Patton, 2001, p. 39). Dus de praktijksituatie wordt op een natuurlijke manier onderzocht. In tegenstelling tot kwantitatieve onderzoekers, die determinatie,

voorspelbaarheid en generalisatie van bevindingen zoeken, zoeken kwalitatieve onderzoekers naar illuminatie, begrip en extrapolatie in vergelijkbare situaties (Hoepfl, 1997).

Een kwalitatief onderzoek meet de onderliggende filosofische manier van denken (Glesne & Peshkin, 1992, p. 8). Observaties en interviews zijn goede kwalitatieve meetinstrumenten. Een pretest en een posttest zijn hierbij van groot belang (Nelly Verhoef, 2010). Triangulatie, het met meerdere en verschillende meetinstrumenten en bronnen de resultaten onderbouwen, verhoogt de betrouwbaarheid en validiteit (Nahid Golafshani 2003) [A1].

Triangulation is defined to be "a validity procedure where researchers search for convergence among multiple and different sources of information to form themes or categories in a study" (Creswell & Miller, 2000, p. 126).

Toch spreken de meeste onderzoekers in een kwalitatief onderzoek niet van validiteit en betrouwbaarheid. Deze termen worden gezien als kwantitatief (Davies & Dodd, 2002; Lincoln & Guba, 1985; Mishler, 2000; Seale, 1999; Stenbacka, 2001).

As a result, many researchers have developed their own concepts of validity and have often generated or adopted what they consider to be more appropriate terms, such as, quality, rigor and trustworthiness.

Een kwalitatief onderzoek wordt beoordeeld op zijn kwaliteit. Enkele criteria hiervoor zijn (Lincoln & Guba, 1985):

- de mate van geloofwaardigheid,
- de mate van neutraliteit,
- de mate van bevestiging,
- de mate van consistentie of afhankelijkheid.

Hiermee is omschreven wat we onder een kwalitatief onderzoek verstaan en gaan we over naar het behandelen van de theorie van Skemp resp. Tall.

B. Richard R. Skemp (10 maart 1919 – 22 Juni 1995).

Was psycholoog en wiskundige. In zijn loopbaan was hij o.a. "Director of the Mathematics Education Research Centre, at the University of Warwick".

Hij en David Tall onderzochten hoe leerlingen wiskundige onderwerpen begrijpen [B1].

Ze zijn de grondleggers van instrumenteel en relationeel begrijpen.

1 Instrumenteel begrip:

Wiskundige onderwerpen begrijpen, door het beheersen van wiskundige technieken en het toepassen van formules.

2 Relationeel begrip:

Wiskunde begrijpen door verbanden te leggen tussen verschillende problemen en oplossingsstructuren combineren.

Onze vertaling hiervan:

Wij typeren de leerlingen naar aanleiding van hun antwoorden als volgt:

1. **Instrumenteel:** Als leerling bij het uitwerken van de opdrachten veelvuldig gebruikt maakt van algebra, zonder voldoende relaties te leggen met eerder behandelde spelen. Een instrumentele leerling is niet in staat een nieuw speltheoretisch probleem op te lossen door relationele verbanden toe te passen. Hij kan een nieuw speltheoretisch

probleem wel herkennen maar zal niet zelfstandig in staat zijn deze op te lossen zonder instrumenteel te rekenen.

2. **Relationeel:** Als leerling wel in staat is de nodige relationele verbanden toe te passen. Deze leerling herkent de relatie tussen eerdere, in de les behandelde spelen, en kan al redenerend het probleem of een deel ervan goed oplossen.

Naast het begrip, is voor de leerlingen ook de omgeving waarin ze leren van belang. Hierover ontwikkelde David Tall een theorie die we vervolgens gaan bespreken.

C. David Orme Tall (15 mei 1941 - heden).

Bestudeert wiskundige leertheorieën aan de universiteit van Warwick (Engeland).

Een recente theorie van hem is beschreven in “Talls’ Three Worlds of Mathematics”. [C1]

Dit is een door Tall ontwikkelde theorie, waarin het oplossen van wiskundige problemen op drie niveaus van abstractie wordt beschreven (Tall, 2002, 2004):

- 1 **Embodied** (Conceptueel).
Bij denken in de “Embodied World” associeert de leerling elementen uit het gegeven vraagstuk met zaken in de echte wereld zoals hij deze via zijn eigen waarneming heeft vormgegeven (Tall, 2002, 2004).
- 2 **Symbolic** (Proceptual).
Bij denken in de “Symbolic World” werkt de leerling met wiskundige gereedschappen, zoals formules en symbolen, om een gegeven vraagstuk op te lossen (Tall, 2002, 2004).
- 3 **Formal-Axiomatic**.
Gebaseerd op een formele benadering die begint met het gebruiken van axioma’s en vervolgens via deducties een bewijs levert.

