1 Voorwoord

Voor U ligt het eindverslag van ons onderzoek, uitgevoerd voor de gemeente Enschede en de Universiteit Twente. Het onderzoek is uitgevoerd door drie studenten van de opleiding Science Education and Communication. Alle drie zijn tweedegraads docenten wiskunde en volgen in het kader van het project “Toppers van twee naar één” een master opleiding met het doel een eerstegraads bevoegdheid te behalen.

Onderzoek is gedaan naar het aantal telefonistes dat ingezet moet worden om een bepaalde kwaliteit naar de klanten toe te kunnen garanderen. Daarbij is gebruik gemaakt van data van de gemeente Enschede en de theorie, opgedaan bij vakken als “Markov ketens”, “Stochastische modellen voor operations management” en “Stochastische simulatie”.

Voor het aanleveren van de data zijn wij dhr.A. Meester van de gemeente Enschede veel dank verschuldigd. Graag bedanken wij ook onze begeleider binnen de Universiteit Twente, professor R.J. Boucherie, voor zijn bijdrage aan dit verslag. Ook zijn wij dank verschuldigd aan dhr. J.C.W. van Ommeren en dhr J. Wind (oud leerling van Arjan) die ons op weg geholpen hebben met het programmeren in C^{++}.

Arjan Eikelboom (docent te Hardenberg)
Christiaan Heuver (docent te Nijverdal)
Hans Riezebeek (docent te Enschede)

Inhoudsopgave

2 Inleiding

Gemeenten hebben, net als bedrijven, contact met hun klanten. Deze contacten lopen via de telefoon, e-mail, post of persoonlijk contact (balie). Elke gemeente stelt zich doelen voor wat betreft de afhandeling van deze contacten (de zo genaamde performance targets). Deze doelen worden vaak omschreven in termen van tijd en kosten. Tijd die de klanten moeten wachten, bedieningstijd en personeelskosten. De planning van de inzet van personeel wordt bepaald door de verwachting dat met deze inzet de gestelde doelen gehaald kunnen worden.
Na afloop van een tijdsperiode kan de gemeente de performance targets narekenen en bepalen of zij het juiste aantal personeelsleden op de juiste taak ingezet hebben.
Het zou voor velen interessant zijn om vooraf te kunnen bepalen of performance targets behaald kunnen worden met een voorgestelde personeelsinzet.
In dit onderzoek zal, op een deel van deze vragen, antwoord gegeven worden. Het bijbehorende simulatieprogramma zal gemeenten in de toekomst een voorspelling kunnen geven over de benodigde inzet van personeel op basis van de performance targets.

3 De situatie, probleemstelling en doelstelling

3.1 De organisatie

De contacten tussen klanten en de gemeente lopen meestal via de afdeling Publieksdienstverlening (PD). De afdeling PD bestaat uit een vijftal teams:

- Team Ontvangst, bestaande uit telefonistes en receptionistes, verdeeld over verschillende locaties. Deze mensen beantwoorden vragen zoveel mogelijk zelfstandig of verwijzen of verbinden door.
- Front-office, baliemedewerkers.
- het GCC, Gemeentelijk Contact Centrum
- Backoffice, voornamelijk voor ondersteuning van burgerzaken
- Bedrijfsbureau, bewaakt de processen en de kwaliteit

Het GCC bestaat uit drie domeinen: Leefomgeving, Werk en inkomen en Publieksdienstverlening (het domein waar ons onderzoek zich op richt). Deze domeinen kunnen ook rechtstreeks door de klanten benaderd worden, dus buiten het Team Ontvangst of Frontoffice om. Onder het domein Publieksdienstverlening vallen burgerzaken, belastingen en parkeren. De contacten met dit domein gaan via de kanalen telefoon, post en e-mail. In dit domein werden in 2011 maximaal acht medewerkers ingezet, die de telefoon beantwoorden en post en e-mail afhandelden.

3.2 Kwaliteit

In het kader van klanttevredenheid wil de gemeente graag kwaliteit op het gebied van wachttijden garanderen. De gemeente hanteert op dit moment de volgende kwaliteitsnormen:

- Van alle telefoontjes moet 85% binnen 20 seconden worden beantwoord.
- Van alle e-mails moet 95% binnen drie dagen beantwoord zijn.
- De post moet binnen twee weken zijn afgehandeld.

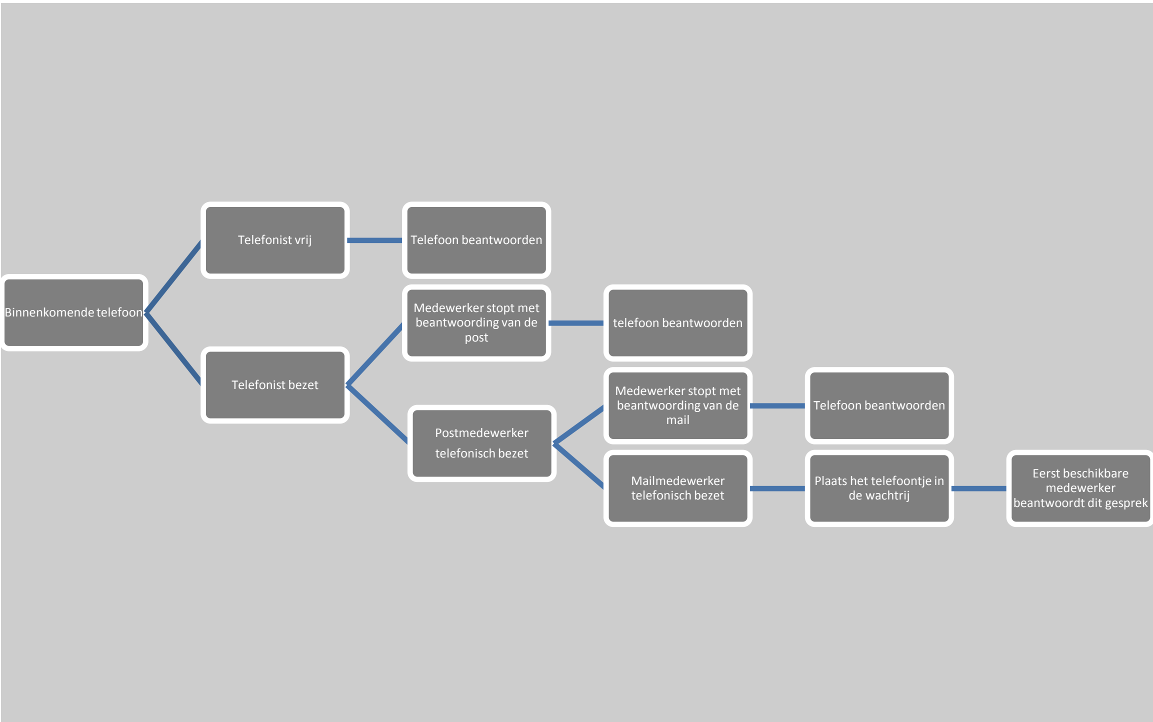
Het afhandelen van de telefoon heeft de hoogste prioriteit. Afhandeling van de e-mail heeft prioriteit boven afhandeling van de post.

