Universiteit Twente
Instituut ELAN

De inzet van kennisbladen in het HAVO wiskundeonderwijs

Eindverslag Onderzoek van Onderwijs

Door: J. R. Lanting
Begeleider: dr. N. C. Verhoeff

Samenvatting

In dit onderzoek is onderzocht in hoeverre de inzet van kennisbladen bij het wiskunde B onderwijs in HAVO 4 een positief effect heeft op de resultaten.

Hiertoe zijn lessen ontworpen waarbij de leerlingen op actieve wijze kennis en vaardigheden herhalen en nieuwe kennis en vaardigheden opdoen. Hierbij worden zogenaamde kennisbladen ingezet. De kennisbladen en de lesaanpak zijn een geïntegreerd geheel, waarbij de kennisbladen eerst dienen als werkblad en later als naslagwerk. Op de kennisbladen is geëxpliciteerd datgene dat geleerd en beheerst zou moeten zijn na behandeling van de stof.

De resultaten zijn vergeleken met een controlegroep en op basis hiervan kan geconcludeerd worden dat de inzet van deze kennisbladen geen significante verbetering heeft laten zien.

Voorwoord

Dit rapport beschrijft het onderzoek dat ik heb uitgevoerd voor het vak Onderzoek van Onderwijs, als onderdeel van mijn opleiding Master of Science and Education. Met deze opleiding wil ik mijn bevoegdheid halen als eerstegraads wiskundedocent.

Deze opleiding ben ik begonnen in 2007 toen ik nog werkzaam was in de ICT. Terwijl ik dit schrijf, komen de herinneringen aan mijn eerste contacten met de collegebankjes weer naar voren, net als mijn ervaringen die ik heb opgedaan tijdens mijn eerste stage in Oldenzaal. Het is toch wel bijzonder. Aan de ene kant staan deze herinneringen me nog zeer helder voor de geest en lijkt het alsof ik deze ervaringen pas kortgeleden heb opgedaan. Aan de andere kant, wat lijkt het ontzettend lang geleden en is er zo ontzettend veel gebeurd in de tussentijd.

En wat ben ik blij dat ik de overstap heb gemaakt van het bedrijfsleven naar het onderwijs. Ik vind het geweldig om elke dag weer om te gaan met jonge mensen die nog aan het begin van hun leven staan en die op weg zijn naar hun volwassenheid, en hun te begeleiden bij het leren van de wiskunde. En helemaal mooi wordt het om te zien wanneer er leerlingen zijn die geboeid raken door de mooie wereld van de wiskunde.

Ik bevind me nu in de eindfase van mijn opleiding. Een opleiding die begon met een inleidend vak in de wiskundige didactiek en die nu bijna eindigt met mijn onderzoek van onderwijs. Dit alles had ik nooit kunnen bereiken zonder de steun van mijn vrouw Baukje en onze kinderen Jasper en Linde. Lieve Baukje, hartstikke bedankt voor je support, begrip en je enorme geduld; het was niet altijd even gemakkelijk. En lieve Jasper en Linde, fijn dat jullie er begrip voor hadden dat jullie papa soms wel erg druk aan het studeren was voor een tentamen en dan wat minder tijd voor jullie had.

Het schrijven van dit voorwoord is een mooi moment om ook al die mensen te bedanken die ik op mijn onderwijspad ben tegengekomen. In het bijzonder dank je wel Nellie voor de begeleiding tijdens de opleiding.

Rest mij te besluiten om u allen veel leesplezier te wensen bij het lezen van dit verslag.

Johan Lanting

Inhoudsopgave

1 Inleiding ... *9*
1.2 Context ... 9
1.3 Onderzoeksvraag ... 10
1.4 Leeswijzer ... 12
2 Theoretisch kader ... *14*
2.1 Kennis ... 14
2.2 Onderwijs ... 15
2.3 Probleemaanpak ... 16
3 Methode ... *18*
3.1 Deelnemers en controlegroep ... 18
3.2 Materiaal ... 18
3.3 Procedure ... 29
3.4 Onderzoeksinstrumenten ... 29
3.5 Dataverzameling ... 30
3.6 Dataverwerking ... 31
3.7 Data analyse ... 31
4 Resultaten en conclusies ... *33*
4.1 Resultaten ... 33
4.2 Conclusie ... 33
5 Discussie en aanbevelingen voor vervolgonderzoek ... *34*
5.1 Discussie ... 34
5.2 Aanbevelingen voor vervolgonderzoek ... 37
6 Referenties ... *38*

Bijlagen

1 Literatuurstudie - samenvattingen ... *40*
1.1 Wetenschappelijk onderzoek ... 40
1.2 Veldonderzoek ... 50
1.3 Literatuur op het gebied van probleemaanpak ... 55
2 Experimentgroep en controlegroep ... *57*
3 Materiaal - lesmateriaal ... *58*
3.1 Ontwerp ... 58
3.2 Overzicht didactische onderdelen ... 58
3.3 Lesvoorbereidingen ... 60
3.4 Didactisch materiaal (selectie) ... 148
4 Onerzoeksinstrument - toets ... *178*
4.1 De afgenomen toets ... 178
4.2 De normering ... 185
5 Reflecties ... *192*
5.1 Lesreflecties ... 192
6 Resultaten ... *228*
6.1 Resultaten over de 100 minutentoets (experimentgroep) ... 228
6.2 Resultaten over de 50 minutentoets ... 228
6.3 Statistische verwerking en analyse ... 229

1 Inleiding

Dit verslag beschrijft mijn Onderzoek van Onderwijs. In het kader van het onderzoek van onderwijs is het de bedoeling om een ontwerponderzoek uit te voeren. Doel van dit onderzoek is om op didactisch gebied iets te ontwerpen, dit toe te passen en vervolgens te evalueren.

1.1.1 Aanleiding

Op het moment dat ik dit onderzoek moest uitvoeren, was ik reeds werkzaam als wiskundedocent op Sg Twickel aan de Wooldersweg in Hengelo. Het was voor mij een logische stap om na te gaan in hoeverre ik het onderzoek van onderwijs meteen in de praktijk kon brengen bij mij in de les. Ik had daarbij voor ogen dat het onderzoek zowel kon dienen als onderzoek van onderwijs, als dat het van waarde was voor de school waar ik werk. Deze twee doelstellingen kwamen mooi samen bij het meetkundeonderwijs in de HAVO bovenbouw.

Het was namelijk gebleken dat de leerlingen in het schooljaar 2009-2010 op het Centraal Examen opmerkelijk slechter hebben gescoord op het onderwerp meetkunde dan het landelijke gemiddelde. Graag zou de wiskundesectie dit in de toekomst verbeterd zien. De relatief slechte resultaten op het eindexamen staan niet op zich. Ook in Havo 4 wordt op het proefwerk over meetkunde verreweg het slechtst gescoord ten opzichte van de andere onderwerpen. Kortom, er is voldoende reden om actie te ondernemen deze prestaties op het gebied van meetkunde te verbeteren.

Ikzelf ben dit jaar als wiskundedocent verantwoordelijk voor het wiskunde onderwijs voor HAVO 4 wiskunde B. Ik heb aan dit niveau tot nog toe één jaar lesgegeven, namelijk in schooljaar 2008-2009. Dit schooljaar bestaat dit niveau uit één cluster bestaande uit 25 leerlingen. Als docent heb ik invloed op hoe ik de stof behandel. Daarom was er voor mij persoonlijk aanleiding om mijn te hanteren onderwijsaanpak voor dit hoofdstuk op een rij te zetten, te heroverwegen en nader uit te werken.

Daarmee komen twee activiteiten samen:

- als wiskundedocent mijn onderwijsaanpak voor de behandeling van het meetkundehoofdstuk voor HAVO 4 wiskunde B overdenken en nader uit te werken
- als student mijn onderzoek van onderwijs uitvoeren in het kader van mijn opleiding tot eerstegraads wiskundedocent.

1.2 Context

Het onderzoek vindt plaats op een scholengemeenschap voor het voortgezet onderwijs, waar les wordt gegeven aan onderbouw VMBO-T, HAVO en VWO en bovenbouw HAVO en VWO. Het betreft Sg Twickel, locatie Wooldersweg 130 in Hengelo.

Op Sg Twickel wordt de methode Getal en Ruimte, versie 2008, gebruikt. Het onderzoek heeft betrekking op de behandeling van het onderwerp meetkunde: hoofdstuk 2 in de methode.

Het onderzoek vindt plaats in het enige HAVO 4 wiskunde B cluster dat er in schooljaar 2010-2011 is.

1.3 Onderzoeksvraag

1.3.1 Totstandkoming van de onderzoeksvraag

Zoals eerder aangegeven, er is aanleiding om het onderwijs met betrekking tot meetkunde te heroverwegen. Maar hoe zou dan het onderwijs er *wel* uit moeten zien? Om deze vraag te beantwoorden, zijn eerst de mogelijke oorzaken voor de slechtere prestaties voor meetkunde onderzocht. Vervolgens is vanuit de bevindingen hiervan een hypothese opgesteld en een onderzoeksvraag geformuleerd.

De volgende stappen zijn ondernomen om na te gaan wat de mogelijke oorzaken zijn:

- Evaluatie binnen de wiskundesectie
- Evaluatie van de gebruikte methode

<u>Evaluatie binnen de wiskundesectie</u>
Binnen de wiskundesectie leeft het volgende beeld van mogelijke oorzaken:

- leerlingen onderschatten de stof en daardoor wordt te weinig tijd geïnvesteerd of niet goed genoeg geleerd

- leerlingen raken onvoldoende getraind doordat er veel soorten sommen met verschillende oplossingstrucs zijn en relatief weinig sommen om dit 'in te slijten'

- leerlingen zijn niet gewend aan dit soort wiskunde, zowel qua onderwerp (meetkunde) als de soort opgaven (minder algoritmisch)

<u>Methodeonderzoek</u>
De gebruikte methode Getal en Ruimte heeft een vaste structuur: een korte beschrijving van de theorie, een of twee voorbeelden en vervolgens opgaven om de theorie toe te passen. Deze opgaven zijn vaak eerst sterk lijkend op de voorbeelden, worden vervolgens moeilijker en bereiken uiteindelijk een afsluitend niveau met de zogenaamde afsluitende (A) opgaven.

Voor de overige hoofdstukken (dat wil zeggen: niet meetkunde) geldt dat de voorbeelden de leerlingen veel op weg helpen. Als een leerling het voorbeeld goed doorneemt en weet te doorgronden, dan kan hij of zij meestal met succes de eerste opgaven na het voorbeeld oplossen. Zoals gezegd, de opgaven worden wel steeds lastiger, maar de stapjes waarmee dit gebeurt zijn vrij klein en meestal door de leerling te nemen. Opgaven zijn in deze hoofdstukken herkenbaar en gaandeweg het maken van de opgaven 'slijt het in'.

In het hoofdstuk over meetkunde valt op dat niet alle belangrijke uitwerkingstructuren in voorbeelden zijn opgenomen. Een voorbeeld hiervan is het doorrekenen van een afgeknotte piramide. De leerling komt de afgeknotte piramide tegen bij de opgaven en moet dan voor zichzelf een strategie bedenken om dit door te rekenen, en vervolgens deze strategie nog netjes uitwerken ook. Leerlingen blijken vaak niet in staat dit zelf op te lossen en kijken vervolgens naar de uitwerkingen of vragen de docent om uitleg. In andere hoofdstukken zou de leerling hierover een voorbeeld hebben gezien en zou hij dit moeten reproduceren bij meerdere opgaven. Dit is een duidelijk verschil tussen het meetkundehoofdstuk en de andere hoofdstukken: de leerling moet bij de opgaven veel meer *produceren* dan *reproduceren*.

Om te kunnen *produceren*, is het natuurlijk noodzakelijk dat leerlingen de beschikking hebben over goed geordende en gemakkelijk toegankelijke *kennis* en *vaardigheden*. Om terug te komen op het voorbeeld van de afgeknotte piramide: voor het doordénken / doorrekenen hiervan is het nodig dat de leerling het concept van gelijkvormigheid beheerst: weten wat dit voorstelt, kunnen herkennen in situaties en weten hoe door te rekenen. Als een leerling de gelijkvormigheid herkent, kan hij middels 'ingesleten vaardigheden' de benodigde gegevens uitrekenen. Bij het zien van een afgeknotte piramide moet het idee van gelijkvormigheid dus wel getriggerd worden. In hoofdstuk 2 besteedt de methode Getal en Ruimte aan de theorie van gelijkvormigheid geen aandacht, ook niet bij het gedeelte over voorkennis, terwijl dit bij de opgaven wel benodigd is. De methode veronderstelt dus dat de kennis en vaardigheden die zijn opgedaan in de onderbouw direct oproepbaar zijn en dat leerlingen zich hiermee weten te redden.

Naast kennis moeten leerlingen ook beschikken over vaardigheden om problemen aan te pakken: *probleemaanpak heuristieken*. De methode Getal en Ruimte besteedt hier niet expliciet aandacht aan, terwijl dit juist heel belangrijk is als leerlingen bij de opgaven juist meer moeten produceren dan reproduceren.

Ten slotte valt op dat de samenvattingen na elke paragraaf slechts een gedeeltelijke *coverage* hebben, niet gaan over probleemaanpak en de sof in de paragraaf niet overstijgt: er is geen reflectie over de stof en de gemaakte opgaven. De samenvattingen zetten leerlingen op het verkeerd been; want aan de samenvattingen hebben (qua theorie) zeker niet genoeg.

Slotsom
Naar mijn idee is de methode Getal en Ruimte *alleen* voor het onderwerp meetkunde niet voldoende. Voor andere hoofdstukken geldt dit wellicht ook in enige mate, maar bij het hoofdstuk over meetkunde is dit nog veel sterker het geval. De docent heeft hier duidelijk iets toe te voegen en dan met name op het gebied van:

- Actief opfrissen relevante voorkennis
- Expliciteren van de stof (kennis en vaardigheden)
- Waar mogelijk uitwerkingsalgoritmes aanbieden
- Probleemaanpak heuristieken aanbieden

1.3.2 Hypothesevorming

Op grond van de hiervoor beschreven analyse, kwam de volgende gedachte tot stand. Zou het een idee zijn om de leemtes die worden ervaren in de methode Getal en Ruimte bij het meetkunde hoofdstuk, aan te vullen? Bij deze leemtes denk ik dan vooral aan het gebrek aan een expliciet overzicht van wat een leerling zou moeten beheersen, aan stappenplannen en aan oplossingsstrategieën. Zou hierdoor het mogelijk zijn om in de korte tijd die voor dit onderwerp gepland staat, de leerling de vele stof te laten beheersen zodanig dat hij tot betere prestaties komt?

De vraag is dan wel: hoe zorg je ervoor dat de leerling een duidelijk overzicht hiervan krijgt, zodanig dat hij hierop terug kan vallen bij het maken van opgaven en kan leren voor een proefwerk? Het antwoord hierop werd gevonden in de sfeer van het aloude formuleboekje van vroeger: alle aanvullende stof, alsmede aanvullende samenhangen van wat wel als losse onderdelen wordt beschreven in Getal en Ruimte, waarvan ik als docent vindt dat de leerlingen dit moeten kennen en kunnen wordt door leerlingen vastgelegd op zogenaamde *kennisbladen*.

1.3.3 Onderzoeksvraag

Op basis van voorgaande is gekomen tot de volgende onderzoeksvraag:

> *Leidt voor het onderwerp meetkunde een didactiek gericht op het expliciteren van kennis en vaardigheden, stappenplannen en probleemaanpak strategieën - waarbij leerlingen dit vastleggen op kennisbladen – tot hogere cijfers op het proefwerk?*

1.4 Leeswijzer

Dit document is als volgt opgebouwd. In dit hoofdstuk heeft u de onderzoeksvraag kunnen lezen en hoe deze tot stand gekomen is. Deze onderzoeksvraag was het startpunt voor dit onderzoek.

In hoofdstuk 2 wordt de theoretische basis gelegd aan de hand van een literatuuronderzoek. Op basis hiervan worden eisen geformuleerd voor de te ontwikkelen didactiek en het bijbehorende lesmateriaal.

Het ontwerp van het lesmateriaal zelf is beschreven in hoofdstuk 3, paragraaf 3.2. In dat hoofdstuk wordt een vertaalslag gemaakt van de eisen die zijn verkregen uit het literatuuronderzoek naar het concrete lesmateriaal en wordt dus antwoord gegeven op de vraag waarom besloten is voor de inzet van kennisbladen.

Hoofdstuk 3 beschrijft de onderzoeksmethode die gevolgd is in dit onderzoek. Er wordt beschreven op basis waarvan conclusies zullen worden getrokken.

Hoofdstuk 4 beschrijft de resultaten die zijn verkregen en worden hieruit conclusies getrokken.

Ten slotte wordt in hoofdstuk 5 het gehele onderzoek nabeschouwd, de resultaten nader bediscussieerd en wordt nagegaan in hoeverre er aanleiding is voor vervolgonderzoek.

In hoofdstuk 6 vindt u een overzicht van de literatuur dat in dit onderzoek is gebruikt en waarnaar in dit verslag wordt gerefereerd. De hoofdstukken daarna zijn bijlagen en geven aanvullende en achterliggende informatie. In de tekst van hoofdstukken 2 tot en met 5 wordt hiernaar verwezen.

2 Theoretisch kader

Voor dit Onderzoek van Onderwijs is een literatuurstudie uitgevoerd om een theoretische basis te leggen voor dit onderzoek. In hoofdstuk 3 (paragraaf 3.2) worden op basis hiervan uitgangspunten geformuleerd voor het ontwerp van het didactische materiaal.

In de literatuur is naar antwoord gezocht op de vragen wat voor soort kennis benodigd is bij het beoefenen van wiskunde en hoe deze kennis het beste aangebracht kan worden. Verder is onderzocht welke specifieke eisen gesteld kunnen worden aan een specifieke havo wiskunde b didactiek.

Van elke bron is eerst een samenvatting gemaakt. Deze samenvattingen zijn opgenomen als bijlage in bijlage 1. Dit hoofdstuk beschrijft het eindresultaat van de literatuurstudie in de vorm van een theoretisch kader.

2.1 Kennis

Er is veel onderzoek gedaan naar de kennis die en het begrip dat men opdoet bij wiskunde. Een onderscheid dat veel wordt gemaakt is het onderscheid tussen instrumentaal en relationeel begrip (Skemp, 1976). In het kort komt het erop neer dat iemand over instrumenteel begrip beschikt als hij of zij een algoritme of een regel kan toepassen. Als deze persoon ook nog begrijpt waarom een dergelijke regel mag worden toegepast, is er sprak van relationeel begrip. In de onderwijspraktijk praten leerlingen en docenten soms langs elkaar, omdat ze tegelijkertijd vanuit een instrumenteel dan wel een relationeel kader praten en denken. In (Skemp, 1976) wordt duidelijk de voorkeur gegeven aan relationeel begrip, in lijn met waar wiskunde voor staat. Een van de voordelen van relationeel onderwijs is dat de verkregen inzichten toepasbaar zijn in nieuwe taken en dat dus transfer wordt bevorderd. Dit wordt bevestigd in onderzoek in Maleisië (Simpson, Zakaria, 2004) waarin is gebleken dat chemiestudenten die over relationeel begrip beschikken, beter in staat zijn om wiskundige principes toe te passen in het chemische domein. Een ander voordeel van relationeel begrip is dat resultaten gemakkelijker en dus langer te onthouden zijn.

Toch zijn er redenen aan te voren waarom veel leerlingen en ook sommige docenten de voorkeur geven aan instrumenteel onderwijs, vaak om de reden dat op korte termijn met minder inspanning meer resultaat te behalen is. De resultaten worden ook sneller behaald. Als het wiskundeprogramma dan ook nog overladen is, is de keus snel gemaakt (Skemp, 1976).

Het onderscheid tussen relationele en instrumentele kennis is soms erg lastig te maken. In (Tall, Gray, Bin Ali, Crowley, DeMarois,
McGowen, Pitta, Pinto, Thomas & Yusof, 2001), wordt daarom de notie van een *procept* geïntroduceerd: een wiskundig object kan enerzijds worden opgevat als een resultaat van een bewerking en anderzijds als een losstaande (te manipuleren) entiteit. Het kan worden opgevat als de mentale brug tussen conceptuele en instrumentele kennis (Engelbrecht, Bergsten & Owe Kågesten, 2009). Daarnaast doet Tall in (Tall, 2010) het voorstel om naast instrumentele en relationele kennis en de notie van de procept, nog een type kennis te

introduceren: het crystalliene concept, waarmee het abstractieproces in de wiskunde een plek wordt gegeven.

De leertheorie van Van Hiele (Freudenthal Instituut, 2009) gaat er vanuit dat bij het leren van een nieuw wiskundig concept een aantal elkaar opvolgende fasen of zogenaamde niveaus wordt doorlopen, waarbij een steeds 'rijkere vorm' van denken over dit concept wordt bereikt. Het wiskundeonderwijs moet met deze niveaus rekening houden, simpel gezegd: concreet beginnen en abstract eindigen.

Met elke uitbreiding van het kennismodel, kan in meer detail worden aangegeven om wat voor soort kennis het gaat in de wiskunde. Maar met elke uitbreiding wordt het model wel complexer en ontstaan er allerlei verbanden tussen de verschillende onderdelen in het model. Daarnaast is het zelfs voor relatief simpele modellen moeilijk aan te geven hoe de vorming van deze soorten kennis precies zou kunnen verlopen. In (Engelbrecht et al., 2009) wordt gesteld dat de verschillende soorten kennis niet apart van elkaar en stap-voor-stap, maar tegelijkertijd parallel worden gevormd in een dynamisch proces. Het gaat kortom om een geïntegreerde kijk op de dynamiek tussen de verschillende soorten kennis. Het onderscheid tussen de verschillende soorten kennis is verder niet absoluut, maar hangt af van de ervaring af van de betrokkenen (Engelbrecht et al., 2009).

Naast kennis, wordt ook vaak gesproken over vaardigheden zoals bijvoorbeeld intuïtie in de meetkunde: een mentale vaardigheid om platte en ruimtefiguren voor te stellen in het hoofd en er bewerkingen op uit te voeren (Fujita, Jones, & Yamamoto, 2004). Dat wiskundedidactiek en het onderzoek hiernaar reeds een lange historie kent, blijkt wel uit het feit dat meer dan honderd jaar geleden reeds werd nagedacht over de rol van intuïtie binnen de meetkunde en hoe dit bij leerlingen te ontwikkelen. Er zijn in die tijd nieuwe wiskunde meetkundemethoden ontwikkeld en gebruikt waarbij de rol van intuïtie een grote rol innam. Er is in die tijd echter niet gestructureerd wetenschappelijk onderzoek gedaan naar de effecten van deze methoden.

Kortom, het onderzoek naar kennis en de leerprocessen die daarbij spelen is complex en de inzichten kent een lange historie. Er zijn veel inzichten verkregen en deze worden steeds verder uitgebreid en verfijnd. Echter, het onderzoek naar wiskundige kennis en de gerelateerde leerprocessen, is nog lang niet afgerond: "...there is still a long way to go" (Gutiérrez, 1996).

2.2 Onderwijs

In de vorige paragraaf kwam naast kennis ook de leerprocessen (om te komen tot deze kennis) al kort aan de orde. In deze paragraaf wordt in meer detail ingegaan op deze leerprocessen. Daarnaast, wiskunde leren vindt in de praktijk plaats in een klaslokaal (of thuis bij het huiswerk maken); er is dus niet echt sprake van een laboratorium-*setting* en zijn er allerlei andere factoren die mee een rol spelen bij het leren van wiskunde. Ook op deze factoren wordt in deze paragraaf nader ingegaan.

Zoals in de vorige paragraaf beschreven, zijn er veel redenen aan te wijzen om in het wiskundeonderwijs vooral te richten op relationele wiskunde. Toch blijkt dat ondanks alle goede bedoelingen die er bij een docent zijn om dit zo te doen, de praktijk weerbarstiger.

Leerlingen blijken over het algemeen een sterke voorkeur te hebben voor instrumentele wiskunde (Sierpinska, 2007). Een van de (vele) redenen die hiervoor aangevoerd wordt, is dat leerlingen vaak praktisch georiënteerd zijn en dus vooral gefocust zijn op het oplossen van concrete problemen. Leerlingen zijn veel minder gericht op het reflecteren over variaties op de specifieke vraagstelling (Sierpinska, 2007). Ook zijn leerlingen wellicht gevoelig voor het beloningsaspect: een goed antwoord en daarmee de beloning op een specifieke opgave is snel en zichtbaar (Skemp, 1976). Verder kan het belang van de relationele wiskunde wellicht genuanceerd worden. Zouden alle grote investeringen die gepaard zouden gaan met het volledig inpassen van relationele wiskunde wel tot betere resultaten leiden (Sierpinska, 2007)?

Ook is het goed om te kijken naar *de leerlingen* die wiskunde leren. Dit Onderzoek van Onderwijs vindt plaats in een havo4 wiskunde b klas en is daarmee een andere groep leerlingen als bijvoorbeeld een groep vwo wiskunde b leerlingen. Leerprocessen en lesactiviteiten moeten daarop afgestemd worden.

Uit onderzoek is gebleken dat havo leerlingen over het algemeen productgericht zijn en hun motivatie halen uit op korte termijn resultaten. Het zijn meer ‘doeners’ en ‘beslissers’ dan ‘denkers’ (Kolb leerstijlen) (Oomens, 2008). Verder is uit onderzoek gebleken dat havo leerlingen over minder cognitieve vaardigheden bezitten dan vwo leerlingen. Ze hebben minder abstraherend vermogen en de snelheid van leren is lager. Ook blijkt dat ze oppervlakkiger reflecteren en sneller tevreden zijn met een antwoord (Michels, 2006).

Om tegemoet te komen aan de ’doener’ leerstijl van de havist, zou een havo didactiek activerende werkvormen moeten bevatten (Oomens, 2008) (Vermaas, 2007). Voorbeeld: oude stof moet actief herhaald worden in plaats van worden aangestipt (Michels, 2006). Naast activerende werkvormen, zou een ideale havo didactiek zich moeten richten op het prikkelen, uitdagen, en cognitief activeren van leerlingen (Hamer, 2010).

Havisten blijken verder gevoelig voor de relatie met de docent, een veilige sfeer in de klas en een positieve stimulerende houding van de docent. Een docent dient hier rekening mee te houden bij het scheppen van het juiste pedagogische klimaat (Hamer, 2010).

2.3 Probleemaanpak

Het wiskundige onderwerp in dit Onderzoek van Onderwijs is meetkunde. Meetkunde op de havo is het doordenken doorrekenen van meetkundige figuren. Het is daarmee anders dan meetkunde op het vwo, waar meetkunde ook neer komt op het formuleren van vermoedens en deze bewijzen.

Om meetkundige opgaven te maken, moeten leerlingen de meetkundige figuren goed doorzien, een plan maken hoe de opgave op te lossen en dit plan vervolgens uitwerken. Het opstellen van dit plan is voor leerlingen lastig en daarom is het goed om leerlingen handreikingen te bieden die hen daarbij kunnen helpen.

Polya wordt beschouwd als een van de grondleggers van een systematische probleemaanpak. Hij heeft in (Polya, 1957), een standaardwerk op dit gebied, uiteengezet welke oplossingsstrategieën gehanteerd kunnen worden bij het oplossen van problemen. In vogelvlucht waar het werk van Polya op neer komt.

Polya stelt dat bij het oplossen van problemen, je 4 fasen doorloopt: begrijpen wat gevraagd wordt, een plan opstellen, het plan uitvoren, en terugblikken. Bij elke fase heeft Polya heuristieken opgesteld die je kunnen helpen als je vastloopt.

Om het probleem te begrijpen, is het raadzaam het gevraagde en de gegevens op een rij te zetten in een bruikbare notatie, eventueel aangevuld met een tekening.

Om een plan op te stellen, kan het helpen je bewust de vraag te stellen of je een dergelijk probleem al eerder hebt gezien. Zo ja, dan kun je het resultaat daarvan of de oplossingsmethode wellicht hergebruiken. Als het probleem nieuw voor je is, ga je na of er stellingen zijn die van toepassing zijn, ga je systematisch na wat je wel kunt berekenen aan de hand van de gegevens, of ga je juist na welke gegevens je nodig hebt om het gevraagd uit te rekenen.

Is een plan eenmaal opgesteld, dan werk je dit plan uit, waarbij je in elke uitwerkingsstap je nagaat of deze correct is.

Als je de oplossing hebt gevonden, dan blik je terug om na te gaan of de oplossing correct is.

3 Methode

Dit hoofdstuk beschrijft hoe het onderzoek is uitgevoerd. De verschillende onderzoeksactiviteiten zijn in aparte paragrafen beschreven.

Onderzoeksactiviteit	*Beschreven in*
Bepalen deelnemers en controlegroep	3.1
Ontwerp en ontwikkeling van het materiaal	3.2
Inzet van het materiaal bij de experimentgroep (procedure)	3.3
Definiëren onderzoeksinstrumenten Ontwerp en ontwikkeling van de toets	3.4
Afnemen van de toets -> dataverzameling	3.5
Verwerken van de dataverzameling -> onderzoeksinformatie	3.6
Analyse van de onderzoeksinformatie	3.7

3.1 Deelnemers en controlegroep

deelnemers

Zoals beschreven in paragraaf 1.2 wordt het onderzoek uitgevoerd in het enige wiskunde B cluster van HAVO 4. De deelnemers aan dit onderzoek bestaan dus uit de leerlingen van dit cluster (specifiek het cluster H4A wisB5). In dit verslag zal naar de leerlingen uit dit cluster worden gerefereerd als de *experimentgroep*.

Controlegroep

Zoals gezegd is er dit schooljaar slechts één wiskunde B cluster. Het is dus niet mogelijk om een parallel cluster als controlegroep te nemen. Daarom is er voor gekozen om het wiskunde B cluster uit het voorgaande schooljaar als controlegroep te nemen.

In bijlage 2 is op basis van een vergelijking van beide groepen naar een aantal bepalende kenmerken geconcludeerd dat het cluster van vorig jaar terecht als controlegroep kan worden genomen.

3.2 Materiaal

Deze sectie beschrijft de vertaalslag van de resultaten van de literatuurstudie naar het ontwikkelde materiaal van mijn Onderzoek van Onderwijs. Hierbij geef ik er een eigen, naar mijn idee terechte, interpretatie aan. Het resultaat hiervan is input voor mijn lesontwerp.

De literatuur is duidelijk: wiskundeonderwijs dient zich te richten op relationele wiskunde, waarbij begrip, generalisatie en abstractie centraal staan. Leerlingen verkrijgen op die manier breder inzetbare vaardigheden en stelt hen beter in staat deze toe te passen in nieuwe toepassingsgebieden.

Relationele wiskunde is in de praktijk wel lastig(er) om uit te voeren. Er gaat, zeker in het begin, meer tijd mee gemoeid omdat er (eerst) meer stof bijkomt en de stof diepgaander is. De beloning is meer op de lange termijn, terwijl leerlingen op de kort termijn vaak beloond willen worden voor hun inspanning.

Relationele wiskunde sluit ook niet altijd 'van nature' aan bij de leerlingen. Een leerling met een 'denkende' leerstijl zal gemakkelijker open staan voor de relationele wiskunde. Een havist met een typische 'doener' leerstijl zal zich hier minder te aangesproken voelen. Havisten zijn verder op de korte termijn gericht en willen graag een snelle beloning. Ze willen aan de gang! Ook de cognitieve vermogens maken het voor hen lastiger om denkstappen te volgen. De inspanning die ze hiervoor moeten leveren, willen ze graag direct beloond zien doordat ze bijvoorbeeld eenvoudiger een opgave kunnen oplossen. Als een dergelijke beloning uitblijft, werkt dit voor hen demotiverend.

Het reflecteren over de stof vinden leerlingen in het algemeen, maar havisten vooral, erg lastig. Toch maak je juist met deze mentale activiteit een flinke stap. Het reflecteren over de stof moet wel een zo direct mogelijke link hebben met de opgaven die ze moeten oplossen; er moet wel een beloning zijn.

Generieke vaardigheden als de oplossingsheuristieken van Polya (Polya, 1957), liggen voor havisten gevoelsmatig ver af van de concrete opgaven die ze moeten oplossen. Daarom moeten deze heuristieken concreet gemaakt worden en gemakkelijk te hanteren. De opgaven die op de havo gemaakt moeten worden, zijn voor de leerlingen zelf wellicht steeds weer anders, maar voor meer ervaren wiskundigen komen ze toch veel op het zelfde neer. Het reflecteren over de gemaakte opgaven kan hier duidelijk vruchten afwerpen. Op deze manier kunnen ze een heuristiek als 'heb ik het probleem eerder gezien en hoe heb ik dit opgelost' beter hanteren.

Het is een feit dat het havo wiskunde b programma door betrokken docenten als overladen wordt ervaren. Lees er de Wiskunde-E brieven maar op na. Het is de vraag of de winst die je met relationele wiskunde zou kunnen behalen, nog binnen de havo schoolloopbaan van leerlingen ligt. Je moet dus zeer goed nadenken welke relationele wiskunde onderdelen je toch zou willen inpassen. Gevoelsmatig ligt het voor mij vooral in de richting van het plausibel maken van formules, zodat deze 'met meer wiskundig gevoel' in te zetten zijn en tevens gemakkelijker te onthouden.

Gezien het voorgaande, zou een didactiek die ik voor dit onderzoek wil hanteren, moeten voldoen aan de volgende eisen. De tabel is als volgt opgebouwd: per regel in de tabel is in de eerste kolom een identificatie opgenomen, in de tweede kolom een omschrijving, in de derde kolom een verwijzing naar de literatuur.

eis	*omschrijving*	*literatuurverwijzing*
E-1	leerlingen zijn mentaal actief en leren door aan het werk te zijn	Oomens, 2008 Michels, 2006 Hamer, 2010

E-2	het is voor leerlingen geëxpliciteerd wat geleerd moet zijn	Sierpinska, 2007
E-3	reflecteren over gemaakte opgaven	Sierpinska, 2007
E-4	het logisch en inzichtelijk maken van formules voor de leerlingen	Skemp, 1976 Sierpinska, 2007

3.2.1 Ontwerp

In de voorgaande paragraaf zijn vanuit de literatuur eisen geformuleerd aan de te volgen didactiek. Naast deze eisen zijn er uiteraard randvoorwaarden en aanvullende eisen vanuit de onderwijspraktijk.

Op basis hiervan heb ik persoonlijke afwegingen gemaakt bij het ontwerpen van het onderwijs. Deze afwegingen zijn persoonlijk en vandaar dat ik deze tekst vanuit dit persoonlijke perspectief schrijf en ervoor kies om de ik-vorm te gebruiken in de tekst.

Bij het beschrijven van het ontwerp van het materiaal beperk ik me tot de meest relevante randvoorwaarden en aanvullende eisen. Ik benoem dus juist die randvoorwaarden en eisen die het ontworpen onderwijs het meeste hebben bepaald. Hetzelfde geldt voor de ontwerpafwegingen die ik heb gemaakt. Juist die afwegingen heb ik beschreven, die het meest bepalend zijn geweest voor de ontwikkelde lesaanpak.

Tenslotte, ik beperk me tot een beschrijving van het ontwerpproces en een globale inhoudelijke uitwerking hiervan. Voor een gedetailleerde beschrijving van het onderwijsmateriaal, zie bijlage 3.

In sectie 3.2.1.1 beschrijf ik de randvoorwaarden, in sectie 3.2.1.2 komen de aanvullende eisen aan bod. In secties 3.2.2, 3.2.3 en 3.2.4 beschrijf ik de ontwerpafwegingen voor respectievelijk de kennisbladen, kegelonderzoek en reflecties.

3.2.1.1 Randvoorwaarden

Ik heb de volgende randvoorwaarden geformuleerd. Deze randvoorwaarden gaan in op de praktische kant van het onderwijs: het onderwijs vindt nu eenmaal plaats als onderdeel van de reguliere lessen en niet in een laboratorium-*setting*. De tabel is als volgt opgebouwd: per regel in de tabel is in de eerste kolom een identificatie opgenomen, in de tweede kolom een omschrijving. De tabel is als volgt opgebouwd: per regel in de tabel is in de eerste kolom een identificatie opgenomen, in de tweede kolom een omschrijving.

nr	*omschrijving*
R-1	De lesstof dient in 16 lessen behandeld te worden
R-2	Leerlingen moeten vertrouwen hebben in de lesaanpak

R-3	De lesaanpak moet passen bij mij als persoon
R-4	De 'school' (overige wiskundesectieleden, schoolleiding) moet vertrouwen hebben in de gekozen aanpak

Deze randvoorwaarden worden hieronder toegelicht.

R-1: De lesstof dient in 16 lessen behandeld te worden
De behandeling van hoofdstuk 2 uit Getal en Ruimte is gepland om in 16 lessen behandeld te worden. De jaarplanning is zodanig opgesteld dat er geen ruimte is om meer lessen ervoor uit te trekken.

Binnen de periode van 16 lessen is er op zich ruimte om de planning zoals die bij aanvang van het schooljaar is opgesteld aan te passen.

R-2: Leerlingen moeten vertrouwen hebben in de lesaanpak
De klas en ikzelf als docent hebben bij aanvang van dit onderzoek ongeveer één maand met elkaar gewerkt. Daarmee hebben docent en leerlingen nog slechts een beperkte vertrouwensband met elkaar opgebouwd. Om leerlingen 'mee te krijgen' als docent, moeten de leerlingen vertrouwen hebben in mij als docent. Daarmee bedoel ik: leerlingen moeten mij kunnen vertrouwen dat ik verantwoorde en geschikte keuzes maakt ten aanzien van de aanpak van de lessen. Kortom, een docent die ervoor zorgt dat ze het gaan snappen, de sommen kunnen maken en uiteindelijk een mooi cijfer gaan halen op de toets.

Mijn eigen beeld van de relatie die de klas (de leerlingen) en ik (de docent) met elkaar hebben, is dat de klas mij vertrouwt. Zonder noemenswaardige druk kan ik de leerlingen in de les die activiteiten laten uitvoeren die ik van te voren me heb voorgenomen. Hierin ben ik sterk sturend. Ik als docent bepaal gedurende de gehele les op welke manier de leerlingen met welk deel van de stof bezig zijn. Dit is sterk afwijkend van de reguliere wiskundelessen die ze zijn gewend vanuit de onderbouw of de ervaring die ze als zittenblijver hebben in de bovenbouw. Toch durf ik te stellen dat de leerlingen dit prettig vinden en dat ze zich graag bij de hand laten nemen door mij als docent. Er is een prettig werkklimaat en er wordt ook goed gewerkt.