Onze vertaling hiervan:

Voor onze analyse gebruiken we de drie werelden als volgt:

- 1 “*Embodied*” is de omgeving waarin een leerling leert als hij een “nieuw” speltheoretisch probleem herkent en de oplossingsstructuur kan toepassen om vervolgens de juiste conclusie te kunnen trekken. De leerling die verbanden kan leggen met wat hij geleerd heeft en logisch redenerend tot de goede oplossing komt.
- 2 “*Symbolic*” is de omgeving waarin de leerling leert als hij een “nieuw” speltheoretisch probleem niet doorziet. Een leerling die regelmatig gebruikt maakt van kleinere denkstappen waarbij hij symbolisch rekenen toepast.
- 3 Voor “*Formal-Axiomatic*” zijn de leerlingen niet getypeerd.

De theorieën van Skemp en Tall zijn door docenten, in opdracht van de universiteit Twente, verwerkt in een demonstratieles. Hieronder vertellen we in het kort hoe deze les is aangeboden en hoe het verder uitgewerkt wordt.

C. De demonstratieles [D1]

Vakdidactiek 2 bestond uit een aantal lessen. Eén ervan was een demonstratieles in Almelo. De eenheidskring werd uitgelegd aan een 5 vwo klas. Hiervoor hebben enkele eerstegraads docenten, die deel uitmaken van de CoL (Community of Learners), lesmateriaal ontwikkeld, dat we (de wiskunde docenten van twee-naar-een traject) mochten beoordelen. Vervolgens kregen wij de opdracht de les te observeren. Daartoe moesten we zelf observatielijsten samenstellen. We kregen hierbij de opdracht te achterhalen hoe leerlingen denken. Dit observeren tijdens de les is mislukt, omdat de les goed in elkaar zat en er weinig vragen van de leerlingen kwamen. We denken dat een lesobservatie met observatielijst zeer nuttig kan zijn als er meer interactie tussen docent en leerlingen is. Dit zou een docent kunnen sturen, door een lijst met gerichte vragen samen te stellen en meer tijd te plannen voor het toelichten van gevonden oplossingen.

Momenteel wordt nog gewerkt aan de verdere analyse van deze demonstratieles. Het vervolgtraject is wel aangegeven.

Het stappenplan voor de verdere analyse ziet er als volgt uit:

1. Het maken van criterialijsten voor de analyse: deze bevatten antwoorden die vooraf verwacht worden, ingedeeld naar theorie van Skemp/Tall.
Om het begrip van leerlingen te analyseren, worden zowel vragen als antwoorden gecategoriseerd in:
 - Instrumenteel
 - RelationeelOm het denkniveau (de omgeving leerlingen leren) te analyseren, wordt in een criterialijst vooraf duidelijk aangegeven wat er verstaan wordt onder de termen:
 - Embodied
 - Symbolic
2. Er worden turflijsten ontwikkeld. Hierin worden de vragen en de antwoorden van de leerling en de docent schematisch bijgehouden.
3. Er vindt een analyse plaats die betrekking heeft op de hoofdvraag binnen het theoretische kader van Skemp en Tall.
4. Er wordt een op de theorie gebaseerde conclusie getrokken.
5. De les wordt (eventueel) aangepast naar aanleiding van de conclusies.

Deze manier van onderzoeken hebben wij ook toegepast. We vonden het een praktische en duidelijke manier.

Methode van ons onderzoek

In deze paragraaf wordt beschreven hoe het onderzoek uitgevoerd is. We beginnen met een beschrijving van de deelnemers en het materiaal en de onderzoeksinstrumenten. Het laatste deel gaat over de dataverzameling, data-analyse en dataverwerking.

Deelnemers

Het onderzoek houden we in een 5 vwo klas aan het Vechtdalcollege in Hardenberg. De klas bestaat uit negen wiskunde D leerlingen. Om de privacy van de leerlingen te respecteren werken we met afkortingen van namen en nummeren we de leerlingen. De docent is een ervaren wiskunde docent met een universitaire wiskundige achtergrond. Door omstandigheden kon niet iedere leerling elke les aanwezig zijn. We hebben in de verdere analyse hiermee rekening gehouden. Tabel 1 geeft een overzicht van de afkortingen van de namen van de leerlingen en hun aanwezigheid. JD is de enige vrouw in de klas.