3.3 Data

De data zijn door de gemeente Enschede aangeleverd. Het gaat hierbij om het aantal telefoontjes, aantallen e-mails en hoeveelheden post over het jaar 2011.
(zie voor voorbeeld bijlage 1)

3.4 Afhandeling van de telefoon

Het beantwoorden van de telefoon heeft de hoogste prioriteit. Tussendoor is er voor de medewerkers ruimte om e-mail en post te beantwoorden. De medewerkers die e-mail of post beantwoorden worden, als het aantal binnenkomende telefoontjes groter is dan het aantal telefonisten, van deze werkzaamheden afgehaald en weer belast met het aannemen van de telefoon (figuur 1).
In 2011 is het aantal telefonistes dat ingezet wordt op een specifiek kanaal, bepaald op basis van de ervaringen uit het verleden. Uit de gegevens die de gemeente Enschede heeft aangeleverd, blijkt dat post en de e-mail altijd tijdig afgehandeld worden.



figuur 1: schema afhandeling telefoon

3.5 Doelstelling

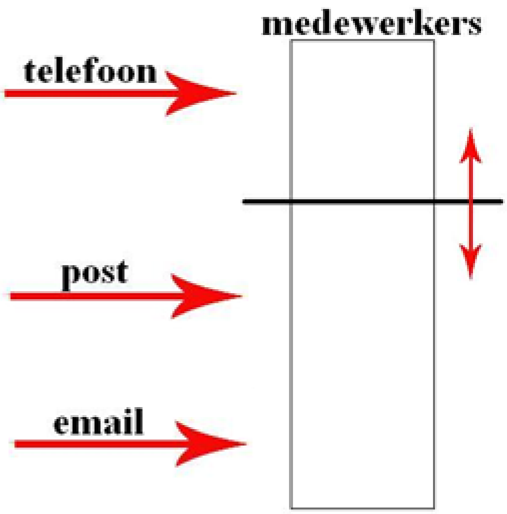
Is het mogelijk om een beslissingsondersteunend systeem te maken dat helpt bij het bepalen van het optimale aantal medewerkers dat ingezet moet worden om de performance targets te halen en mede duidelijkheid kan verschaffen in de taken die aan deze medewerkers toebedeeld moeten worden? De aankomstintensiteit en bedieningsintensiteit worden bepaald door de analyse van bestaande data.

4 Het wiskundig model

4.1 Modelvorming

Zijn alle telefoonmedewerkers bezet, dan verschuift de prioriteit van één van de medewerkers die de post aan het beantwoorden is naar het beantwoorden van de telefoon. Dit proces herhaalt zich totdat alle medewerkers die de post moeten beantwoorden telefonisch bezet zijn. Hierna gaat een medewerker die de e-mail beantwoordt ook de telefoon beantwoorden.

Nu worden de binnenkomende telefoontjes in een willekeurige volgorde onder de telefoonmedewerkers verdeeld; bij een binnenkomende oproep neemt een willekeurige, niet bezette telefoniste de oproep aan. Om voldoende e-mail en post te kunnen afwerken wordt een aantal medewerkers vrij gehouden om één van deze twee bezigheden uit te voeren. Wanneer er meer telefoontjes binnenkomen dan door de telefoonmedewerkers kunnen worden verwerkt, worden één of meer medewerkers van de post of de e-mail afgehaald.
Hiervoor is een M/M/1 simulatiemodel omgezet naar een M/M/s simulatiemodel (zie bijlagen 2 en 3).
Vele kleine stukjes vrije tijd vormen samen een groot geheel. De tussenliggende tijden zijn onvoldoende om e-mail of post te beantwoorden. Een tweede nadeel is de verloren tijd: tijd die besteed was aan het lezen van een e-mail/poststuk waarna de medewerker onderbroken wordt door de telefoon, dit wordt storingstijd genoemd. Hierna moet de e-mail/poststuk opnieuw worden gelezen. Er wordt zo veel meer tijd aan de beantwoording van een e-mail/poststuk besteed.
Als de telefoon beantwoordt is en er geen telefoontjes in de wachtrij staan, gaan deze medewerkers weer terug naar hun originele taak.
In het model is, aangezien dit door de gemeente is aangegeven, de afhandelingstijd van e-mail en post deterministisch bepaald.



iguur 2: Modelbeschrijving

Aantal aanwezige medewerkers is s.
Aantal medewerkers dat telefoontjes afhandelt is s_t.
Aantal medewerkers dat post afhandelt is s_p.
Aantal medewerkers dat e-mail afhandelt is s_m.
Aantal telefoontjes op een bepaald moment is #tel.

dus $s = s_t + s_m + s_p$

als (#tel $\leq s_t$) **dan** ($s_t = s_t \wedge s_p = s_p \wedge s_m = s_m$)
als (#tel $> s_t$) **dan** ($s_p \rightarrow s_p - 1 \wedge s_t \rightarrow s_t + 1$)
als (#tel $> s_t \wedge s_p = 0$) **dan** ($s_m \rightarrow s_m - 1 \wedge s_t \rightarrow s_t + 1$)

als (#tel $> s_t \wedge s_p = 0 \wedge s_m = 0$) **dan** telefoontje komt in de wachtrij.

Dus als het aantal telefoontjes blijft toenemen, neemt het aantal medewerkers dat telefoontjes afhandelt toe en neemt eerst het aantal medewerkers dat post afhandelt af (tot nul) en daarna neemt het aantal medewerkers dat e-mail afhandelt af (tot nul). Pas daarna ontstaat een wachtrij.

5 Het simulatieprogramma

5.1 Uitgangspunten

Het simulatieprogramma moet de volgende uitgangspunten hebben:

- Het aantal medewerkers (s) is vooraf in te voeren. Hierbij kan een keuze gemaakt worden in werkzaamheden: aantal medewerkers dat de telefoon beantwoordt (s_t), aantal medewerkers dat de mail beantwoordt (s_m) of het aantal medewerkers dat de post beantwoordt (s_p).
- De binnenkomst van de telefoon verloopt via een exponentiele verdeling waarbij een gemiddelde aantal per uur (λ) ingevoerd wordt.
- De afhandeling van de telefoon verloopt exponentieel, ook hiervoor wordt een gemiddeld aantal afhandelingen per uur (µ) wordt.
- De telefoonintensiteit is $\rho = \dfrac{\lambda}{s\mu}$.
- De telefonische bezettingsgraad van een willekeurige medewerker *i* is π_i .
- De tijd die medewerker *i* niet telefonisch bezet is, is $1-\pi_i$.