Toch is dit een situatie die in slechts 1 maand gevormd is. Ik moet als docent zorgvuldig mijn handelen kiezen om het vertrouwen niet te schaden en juist de band verder te versterken. Kortom: de speelruimte die ik heb als docent om de les eventueel geheel anders aan te pakken dan dat ze wellicht gewend zijn van mij of van eerdere wiskunde les ervaringen, is beperkt.

R-3: De lesaanpak moet passen bij mij als persoon
Mijn handelen in de klas moet bij mij passen als persoon. De lesaanpak en de persoon die de lesaanpak moet toepassen kunnen naar mijn idee niet los van elkaar gezien worden. Dit is misschien een open deur en misschien ook een dooddoener, maar het is naar mijn idee misschien wel de meest bepalende eis / randvoorwaarde voor de te ontwerpen lesaanpak.

R-4: De 'school' (overige wiskundesektieleden, schoolleiding) moet vertrouwen hebben in de gekozen aanpak
Zoals eerder beschreven, dit onderzoek vindt plaats gedurende het reguliere wiskundeonderwijs. De school heeft een verantwoordelijkheid richting de leerlingen om goed onderwijs te geven en de leerlingen goed voor te bereiden op het eindexamen. Leerlingen mogen hierop ook vertrouwen.

Ik vind daarom dat ik niet geheel *out-of-the-box* het onderwijs helemaal anders kan aanpakken dan wat 'men gewend is op school'. Zonder een oordeel te vellen over of de huidige schoolaanpak goed of fout is, het is realiteit en het zorgt voor een zekere voorspelbaarheid van de prestaties. Nu is de aanleiding voor dit onderzoek natuurlijk de slechte leerprestaties en je kunt je natuurlijk afvragen of je het niet anders moet gaan aanpakken. Ja, ik denk dat het anders moet worden aangepakt. Maar er zit een zekere rek in wat je als docent anders kunt doen dan wat gangbaar is.

3.2.1.2 Aanvullende eisen

Ik heb voor mezelf de volgende aanvullende eisen geformuleerd. De tabel is als volgt opgebouwd: per regel in de tabel is in de eerste kolom een identificatie opgenomen, in de tweede kolom een omschrijving.

eis	*Omschrijving*
E-5	leerlingen hebben een naslagwerk om te leren
E-6	de leerdoelen kunnen efficiënt worden behaald

Deze aanvullende eisen zijn hieronder toegelicht.

E-5: Leerlingen hebben een naslagwerk om te leren
Additioneel behandelde stof moet als naslagwerk voor leerlingen beschikbaar zijn. Tijdens de les zou een leerling stof kunnen begrijpen en gedurende de les kunnen onthouden, dat wil niet zeggen dat de leerling dit langdurig onthoudt. Een leerling moet kortom in staat zijn zich goed voor te bereiden op het proefwerk. Daarvoor is concreet materiaal nodig: aantekeningen, een print, tekst op een elektronische leeromgeving, etc.

Hierbij moet ik terugdenken aan de wiskundedocent en -sectieleider van de bovenbouw HAVO en VWO Marc Roelofs van het Carmel College in Oldenzaal. In het begin van mijn opleiding tot wiskundedocent heb ik stage gelopen op deze school en hij was daarbij mijn stagebegeleider. Ik zie Marc Roelofs als een zeer capabele wiskundedocent, heb indertijd enorm veel van hem geleerd en achteraf gezien heeft hij veel invloed gehad op mijn professionele ontwikkeling.

Zo kan ik me nog herinneren dat hij en ik met elkaar praatten over de afwegingen die je als school maakt bij de keuze voor een wiskundemethode. Ik kan me herinneren dat hij vertelde dat ze jaren geleden voor Getal en Ruimte hadden gekozen en dat deze methode goed beviel. Hij was van mening dat vanuit didactisch oogpunt er methoden beschikbaar waren die misschien wel iets meer verantwoord waren. Maar naar zijn mening hadden deze methoden een aantal

belangrijke bezwaren ten opzichte van de methode Getal en Ruimte. Eén van die bezwaren was dat deze methoden geen duidelijke overzichten hadden die voor leerlingen op een rij zetten wat nu eigenlijk geleerd moest zijn. Deze expliciteringen waren naar zijn mening juist erg waardevol en leerlingen moesten in staat zijn om deze erop na te slaan.

Met betrekking tot dit onderzoek van onderwijs, is nu juist dit laatste een aandachtspunt. In de lessen zal ik juist *aanvullende* zaken gaan behandelen met de leerlingen; zaken die juist net *niet* in de methode Getal en Ruimte staan.

E-6: Leerdoelen kunnen efficiënt worden behaald
Zoals eerder beschreven als randvoorwaarde, de stof dient in 16 weken behandeld te zijn en de leerlingen moeten dan klaar zijn voor de toets.

Op basis van de hoeveelheid stof alsmede de complexiteit daarvan (zie hoofdstuk 1), kan van tevoren al gesteld worden dat de planning krap is. Lessen moeten daarom zeer goed doordacht zijn om ervoor te zorgen dat je zo efficiënt mogelijk zoveel mogelijk bereikt. Concreet houdt dit in dat ik de leerlingen met activiteiten bezig wil hebben, die ervoor zorgen dat ze zinvol mentaal bezig zijn. Dus niet: eerst van alles overnemen van het bord en pas daarna met datgene wat overgeschreven is, aan de slag gaan. Dat zijn verloren minuten die ook anders besteed hadden kunnen worden. Leerlingen moeten zo snel mogelijk zo zinvol mogelijk bezig zijn. Al het voorbereidende werk daarvoor moet zo kort mogelijk zijn in de les.

3.2.2 Ontwerpafwegingen: kennisbladen

Op basis van de eisen uit de literatuur en de aanvullende randvoorwaarden (sectie 3.2.1.1) en eisen (sectie 3.2.1.2) moet het onderwijs ontworpen worden. Hierbij moeten afwegingen gemaakt worden tussen strijdige eisen en randvoorwaarden en moet uiteindelijk een keus worden gemaakt hoe de lessen concreet aan te pakken.

Met name de volgende randvoorwaarden en eisen zijn sterk bepalend geweest voor de keuze voor het gebruik van de kennisbladen. De tabel is als volgt opgebouwd: per regel in de tabel is in de eerste kolom een identificatie opgenomen, in de tweede kolom een omschrijving.

R-1	De lesstof dient in 16 lessen behandeld te worden
E-1	leerlingen zijn mentaal actief en leren door aan het werk te zijn
E-5	Leerlingen hebben een naslagwerk om te leren
E-6	De leerdoelen kunnen efficiënt worden behaald

Met het oog op deze randvoorwaarden en eisen, is de vraag die ik me gesteld heb, de volgende. Ik ga een aantal zaken extra toevoegen ten opzichte van de methode Getal en Ruimte; maar

hoe kan ik er nu voor zorgen dat met voor leerlingen minimale voorbereidingstijd ***in*** de les, leerlingen zo actief mogelijk met de stof aan de gang zijn en dat verkregen inzichten tijdens deze activiteiten op de een of andere manier worden vastgelegd zodat ze later als naslagwerk geraadpleegd kunnen worden?

Het antwoord op deze vraag heb ik gevonden in efficiënt ingerichte centraal geleide lesactiviteiten, ondersteund met daarop specifiek op-maat ontwikkelde kennisbladen.

Het woord kennisblad is wellicht een beetje misleidend. Behalve dat er opgedane kennis op wordt vastgelegd, zou je het ook kunnen opvatten als een soort werkboek waar leerlingen mee werken. De kennisbladen zijn ontworpen als geïntegreerd onderdeel van het (leer)proces in de klas. De kennisbladen worden aan leerlingen uitgedeeld wanneer deze benodigd zijn. Op deze kennisbladen zijn reeds figuren en teksten aangebracht. De figuren en eventuele teksten zijn reeds aangebracht om een aantal redenen:

- Leerlingen kunnen meteen vanuit een bepaalde beginsituatie aan de gang en hoeven daarvoor niet eerst gedurende bijvoorbeeld 5 minuten eerst iets over te nemen van het bord. Hiermee wordt belangrijke tijdwinst gehaald.
- De figuren en teksten geven een voorstructurering; hierdoor wordt er bijvoorbeeld voor gezorgd dat er voldoende ruimte is voor leerlingen om zaken vast te leggen. Er hoeft bijvoorbeeld niet halverwege 'gepriegeld' te worden omdat er plotseling geen ruimte meer is op de bladzijde in het schrift.

Hoe wordt een kennisblad gebruikt in de klas? Leerlingen worden in de klas aangestuurd om gedurende een bepaalde tijd een activiteit met het kennisblad uit te voeren. Vervolgens vindt er een centrale bespreking plaats en kunnen leerlingen hun kennisblad aanvullen met de inzichten uit de bespreking. Leerlingen kunnen zo meteen aan de slag, en hebben ze zich alleen bezig gehouden met die activiteiten die 'inzicht waardetoevoegend' waren. Na de les zijn de inzichten vastgelegd en kunnen ze dat later er op naslaan. Zie het voorbeeld hieronder om het concreet te maken

<u>Voorbeeld</u>
In de eerste lessen wordt de stof uit de onderbouw met betrekking tot de vlakke meetkunde actief herhaald. Eén van de onderwerpen betreft de vlakke figuren met de bijbehorende oppervlakteformules. Om oppervlakteberekeningen te kunnen maken in de vlakke meetkunde, is het uiteraard vereist dat je de standaard vlakke meetkundefiguren kent, alsmede de bijbehorende oppervlakteformules. Het onderwijs om de oppervlakteformules te herhalen, is als volgt ontworpen.

Een kennisblad is specifiek hiervoor ontwikkeld. Op dit kennisblad is reeds een overzicht gemaakt van alle vlakke figuren die de leerlingen moeten beheersen. Deze zijn zodanig op het kennisblad geplaatst dat er voldoende ruimte is om later bij te schrijven. Bij aanvang van de les is dit kennisblad beschikbaar voor de leerlingen om mee te werken. In de les worden leerlingen door mij aangestuurd om na te denken over de *eigenschappen* van (een selectie van) figuren. Ze moeten bijvoorbeeld bedenken dat een vierkant 4 rechte hoeken heeft, 4 gelijke zijden en dat de overstaande zijden evenwijdig zijn. Als ze hier zo'n 2 minuten over hebben nagedacht, wordt het centraal besproken. Leerlingen vertellen wat ze hebben bedacht en zonodig wordt dit door mij (eventueel centraal geleid) aangevuld. Op het bord is het kennisblad geprojecteerd en kan ik aangeven in de figuur hoe je deze eigenschappen aangeeft: rechte hoeksymbolen, evenwijdigheidsymbolen, etc. Vervolgens stuur ik de klas aan dat ze dit in de figuur moeten aanbrengen en dat ze vervolgens voor de volgende figuren op het kennisblad deze ook moeten aanbrengen. Dit wordt dan later weer centraal besproken. Op vergelijkbare wijze worden de oppervlakteformules en de intuïtieve bewijzen hiervoor behandeld. Deze formules met bijbehorende intuïtieve bewijzen leggen leerlingen zelf vast op het kennisblad.

Na afloop van de les hebben leerlingen een helder overzicht van de vlakke meetkunde, wat ze als naslagwerk kunnen gebruiken of (indien nodig) als overzicht om van te leren.

In dit voorbeeld wordt beschreven dat leerlingen dus mentaal zeer actief zijn en centraal aangebrachte theoretische expliciteringen *zelf* vastleggen. Ik persoonlijk vind het zeer waardevol dat leerling eerst zelf actief ergens over nadenken en na afloop zelf een explicitering vastleggen. Hiermee denk ik dat de theorie beter beklijft dan dat ze de theorie kant-en-klaar voorgeschoteld hebben gekregen. Aan de andere kant moet je er juist weer voor waken om leerlingen continu te vertellen wat ze moeten opschrijven. Daar worden ze juist weer mentaal lui van en dat is nu net wat ik niet nastreef in mijn lessen. Met de hierboven beschreven lesaanpak denk ik een goede balans gevonden te hebben in deze afweging.

Deze lesaanpak zorgt ervoor dat *alle* leerlingen op dat moment met precies *dezelfde* stof bezig is. Dat geldt niet alleen voor de nieuwe theorie die behandeld wordt of de oude theorie die herhaald wordt; ook maken alle leerlingen in de klas steeds precies dezelfde opgaven. Het grote voordeel ervan is dat er wanneer centrale momenten in de les zijn, iedereen mentaal eraan toe is om het juist op dat moment het erover te hebben. Zo is een opgave voordoen op het bord naar

mijn idee vooral zinvol als leerlingen eerst zelf hebben ervaren waar de lastigheid van de opgave zit.

Ook maakt dit voorbeeld duidelijk dat het kennisblad, samen met het proces in de klas, tegemoet komt aan een aantal van de gestelde eisen. Laten we daarvoor nogmaals kijken naar de met betrekking tot dit voorbeeld relevante eisen die zijn gesteld vanuit de literatuurstudie en daarbij kijken of de gekozen oplossing hieraan tegemoet komt (eis E-3 is niet aan de orde bij dit voorbeeld). De tabel is als volgt opgebouwd. Per regel is in de eerste kolom de identificatie van de eis opgenomen, in de tweede kolom de omschrijving van deze eis, in de derde kolom op basis van welke literatuur de eis is opgesteld; tot slot is in de vierde kolom beschreven of en op welke manier aan deze eis is tegemoet gekomen imn het ontwikkelde materiaal.

Eis vanuit de literatuur			*Aan tegemoet gekomen?*
E-1	leerlingen zijn mentaal actief en leren door aan het werk te zijn	Oomens, 2008 Michels, 2006 Hamer, 2010	Ja, leerlingen zijn mentaal actief en hebben over te maken theoretische expliciteringen nagedacht of activiteiten verricht voordat deze centraal wordt behandeld.
E-2	het is voor leerlingen geëxpliciteerd wat geleerd moet zijn	Sierpinska, 2007	Ja, na afloop van de les hebben leerlingen een helder overzicht van datgene dat ze moeten kennen en kunnen.
E-4	het logisch en inzichtelijk maken van formules voor de leerlingen	Skemp, 1976 Sierpinska, 2007	Ja, leerlingen maken op een actieve manier kennis met intuïtieve bewijzen van formules en leggen deze ook vast.

Is een kennisblad dan de enige manier om tegemoet te komen aan deze eisen? Nee, maar het is wel een 'oplossing' die praktisch realiseerbaar is en tegemoet komt aan alle aanvullende eisen en randvoorwaarden (zie nogmaals secties 3.2.1.1 en 3.2.1.2). Centraal geleid leerproces, werkboek, theoretische expliciteringen, naslagwerk: het is een geïntegreerd geheel en het één kan niet losgezien worden van het ander. De naam die ik voor dit alles heb gekozen, en die deel uitmaakt van de titel van dit verslag, is 'inzet van kennisbladen'.

Nogmaals, het gaat te ver om op detailniveau aan te geven op welke manier elk lesonderdeel terug te voeren is op de hiervoor geformuleerde ontwerpbeslissingen. Toch kan elk lesonderdeel teruggevoerd worden op de eisen en randvoorwaarden die zijn geformuleerd. In bijlage 3 zijn alle lesontwerpen, in de vorm van lesvoorbereidingen, opgenomen in dit verslag.

3.2.3 Ontwerpafwegingen: kegelonderzoek

In de stof van Getal en Ruimte hoofdstuk 2 is de kegeluitslag nieuw voor de leerlingen. De leerlingen hebben in de onderbouw wél uitslagen van enkele ruimtelijke figuren gehad en deze worden in dit hoofdstuk opgefrist. Daarnaast dus de uitslag van de kegel.

Bij de kegeluitslag leren de leerlingen een formule voor de oppervlakte van de kegeluitslag. De oppervlakte van de kegeluitslag is de som van de oppervlakten van de kegelmantel en van de grondcirkel. Voor de oppervlakte wordt in Getal en Ruimte een formule afgeleid.

Een voor een gemiddelde havo wiskunde b leerling lastige opgave is het uitrekenen van de oppervlakte van de afgeknotte kegel. Om deze oppervlakte uit te rekenen, is inzicht vereist in (de samenhang tussen) de kegel, de (vorm van) de kegelmantel en de grondcirkel. Voor havo leerlingen is dit beslist lastige materie en een dergelijke oppervlaktesom is voor hen moeilijk. Het inzichtelijk maken van de kegelformules zou kunnen bijdragen bij het beter maken van dergelijke oppervlaktesommen. Vandaar dat ik er voor gekozen heb om in de lesaanpak extra aandacht te besteden aan dit onderwerp: het kegelonderzoek.

Het kegelonderzoek is een huiswerkopgave waarin leerlingen als voorbereiding op de les (waarin de uitslag van de kegel wordt behandeld) met kegeluitslagen aan de gang gaan: knippen van een kegeluitslag en hiervan een kegel maken, en vervolgens nadenken over de relatie tussen ledenaantal hier van belang zijnde kegeleigenschappen (straal grondcirkel, straal cirkelmanteluitslag en de middelpuntshoek van de cirkelmanteluitslag).

Het ontwerp van deze huiswerkopgave gaat uit van de niveautheorie van Van Hiele. Het is de bedoeling dat de leerlingen daarbij de twee onderste niveaus van Van Hiele doorlopen: leerlingen moeten eerst met papier, schaar en plakband aan de gang om een kegeluitslag te maken en om met deze uitslag een daadwerkelijke kegel in elkaar te zetten. Daarna moeten de leerlingen een aantal (onderzoeks)vragen beantwoorden om tot bepaalde inzichten (op het tweede niveau van Van Hiele) te komen.

De centrale bespreking van deze vragen gebeurt in de les, waar dan dus de theoretische explicitering plaatsvindt. De verkregen inzichten worden dan door de leerlingen op het kennisblad vastgelegd.

De reden dat deze leerling activiteiten buiten de les als huiswerk worden uitgevoerd, is zowel om praktische redenen en om tijdefficiëntie. Zo heb je voor dit kegelonderzoek een basaal instrument als een schaar nodig. Bijna geen enkele leerling heeft een schaar bij zich op school; en als je tegen leerlingen zegt dat ze een schaar mee moeten nemen de volgende les, dan is de kans groot dat de helft dat toch niet heeft gedaan. Dat zorgt vervolgens voor enorm veel ruis in de les. Tijdwinst is een andere reden. Leerlingen zijn zo een kwartiertje bezig met papier, schaar en lakband voordat ze een kegel in elkaar hebben gezet. Dat vind ik een ‘duur kwartier’ om in de les plaats te laten vinden. Het grote gevaar van een kegelonderzoek als huiswerk opgeven is dat leerlingen het niet doen. Mijn

persoonlijke inschatting was dat misschien hoogstens 6 minder gemotiveerde leerlingen het kegelonderzoek niet zouden uitvoeren. Dit vind ik acceptabel.

Het doel van het kegelonderzoek als huiswerkopgave is dat leerlingen in elk geval bezig geweest zijn op grondniveau, en mentaal actief zijn geweest op niveau één en twee van Van Hiele.

Persoonlijk vind ik het belangrijker dat leerlingen hebben *nagedacht* over de zaken waarover we het zullen hebben in de les, dan dat ze persé ook het antwoord op bepaalde vragen hebben kunnen vinden. Leerlingen moeten (in termen van het OOV-model) *georiënteerd* zijn en hebben misschien al kleine stapjes kunnen maken in de *ontwikkeling* van de nieuwe theorie. In de les waarin de kegeluitslag wordt behandeld, moet natuurlijk 'het kwartje wel vallen' en moet de leerling in staat zijn om te kunnen *verwerken* en de sommen hierover te kunnen maken.

Laten we kijken op welke manier het kegelonderzoek, samen met de centrale behandeling in de les van de kegel, tegemoet komt aan de eisen die zijn opgesteld vanuit de literatuur. Voor het resultaat hiervan zie onderstaande tabel. Per regel is in de eerste kolom de identificatie van de eis opgenomen, in de tweede kolom de omschrijving van deze eis, in de derde kolom op basis van welke literatuur de eis is opgesteld; tot slot is in de vierde kolom beschreven of en op welke manier aan deze eis is tegemoet gekomen in het ontwikkelde materiaal.

Eis vanuit de literatuur			*Aan tegemoet gekomen?*
E-1	leerlingen zijn mentaal actief en leren door aan het werk te zijn	Oomens, 2008 Michels, 2006 Hamer, 2010	Ja, leerlingen zijn mentaal actief en hebben over te maken theoretische expliciteringen nagedacht
E-2	het is voor leerlingen geëxpliciteerd wat geleerd moet zijn	Sierpinska, 2007	Ja, na afloop van de les hebben leerlingen een helder overzicht van datgene dat ze moeten kennen en kunnen.
E-4	het logisch en inzichtelijk maken van formules voor de leerlingen	Skemp, 1976 Sierpinska, 2007	Ja, de hier besproken kegelformule wordt intuïtief afgeleid en deze afleiding wordt vastgelegd op het kennisblad.

Een gedetailleerde beschrijving van de huiswerkopgave 'kegelonderzoek' en het lesontwerp van de bijbehorende les, is te lezen in bijlagen 3.4.2 en 3.3.8.

3.2.4 Ontwerpafwegingen: reflecties

Eis E-3 vanuit het literatuuronderzoek betrof 'reflecteren over gemaakte opgaven'. De reden dat ik persoonlijk hier belang aan hecht, is dat dit een praktische manier is om ervoor te zorgen dat de nieuwe stof goed *verwerkt*

wordt, en dat leerlingen een (klein) stapje boven de stof komen te staan. Je hebt het niet meer over de uitleg van een individuele som, maar over een categorie van sommen. Leerlingen zijn daardoor in staat de toepassing van de nieuwe stof beter te doorzien.

Mijn persoonlijke ervaring is dat ik leerlingen dergelijke denkactiviteiten niet zie doen, zeker niet op de havo. Toch denk ik dat het zeer waardevol is het wel te doen. Vandaar dat ik in de lessen daar een plek voor wil inruimen.

Het idee is om tijdens de lessen af en toe tijd te reserveren om leerlingen te laten nadenken over de toepassing van een nieuw wiskundig concept in een bepaalde serie opgaven. Deze activiteit dient dan plaats te vinden nadat de opgaven gemaakt zijn.

Een dergelijke denkactiviteit is geen gemeengoed voor leerlingen en daarom is enige structurering gewenst. Ik kies er voor om leerlingen een aantal *vragen* te geven die ze moeten beantwoorden. Ook is het goed om leerlingen hiervoor te motiveren; waarom doen we dit eigenlijk? Heel motiverend werkt (hoe basaal misschien) om tegen leerlingen te zeggen "We gaan eens kijken hoe een proefwerkopgave eruit zou kunnen zien en hoe je die moet oplossen! Allemaal bij de les, want je krijgt in wezen een kandidaat proefwerkopgave cadeau!". Dit spreekt havo leerlingen echter wel heel erg aan, omdat ze erg toepassing- en doelgericht zijn en graag directe en concrete beloning willen zien voor hun inspanningen (zie nogmaals sectie 2.2).

Vragen die je als docent aan de leerlingen kunt geven, zijn: hoe zou je deze opgaven willen noemen, waar gaat het om in deze opgaven, welke vaste onderdelen heeft de uitwerking altijd, op wat voor manier zou je de opgaven kunnen variëren of moeilijker kunnen maken.

In de centrale behandeling wordt vervolgens gezamenlijk antwoord gezocht naar het antwoord op deze vragen en wordt dit vastgelegd op het kennisblad.

De winst van deze activiteiten ligt vooral in een betere *verwerking* van de stof.

3.3 Procedure

Het ontwikkelde materiaal is ingezet in de periode 27 september 2010 tot en met 15 november 2010. Dit is een totaal van 6 lesweken, met in totaal 16 lesuren. Voor details over de experimentgroep, zie paragraaf 3.1.

De toets is afgenomen op 16 november 2010. Voor details over de toets, zie paragraaf 3.4.

3.4 Onderzoeksinstrumenten

Meting

Een consequentie van de keus van experimentgroep en controlegroep is dat als toetsinstrument hetzelfde proefwerk moet worden gebruikt als het jaar daarvoor en volgens dezelfde norm moet worden nagekeken. De resultaten van de leerlingen uit de controlegroep zijn slechts beschikbaar als individuele

proefwerkcijfers. Daarom worden de behaalde proefwerkcijfers van de experimentgroep vergeleken met de behaalde proefwerkcijfers van de controlegroep.

Het proefwerk dat dit jaar afgenomen wordt is een 100 minuten toets, in tegenstelling tot het proefwerk van vorig jaar; dat was een 50 minuten toets.

Het proefwerk dat is afgenomen, moet dus zorgvuldig worden ontwikkeld. Daarom het proefwerk enerzijds uit de vragen uit het proefwerk van het voorgaande jaar en anderzijds uit aanvullende vragen. Hierbij moet ervoor gezorgd worden dat leerlingen evenveel tijd beschikbaar hebben voor de vragen uit het proefwerk van het voorgaande jaar. Als dit niet het geval zou zijn, dan zouden de resultaten van de experimentgroep en de controlegroep niet met elkaar vergeleken mogen worden om er vervolgens een gefundeerde conclusie aan te verbinden.

toets
Zoals eerder beschreven, de toets bestaat uit dezelfde opgaven als het jaar ervoor, aangevuld met enkele nieuwe opgaven. De reden hiervoor is dat de resultaten van de leerlingen goed kunnen worden vergeleken met die van het voorgaande jaar.

De opgaven zijn verder zodanig ontworpen dat er een goede dekking van de behandelde stof is en dat er een goede balansen zijn tussen reproductie- en productievragen, en de moeilijkheidsgraden van de verschillende opgaven.

De aanvullende opgaven zijn als geheel genomen meer productiegericht en toetsen meer het meetkundige inzicht.

De afgenomen toets is opgenomen in bijlage 4, alsmede de normering die gebruikt is bij het corrigeren.

3.5 Dataverzameling

De leerlingen uit de experimentgroep maken de 100 minuten toets. De scores van de leerlingen uit de experimentgroep op het proefwerk worden verzameld in een spreadsheet, waarin per leerling wordt vastgelegd hoe deze op alle verschillende onderdelen heeft gescoord.

De reden dat de scores per onderdeel worden vastgelegd, is dat er dan op eenvoudige wijze 2 cijfers bepaald kunnen worden:

- één cijfer gebaseerd op de scores alle toetsonderdelen en dat meetelt voor het periodecijfer en het jaarcijfer (zoals vastgelegd in het PTA), en
- één cijfer gebaseerd op die toetsonderdelen die tezamen de volledige toets van het voorgaande jaar vormen en die voor dit onderzoek bepalend is

Verder biedt dit de mogelijkheid tot aanvullende gegevensverwerking en -analyse.

3.6 Dataverwerking

De gegevens zullen verwerkt worden tot de volgende onderzoeksinformatie.

onderzoeksinformatie	*Nadere detaillering*
Individuele proefwerkcijfers van de experimentgroep	
Individuele proefwerkcijfers van de controlegroep	
Klasgemiddelde (50 min.)	Gemiddeld behaalde cijfer, gebaseerd op de toetsonderdelen die overeenkomen met het proefwerk van het voorafgaande jaar
Klasgemiddelde (100 min.)	Gemiddeld behaalde cijfer, gebaseerd op alle toetsonderdelen
Gemiddelde onderdeelscore *een score die aangeeft hoe de klas gemiddeld heeft gescoord op een toetsonderdeel*	percentage dat de verhouding weergeeft tussen het gemiddelde van alle scores van de leerlingen op het specifieke toetsonderdeel, en de maximale score volgens de norm
Maximaal behaalde punten op een onderdeel *Een score die aangeeft wat de hoogste individuele puntscore is op een toetsonderdeel*	
Maximale score op een onderdeel *Een score die aangeeft wat de maximale score is op een toetsonderdeel*	percentage dat de verhouding weergeeft tussen het maximaal behaalde aantal punten op een toetsonderdeel, en de maximale score volgens de norm

3.7 Data analyse

De individuele proefwerkcijfers van de experimentgroep zullen worden vergeleken met die van de controlegroep. Op basis van een t-toets zal worden nagegaan in hoeverre er een significant verschil bestaat, ofwel: is het inderdaad zo dat de cijfers van de experimentgroep significant hoger zijn dan die van de controlegroep? Op basis hiervan zal een antwoord worden gegeven op de onderzoeksvraag.

Het paar hypothesen is:

$H_0 : \mu_{experimentgroep} = \mu_{controlegroep}$ versus $H_1: \mu_{experimentgroep} > \mu_{controlegroep}$

Het onbetrouwbaarheidsniveau wordt vastgesteld op 0,10. Dat wil zeggen dat als we een kans vinden van 10% of hoger, dan is er geen aanleiding de nulhypothese H_0 te verwerpen.

De t-toets zal worden uitgevoerd in Excel.

Daarnaast zullen aanvullende analyses worden uitgevoerd op de overige onderzoeksinformatie, indien deze hier aanleiding toe geven.

4 Resultaten en conclusies

4.1 Resultaten

Gedetailleerde informatie over de resultaten van de toets, waaronder de verwerking, zijn opgenomen in bijlage 6. In die bijlage vindt u tevens de resultaten van de controlegroep.

De resultaten zijn in onderstaande tabel samengevat.

	Experimentgroep	*Controlegroep*
Gemiddelde cijfer	4,42	4,25
Standaard deviatie	1,35	2,00

De uitkomst van de t-toets is de waarde 0,358 en op basis hiervan is met de vastgestelde onbetrouwbaarheidswaarde van 0,10 geen reden om de nulhypothese te verwerpen.

De conclusie luidt dan ook dat de inzet van kennisbladen niet tot een significante verbetering van de cijfers heeft geleid.

Verder valt op dat een tweetal toetsonderdelen zeer slecht gescoord zijn. Het betreft de toetsonderdelen 5b en 7b. Bij toetsonderdeel 5b betreft het de oppervlakteberekening van een deel van een driehoek, die op zijn beurt deel uitmaakt van een ruimtelijke figuur. Toetsonderdeel 7b betreft het maken van een klein wiskundig model die vervolgens doorgerekend moet worden. Beide onderdelen bleken voor de leerlingen veel te moeilijk.

4.2 Conclusie

Terugkomend op de onderzoeksvraag (zie paragraaf 1.3.3)

> *Leidt voor het onderwerp meetkunde een didactiek gericht op het expliciteren van kennis en vaardigheden, stappenplannen en probleemaanpak strategieën - waarbij leerlingen dit vastleggen op kennisbladen – tot hogere cijfers op het proefwerk?*

kan hierop het volgende antwoord worden gegeven: nee.

5 Discussie en aanbevelingen voor vervolgonderzoek

5.1 Discussie

Puur cijfermatig bekeken is de conclusie duidelijk. Toch is het goed om daarnaast terug te blikken op het onderzoek. De bevindingen hiervan zijn beschreven in deze paragraaf.

Introductielessen
De introductielessen waren naar mijn idee zinvol. Het bleek dat veel kennis en vaardigheden die bekend verondersteld worden, toch waren weggezakt bij de leerlingen. De werkvorm met werkbladen werkte goed: leerlingen waren de gehele les actief en de juiste zaken zijn benoemd en geëxpliciteerd. Wel was het zo dat een deel van de leerlingen het na 2 lessen wat had gehad met herhalen; ze wilden aan de slag met de sommen. Daarom heb ik er voor gekozen om de derde les vast te beginnen met het maken van de opgaven en dat we het eerste kennisblad zouden gaan aanvullen wanneer er een natuurlijk moment voor zou zijn. Een gevaar is dat niet alle voorkennis dan ook actief herhaald zou gaan worden, en dit is in de praktijk ook wel een beetje gebleken. Tijdens het maken van de opgaven heb ik gemerkt dat leerlingen heel antwoord gericht zijn: er moet een getal komen te staan als antwoord. Het maken van een plan van aanpak gebeurd niet expliciet; er wordt gewoon begonnen en vervolgens gezien waar het op uitloopt.

Didactische vormen
Ik heb een aantal verschillende didactische werkvormen ingezet tijdens de behandeling van de stof in het hoofdstuk. Een werkvorm waar ik goede ervaringen mee heb, is door een prikkelende vraagstelling aan te bieden, vervolgens leerlingen wat op te porren om hier een antwoord op te vinden en daarna de oplossing centraal te bespreken. Voorbeelden hiervan zijn de oppervlakteberekeningen van de regelmatige 5-hoek nadat deze gevouwen was uit een strook papier, het benoemen van alles wat je weet van een kegel, oppervlakteberekening van een cirkelsegment en daarbij zeggen dat dit toch wel de allergemakkelijkste proefwerkopgave zou zijn die ze kunnen krijgen. Leerlingen zijn dan erg gedreven om een resultaat te krijgen. Hiermee zijn ze mentaal erg geactiveerd en zal uitleg of explicitering beter aankomen en beklijven, is mijn overtuiging. Een werkvorm waar ik minder enthousiast op terugkijk is de gezamenlijke mentale constructie van de regelmatige vierzijdige piramide. De Havo leerlingen vonden het een beetje raar, en ik denk dat ze zich ook niet goed het nut van konden voorstellen. Ik denk dat het niet concreet genoeg is en niet voldoende dicht bij de te maken opgaven.

Kegelonderzoek
Een werkvorm die meer aandacht verdient in deze reflectie, is het kegelonderzoek, zie ook 3.4.2. Ik wilde met dit kegelonderzoek de leerlingen meer concreet gevoel geven bij de kegel en dan met name de kegeluitslag. Voor

een gedetailleerde beschrijving van de ontwerpafwegingen en het concreet ontwikkelde resultaat, zie sectie 3.2.3 en bijlage 3.4.2.

Het bleek dat praktisch alle leerlingen bezig waren geweest met het onderzoek. Met een zekere trots of enthousiasme kwamen leerlingen de klas binnen en begonnen te vertellen over de kegel of lieten deze zien. Wel vond men het moeilijk en was men met de vragen er niet uitgekomen. In de les zijn we vervolgens de vragen met elkaar gaan bespreken en werd het voor de meeste leerlingen wel duidelijk.

Positief aan dit onderzoek vond ik dat leerlingen concreet hebben gewerkt aan de kegeluitslag en ik denk dat ze deze beter zijn gaan begrijpen. Ze vonden het leuk om er aan te werken en ze waren mentaal zeer geactiveerd toen we het onderwerp bespraken in de les. Voor verbetering vatbaar, was het ontwerp van het onderzoek: leerlingen waren er niet zelf uitgekomen en er was meer leerrendement te behalen. Concrete verbeteringen: meer kegeluitslagen maken (meer voorbeelden), ook 'kegeluitslagen' die niet tot een kegel leiden toevoegen (de zogenaamde 'tegenvoorbeelden'). Het effect zou daarmee wel zijn dat er door leerlingen behoorlijk wat meer tijd aan dit onderzoek zou moeten worden besteed.

Hiermee wordt denk ik de kern van de wiskundige tweestrijd tussen instrumentele en relationele wiskundedidactiek geraakt. Leerlingen hadden wellicht nog meer tijd hieraan moeten besteden en daarbij vooral ook aan met meer zorg uitgekozen activiteiten. Maar waar wil je die tijd als docent vandaan halen zonder meteen de studielast structureel te verzwaren? Ik vind dit toch wel een lastig vraagstuk. Toch vind ik nu achteraf dat deze extra tijdsinspanning hier wel gewenst was en zeker had bijgedragen tot een beter begrip van de kegeluitslag en bijbehorende relatie tussen kegeleigenschappen. Wel moet het kegelonderzoek beter doordacht worden, zoals hierboven beschreven.

Kennisbladen
Het meest in het oog springende element in dit onderzoek zijn de kennisbladen. Het woord kennisblad is wellicht een beetje misleidend. Behalve dat er opgedane kennis op wordt vastgelegd, zou je het ook kunnen opvatten als een soort werkboek waar leerlingen mee werken. De naam suggereert nu wellicht dat er allerhande kennis wordt gedicteerd en dat leerlingen dat maar over moeten schrijven. Dit is zeker niet hoe de kennisbladen bedoeld zijn en hoe ze zijn ingezet. De kennisbladen zijn ontworpen als geïntegreerd onderdeel van het (leer)proces in de klas. Een voorbeeld hiervan is de stof aangaande de inhoud van ruimtefiguren. De volgorde waarin deze figuren waren opgenomen is bewust gekozen zodat de samenhang tussen de figuren en de bijbehorende inhoudsformules duidelijk naar voren kwam. Leerlingen moesten dit zelf gaan bedenken en actief hier mee aan de gang. Centrale besprekingen waren van te voren uitgedacht, alsmede hoe bevindingen konden worden toegevoegd aan het kennisblad; er was ruimte gereserveerd voor formules op het blad, in de figuren kon duidelijk worden aangegeven wat grondvlak en hoogte was, etc.

Kortom: centraal geleid leerproces, werkboek, theoretische expliciteringen, naslagwerk: het was een geïntegreerd geheel en het een kan niet losgezien worden van het ander.

Over het algemeen kijk ik positief terug over de inzet van de kennisbladen. Het bood een mooie kapstok voor de behandeling van de theorie, het was zodanig uitgedacht dat leerlingen actief er mee aan de slag konden en het bood achteraf een mooi overzicht. Toch heb ik ook enkele minder positieve ervaringen. Zo werden de bladen door de leerlingen los toegevoegd aan het schrift wat het minder overzichtelijk maakte. Er waren uiteindelijk 3 bladen A3 met daarop 12 kantjes A4 wat best veel was en leerlingen raakten soms een beetje het spoor bijster waar wat te vinden. Het meest teleurstellende is echter dat datgene wat op de kennisbladen stond, toch niet als kennis in het hoofd uiteindelijk aanwezig was. En dat was uiteindelijk natuurlijk wel de bedoeling.