Tabel 1

Aanwezigheidsoverzicht

| nummer | Naam leerling | Les 1 | Les 2 | Les 3 | Les 4 |
|--------|---------------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | JD | x | x | x | x |
| 2 | RvB | x | x | x | x |
| 3 | WW | x | x | x | x |
| 4 | RV | x | x | x | x |
| 5 | JdG | x | | x | x |
| 6 | CvdE | | x | x | x |
| 7 | TA | x | | | x |
| 8 | RB | | | | x |
| 9 | LH | | | x | x |

X = Aanwezig.

De 5 vwo klas heeft drie lessen wiskunde D per week.

Om winnende strategieën te ontdekken hebben leerlingen tegen elkaar gespeeld. Daarom zijn leerlingen in groepjes ingedeeld. Het spelelement geeft ook extra motivatie winnende strategieën te vinden. De vorming van de groepjes hebben we aan leerlingen zelf over gelaten, omdat we ervan uitgaan dat leerlingen graag winnen van iemand waarmee ze graag omgaan. De leerlingen moesten eerst wennen aan de nieuwe lesopzet. Het was mooi om te zien hoe de leerlingen steeds enthousiaster aan het werk gingen!

De vier lessen speltheorie zijn ca drie weken voor de laatste toetsweek gehouden, zodat de docent, na de lessenserie, vier lessen over heeft voor de toetsvoorbereiding.

Materiaal

Om antwoorden op de twee hoofdvragen: “het herkennen en het oplossen van een speltheoretisch probleem”, te vinden hebben wij het volgende materiaal ontwikkeld:

1. Lesbrieven [E1],
2. Docentenhandleiding [E2],
3. Observatielijsten (om tijdens de les te observeren) [E3],
4. Computerprogramma “Pento” [E4],
5. Evaluatie formulier [E1],
6. Exit-interview (hardop-denk-sessie) [E5].

De notaties [E..] verwijzen naar de bijbehorende bijlagen.

1) Lesbrieven [E1].

Er zijn 4 lessen geschreven met een drieledig doel:

- Leerlingen leren een winnende strategie te vinden voor de beginnende speler in de diverse Nimspelen met als uiteindelijke doel oplossingstructuren te ontdekken. (Lesbrieven 1, 2),
- Leerlingen leren dat een belangrijke onderzoeksvaardigheid is dat je in het klein iets onderzoekt en de resultaten vervolgens probeert te vertalen naar een groter onderzoeksprobleem, maar dat dit niet altijd leidt tot een éénduidige bevredigende uitkomst. (Lesbrieven 2, 3)
- Leerlingen leren dat de oplossing van een speltheoretisch probleem vaak een evenwichtssituatie is. (Lesbrieven 3, 4)

2) Docentenhandleiding [E2].

Alle vier lessen zijn in de *docentenhandleiding* omschreven. In de lesopzet wordt de lesopbouw in tijd weergegeven. Hierin staan extra vragen die docent zou kunnen stellen als leerlingen eerder met een opdracht klaar zijn dan vooraf ingeschat. Deze vragen zijn te typeren als verdiepend. Hierdoor kan elke leerling op niveau leren. De leerdoelen zijn per les aangegeven zodat docent precies weet wat leerlingen aan het leseind dienen te beheersen. De *docentenlesbrief*, die na de lesopzet volgt, is een praktische samenvatting van de te geven lesstof. Op één A4 blad staan de praktische informatie aan de voorkant, én een schematische lesplanning aan de achterkant omschreven. De uitgebreidere informatie staat beschreven in de lesopzet. Een docent die bekend is met het onderwerp, heeft genoeg aan de docentenlesbrieven. De lesopzet kan dan dienen als ondersteuning. Ook bevat de docentenhandleiding extra werkbladen per lesbrief zodat docent eenvoudig kopieën kan maken.

Samenvattend bestaat elke les die beschreven is in de docentenhandleiding uit:

- Lesopzet: Hierin staan extra vragen, extra theorie, én staat omschreven hoe de les in de gestelde tijd gegeven kan worden.
- Lesbrief: Een samenvattend overzicht van de te geven les met een schematische lesplanning op de achterzijde.

- Extra werkbladen: Deze dienen als extra oefenmateriaal en zijn gerelateerd aan de opdrachten die de leerlingen die les dienen te maken.

3) Observatielijsten [E3]

Om zoveel mogelijk data over het denken van de leerlingen in wiskundige problemen te verzamelen, zijn de vier gegeven lessen geobserveerd met behulp van bijgevoegde observatielijsten. Om praktische redenen zijn er vooraf categorieën aangegeven in het denken. Op de voorkant van het observatieformulier kan de observator eenvoudig aangeven hoe hij het herkennen en de samenwerking ziet. De achterkant van het formulier is leeg zodat eventuele aanvullende informatie genoteerd kan worden. Door de vele afwezigheid is de lesobservatie mislukt en wordt deze niet meegenomen in de conclusie.