5.2 Case: Domein Publieksdienstverlening van de gemeente Enschede.

Gegevens zijn bekend betreffende de aantallen telefonische hulpvragen, aantallen e-mails en aantal poststukken over het jaar 2011. De behandeltijden zijn alleen van de telefoon bekend. Van e-mail en post is, na een eerder onderzoek, bekend hoe veel tijd de beantwoording gemiddeld in beslag neemt. Deze tijden hebben wij in onderstaande tabel overgenomen. Bijlage 1 geeft een voorbeeld van de ontvangen gegevens.

Op basis van de voornoemde gegevens zijn de volgende daggemiddelden uitgerekend:

Activiteit	Gemiddelde per dag	Gemiddelde behandeltijd (min:sec)	Tussenaankomsttijd (min:sec)
Telefoon	131,2	4:03	3:40
mail	6,1	6:00	78:41
post	27,3	8:00	17:35

tabel 1: daggemiddelden per activiteit

5.3 De uitkomsten

Voor de runs van het simulatieprogramma zijn realistische invoerwaarden genomen.
Deze waarden zijn (zie ook bijlage 4 en 5):

- 6 medewerkers waarvan 2 voor beantwoorden van email en 2 voor beantwoorden van post.
- 30 telefoontjes per uur die gemiddeld 7 minuten Hierbij is gekozen voor 7 minuten omdat elk telefoontje voor- en nawerk vereist en om rekening te houden met het feit dat een medewerker nooit een arbeidsproductiviteit van 100% kan halen. Gemiddeld duurt het alleen beantwoorden van een telefoontje 4 minuten.
- Een maximale wachttijd van 20 seconden omdat de gemeente graag meer dan 85% van de telefoontjes binnen 20 seconden wil beantwoorden
- 10 e-mails per dag waarvan het beantwoorden gemiddeld 9 minuten duurt. Hierbij is gekozen voor 9 minuten omdat elke e-mail voor- en nawerk vereist en om rekening te houden met het feit dat een medewerker nooit een arbeidsproductiviteit van 100% kan halen. Gemiddeld duurt het alleen beantwoorden van een e-mail 6 minuten.
- 30 poststukken per dag waarvan het beantwoorden gemiddeld 11 minuten duurt. Hierbij is gekozen voor 11 minuten omdat elke brief wel voor- en nawerk vereist en om een rekening te houden met het feit dat een medewerker nooit een arbeidsproductiviteit van 100% kan halen. Gemiddeld duurt het alleen beantwoorden van een brief 8 minuten.
- Voor de simulatietijd is één dag, dus 8 uur, genomen. Er is gekozen voor één dag omdat zo te zien is welke invloed de keuze van het aantal medewerkers op de voorraad e-mail en post heeft. De gemeente zet haar medewerkers altijd zo in, dat aan de kwaliteitseisen voor de beantwoording van de e-mail en de post, wordt voldaan.

Er zijn met deze waarden 200 runs met het simulatieprogramma uitgevoerd. De gemiddelden en steekproefvarianties van de uitkomsten van deze 200 runs zijn terug te vinden in bijlage 6.

5.4 Verificatie

Om te bepalen of het simulatieprogramma goed werkt, worden enkele na te rekenen waarden ingevuld:

Als $\lambda = 0$ komen er geen telefoontjes binnen en geldt:
$W_q = \dfrac{P(j \geq s)\rho}{s\mu - \lambda}$, waarbij $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Hieruit volgt dan $\rho = 0$ en dus dat $W_q = 0$.
Wordt er voor het verwachte aantal telefoontjes 0 ingevuld, dan zijn de medewerkers 0% telefonisch bezet en zijn er ook geen telefoontjes in de wachtrij. Het totaal aantal binnengekomen telefoontjes blijft ook 0. Worden er b.v. 4 medewerkers ingevoerd, 2 voor de mail en 2 voor de post dan geeft het programma precies het aantal mailtjes en poststukken dat door deze vier medewerkers in de simulatietijd kan worden beantwoord.

Als $\lambda = \mu$ dan is $\rho = 1$ en

$$W_q = \frac{P(j \geq s)\rho}{s\mu - \lambda} = \frac{P(j \geq s)\rho}{(s-1)\mu} \ .$$

Als het aantal medewerkers s groter wordt dan wordt W_q kleiner volgens deze formule.

Wordt b.v. voor het aantal telefoontjes per uur 10 ingevuld en als verwachte duur per gesprek 6 minuten, dan $\lambda = \mu = 6\,\mathrm{min}$. Met een toenemend aantal medewerkers, laat het simulatieprogramma duidelijk zien dat het aantal telefoontjes in de wachtrij afneemt en uiteindelijk 0 wordt. Dit klopt met de werkelijkheid want hoe meer medewerkers hoe korter de wachttijd in de rij zal zijn. Het aantal ingezette medewerkers s is bepalend voor de grootte van W_q.

5.5 Hoe betrouwbaar zijn de uitkomsten van het simulatieprogramma?

De gemiddelde uitkomsten van de simulatie zijn één voor één gecontroleerd. Voor dit en berekeningen van betrouwbaarheidsintervallen kan bijlage 7 geraadpleegd worden.

Voor de validatie is gekeken naar informatie die beschikbaar was.
Deze informatie heeft alleen betrekking op de afhandeling van telefoon.
Op een willekeurig dag, 24 januari, zijn 117 telefoontjes beantwoord door maximaal 4 medewerkers. Gemiddeld zijn dat 14,625 telefoontjes per uur die gemiddeld 4,157 minuten geduurd hebben. W_q maximaal op die dag was 2.

Invoer van deze gegevens in het simulatie programma geeft in bijna alle gevallen dezelfde uitkomst, zie hiervoor bijlage 8

6 Conclusies

Het is gelukt om een beslissingsondersteunend systeem te maken dat helpt bij het bepalen van het optimale aantal medewerkers dat ingezet moet worden om de performance targets te halen en mede duidelijkheid kan verschaffen in de taken die aan deze medewerkers toebedeeld moeten worden. Daar waar een telefonische helpdesk normaliter achteraf kan bepalen of de inzet van personeel voldoende is geweest om de performance targets te halen, kan het gebruik van het simulatieprogramma nu vooraf dat inzicht geven.

Het simulatieprogramma is in staat om op empirische wijze het optimale aantal medewerkers te bepalen, nodig om de performance targets te halen.

Een belangrijke verschijnsel is dat de hoeveelheid verloren tijd door de vele werkonderbrekingen aanzienlijk kan oplopen. Dat pleit er voor om een aantal medewerkers puur met de beantwoording van de e-mail en de post te belasten om de vele werkonderbrekingen, vanwege het moeten beantwoorden van de telefoon, te voorkomen.
Het simulatieprogramma zou dus uitgebreid kunnen worden met de mogelijkheid om een aantal medewerkers in te voeren dat alleen e-mail of post beantwoordt.