Reflecties over typische opgaven
In de lessen zijn op bepaalde momenten reflecties geweest over typische opgaven die ze gemaakt hebben. Dit is een activiteit waar ze geen ervaring mee hebben en wat het merendeel ook lastig vond om te doen. Een concrete som als basis nemen en vervolgens gaan reflecteren over de onderdelen van de uitwerking en mogelijke variaties in de probleemstelling en uitwerking; ze vonden het lastig om hierover na te denken en om tot inzichten te komen. Ik denk dat dit overeenkomt met de resultaten uit het veldonderzoek dat in Nederland is verricht over het Havo-onderwijs, zie paragraaf 2.2: de typische Havo leerling leert door te doen en niet zozeer door te reflecteren. Ook dit raakt weer een basisvraag: hoe zorg je er voor dat leerlingen deze stof toch gaan beheersen, en er boven komen te staan, zonder een hele serie sommen te gaan maken en 'al doende' te leren? Er is namelijk geen tijd in het programma om deze hele serie sommen te gaan maken en gaandeweg tot deze inzichten te komen. Met het maken van een enkele of hooguit een paar opgaven moet de stof verwerkt zijn en gaat het op naar het volgende.

De resultaten die uit dit onderzoek zijn gekomen, zijn voor mij persoonlijk teleurstellend. Ik heb zeer veel energie gestopt in alle lessen die ik heb gegeven voor dit hoofdstuk. Dat dit in wezen weinig effect heeft gehad, vind ik zoals gezegd teleurstellend.

Had mijn energie dan beter gericht moeten worden? Had ik andere keuzes moeten maken bij de lessen?

Ja; vanuit datgene dat in de literatuurlijst geschreven is, zou de didactiek moeten streven naar inzichtelijkheid en het leggen van vele verbanden. Simpel gezegd: als je het door en door begrijpt, dan kun je een willekeurig probleem hierover oplossen.

Nee; gezien 'het typische' van de HAVO (de cognitieve vaardigheden en de leerstijlen van de leerlingen die wiskunde b volgen), samen met het overladen programma van dit vak, zie ik niet zo snel om dit te bereiken in de korte tijd die er voor staat.

Bij dit onderzoek heb ik vooral heel erg veel kennis en ervaring opgedaan. Ook heb ik geleerd dat het goed is om de wetenschappelijke literatuur goed te volgen. Vervolgens is het een uitdaging hoe de brug te slaan tussen inzichten die de wetenschap voortbrengt en de weerbarstige praktijk die je als docent soms ervaart.

5.2 Aanbevelingen voor vervolgonderzoek

De leerlingen uit de experimentgroep gaan einde van dit schooljaar nogmaals met het onderwerp meetkunde aan de gang. In een eindtoets wordt dit hoofdstuk samen met een ander (algebraïsch) hoofdstuk nogmaals getoetst. De stof die in dit onderzoek is behandeld, wordt in twee weken tijd nogmaals behandeld en herhaald. Ik heb nog een half jaar de tijd om de ervaringen die ik heb opgedaan met dit onderzoek op me in te laten werken. Wellicht dat ik eind dit jaar, met een andere kijk op de zaak, de stof op een andere manier met de leerlingen ga aanpakken.

6 Referenties

Wetenschappelijke publicaties m.b.t. het leren van wiskunde

Brousseau, G., Gibel, P. (2005). Didactical handeling of students' reasoning processes in probleem solving situations. *Educational Studies in Mathematics*, 2005(59), 13-58.

Engelbrecht J., Bergsten C., Kågesten O. (2009). Undergraduate students' preference for procedures to conceptual soutiens to mathematica problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, (2009)Vol. 40, No. 7, 927-940

Freudenthal Instituut (2009). *Niveautheorie van Van Hiele*. Verkregen op 20 november, 2010, via http://www.fi.uu.nl/wiki/index.php/Niveautheorie_van_Van_Hiele

Fujita, T., Jones, K.; Yamamoto, S. (2004). *The role of intuition in Geometry education: learning from the teaching practice in the early 20th century*. Verkregen op 20 november, 2010, via http://www.icme-organisers.dk/tsg29/TSG29Fuj.pdf

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education* 1996(1). Verkregen op 20 november, 2010, via http://wiki.math.yorku.ca/index.php/Gutiérrez,_A._(1996)._"Visualization_in_3-dimensional_geometry:_In_search_of_a_framework"

Fauconnier, G. (1985). *Mental Spaces.* Verkregen op 20 november, 2010, via http://terpconnect.umd.edu/~israel/Fauconnier-MentalSpaces.pdf

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.

Sierpinska, A. (2007). *I need the teacher to tell me if I am right or wrong*. Verkregen op 20 november, 2010, via http://www.annasierpinska.wkrib.com/pdf/PME31-Plenary-Sierpinska.pdf

Skemp, R. (1976). *Relational Understanding and Instrumental Understanding–Mathematics Teaching*. Verkregen op 20 november, 2010, via http://www.grahamtall.co.uk/skemp/pdfs/instrumental-relational.pdf

Simpson, A., Zakaria, N. (2004). *Making the connection: procedural and conceptual students' use of linking words in solving problems*. Verkregen op 20 november 2010, via http://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR012_Simpson.pdf

Tall, D., Gray, E., Bin Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M., Yusof, Y. (2001). *Symbols and the bifurcation between procedural*

and conceptual thinking. Verkregen op 20 november 2010, via http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001a-symbol-bifurcation.pdf

Tall, D. (2010). *Discovery and Invention in Mathematics: the notion of the Crystalline Concept*. Verkregen op 20 november, 2010, via http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2010x-crystalline-concepts.pdf

Veldpublicaties m.b.t. havo didactiek

Hamer, R. (2010). *Tien didactische aandachtspunten voor de bètavakken op de havo.* Belfeld: Henk Grafimedia Center.

Oomens, M. (2008). *Inventariserend onderzoek havo-didactiek voor bèta- en techniekonderwijs*. Venlo, Henk's Offset.

Michels, B. (2006). *Verschil moet er wezen*. Verkregen op 20 november, 2010, via http://www.slo.nl/downloads/archief/verschil_20moet_20er_20wezen.pdf

Vermaas, J., Linden, van der, R. (2007). *Beter inspelen op havo-leerlingen*. Tilburg, IVA.

Wiskundige literatuur

Polya, G (1957). *How to solve it*. Princeton University Press.

1 Literatuurstudie - samenvattingen

1.1 Wetenschappelijk onderzoek

Er is veel onderzoek gedaan naar het leren van wiskunde en op basis hiervan zijn theorieën ontwikkeld over welke soorten kennis mensen opdoen bij het leren van wiskunde, hoe het leerproces verloopt en op welke manier didactiek hierop kan worden afgestemd. Op basis van onderzoek zijn door verschillende wetenschappers verschillende theorieën voorgesteld over welke kennis mensen opdoen bij het leren van wiskunde en hoe het wiskundeleerproces verloopt.

1.1.1 Relationeel en instrumenteel begrip

De vooraanstaande wetenschapper Skemp heeft reeds in de jaren 70 van de vorige eeuw het onderscheid aangebracht tussen zogenaamd *relationeel* begrip en *instrumentaal* begrip (Skemp, 1976). In het kort komt het erop neer dat iemand over instrumentaal begrip beschikt als hij of zij een algoritme of een regel met succes kan toepassen. De desbetreffende persoon weet dan dus wat er gedaan moet worden. Als deze persoon daarnaast ook begrijpt waarom een dergelijke regel of algoritme kan worden toegepast, beschikt hij of zij over relationeel begrip.

Skemp stelt dat in wiskunde tekstboeken wiskundige begrippen en stellingen vaak instrumenteel worden beschreven, waar een relationele insteek passender was geweest of op z'n minst ook had moeten worden beschreven.

Skemp beschrijft situaties waarin er een *mismatch* met betrekking tot begrip bestaat en gaat in op de effecten. De eerste situatie is met betrekking tot *docent en leerling,* de tweede situatie van een mogelijke mismatch betreft een verschil tussen *docent en tekstboek*.

Mismatch	*Negatieve effecten*
1. leerlingen willen instrumenteel begrijpen, terwijl de docent op relationeel begrip onderwijst	• Op korte termijn weinig negatieve gevolgen voor deze leerling • Frustratie bij de docent • Meer regels en minder algemeen toepasbare principes • Deze leerling maakt eerder begripsfouten
2. de docent onderwijst op instrumenteel begrip, terwijl leerlingen relationeel willen begrijpen	• Deze leerling raakt gefrustreerd • Deze leerling kan de regels niet goed toepassen
3. docent wil instrumenteel onderwijzen, terwijl het tekstboek relationeel begrip beoogt	• leerlingen raken verward en krijgen op hun vragen geen adequate antwoorden

Het relationeel en instrumenteel begrijpen sluit aan bij eenzelfde indeling van wiskunde(onderwijs): relationele wiskunde(onderwijs) en instrumentele wiskunde(onderwijs). Beiden hebben zo hun eigen voordelen:

Voordelen van de twee soorten wiskunde(onderwijs)

Instrumenteel	*Relationeel*
• binnen de specifieke context gemakkelijker te begrijpen en toe te passen • beloningen (goede antwoorden op opgaven) zijn snel en zichtbaar • voor de specifieke context is minder kennis vereist en daarom sneller en betrouwbaarder toe te passen	• toepasbaar in nieuwe taken • gemakkelijker en langer te onthouden • bevredigend en daarom motiverend zonder de noodzaak van goede antwoorden op (instrumentele) opgaven • schept een onderzoekende en verklarende attitude

Kortom, instrumentele wiskunde heeft vooral positieve korte termijn effecten (zij het binnen afgebakende contexten), maar zeker niet voor de lange termijn en binnen de context van de gehele kindontwikkeling. Skemp heeft zich daarom de vraag gesteld waarom instrumentele wiskunde toch zoveel voorkomt. Hij is tot de volgende oorzaken gekomen, vanuit verschillende perspectieven:

perspectief	*oorzaken*
docent	• relationeel begrip duurt langer om te bereiken • relationeel begrip van een specifiek onderwerp is te moeilijk • instrumenteel begrip is eerder vereist door een ander vak dan relationeel begrip • de docent is een junior binnen een omgeving waarin alleen instrumenteel wordt onderwezen
leerling	• de leerling wil graag de toetsen met succes afronden en op deze toetsen wordt instrumenteel begrip getoetst
overig	• overladen programma en daardoor te weinig tijd om relationeel te onderwijzen • relationeel begrip lastig(er) te toetsen • psychologische moeilijkheid om bestaande schema's te herstructureren

Skemp stelt zich op het standpunt dat het instrumentele karakter van het wiskundeonderwijs ertoe bijdraagt (en wellicht de grootste oorzaak is) van het negatieve imago van wiskunde(onderwijs) bij vele mensen in de maatschappij.

Skemp beschrijft tenslotte in dit artikel een theoretische kader, nadat hij eerst heeft opgemerkt dat docenten vooral leren van hun eigen fouten omdat een gemakkelijk toegankelijke algehele kennisbank van goed wiskundeonderwijs niet voorhanden is.

Instrumentele en relationele wiskunde beogen verschillende conceptuele structuren (schema's) bij de leerlingen:

Te vormen conceptuele structuren	
instrumenteel	*relationeel*
vele (stappen)plannen voor evenveel specifieke problemen	generieke aanpakken om zelf tot aanpakken te komen voor willekeurige specifieke problemen

Het relationele leren is op een aantal punten verschillend van instrumenteel leren:

- 'loslaten' van de specifieke problemen
- opbouwen van generieke aanpakken is een motiverend doel
- zelfvertrouwen om nieuwe problemen zelfstandig aan te kunnen
- een zelfcontinuerend en zelfbelonend leerproces

1.1.2 Relationeel, instrumenteel begrip en transfer

Op basis van het onderzoek en de theorieën van Skemp zou men kunnen verwachten dat mensen met relationeel begrip beter in staat zijn om wiskundige principes toe te passen op andere gebieden dan de wiskunde. Dit is nader onderzocht door Simpson en Zakaria.

In (Simpson, Zakaria, 2004) wordt een onderzoek in Maleisie beschreven waarin wordt nagegaan in hoeverre chemiestudenten wiskundige principes toepassen in het chemische domein. In de conclusies van het onderzoek wordt beschreven dat er aanleiding is om te veronderstellen dat chemiestudenten die beschikken over wiskundig relationeel / conceptueel begrip, inderdaad beter in staat zijn om wiskundige principes toe te passen in het chemische domein dan chemiestudenten die beschikken over instrumenteel begrip. Tevens zijn deze zelfde studenten beter in staat om hun chemische kennis in te zetten om hun wiskundige kennis te contextualiseren.

Simpson en Zakaria schrijven daarom in (Simpson, Zakaria, 2004) dat er aanleiding is om te vermoeden dat bij conceptueel begrip één samenhangend mentaal construct wordt gevormd, terwijl bij instrumentaal begrip verschillende mentale constructen worden gevormd. Hiermee leggen ze een link met de theorie van Fauconnier (Fauconnier, 1985). Daardoor kan iemand die over conceptueel begrip beschikt, sneller verschillende gebieden samenbrengen zoals overeenkomsten zien en dwarsverbanden leggen.

1.1.3 Andere bepalende factoren

In het voorgaande zijn verschillende leertheorieën beschreven en kan voorzichtig de conclusie worden getrokken dat men bij het leren van wiskunde moet streven naar het conceptuele leermodel.

In haar verkennende onderzoek (Sierpinska, 2007) gaat Anna Sierpinska in op andere factoren die bepalend zijn voor het ontwikkelen van conceptueel begrip bij studenten. Sierpinska heeft een onderzoek uitgevoerd op het gebied van algebra, waarbij het vermogen tot het herkennen van inconsistenties en het

vermogen om te bepalen of een correct antwoord op een probleem is gevonden, wordt onderzocht. Meer specifiek heeft ze onderzocht in hoeverre een didactisch model dat gericht is op het ontwikkelen van conceptueel begrip, een positieve invloed heeft op het vermogen om inconsistenties te herkennen en daarmee een *attitude*verandering teweegbrengt: de student kan zelf bepalen of een gevonden antwoord correct is of niet en heeft daarbij de leraar niet of in elk geval minder bij nodig. Sierpinska gebruikt de afkortingen DT en LSC om deze twee aan te duiden:
DT = dependence on a teacher
LSC = lack of sensitivity to contradictions

Het onderzoek was kleinschalig van opzet en op moment van schrijven van haar artikel zelfs nog niet volledig afgerond, toch was ze in staat om alvast de voorlopige resultaten te verwerken en te duiden, hierop te reflecteren en enkele conclusies te trekken. Tot haar eigen verrassing bleek dat het didactische model dat ze had gebruikt en dat gericht was op het ontwikkelen van conceptuele kennis bij de studenten, niet in die mate van invloed was op de (attitude van de) studenten als ze van tevoren had verwacht.

Dit was voor haar aanleiding om te overdenken welke andere factoren mede bepalend zijn voor het succesvol bijbrengen van conceptuele kennis bij studenten. Hierbij heeft ze ideeën van verschillende theorieën samengevoegd. Ze is gekomen tot het volgende overzicht van mogelijke bepalende factoren, waarbij ze aangeeft in hoeverre het met name DT of LSC beïnvloed:

Kentheoretische factoren	DT	Veel wiskundige kennis is 'tacit' of onbewust (...) en kan daardoor alleen worden bijgebracht door een docent
	DT	Wiskundige concepten staan niet op zichzelf en hebben relaties met andere vaak zeer geavanceerde ideeën. Hierdoor kunnen begrippen soms gekunsteld overkomen op studenten, die daardoor de docent nodig hebben als leidraad.
	LSC	Contradicties in (bijvoorbeeld algebraïsche) beweringen hangen samen met de betekenis van de bewering en deze betekenis moet wel door studenten worden begrepen
	LSC	Contradicties vereisen heldere en eenduidige definities en stellingen, terwijl wiskundeboeken deze niet geven omdat het doel van het boek is om slechts 'een idee van het concept' te geven

Cognitieve factoren	LSC	Contradicties worden alleen opgemerkt wanneer er (theoretisch) nagedacht wordt en deze mentale activiteit is geen gemeengoed onder de meeste studenten [1])
	LSC	Het opmerken van een contradictie in voorwaarden met betrekking tot *variabelen* is moeilijker dan één

		met concrete getallen
	LSC	Het opmerken van een contradictie in een langere bewering vereist meer van de cognitieve functies als concentratie, informatieverwerking, geheugen en meer specifiek wiskundig geheugen. Dit laatste is wellicht vooral een kwestie van aanleg, wordt uit (Krutetskii, 1976) geciteerd.

Opmerkingen
[1]) studenten zijn vaak praktisch georiënteerd en dus vooral gefocust op het oplossen van het specifieke probleem; en minder gericht op het reflecteren op diverse variaties op de specifieke probleemstelling: op de mogelijke oplossingen en consequenties hiervan.

Emotionele factoren	LSC DT	School 'wiskundespraaktaal' bevat emotioneel beladen termen zoals 'goed' en 'fout', waar 'waar' en 'niet waar' gepaster zouden zijn
	LSC	Sommige studenten bepalen op *gevoel* of een antwoord correct is
	LSC DT	Sommige studenten gaan niet na of het antwoord correct is, uit angst voor een incorrect antwoord en daardoor gedemotiveerd te raken

Didactische factoren	DT	Het didactische contract (Brousseau en Gibel, 2005) gaat uit van een docent die de opdracht geeft, de student die deze probeert op te lossen, en de docent die vervolgens bepaalt of het antwoord correct is
	DT	Er zijn veel taken in schoolwiskunde waar het voor studenten bijna onmogelijk is om zelf na te gaan of het antwoord correct is; vaak op het gebied van bewijzen.
	LSC	Schooltaken (toetsopgaven) zijn zo georganiseerd dat incorrecte antwoorden op onderdelen niet doorwerken op vervolgonderdelen. Hierdoor wordt een *trigger* ontnomen om eventuele niet verwachte effecten in de vervolgonderdelen terug te voeren op een incorrect antwoord op een eerder onderdeel.

Institutionele factoren	LSC DT	Op school worden wiskundige technieken als 'waar' geponeerd door de docent, omdat een wiskundig theoretische onderbouwing achterwege blijft. De school (boek, docent) heeft daarmee het 'waarheid gezag'

In haar artikel nuanceert Sierpinska het conceptuele wiskundige model: is het wel inderdaad zo dat het volledig inpassen van het conceptuele wiskundige model tot betere resultaten leidt? Het zou in elk geval gepaard gaan met grote

investeringen in moeite en geld, maar zou het wel leiden tot de gewenste effecten als er zo veel factoren het effect hiervan mede bepalen?

1.1.4 De voorkeur van studenten voor procedurele boven conceptuele oplossingen

In een samenwerkingsonderzoeksproject tussen Zuid Afrika en Zweden wordt door Engelbert, Bergsten en Kågesten (Engelbrecht et al., 2009) onderzocht in hoeverre het wiskundeonderwijs voor engineering studies meer conceptueel zou moeten worden ingericht dan de huidige meer procedurele benadering.

In dit onderzoeksproject is allereerst onderzoek gedaan naar conceptuele en procedurele wiskundekennis. In (Engelbrecht et al., 2009) scherpen de onderzoekers de termen met betrekking tot kennis aan, om onduidelijkheden te voorkomen. Zij doen dit omdat in het wiskundeonderwijs termen als *kennis*, *begrip* en *denken* verschillend worden gebruikt. Ook termen als *relationeel* en *instrumenteel* duiden andere constructen aan dan *conceptueel* en *procedureel*.

Het onderscheid tussen conceptuele en procedurele kennis is zeer complex is en vaak lastig te maken. Daarom gaan Engelbrecht et al. (2009) verder in op de kennistheorie van Tall (Tall, Gray, Bin Ali, Crowley, DeMarois, McGowen, Pitta, Pinto, Thomas, Yusof, 2001), die naast het onderscheid van deze twee soorten kennis, vooral ook ingaat op datgene wat hun verbindt.

Tall stelt namelijk dat er naast deze twee soorten kennis er een derde soort kennis is en introduceert hiervoor de notie van een *procept*: een cognitieve construct in welke het wiskundige symbool op 2 manieren kan worden opgevat; enerzijds procedureel als resultaat van bewerkingen en anderzijds als losstaande te manipuleren entiteit. De procept kan worden gezien als de mentale brug tussen conceptuele en instrumentele kennis wanneer wiskunde wordt beoefend.

Engelbrecht et al. (2009) stelt dat onderscheiden van de verschillende soorten kennis echter ingewikkeld blijft, temeer omdat de relaties tussen de specifieke kennisonderdelen (welke bijvoorbeeld structureel of instrumenteel zijn) kunnen variëren van diep tot oppervlakkig.

Dit alles gaat over welke soorten kennis er uiteindelijk gevormd worden wanneer wiskunde wordt beoefend. Maar hoe verloopt de vorming van deze soorten kennis nu? Engelbrecht et al. (2009) stelt dat het wiskundeleerproces niet zozeer stap-voor-stap verloopt waarbij mentale constructen logischerwijs stap voor stap en na elkaar worden gevormd, maar juist een dynamisch proces is waarin procedurele en conceptuele kennis parallel aan elkaar worden gevormd en ontwikkeld.

Daarom kan de vraag worden gesteld of het onderwijs wel zozeer moet worden ingericht dat bijvoorbeeld eerst de procedures of de concepten moeten worden onderwezen, of juist in een geïntegreerde manier. Op basis van een literatuurstudie concludeert Engelbrecht et al (2009) dat de moeilijkheid van het onderscheiden van de verschillende soorten wiskundekennis terugkomt wanneer deze wordt beschouwd in de context van het beoefenen, onderwijzen

en leren van wiskunde. Er is een tendens in het onderzoeksveld om zich vooral te richten op een geïntegreerde kijk op de dynamiek tussen de verschillende soorten wiskundekennis

In hun onderzoek heeft Engelbrecht at al (2009) een instrument ontwikkeld om na te gaan wanneer en hoe studenten de verschillende soorten kennis (instrumenteel en conceptueel) inzetten bij wiskundetaken die zodanig ontworpen zijn dat vooral de ene dan wel de andere soort kennis ingezet dient te worden. Zij realiseren zich echter dat wiskundetaken lastig zijn te classificeren als zuiver instrumenteel of conceptueel: indien een bepaald type probleem herhaaldelijk wordt aangeboden, is deze instrumenteel in plaats van conceptueel.

Dit komt in hun nabeschouwing van het onderzoek weer aan de orde. Of wiskundeproblemen conceptueel of instrumenteel zijn, is vooral afhankelijk van de mate van ervaring van degene die de problemen moet oplossen.

De onderzoekers hebben gemerkt dat veel studenten de neiging hebben om conceptuele problemen op een instrumentele manier proberen op te lossen. Dit wil zeker niet zeggen dat dit een indicatie is van een laag wiskundeontwikkelingsniveau. Voor sommige instrumentele oplossingen was verfijnd wiskundig werk vereist.

Engelbrecht et al (2009) stelt dat het zeker wel mogelijk is om onderzoek te doen naar conceptuele en instrumentele problemen en de manier waarop deze worden uitgewerkt, maar dat het ingewikkeld is en dat men voorzichtig moet zijn bij het interpreteren van de resultaten gezien alle complexe afhankelijkheden tussen de gevormde mentale constructen.

1.1.5 Ontdekking en uitvinding in wiskunde: the *crystalliene concept*

De vooraanstaande onderzoeker David Tall formuleert in (Tall, 2010) een cognitief concept dat een theoretische basis biedt aan diverse verschillende theorieën over de cognitieve ontwikkeling (met betrekking tot wiskunde) en waarbij hij het menselijk denken en de structuur van wiskunde samenbrengt: het crystalliene concept.

Het crystalliene concept representeert (het proces van wiskundige) abstractie om het geheel van wiskundige concepten te beschrijven met een steeds kleinere maar rijkere set van wiskundige principes. Dit zorgt er bijvoorbeeld voor dat concepten binnen verschillende wiskundige domeinen beschreven kunnen worden met hetzelfde overkoepelende 'idee'. Dit overkoepelende idee is abstracter en kan verschillend tot uiting komen in de verschillende 'concrete(re)' wiskunde domeinen. Het overkoepelende idee zou gezien kunnen worden als een abstractie(klasse) waarvan verschillende instanties bestaan.

Het wiskundige denken kan compacter worden beschreven, het versimpelt een veelvoud aan diverse concepten met hun relaties, en zorgt op die manier voor 'denken op een hoger niveau'.

Tall stelt dat degene die deze abstracties zich echt eigen heeft gemaakt, de wiskunde simpelere en daarmee tevens mooier zal ervaren: *less is more*. Echter, degene die niet in staat is het proces van generalisatie en abstrahering te volgen, zal een toenemende complexiteit ervaren die welhaast onmogelijk te hanteren is.

Volgens Tall is het essentieel te beseffen dat verschillende mensen / studenten zich in verschillende ontwikkelingsstadia bevinden bij het vormen van crystalliene concepten en waarbij ze de uitingen hiervan in verschillende contexten (wiskundige domeinen) hebben aanschouwd. Daarom moet bij het leren en onderwijzen van wiskunde op de lange termijn, rekening gehouden worden met de onderliggende ontwikkeling (van deze crystalliene concepten).

1.1.6 The role of intuition in geometrie education

Intuïtie wordt vaak gezien als een essentieel onderdeel in het leren van meetkunde, toch blijft de vraag hoe deze vaardigheid effectief te ontwikkelen bij studenten. In (Fujita, Jones & Yamamoto, 2004) beschrijft Fujita en anderen de resultaten van hun onderzoek naar innovatieve lesmethoden in het begin van de 20ste eeuw in Duitsland en Engeland.

In hun artikel merken Fujita en anderen op dat een precieze definitie van intuïtie moeilijk te formuleren is. In hun artikel gaan zij uit van de werkdefinitie dat *intuïtie* een "mentale vaardigheid is zodat meetkundige platte en ruimtefiguren kunnen worden voorgesteld: deze figuren creëren en bewerken om daarmee meetkundige problemen op te lossen" (Fujita et al, 2004).

Fujita heeft juist het begin van de 20ste eeuw gekozen omdat in die tijd grote inspanning is verricht om het meetkundeonderwijs te verbeteren. Fujita onderzoekt in het bijzonder het werk van P. Treutlein uit Duitsland en C. Godfrey uit Engeland.

<u>Duitsland</u>
In Duitsland heeft de vooraanstaande wiskundige Klein in deze tijdsperiode ervoor gepleit om het wiskundeonderwijs te organiseren vanuit het perspectief van 'functioneel denken'. Dit heeft grote invloed gehad op het wiskunde- en natuurwetenschappenonderwijs, waarbij het Meran Rapport (Fujita et al, 2004) richtinggevend was. In dit rapport is het meetkundeprogramma nader uitgewerkt. In dit programma werden de vakken Meetkundepropedeuse (11-jarigen) en de Meetkunde (13 tot en met 17 jarigen) onderscheiden. In het rapport werd gesteld dat praktische en intuïtieve benaderingen vooral belangrijk zijn voor het leren van meetkundige concepten. In de Meetkundepropedeuse werd gestart met observaties van dingen uit het echte leven en vervolgens werden de basisconcepten van figuren bestudeerd, het gebruik van passer en liniaal en tekenen (construeren) en meten. In de Meetkunde volgde een meer theoretische beschouwing van de meetkundige figuren en werd gezien als een formeel meetkundevak. Het doel van de twee vakken Meetkundepropedeuse en Meetkunde was om behalve het logisch denken te bevorderen, ook om de studenten de wereld wiskundig te laten zien.

Dat was temeer een reden om vooral ook om vaardigheden als 'intuïtief ruimtelijk denken' en 'functioneel denken' te ontwikkelen.

Treutlein was het schoolhoofd van de Realgymnasium in Karlsruhe en heeft voor zijn school een eigen propadeuse meetkunde ontwikkeld en ingezet, naar de richtlijnen van het Meran Rapport uit 1905. Treutlein was van mening dat het zeer belangrijk was om *voorstellingsvermogen* te trainen door middel van de studie van meetkunde. Treutlein heeft zijn eigen leerboek geschreven en hierin werd vooral gepoogd om 'intuïtieve mentale ruimtevoorstellingsvaardigheden' te ontwikkelen, wat Treutlein beschouwde als een essentiële vaardigheid in zowel de meetkunde als het dagelijks leven.

In (Fujita et al, 2004) worden twee voorbeelden gegeven uit het werk van Treutlein. In het eerste voorbeeld moesten studenten in het hoofd nieuwe figuren creëren vanuit bepaalde basisfiguren, zoals een rechthoekige driehoek. Hierbij moeten de studenten de platte figuren zich voorstellen als ruimtelijke figuren om zoiets als een reflectie zich voor te kunnen stellen. Door dit goed te trainen zouden de studenten uiteindelijk in staat moeten zijn om alle combinaties van figuren zich voor te stellen en hierbij manipulaties (zoals reflecties) op uit te voeren.

In het tweede voorbeeld werd eerst een concrete kubus beschouwd en bestudeerd, om daarna een 'luchtkubus' voor te stellen en hier denkactiviteiten op uit te voeren. Deze denkactiviteiten mochten / moesten ondersteund worden met arm- en handbewegingen: hiermee kon de kubus 'mentaal gevoeld' worden om zo parallelle zijden, posities van zijden ten opzichte van elkaar, etc. Te vinden.

Treutlein was van mening dat het onderwijs moest starten met de studie van concrete wiskundige figuren en niet met de studie van dingen in het echte leven. Hij voerde hiervoor twee redenen aan: ten eerste werd de concentratie alleen maar bemoeilijkt en verstoord, en ten tweede zouden studenten alleen maar wiskundige figuren kunnen herkennen in het echte leven als ze al een voorstelling hebben van deze figuren.

<u>Engeland</u>
Lange tijd bestond het meetkundeonderwijs in Engeland uit het behandelen van Euclidische meetkunde. Er waren wel wiskundigen die veranderingen in het programma voorstelden, maar deze werden tot en met ongeveer de 19de eeuw tegen gehouden. In de tijd van het begin van de 20ste eeuw, de tijd van Godfrey, bestond er in Engeland (uiteindelijk) een voedingsbodem om het meetkundeonderwijs te veranderen.

Het was met name J. Perry, een Engineering professor, die een verandering in gang zette. Hij betwijfelde de educatieve waarde van Euclidische meetkunde voor alle studenten. Daarentegen was hij een voorstander van de introductie van experimentele taken in de vroege onderwijsjaren. Er ontstond een discussie over het wiskunde (meetkunde) onderwijs niet alleen in Engeland, maar ook in andere delen van de wereld. Deze discussie leidde in Engeland al spoedig tot

overeenstemming dat een *praktische* en *intuïtieve* benadering van meetkundeonderwijs moest plaatsvinden in de vroege jaren van het (huidige) voortgezette onderwijs. Hiermee zouden vaardigheden worden ontwikkeld die nodig zouden zijn bij de deductieve bewijzen in het latere meetkundeonderwijs.

In 1903 schreef Godfrey samen met W. Siddons een leerboek dat al spoedig tot een van de populairste tekstboeken in Engeland zou uitgroeien. Het bestond uit twee delen: experimentele meetkunde en theoretische meetkunde.

In de experimentele wiskunde was de doelstelling om concepten van meetkundige figuren te leren en bepaalde meetkundige feiten te ontdekken, beide door middel van activiteiten als tekenen en meten.

In de theoretische meetkunde werd de Euclidische meetkunde behandeld. De behandeling van de stellingen en bewijzen werd vaak voorafgegaan door middel van praktische activiteiten: ontdekken van nieuwe inzichten en het consolideren van reeds aanwezige kennis.

De tekstboeken van Godfrey waren mede ontworpen om het zogenaamde 'meetkundige oog' te ontwikkelen. Dit is een mentale vaardigheid om meetkundige eigenschappen te herkennen in een figuur. Een voorbeeld hiervan is het herkennen van congruentie.

Het trainen van dit meetkundige oog kon plaatsvinden door middel van experimentele taken. Dit vond plaats in de beide meetkundevakken. Deze experimentele taken zijn vooral gericht op het oriënteren van de studenten: de studenten hebben alvast kennis gemaakt met een essentieel onderdeel in een bewijs dat ze moeten gaan leveren voor een bepaalde stelling. De taken zijn zonodig voorgestructureerd en zo ontworpen dat studenten actief bezig zijn om dit essentiële onderdeel te ontdekken.

Beschouwing
In het huidige wiskundeonderwijs wordt intuïtie nog steeds beschouwd als een essentiële vaardigheid. Vernieuwend meetkundeonderwijs zou ervoor moeten zorgen dat intuïtie en meetkundetheorie duidelijker zijn gekoppeld; logische redeneringen en intuïtieve benaderingen moeten naast elkaar worden uitgevoerd en zullen elkaar versterken wanneer meetkundige problemen opgelost moeten worden.

De schrijvers merken ten slotte op dat er nog steeds geen definitief inzicht is wat een effectieve onderwijsaanpak is met betrekking tot onder andere intuïtie en dat er nog veel onderzoek zal gedaan moeten worden.

1.1.7 Visualisatie in ruimtemeetkunde

In (Gutiérrez, 1996) worden (tussen)resultaten van onderzoek op het gebied van visualisatie in de ruimtemeetkunde. Op basis van een literatuuronderzoek wordt gekomen tot een voorstel voor een theoretisch model voor visualisatie. Dit model bestaat uit de volgende onderdelen:

onderdeel	*beschrijving*
Mentale beelden	Cognitieve representatie van een wiskundig concept of eigenschap door middel van visuele en ruimtelijke elementen
Externe representaties	Verbale of grafische representaties (zoals teksten, plaatjes, tekeningen, diagrammen) van concepten of eigenschappen, die helpen om mentale beelden te maken en te transformeren en om visueel te redeneren
Visualisatieproces	Een mentale of fysische actie waarbij mentale beelden zijn betrokken
Visualisatievaardigheden	Vaardigheden die benodigd zijn voor cognitieve processen met mentale beelden om een probleem op te lossen, met name - Deel-figuur perceptie: apart beschouwen (isoleren) van een deel van een (complex) figuur - Perceptuele gelijkheid: herkennen dat bepaalde eigenschappen onafhankelijk zijn van grootte, kleur, materiaal of positie - Mentale rotatie: het dynamisch voorstellen van een transformatie zoals een rotatie (als een soort film) - Ruimtelijke percepties: figuren ten opzichte van elkaar kunnen relateren - Visueel onderscheid maken: overeenkomsten en verschillen tussen verschillende figuren opmerken

Gutiérrez heeft onderzocht wat het effect is van 3 dimensionale meetkundesoftware op deze onderdelen. Het artikel beschrijft alleen enkele tussenresultaten en er worden geen concrete conclusies getrokken.

Gutiérrez besluit met op te merken dat er nog heel veel onderzoek moet plaatsvinden om antwoorden te geven op vragen als:

- Hoe worden mentale beelden van wiskundige concepten gevormd?
- Hoe worden studenten bekwaam in het creëren en gebruiken van mentale beelden?
- Welke rol hebben mentale beelden op het begrip van wiskundige concepten en in probleem oplossen?
- Wanneer heeft visualisatie de voorkeur boven analyse of andersom?
- Hoe kunnen mentale beelden worden gecommuniceerd (onderwezen!)?

Oftewel: " ... there is still a long way to go" (Gutiérrez, 1996).

1.2 Veldonderzoek

1.2.1 Inventariserend onderzoek havo-didactiek voor bèta en techniekonderwijs

Het Platform Bèta Techniek heeft het Universum Programma ontwikkeld, een stimuleringsprogramma waarmee het platform een bijdrage probeert te leveren aan het aantrekkelijker en interessanter maken van bètaonderwijs zodat meer jongeren dan nu kiezen voor een bèta of technische studie in het hoger onderwijs.

Bij dit Universum Programma zijn diverse scholen in Nederland betrokken. Deze scholen hebben gemerkt dat aanpakken die wel werken op het vwo, niet per definitie werken op het havo. Daarom hebben zij de vraag aan het Platform Bèta Techniek gesteld hoe een effectieve havo-didactiek eruitziet. Dit is aanleiding geweest voor een inventariserend onderzoek waarvan (Oomens, 2008) het resultaat is.

In (Oomens, 2008) is onder meer onderzocht wat de kenmerken van havo-leerlingen zijn en wat de relevante onderdelen zijn van een havo-didactiek voor bèta- en techniekonderwijs.

De kenmerken van havo-leerlingen zijn samengevat in onderstaande tabel.

Motivatie, schoolbeleving en interesse	- Prestatiemotivatie van havo- en vwo-leerlingen is gelijk - Havo-leerlingen zijn productgericht en willen op korte termijn resultaat - Havo-leerlingen worden gemotiveerd door positieve bekrachtiging en beloning - Havo-leerlingen zijn (meer dan vwo-leerlingen) gevoelig voor de houding van docenten - Havo-leerlingen zijn iets positiever over school dan vwo-leerlingen - Havo-leerlingen hebben met name interesse voor praktische en toepassingsgerichte onderwerpen - Havo-leerlingen zijn sterk gericht op de wereld buiten school
Leerstijl en studievaardigheden	- Havo-leerlingen zijn overwegend 'doeners' en (in mindere mate) 'beslissers' (leerstijlen Kolb) - Havo-leerlingen hebben een voorkeur voor de concrete strategie - Havo-leerlingen hebben, binnen duidelijke kaders, behoefte aan keuzevrijheid
Achtergrondkenmerken en prestaties	- Havo-leerlingen zijn sociaal en spontaan - Havo-leerlingen hebben een iets lagere intelligentie en meer moeite met transfer van kennis dan vwo-leerlingen
Overige kenmerken	- Havo-leerlingen spijbelen iets vaker dan vwo-leerlingen

	- Havo-leerlingen weten vaker dan vwo-leerlingen al wat voor werk ze willen gaan doen

In (Oomens, 2008) is daarnaast onderzocht wat een effectieve havo-didactiek zou kunnen zijn. Het antwoord wordt vooral gevonden in de formulering van de vier wezenlijke docentcompetenties die in onderstaande tabel zijn samengevat.

Didactische competentie	- Rekening houden met verschillende leerstijlen - Variatie in werkvormen - Activerende werkvormen
Vakinhoudelijke competentie	- Lesstof betekenisvol maken
Interpersoonlijk competent	- Betrokkenheid, belangstelling tonen - Positieve verwachtingen van leerlingen
Interpersoonlijk competent	- Empathisch tonen - Creëren veilig leerklimaat, waarin leerlingen zich gewaardeerd voelen en durven uiten

1.2.2 Verschil moet er wezen

In een werkdocument van het SLO dat door Berenice Michels is opgesteld, wordt ingegaan op verschillen tussen havo- en vwo leerlingen en hoe hiermee om te gaan (Michels, 2006). De schrijfster merkt op dat het een werkdocument is en geen rapportage van een afgerond project. Toch geeft het document een gefundeerd en helder overzicht van de materie. Aangezien helder is beschreven hoe tot bepaalde inzichten is gekomen, met duidelijke verwijzingen naar (wetenschappelijke) bronnen of op welke manier ervaringsdeskundigen informatie hebben geleverd, heb ik gemeend dit document als brondocument te mogen beschouwen.