4) Computerprogramma “Pento” [E4]

Om het onderzoek naar een winnende strategie bij de leerlingen meer te laten leven is het computerprogramma “Pento” geschreven. De lessen zijn zo opgezet dat ze ook zonder het aanschaffen van het computerprogramma gegeven kunnen worden. Met “Pento” kan het spel pentomino, één van de te onderzoeken spelen, op een computer of een smartboard gespeeld worden. Het is een praktisch en motivatieverhogend computerprogramma.

Het programma werkt als volgt:

- Men kiest een bepaalde bordgrootte (rechthoekig) waarop je het pentomino-spel wilt spelen. Eventueel kunnen velden ge(de)selecteerd worden.
- Afhankelijk van de bordgrootte is een aantal (maximaal 12) pentomino’s beschikbaar. Is een pentomino niet beschikbaar, of al gespeeld, dan is deze niet selecteerbaar. Een pentomino die van het bord verwijderd wordt, wordt weer selecteerbaar gemaakt.
- De geselecteerde pentomino kun je roteren en spiegelen en zodoende in elke gewenste oriëntatie op het speelbord plaatsen.
- Als een pentomino niet geplaatst kan worden, wordt gebruiker hiervan op de hoogte gesteld daar een 3 tal rode flitsen in het (foutief) geselecteerde veld.

5) Evaluatieformulier [E1].

In de vierde en laatste lesbrief voor de leerlingen is een evaluatieformulier opgenomen. De vragen die we daarin stellen hebben een tweeledig doel:

- 1) Ondersteuning bij het vinden van de antwoorden op de hoofdvragen van ons onderzoek.
- 2) Een algemeen inzicht geven in de houding van de leerling met betrekking tot de onderwerpen uit de speltheorie.

6) Exit-interview (C-test) [E5].

Na de gegeven lessen hebben we elke leerling uitgenodigd voor een exitinterview. Deze hard-op-denkb sessie is op video opgenomen. Het interview bestaat uit drie onderdelen namelijk een algemeen interview die een toelichting geeft op de evaluatie en twee speltheoretische problemen waarmee we antwoorden op onze hoofdvragen denken te vinden. We hebben dit C-test genoemd. Hierin staat de C voor categoriseren. Een onderzoek bestaat normaliter uit een pretest en een posttest. Met een pretest wordt de beginsituatie - voor het onderzoek vastgelegd. De posttest, die na het onderzoek gehouden wordt, dient dan het effect van de te

onderzoeken hoofdvragen te meten. Aangezien het onderwerp speltheorie voor de leerlingen geheel nieuw is hebben wij besloten geen pretest te houden. Om de eindtest dan posttest te noemen is niet verantwoord. Vandaar de naam C-test.

Onderzoeksinstrumenten

Na overleg met Nelly Verhoef hebben we besloten de hardop-denken sessie, ons onderzoeksinstrument op basis van de C-test, als bron voor onze analyse te kiezen.

De werking van ons onderzoeksinstrument is als volgt:

- De C-test bestaat uit o.a. uit twee nieuwe speltheoretische problemen.
- Na de lessenserie wordt elke leerling uitgenodigd om individueel de C-test te maken.
- De leerlingen denken bij het maken van de opdrachten hard op, zodat hun denkwijze duidelijk wordt.
- Elke leerling heeft hiervoor ca. 20 minuten de tijd.
- Dit wordt op video opgenomen.
- Deze video-opnames zijn de basis voor ons onderzoek; we noemen het: hard-op-denken sessie.

Als er bij het analyseren van de hardop-denken-sessie twijfel bestaat over de correctheid van de uitwerkingen van de opdrachten, wordt als ondersteunend analyse materiaal de lesbrieven van de leerlingen gebruikt. Deze lesbrieven kunnen dienen als extra aanvulling om na te gaan of een leerling een onderwerp begrepen heeft.

De lesobservaties nemen we niet mee in de conclusie van ons onderzoek, vanwege de veelvuldige afwezigheid van sommige leerlingen.

Procedure

Verzamelen & Verwerken van de data [E5].

Om de hardop-denksessie te analyseren in het door ons omschreven theoretische kader hebben wij eerst vragen en mogelijke antwoorden van de C-test ingedeeld naar Embodied, Symbolic, Relationeel en Instrumenteel. In de bijlage Criterium_F [E5] staat de indeling van alle vragen met een toelichting beschreven.

We merken op, dat de afzonderlijke vragen en antwoorden als instrumenteel of relationeel worden beoordeeld. De typering embodied of symbolic vindt u alleen terug in de samenvatting, omdat het aantal interventies hiervoor bepalend is.