7 Reflectieverslag

Eind oktober kwam een vraag van de gemeente Enschede bij ons binnen betreffende de aantallen medewerkers die ingezet zouden moeten worden ter beantwoording van de telefoon, e-mails en brieven. Wij veronderstelden dat wij hier ons afstudeeronderzoek op konden richten.
Het leek ons wel een uitdaging om ons in dit probleem te verdiepen, met name omdat het een zeer praktisch probleem was waar wij, misschien, iets in konden betekenen.
Na een aantal verkennende gesprekken werd ons al snel duidelijk dat de vraag van de gemeente Enschede zeer goed beantwoord zou kunnen worden met behulp van een simulatieprogramma.
Daarna zijn we vrij lang bezig geweest om precies duidelijk te krijgen wat de manier van werken bij de gemeente is en wat zij precies van ons simulatieprogramma verwachtten.

We hebben als eerste een simulatieprogramma voor een m/m/1 wachtrij uit het boek van Law geprobeerd en dit programma aan onze wensen aangepast. Dit lukte na enige inspanning en verdieping in de manier waarop geprogrammeerd moet worden.
Vervolgens hebben we veel tijd gestoken in het begrijpen van de programmeertaal C^{++}, die hierbij wordt gebruikt. Ook het programma voor de M/M/1 wachtrij te herschrijven voor een M/M/3 wachtrij kostte veel tijd. Maar we kregen wel het gevoel de structuur van een simulatieprogramma onder de knie te krijgen.
Aan het eind van de kerstvakantie beheersten we de programmeertaal redelijk en hadden we een goed werkend simulatieprogramma voor een M/M/3 wachtrij.
Toen volgde een stap naar de praktijk bij de gemeente Enschede: Een M/M/s wachtrij met variabele invoer en een uitvoer waar de gemeente gebruik van kan maken.
Dit vereiste van ons, weer een stap verder te maken voor wat betreft het programmeren en het begon erg complex te worden. Soms moesten we een stap terug doen en weer opnieuw beginnen. Af en toe was dit erg frustrerend, maar op momenten dat één van ons het moeilijk had, deed de ander weer iets extra’s en zo vulden we elkaar steeds weer aan.
We leerden elkaar beter kennen dan in de jaren ervoor.
Ook onze 'nevenactiviteit', een volledige baan als wiskundeleraar nam af en toe veel tijd in beslag, denk aan tentamen- en examenweken, waardoor ons onderzoek wel eens als een molensteen om onze nek voelde, als iets dat er ook nog bij moest.
Maar het simulatieprogramma is nu af, is getest en draait goed.
Binnenkort wordt dit aan de gemeente gepresenteerd en aangeboden.
Het doel, de gemeente Enschede een instrument te bezorgen waarmee gesimuleerd kan worden met verschillende aantallen personeel en verschillende functies voor dat personeel, hebben we naar ons gevoel bereikt. Dit geeft ons een goed gevoel: dat hebben we toch maar mooi even gedaan!
Daarnaast hebben we voor de hoogste klassen van de havo een lesmodule ontwikkeld die bruikbaar is in de wiskunde-D lessen.
Deze module is door ons ook aan de uitgever van Moderne Wiskunde aangeboden.
Bij de herziening van de tweede fase in 2015 (als er weer nieuw materiaal moet worden geschreven) zal dit misschien een plekje in de boeken krijgen.

Al met al vonden we dit een moeilijk onderzoek, de dagelijkse praktijk van een afdeling in een computersimulatie krijgen viel ons niet mee. Geen van drieën zijn we goed geschoold in het gebruiken van een programmeertaal en om het programmeren voldoende onder de knie te krijgen, heeft ons wel de meeste tijd en moeite gekost.

De verdieping in de wachtrij-theorie hebben we eigenlijk van de basis af gedaan. Gebruik makend van kennis, opgedaan bij de vakken Wiskundige Statistiek, SMOM en Markov ketens, zijn we begonnen met het dictaat behorende bij het vak Stochastische Simulaties en hebben we verder gebruik makend van de, in de bijlagen genoemde, literatuur.

Zelf hebben wij het gevoel dat een onderzoek opzetten, uitvoeren en hiervan verslaggeving doen iets heel anders is dan wat wij afgelopen jaren op de UT hebben gedaan: elke periode 1 of 2 vakken volgen en aan het eind van elke periode hierin tentamens afleggen.
Dit vereist veel meer zelfstandigheid, discipline en doorzettingsvermogen.
Na afloop geeft dit echter meer voldoening: we zijn nu ook een (beetje) trots op ons zelf!
Onze begeleider, Richard Boucherie, wist soms niet wat hij met ons aan moest: een stel studenten begeleiden heeft hij natuurlijk wel vaker gedaan, maar een stel oude docenten die een afstudeeropdracht op bachelorniveau moeten uitvoeren was nieuw voor hem.
Hij liet ons onze gang gaan en zou wel zien wat er van terecht kwam.
Bij vragen van onze kant konden we altijd bij hem terecht en nam hij de tijd voor ons.
Vaak praten we dan ook over andere dingen dan ons onderzoek, bijvoorbeeld over hoe zijn kinderen het op school deden. Voor ons prettig en persoonlijk om op deze manier met elkaar om te gaan.
We merkten ook dat hij het lastig vond ons een beoordeling te geven: welke eisen moet ik aan hun onderzoek/verslag stellen? Ben ik niet te streng voor ze geweest?
Deze onzekerheid blijkt ook uit zijn laatste opmerking bij de laatste keer dat hij commentaar op ons verslag gaf: (we geven hier de gekuiste versie) “Ben ik niet veel te streng geweest voor jullie?” Er werd gehamerd op het gebruik van academische taal. Voor ons uiteindelijk een “eye-opener”.
Het wetenschappelijke van ons onderzoek werd benadrukt en uiteindelijk zijn we er in geslaagd het proza zoveel mogelijk te vermijden en de verhalende trant van ons verhaal los te laten. Uiteindelijk hebben we toch nog iets aan onderzoeksvaardigheden opgedaan. Onze opleiding was ook bedoeld om van ons universitair geschoolde wiskunde docenten te maken. We hebben veel vakken op universitair niveau afgesloten maar zijn eigenlijk te weinig academisch bezig geweest. Het laatste jaar heeft daar iets verandering in gebracht. Dit waarderen we.
Wij vinden dat wij de juiste keus gemaakt hebben door de leerstoel SOR te kiezen voor ons onderzoek en hebben daar geen spijt van.