Waargenomen verschillen tussen leerlingen en didactiek

Een aantal verschillen is waar te nemen tussen havo en vwo leerlingen. Op klassenniveau valt verder op dat klassen op de havo vaak veel diverser zijn samengesteld dan die op het vwo, wat op zich verklaard kan worden (Michels, 2006). Toch kunnen er wel algemene uitspraken gedaan worden over verschillen tussen havo en vwo leerlingen. Deze verschillen zijn er op gebieden als

- Leerlingkenmerken
- Schoolbeleving en motivatie
- Studievaardigheden en huiswerkgedrag
- Prestaties en toekomstverwachtingen

<u>Leerlingkenmerken</u>
De belangrijkste onderscheidende *cognitieve vaardigheid* betreft het verschil in leervermogen: abstraherend vermogen en snelheid van leren. Daarnaast hebben havo-leerlingen meer moeite met transfer.

Qua *leerstijlen*, zitten op het vwo vooral leerlingen die als 'denkers' getypeerd kunnen worden (volgens de leerstijlen van Kolb) en die beschikken over logisch-mathematische en verbale intelligenties (leerintelligenties volgens Gardner). Op de havo zitten vooral beslissers en doeners en leerlingen met andere ontwikkelde intelligenties.

Met betrekking tot *persoonlijkheid* en *zelfwaardering* valt onder meer op dat leerlingen op het vwo beter kunnen plannen en grote taken overzien. Hun algemene competenties zijn beter ontwikkeld.

Schoolbeleving
In (Michels, 2006) wordt onder meer gesteld dat havo leerlingen meer 'voor de leraar' werken en vwo-leerlingen meer voor de eigen ambitie. Verder werken havo-leerlingen meer product-gericht en worden vwo-leerlingen meer gegrepen door de stof. Dit houdt in dat de havo-leerling een tastbaarder doel nastreeft, wat kan variëren van een werkstuk tot een mooi cijfer. Havo leerlingen raken vooral gemotiveerd doordat deze spannend is, en raken ze echt gemotiveerd als ze 'er midden in zitten'. Havo-leerlingen hebben over het algemeen een kortere spanningsboog en zijn eerder afgeleid.

Studievaardigheden en huiswerkgedrag
Het blijkt dat havo-leerlingen liever actief met de leerstof aan de gang willen gaan. Verder zijn ze oppervlakkiger in hun reflectieve vaardigheden en zijn eerder tevreden met een antwoord. Vwo-leerlingen willen echt iets begrijpen en zijn beter in staat tot een daadwerkelijke reflectie.

Ten aanzien van huiswerk valt nogmaals op dat havo-leerlingen sterk taakgericht zijn: het gaat er niet om dat je iets leert van je huiswerk, maar dat je het afkrijgt.

Ook op het gebied van gehanteerde didactieken, valt een (enigszins gechargeerd) beeld te schetsen. Op de havo wordt nieuwe stof vaak aangeleerd vanuit bekende kaders; benodigde oude stof wordt herhaald. Vervolgens wordt geoefend, waarbij de oefeningen dicht bij de uitleg ligt. Er wordt gewerkt met kleine stapjes en de docent begeleidt intensief.

Suggesties voor lesaanpak

Nadat er is ingegaan op de verschillen, wordt een aantal handreikingen gedaan hoe met deze verschillen om te gaan in de lesaanpak. Er wordt evenwel met klem opgemerkt dat deze niet in de praktijk zijn getoetst.

Een typische les op de havo zou er als volgt uit kunnen zien:

- Een motiverende inleiding, aansluitend bij de belevingswereld van de jongeren
- Introduceren van nieuwe stof, sterk gestructureerd en in een actieve werkvorm, en waarbij voorkennis actief wordt herhaald
- Veel oefenen, dicht bij de uitleg en in kleine stapjes en met veel begeleiding

- De toetsing is vooral gericht op reproductie van geleerde technieken

Aangezien een havo-klas vaak diverser qua samenstelling is, ook op gebied van cognitieve vaardigheden, is differentiatie nog meer van belang. Een leerling die snel klaar is, kan een extra en wellicht uitdagender opdracht krijgen. Echter, "het inzetten van extra taken voor individuele leerlingen zal bij de productgerichte (havo) leerling al snel de vraag oproepen wat er met de uitkomst van de taak gebeurt" (Michels, 2006).

1.2.3 Beter inspelen op havo-leerlingen

Het IVA, een adviesorganisatie op het gebied van beleidsonderzoek, heeft op het verzoek van de VO-raad en een vijftigtal scholen onderzoek gedaan naar de problematiek rond havo 3 en 4 leerlingen. Aanleiding voor dit onderzoek was dat de bovenbouw vertraging oploopt, maar dat nog niet bekend is wat te doen om deze vertraging te voorkomen.

Ik heb (Vermaas, 2007) als brondocument opgenomen om een beter beeld te krijgen van de havo en hoe een didactiek hierop af te stemmen.

Uit het veldonderzoek is naar voren gekomen dat de groep havo 4 op zich sterk heterogeen is, onder ander veroorzaakt door verschillen in instroom (havo 3, vwo, vmbo), maar dat het algemene leerling-beeld is

- Korte termijn gericht
- Gebrek aan planningsvaardigheden en uitstelgedrag
- Korte concentratieboog
- Pragmatisch
- Weinig gemotiveerd

De leerlingen hebben een duidelijk beeld van de ideale leraar, dat ik hier met steekwoorden schets: orde, duidelijk, sfeer, enthousiast, respect, geïnteresseerd.

De overgang van havo 3 naar havo 4 is vooral moeilijk omdat de stof lastiger is en omvangrijker en dat hiervoor cognitieve en persoonlijke vaardigheden vereist zijn die bij de meeste leerlingen minder ontwikkeld zijn (zoals zelfstandigheid en planningsvaardigheden).

De wijze waarop de docent de lessen inricht, heeft grote invloed op de motivatie van leerlingen. Van belang is vooral

- Een goed sociaal klimaat: (veilige) groepsprocessen en een goede relatie tussen docent en leerlingen
- Rekening houden met de korte concentratieboog van leerlingen
- Rekening houden met het feit dat leerlingen moeite hebben om te reflecteren

In het onderzoek is nagegaan welke maatregelen genomen kunnen worden om de problemen op de havo op te lossen. Een van de maatregelen is het inzetten van een activerende didactiek (hoewel in het rapport tevens is opgemerkt dat het wel belangrijk is dat het helder is wat hier precies onder wordt verstaan en hoe deze vorm te geven...).

1.2.4 Tien didactische aandachtspunten voor de bètavakken op de havo

In (Hamer, 2010) wordt een onderzoek beschreven naar een specifieke havo-didactiek. Aanleiding voor dit onderzoek was de ervaring van veel docenten in het Universum Programma dat het doorvoeren van onderwijsinnovaties in havo-klassen andere eisen aan hen stelde. Op basis van literatuuronderzoek, expertconsultatie en observaties bij succesvolle havo-docenten, is een lijst van tien didactische aandachtspunten geformuleerd die de basis vormden van de trainingen.

Contact, maken en houden	inleven in de leerlingen goed contact houden met alle leerlingen relativerend en met humor niet erg vinden als het niet in één keer duidelijk is
Positieve feedback.	duidelijk maken dat lastige stof beheerst kan worden door veel redeneren en oefenen Positieve feedback
Prikkelen	Afwisselend Gevarieerde werkvormen die tegemoet komen aan uitdaging en nieuwsgierigheid (wedstrijd, uitdagend element, vanuit verbazing anders tegen de lesstof aan gaan kijken)
Procedurele duidelijkheid.	zelfwerkzaamheid door duidelijke kaders en heldere verwachtingen te stellen over gewenst gedrag en gewenst leerresultaat
Toegankelijkheid	stimuleren onderzoekende houding en vragen stellen veilige leeromgeving leerling samen met de docent op onderzoek
Werken in groepen	beredeneren en uitvoeren van opdrachten in groepen er op toe zien dat alle leerlingen aam bod komen
Cognitief activeren van leerlingen	practica, zelf experimenteren veel opdrachten maken en veel oefenen cognitief activeren en aanleren onderzoekende houding
Koppeling lesstof aan praktijk	Verbanden maken met de dagelijkse werkelijkheid
Structuur	schakelen tussen de niveaus van denken binnen de lesstof: concept, lesstof en de specifieke sommen/vragen
Goed kunnen uitleggen	uitleg in stappen, eventueel herhaaldelijk vanuit verschillende uitgangspunten

1.3 Literatuur op het gebied van probleemaanpak

Er is heel veel geschreven over allerlei wiskundige onderwerpen, van verschillend niveau en in verschillende vormen.

Een standaardwerk op gebied van probleemaanpak, is het boek van G. Polya "How to solve it". Dit boek is reeds geschreven in 1957, maar geldt nog steeds zoals gezegd als een standaardwerk.

In (Polya, 1957) wordt nader ingegaan op het oplossingsproces van wiskundige problemen. Volgens Polya verloopt dit proces in 4 fasen:

1. Begrijp het probleem
2. Maak een plan
3. Voer het plan uit
4. Blik terug

Polya heeft in (Polya, 1957) voor elk van deze fasen heuristieken uitgewerkt, die kunnen leiden tot een oplossing. Grofweg, in mijn eigen woorden: de benodigdheden voor de oplossing zitten reeds in je hoofd, je moet er (alleen maar...) voor zorgen dat je deze vereiste benodigdheden ophaalt uit je geheugen en op de juiste manier met elkaar gaat verbinden. Door jezelf bepaalde vragen te stellen, is het mogelijk meer grip op het probleem te krijgen en / of een stap verder te komen tot de oplossing.

Voor elk van de fasen, benoem ik de belangrijkste vragen die je jezelf kunt stellen of acties die je kunt nemen. Hierbij neem ik alleen die vragen op die voor havo 4 wiskunde van belang zijn.

Begrijp het probleem
Wat wordt er gevraagd? Wat zijn de gegevens? Maak een tekening Gebruik notaties

Maak een plan – vind een verbinding tussen de gegevens en het gevraagde
Heb je het eerder gezien? Eventueel in een iets andere vorm? Ken je een gerelateerd probleem? Is er een stelling die van toepassing is? Kijk naar de gegevens: welke andere problemen heb je reeds opgelost met deze gegevens? Kun je het resultaat hiervan of de methode gebruiken? Los een gerelateerd (algemener, specifieker, analoog) probleem op, Heb je alle gegevens gebruikt? Wat kun je wel berekenen m.b.v. de gegevens?

Voer plan uit
Is elke stap correct?

Blik terug - beoordeel de oplossing
Kun je nagaan of het resultaat klopt? Kun je nagaan of the methode / redenering klopt? Kun je de oplossing ook anders bepalen?

2 Experimentgroep en controlegroep

De experimentgroep bestaat uit de 25 leerlingen van het wiskunde B cluster HAVO 4 in schooljaar 2010-2011.

De controlegroep bestaat uit de groep leerlingen die in het voorgaande schooljaar het wiskunde B cluster vormden in HAVO 4.

De leerlingen in de experimentgroep en de controlegroep hebben de volgende kenmerken.

kenmerk		*experiment-groep*	*controle-groep*
geslacht	meisjes	6	9
	jongens	19	18
school-achtergrond schooljaar 2009-2010	doorstromend vanuit HAVO 3	21	21
	doorstromend vanuit VWO 3	1	1
	doorstromend vanuit VMBO-T	2	1
	zittenblijver (HAVO wiskunde B)	1	4

Op basis van de kenmerken van de experimentgroep en de controlegroep kan worden geconcludeerd dat de groep leerlingen die in het voorgaande schooljaar het wiskunde B cluster vormden in HAVO 4 terecht als controlegroep genomen kan worden.

3 Materiaal - lesmateriaal

Deze bijlage beschrijft het materiaal. Een belangrijk onderdeel hiervan zijn de lesvoorbereidingen.

3.1 Ontwerp

De ontwerpafwegingen zijn in detail beschreven in hoofdstuk 3. In de volgende paragraaf is een overzicht opgenomen van de didactische onderdelen die zijn ingezet. Het gaat hierbij om lesaanpakken, materialen, manieren van uitleg, etc.

3.2 Overzicht didactische onderdelen

In de tabellen hieronder zijn een overzichten getoond van de didactische onderdelen die zijn opgenomen in de lessen bij de behandeling van de stof. Een aantal van deze onderdelen hebben uiteraard relaties met elkaar.

Het categoriseren van de didactische onderdelen naar de ontwerpbeslissingen bleek geen duidelijker overzicht op te leveren. Aan veel didactische onderdelen liggen meerdere ontwerpbeslissingen aan ten grondslag. Omdat het centrale onderwerp van dit onderzoek kennisbladen betreft, is er voor gekozen om deze wel in een aparte tabel op te nemen. Maar er wordt met klem opgemerkt dat de onderdelen ook relaties hebben met de andere ontwerpbeslissingen, zoals bijvoorbeeld ‘activerend onderwijs’ en ‘intuïtieve bewijzen bij formules’.

Les(sen)	*Didactisch onderdeel*
	Kennisbladen
1	Intuïtieve bewijzen voor oppervlakteformules van de driehoek en parallellogram
1	Intuïtief bewijs voor stelling dat de hoeken in een driehoek samen altijd 180˚ zijn
2	Leerlingen laten leren tijdens de les
2	Actief herhalen van havo 3 de stof SOSCASTOA
2	Expliciteren van wanneer je kunt rekenen aan een rechthoekige driehoek
2	Leerlingen actief laten inzien dat een rechthoek, vierkant, gelijkzijdige driehoek en parallellogram opgevat kunnen worden als samengesteld uit 2 congruente rechthoekige driehoeken
4	Centrale reflectie over het doorrekenen van een regelmatige veelhoek

5	Uitleg over sector en boog aan de hand van een verhoudingstabel
10	Reflectie over oppervlaktesom van de kegel; doorsnede kegel erbij halen
11	Expliciteren van de kegeldoorsnede: welke kegeleigenschappen komen hierin voor en op wat voor manier kun je hier aan rekenen
12	Gezamenlijke reflectie op opgave 11-14
14	Leerlingen zelf laten onderzoeken op welke manier een aantal ruimtefiguren en de bijbehorende inhoudformules overeenkomen

Les(sen)	*Didactisch onderdeel*
1	Demonstratie m.b.v. loodlijntje dat de hoogtelijn de kortste afstand is van punt naar lijn
1	Demonstratie door middel van voeten uit elkaar plaatsen en dat daarmee een gelijkbenige driehoek wordt gevormd
3	Leerlingen pas verder laten gaan bij een opgave als ze een plan hebben opgesteld
4	Leerlingen laten nadenken over de vraag wanneer de sinus oppervlakteformule van de driehoek handig is
6	Gedachteconstructie van een regelmatige piramide en hier denkactiviteiten op uitvoeren
6	Grote papieren uitslag van de regelmatige piramide
6	Draadmodel regelmatige piramide
6	Gedachteconstructie van een regelmatige piramide en hier denkactiviteiten op uitvoeren
6	Grote papieren uitslag van de regelmatige piramide
6	Draadmodel regelmatige piramide
6	Appetizer: uitslag van een kubus met touwtje die als vanzelf in elkaar vouwt
6	Appetizer: creëren van een regelmatige vijfhoek wanneer een knoop wordt gelegd in een strook papier
6	Andere invalshoek en lichte verbazing: ‘inslepen van een koorde’ bij een cirkel en de oppervlakte van het segment laten uitrekenen
8	Kegelonderzoek
8	Grote papieren kegeluitslag
8	Grote papieren kegelmanteluitslag: kunnen variëren met de middelpuntshoek en kijken wat het effect is
9	Papieren uitslag van een cilinder
9	Demonstratie met touwtje i.v.m. uitleg kortste afstand tussen twee punten – rechte lijn

11	Activerende activiteit: zet de 3 dingen op een rij die je moet kennen van een kegel om er aan te kunnen rekenen
12	Inzichtelijk uitleggen waarom de verhoudingstabel gebruikt kan worden om de top van de niet-afgeknotte kegel te berekenen
12	Geogebra applet waarin dynamisch wordt getoond dat de top van de niet-afgeknotte kegel hoger en lager is, als de straal van de afknotschijf wordt gevarieerd
14	Geogebra applet waarin dynamisch de hoogte kan worden gevarieerd van een aantal ruimtefiguren
14	Ontwikkelen gevoel waarom de inhoudformule van de kegel ook een factor 1/3 heeft, net als de piramide a.d.h.v. een Geogebra applet waarin het aantal zijden van een regelmatige piramide steeds groter wordt gemaakt
14	Ontwikkelen gevoel waarom er een factor 1/3 is in de formule van een piramide a.d.h.v. een papieren kubus die is opgebouwd uit 3 congruente piramiden
16	Concreet werken met de probleemaanpak heuristieken: uitgaan vanuit het gevraagde, uitgaan van de gegevens, wat weet ik er van?
16	Drie kolommen aanpak om probleemaanpak heuristieken concreet te maken

3.3 Lesvoorbereidingen

3.3.1 Les 1 (lesvoorbereiding) – Start hoofdstuk en maken kennisoverzicht

3.3.1.1 Globale inhoud

- Beschrijven van wat meetkunde op de HAVO is en op wat voor manier dit anders is dan het eerdere hoofdstuk
- Maken benodigde kennisoverzicht vlakke meetkunde: standaardfiguren met bijbehorende oppervlakteformules
- Van enkele oppervlakteformules intuïtieve bewijzen geven om leerlingen hiervoor meer 'gevoel' te geven: beter mee kunnen werken en beter in staat zijn om ze te onthouden

3.3.1.2 Leerdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerling weet dat meetkunde het doordenken en doorrekenen van meetkundige figuren is
2	Leerling kent de eigenschappen en oppervlakteformules van de vlakke figuren rechthoek, vierkant, parallellogram, trapezium, driehoek (algemeen, rechthoekig, gelijkbenig), cirkel
3	Leerling kent de intuïtieve bewijzen voor de oppervlakteformules voor parallellogram, trapezium, driehoek
4	Leerling kent het bewijs van stelling 'som hoeken is 180°' voor de driehoek
5	Leerling weet dat hoogte de lengte is van de hoogtelijn, en dat de hoogtelijn een hoek van 90° heeft met minimaal 1 zijde

3.3.1.2.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerlingen hebben actief gewerkt aan de stof
2	Leerlingen hebben het eerste kennisblad ingevuld voor wat betreft de behandelde stof
3	Leerlingen weten wat het huiswerk voor de volgende keer is

3.3.1.3 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

De leerlingen gaan in de les het kennisoverzicht vlakke meetkunde compleet maken door het raamwerk op de uitgereikte werkbladen aan te vullen. Het centraal bespreken vindt idealiter plaats door het werkblad op het digibord te tonen en deze net als de leerlingen aan te vullen met tekst, tekeningen, etc.

Nr	*Randvoorwaarden*
1	De les wordt gegeven in een lokaal met digibord, of beter nog, in een lokaal met *whiteboard* en *beamer* omdat dit beter te beschrijven is.
2	In het lokaal is een computer beschikbaar met daarop Starboard software

Nr	*Omschrijving van de voorbereidingen*
1	De voorbewerkte kennisbladen moeten beschikbaar zijn, dus: voor het aantal leerlingen in de klas moet een werkblad gekopieerd zijn. Eventueel voor elke leerling in tweevoud; één versie als werkversie en de ander als 'nette' versie.
2	Het voor deze les beschikbare *Starboard*-bestand is beschikbaar en kan geopend worden.
3	Touwtje met daaraan vast een zwaar steentje of zoiets dergelijks (loodlijn)

3.3.1.4 Planning van de lesactiviteiten

Fase	*Duur*	*Docent*	*Leerlingen*
Inleiding	5	- Start van meetkunde - Waarom deze werkbladen en wat gaan we doen	

Start maken kennisoverzicht	5	- Aansturen leerlingen om te gaan werken aan rechthoek, vierkant en parallellogram	- Nadenken over stof en invullen werkblad m.b.t.
			  - Eigenschappen
			  - Oppervlakteformule

	5	- Centrale bespreking van de rechthoek: welke eigenschappen, hoe zichtbaar maken in de figuur, welke 2 vormen van de oppervlakteformule	- Luisteren en bijwerken eigen werk
Onder begeleiding leerlingen kennisoverzicht laten maken	30	- Aansturen leerlingen om aan het werkblad te werken - Leerlingen prikkelen om na te denken over intuïtieve bewijzen van de oppervlakteformules en de 180° stelling voor driehoeken - Centrale momenten inlassen om o de stof samen te vatten en het overzicht op digibord te tonen wat op het kennisblad moet komen te staan o de intuïtieve bewijzen te behandelen o hoogtelijn=kortste afstand uitleggen m.b.v. demonstratie loodlijntje Het te gebruiken *Starboard*-bestand toont het werkblad in 2 aparte *slides*. Halverwege de les is slide 1 afgerond en wordt vanaf dan gewerkt aan slide 2.	- Werken aan het werkblad - Luisteren naar centrale besprekingen - Denken na over bewijzen
Einde les	5	- Volgende les verder met het maken van het overzicht: rechthoekige driehoek en gelijkbenige driehoek - Huiswerk: maken opgaven 1 en 2 uit gedeelte *Voorkennis* uit Getal en Ruimte havo b, deel 1 op blz. 142 en 143.	- Weten het huiswerk en hebben dit genoteerd in hun agenda
	50		

3.3.1.4.1 Gedetailleerde inhoud

- Inleiding
    - Meetkunde is het berekenen van eigenschappen van een meetkundige figuur, zonder dat alle hiervoor benodigde gegevens direct beschikbaar zijn. Uit wat wel bekend is, moet je het gevraagde gaan berekenen.
    - Hiervoor is kennis nodig hoe eigenschappen samenhangen en hoe je hier mee kunt rekenen. De opgaven kun je oplossen door een plan te bedenken hoe je uit de gegevens het gevraagde kunt berekenen
    - Daarom in de lessen 2 belangrijke onderdelen
        - Leren van basiskennis en basisvaardigheden
        - Leren van een systematische probleemaanpak om vraagstukken op te lossen
    - We beginnen deze met een overzicht van de vlakke meetkunde

Tijdens de les, wanneer het aan de orde is, de volgende uitleg geven (aanvullend op wat op het digibord zal worden geschreven als inhoud van het kennisblad)

- Uitleg wat hoogte is
    - Demonstratie loodlijntje
    - 'Laten zien' dat de kortste afstand via het loodlijntje is en dat elke andere weg naar de vloer (of tafel) echt een langere afstand oplevert. Het loodlijntje maakt een haakse hoek met de vloer (of tafel) en dat is de essentie.
    - In een meetkundige figuur ook afstanden tussen punten en lijnen die niet horizontaal lopen. In dat geval maakt de hoogtelijn ook een haakse hoek met de lijn waar tot de afstand bepaald moet worden
    - Vervolgens de klas laten nadenken over de hoogtelijn van een parallellogram en een leerling de hoogtelijn laten tekenen op het bord
- Uitleg gelijkbenige driehoek
    - Demonstratie door middel van voeten uit elkaar zetten en daarmee een driehoek vormen. De benen zijn even lang en de basishoeken zijn even groot.

Na de les moet het werkblad door de leerlingen ingevuld zijn en is het centraal behandeld en aangevuld, zoals getoond in `Kennisblad 1 (ingevuld) - vlakke meetkunde (A3 dubbel).pdf`.

3.3.1.4.2 Bordgebruik

Deze les maakt gebruik van het Starboard-bestand `H4wisB - H2 meetkunde, introductieles 1.yar`. Deze wordt tijdens de les getoond en aangevuld.

3.3.2 Les 2 (lesvoorbereiding) – Herhalen en verder aanvullen kennis

3.3.2.1 Globale inhoud

- Herhalen eerdere kennis
- Aanvullen met nieuwe stof: SOSCASTOA, gelijkbenige driehoek

3.3.2.2 Leerdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerling kan intuïtief aanvoelen waarom oppervlakte=πr^2 en omtrek=$2\pi r$ aan de hand van oppervlakte en omtrek vierkant
2	Leerling weet hoe zijden en hoeken te berekenen van een rechthoekige driehoek m.b.v. SOSCASTOA
3	Leerling weet dat sinus, cosinus en tangens verhoudingen van zijden zijn en dat ze samenhangen met de grootte van de hoek
4	Leerling weet en kan begrijpen dat in de rechthoekige driehoek de sinus en cosinus altijd tussen 0 en 1 liggen en de tangens kan elk willekeurig getal > 0 aannemen
5	Leerling weet dat alle zijden, hoeken en de hoogte te berekenen zijn als gegeven zijn: ZZ of ZH
6	Leerling weet dat de rechthoekige driehoek kan worden gevonden in de rechthoek/vierkant en de gelijkbenige driehoek
7	Leerling weet dat het uitwerken van meetkundige berekeningen in 3 stappen gaat: 1. letterstap, 2. invulstap, 3. rekenstap
8	Leerling weet dat de gelijkbenige driehoek kan worden doorgerekend door het introduceren van een hoogtelijn door de top

3.3.2.2.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerlingen hebben actief gewerkt aan de stof
2	Leerlingen hebben het eerste kennisblad ingevuld voor wat betreft de behandelde stof
3	Leerlingen weten wat het huiswerk voor de volgende keer is

3.3.2.3 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

De leerlingen gaan in de les het kennisoverzicht vlakke meetkunde aanvullen door het eerdere uitgereikte en het nieuw uitgereikte kennisblad zelf aan te vullen. Het centraal bespreken vindt idealiter plaats door het werkblad op het digibord te tonen en deze net als de leerlingen aan te vullen met tekst, tekeningen, etc.

Nr	*Randvoorwaarden*
1	De les wordt gegeven in een lokaal met digibord, of beter nog, in een lokaal met *whiteboard* en *beamer* omdat dit beter te beschrijven is.
2	In het lokaal is een computer beschikbaar met daarop Starboard software
3	Leerlingen hebben zich georiënteerd op het doorrekenen van een rechthoekige driehoek doordat ze het huiswerk hebben gemaakt: de opgaven 1 en 2 uit de sectie Voorkennis (zie vorige lesvoorbereidingsformulier)

Nr	*Omschrijving van de voorbereidingen*
1	De voorbewerkte kennisbladen moeten beschikbaar zijn, dus: voor het aantal leerlingen in de klas moet een werkblad gekopieerd zijn. Eventueel voor elke leerling in tweevoud; één versie als werkversie en de ander als 'nette' versie.
2	Het voor deze les beschikbare *Starboard*-bestand is beschikbaar en kan geopend worden.

3.3.2.4 Planning van de lesactiviteiten

Fase	*Duur*	*Docent*	*Leerlingen*
Inleiding	5	- Inleiding	
Herhalen en leren kennis uit les 1	5	- Aansturen om de kennis uit de eerste les te leren aan de hand van het kennisblad - Ondertussen op de achterkant van het bord 2 figuren tekenen: cirkel en driehoek	- leren eerste kennisblad

	5	- 'centrale overhoring' door 2 leerlingen na elkaar voor het bord te roepen die een paar vragen moeten beantwoorden - toevoegen als docent: extra uitleg over cirkel	- meedoen met de 'overhoring' en nagaan of het klopt
Rechthoekige driehoek: SOSCASTOA	15	- uitleg over SOSCASTOA (goniometrische verhoudingen) - instelling GR m.b.t. DEG en RAD - 3 stappenuitwerking	- luisteren en meedenken - doorrekenen rechthoekige driehoek: berekenen zijde
Samenstellingen van 2 gelijke rechthoekige driehoeken	5	- aansturen om leerlingen na te laten denken over 'mooie' samengestelde figuren van 2 gelijke rechthoekige driehoeken (spiegel en, draaien en verplaatsen toegestaan)	- nadenken over en tekenen van 'mooie' samenstellingen
Gelijkbenige driehoek	5	-	-
Einde les	5	- afronden	- Luisteren
	50		

3.3.2.4.1 Gedetailleerde inhoud

- Inleiding
    - Laatste les om de kennis voor nu op te bouwen
    - Volgende les gaan we problemen oplossen waarin we dit gaan toepassen; accent komt dan te liggen op probleemaanpak

- 'Centrale overhoring'
    - driehoek (driehoek schuin getekend i.v.m. intekenen hoogtelijn)
        - bij de driehoek de oppervlakteformule vragen, de hoogtelijn laten tekenen, en het bewijs laten geven
    - cirkel
        - oppervlakteformule en omtrekformule laten geven
        - vragen of het aan te voelen is welke formule voor wat is
    - uitleg dat voor cirkel oppervlakte=πr^2 en omtrek=$2\pi r$, aan de hand van een vierkant: daar heb je voor de omtrek ook zijde^1 en voor de opp. zijde^2

- rechthoekige driehoek
    - SOSCASTOA gaat over verhoudingen van zijden in een rechthoekige driehoek en hangt samen met de grootte van een hoek
    - Wat O, A en S is hangt af vanuit welke hoek wordt gekeken
    - Een verhouding betekent dat je nagaat hoeveel keer de ene zijde groter is dan de andere zijde en daarom deel je ze op elkaar
    - Op een actieve manier (m.b.v. een vraag en een beurt) leerlingen meer gevoel geven over sin, cos en tan door na te gaan wat voor waarden er uit kunnen komen (sin/cos: tussen 0 en 1) en tan (groter dan 0)
    - Hoeken meet je in 2 eenheden: graden (HAVO 3 en nu ook), radialen (volgend jaar in H5). De instelling van de GR moet zijn 'graden'; leerlingen dit laten instellen
    - Voordoen dat het uitrekenen van een hoek gaat in 2 denkstappen (1. ASO, 2. SOSCASTOA) en 1 uitwerkingsstap (1. Letterstap, 2. Invulstap, 3. Rekenstap). Leerlingen dit laten opschrijven op het kennisblad
    - Aansturen leerlingen om in dezelfde stappen een zijde uit te laten rekenen
    - Aansturen leerlingen om na te denken over hoeveel je moet weten van een rechthoekige driehoek om deze volledig (alle hoeken en zijden) door te kunnen laten rekenen: ZH en ZZ moet de uitkomst zijn

    - De ‘rekenwet’ laten opschrijven: “je kunt van een rechthoekige driehoek alle zijden en hoeken uitrekenen als je weet: ZZ of ZH”

- ‘mooie samengestelde figuren; m.b.v. 2 gelijke rechthoekige driehoeken
    - aansturen dat leerlingen deze mooie figuren gaan tekenen; er moet uitkomen: rechthoek en gelijkbenige driehoek
    - laten inzien dat als je een rechthoek/vierkant of een gelijkbenige driehoek hebt, je deze wellicht kan doorrekenen door deze op te vatten als 2 rechthoekige driehoeken

- gelijkbenige driehoek
    - concluderen dat je een gelijkbenige driehoek kunt doorrekenen m.b.v. introduceren hoogtelijn en doorrekenen rechthoekige driehoek
    - laten vastleggen op kennisblad

3.3.2.4.2 Bordgebruik

Deze les maakt gebruik van het Starboard-bestand `H4wisB - H2 meetkunde, introductieles 1.yar`. Deze wordt tijdens de les getoond en aangevuld.

Bij SOSCASTOA “= en :” toevoegen bij de 3 onderdelen van het woord.

3.3.3 Les 3 (lesvoorbereiding) – Starten met probleem oplossen

3.3.3.1 Globale inhoud

- Gaan toepassen van kennis en de basisvaardigheden aan de hand van opgaven uit het boek
- Eerste tips voor probleemaanpak op het bord, nog niet centraal behandeld

3.3.3.2 Leerdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerling kent de basissom 'regelmatige veelhoek' en kan de standaardonderdelen in de uitwerking benoemen

3.3.3.2.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerlingen hebben actief gewerkt aan de opgaven 5, 6 en 7

3.3.3.3 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

-

3.3.3.4 Planning van de lesactiviteiten

Fase	*Duur*	*Docent*	*Leerlingen*
Inleiding	5	- Inleiding	
Maken opgaven 5, 6 en 7	35	- Aansturen leerlingen om eerst plan van aanpak op te stellen voor opgave 5, en deze daarna pas uit te werken	- Opstellen plan van aanpak

		- Begeleiden van de leerlingen	- Uitwerken opgave 5 - Daarna verder met 6 en 7
Reflectie op de opgaven	5	- Sturen klassengesprek centrale reflectie over de gemaakte opgaven - Op laten schrijven basissom 'oppervlakte regelmatige veelhoek'	- nadenken over 5, 6 en 7 - aanvullen kennisblad
Einde les	5	- afronden	- Luisteren
	50		

3.3.3.4.1 Gedetailleerde inhoud

- Inleiding
    - Deze les start met het oplossen van minder simpele problemen
    - Er moeten plannen van aanpak worden opgesteld

- Centrale interventies op basis van behoefte; vooral letten op
    - Eerst nadenken over plan, daarna pas uitwerken
    - Eisen aan de uitwerking: de 3 stappen (letterstap, invulstap, rekenstap)

Na de les moet het kennisblad door de leerlingen aangevuld zijn met de eerste basisopgave op de pagina “soort sommen”

“Oppervlakte regelmatige veelhoek”

- Opdelen in gelijkbenige driehoeken
- Hoogtelijn, SOSCASTOA
- Oppervlakteformule driehoek

3.3.3.4.2 Bordgebruik

Deze les wordt het bord niet zodanig gebruikt dat hierover een toelichting nodig is.

3.3.4 Les 4 (lesvoorbereiding) – Regelmatige veelhoek

3.3.4.1 Globale inhoud

- Herhalen SOSCASTOA en de 3 stappen om uit te werken (letterstap, invulstap, rekenstap)
- Reflecteren op de basissom regelmatige veelhoek en hiervan een opgave maken (opgave 8)
- Oppervlakte driehoek = ½ product van 2 benen x sinus van de ingesloten hoek (opgave 9) en expliciteren dat deze handig is bij de gelijkbenige driehoek

3.3.4.2 Leerdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerling kent de basissom 'regelmatige veelhoek' en kan de standaardonderdelen in de uitwerking benoemen
2	Leerling weet dat uitwerken van een meetkunde opgave in 3 stappen gaat (1. Letterstap 2. Invulstap 3. Rekenstap)
3	Leerling kent de sinus-variant van de oppervlakteformule van de driehoek

3.3.4.2.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerlingen hebben actief gewerkt aan de opgaven 8 en 10

3.3.4.3 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

-

3.3.4.4 Planning van de lesactiviteiten

Fase	*Duur*	*Docent*	*Leerlingen*
Inleiding	5	- Inleiding	

Herhalen, reflecteren en expliciteren van vorige lesstof	5	- Onderdelen hoe een regelmatige veelhoek door te rekenen - Waar op letten bij het uitwerken (de 3 stappen) - Aansturen dat ze dit opschrijven op het voorblad van hun kennisblad	- Actief meedenken - Kennisblad bijwerken
Maken regelmatige veelhoeksom (opgave 8)	25	- Aansturen dat leerlingen opgave 8 gaan maken - Aansturen dat leerlingen daarna opgave 9 kunnen maken (is huiswerk) - Uitwerking op het bord om te bespreken	- Uitwerken opgave 8
Oppervlakte driehoek (sin-formule) (opgave 10)	10	- Aansturen dat leerlingen opgave 10 gaan maken - Op het bord bespreken van opgave 10a en b (voorbereiding voor de sin-formule) - Bespreken van opgave 10c: sin-formule - Laten nadenken over bij welke driehoek dit vooral handig kan zijn en dit met de klas expliciteren - Nogmaals opgave 8	- Maken opgave 8 - aanvullen kennisblad
Einde les	5	- huiswerk opgeven: 9, 11 - afronden -	- Luisteren
	50		

3.3.4.4.1 Gedetailleerde inhoud

- Inleiding
    - Zie eerder in deze lesvoorbereiding

Na de les moet het kennisblad door de leerlingen aangevuld zijn met de oppervlakte sin-formule

- "Oppervlakte = ½ product van 2 benen x sinus ingesloten hoek"

3.3.4.4.2 Bordgebruik

Opgave 10a en b handig op het bord uitwerken, zodat daarna gemakkelijk van *getallen* naar *letters* kan worden gegaan (opgave 10c).

- Eerst met wit een driehoek tekenen met de concrete getallen bij de zijden
- Uitwerken van de oppervlakte van deze driehoek, waarbij er niet tussentijds wordt uitgerekend. Dit is voor havo leerlingen een beetje tegennatuurlijk, omdat er een expressie moet worden gesubstitueerd (hoogte CD = 5 sin 70˚) in plaats van een uitgerekend getal worden ingevuld
- De expressie die zo verkregen wordt, is $O(ABC) = ½ * 8 * 5 * \sin 70˚$
- De tussenstappen uitvegen en de relatie expliciteren hoe de getallen van de zijden doorwerken in de formule van de oppervlakte
- Daarna met een andere kleur krijt de getallen doorstrepen en vervangen door symbolen (letters)
- Leerlingen vragen wat er in de hiervoor uitgewerkte expressie mee moet veranderen
- Vervolgens expliciteren van wat er nu staat: een formule voor de oppervlakte die afhangt van de lengtes van twee zijden en de ingesloten hoek

3.3.5 Les 5 (lesvoorbereiding) – Cirkelsector, koorde en segment

3.3.5.1 Globale inhoud

- Cirkelsector, gelijkzijdige driehoek en cirkelsegment, bijwerken op kennisblad
- Werken aan opgaven 12-14

3.3.5.2 Leerdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerling weet hoe de oppervlakte van een cirkelsector uit te rekenen
2	Leerling weet hoe de lengte van een boog uit te rekenen
3	Leerling weet dat de oppervlakte van een segment kan worden berekend door de oppervlaktes van de bijbehorende sector en gelijkbenige driehoek van elkaar af te trekken

3.3.5.2.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerlingen hebben actief gewerkt aan de opgaven 12-14
2	Leerlingen hebben het kennisblad bijgewerkt voor wat betreft de oppervlakte van de sector en de lengte van de boog

3.3.5.3 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

Nr	*Randvoorwaarde*
1	Werkbladen met opgave 14 en 14 aanwezig om uit te delen

3.3.5.4 Planning van de lesactiviteiten

Fase	*Duur*	*Docent*	*Leerlingen*
Inleiding	5		
Sector, boog, gelijkbenige driehoek	10	- Centrale uitleg over sector, boog, gelijkbenige driehoek - Aansturen bijwerken kennisblad - Uitdelen bladen waarop de werkboekopgaven 13 en 14 staan	- Actief meedenken - Bijwerken kennisblad
Werken aan opgaven	30	- Aansturen leerlingen om aan de opgaven te werken	- werken aan de opgaven 12 - 14
Einde les	5	- afsluiten; opgeven huiswerk en vertellen dat we de volgende keer met de volgende paragraaf aan de gang gaan	- Luisteren
	50		

3.3.5.4.1 Gedetailleerde inhoud

Zie het werkblad.