Vervolgens bekijken we de video opnames en schrijven letterlijk uit wat de leerlingen en de onderzoekers zeggen. Daarna plaatsen we de opmerkingen van elke leerling in een individuele turflijst. In de bijlage Typeringen [E6] staat de uitgeschreven hardop-denksessie en de ingevulde turflijst voor elke leerling. Voor leerling RV staat zijn typering onder (RV type_F). Het typeren is eerst afzonderlijk door Jasper en Peter gedaan. Vervolgens hebben we samen één eindconclusie getrokken. Jasper had eerst de antwoorden afzonderlijk ook symbolic of embodied genoemd. Samen met Peter is hij tot de conclusie gekomen dat dit, gezien de vooraf opgestelde criteria, niet terecht was.

In tabel 2 staat vermeld hoe de eindtyperingen tot stand komen.

Tabel 2

Criteriaoverzicht voor de eindtyperingen van de leerlingen

| Typering van de C-test opdrachten per onderdeel | | | | |
|---|-------------|-------------|------------|----------|
| Opdracht 1a | Opdracht 1b | Opdracht 1c | Opdracht 2 | eindtype |
| R | E R | E R | E R | E R |
| - | - | - | - | E I |
| - | I S | - | I S | S I |
| Eindtype niet ER en niet SI | | | | S R |

Uit tabel 2 volgt dat de eindtypering als volgt bepaald is:

- E R Leerlingen die uit alle typeringen per opdracht onderdeel van de C-test aan de criteria uit tabel 2 voldoen.
- E I Komt niet voor. In ons onderzoek kunnen alleen relationeel denkende leerlingen een vraagstuk embodied oplossen.
- S I Leerlingen die bij opdracht 1b en bij opdracht 2 van de C-test instrumenteel en symbolic beoordeeld zijn.
- S R Leerlingen die niet aan de typeringen ER en SI voldoen.

Uit het aanwezigheidsoverzicht (Tabel 1 op pagina 8) volgt dat:

- Vier leerlingen alle lessen gevolgd hebben (1 t/m 4).
- Drie leerlingen (5 t/m7) hebben niet alle lessen gevolgd maar voldoende informatie kunnen meekrijgen om de C-test vragen 1 en 2 te beantwoorden.
- Twee leerlingen (8 en 9) hebben de eerste twee lessen gemist waardoor we C-test vraag 1 niet kunnen beoordelen.

Voor de verdere analyse houden we rekening met deze driedeling in aanwezigheid. De laatste analyse stap bestaat uit de eindtyperingen van de leerlingen in relatie tot de twee hoofdvragen. Hiermee onderbouwen we de conclusies en aanbevelingen van ons onderzoek.

Analyseren van de data

Analyse groep (1 t/m 4)

Tabel 3 is samengesteld uit de samenvattingen van de turflijsten waarin elke vraag of interventie van de onderzoekers en elk antwoord van de leerling uit de C-test getypeerd is. [E6]. In deze tabel staan de leerlingen die elke les aanwezig waren.

Tabel 3

Typeringstabel van leerling 1 t/m 4

| nummer | Overzicht van de samenvattingen van de turflijsten per opdrachtonderdeel van de C-test | | | | Eind type |
|--------|--|--|------------------------------|--|------------|
| | Opdracht 1a | Opdracht 1b | Opdracht 1c | Opdracht 2 | |
| 1 | 3D niet goed, de relatie goed gezien | Goede oplossing zelf bedacht Alleen interventie voor term 9 vould | Goede oplossing zelf bedacht | Vindt zelfstandig de oplossing op een goede manier | Zie *1 |
| type | R | E R | E R | E R | E R |
| 2 | Goede antwoord | Goede oplossing zelf bedacht | Goede oplossing zelf bedacht | Goede oplossing zelf bedacht | Zie *2 |
| type | R | E R | E R | E R | E R |
| 3 | Goede antwoord | Goede oplossing zelf bedacht | Goede oplossing zelf bedacht | Goede oplossing zelf bedacht | Zie *3 |
| type | R | E R | E R | E R | E R |
| 4 | Goede antwoord | Teveel interventies nodig | Goede oplossing | Teveel interventies nodig | Zie *4 |
| type | R | I S | E R | I S | I S |

Voor de eindtypering is het criteriaoverzicht van tabel 2 bepalend. Drie (1 t/m 3) van de vier leerlingen die alle lessen aanwezig zijn denken relationeel en lossen vraagstukken embodiment op. Deze leerlingen zijn in staat de nodige verbanden en structuren in speltheoretische problemen te ontdekken en toe te passen. Vooral het relationele verband zien de leerlingen eerder naarmate ze meer lessen gevolgd hebben. De instrumenteel denkende

leerling kan wel gedeeltelijk relationele verbanden leggen maar niet het hele probleem relationeel benaderen en oplossen.