APENDIX

pagina 1 van 1

Page 1

december 2011

Service Group By Day

Report Date: 2-1-2012 10:33
Service Group: SG. Belastingen
Report Range: 1-12-2011 30-12-2011 8:00 17:00

Day	Session Summary					Service Level	Average Time	Average Queue	Max Queue Size	Longest Queue Time	Max. Agents
	Abandoned (num)	Queuing (num)	Offered (num)	Answered (num)	Overflowed (num)	(%)	Handling (mm:ss)	Answered (hh:mm:ss)	(num)	Answered (hh:mm:ss)	Logged On (num)
1-12-2011	2	1	114	57	55	94,92	05:14	00:00:01	1	00:00:01	5
2-12-2011	2	0	100	74	24	97,37	04:00	00:00:00	1	00:00:00	4
3-12-2011	0	0	4	0	4	0,00	00:00	00:00:00	0	00:00:00	0
4-12-2011 *	0	0	0	0	0	0,00	00:00	00:00:00	0	00:00:00	0
5-12-2011	1	3	97	41	55	97,62	03:22	00:00:04	1	00:00:05	4
6-12-2011	1	1	83	51	31	96,15	04:11	00:00:03	1	00:00:03	4
7-12-2011	3	1	74	31	40	91,18	04:47	00:00:00	1	00:00:00	2
8-12-2011	1	0	71	42	28	97,67	04:44	00:00:00	1	00:00:00	3
9-12-2011	1	0	55	44	10	95,56	03:30	00:00:00	1	00:00:00	4
10-12-2011	0	0	1	0	1	0,00	00:00	00:00:00	0	00:00:00	0
11-12-2011	0	0	1	0	1	0,00	00:00	00:00:00	0	00:00:00	0
12-12-2011	1	0	62	45	16	95,65	05:21	00:00:00	1	00:00:00	5
13-12-2011	0	0	69	46	23	97,88	03:51	00:00:00	1	00:00:00	4
14-12-2011	2	0	53	33	18	91,49	04:25	00:00:00	1	00:00:00	3
15-12-2011	1	0	52	34	17	97,14	03:58	00:00:00	1	00:00:00	5
16-12-2011	1	1	51	45	5	97,83	03:41	00:00:01	1	00:00:01	3
17-12-2011	0	0	3	0	3	0,00	00:00	00:00:00	1	00:00:00	0
18-12-2011 *	0	0	0	0	0	0,00	00:00	00:00:00	0	00:00:00	0
19-12-2011	2	1	75	54	19	96,43	04:13	00:00:00	1	00:00:00	5
20-12-2011	4	3	68	48	16	83,46	03:08	00:00:01	1	00:00:01	5
21-12-2011	0	0	70	51	19	98,04	03:20	00:00:00	1	00:00:00	4
22-12-2011	3	3	61	47	11	90,00	05:09	00:00:03	1	00:00:04	5
23-12-2011	1	0	26	24	1	92,00	04:41	00:00:00	0	00:00:00	4
24-12-2011 *	0	0	0	0	0	0,00	00:00	00:00:00	0	00:00:00	0
25-12-2011 *	0	0	0	0	0	0,00	00:00	00:00:00	0	00:00:00	0
26-12-2011 *	0	0	0	0	0	0,00	00:00	00:00:00	0	00:00:00	0
27-12-2011	1	1	37	26	10	92,59	03:11	00:00:00	1	00:00:00	3
28-12-2011	1	0	47	27	19	96,43	04:08	00:00:00	1	00:00:00	4
29-12-2011	1	0	48	32	15	96,97	04:25	00:00:00	1	00:00:00	5
30-12-2011	1	0	50	47	2	97,92	03:37	00:00:00	1	00:00:00	5
Total	30	15	1370	899	443	-	-	-	-	-	-
Average	1	1	55	36	18	95,37	04:08	00:00:03	-	-	-
Maximum	-	-	-	-	-	-	-	-	1	00:00:06	5

M/M/1 systeem met één telefonist
Telefoontjes komen binnen met een exponentieel verdeelde aankomstintensiteit λ (aantal telefoontjes per uur) en worden afgehandeld met een bedieningssnelheid μ (aantal telefoontjes per uur). Als λ > μ zal de wachtrij alleen maar groeien en uiteindelijk wordt het systeem opgeblazen. Als λ < μ bestaat de kans dat een wachtrij ontstaat, aangezien de klanten niet regelmatig binnenkomen.

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ is de bezettingsgraad van het systeem, ρ < 1.

$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1-\rho}$ is het verwachte aantal klanten in het systeem.

$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$ is het verwachte aantal klanten in de rij.

Met de relatie van Little worden de wachttijden van de verschillende onderdelen berekend:
$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$ is de gemiddelde doorlooptijd.

$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu^2 - \lambda\mu}$ is de verwachte wachttijd in de rij.

Een ander veel gebruikte relatie tussen doorlooptijd en wachttijd, is:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

De bezettingsgraad van de telefoniste is π. In het geval van een M/M/1 model geldt:

$$\pi = \rho(1-\rho)$$

In een M/M/s systeem met s telefonisten gelden de volgende formules.

$\rho_s = \dfrac{\lambda}{s\mu}$ is de bezettingsgraad van het systeem , ρ < 1 en dus $s\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{i=s-1} \frac{(s\rho)^i}{i!} + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)}}$$ is de kans op 0 klanten in het systeem