3.3.5.4.2 Bordgebruik

3.3.6 Les 6(lesvoorbereiding) – Uitslagen

3.3.6.1 Globale inhoud

- Herhalen en reflecteren over $2.1: basissommen zijn: oppervlakte regelmatige veelhoek en cirkelsector
- Leerlingen confronteren met het eigen leerproces en dat sommigen dit moeten aanpassen, a.d.h.v. cirkelsegmentsom
- Uitslag regelmatige piramide
- Effect van afknotten van piramide

Deze les beginnen we met een nieuw onderwerp met de nodige nieuwe theorie. Het nieuwe kennisblad komt in de komende lessen.

3.3.6.2 Leerdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerling heeft overzicht van welke soort sommen hij moet kennen over de vlakke meetkunde (§2.1)
2	Leerling kent de eigenschappen van de regelmatige piramide en kan zich een ruimtelijke hiervan voorstellen
3	Leerling weet wat een uitslag is
4	Leerling kan een uitslag maken van een gegeven ruimtelijke figuur en weet wat hierbij belangrijk is
5	Leerling weet wat afsnijden en afknotten is en weet welke soort effecten dit heeft op de figuur (sommige ribben korter / weg, sommige hoekpunt(en) weg, (sommige) vlakken afgesneden
6	Leerling weet hoe een snavelfiguur door te rekenen

3.3.6.2.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerlingen hebben actief gewerkt aan de opgaven 17 en 18

3.3.6.3 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

Nr	*Randvoorwaarden*
1	De les wordt gegeven in een lokaal met digibord, of beter nog, in een lokaal met *whiteboard* en *beamer* omdat dit beter te beschrijven is.
2	In het lokaal is een computer beschikbaar met daarop Starboard software

Nr	*Omschrijving van de voorbereidingen*
1	De volgende materialen moeten aanwezig zijn - Uitslag met touwtje van de kubus - Stroken papier, voor elk leerling 1 - Uitslag van een kegel - Draadmodel van de piramide - Vierkantje dat precies past in de piramide (snijdvlak ten gevolge van het afknotten)
2	Het voor deze les beschikbare *Starboard*-bestand is beschikbaar en kan geopend worden.

3.3.6.4 Planning van de lesactiviteiten

Fase	*Duur*	*Docent*	*Leerlingen*
Inleiding	5	- Inleiding: van 2D naar 3D - eerst naar uitslagen kijken in de tweede paragraaf	
Herhalen en reflecteren over $2.1	5	- Regelmatige veelhoek - Cirkelsegment	- Actief meedenken

Uitslag regelmatige piramide		- Piramide uitleggen aan de hand van gedachteconstructie - uitslag laten uitdenken -	
Opgave 17		- Aansturen maken opgave 17	-
Opgave 18		- aansturen maken opgave 18	-
		-	-
Einde les	5	-	- Luisteren
	50		

3.3.6.4.1 Gedetailleerde inhoud

- Inleiding
    - We gaan van vlakke meetkunde naar ruimtemeetkunde. Heeft veel met elkaar te maken, kijk maar: Demonstratie van de uitslag van de kubus met het touwtje.
    - "zo heb je iets plats en zo heb je iets ruimtelijks"
    - gaan we straks verder naar kijken, nu eerst kort op een rijtje zetten wat je van de eerste paragraaf moet hebben geleerd

- Herhaling en reflectie §2.1 vlakke meetkunde
    - Regelmatige veelhoek
        - Uitdelen strookjes papier
        - Aansturen leerlingen om er een knoop in te leggen: voorzichtig, niet kreukelen, zo ver mogelijk aantrekken, plat houden, er komt een soort V in de stroken; er ontstaat een regelmatige 5-hoek
        - Centraal bespreken (kort en snel vraaggesprek, tempo houden)
            - Wat voor soort figuur is dit?
            - Wat voor soort opgave moeten jullie hierover kunnen maken?
            - Kunnen jullie dit uitvoeren?
    - De cirkel met koorde en segment
        - Een ander soort opgave die we zijn tegengekomen is de cirkel met koorde, segment en sector
        - Op het dichtbond de slide laten zien van de cirkel (zonder ingetekende straal) en een lijnstuk dat er naast ligt.
        - Vervolgens de lijn verslepen in de cirkel, zodanig dat er een koorde ontstaat
        - "Dit is de meest eenvoudige basissom: Stel dat de straal 5 is en het lijnstuk 7, hoe groot is dan dit gearceerde stukje" (met pen het segment inkleuren)
        - Expres niet de meetkundige termen gebruiken, ook geen straal intekenen; het moet enigszins overdonderend werken
        - "Hoe doe je dit en wie kan dit?"
        - afhankelijk van de reacties hier misschien nog een paar minuten op doorgaan
            - leerproces: "als je dit nu niet kunt, dan moet je ervoor zorgen dat je het voor de volgende les wel goed kunt"
            - snelle uiteenzetting van hoe het werkt: welke basisvormen en welke stappen

Uitslag regelmatige piramide (aan de hand van een *gedachteconstructie*)

- gedachteconstructie “maken piramide”
  - we gaan in ons hoofd een regelmatige piramide construeren. “Dus, vanaf nu in je hoofd ga je je iets voorstellen”
  - we beginnen met een (platte) regelmatige veelhoek, laten we een vierkant nemen
  - we gaan de diagonalen tekenen en we zien een snijpunt.
  - we stellen ons voor dat de diagonalen van rekbaar materiaal zijn en kunnen nu het snijpunt recht omhoog bewegen. Recht omhoog betekent dat je steeds een hoogtelijntje zou kunnen hebben die uitkomt in het midden van het vierkant (weet je nog van dat touwtje)
  - er is nu een top met opstaande ribben ontstaan
  - stop nu met het omhoog gaan van deze top en maak nu met een soort wiskundeverf vlakken tussen de zijden van het vierkant en de bijbehorende opstaande ribben.
  - we hebben nu een regelmatige piramide gemaakt
- nagaan eigenschappen
  - hoeveel hoekpunten?
  - Hoeveel vlakken?
  - Hoe zien de vlakken eruit? (1 vierkant en 4 dezelfde gelijkbenige driehoeken)
- Gedachteconstructie “Maken uitslag van de piramide”
  - Pak nu in je hoofd een schaar en knip de opstaande ribben door en vouw de figuur plat
  - Wat is er ontstaan?
  - Pak de grote uitslag erbij en ga na dat je dit moet hebben gemaakt
- Er zijn meerdere uitslagen mogelijk als je langs andere ribben gaat knippen. Ga dit maar eens na bij opgave 17
  - Aansturen maken opgave 17

Opgave 17 toelichten op het bord, waarop letten

- Opgave 17 snel toelichten door middel van schets en leerlingen op het volgende wijzen
  - Stappenplan als je niet weet hoe te beginnen
    - Construeer stap voor stap (vlak voor vlak) de uitslag

        - Begin met het grondvlak, zet de letters bij de hoekpunten erbij, en zet kruisjes bij de opengeknipte zijden; nu weet je waar de andere zijvlakken komen
        - Voeg de zijvlakken toe die grenzen aan de ribben zonder kruisje; en doe voor deze zijvlakken weer hetzelfde
        - Ga door totdat je klaar bent en controleer jezelf of je alle zijden en hoekpunten hebt geconstrueerd en of je overal letters erbij geplaatst hebt
    - Construeren van de zijvlakken doe je door middel van de passer: heb ikzelf gedaan door uitdrukkelijk te zeggen: "je plaatst de punt van de passer hier en je plaatst het potloodje daar en je trekt dan als volgt een cirkelboog"
    - Werk netjes. Dit was een schets, jij moet het met geodriehoek doen en passer.

Afknotten piramide

- Aan de hand van draadmodel het afsnijden uitleggen
- Afknotten is afsnijden evenwijdig aan het grondvlak draadmodel erbij pakken
- Je snijdt er een stuk af en krijgt dan een gat. Dit gat ga je weer aanvullen met een extra vlak, zodat het weer 'dicht wordt'.
- Vergelijk het met de platte meetkunde: daar hadden we een meetkundige figuur die een stuk plat vlak afsloot; nu doen we dat in de ruimte, we moeten dan een stuk ruimte helemaal afsluiten en daarom moeten 'er helemaal rondom vlakken zijn'. <<ik zou dit wiskundig veel liever correcter formuleren, maar op de HAVO hebben we hiervoor niet de benodigde begrippen>>
- Hoe ziet dit vlak eruit? Antwoord: vierkant
- Demonstratie aan de hand van het draadmodel en het vierkante stuk papier
- Ga in opgave 18 maar eens na wat dit voor effect heeft op de uitslag van de regelmatige piramide

Opgave 18 toelichten wat het effect is van het afknotten

- Je maakt eerst een niet-afgeknotte piramide en gaat dan aanpassen. Hiervoor moet je eerst weten hoe lang de opstaande ribben zijn.
- Je kunt intuïtief nagaan dat de lengte hiervan 6 moet zijn, maar je moet dit wiskundig aantonen door middel van gelijkvormige driehoeken (snavelfiguur)
- Bekende stof van vorig jaar, ga ik nu alleen heel snel toelichten

- Aantonen gelijkvormigheid
- Verhoudingstabel met letters
- Verhoudingstabel met getallen en onbekende zijde of variabele
- Doorrekenen hiervan geeft je het antwoord

3.3.6.4.2 Bordgebruik

In wezen zou ik met grote geodriehoek en passer de constructie precies voor moeten doen. Omwille van snelheid (en ik ben hier nog niet echt vaardig mee) doe ik het met een schets en vertel UITDRUKKELIJK dat de leerlingen het netjes moeten doen met geo en passer.

3.3.7 Les 7(lesvoorbereiding) – Uitslagen (kort i.v.m. bespreken proefwerk)

3.3.7.1 Globale inhoud

- Deze les is er kort tijd voor de stof die op de planning staat; het proefwerk over H1 moet worden besproken.
- De essentie van uitslagen en het effect daarop van afsnijden van de ruimtelijke kort herhalen: effect is ribben korter of missen, hoekpunten, etc.
- Verschillende uitslagen van de kubus mogelijk; vorige les 1 gezien
- Uitslag afgesneden kubus uitdenken met het lokaal
- Bespreken proefwerk over H1
- Maken opgave 19 in de les

3.3.7.2 Leerdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerling weet welke effecten het afsnijden of afknotten kan hebben
2	Leerlingen weet dat je de uitslag van een afgesneden figuur vanuit 2 gedachtegangen kan construeren: 1) uitgaan van de uitslag van een niet-afgesneden figuur, 2) direct beginnen met de afgesneden figuur

3.3.7.2.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerlingen hebben gewerkt aan opgave 19
2	Leerlingen weten dat het huiswerk opgave 19 en 20 is

3.3.7.3 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

Nr	*Omschrijving doel*
1	Kegelonderzoek aanwezig om uit te delen

3.3.7.4 Planning van de lesactiviteiten

Fase	*Duur*	*Docent*	*Leerlingen*
Inleiding	5	- Inleiding - Deze les kort over H2, daarna proefwerk bespreken over H1	
Explicitering uitslag piramide		- Effect op ribben, zijden, ... - Letters bij de uitslag plaatsen - Je kunt beginnen met een complete uitslag en daarna het effect van het afsnijden verwerken - Of je 'bouwt de uitslag op'	-
Uitslag kubus		- korte theorie - beginnen met een kort hoekje eraf: zijden korter, 1 hoekpunt weg - als je verder doorgaat: de zijden zijn zelfs helemaal weg - vraag: hoeveel zijden heeft de kubus nu? - (REFL: Allerlei antwoorden; antwoord: kijk maar eens als je de uitslag maakt)	
Einde lesdeel over H2		- kort de kegel bespreken hoe deze eruit ziet - uitdelen kegelonderzoek	- Luisteren
		Bespreken toets H1	
	15		

3.3.7.4.1 Gedetailleerde inhoud

- Inleiding
    - Zie eerder in deze lesvoorbereiding

- Explicitering uitslag piramide
    - Bij het afknotten
        - Verdwijnt de top
        - Worden opstaande ribben verkort
        - Komen er zijden bij
        - Komt er een vlak bij
- Veralgemeniseren
    - Het is altijd zo dat bij het afknotten of afsnijden, dergelijke effecten optreden
    - Neem al voorbeeld een balk; laten we dit lokaal eens als een balk beschouwen.
    - Wat zou er gebeuren als we een hoekpunt eraf snijden?
    - ...

3.3.7.4.2 Bordgebruik

-

3.3.8 Les 8 (lesvoorbereiding) – Leerproces en kegeluitslag

3.3.8.1 Globale inhoud

- Cirkel met segment opgave: aanleiding om het te hebben over leerproces
- Leerlingen hebben kegelonderzoek gedaan: kegelformule opstellen
- Opgave t/m 25

3.3.8.2 Leerdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerling beseft dat hij / zij eventueel eigen leerproces moet herzien
2	Leerling kent de formule die de relatie aangeeft tussen de kegeluitslag eigenschappen r, R en p, en kan deze afleiden

3.3.8.2.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerling heeft actief gewerkt aan de opgave 22 t/m 25

3.3.8.3 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

Nr	*Randvoorwaarden en voorbereidingen*
1	De leerlingen hebben het kegelonderzoek in de vorige les uitgereikt gekregen en hebben dit onderzoek uitgevoerd.
2	De volgende materialen moeten aanwezig zijn - Uitslag A van het kegelonderzoek - Grote kegeluitslag - Grote kegelmantel met schuifbare mantel en losse grondcirkel

3.3.8.4 Planning van de lesactiviteiten

Fase	*Duur*	*Docent*	*Leerlingen*
Inleiding	5	- Inleiding	
Leerproces	15	- Uitdelen cirkelsegmentopgave en laten maken - Afhankelijk van hoe dit gaat, hierop inspelen -	- maken cirkelsegmentopgave - reflecteren op waar het misging in het leerproces
Uitslag kegel	15	- Behandelen theorie van de kegeluitslag	- Meedenken, luisteren
Opgaven maken	20	- Aansturen om opgaven 22 t/m 25 te maken	- Maken opgaven 22 t/m 25
Einde les	5	- succes met proefwerk voorbereiden - gebruik It's Learning - stuur webmail als je er niet uitkomt - huiswerk t/m 25	- Luisteren
	50		

3.3.8.4.1 Gedetailleerde inhoud

- Inleiding
    - Zie eerder in deze lesvoorbereiding

- leerproces
    - uitdelen opgave en laten maken
    - Als de leerlingen er niet vlot uitkomen, met de leerlingen bespreken waar dit aan ligt: leerproces: “leerlingen moeten zelf steeds nagaan of ze het goed beheersen of dat ze er nog meer tijd aan gaan besteden”

- Behandelen theorie kegeluitslag
    - De uitgeknipte kegeluitslag laten zien aan de klas (Uitslag A uit het kegelonderzoek)
    - Laten noemen door een leerling welke basisvormen deze uit bestaat: cirkel en cirkelsegment
    - Noemen
        - de kegel bestaat uit een mantel (de sector) en een grondcirkel (de cirkel)
        - de mantel is verkregen door dwars door de mantel heen te knippen, in tegenstelling tot bijvoorbeeld de ribbe (daar langs de ribben en niet door de vlakken)
        - er zijn 3 eigenschappen die precies bij elkaar horen: de straal van de grondcirkel (r), de straal van de mantel (R) en de middelpuntshoek (p) grote uitgeknipte uitslag laten zien
        - je kunt een kegel maken door eerst een uitslag te construeren en vervolgens deze in elkaar te zetten
            - je maakt 2 cirkels, met 2 bepaalde stralen (R > r)
            - je knipt een stuk uit de ‘mantelcirkel’ en je creëert daarmee een sector met een bepaalde middelpuntshoek
            - deze middelpuntshoek moet wel precis kloppen, want anders sluit de kegel niet aan bij de grondcirkel. Demonstratie met de schuifbare mantel.
        - Hoe er nu voor zorgen dat dit precies gaat kloppen?
    - Proberen leerlingen te laten ontdekken dat de omtrek van de grondcirkel gelijk moet zijn aan de lengte van de boog van de mantel cirkelsector
    - Afleiden formule op het bord

Op het bord	*Vertellen*
Lengte boog = omtrek grondcirkel	aan de hand van de papieren uitslag inzichtelijk maken dat de lengte van de mantelboog gelijk moet zijn aan de omtrek van de grondcirkel (touwtje)
$\frac{p}{360} 2\pi R = 2\pi r$	Wegstrepen van 2pi
$\frac{p}{360} R = r$	Delen door R
$\frac{p}{360} = \frac{r}{R}$	In een verhoudingstabel zetten, als je dit gemakkelijk vindt rekenen
p | r 360 | R	

- Vertellen wat deze formule voorstelt en wat je er mee kunt
  - De verhouding van de middelpuntshoek tot 360 graden = de verhouding van de straal grondcirkel tot de straal van de manteluitslag
  - Je weet 2 van de eigenschappen en je kunt de 3de uitrekenen
- Opgave 2 uit het kegelonderzoek samen doen
  - Meten van de stralen (hokjes tellen): geeft r en R
  - Invullen in de formule en uitrekenen van p
  -

3.3.8.4.2 Bordgebruik

Op het bord afleiden de formule die de relatie aangeeft tussen de kegeleigenschappen r, R en p. (zie hierboven)

3.3.9 Les 9 (lesvoorbereiding) – Herhaling en explicitering uitslagen, en uitslag cilinder

3.3.9.1 Globale inhoud

- Herhaling en explicitering
    a. Tekenen uitslag
- Nieuwe theorie
    a. Uitslag cilinder
    b. Omgespannen touwtje

Opmerkingen

- Deze dag zijn er twee lessen (het eerste uur en het 7de uur) en de leerlingen maken een herkansing over H1 tijdens het 8ste uur. Daarom met de leerlingen afgesproken dat in de eerste les en het eerste half uur van de 2de les flink gewerkt gaat worden, er dan een kwartier pauze wordt gehouden, waarna om 15:00 het proefwerk begint.
- De vorige les was er een vraag van een leerling over opgave 20. Hij kwam er niet uit en wist niet hoe hier verder mee te gaan. Ik schatte in dat meer leerlingen hier niet volledig uit gekomen waren, en daarom wilde ik opgave 20 in de herhaling doen. Dit kwam mooi samen met het herhalen en expliciteren van de stof van de uitslag: de leerlingen konden er meteen nog mee aan de slag.

3.3.9.2 Leerdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerling kent twee aanpakken om een uitslag te tekenen van een afgesneden ruimtefiguur
2	Leerling kent de eisen aan de uitwerking van een uitslag: 1. Netjes met geodriehoek en passer, 2. Afmetingen in verhouding, 3. Letters bij hoekpunten
3	Leerling kent de uitslag van een cilinder
4	Leerling weet dat een omgespannen touwtje om een ruimtefiguur resulteert in rechte lijnstukken op de uitslag
5	Leerling kan de lengte van een omgespannen touwtje berekenen aan de hand van de uitslag

3.3.9.2.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerling heeft actief gewerkt aan opgave 20 en 26-27
2	Leerling heeft kennisblad bijgewerkt voor wat betreft de behandelde theorie

3.3.9.3 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

Nr	*Randvoorwaarden en voorbereidingen*
1	De papieren uitslag van de cilinder in de klas aanwezig
2	Een touwtje is aanwezig in de klas

3.3.9.4 Planning van de lesactiviteiten

Fase	*Duur*	*Docent*	*Leerlingen*
Inleiding	5	- Inleiding	
Uitslag: aanpakken en uitwerking	10	- Uitdelen nieuw kennisblad - Expliciteren aanpakken maken uitslag aan de hand van opgaven - Expliciteren eisen aan de uitwerking tekenen uitslag; laten opschrijven	- actief meedenken over stof

Maken opgave 20	15	- centraal klassengesprek
		  - welke zijvlakken bestaan er en hoeveel zijn er van
		  - wat zijn de afmetingen hiervan
		- aansturen maken aanzet tot uitslag: grondvlak, 2 (verschillende) zijvlakken en het 'top-vlak'
		- centraal voordoen van deze aanzet
			- maken opgave 20

Uitslag cilinder	5	- behandelen theorie uitslag cilinder - behandelen theorie strak gespannen touwtje rondom ruimtefiguur -	- luisteren en meedenken
Maken opgaven 26, 27	10	- Aansturen maken opgaven 26, 27 - Begeleiden van deze opgaven	- Maken opgaven 26, 27
Einde les	5	- Vanmiddag weer verder - Ga in tussenuren het proefwerk verder voorbereiden	

		- Succes!	
	50		

3.3.9.5 Gedetailleerde inhoud

- Inleiding
    - Herhalen en expliciteren uitslagen
    - Nieuw en laatste kennisblad
    - Nieuwe stof: cilinder

- Uitslag: aanpakken en uitwerking
    - Uitdelen kennisblad; laten dubbelvouwen en zeggen dat leerlingen zelf de voorkant moeten bekijken, en dat we deze les en de volgende les met de binnenkant aan de gang gaan
    - Leerlingen het boek erbij laten nemen, open op blz. 51
    - Noemen van de 2 aanpakken voor tekenen afgesneden ruimtefiguur en (laten) relateren aan de opgaven in het boek
        - Indirecte methode: eerst de uitslag van de niet-afgesneden ruimtefiguur tekenen en vervolgens correcties aanbrengen
        - Directe methode: direct de afgesneden figuur tekenen: 1. Stukslijst maken (welke soorten zijvlakken en hoeveel daarvan) met samenhang 2. tekenen
    - Laten nadenken over de eisen aan de uitwerking van de uitslag en gezamenlijk expliciteren
        - Netjes met geodriehoek en passer
        - Afmetingen moeten kloppen (in verhouding)
        - Letters bij de hoekpunten

- Opgave 20
    - Klas laten nadenken over stukslijst en vervolgens deze op het bord samenvatten
        - Grondvlak: vierkant ABCD 1x
        - Zijvlak type ABP = gelijkbenige driehoek: 4x
        - Zijvlak type BPQ = gelijkbenige driehoek: 4x
        - Grondvlak / topvlak PQRS: 1x
    - Klas aansturen om de uitslag te tekenen

        - Voordoen:
            - Grondvlak ABCD
            - Zijvlak type BPQ
                - met behulp van passer: 1. kopiëren van de afstand A – midden CD, 2. Construeren boog 2x 3. Construeren gelijkbenige driehoek
            - zijvlak type BPQ
                - met behulp van passer, aanpak zelfde als voor zijvlak type BPQ

- Uitslag cilinder
    - Vertellen dat uitslag kubus en piramide verkregen worden door te knippen langs de ribben en dat bij de cilinder, net als bij de kegel, dwars door de mantel moet worden geknipt
    - Laten zien aan de hand van papieren cilinder welke vóór opengeknipt is en die met plakbandjes is vastgemaakt
    - Met de klas de afmetingen van de mantel van de cilinderuitslag benoemen: hoogte h en $2\pi r$
- Strak gespannen touwtje rondom ruimtefiguur
    - In een dialoog met leerlingen in de klas: een strak gespannen touwtje wordt tussen 2 punten in de ruimte een rechte lijn (voordoen met een echt touwtje)
    - Zeggen (niet voordoen) dat een touwtje rondom een ruimtefiguur net zo werkt: er ontstaan rechte lijnstukken op de uitslag
    - Zeggen dat als je er straks niet uitkomt of het niet goed kunt voorstellen, dat ik langskom om met het papieren model het verder te bekijken

3.3.9.6 Bordgebruik

Geen specifiek bordgebruik.

3.3.10 Les 10 (lesvoorbereiding) – Oppervlakte kegel

3.3.10.1 Globale inhoud

- Nieuwe theorie
    a. Oppervlakte kegelformule
- Herhaling en explicitering
    a. Kegeluitslag formule die het verband geeft tussen *r*, *R* en *p*

Opmerkingen

- Deze les is een half uur lang, omdat direct na deze les het proefwerk over H1 wordt overgedaan (er was heel veel geluidoverlast tijdens het proefwerk) en ik zo'n 10 min. pauze heb ingelast
- Daarom nu alleen theorie aanstippen, zodat het merendeel de huiswerkopgaven kan maken

3.3.10.2 Leerdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerling kent de oppervlakteformule van de kegel en kan deze afleiden
2	Leerling heeft inzicht in de informatie die de kegeldoorsnede kan geven en hoe hiermee te rekenen

3.3.10.2.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerling heeft kennisblad bijgewerkt voor wat betreft de nieuw behandelde theorie: de kegel oppervlakteformule
2	Leerling heeft kennisblad bijgewerkt voor wat betreft de herhaalde stof: de kegeluitslag formule
3	Leerling heeft actief gewerkt aan opgaven t/m 33

3.3.10.3 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

Nr	*Randvoorwaarden en voorbereidingen*
1	Papieren uitslag van de kegel is in de klas aanwezig

3.3.10.4 Planning van de lesactiviteiten

Fase	*Duur*	*Docent*	*Leerlingen*
Inleiding	2	- Inleiding	
Herhalen kegeluitslag formule met r, R, p formule	5	- In een klassengesprek de afleiding van de kegeluitslag formule afleiden - Leerlingen aansturen dat ze het kennisblad bijwerken	- actief meedenken over stof - bijwerken kennisblad
Nieuwe oppervlakteformule van de kegel afleiden	8	- Afleiden oppervlakteformule van de kegel	- actief meedenken over stof - bijwerken kennisblad
Aanstippen kegeldoorsnede	3	- Kort behandelen kegeldoorsnede: welke informatie kan hieruit worden afgeleid	- Actief meedenken
Maken opgaven t/m 32	12	- Aansturen leerlingen maken opgaven t/m 32	- Maken opgaven 26, 27
Einde les	1	- Straks proefwerk, neem tijd voor jezelf	
	30		

3.3.10.4.1 Gedetailleerde inhoud

- Inleiding
  - Eerst herhalen kegeluitslag formule die de relatie weergeeft tussen *r*, *R* en *p*
  - Daarna een formule afleiden voor de oppervlakte, waarbij we de eerste formule nodig hebben om de oppervlakteformule in een handige vorm te brengen

- Herhalen kegeluitslag formule die de relatie weergeeft tussen *r*, *R* en *p*
  - Voordoen op het bord en laten opschrijven op het kennisblad
  - Om tempo te maken niet te veel in een klassendialoog, hoewel dit laatste beter zou zijn..

Op het bord	*Vertellen*
Lengte boog = omtrek grondcirkel	aan de hand van de papieren uitslag nogmaals kort laten zien dat de lengte van de mantelboog gelijk moet zijn aan de omtrek van de grondcirkel (touwtje)
$\frac{p}{360} 2\pi R = 2\pi r$	Wegstrepen van 2pi
$\frac{p}{360} R = r$	Delen door R
$\frac{p}{360} = \frac{r}{R}$	In een verhoudingstabel zetten, als je dit gemakkelijk vindt rekenen
$\begin{array}{c\|c} p & r \\ \hline 360 & R \end{array}$	

- Afleiden oppervlakteformule kegel
    - Aansturen dat leerlingen het kennisblad erbij pakken en kijken naar de oppervlakteformule
    - Vertellen dat als je de twee stralen weet (straal grondcirkel *r* en straal kegelmantel *R)* weet, dat je dan dus gemakkelijk de oppervlakte kunt uitrekenen
    - Instructie: voordoen op het bord en laten opschrijven op het kennisblad

Op het bord	*Vertellen*
opp = opp. grondcirkel + opp. mantel	Kegel bestaat uit 2 delen en dus is de oppervlakte de som van deze 2 delen
$opp = \pi r^2 + \frac{p}{360}\pi R^2$	De 2 delen zijn 2 basisvormen die we eerder hebben gehad: de cirkel en de cirkelsector en daar weten we formules van voor de oppervlakte; die gaan we hier gebruiken
$opp = \pi r^2 + \frac{r}{R}\pi R \cdot R$	• We hebben net gezien dat p/360 gelijk is aan r/R en dat kunnen we dus vervangen • We weten dat R^2 gelijk is aan 'R keer R' en dit dus ook vervangen
$opp = \pi r^2 + \pi r R$	• We kunnen een R in de teller en in de noemer 'tegen elkaar wegstrepen' waardoor je de uiteindelijke formule krijgt

    - Nogmaals vertellen dat als je de r (straal grondcirkel) en de R (straal kegelmantel) weet, dat je dan dus gemakkelijk de oppervlakte kunt uitrekenen
    - Hoe de r en R bepalen (in een klassengesprek)

        - Maar we gaan dit in opgaven natuurlijk niet gewoon geven, zoals “als r=5 en R=7, reken dan de oppervlakte uit”, dat wordt wel heel gemakkelijk.
        - We zouden de r en R bijvoorbeeld in een plaatje kunnen geven: << op bord maken plaatje van een kegel waarin de r en R zijn gegeven als getallen bij de desbetreffende zijde >>. Hoe kun je nu de oppervlakte uitrekenen?
        - Als we nu in plaats van gelijk de r en de R geven, maar bijvoorbeeld de
            - hoogte en de straal grondcirkel
            - straal mantel en tophoek (nieuwe term: toelichten wat dit is)
        - Kun je nu nog steeds de oppervlakte uitrekenen?
    - In het klassengesprek moet naar voren komen dat de doorsnede door de as een gelijkbenige driehoek oplevert en dat je die net als eerder kunt doorrekenen
    - Vertellen dat de tophoek een andere hoek is dan de middelpuntshoek van de manteluitslag

Lesontwerp opmerking

- In deze les is al uitvoerig aan theorie gewerkt en het bijwerken van het kennisblad; daarom deze les niet de doorsnede van de kegel op het kennisblad uitwerken. Dit komt de volgende les.
- Nu eerst de leerlingen wat laten spelen met de opgaven hierover en dan de volgende les de kegeldoorsnede expliciet bespreken en laten vastleggen

3.3.10.4.2 Bordgebruik

Zie hiervoor hoe het bord gebruikt wordt bij de behandeling van de stof.

3.3.11 Les 11 (lesvoorbereiding) – Kegelkennis herhalen en uitbreiden: doorsnede door de as

3.3.11.1 Globale inhoud

- Nieuwe theorie
    a. De kegeleigenschappen hoogte *h* en tophoek *t*
    b. Doorsnede door de as
- Herhaling en explicitering
    a. Kegeluitslag formule die het verband geeft tussen *r*, *R* en *p*
    b. oppervlakteformule

Opmerkingen

- Deze les is het eerste uur na de vakantie. De stof zal wel weggezakt zijn en daarom eerst de boel wat opfrissen en de leerlingen actief krijgen. Daarna verder met de theorie en met de opgaven aan de gang.
- Ik vermoed dat de opgaven 30-33 lastig zullen zijn voor de leerlingen en daarom aandacht schenken aan 'probleemaanpak'.

3.3.11.2 Leerdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerling weet dat de doorsnede door de as van de kegel informatie geeft over relaties tussen *r*, *R*, *h* en *t*
2	Leerling begrijpt dat als twee van de vier kegeleigenschappen (*r*, *R*, *h* en *t)* bekend zijn, de andere twee ook berekend kunnen worden.
3	Leerling weet wanneer een kegeldoorsnede door de as benodigd is en kan hiermee gevraagde of benodigde eigenschappen berekenen m.b.v. de goniometrische verhoudingen

3.3.11.2.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*

1	Leerling heeft kennisblad bijgewerkt voor wat betreft de nieuw behandelde theorie: de kegeldoorsnede
2	Leerling heeft actief gewerkt aan opgaven t/m 34

3.3.11.3 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

Nr	*Randvoorwaarden en voorbereidingen*
-	-

3.3.11.4 Planning van de lesactiviteiten

Fase	*Duur*	*Docent*	*Leerlingen*
Inleiding	5	- Inleiding	
Herhalen kegelkennis	7	- Leerlingen aansturen dat ze het lijstje van kegelkennis ingevuld krijgen, voor wat betreft de kennis die ze zouden moeten hebben	- actief herhalen stof
Nieuwe kegelkennis: kegeldoorsnede door de as	8	- In een klassengesprek de doorsnede door de as van de kegel behandelen	- actief meedenken over stof - bijwerken kennisblad
Maken opgaven t/m 34 Toelichten plan van aanpak bij opgave	25	- Aansturen leerlingen dat ze gaan werken aan opgaven t/m 34 - Een opgave uit de serie 30 t/m 32 voordoen op het bord, en dan vooral met betrekking tot plan van aanpak.	- Werken aan de opgaven
Einde les	5	- Huiswerk opgeven o t/m 34, als je niet uit opgave 33 en 34 komt, staat op It's Learning hoe je de gelijkvormigheid van driehoeken kunt doorrekenen o herhalen opgave 11-14: wat voor soort opgaven zijn dit? Hoe zou een toetsopgave eruit kunnen zien? (deze	- luisteren en huiswerk noteren

		uitleg kost een paar minuten)	
	50		

3.3.11.4.1 Gedetailleerde inhoud

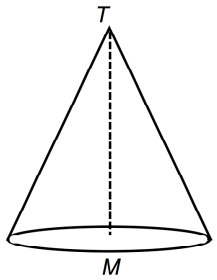
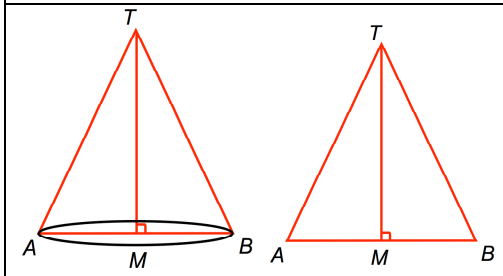
- Inleiding
    - Proefwerk vindt plaats op dinsdag 16 november en duurt 2 lesuren
    - Deze week: afronden 2.3 en herhalen 2.1, volgende week de laatste paragraaf 2.4
    - Deze les eerst kort herhalen stof van voor de vakantie, daarna nieuwe theorie en met de opgaven aan de gang

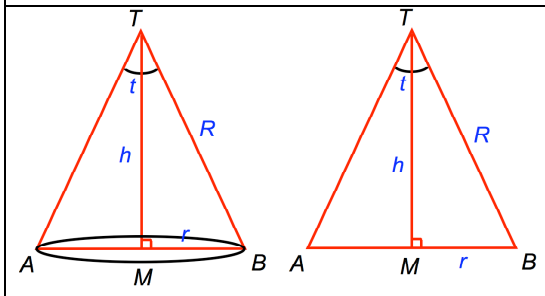
- Herhalen stof m.b.t. de kegel

Op het bord	*Vertellen*
Kegelkennis ① ② ③	Aansturen leerlingen om na te gaan wat ze weten van een kegel en hoe ze kegelberekeningen kunnen uitvoeren. Reden: leerlingen zullen zo actief aan de gang moeten gaan om de boel op te frissen. Ik geef een lijstje van 3 zodat ze weten dat ze er nog niet zijn als ze 1 iets hebben genoemd. Dit werkt vaak prikkelend.
Kegelkennis ① $\frac{p}{360} = \frac{r}{R}$ ② $opp = \pi r^2 + \pi rR$ ③ kegeldoorsnede	Uiteindelijk moet het lijstje hiernaast op het bord komen. Prikkelende vragen stellen om er goed voor te zorgen dat we wel weten waar we mee bezig zijn. “wat hebben we aan deze eerste formule? Wanneer gaan we deze toepassen? Wie kan hier een plaatje bij tekenen?” << Leerling op het bord laten tekenen van de uitslag met daarbij ‘de juiste letters op de juiste plaatsen.’ >> Ik verwacht dat ze niet uit het laatste komen, want dat

	was relatief nieuw. Tip die ik geef is: hoe heb je opgaven 30-32 opgelost? Deze herhaling mag zo'n 7 minuten duren. Hierop sturen.

- Nieuwe stof m.b.t. de kegeldoorsnede

Op het bord	*Vertellen*
Kegel met doorsnede  	"De opgaven 30 t/m 32 (huiswerk voor deze les) heb je moeten rekenen aan een kegel en heb je (als het goed is) de doorsnede gebruikt. Laten we nu eens naar het algemene geval kijken: we nemen zo maar een kegel en gaan kijken naar welke informatie de doorsnede geeft en wat je hiermee kunt."
 	"We nemen nu een doorsnede door de as van de kegel (die we hier met een stippellijn zien door de top *T* en het middelpunt *M* van de grondcirkel)." << op het bord teken ik eerst in de kegelprojectie de doorsnede en vervolgens daarnaast de losse doorsnede; de groottes en de hoogte op het bord moeten goed overeenkomen, zodat je een duidelijke relatie tussen de 2 tekeningen ziet. >> "Deze doorsnede teken je altijd als een losse tekening of schets. Hier zie je de projectie van de kegel met daarnaast de

	doorsnede door de as.”
	<< in een klassengesprek de eigenschappen van de kegel benoemen en hoe we die tegenkomen in beide figuren. Het resultaat moet zijn: hoogte *h*, straal grondcirkel *r*, straal mantel *R*, tophoek *t* en dit alles natuurlijk bij de juiste figuuronderdelen. >>
“Weet je 2 van de 4 kegeleigenschappen (r, R, t, h), dan kun je de andere 2 ook uitrekenen”.	<< vervolgens in een klassengesprek de leerlingen laten inzien dat je al deze eigenschappen van een kegel kunt uitrekenen als je er 2 weet. Hierbij duidelijk een link aanbrengen met eerdere kennis, namelijk: een rechthoekige driehoek kun je volledig doorrekenen als je 2 eigenschappen (hh, zz, hz) weet >>
	Leerlingen aansturen om dit over te nemen van het bord op het kennisblad

- Toelichten plan van aanpak

  - Bij het bespreken van een opgave vooral het accent leggen op het maken van een plan van aanpak. Onderdelen die ik wil benadrukken:
    - Wat moeten we uitrekenen
    - Wat weten we hiervan, kennen we een formule? Is een doorsnede handig?
    - Wat weten we direct al en wat moeten we eerst uitrekenen?
  - Dit alles dan op hoofdlijn op het bord voordoen, zonder echt te gaan rekenen. Dus puur aanpak. Komt men er niet uit, dan individueel weer verder op weg helpen (indien nodig).