*1) Typeren we als embodied en relationeel. Lost de vragen redenerend op en vindt de goede oplossingen. Doorziet het verband tussen de, tijdens de lessen, “behandelde” spelen en de “nieuwe spelen” (C-test) en benoemd ze. Geeft op een instrumentele vraag een relationeel antwoord, als het probleem nog niet is opgelost. Antwoord op instrumentele vragen, die ter verduidelijkingen worden gesteld, wel instrumenteel.

*2) typeren we als embodied en relationeel. Lost de vragen redenerend op en doorziet, met een hint, een gemaakte fout snel. Geeft op instrumentele vragen relationele antwoorden.

*3) typeren we als embodied en relationeel. Lost de vragen redenerend goed op. Geeft op instrumentele interventies, die ter verduidelijking gesteld worden, ook instrumentele antwoorden. Vindt antwoorden snel en kan relatie tussen de behandelde lesstof goed leggen.

*4) typeren we als instrumenteel en symbolic. Geeft op relationele vragen regelmatig instrumentele antwoorden. Gaf in de evaluatie zelf aan van harde wiskunde te houden. Verstaat daaronder wiskunde waarbij: formules nodig zijn, of oplossingstechnieken eenduidig zijn.

Analyse groep (5 t/m 7)

Tabel 4 is samengesteld uit de samenvattingen van de turflijsten waarin elke vraag of interventie van de onderzoekers en elk antwoord van de leerling uit de C-test getypeerd is. [E6]. Deze leerlingen waren niet elke les aanwezig maar hebben voldoende informatie gekregen om de C-test vragen te kunnen beantwoorden.

Tabel 4

Typeringstabel van leerling 5 t/m 7

| nummer | Overzicht van de samenvattingen van de turflijsten per opdracht onderdeel van de C-test | | | | Eind typering |
|--------|---|--|---|---|---------------|
| | Opdracht 1a | Opdracht 1b | Opdracht 1c | Opdracht 2 | |
| 5 | De relatie goed gezien | Denkfout bij aantal beurten Teveel interventies nodig | Goede oplossing met maximaal 1 interventie gevonden | Heeft zich de oplossingsmethode niet eigen heeft gemaakt | Zie *5 |
| | R | I S | E R | I S | S I |
| 6 | Goede antwoord | Goede oplossing zelf bedacht | Via redenering de foute oplossing gevonden | heeft teveel interventies nodig Noteert factor in matrix | Zie *6 |
| | R | E R | I S | I S | S R |
| 7 | Goede antwoord | Goede oplossing zelf bedacht | Goede oplossing | De manier van oplossen is fout | Zie *7 |

| | | | | | |
|--|---|-----|--------------|-----|-----|
| | | | zelf bedacht | | |
| | R | E R | E R | I S | S R |

Voor de eindtypering is het criteriaoverzicht van tabel 2 bepalend.

Van leerlingen die niet alle lessen aanwezig waren, maar wel de theorie die nodig is voor het beantwoorden van beide C-test vraagstukken uitgelegd hebben gekregen, valt op dat ze veel relationeel denken in kleinere “deelproblemen”. Als ze eenmaal instrumenteel denken blijven ze dat een poosje doen. Ze zijn niet embodied omdat ze niet het hele probleem al redenerend kunnen oplossen. De oorzaak hiervoor zit waarschijnlijk in de gemiste lessen. Ze herkennen de speltheoretische problemen over het algemeen goed.

*5) geeft een wisselend beeld. Heeft onzekere houding, praat zacht. Bij kleinere vraagstukken typeren we LL als embodied en relationeel (1c). Mede door de onzekerheid beoordelen we LL bij grotere vraagstukken instrumenteel en symbolisch. Bij het oplossen van C-test vraag 2 valt op dat LL vasthoudt aan eerder geleerde technieken (kansrekenen). In zijn lesbrief had LL een gelijksoortig probleem ook zo opgelost. Denkt wel relationeel maar legt verkeerde relaties. Geeft op relationele interventies veelal wel een relationeel antwoord.

*6) stelt snel vragen als hij iets niet begrijpt. Bij kleinere problemen (1b) denkt LL embodied en relationeel. Bij grotere vraagstukken (2) typeren we LL als instrumenteel en symbolisch. Bij vraag 1c heeft LL niet de kans gekregen zich te herstellen. Dit was een fout van Jasper. Geeft wel regelmatig op een instrumentele vraag een relationeel antwoord.

*7) denkt ook veel relationeel. Is in staat een probleem embodied op te lossen als LL het probleem snapt. Stelt veel bijkomende vragen en heeft neiging overall meer achter te zoeken dan er is. Geeft op een instrumentele interventie meestal een instrumenteel antwoord en op een relationele interventie meestal een relationeel antwoord. Vraag 2 van de C-test heeft hij grotendeels instrumenteel opgelost.