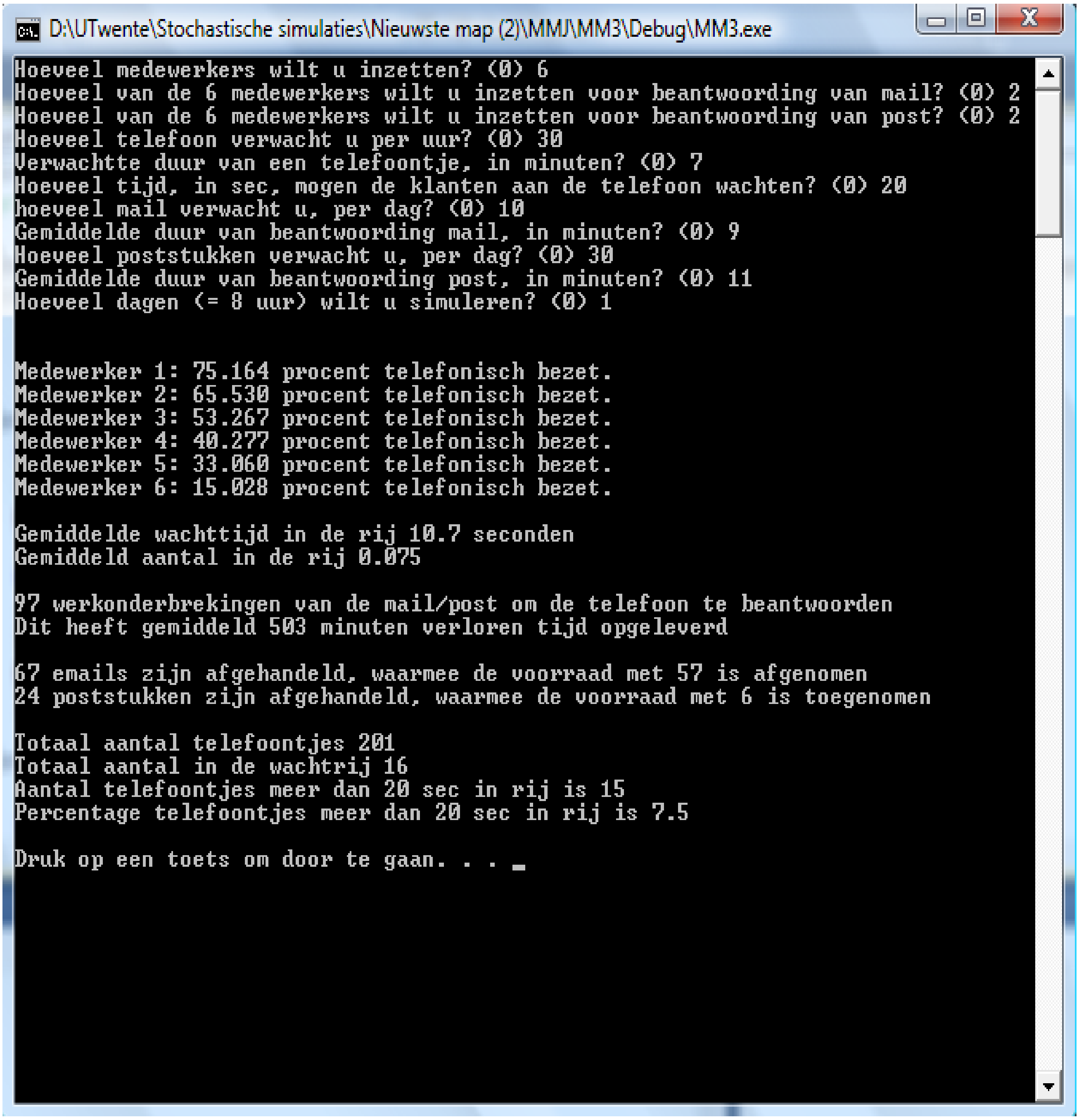
$$\pi_j = \frac{(s\rho)^j \pi_0}{j!}$$ (j = 1, 2, ….s) is de kans op j klanten in het systeem

$$\pi_j = \frac{(s\rho)^j \pi_0}{s! s^{j-s}}$$ (j = s, s+1, s+2, ….) is de kans op j klanten in het systeem

$$P(j \geq s) = \frac{(s\rho)^s \pi_0}{s!(1-\rho)}$$ is de kans dat er meer klanten zijn dan telefonisten.

$$L_q = \frac{P(j \geq s)\rho}{1-\rho} \qquad W_q = \frac{P(j \geq s)\rho}{s\mu - \lambda}$$

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \qquad W = \frac{L}{\lambda}$$



D:\UTwente\Stochastische simulaties\Nieuwste map (2)\MMJ\MM3\Debug\MM3.exe

```
Hoeveel medewerkers wilt u inzetten? (0) 6
Hoeveel van de 6 medewerkers wilt u inzetten voor beantwoording van mail? (0) 2
Hoeveel van de 6 medewerkers wilt u inzetten voor beantwoording van post? (0) 2
Hoeveel telefoon verwacht u per uur? (0) 30
Verwachtte duur van een telefoontje, in minuten? (0) 7
Hoeveel tijd, in sec, mogen de klanten aan de telefoon wachten? (0) 20
hoeveel mail verwacht u, per dag? (0) 10
Gemiddelde duur van beantwoording mail, in minuten? (0) 9
Hoeveel poststukken verwacht u, per dag? (0) 30
Gemiddelde duur van beantwoording post, in minuten? (0) 11
Hoeveel dagen (= 8 uur) wilt u simuleren? (0) 1


Medewerker 1: 75.164 procent telefonisch bezet.
Medewerker 2: 65.530 procent telefonisch bezet.
Medewerker 3: 53.267 procent telefonisch bezet.
Medewerker 4: 40.277 procent telefonisch bezet.
Medewerker 5: 33.060 procent telefonisch bezet.
Medewerker 6: 15.028 procent telefonisch bezet.

Gemiddelde wachttijd in de rij 10.7 seconden
Gemiddeld aantal in de rij 0.075

97 werkonderbrekingen van de mail/post om de telefoon te beantwoorden
Dit heeft gemiddeld 503 minuten verloren tijd opgeleverd

67 emails zijn afgehandeld, waarmee de voorraad met 57 is afgenomen
24 poststukken zijn afgehandeld, waarmee de voorraad met 6 is toegenomen

Totaal aantal telefoontjes 201
Totaal aantal in de wachtrij 16
Aantal telefoontjes meer dan 20 sec in rij is 15
Percentage telefoontjes meer dan 20 sec in rij is 7.5

Druk op een toets om door te gaan. . .
```

Invoer van 200 runs met het M/M/n –simulatieprogramma Bijlage 5

	Invoer
Aantal medewerkers	6
Mail	2
Post	2
Aantal telefoon per uur	30
Duur telefoontje	7
Wachttijd van klanten	20
Verwachte mail	10
Duur voor beantwoording mail	9
Verwachte hoeveelheid post	30
Duur voor beantwoording post	11
Aantal dagen simuleren	1

Gemiddelde en steekproefvariantie van de uitvoer van 200 runs met het M/M/n –simulatieprogramma met als simulatietijd 1 dag. Bijlage 6

	Gemiddelde	**Steekproefvariantie**
Medewerker 1 (% telefonisch bezet)	80,56	1,55
Medewerker 2	73,82	2,85
Medewerker 3	65,61	4,26
Medewerker 4	53,66	6,83
Medewerker 5	43,58	8,75
Medewerker 6	33,27	8,70
Gemiddelde wachttijd in de rij (sec.)	30,41	55,82
Gemiddeld aantal in de rij	0,25	0,004
Aantal werkonderbrekingen	106,78	105,26
Verloren tijd (min.)	549,15	2805,82
Aantal e-mail	51,45	69,17
Afname voorraad e-mail	41,45	69,17
Aantal poststukken	12,38	20,68
Toename voorraad post	17,62	20,68
Totaal aantal telefoontjes	233,97	176,34
Totaal in de wachtrij	39,67	309,34
Meer dan 20 sec in de wachtrij	34,50	276,36
% langer dan 20 sec in de rij	14,77	41,25

N.B. Voor de eerste 8 gegevens zijn runs uitgevoerd over 10 dagen om de invloed van het opstarten van het systeem te minimaliseren

Berekening van betrouwbaarheidsintervallen voor het gemiddelde. Bijlage 7

Algemeen:
Bij een steekproef van n runs met uitkomsten X_1 t/m Xn , verstaan we onder

het <u>gemiddelde</u>:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

de <u>steekproefvariantie</u>:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

tweezijdig betrouwbaarheidsinterval met <u>toetsingsgrootheid</u>

$T = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{S^2}{n}}} \sim t_{n-1}$ (*t*-verdeling of Student-verdeling met n-1 vrijheidsgraden).

het tweezijdig <u>betrouwbaarheidsinterval</u> van het gemiddelde:

$$\left(\overline{X} - c\sqrt{\frac{S^2}{n}}, \overline{X} + c\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right)$$

met het getal c zodanig dat $P\left(\left|T\left(n-1\right)\right| < c\right) = \gamma$, $0 \le \gamma \le 1$ wanneer gekozen wordt voor een tweezijdig γ%-betrouwbaarheidsinterval.
Met betrouwbaarheid γ geldt:
$t(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) < gemiddelde < t^*(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ als t en t^* twee verschillende steekproeven van n runs zijn.