3.3.11.4.2 Bordgebruik

Zie hiervoor hoe het bord gebruikt wordt bij de behandeling van de stof.

3.3.12 Les 12 (lesvoorbereiding) – Bespreken afgeknotte kegel

3.3.12.1 Globale inhoud

- Bespreken en doorrekenen afgeknotte kegel a.d.h.v. opgave 33
- Reflectie over de opgaven 11-14

Opmerkingen

- Het centrale deel van de les volledig besteden aan opgave 33: het doorrekenen van de afgeknotte kegel
- Deze opgave uitwerking heb ik ook wel op It's Learning gezet, maar leerlingen vonden het nog steeds lastig
- De rest van de les de leerlingen zelf aan de opgaven laten werken

3.3.12.2 Leerdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerling weet hoe de oppervlakte van een afgeknotte kegel door te rekenen
2	Leerling begrijpt dat bij het doorrekenen van een afgeknotte kegel eerst de afmetingen van de oorspronkelijke kegel bepaald moeten worden.
3	Leerling begrijpt dat de hoogte van afknotten (afknothoogte) en de straal van de ontstane cirkelschijf (afknotstraal) beide bepalen hoe hoog de top van de oorspronkelijke niet-afgeknotte kegel is
4	Leerling weet wat hij geleerd moet hebben van opgaven 11-14

3.3.12.2.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerling begrijpt opgave 33
2	Leerling heeft actief gewerkt aan de opgaven t/m 40

3.3.12.3 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

Nr	*Randvoorwaarden en voorbereidingen*
1	Lokaal met digibord
2	Geogebra bestand aanwezig, dat de doorsnede van een afgeknotte kegel dynamisch laat zien

3.3.12.4 Planning van de lesactiviteiten

Fase	*Duur*	*Docent*	*Leerlingen*
Inleiding	5	- Inleiding	
Bespreken opgave 33	20	- Leerlingen aansturen dat ze het lijstje van kegelkennis ingevuld krijgen, voor wat betreft de kennis die ze zouden moeten hebben	- actief meedenken en zonodig overschrijven
Maken opgaven t/m 40	25	- Aansturen leerlingen dat ze gaan werken aan opgaven t/m 40	- Werken aan de opgaven
Einde les	5	- Huiswerk opgeven o t/m 40	- luisteren en huiswerk noteren
	50		

3.3.12.4.1 Gedetailleerde inhoud

- Inleiding
    - Opgave 33 centraal bespreken
    - Daarna werken aan de opgaven

- Bespreken opgave 33

Op het bord	*Vertellen*
tekening van de afgeknotte kegel met daarnaast (in verhouding) een niet-afgeknotte kegel	○ Wat is het probleem ○ Hoe is de globale aanpak
Geogebra applet waarin dynamisch wordt getoond dat de top van de niet-afgeknotte kegel hoger en lager is, als de straal van de afknot cirkelschijf wordt gevarieerd.	○ Hoe hangt de top van de oorspronkelijke niet-afgeknotte kegel af van de gegeven afknothoogte en de straal van de afknot cirkelschijf
Tekenen doorsnede van de niet-afgeknotte kegel, met daarin de afknot hoogte en de straal van de afknot cirkelschijf	○ Tekening van de doorsnede met daarin de gegeven afmetingen
	○ Uitleggen dat dit een snavelfiguur is, met daarin 2 gelijkvormige driehoeken ○ Dit houdt in dat de ene driehoek een vergroting van de andere driehoek is en dat de overeenkomstige zijden in een verhoudingstabel gezet kunnen worden

Verhoudingstabellen *Berekening*	○ Aanpak om zijden in een snavelfiguur uit te rekenen: ○ Aantonen gelijkvormigheid ○ Verhoudingstabel met letters ○ Verhoudingstabel met getallen ○ Rekenen m.b.v. kruisproducten gelijkstellen ○ Belangrijk is de hoogte van de niet-afgeknotte kegel gelijk te stellen aan de afknothoogte + x
Verdere berekening (globaal)	○ Als de hoogte van de oorspronkelijke kegel bekend is, kunnen de stralen van de 2 mantels worden uitgerekend en volgt de som verder vrij recht-toe-recht-aan

- Opgave 11-14

Samen met de leerlingen op een rijtje zetten waar deze opgaven over gaan. Aan de orde moet komen:
- Oppervlakte berekenen van een figuur bestaande uit segmenten, sectoren en gelijkbenige driehoeken
  - Je moet kennen en toepassen: oppervlakteformules voor de driehoek, de sector (oppervlakte van een segment is het verschil daarvan)
  - Je moet door middel van het tekenen van extra lijnstukken deze basisvormen creëren
  - Je hebt hoeken nodig voor de oppervlaktes en het volgende ben je tegengekomen om deze te bepalen
    - Volledige middelpuntshoek is 360°
    - Gelijkzijdige driehoek heeft hoeken van 60°

Op een dergelijke manier moet je alle opgaven hebben bekeken en voor jezelf op een rijtje hebben gezet. Pas dan heb je goed geleerd van de opgaven die je gemaakt hebt en ben je dus beter voorbereid voor de toets.

3.3.12.4.2 Bordgebruik

Zie hiervoor hoe het bord gebruikt wordt bij de behandeling van de stof.

3.3.13 Les 13 (lesvoorbereiding) – Werken aan opgaven

3.3.13.1 Globale inhoud

- Leerlingen werken aan de opgaven

Opmerkingen

- Leerlingen zoveel mogelijk meters laten maken met opgaven maken

3.3.13.2 Leerdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	-

3.3.13.2.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerling heeft actief gewerkt aan de opgaven t/m 40

3.3.13.3 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

3.3.13.4 Planning van de lesactiviteiten

Fase	*Duur*	*Docent*	*Leerlingen*
Inleiding	5	- Inleiding o Duidelijk maken dat er een les uitvalt en dat er meters gemaakt moeten worden!	

Maken opgaven t/m 34	25	- Aansturen leerlingen dat ze gaan werken aan de opgaven	- Werken aan de opgaven
Einde les	5	- Huiswerk opgeven o t/m 47, samen met opgave 2 die we nog niet gedaan hadden o reflectie over opgaven	- luisteren en huiswerk noteren
	50		

3.3.13.4.1 Gedetailleerde inhoud

- Inleiding
    - Proefwerk is al snel. Deze week afronden sectie 2.3 en volgende week in 2 lessen 2.4.
    - Flink doorwerken dus!

3.3.13.4.2 Bordgebruik

-

3.3.14 Les 14 (lesvoorbereiding) – Oppervlakte en inhoudsformules van ruimtelijke figuren

3.3.14.1 Globale inhoud

- De inhoudsformules van de volgende ruimtelijke figuren goed op een rijtje zetten: balk, kubus, prisma, cilinder, piramide, kegel, bol
    a. Inzicht waarom de inhoudsformules van balk, kubus, prisma en cilinder allen *Gh* zijn
    b. Inzicht waarom inhoudsformule van de piramide 1/3 *Gh* is
    c. Inzicht waarom inhoudsformule van de kegel net als de piramide ook 1/3 *Gh* is
- Inhoudsformules zijn vastgelegd op het kennisblad

3.3.14.2 Leerdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerling begrijpt dat de inhoudsformules van balk, kubus, prisma en cilinder allen *Gh* zijn.
2	Leerling heeft gevoel voor de factor 1/3 bij de inhoudsformule van de piramide, doordat hij weet dat een kubus gezien kan worden als opgebouwd als 3 piramiden van gelijke vorm en grootte
3	Leerling begrijpt dat de kegel gezien kan worden als een 'limiet' van een regelmatige piramide: grondvlak is een regelmatige veelhoek met 'oneindig veel zijden' en de top bevindt zich loodrecht boven het midden van het grondvlak
4	Leerling weet dat de inhoudsformule van de bol niet gemakkelijk kan worden ingezien en dus geleerd moet worden

3.3.14.2.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerling heeft kennisblad bijgewerkt voor wat betreft de inhoudsformules van de ruimtelijke figuren
2	Leerling heeft gewerkt aan de opgaven

3.3.14.3 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

Nr	*Randvoorwaarden en voorbereidingen*
1	Lokaal met digibord
2	Geogebra bestand aanwezig, dat van een aantal ruimtelijke figuren de hoogte dynamisch weergeeft
3	Geogebra bestand aanwezig, dat een regelmatige veelhoek laat zien en waarvan het aantal hoeken/zijden gevarieerd kan worden (tot ca. 200 zijden).
4	Kubus die bestaat uit 3 piramiden aanwezig in de klas

3.3.14.4 Planning van de lesactiviteiten

Fase	*Duur*	*Docent*	*Leerlingen*
Inleiding	5	- Inleiding	
Bespreken inhoudsformules	20	- Aansturen leerlingen om deze op een rij te zetten en samen te kijken of we deze nader kunnen verklaren	- actief meedenken en kennisblad bijwerken
Maken opgaven	25	- Aansturen leerlingen dat ze gaan werken aan de opgaven - Vanmiddag af!	- Werken aan de opgaven
Einde les	5	- Als jullie tussenuren hebben: niet klaverjassen, maar werken aan de opgaven!! - Vanmiddag controleer ik en als ik vind dat je niet ver genoeg bent, dan moet je nog maar even blijven	-
	50		

3.3.14.4.1 Gedetailleerde inhoud

- Inleiding
    - Deze les gaan we de inhoudsformules van een aantal ruimtelijke figuren bespreken. Vooral inzicht krijgen waarom deze formules zo zijn, zodat je ze gemakkelijker onthoudt.
    - Daarna gaat iedereen verder met de opgaven. Iedereen moet na vandaag de opgaven klaar hebben. Hier zal ik op controleren.

- Bespreken inhoudsformules van de ruimtelijke figuren
    - *Balk, kubus, prisma, cilinder: I=Gh*
        - Aansturen dat leerlingen met potlood de inhoudsformules van de eerste 4 ruimtelijke figuren opschrijven (alleen de lettervorm) en dat ze moeten nagaan op welke manier de formules met elkaar overeenkomen en of ze dit kunnen verklaren door ook te kijken naar de overeenkomst tussen de vorm van de ruimtelijke figuren.
        - Leerlingen flink aan het werk 'opporren' zodat er tempo wordt gemaakt en de hersens actief worden
        - Na ca. 3 minuten de boel samen samenvatten. Er moet duidelijk worden geëxpliciteerd dat
            - alle inhoudsformules zijn volgens *Gh*, en
            - de vormen zijn allen 2 gelijke (congruente) grondvlakken die recht boven elkaar staan
            - << formules opschrijven op het bord, in de figuur ook deze letters laten terugkomen
                - balk: *lxbxh*
                - kubus: *axaxa*
                - prisma: *Gh*
                - cilinder: πr^2
            - duidelijk aangeven wat bij deze figuren steeds grondvlak is en wat de hoogte >>
        - Afhankelijk van hoe dit proces loopt, de Geogebra applet laten zien, waarbij de hoogte dynamisch en tegelijkertijd word gevarieerd.
            - Eerst de balk laten zien
                - Het verhaal dat ik erbij houd, is een beetje populair maar slaat denk ik goed aan: we nemen een rechthoekig grondvlak (we zien het hier van opzij, dus het ziet er misschien niet zo uit, maar het is er

toch echt een), en gaan dan met onze wiskundige CNTRL-C en CNTRL-V aan de gang. En toen hadden we 2 grondvlakken waarbij het gekopieerde grondvlak boven op het oorspronkelijke grondvlak ligt. We gaan nu het gekopieerde bovenste grondvlak langzaam recht omhoog brengen. Tegelijkertijd worden de grondvlakken met elkaar verbonden met zijvlakken. << dit hoeft niet echt verder te worden uitgediept: de leerlingen zien wat er gebeurd >>
    - Vervolgens vertellen dat naarmate je de hoogte groter maakt, dat je dan uiteraard ook meer inhoud krijgt. De inhoud is evenredig met de hoogte
- Vervolgens het prisma en de cilinder ernaast tegelijkertijd ook mee laten bewegen. Eerst natuurlijk weer even het verhaal van de wiskundige CNRL-C en CNTRL-V.

- Piramide, kegel: *I=1/3Gh*
    - Piramide
        - Aansturen dat leerlingen de inhoudsformules van piramide, kegel en bol gaan opschrijven
        - Leerlingen vertellen dat we niet de formule precies gaan afleiden, maar dat we gevoel proberen te krijgen waarom de factor 1/3 ervoor staat
        - kegel
            - De papieren kubus laten zien aan de klas en laten zien dat deze is opgebouwd uit 3 gelijke piramiden
            - Op het bord :

                Inhoud kubus = a^3 = 3 x Inhoud piramide = 3 x .... x Gh = 3 x ... a^3
                << Het getal dat ervoor staat, moet dus 1/3 zijn; vervolgens invullen op de stipjes >>
            - Vervolgens nogmaals heel duidelijk samen benoemen dat de top van de piramide niet recht boven het midden van het grondvlak hoeft te zijn en dat het grondvlak geen regelmatige veelhoek hoeft te zijn
            - << plaatje op het bord van een grillige piramide >>
    - kegel
        - We gaan nu kijken naar de inhoud van een kegel en we gaan zien dat deze net als bij de piramide gelijk is aan 1/3 Gh.
        - We kunnen namelijk de kegel zien als een zeer extreme piramide

- We nemen als uitgangspunt een regelmatige piramide, dus: grondvlak is een regelmatige veelhoek en de top ligt precies boven het midden van het grondvlak
- We nemen eerst een piramide met een vierkant als grondvlak. Dit lijkt een klein beetje op een kegel, maar nog niet zo heel erg: de kegel heeft een ronde mantel en we hebben nu vlakken. << tekening op het bord >>
- Maar stel nu dat we meer zijden nemen in het grondvlak, bijvoorbeeld 8 zijden. << nieuwe tekening van een piramide met regelmatige 8hoek als grondvlak >> Het lijkt al wat meer p een kegel en de inhoud van deze piramide benadert al heel aardig de inhoud van de kegel.
- Als we nu steeds meer zijden nemen in het grondvlak, dan krijgen we ook steeds meer zijvlakken bij de piramide en lijkt het steeds ronder. Laten we eens kijken naar de volgende Geogebra applet.
- << laten zien dat het grondvlak steeds meer een cirkel wordt als er steeds meer zijden komen en dat daardoor er ook steeds meer zijvlakken komen >>
- In het meest extreme geval als we oneindig veel hoeken nemen in het grondvlak, dan hebben we een oneindig goede benadering van een kegel. Het is nog steeds wel een piramide, dus de inhoudsformule is nog steeds het zelfde.
- Kortom: 1/3 *Gh*

3.3.14.4.2 Bordgebruik

Zie hiervoor hoe het bord gebruikt wordt bij de behandeling van de stof.

3.3.15 Les 15 (lesvoorbereiding) – Reflectie op 11-14 en afronden hoofdstuk

3.3.15.1 Globale inhoud

- De opgaven 11-14 gezamenlijk reflecteren
- Hoofdstuk afronden

3.3.15.2 Leerdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerling heeft overzicht over de oppervlakteberekening van een figuur bestaande uit sectoren, gelijkbenige driehoeken en segmenten - hoe herkennen - hoe oplossen - vaste onderdelen en tips

3.3.15.2.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	-

3.3.15.3 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

Nr	*Randvoorwaarden en voorbereidingen*
1	-

3.3.15.4 Planning van de lesactiviteiten

Fase	*Duur*	*Docent*	*Leerlingen*
Inleiding	5	- Inleiding	
Reflectie over opgaven 11-14	10	- Centraal klassengesprek om de essentie van dit type som duidelijk te hebben	- actief meedenken
Maken opgaven	30	- Aansturen leerlingen dat ze gaan werken aan de opgaven - Vanmiddag af!	- Werken aan de opgaven
Einde les	5	- Controle van de opgaven en leerlingen langer laten blijven als ze nog niet ver genoeg zijn - Heel veel succes met voorbereiden voor het proefwerk!	-
	50		

3.3.15.4.1 Gedetailleerde inhoud

- Inleiding
    - Deze les gaan we de opgaven 11-14 bespreken
    - Daarna werken aan de opgaven. Zoals gezegd, ik ga vorderingen controleren en als ik vind dat je nog niet ver genoeg bent, dan moet je nog maar even blijven.
    - << hiervoor heb ik verschillende redenen: leerlingen goed aan het werk krijgen, besef dat het erg belangrijk is om opgaven zo snel mogelijke gemaakt te hebben zodat het kan weken, etc.
- Reflectie
    - Zie eerdere les waarin ik uiteen heb gezet wat ik in elk geval benoemd wil hebben

3.3.15.4.2 Bordgebruik

-

3.3.16 Les 16 (lesvoorbereiding) – Laatste les

3.3.16.1 Globale inhoud

- Oplossingproces
- Vragen van leerlingen

3.3.16.2 Leerdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	Leerling kent strategie om tot een plan van aanpak te komen, met als onderdelen • Wat wordt er gevraagd? • Wat is er gegeven? • Wat voor soort kennis heb ik hierover? • Hoe kan ik dit alles met elkaar verbinden?
2	Leerling weet welke eisen er gesteld worden aan de uitwerkingen.

3.3.16.2.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*
1	-

3.3.16.3 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

Nr	*Randvoorwaarden en voorbereidingen*
1	-

3.3.16.4 Planning van de lesactiviteiten

Fase	*Duur*	*Docent*	*Leerlingen*
Inleiding	5	- Inleiding	
Plan van aanpak	25	- Centraal klassengesprek om de essentie van dit type som duidelijk te hebben	- actief meedenken
Hoe uitwerken	5	- Hoe schrijf je alles op	- Actief meedenken
Vragen en samenwerken	10	- Vragen beantwoorden - Leerlingen aansturen om elkaar te helpen met vragen	- Werken aan de opgaven
Einde les	5	- Heel veel succes met voorbereiden voor het proefwerk - Heel veel succes met het proefwerk	-
	50		

3.3.16.4.1 Gedetailleerde inhoud

- Inleiding
    - Deze week
        - Morgen toets en daarom vandaag de laatste les hierover. Ik ga straks nog een keer iets vertellen over hoe je een probleem kunt aanpakken en wat je kunt doen als je vastloopt
        - Donderdag beginnen we in de eerste met het volgende hoofdstuk. Hiervoor hebben we in totaal 2 weken omdat het een klein hoofdstuk is.
        - Donderdag komt in de tweede les iemand langs van het Saxion om te vertellen over wiskunde op het Saxion en in de praktijk. De meeste van jullie zullen wellicht naar het Saxion gaan en dan is het goed om nu alvast daar iets van te weten. Dit helpt je om je studiekeuze te bepalen. Ook is het leuk om te weten hoe de wiskunde in de praktijk gebruikt wordt. We beginnen dan vast in de pauze van 14:00 uur zodat we een vol uur hebben.

- Plan van aanpak
    - Meetkunde is het doordenken en doorrekenen van meetkundige figuren. Hiervoor heb je uiteraard kennis nodig en de kennis moet je slim combineren om tot conclusies en resultaten te komen
    - Over deze kennis hebben we het al heel vaak gehad en dat hebben we vastgelegd op de kennisbladen. Ik wil het nu hebben over ‘plan van aanpak’ en wat je kunt doen als je vastloopt bij een opgave.

Deze uitleg gaat in de vorm van een klassengesprek. Ik heb hieronder niet elke vraag met mogelijk antwoord opgeschreven. Het is in de ikvorm geschreven, maar de invulling moet vanuit de leerlingen komen.
Eerst laat ik de leerlingen de opgave lezen en nadenken over het gevraagde en de gegevens. Ik zeg duidelijk dat we niet bij onze eerdere uitwerkingen moeten gaan kijken; we gaan er opnieuw naar kijken.

Beginnen met een simpel voorbeeld om de methodiek en hoe ik dit op het bord opschrijf, duidelijk te krijgen.

<table>
<tr><th>bord</th><th>uitleg</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>gegevens</td><td></td><td>gevraagde</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td><td>De meeste sommen komen erop neer dat je iets moet berekenen. Dit is het gevraagde. Daarnaast zijn er gegevens waar je vanuit kunt gaan. Het komt erop neer dat je het gevraagde en de gegevens aan elkaar weet te linken.
Ik geef dit weer in deze 3 kolommen. In een plan van aanpak ga je dit bedenken.</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>gegevens</td><td></td><td>gevraagde</td></tr>
<tr><td>Diameter is 5</td><td></td><td>Oppervlakte cirkel</td></tr>
</table>
</td><td>Allereerst kijk je wat er gevraagd wordt. Dit zet ik in de laatste kolom. Stel voor we moeten de oppervlakte van een cirkel uitrekenen, waarbij gegeven is dat de straal 5 is.</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>gegevens</td><td></td><td>gevraagde</td></tr>
<tr><td>Diameter is 5</td><td>d=2r $O=\pi r^2$</td><td>Oppervlakte cirkel</td></tr>
</table>
</td><td>We kunnen nu vanuit het gevraagde kijken wat we nodig hebben om dit uit te rekenen. We kennen een formule voor de oppervlakte van de cirkel. Dit schrijf ik op.

Ik ga nu eens kijken of we vanuit de</td></tr>
</table>

	gegevens iets kunnen bedenken zodat we de gegevens en het gevraagde met elkaar kunnen verbinden. De diameter is 2x de straal, dat schrijf ik ook op.
	Nu zijn we er al, want we kunnen nu de formule gebruiken omdat we alle benodigde gegeven hebben. Belangrijk om met elkaar vast te houden is dat we de volgende stappen hebben doorlopen 1. We hebben een duidelijk beeld van wat gevraagd wordt en wat de gegevens zijn. 2. We hebben alle relevante kennis vanuit het gevraagde en vanuit de gegevens op een rij gezet 3. We zijn tot een plan van aanpak gekomen: we hebben de gegevens en het gevraagde met elkaar gelinkt. Niet alle opgaven zijn echter zo simpel. Vaak moet je ingewikkelder dingen doen. Daarom gaan we kijken of we deze aanpak kunnen gebruiken bij een aantal lastige opgaven.

Nu gaan we het toepassen op opgaven 32, DT2 en 51. (wederom in een klassengesprek). De reden is dat deze opgaven divers zijn: platte en ruimtelijke meetkunde, er zijn verschillende soorten kennis nodig, etc.

Opgave 32

<table>
<tr><td>bord</td><td>uitleg</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>gegevens</td><td></td><td>gevraagde</td></tr>
<tr><td>Opp. grondcirkel = 50
Opp. mantel = 75</td><td></td><td>tophoek</td></tr>
</table>
</td><td>We gaan weer uit van deze 3 kolommen en gaan kijken of we eerst het gevraagde en de gegevens helder kunnen krijgen.</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>gegevens</td><td></td><td>gevraagde</td></tr>
<tr><td>Opp. grondcirkel = 50
Opp. mantel = 75</td><td>1. Plaatje doorsnede, met letters</td><td>tophoek</td></tr>
</table>
</td><td>Als we het hebben over een tophoek, dan moet er meteen iets opborrelen wat we weten: een schets van de doorsnede van de kegel, met daarin symbolen van de eigenschappen van de kegel.</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>gegevens</td><td></td><td>gevraagde</td></tr>
<tr><td>Opp. grondcirkel = 50</td><td>1. Plaatje doorsnede,</td><td>tophoek</td></tr>
</table>
</td><td>We gaan eens kijken wanneer we de tophoek kunnen uitrekenen. We herkennen de rechthoekige driehoek en we kunnen dus alles hiervan uitrekenen als we 2 zijden weten. Hier is dat dus: rR,</td></tr>
</table>

50 Opp. mantel = 75		*doorsnede, met letters* 2. nodig rR hr hR	

hr, hR. (dit zeg ik uiteraard ook met de daadwerkelijke eigenschapnamen: straal grondcirkel, hoogte, straal mantel).

Als we de hoek in deze rechthoekige driehoek kunnen uitrekenen, dan kunnen we ook de tophoek uitrekenen, want deze 2x zo groot.

gegevens			gevraagde
Opp. grondcirkel = 50 Opp. mantel = 75	$O_{gc} = \pi r^2$ O=πrR	*1. Plaatje doorsnede, met letters* 2. nodig rR hr hR	tophoek

Laten we eens kijken wat we aan gegeven beschikbaar hebben: 2 oppervlaktes.
We kunnen dus niet meteen de tophoek uitrekenen, maar zullen op de een of andere manier moeten bepalen: rR of hr of hR.

We gaan na wat we weten over de opp. grondcirkel en de opp. mantel. Hier kennen we formules van.

Kunnen we nu op de een of andere manier dit in verband brengen met wat we willen weten?
Ja, want we kunnen 1. de straal van de grondcirkel uitrekenen en 2. als we die weten kunnen we ook de straal van de mantel uitrekenen.

We weten dan de r en de R en we kunnen

	de tophoek gaan uitrekenen. We hebben een plan van aanpakwant we hebben de gegevens en het gevraagde met elkaar verbonden. Over de uitwerking gaan we het nu verder niet hebben.
	Belangrijk om te onthouden: We hebben op een rij gezet wat er gevraagd wordt en wat de gegevens zijn en vervolgens hebben we alles wat we hierover wisten op een rij gezet en ingezet bij dit probleem. We hebben onze kennis dus slim gebruikt!

Opgave DT2

bord	uitleg
<table><tr><td>gegevens</td><td></td><td>gevraagde</td></tr><tr><td>Regelmatige 8-hoek Omtrek omgeschreven cirkel is 8</td><td></td><td>hoek ABC</td></tr></table>	Wat wordt er gevraagd en wat zijn de gegevens. Het is natuurlijk erg belangrijk om te snappen wat er gevraagd wordt en daarom gaan we dit in een plaatje verduidelijken.

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>gegevens</td><td></td><td>gevraagde</td></tr>
<tr><td>Regelmatige 8-hoek
Omtrek omgeschreven cirkel is 8</td><td>Plaatje met daarin aangegeven de te berekenen hoek</td><td>hoek ABC</td></tr>
</table>
</td><td>We moeten dus deze hoek uitrekenen. Dat kunnen we niet zo maar.</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>gegevens</td><td></td><td>gevraagde</td></tr>
<tr><td>Regelmatige 8-hoek
Omtrek omgeschreven cirkel is 8</td><td>Plaatje met daarin aangegeven de te berekenen hoek</td><td>hoek ABC</td></tr>
</table>
</td><td>Laten we dus eens gaan kijken naar wat er nu allemaal in ons opkomt als we deze regelmatige 8-hoek zien.
We weten dat we een gelijkbenige driehoek kunnen tekenen met top gelijk aan het middelpunt. We weten dat we de tophoek kunnen uitrekenen door middel van 360/aantal zijden,dus 360/8= 45 graden.

Maar wat hebben we hier nu aan?</td></tr>
<tr><td></td><td>We moeten iets extra’s erbij halen anders komt het niet uit. We zien dus die driehoek met een bekende tophoek en we kunnen de basishoeken berekenen omdat we weten dat de som van de hoeken gelijk is aan 180 graden.</td></tr>
</table>

	He, dat is mooi, want de hoek die we moeten uitrekenen is 2x die basishoek, dus we kunnen zo de hoek uitrekenen!
	We hebben dus deze opgave kunnen oplossen omdat we op een rij hebben gezet wat we moeten uitrekenen, wat er gevraagd is en we hebben daarbij alles wat er aan kennis opborrelt erbij betrokken. Als je bij een opgave op de toets ergens dus niet uitkomt, dan moet je nog eens heel goed nadenken of er iets is wat je over het hoofd ziet! Is er toch nog iets wat ik ook weet en waarmee ik een stap verder kom?

Opgave 51

bord	uitleg
<table><tr><td>gegevens</td><td></td><td>gevraagde</td></tr><tr><td>Ribbe is 4</td><td>I(kubus) = ribbe^3 I(bol)=4/3πr^3</td><td>I(bol) – I(kubus)</td></tr></table>	Laten we eens kijken wat er gevraagd wordt en wat de gegevens zijn. We hebben dus een omgeschreven bol van een kubus en we moeten uitrekenen: I(bol) – I(kubus)

	Wat voor gegevens zouden we moeten hebben om dit uit te rekenen? Voor de kubus de ribbe en voor de bol de straal. Want we kennen de volgende formules (zie hiernaast). We kunnen dus meteen de inhoud van de kubus uitrekenen, want we weten de lengte van de ribbe, maar voor de inhoud van de bol schieten we *direct* niet zoveel mee op. We zullen dus op de een of andere manier de ribbe en de straal met elkaar moeten verbinden.
<table><tr><td>gegevens</td><td></td><td>gevraagde</td></tr></table>	Laten we eens een schets maken wat er aan de hand is. We beginnen met een 3 dimensionale schets van de kubus en de bol. Dat is natuurlijk lastig, maar laten we het toch maar doen dan zien we wel wat we tegenkomen. Ja, die bol is natuurlijk wel lastig. Wat weten we van die bol? Dat de punten van de kubus allen erop moeten liggen. Wellicht kunnen we toch iets doen? Misschien ergens een cirkel tekenen?

			<< het gaat erom dat we een gevoel krijgen voor de problematiek >>
gegevens		gevraagde	Wat schieten we hier nu mee op? Wat moeten we ook al weer uitrekenen? Kunnen we dit in het plaatje aangeven? Ok, de straal zit dus precies tussen het midden en een hoekpunt. Hoe kunnen we dit midden vinden? Kunnen we misschien een handiger plaatje tekenen? -> doorsnede door lichaamsdiagonaalvlak
Ribbe is 4	I(kubus) = ribbe^3 I(bol)=4/3πr^3 *Schets van kubus met 'bol'* *De 'getekende bol' is een boldoorsnede: een cirkelschijf door de lichaamsdiagonaal hoekpunten.* ***Aangegeven: middelpunt bol en straal***	I(bol) – I(kubus)	
gegevens		gevraagde	We tekenen dus een doorsnede door lichaamsdiagonaal, dat ziet er al simpeler uit. We zijn best al goed op weg. We kunnen de straal uitrekenen als we de lengte van

	van de ruimtefiguur: een rechthoek en een cirkel. *Hierbij aangeven de lengtes die we al weten.* *Schets van vlak ABCD met daarin de diagonaal AC.*		diagonaal AC van rechthoek ACGE hebben. (Pythagoras) Zouden we hier aan kunnen komen? Ja, want deze is gelijk aan de diagonaal van zijvlak ABCD en deze kunnen we vrij gemakkelijk uitrekenen. (weer Pythagoras)
			Dus ook nu kunnen we een aanpak vinden om het gevraagde uit te rekenen. Kijk weer goed naar wat gevraagd is en wat de gegevens zijn en begin in dit ruimtelijke probleem met wat schetsen om er grip op te krijgen.

Hoe schrijf je alles op

We hebben nu eerst gekeken naar hoe je tot een oplossing kunt komen. Maar goed, je moet morgen op de toets het natuurlijk ook op de juiste manier opschrijven. Denk om het volgende!!!

Alle berekeningen in 3 stappen:

i. letterstap

ii. invulstap
iii. rekenstap

Maar voordat je een letter (variabele) gebruikt, moet je wel duidelijk maken wat dit is! Dus, maak een tekening of schets waarin dit duidelijk wordt!

Werk netjes, werk met passer en liniaal. Er wordt bij het nakijken gelet op netheid!

3.3.16.4.2 Bordgebruik

Zie hiervoor.

3.4 Didactisch materiaal (selectie)

Deze sub-bijlage toont een selectie van de verschillende didactische materialen die in de lessen zijn ingezet.

3.4.1 Kennisbladen

De volgende ingescande bladen laten zien

- welke bladen aan de leerlingen zijn uitgereikt
- wat leerlingen op de kennisbladen vastgelegd zouden moeten hebben.

De kennisbladen bestaan uit een kopie op A3 papierformaat, dubbelgevouwen tot het formaat A4 waardoor een miniboekje wordt verkregen van 4 bladzijden.

De kennisbladen zijn voorbedrukt, dat wil zeggen op het papier zijn reeds tekst en figuren gekopieerd. De reden hiervoor is dat

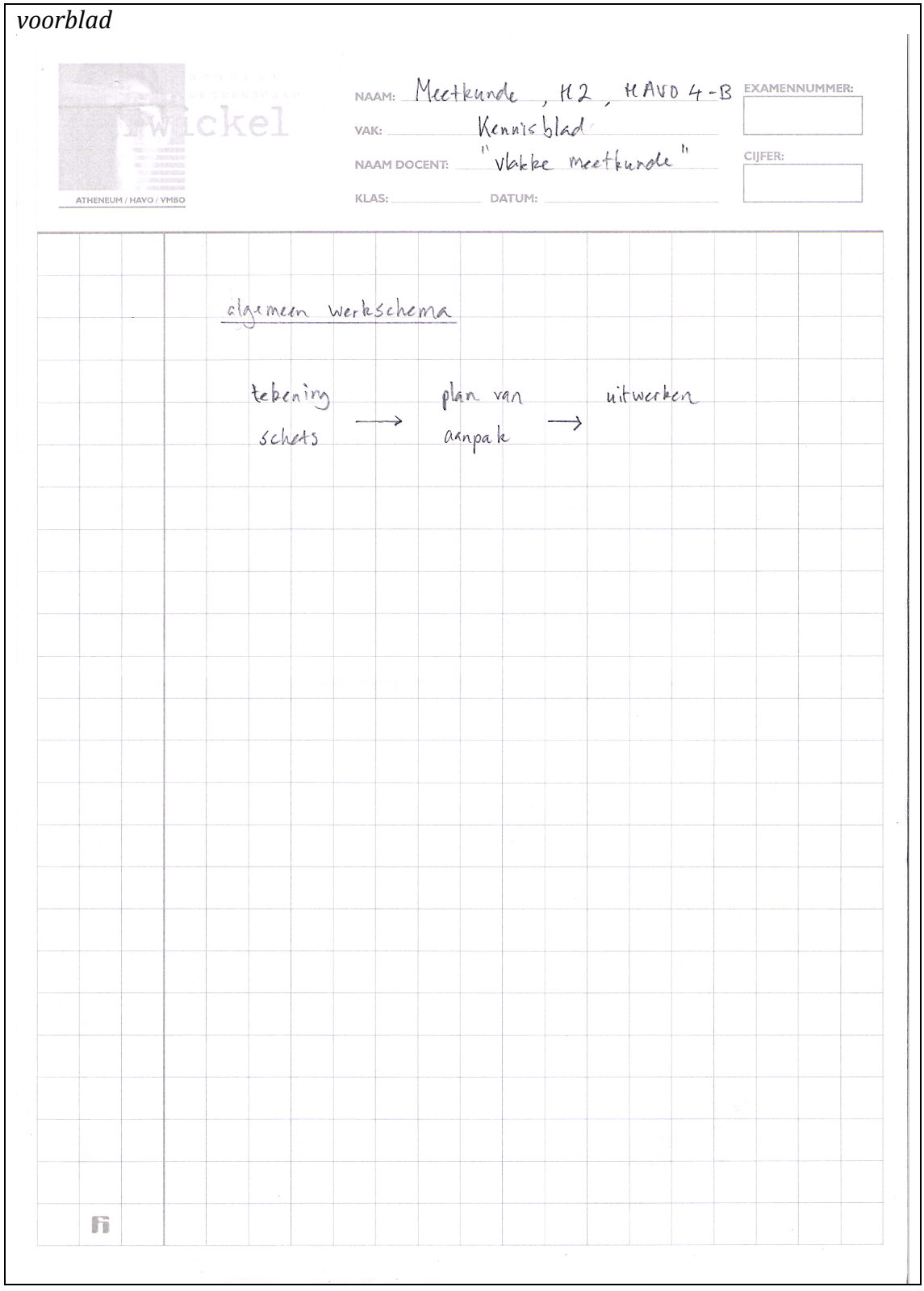
- er reeds structuur is aangebracht en dat aantekeningen overzichtelijk zijn
- het materiaal biedt voor denkactiviteiten voor de leerlingen (zonder de clou reeds weg te geven)
- leerlingen niet *onnodig* veel hoeven over te schrijven; de tijd en energie van de leerlingen moet efficiënt worden gebruikt

In de lessen die gegeven worden in een lokaal met digibord, zijn de kennisbladen beschikbaar om geprojecteerd te worden op het digibord. De docent en de leerlingen hebben zo een gemeenschappelijke referentie. De docent kan dan bijvoorbeeld goed aangeven hoe bepaalde eigenschappen in figuren te zien zijn en hoe je dit kunt aangeven met kenmerken.