Analyse groep (8 en 9) [E6]

Tabel 5 is samengesteld uit de samenvattingen van de turflijsten waarin elke vraag of interventie van de onderzoekers en elk antwoord van de leerling uit de C-test getypeerd is. [E6]. Deze leerlingen waren niet elke les aanwezig en hebben niet voldoende informatie gekregen om de C-test vragen te kunnen beantwoorden.

Tabel 5*Typeringstabel van leerling 8 & 9*

| nummer | naam | Overzicht van de samenvattingen van de turflijsten per opdrachtonderdeel van de C-test | | | | Eind typering |
|--------|------|--|-----------------------|----------------------------------|--------------------------------|---------------|
| | | Opdracht 1a | Opdracht 1b | Opdracht 1c | Opdracht 2 | |
| 8 | | Teveel gemiste lessen | Teveel gemiste lessen | Door hulp bij vraag 1 a/b gelukt | Kan het probleem niet oplossen | Zie *8 |
| | type | - | - | E R | I S | S R |
| 9 | | Teveel gemiste lessen | Teveel gemiste lessen | Teveel interventies nodig | Teveel interventies nodig | Zie *9 |
| | type | - | - | I S | I S | S I |

Voor de eindtypering is het criteriaoverzicht van tabel 2 bepalend.

Beide leerlingen hebben teveel lessen gemist (les 1, 2) om opdracht 1 van de C-test goed te kunnen beoordelen. Toch blijkt dat, ondanks dit gegeven, deze leerlingen wel een “nieuw” speltheoretisch probleem herkennen. LL9 die genoeg lessen heeft gehad om opdracht 2 goed te kunnen maken kon dat niet. Beiden kunnen wel relationeel denken in deelproblemen.

*8) Uit opdracht 2 valt op te maken dat LL een speltheoretisch probleem wel herkent. Bij de uitleg van vraag 1b valt op dat hij gelijk ziet dat modulorekenen niet werkt bij 3,5,7,8 punaises. Die relatie kon LL zelf gelijk leggen. Ook kon LL, na de uitleg, vraag 1c gelijk maken. Dit geeft aan dat LL relationeel kan denken. Bij vraag 2 snapt LL de bedoeling en geeft het goede antwoord, maar zijn er veel interventies nodig om de oplossing op een goede manier te vinden. De les waarin dit behandeld is heeft LL wel gevolgd.

Kan relationeel denken. Een groter probleem embodied oplossen is lastig. Bij een klein probleem, waarbij LL vlak ervoor is geholpen, lukt LL dat wel.

*9) heeft de eerste twee lessen gemist en kon hierdoor vraag 1a en 1b niet maken. Deze zijn dan ook buiten de beoordeling gelaten. Maar ook de relatie met vraag 1c kon LL niet leggen. LL heeft veel interventies nodig om tot een oplossing te komen. Kan wel een probleem herkennen. Geeft op een instrumentele interventie een instrumenteel antwoord en op een relationele interventie een relationeel antwoord. Uit de lesbrieven blijkt dat LL de oplossing van het bimatixprobleem niet goed begrepen heeft.

Analyse van de hele klas

We zien dat de meeste leerlingen, in deelproblemen of vraagstukken met minimale denkstappen voor de oplossing, relationeel denken. Dit is ook wenselijk op 5 vwo niveau. Onze vragen en interventies zijn te vaak niet afgestemd op het begrip van de leerlingen. Veelal stellen we instrumentele vragen waarop een relationeel antwoord komt. Als de instrumentele vragen aansturen op één antwoord dan is dit antwoord veelal wel instrumenteel. Leerlingen die vasthouden aan instrumenteel denken zijn niet in staat grotere vraagstukken redenerend goed op te lossen en de nodige verbanden te leggen. Natuurlijk maken relationeel denkende leerlingen wel gebruik van instrumentele denkstappen.

Resultaten en conclusies.

Om antwoorden te vinden op onze hoofdvragen hebben het onderstaande schema gemaakt. In de bijlage Typeringen [E6] staat in de samenvatting ons oordeel per leerling per vraagdeel.

De hoofdvragen zijn:

1. Kunnen de leerlingen een speltheoretisch probleem herkennen?
2. Kunnen de leerlingen een nieuw speltheoretisch probleem oplossen?

Hoofdvraag 1 wordt met “Ja” beantwoord als alle opdrachtonderdelen in de C-test, die betrekking hebben op hoofdvraag 1, met “Ja” zijn beoordeeld.

Voor Hoofdvraag 2 is Opdracht 2 van de C-test doorslaggevend.