Bij een steekproef met lengte 200 levert dit een c op van 1,972 omdat $P(X \le 1{,}972) = 0{,}975$ als $\overline{X}$ een Student-verdeling met 119 vrijheidsgraden heeft en dus ook $P(-1{,}972 \le X \le 1{,}972) = 0{,}95$
Een tweezijdig 95% betrouwbaarheidsinterval met toetsingsgrootheid

$T = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{S^2}{200}}} \sim t_{119}$ (t-verdeling of studentverdeling met 119 vrijheidsgraden) is dus: $\left(\overline{X} - 1{,}972\sqrt{\dfrac{S^2}{200}}, \overline{X} + 1{,}972\sqrt{\dfrac{S^2}{200}}\right)$

Percentage dat medewerkers telefonisch bezet zijn.

De medewerkers 1 tot en met 6 zijn gemiddeld
$\frac{80,56+73,82+65,61+53,66+43,58+33,27}{6}=\frac{350,48}{6}\approx 58,41\%$ van de tijd telefonisch bezet.

In theorie is de bezettingsgraad $\sigma=\frac{\lambda}{s.\mu}=\frac{30}{6.\frac{60}{7}}\approx 0,583$

Met een totaal van 350,48% en een steekproefvariantie van 32,94%
(=1,55+2,85+4,26+6,83+8,75+8,70) voor de 200 runs is het b.i.t.

$$\left(350,48-1,972\sqrt{\frac{32,94}{200}};350,48+1,972\sqrt{\frac{32,94}{200}}\right)=\left(349,68;351,28\right)$$

valt de theoretische uitkomst van 349,8% (6 . 0,583) binnen het tweezijdig 95% betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde van het percentage dat de medewerkers bezet zijn

Het gemiddelde aantal mensen in de rij is 0,25

Voor een M/M/N wachtrij geldt dat de gemiddelde lengte van een rij L_q gelijk is aan:

$L_q=\frac{\pi_0.\rho^{N+1}}{N!.N}\left[\frac{1}{(1-\frac{\rho}{N})^2}\right]$ waarbij voor N = 6 geldt $\pi_0=\frac{1}{1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\frac{\rho^4}{4!}+\frac{\rho^5}{5!}+\frac{\rho^6}{6!(1-\frac{\rho}{6})}}$.

Invullen van $\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{30}{\frac{60}{7}}=3,5$ geeft

$$\pi_0=\frac{1}{1+\frac{\frac{7}{2}}{1!}+\frac{\frac{49}{4}}{2!}+\frac{\frac{343}{8}}{3!}+\frac{\frac{2401}{16}}{4!}+\frac{\frac{16807}{32}}{5!}+\frac{3,5^6}{6!(1-\frac{3,5}{6})}}\approx 0,0290\ .$$

Dan is $L_q=\frac{0,0290.3,5^7}{6!.6}.\left[\frac{1}{(1-\frac{3,5}{6})^2}\right]\approx 0,2488$

Met een gemiddelde van 0,25 en een steekproefvariantie van 0,004 voor de 200 runs is het b.i.t.
$\left(0,25-1,972\sqrt{\frac{0,004}{200}},0,25+1,972\sqrt{\frac{0,004}{200}}\right)=\left(0,241;0,259\right)$ valt de theoretische uitkomst van 0,2488 binnen het tweezijdig 95% betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde van het percentage dat de medewerkers bezet zijn.

De gemiddelde wachttijd in de rij is 30,41 seconden.

Dit is de gemiddelde wachttijd van de bellers die daadwerkelijk in de wacht hebben gestaan.

De gemiddelde wachttijd, gerekend over alle bellers, is dan $30,41\ .\ 39,67\ :233,97\ \approx$ 5,2 sec.

De theoretische gemiddelde wachttijd $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0,2488}{30} \approx 0,00829 uur \approx 29,856 \sec$.

Met een gemiddelde van 30,41 sec. en een steekproefvariantie van 55,82 voor de 200 runs is het b.i.t.

$\left(30,41 - 1,972\sqrt{\frac{55,82}{200}}; 30,41 + 1,972\sqrt{\frac{55,82}{200}}\right) = (29,368; 31,452)$ en valt de theoretische uitkomst van 29,856 sec. binnen het tweezijdig 95% betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde van het percentage dat de medewerkers bezet zijn.

Aantal werkonderbrekingen van e-mail en post is gemiddeld 106,78.

Er komen gemiddeld 233,97 telefoontjes binnen
Gemiddeld duren deze 7 minuten, dus naar verwachting 233,97 x 7 = 1637,79 minuten telefoonverkeer inclusief voor- en nawerk.
De 2 medewerkers die uitsluitend telefoon beantwoorden zijn 79,58% en 73,03% van de tijd daarmee bezig. In totaal is dat ongeveer (480.(0,7958+0,7303))≈ 732,53 minuten.
Medewerkers 3 t/m 6 zijn dus naar verwachting 1637,79 -732,53= 905,26 minuten bezig met beantwoorden van de telefoon. Dat zijn 905,26 :7 ≈ 129,3 telefoontjes. Niet elke werkonderbreking betekent één telefoontje. Er kunnen ook twee of meer telefoontjes behandeld worden tijdens een werkonderbreking. Het aantal werkonderbrekingen moet dus altijd kleiner of gelijk zijn aan het aantal telefoontjes dat door deze medewerkers wordt behandeld.

Verloren tijd is gemiddeld 549,15 minuten.