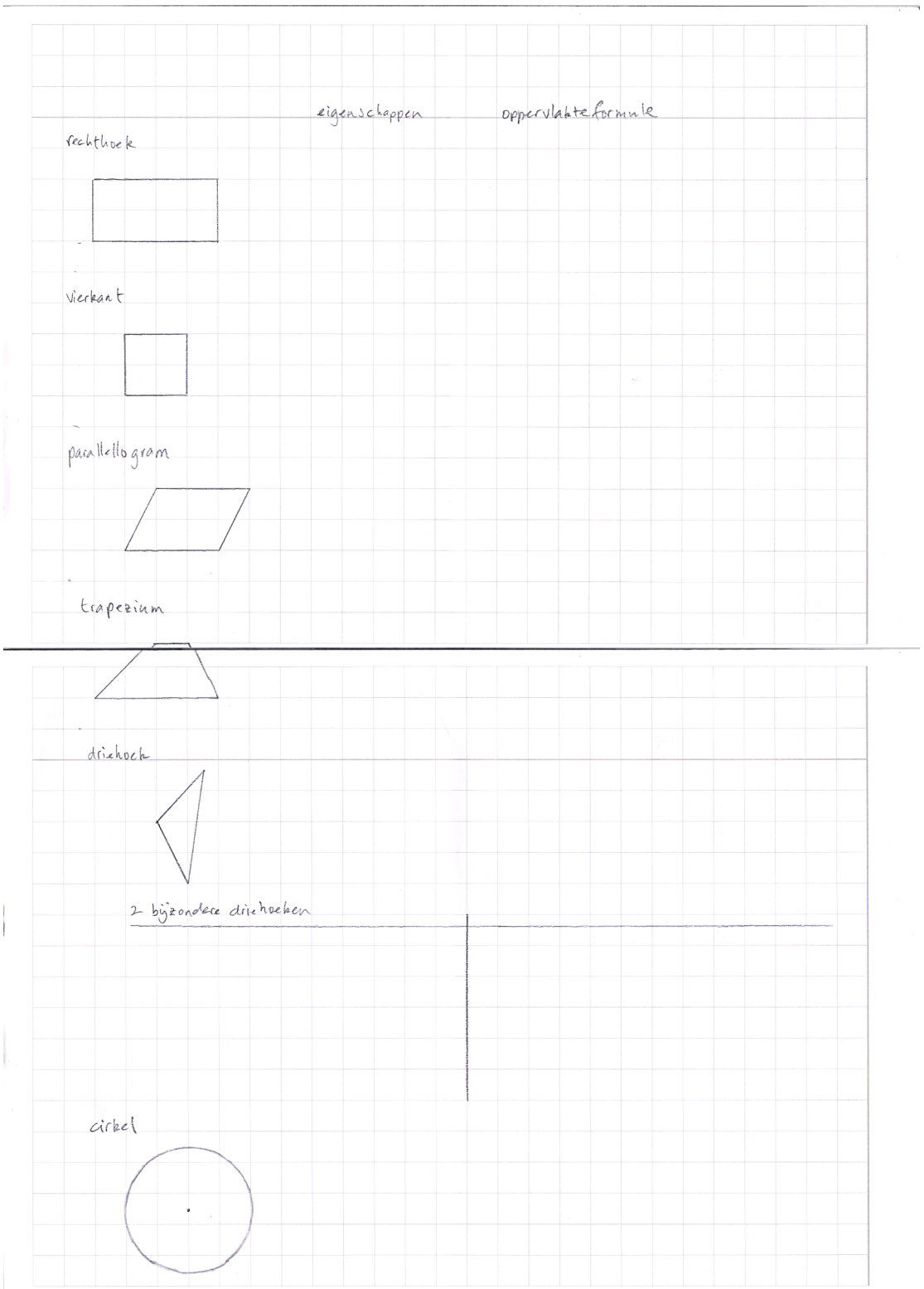
In de volgende paragrafen worden de kennisbladen getoond: leeg, zoals ze zijn uitgereikt; en ingevuld, zoals behandeld tijdens de lessen.

3.4.1.1 Kennisblad 1 – vlakke meetkunde (leeg)

voorblad

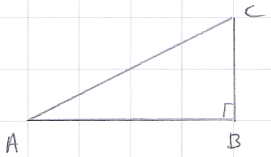


Binnenbladen

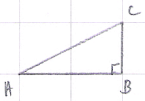


achterblad

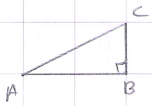
rechthoekige driehoek – SOSCASTOA



berekenen hoek



berekenen zijde



① ASO

② SOSCASTOA

③ uitwerken

3.4.1.2 Kennisblad 1 – vlakke meetkunde (ingevuld)

voorblad

ATHENEUM / HAVO / VMBO

NAAM: Meetkunde, H2, HAVO 4-B
VAK: Kennisblad
NAAM DOCENT: "vlakke meetkunde"
KLAS: _____ DATUM: _____

EXAMENNUMMER:

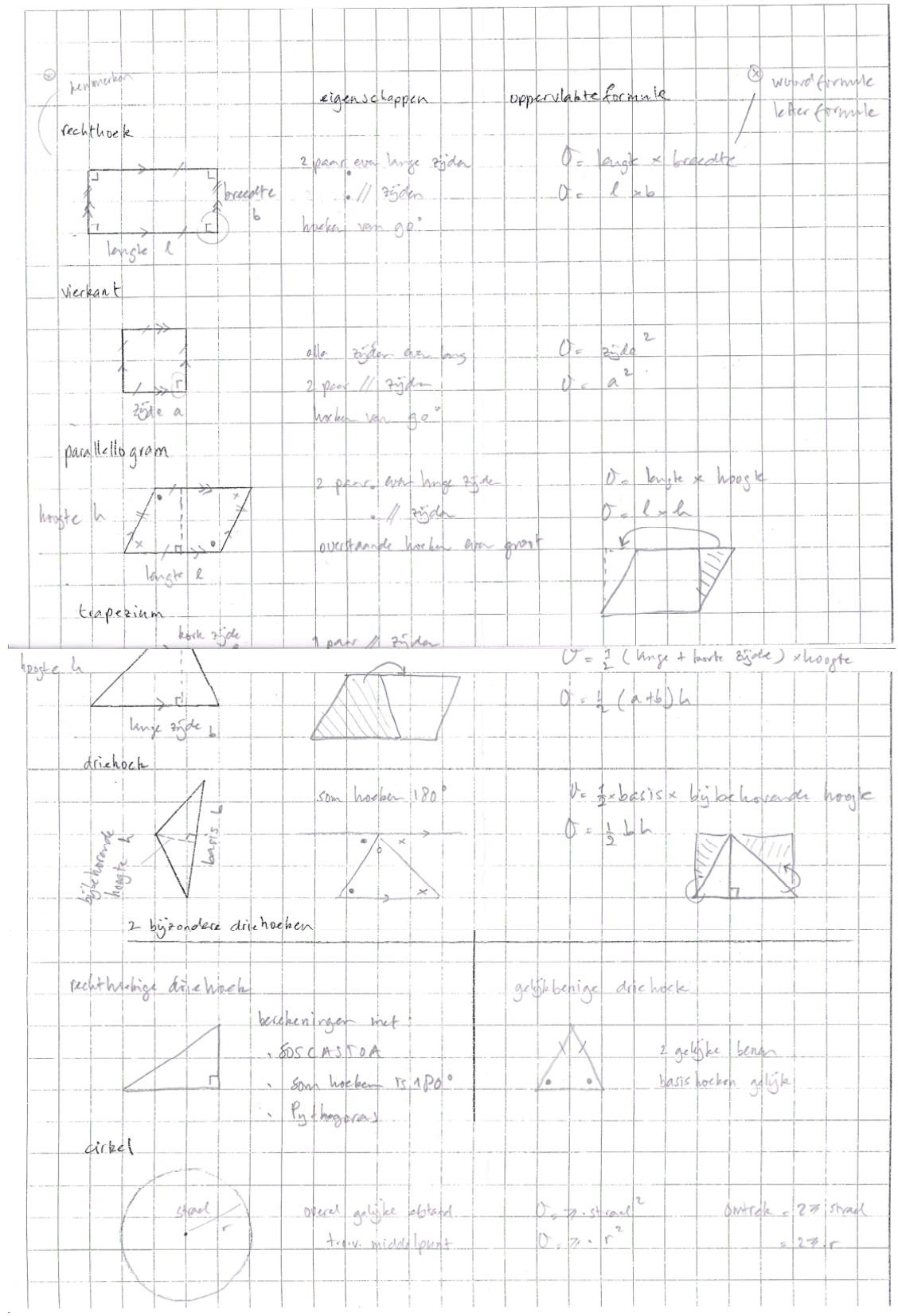
CIJFER:

algemeen werkschema

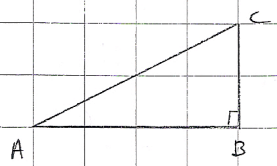
tekening schets → plan van aanpak → uitwerken
1. letterstap
2. invulstap
3. rekenstap

1. begrijp ik de vraag?
2. herken ik het soort som?
3. welke basisfiguren herken ik?
   wat weet ik hiervan?
4. bedenk plan: welke gegevens nodig voor antwoord?
   hoe kan ik deze uitrekenen?
5. schrijf je plan op en ga na wat je wél weet, en niet weet
6. teken extra lijnen om basisfiguren te maken; bijv een cirkel 'stralen'

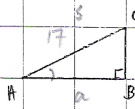
Binnenbladen



rechthoekige driehoek - SOSCASTOA



berekenen hoek ∠A



1) aso

2) SOSCASTOA — sin

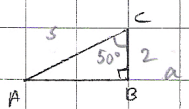
3) uitwerken

① $\sin \angle A = \frac{BC}{AC}$

② $\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{BC}{AC}\right)$

③ $\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right) = \dots$

berekenen zijde AC



cos

① $\cos \angle C = \frac{BC}{AC}$

② $\cos 50° = \frac{2}{AC}$

$\cos 50°$	2
1	AC

③ $AC = \frac{2}{\cos 50°}$

Wet: je kunt alle zijden en hoeken v.d. rechthoekige driehoek berekenen als je weet:

- 2 zijden (ZZ)
- zijde en hoek (ZH)

3.4.1.3 Kennisblad 2 – vlakke meetkunde, vervolg (leeg)

voorblad

SCHOLEN GEMEENSCHAP Twickel

ATHENEUM / HAVO / VMBO

NAAM: Meetkunde, H2, HAVO 4-B

VAK: Kennisblad 2

NAAM DOCENT: "vlakke meetkunde"

KLAS: DATUM:

EXAMENNUMMER:

CIJFER:

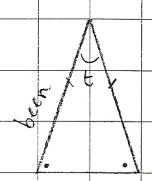
gelijkbenige driehoek

- construeren VB: construeer gelijkbenige ΔABT met top T, $AB = 3$ en $AT = 5$

- berekenen hoeken, zijden, hoogte

- berekenen oppervlakte, standaard manier

- berekenen oppervlakte, "easy way" als tophoek en beenlengte gegeven zijn



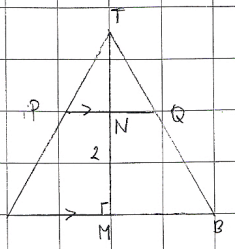
$O = \frac{1}{2} \times (\text{lengte been})^2 \times \sin(\text{tophoek})$

- gelijkvormigheid

Gegeven: gelijkbenige $\triangle ABT$ met $PQ \parallel AB$; $AB = 4$, $PQ = 1\frac{1}{2}$, $MN = 2$

Bereken MT.

① tekening



① aantonen gelijkvormigheid

② introduceer $NT = x$

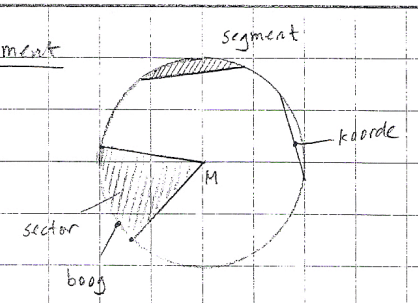
③ verhouding stabel doorrekenen

1. letterstap
2. invulstap
3. rekenstap

④ antwoord

binnenblad 2

cirkel | sector + segment

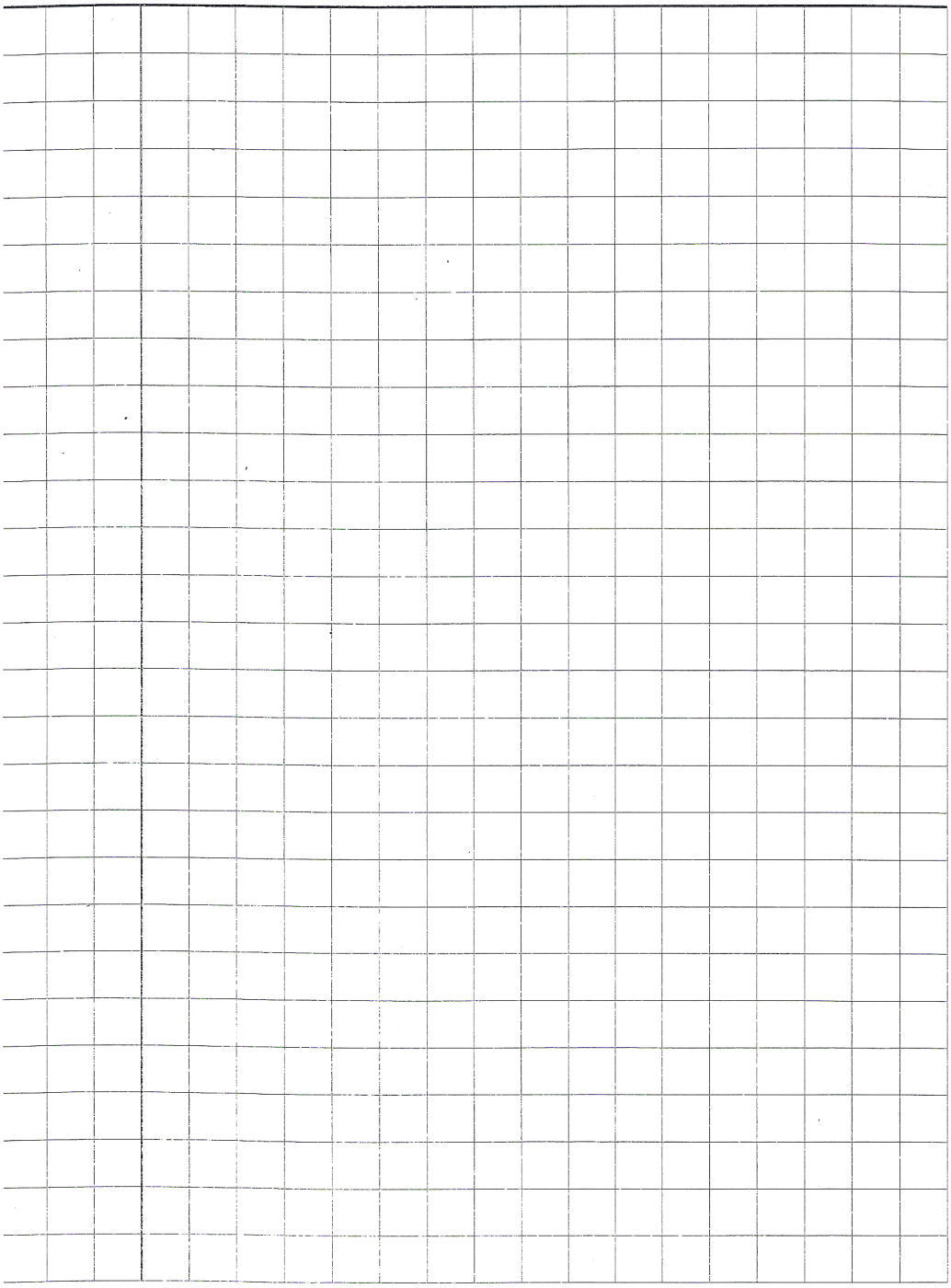


lengte boog =

opp. sector =

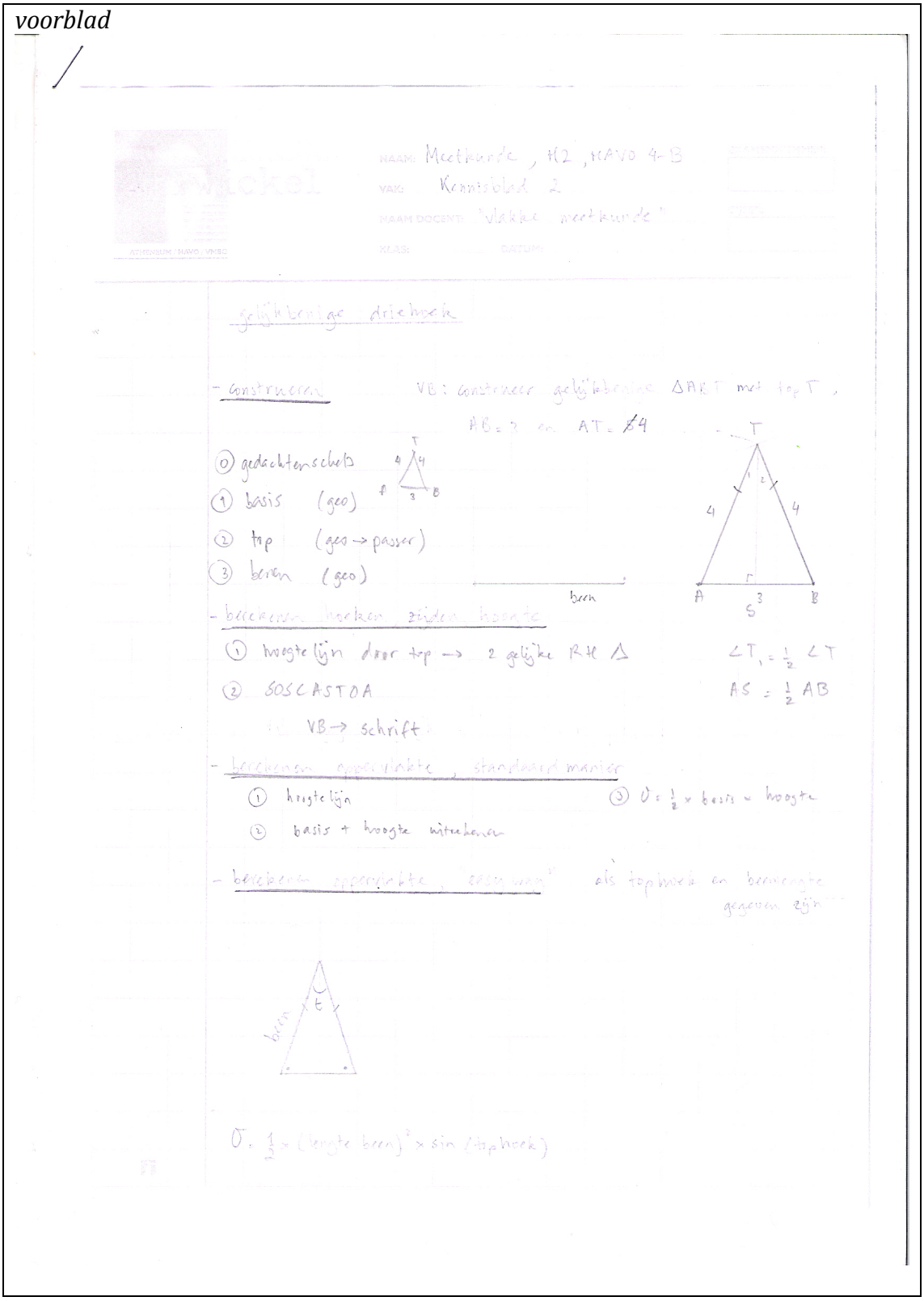
opp. segment =

achterblad



3.4.1.4 Kennisblad 2 – vlakke meetkunde, vervolg (ingevuld)

voorblad

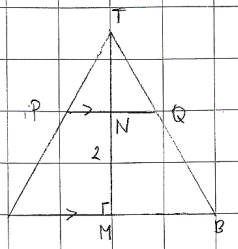


- gelijkvormigheid

Gegeven: gelijkbenige $\triangle ABT$ met $PQ \parallel AB$; $AB = 4$, $PQ = 1\frac{1}{2}$, $MN = 2$

Bereken MT.

① tekening



① aantonen gelijkvormigheid

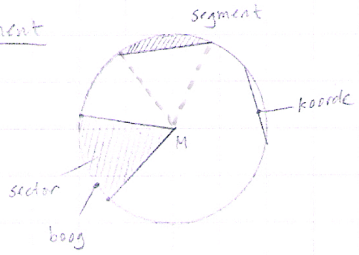
② introduceer $NT = x$

③ verhouding stabel doorrekenen
1. letterstap
2. invulstap
3. rekenstap

④ antwoord

binnenblad 2

cirkel sector + segment



lengte boog = $\frac{p}{360} \cdot 2\pi r$

opp. sector = $\frac{p}{360} \cdot \pi r^2$

opp. segment = opp. boog − opp. gelijkbenige $\triangle$

lengte sector

cirkel	360°		$2\pi r$
sector	p		lengte

lengte $\times$ 360° = $p \cdot 2\pi r$

lengte = $\frac{p}{360^\circ} 2\pi r$

deel v/d cirkel

opp. sector

cirkel	360°	πr^2
sector	p	opp

opp $\times$ 360° = $p \cdot \pi r^2$

opp = $\frac{p}{360^\circ} \cdot \pi r^2$

achterblad

typische sommen

- oppervlakte regelmatige veelhoek
  - opdelen in gelijkbenige driehoeken
  - oppervlakte formule driehoek
  - indien nodig : hoogtelijn + SOSCASTOA
- oppervlakte figuur bestaande uit cirkelsectoren, -segmenten en gelijkbenige driehoeken
  - opdelen in standaardvormen
    evt. dmv tekenen extra stralen
  - nagaan bijbehorende hoeken
    - totale middelpuntshoek is 360°
  - oppervlakte formules van sector en driehoek

3.4.1.5 Kennisblad 3 – uitslagen ruimtemeetkunde (leeg)

voorblad

ATHENEUM / HAVO / VMBO

NAAM: _____

VAK: _____

NAAM DOCENT: _____

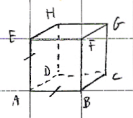
KLAS: _____ DATUM: _____

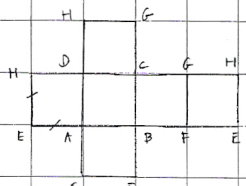
EXAMENNUMMER:

CIJFER:

Ruimte figuren met mogelijke uitslagen

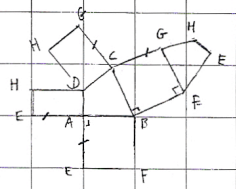
kubus



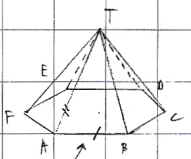


prisma

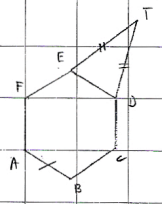
bovenaanzicht



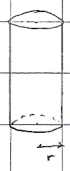
regelmatige piramide



grondvlak is regelmatige veelhoek



cilinder



Vraagstuk van het omgespannen touwtje

binnenblad 1

Tekenen uitslag - waar op letten?

1.
2.
3.

Hoe afgesneden / afgeknotte figuur tekenen?

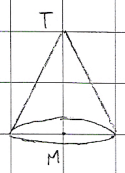
I "indirecte aanpak"

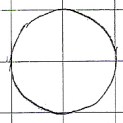
1. teken uitslag niet-afgesneden figuur
2. breng correcties aan

II "directe aanpak"

1. onderzoek → vlakken stuklijst + samenhang
2. tekenen

Kegel





$\frac{p}{360°} = \frac{r}{R}$	$p = r$
	$360° \quad R$

afleiding:

1.
2.
3.
4.

binnenblad 2

doorsnede door de as

Oppervlakte = $\pi r^2 + \pi r R$

afleiding: ①

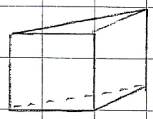
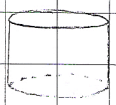
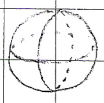
②

③

④

achterblad

Ruimte figuren : oppervlakte en inhoudsformules

	oppervlakte	inhoud
balk		
kubus		
prisma		
cilinder		
piramide		
kegel		
bol		

afgesneden figuren

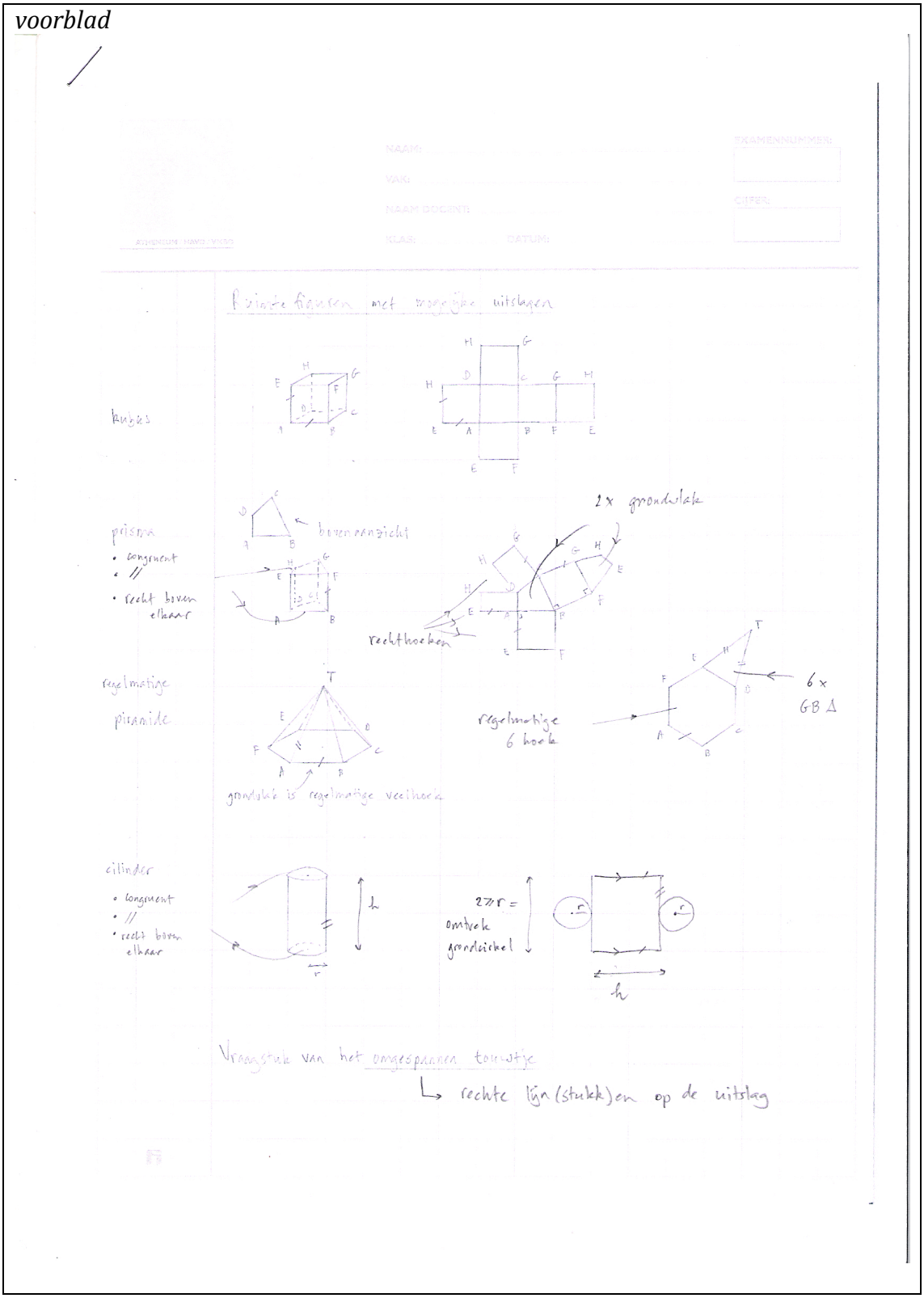
afgeknotte piramide

afgeknotte kegel

schuif afgesneden cilinder

3.4.1.6 Kennisblad 3 – uitslagen ruimtemeetkunde (ingevuld)

voorblad



binnenblad 1

Tekenen uitslag – waar op letten ?

① netjes met geo + passer
② afmetingen kloppen
③ letters bij hoekpunten

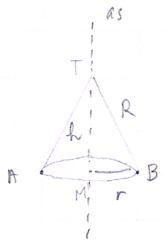
Hoe afgesneden / afgeknotte figuur tekenen ?

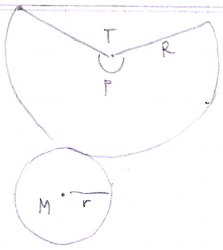
effecten :
- hoekpunten verdwijnen
- ribben + vlakken wijzigen
- extra vlakken

I "indirecte aanpak" 18, 19
① teken uitslag niet-afgesneden figuur
② breng correcties aan

II "directe aanpak" 20
① onderzoek → vlakken stuklijst + samenhang
② tekenen

Kegel





$\frac{P}{360°} = \frac{r}{R}$

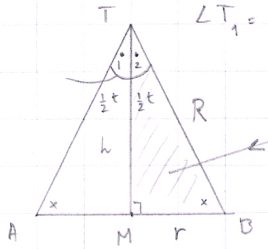
P	r
360°	R

sector!

afleiding :
① lengte mantelboog = omtrek grondcirkel
② $\frac{P}{360°} \cdot 2\pi R = 2\pi r$
③ $\frac{P}{360°} \cdot R = r$
④ $\frac{P}{360°} = \frac{r}{R}$

doorsnede door de as

tophoek t



$\angle T_1 = \frac{1}{2} \cdot t$

de 4 eigenschappen doorrekenen mbv SOSCASTOA : weet je er 2, dan kun je de andere 2 uitrekenen !

Bijv.

$r = MB = 2$

$t = \angle T = 40°$

te berekenen :

$R = \ldots$

$h = \ldots$

Oppervlakte $= \pi r^2 + \pi r R$

afleiding :

① opp = opp. grondcirkel + opp. mantel

② $opp = \pi r^2 + \boxed{\frac{r}{360°}} \cdot \pi \cdot R^2$

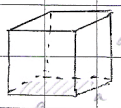
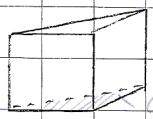
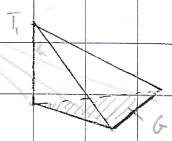
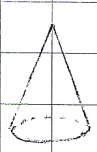
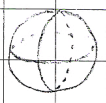
$= \frac{r}{R}$

③ $opp = \pi r^2 + \frac{r}{R} \cdot \pi \cdot R \cdot R$

④ $opp = \pi r^2 + \pi r R$

achterblad

Ruimte figuren : oppervlakte en inhoudsformules

		oppervlakte	inhoud
balk		$G = l \times b$	$I = \underbrace{l \times b}_{G} \times h$
kubus		$G = a \times a$	$I = \underbrace{a \times a}_{G} \times a$
prisma			$I = G \times h$
cilinder		$O = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi rh$	$I = \underbrace{\pi r^2}_{G} h$
piramide			$I = \frac{1}{3} G \cdot h$
kegel			$I = \frac{1}{3} G \cdot h$
bol		$O =$	$I = \frac{4}{3} \pi r^3$

afgesneden figuren

afgeknotte piramide

afgeknotte kegel

scheef afgesneden cilinder

3.4.2 Kegelonderzoek

Onderstaande tekst is het onderzoek dat is uitgedeeld aan de leerlingen en waarmee zij een kegelonderzoek hebben uitgevoerd.

Kegelonderzoek

Leerlingen gaan de eigenschappen van de kegel onderzoeken. Dit doen ze in twee stappen.

Eerst gaan ze in *opgave 1* een kegel maken met behulp van een gegeven uitslag. De relatie tussen eigenschappen van deze kegel moeten ze vervolgens onderzoeken. Uiteindelijk moet een formule met deze eigenschappen worden gemaakt.

Daarna in *opgave 2* gebruik je de gevonden formule door een tweede uitslag af te maken. Vervolgens knip je de uitslag uit en kun je nagaan of je de uitslag goed hebt gemaakt.

De volgende les moet je inzicht hebben in de relatie tussen deze eigenschappen van de kegel.

Succes!

Kegelonderzoek

Opgave 1

Knip uitslag ***A*** uit. Zorg ervoor dat de twee delen ongeveer over een centimeter met elkaar verbonden zijn. Wiskundig klopt dit niet helemaal: de twee delen zouden alleen in een punt met elkaar verbonden moeten zijn. Maar ja, dat kan in het echt niet. Daarom: we laten ze iets steviger aan elkaar, en dan kun je de kegelmantel straks mooi omklappen. Maar nogmaals, wiskundig gezien zouden ze elkaar in een punt moeten raken.

Goeds, als je de uitslag hebt uitgeknipt, moet je een klein vouwtje maken bij het vouwstreepje. Dit zorgt ervoor dat je een mooie kegelmantel kunt maken. Met een plakbandje kun je de kegel vastzetten.

Je kunt de kegelmantel nu omklappen zodat deze mooi over de grondcirkel valt.

a welke relatie bestaat tussen de omtrek van de cirkel en de lengte van de boog van de uitslag van de kegelmantel?

b wat weet je van de lengte van de lengte van de cirkelboog? Als je dit niet meer weet, kijk dan op je kennisblad over de vlakke meetkunde.

c maak, door gebruik te maken van je antwoorden op **a** en **b**, een formule die de relatie aangeeft tussen de volgende eigenschappen van de kegel:

- straal grondcirkel
- straal van de uitslag van de kegelmantel
- middelpuntshoek van de uitslag van de kegelmantel.

Deze formule maak je in twee vormen:

- Een letterformule
- Een woordformule

Kijk nog eens goed naar het kennisblad over vlakke meetkunde wat je bij deze formules je moet voorstellen.

Bij de formules gebruik je het volgende woorden en letters voor de kegeleigenschappen:

woord	*letter*
straal grondcirkel	r
straal kegelmantel	R
middelpuntshoek uitslag kegelmantel	p

We zouden eigenlijk de woorden 'straal uitslag kegelmantel' en 'middelpuntshoek uitslag kegelmantel' moeten gebruiken, maar dan wordt de woordformule wel heel erg lang en lastig om uit te spreken.

Als je er niet uitkomt, dan moet je de theorie en het voorbeeld in het boek doorlezen op bladzijde 52 en 53. Probeer dit goed te begrijpen en kijk dan of je de vragen **a**, **b** en **c** kunt beantwoorden.

Opgave 2

In de vorige opgave heb je een formule gevonden voor de eigenschappen van de kegel. Dit ga je gebruiken om uitslag **B** af te maken.

In uitslag **B** zie je een grondcirkel getekend, en een stukje van de uitslag van de kegelmantel.

a Meet de straal van de grondcirkel en de straal van de kegelmantel.

b Reken de middelpuntshoek uit, door deze gemeten waarden in te vullen in de formule die je hebt gevonden in opgave 1.

c Construeer de uitslag van de kegelmantel.

Knip nu de uitslag uit en zet deze net als de vorige kegel in elkaar. Klap de kegelmantel om en ga na of je berekening en constructie goed is gebleken.

Wickel

ATHENEUM / HAVO / VMBO

NAAM: Kegelonderzoek

VAK:

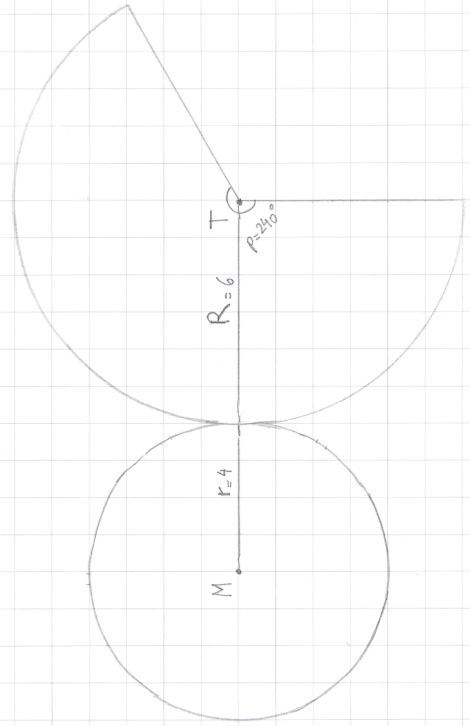
NAAM DOCENT:

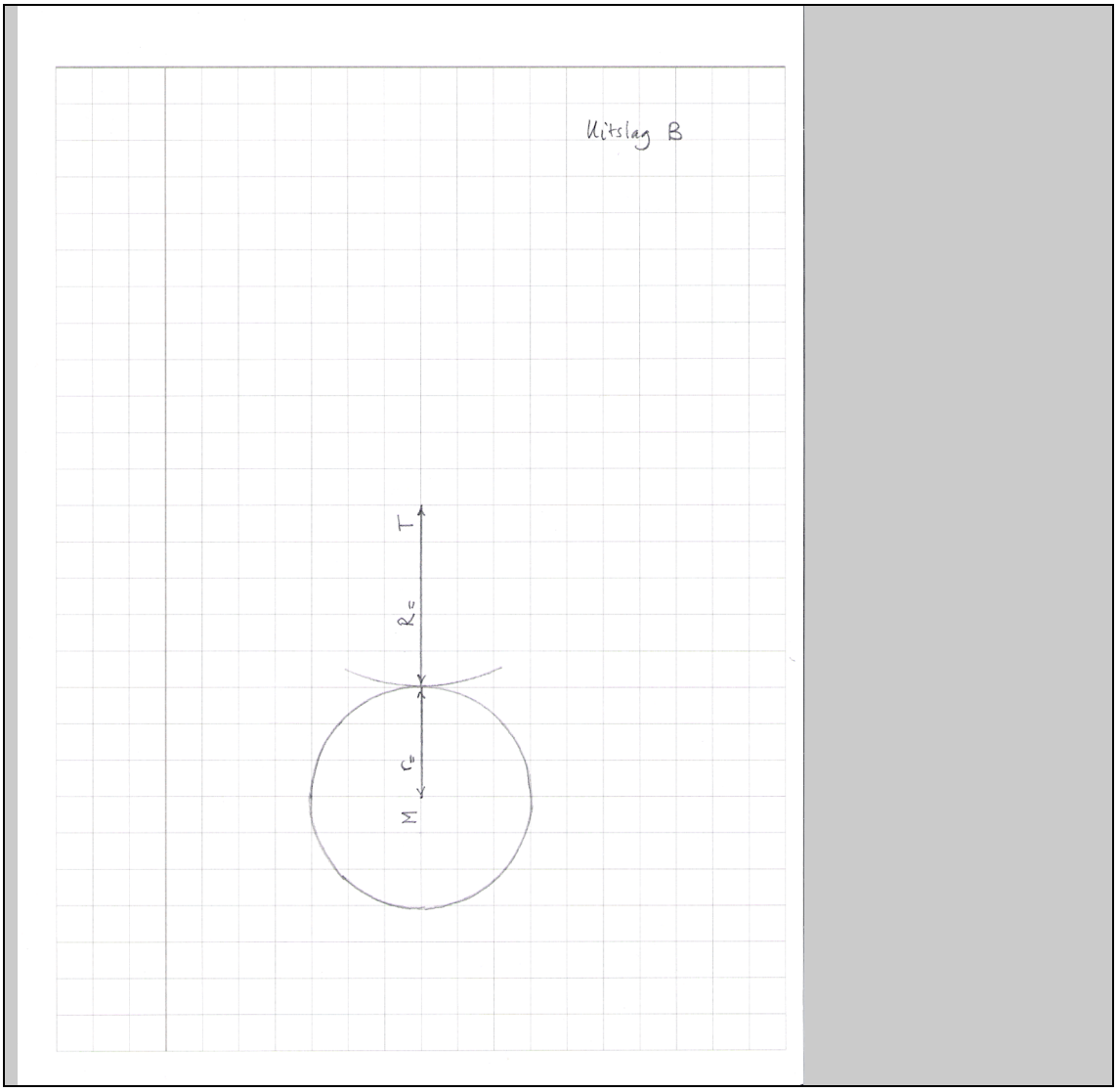
KLAS: DATUM:

EXAMENNUMMER:

CIJFER:

Uitslag A





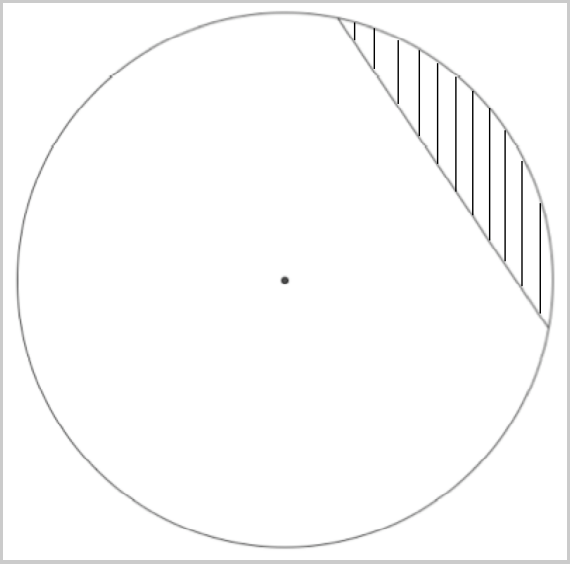
In de bespreking van het kegelonderzoek moeten de volgende antwoorden naar voren komen:

1a	Gelijk	
1b	Lengte = p / 360 * 2 * pi * R	
1c	- p / 360 * 2 * pi * R = 2 * pi * r - p / 360 * R = r - r / R = p / 360	- straal grondcirkel : straal kegelmantel = middelpuntshoek : 360
2a	R = 3 en R = 5	
2b	p = r / R * 360, dus p = 3 / 5 * 360 = 216	
2c	-	

3.4.3 Kegelsegmentopgave

De volgende tekst is uitgedeeld aan de leerlingen in de les om te maken, zodat zij na konden gaan in hoeverre zij de stof beheersten.