Tabel 6

Typeringen in relatie tot de hoofdvragen

| nummer | Hoofdvraag 1 antwoord | Hoofdvraag 2 antwoord | Type |
|--------|-----------------------|-----------------------|------|
| 1 | Ja | Ja | E R |
| 2 | Ja | Ja | E R |
| 3 | Ja | Ja | E R |
| 4 | Ja | Nee | S I |
| 5 | Nee | Nee | S I |
| 6 | Ja | Nee | S R |
| 7 | Ja | Nee | S R |
| 8 | Ja | Nee | S R |
| 9 | Ja | Nee | S I |

In tabel 6 is te zien dat acht van de negen leerlingen, na het volgen van de module speltheorie, een speltheoretisch probleem herkennen. Ook is duidelijk te zien dat alleen leerlingen die opdrachten embodied benaderen voor beide hoofdvragen positief beoordeeld zijn. De meeste leerlingen kunnen deelproblemen relationeel denkend oplossen.

Als extra conclusie merken we het volgende op:

- Docenten zijn vaak geneigd instrumentele opdrachten geven. Dit geeft sneller een resultaat op korte termijn. Zoals uit ons onderzoek blijkt denken veel leerlingen in 5 vwo relationeel in deelproblemen. Hierdoor kan miscommunicatie ontstaan.
- Het is belangrijk dat de leerlingen elke les aanwezig zijn. Alleen deze leerlingen zijn in staat een “nieuw” speltheoretisch probleem goed op te lossen.
- Leerlingen die met relationeel denken niet tot een oplossing komen zijn geneigd om te schakelen naar instrumenteel denken.

Discussie en aanbevelingen [E7] & [E8]

Na een gesprek met de lesgevende docent zijn we tot de conclusie gekomen dat het praktischer is één dictaat voor de leerlingen te maken.

Ook bleek dat er tijdens de lessen meer behoefte aan het spelen met het computerprogramma “Pento” was. Dit programma motiveert leerlingen.

Enkele leerlingen gaven in de evaluatie aan meer theoretische kennis te willen opdoen. We hebben besloten onze module hierop aan te passen. De nieuwe module wordt aangeboden in dictaatvorm [E7]. Het omvat een serie van vijf lessen, waarbij de vijfde les verdiepend is. De docent kan samen met de leerlingen bepalen in welke richting de verdieping opgaat.

Tot slot

We hebben gezien dat de module speltheorie een welkome aanvulling is in het wiskunde D programma. De lesgevende docent heeft besloten de module komend schooljaar in het PTA (Planning voor Toetsing en Afsluiting) op te nemen.

Uit de evaluatie blijkt dat één leerling de module als matig beoordeelt. Dit is een leerling die aangeeft wiskunde als een “noodzakelijk kwaad” te zien voor zijn vervolgopleiding. De meeste leerlingen vinden het een leuke module waarin de lesstof op niveau wordt aangeboden.

Wij zijn ook tevreden over de uitkomsten van ons onderzoek, vooral over het feit dat we hebben kunnen aantonen dat instrumenteel en symbolisch denken niet toereikend is voor hogere wiskunde. Docenten die lesgeven in het voortgezet onderwijs aan toekomstige universitaire leerlingen dienen hiermee rekening te houden.

Referenties

- [A1] Golafshani N. (2003) Understanding Reliability and Validity in Qualitative Research
The Qualitative Report (Volume 8 Number 4 December 2003 597-607)
<http://www.nova.edu/ssss/OR/OR8-4/golafshani.pdf>
- [B1] Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding.
Mathematics Teaching, 77, 20–26.
- Skemp, R. (1972). The Psychology of Learning .
Mathematics(Penguin 1972) pp 43-46.
- [C1] Tall, D. O. (2003). Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning
Concepts in Mathematics. In L. M. Carvalho & L. C. Guimaraes (Eds.),
Historia e Tecnologia no Ensino da Matematica, (Vol. 1, pp. 1–28), Rio de Janeiro,
Brasil.
- Tall, D. O. (2004). Thinking through three worlds of mathematics
*Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of
Mathematics Education*, (Vol 4 pp 281–288)
- [D1] Verhoef, N. (2010). Lessen Vakdidactiek 2 aan de universiteit in Twente.
- Verhoef, N. (2010). Criteria voor instrumenteel / relationeel begrip (Community
of Learners)

Bijlagen

- [E1] Lesbrieven voor lesbrief 1t/m4_Final
[E2] Docentenhandleiding_F
[E3] Observatielijst
[E4] Pento
[E5] Criteriumlijst_F
[E6] Typeringen 10 juli
[E7] Dictaat
[E8] Docentenhandleiding dictaat