We gaan ervan uit dat elke keer als één van de medewerkers 3 t/m 6 tijdens de beantwoording van email of post een telefoontje moet beantwoorden, hij/zij na dat telefoontje opnieuw moet beginnen met de beantwoording van desbetreffende email op post. Het programma rekent daarom bij elke werkonderbreking de helft van de behandeltijd als verloren tijd.
Medewerker 3 (post) is 64,61% telefonisch bezet, dat is 0,6461 x 480 minuten = 310,13 minuten.
Hierin heeft hij/zij 310,13 : 7 ≈ 44 telefoontjes beantwoordt.
Hij/Zij heeft dus hoogstens 44 maal de beantwoording van post moeten onderbreken en zal hier een gemiddeld tijdverlies van hoogstens 44 x 5,5 = 242 minuten door hebben.
Medewerker 4 (post) is 0,5383 x 480 = 258,38 minuten telefonisch bezet en heeft 258,38 : 7 ≈ 37 telefoontjes beantwoordt. Hierdoor heeft hij/zij een gemiddeld tijdverlies van hoogstens 37 x 5,5 ≈ 203,5 minuten geleden.
Medewerker 5 (e-mail) is 0,4206 x 480 = 201,89 minuten telefonisch bezet en heeft 201,89 : 7 ≈ 29 telefoontjes beantwoordt. Hierdoor heeft hij/zij een gemiddeld tijdverlies van hoogstens 29 x 4,5 ≈ 130,5 minuten geleden.

Medewerker 6 (e-mail) is 0,3049 x 480 = 146,35 minuten telefonisch bezet en heeft 146,35 : 7 ≈ 21 telefoontjes beantwoordt. Hierdoor heeft hij/zij een gemiddeld tijdverlies van hoogstens 21 x 4,5 ≈ 94,5 minuten geleden.

Samen hebben medewerkers 3 t/m 6 een tijdverlies dat hoogstens 242+203,5+130,5+94,5=670,5 minuten is.
Dit ligt boven het gemiddelde van 549,15 van de 200 runs, hetgeen betekent dat deze medewerkers vaak meer dan één telefoontje achter elkaar hebben beantwoord tijdens één werkonderbreking.
De verklaring is dat het kan voorkomen dat medewerker 3 of 4 meteen na het beantwoorden van een telefoontje weer telefoon kan krijgen (en misschien daarna wel weer één) en dus hierdoor niet twee- of driemaal verloren tijd heeft, maar slechts één keer.
Dus de theoretische 670,5 minuten zullen in de simulatie minder moeten zijn en dat klopt ook.

Aantal poststukken dat is afgehandeld is gemiddeld 12,28 stuks.

Medewerker 3 is 34,85% van zijn tijd bezig met beantwoorden van post, dus 0,3485 x 480 = 167,28 minuten. In deze tijd moet hij zich maximaal 44 maal opnieuw inlezen (zie hierboven) in de post die hij moest onderbreken omdat hij de telefoon moest beantwoorden. Dit kost hem hoogstens 242 minuten. Hij heeft slechts 167,28 minuten, dus deze medewerker komt nauwelijks toe aan het beantwoorden van post omdat hij zo vaak wordt onderbroken.
Medewerker 4 zal niet zo vaak als medewerker 3 meerdere telefoontjes achter elkaar moeten beantwoorden. Hij is 46,17% van de tijd bezig met de post, dus 0,4617 x 480 = 221,6 minuten. In deze tijd moet hij zich maximaal 37 maal opnieuw inlezen (zie hierboven) in de post die hij moest onderbreken omdat hij de telefoon moest beantwoorden. Dit kost hem hoogstens 203,5 minuten. Hij heeft dus minstens 18,1 minuten. Ook deze medewerker zal dus niet al te veel poststukken kunnen afhandelen vanwege de vele onderbrekingen.

Aantal e-mails dat is afgehandeld is gemiddeld 51,45 stuks.

Medewerker 5 is 57,45% van zijn tijd bezig met beantwoorden van e-mails, dus 0,5745 x 480 = 275,76 minuten. In deze tijd moet hij zich maximaal 29 maal opnieuw inlezen in de e-mails die hij moet onderbreken omdat hij de telefoon moest beantwoorden. Dit kost hem maximaal 130,5 minuten.
Dus blijven er minimaal 275,76 – 130,5 = 145,26 minuten over.
Hierin kan hij minimaal 125,76 : 9 ≈ 14 e-mails afhandelen.
Medewerker 6 is 69,51% van zijn tijd bezig met beantwoorden van e-mails, dus 0,6951 x 480 = 333,65 minuten. In deze tijd moet hij zich maximaal 21 maal opnieuw inlezen in de e-mails die hij moet onderbreken omdat hij de telefoon moest beantwoorden. Dit kost hem maximaal 94,5 minuten.
Dus blijven er minimaal 333,65 – 94,5 = 239,15 minuten over.
Hierin kan hij minimaal 239,15 : 9 ≈ 27 e-mails afhandelen.
Ook hier geldt weer dat het kan voorkomen dat in een werkonderbreking meerdere telefoontjes zijn beantwoord en de verloren tijd geringer is.

Een groot aantal runs van het simulatieprogramma gaf voor W_q uitkomst 2.

Een voorbeeld staat hieronder:

```
Druk op een toets om door te gaan. . .
Hoeveel medewerkers wilt u inzetten? (4) 4
Hoeveel van de 4 medewerkers wilt u inzetten voor beantwoording van mail? (0) 0
Hoeveel van de 4 medewerkers wilt u inzetten voor beantwoording van post? (0) 0
Hoeveel telefoon verwacht u per uur? (14.625) 14.625
Verwachtte duur van een telefoontje, in minuten? (4.157) 4.157
Hoeveel tijd, in sec, mogen de klanten aan de telefoon wachten? (20) 20
hoeveel mail verwacht u, per dag? (0) 0
Gemiddelde duur van beantwoording mail, in minuten? (0) 0
Hoeveel poststukken verwacht u, per dag? (0) 0
Gemiddelde duur van beantwoording post, in minuten? (0) 0
Hoeveel dagen (= 8 uur) wilt u simuleren? (1) 1


Medewerker 1: 54.988 procent telefonisch bezet.
Medewerker 2: 42.745 procent telefonisch bezet.
Medewerker 3: 16.759 procent telefonisch bezet.
Medewerker 4: 6.449 procent telefonisch bezet.

Gemiddelde wachttijd in de rij  0.6 seconden
Gemiddeld aantal in de rij 0.002

0 werkonderbrekingen van de mail/post om de telefoon te beantwoorden
Dit heeft gemiddeld 0 minuten verloren tijd opgeleverd

0 emails zijn afgehandeld, waarmee de voorraad met 0 is afgenomen
0 poststukken zijn afgehandeld, waarmee de voorraad met 0 is afgenomen

Totaal aantal telefoontjes 125
Totaal aantal in de wachtrij 2
Aantal telefoontjes meer dan 20 sec in rij is 2
Percentage telefoontjes meer dan 20 sec in rij is 1.6

Druk op een toets om door te gaan. . .
```

Bronnen:

Albers, W: *Wiskndige Statistiek* *(Reader Universiteit Twente)*
Boucherie, R: *Simulatie, cursusjaar 2010-2011* *(Reader Universiteit Twente)*
Law, A.M: *Simulation, Modelling & Analysis.*
Gross, D en Shortle, J.F. en Thompson, J.M. en Harris, C.M: *Fundamentals of Queueing Theory.*
Winston, W.L: *Operations Research, Applications and Algorithms.*
Albers,