Opgave **Naam:**



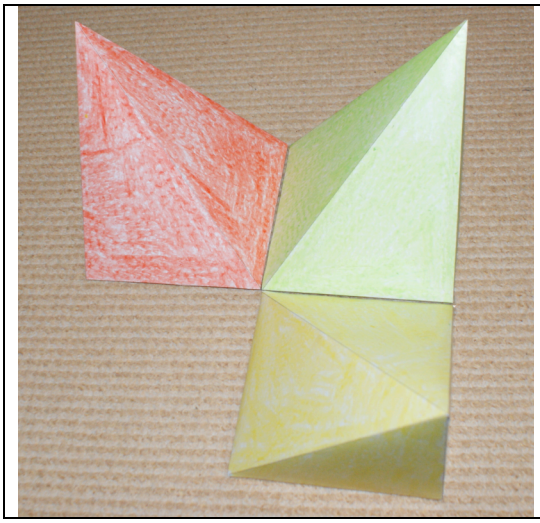
Zie de figuur hierboven, bestaande uit een cirkel met straal 5 en een koorde met lengte 7.

Bereken de lengte van het gearceerde gebied.

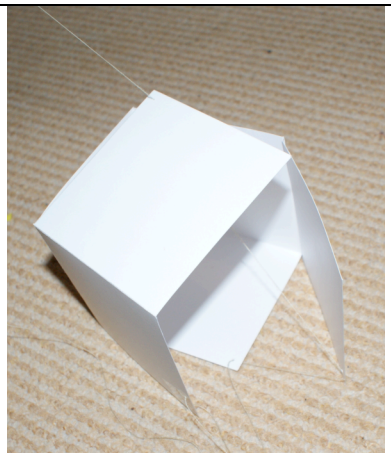
Uitwerking

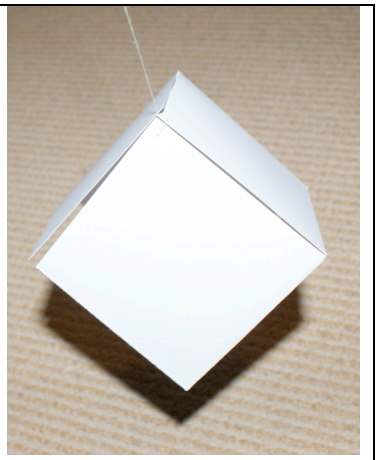
3.4.4 Uitklapbare kubus, bestaande uit drie piramiden

De kubus bestaat uit drie uitklapbare congruente piramiden, zodat de inhoud van 1 piramide gelijk is aan 1/3 deel van de kubus.

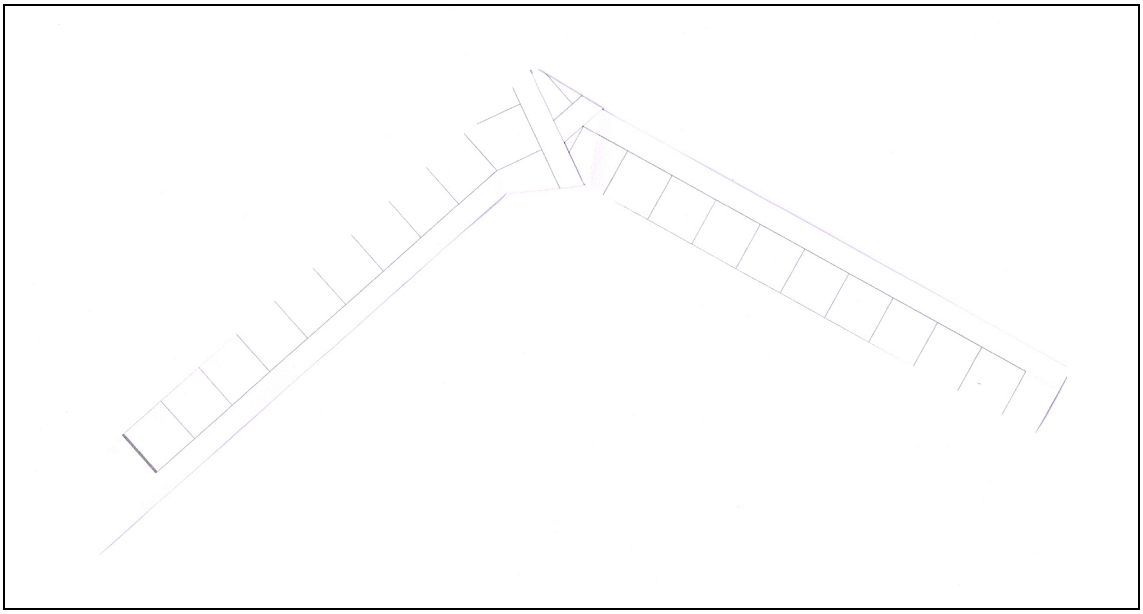


3.4.5 Appetizer: uitslag van een kubus met touwtje die als vanzelf in elkaar vouwt





3.4.6 Appetizer: creëren van een regelmatige vijfhoek wanneer een knoop wordt gelegd in een strook papier



4 Onderzoeksinstrument - toets

4.1 De afgenomen toets

De toets is als volgt opgebouwd.

1a	*1b*	*2a*	*2b*	*3a*	*3b*	*3c*	*4*	*5a*	*5b*	*6*	*7a*	*7b*
v	v	v	v	v	n	v	n	v	v	n	n	n

v: toetsonderdeel is overgenomen van de toets van het jaar ervoor.
n: nieuw toetsonderdeel

Proefwerk Wiskunde, 4 HAVO, Hoofdstuk 2 nov *2010*

Oppervlakte en inhoud

Dit proefwerk bestaat uit 7 opgaven. Werk ze netjes uit en deel je tijd goed in.

Geef altijd een berekening of motivatie.

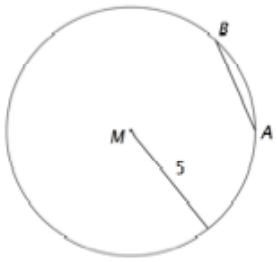
Bij dit proefwerk hoort een werkblad met daarop de figuren uit de opgaven. Je mag op dit werkblad schrijven en tekenen. Daarnaast zul je waarschijnlijk aanvullende tekeningen en schetsen moeten maken. Deze werk je uit op je uitwerkingenblad. Je levert het werkblad in bij je andere uitwerkingen.

Succes! J. Lanting

1 Zie de figuur hiernaast voor een cirkel met middelpunt *M* en straal 5.

Op deze cirkel liggen de punten *A* en *B*.

Gegeven is dat de oppervlakte van cirkelsector *ABM* gelijk is aan 10.



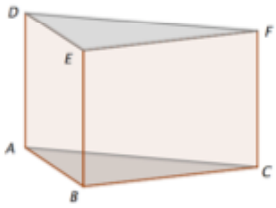
a Bereken $\angle AMB$ in graden.

b Bereken de lengte van lijnstuk *AB* in twee decimalen nauwkeurig.

2 Gegeven is het prisma *ABC DEF*.

Het grondvlak *ABC* is een rechthoekige driehoek met *AB* = 3 cm, *AC* = 5 cm en *BC* = 4 cm.

De hoogte van het prisma is 3 cm.



a Teken een uitslag van het prisma waarbij langs de ribben *AD*, *BE*, *CF*, *DE* en *DF* is opengeknipt.

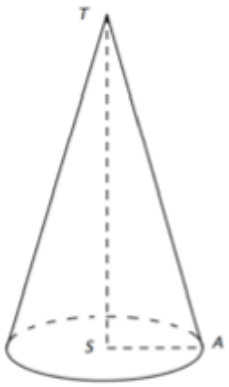
b Er wordt een touwtje gespannen van *A* via de ribben *BE* en *CF* naar *D*.

Bereken exact de lengte van dit touwtje.

Proefwerk Wiskunde, 4 HAVO, Hoofdstuk 2 **nov *2010***

Oppervlakte en inhoud

3 Ga in deze opgave uit van kegels met top T, hoogte TS en straal grondcirkel AS. Zie de tekening hiernaast.



a Voor een kegel is gegeven dat $AS = 10$ en dat de uitslag van de kegelmantel een halve cirkel is.

Bereken exact de hoogte TS.

b Voor een andere kegel geldt dat $AS = 3$ en $AT = 5$.

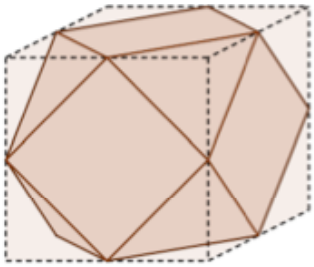
De kegel wordt afgeknot op hoogte 2.

Maak een nette schets (gebruik dus passer en liniaal) van de uitslag van deze afgeknotte kegel. Bereken voor zover nodig de afmetingen en vermeld deze bij de schets.

c Bereken exact de oppervlakte van de afgeknotte kegel uit onderdeel **b**.

4 De figuur hieronder is een kuboctaëder. Dat is een figuur die ontstaat door in elk zijvlak van een kubus de middens met elkaar te verbinden. Vervolgens wordt bij elk hoekpunt een piramide van de kubus afgesneden.

De kuboctaëder in de figuur hieronder is ontstaan uit een kubus met ribben van 12.



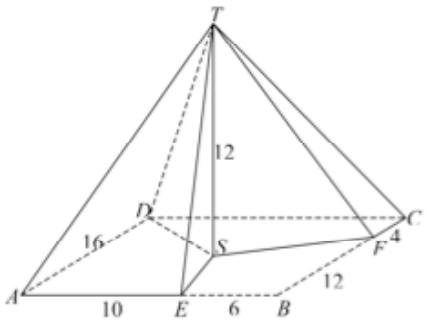
Bereken de oppervlakte van deze kuboctaëder.

Proefwerk Wiskunde, 4 HAVO, Hoofdstuk 2 **nov *2010***

Oppervlakte en inhoud

5 Bij het ontwerpen van de piramidewoning in de figuur hiernaast is de architect uitgegaan van een regelmatige piramide *T ABCD* met een grondvlak van 16 bij 16 m en een hoogte van 12 m.

De punten *E* en *F* liggen zo op *AB* en *BC* dat *AE* = 10 en *CF* = 4. De vlakken *TES* en *TFS* zijn verticaal.



a Bereken de inhoud van piramidewoning.

Het dakdeel *FCT* moet met riet worden bedekt.

b Bereken in m^2 nauwkeurig hoeveel riet nodig is voor dit dakdeel.

6 Hieronder zijn de figuren *A* en *B* getekend. Beide figuren bestaan uit 2 lijnstukken die met één eindpunt met elkaar verbonden zijn en zo samen een hoek vormen.

A

B

Toon met een berekening welke van deze figuren een deel van een regelmatige veelhoek is.

Proefwerk Wiskunde, 4 HAVO, Hoofdstuk 2 **nov *2010***

Oppervlakte en inhoud

De volgende opgave is een bewerking van een opgave uit het eindexamen HAVO wiskunde B 2009.

7 Een bekend gebouw in Brussel is het Atomium. Zie de foto.

De constructie van het Atomium bestaat uit 9 bollen die door buizen verbonden zijn. Van deze 9 bollen liggen er 8 op de hoekpunten van een kubus. De negende bol ligt in het midden van deze kubus op het snijpunt van de lichaamsdiagonalen.

De kubus steunt op een van de hoekpunten zo dat het middelpunt van de kubus recht boven het steunpunt ligt.

De bollen van het Atonium hebben een diameter van 18 meter.

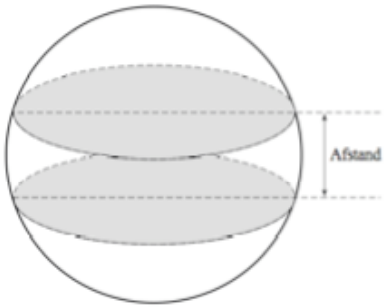
Van 2003 tot 2005 heeft men gewerkt aan de renovatie van het Atomium. Hierbij is de bekleding van aluminium platen aan de buitenkant van de bollen vervangen door platen van roestvrij staal.

Er zijn plaatsen waar geen roestvrij staal aangebracht hoefde te worden. Dat zijn:

- de plaatsen waar een buis aan een bol vastzit. De oppervlakte van één zo'n aanhechting is 7 m^2.
- de ramen, de trapaanhechtingen en het steunpunt van de onderste bol, met een gezamenlijke oppervlakte van 750 m^2.

a Bereken de totale oppervlakte van de roestvrijstalen bekleding van de bollen.

In enkele bollen van het Atomium zijn twee verdiepingen aangebracht. De oppervlakten van de vloeren van de beide verdiepingen zijn even groot. Zie de figuur hiernaast.



De straal van de bol is 9 meter.

De oppervlakte van de vloer van een verdieping is 240 m^2.

b Bereken de afstand tussen de twee verdiepingen.

— Einde proefwerk —

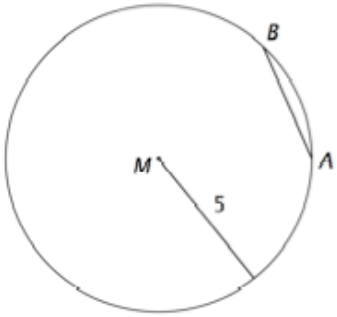
Proefwerk Wiskunde, 4 HAVO, Hoofdstuk 2 ***Werkblad***

Oppervlakte en inhoud

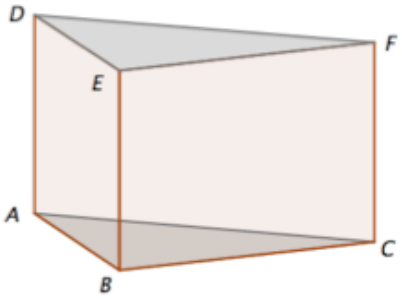
Dit werkblad mag je gebruiken bij het uitwerken van de opgaven. Je levert dit werkblad in bij je overige uitwerkingen.

Naam:

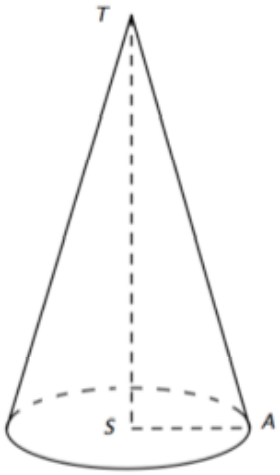
1

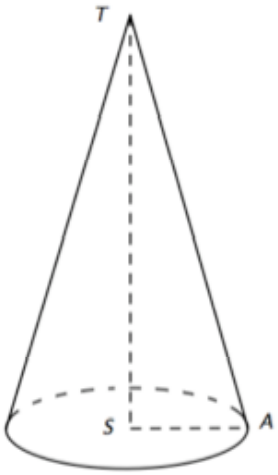


2



3

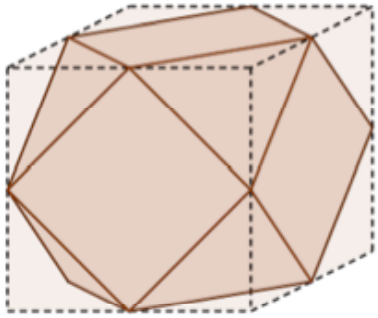




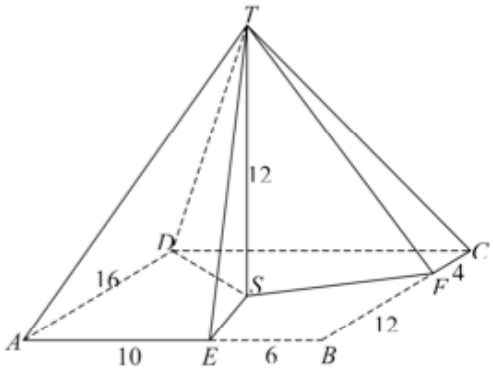
Proefwerk Wiskunde, 4 HAVO, Hoofdstuk 2 ***Werkblad***

Oppervlakte en inhoud

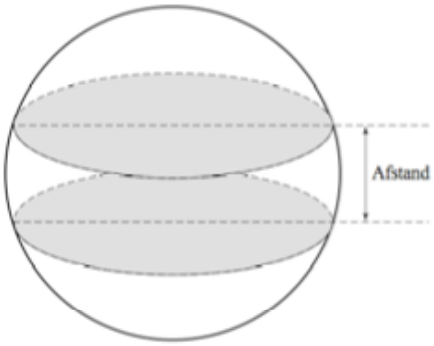
4



5



7



— Einde werkblad —

De volgende toetsonderdelen zijn hierbij overgenomen van de toets van het jaar ervoor.

1a	*1b*	*2a*	*2b*	*3a*	*3b*	*3c*	*4*	*5a*	*5b*	*6*	*7a*	*7b*
v	v	v	v	v		v		v	v			

4.2 De normering

ATHENEUM / HAVO / VMBO

NAAM: Proefwerk wiskunde B, HAVO 4 EXAMENNUMMER:

VAK: Hoofdstuk 2

NAAM DOCENT: Oppervlakte en inhoud CIJFER:

KLAS: DATUM: 50 p

① a) opp cirkelsector ABM = $\frac{p}{360°} \cdot \pi r^2$ met $p = \angle AMB$ $r = 5$

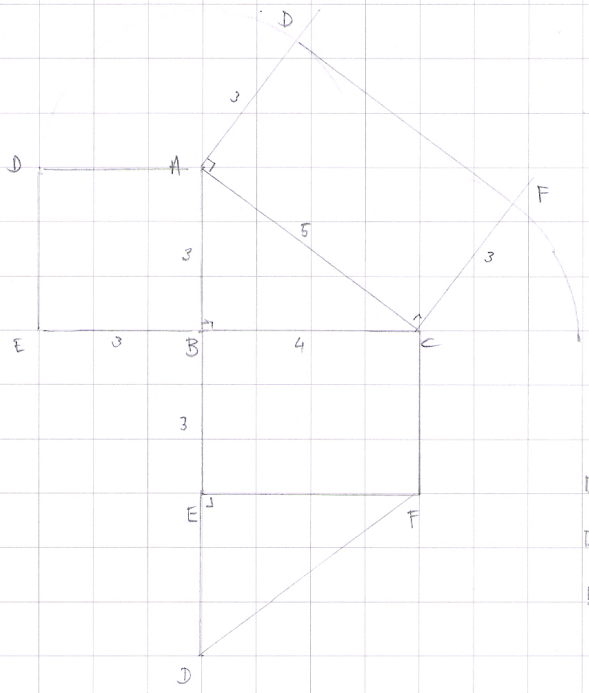
2p $\frac{p}{360°} \cdot \pi \cdot 5^2 = 10$ ① $p = \frac{360° \cdot 10}{25\pi} = 45{,}8 = 46°$ ① $\angle AMB = 46°$

b) $\sin \angle M_1 = \frac{AS}{AM}$ $\sin 23° = \frac{AS}{5}$ $AS = 5 \cdot \sin 23° = 1{,}95$ ①

2p

$AB = 2 \cdot AS \approx 3{,}91$ ①

② a)



4p

$\triangle ABC$: 3-4-5 ①

$\square$ BCFE : 3-4

$\square$ EBAD : 3-3 ①

$\square$ ACFD : 3-5

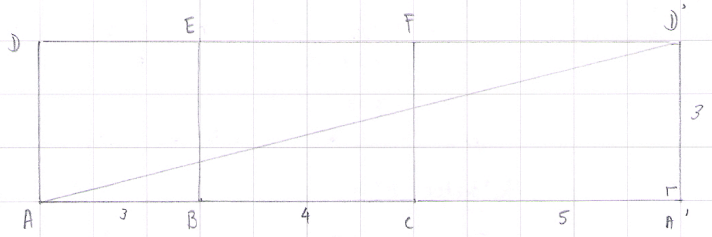
$\triangle$ DFE : 3-4-5 ①

rechte hoeken $-\frac{1}{2}$ p

letters bij hoekpunten $-\frac{1}{2}$ p

correct geknipt ①

(b)



3p (2)

lengte touwtje = AD

$AD^2 = AA' + A'D'$

$AD^2 = 12^2 + 3^2 = 153$

$AD = \sqrt{153}$ (1)

lengte touwtje = $\sqrt{153}$ cm

(3) (a) uitslag kegelmantel is halve cirkel → $p = 180°$ (1)

$\frac{p}{360°} = \frac{r}{R}$ met $r = AS = 10$

$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} = \frac{10}{R} \end{array}\right\}$ $R = 10 \cdot 2 = 2$ (1)

3p

Pythagoras: $AS^2 + ST^2 = AT^2$ met $h = ST$ $R = AT$

$10^2 + ST^2 = 20^2$

$ST^2 = 20^2 - 10^2 = 300$

$ST = \sqrt{300}$ (1)

dus: hoogte = $\sqrt{300}$

(b) hoogte volgt uit Pythagoras: $ST^2 + AS^2 = AT^2$ met $h = ST$

$ST^2 + 3^2 = 5^2$

$ST = 4$ (1)

snavel figuur, dus $\triangle SAT \sim \triangle NBT$

ST	AT
NT	BT

4	5
2	BT

$BT = 2\frac{1}{2}$ (1)

$\frac{p}{360^\circ} = \frac{r}{R}$ $\quad \frac{p}{360^\circ} = \frac{3}{5}$ $\quad p = \frac{3}{5} \cdot 360^\circ = 216^\circ$ (1)

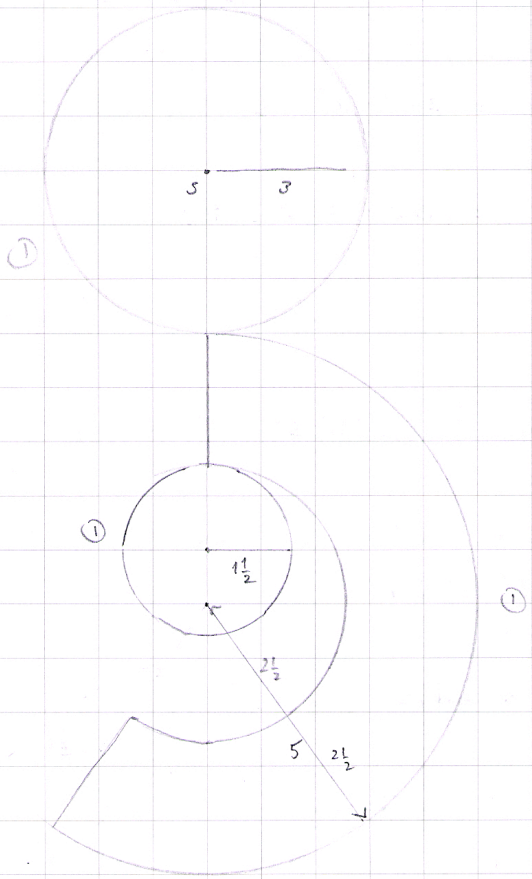
bepalen straal bovenste cirkelschijf: $r = NB$

AS	ST
NB	NT

3	4
NB	2

$NB = 1\frac{1}{2}$, dus $r = 1\frac{1}{2}$ (1)

7p



(1) (1) (1)

ⓒ opp = opp. grondcirkel + opp. afgeknotte mantel + opp. cirkelschijf

① ② ③

opp ① = $\pi r^2 = \pi AS^2 = \pi 3^2 = 9\pi$ ①

(①)

opp ③ = $\pi r^2 = \pi NB^2 = \pi \cdot (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}\pi$ ①

(①)

4p + cvt. 3p

opp ② = $\frac{p}{360} \cdot \pi \cdot AT^2 - \frac{p}{360} \cdot \pi \cdot BT^2$ met $p = 216°$

$= \frac{6}{10} \cdot \pi \cdot 5^2 - \frac{6}{10} \cdot \pi \cdot (\frac{5}{2})^2 = \frac{25 \cdot 6}{10}\pi - \frac{6 \cdot 25}{4 \cdot 10}\pi$

(①)

$= 15\pi - 3\frac{3}{4}\pi = 11\frac{1}{4}\pi$ ①

Dus: opp = $9\pi + 11\frac{1}{4}\pi + \frac{9}{4}\pi = 22\frac{1}{2}\pi$ ①

④ ⓐ opp = 6 · opp. (ABCD) + 8 · opp. (BEC) ①

$AP^2 + BP^2 = AB^2$

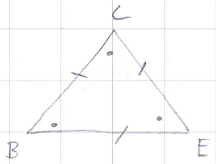
$6^2 + 6^2 = AB^2$

$AB^2 = 72$

5p $AB = \sqrt{72}$ ①

opp. (ABCD) = $AB^2 = 72$ ①

Δ BEC gelijkzijdig



opp (BEC) = $\frac{1}{2} \cdot BE^2 \cdot \sin(60°) = \frac{1}{2} \cdot 72 \cdot \sin 60° = 31,176$

①

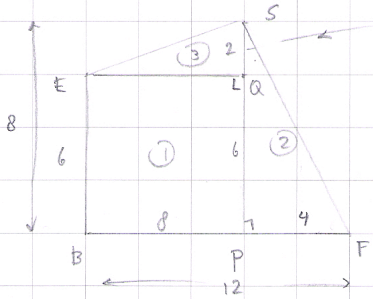
opp = $6 \cdot 72 + 8 \cdot 31,176 = 681,4$ ①

5p

⑤ ⓐ inhoud = I(ABCDT) − I(EBFST)

$I(ABCDT) = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot BC \cdot ST = \frac{1}{3} \cdot 16^2 \cdot 12 = 1024$ ①

$I(EBFST) = \frac{1}{3} \cdot G \cdot ST$ met G = opp. EBFS



SQ = PS − PQ = 8 − 6

opp. EBFS = opp. ① + opp ② + opp ③

$= BP \cdot BE + \frac{1}{2} PF \cdot PS + \frac{1}{2} \cdot EQ \cdot QS$

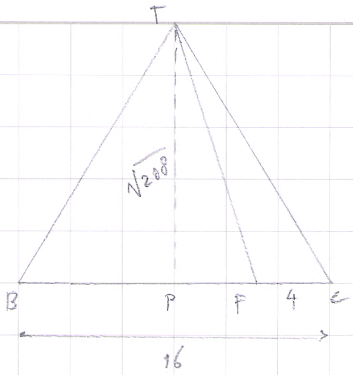
$= 8 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2$

$= 48 + 16 + 8 = 72$ 2p

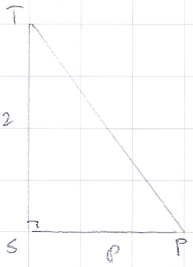
$I(EBFST) = \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot 12 = 288$ 1p

inhoud = 1024 − 288 = 736 1p

⑤



①



3p

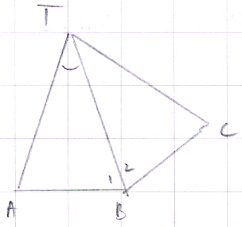
$PT^2 = SP^2 + ST^2 = 8^2 + 12^2$

$PT^2 = 208$

$PT = 14,42$ ①

$\text{opp}(\triangle FCT) = \frac{1}{2} FC \cdot PT = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{208} = 28,84 = 29\ m^2$ ①

⑥



A: $\angle T = 180° - 2 \cdot \angle B_1 = 180° - \angle B_{12} = 180° - 165° = 15°$ ①

4 aantal zijden $= \frac{360°}{15°} = 24$ is geheel ①

B: $\angle T = 180° - 155° = 25°$

aantal zijden $= \frac{360°}{25°} = 14,4$ is niet geheel ①

Conclusie: A ①

7 a $opp = opp(g\ bollen) - opp(aanhechtingen)$ $\approx 9160,9$

$opp(g\ bollen) = g \cdot 4\pi r^2 = g \cdot 4 \cdot \pi \cdot g^2 = 2916\pi$ 2p

5p $opp(aanhechtingen) = 8 \cdot 4 \cdot 7 + 8 \cdot 7 + 750 = 1030$ 2p

$opp = 2916\pi - 1030 = 8131$ 1

b $opp = \pi r_v^2$ $\quad \pi r_v^2 = 240$ $\quad r_v = \sqrt{\frac{240}{\pi}}$ 1

3p $opp = 240$ $\quad r_v^2 = \frac{240}{\pi}$

doorsnede met r, r_v, h en $\frac{1}{2}h$ 1

Pythagoras: $MS^2 + ST^2 = MT^2$ $\quad MS^2 = 4,6056$

$MS^2 + \frac{240}{\pi} = g^2$ $\quad MS = 2,14607$

hoogte $= 2 \cdot MS = 2 \cdot 2,15 = 4,3\ m$ 1

5 Reflecties

5.1 Lesreflecties

5.1.1 Les 1 (reflectie) – Start hoofdstuk en maken kennisoverzicht

5.1.1.1 Algemene indruk

- Ik heb een positieve indruk over de les: leerlingen zijn praktisch de gehele les actief bezig geweest en kwamen leergierig op mij over.
- Ik heb het idee dat ze veel geleerd hebben, maar dat dit na een paar dagen weer zal wegzakken. Daarom volgende les opfrissen en laten leren; dit doen leerlingen thuis niet.
- Ik had de indruk dat de meeste leerlingen de les leuk vonden en ze zich zeker niet hebben verveeld
- De meeste leerlingen waren geïnteresseerd en kwamen leergierig op mij over
- Bij vragen richting de klas waren er vaak meerdere vingers, een teken dat men meedoet en dat ook graag wil laten zien

5.1.1.2 Werkvorm

- Praktisch alle leerlingen waren gedurende de hele les actief met de stof bezig
- Een gedeelte van de leerlingen neemt halverwege een afwachtende houding aan, om pas weer actief te gaan worden op het moment dat ze iets kunnen overschrijven van het bord. Deze leerlingen moest ik dan weer aan het werk sturen, wat zonder morren ging.
- Er werd overlegd met elkaar en er werd met het werkblad gewerkt

5.1.1.3 Wiskundig inhoudelijke constateringen

- De meeste leerlingen waren in staat de meest essentiële eigenschappen te formuleren
- Sommige leerlingen wisten niet meer de oppervlakteformule van de driehoek. Sommigen dachten dat het 1/3 x basis x bijbehorende hoogte was in plaats van ½. Ik hoop dat met het inzichtelijk maken van de formule, er een beter begrip hiervan is en dat leerlingen de formule beter onthouden
- De meeste leerlingen waren niet meer op de hoogte van de oppervlakteformule van de cirkel en de omtrek eveneens niet

- De uitleg over afstand heeft denk ik goed gewerkt. De hoogtelijn werd na afloop goed ingetekend door de leerling die ik dat vroeg. Nuancering: het zou reeds aanwezige kennis moeten zijn, ik heb het slechts bij 1 leerling echt kunnen toetsen
- Er waren een handvol leerlingen die vroeg of ze ook symmetrie eigenschappen moesten opschrijven. Een sterkte vraag naar mijn mening.

5.1.1.4 Leerdoelen

In hoeverre zijn de leerdoelen behaald?

Nr	*Omschrijving doel*	*Behaald?*
1	Leerling weet dat meetkunde	Ja
2	Leerling kent de eigenschappen en oppervlakteformules van de vlakke figuren rechthoek, vierkant, parallellogram, trapezium, driehoek (algemeen, rechthoekig, gelijkbenig), cirkel	Tijdens de les: ja Na een paar dagen? Ik heb de indruk van niet. Daarom de volgende les beginnen met het herhalen van de stof door ze het kennisblad te laten leren. Hiervoor ca. 5 min. reserveren. 'Overhoring' door middel van een paar leerlingen die een figuur gaan bespreken: eigenschappen, oppervlakteformule en bewijs.
3	Leerling kent de intuïtieve bewijzen voor de oppervlakteformules voor parallellogram, trapezium, driehoek	Tijdens de les: ja Ik denk dat de meeste leerlingen de bewijzen kunnen uitleggen als het plaatje gegeven is. Zelf helemaal reproduceren, dat kunnen de meeste leerlingen denk ik niet. Ik vind dit wel belangrijk en daarom volgende les laten leren. (zie vorige punt)
4	Leerling kent het bewijs van stelling 'som hoeken is 180°' voor de driehoek	Zie vorige punt.
5	Leerling weet dat hoogte de lengte is van de hoogtelijn, en dat de hoogtelijn een hoek van 90° heeft met minimaal 1 zijde	Ja

5.1.1.4.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*	*Gehaald?*
1	Leerlingen hebben actief gewerkt aan de stof	ja
2	Leerlingen hebben het eerste kennisblad ingevuld voor wat betreft de behandelde stof	Ja
3	Leerlingen weten wat het huiswerk voor de volgende keer is	ja

5.1.1.5 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

- Aan de randvoorwaarden was voldaan.
- De voorbereiding kost weinig tijd: kopiëren werkbladen en van tevoren goed 'inlezen' wat je uiteindelijk op het uitgewerkte kennisblad wilt hebben: welke precieze eigenschappen, welke kenmerken in het plaatje, etc.
- Het is handig om het digibord reeds opgestart te hebben, met de digitale les (waarin de werkbladen zijn opgenomen) direct oproepbaar. Dit houdt het tempo in de les en je kunt direct contact hebben met de klas, zonder eerst bezig te zijn met opstarten

Nr	*Randvoorwaarden en voorbereidingen*
1	De les wordt gegeven in een lokaal met digibord, of beter nog, in een lokaal met *whiteboard* en *beamer* omdat dit beter te beschrijven is.
2	In het lokaal is een computer beschikbaar met daarop Starboard software
3	De voorbewerkte kennisbladen moeten beschikbaar zijn, dus: voor het aantal leerlingen in de klas moet een werkblad gekopieerd zijn. Eventueel voor elke leerling in tweevoud; één versie als werkversie en de ander als 'nette' versie.
4	Het voor deze les beschikbare *Starboard*-bestand is beschikbaar en kan geopend worden.

5.1.1.6 Planning van de lesactiviteiten

- De planning kwam goed uit; het gehele kennisblad is ingevuld.
- Er was voldoende tijd voor uitleg over hoogtelijn en andere zaken.

5.1.1.7 Bordgebruik

De digitale Starboard les voldeed goed. Het werkblad werd op juiste grootte getoond om met een normaal handschrift te kunnen aanvullen.

5.1.1.8 Werkblad / kennisblad

Het blad gaf voldoende richting voor leerlingen om zelf aan de gang te kunnen gaan en om er een overzichtelijk geheel van te maken. Leerlingen hadden geen vragen hoe met het blad om te gaan.

Persoonlijk denk ik dat het een goed overzicht is van datgene dat we nu over vlakke meetkunde hebben behandeld. De echte proef hiervan komt de volgende les wanneer leerlingen hieruit gaan leren.

5.1.2 Les 2 (reflectie) – Herhalen en uitbreiden kennisoverzicht

5.1.2.1 Algemene indruk

- Ik heb een redelijk positieve indruk over de les: leerlingen zijn weer praktisch de gehele les actief bezig geweest en deden goed mee
- Op het einde van de les hadden de leerlingen het een beetje gehad met de toch wel uitgebreide zeer sterk gestuurde introductielessen
- Leerlingen doen actief mee en luisteren echt goed naar anderen als zij de beurt krijgen
- Op het einde van de les wat minder aandacht bij de behandeling van het kunnen doorrekenen van de gelijkbenige driehoek
- 2 introductielessen over op zich bekende kennis is genoeg

5.1.2.2 Werkvorm

- Praktisch alle leerlingen waren gedurende de hele les actief met de stof bezig

- Het leren van het kennisblad werd volledig geaccepteerd en werd door iedereen gedaan

5.1.2.3 Wiskundig inhoudelijke constateringen

- Ik had de indruk dat het voor de meeste leerlingen vooral opfrissen van de kennis was
- Het aanscherpen van de eisen die gesteld worden aan een uitwerking was zeer waardevol. De meeste leerlingen zijn dit niet zo strak gewend. Vooral de leerlingen vanuit het VMBO.
- Het construeren van de gelijkbenige driehoek was het meeste weggezakt

5.1.2.4 Leerdoelen

In hoeverre zijn de leerdoelen behaald?

Nr	*Omschrijving doel*	*Behaald?*
1	Leerling kan intuïtief aanvoelen waarom oppervlakte=πr^2 en omtrek=$2\pi r$ aan de hand van oppervlakte en omtrek vierkant	Ja, wel volgende keer opfrissen
2	Leerling weet hoe zijden en hoeken te berekenen van een rechthoekige driehoek m.b.v. SOSCASTOA	Ja
3	Leerling weet dat sinus, cosinus en tangens verhoudingen van zijden zijn en dat ze samenhangen met de grootte van de hoek	Ja
4	Leerling weet en kan begrijpen dat in de rechthoekige driehoek de sinus en cosinus altijd tussen 0 en 1 liggen en de tangens kan elk willekeurig getal > 0 aannemen	Ja, zakt misschien wel weer weg (is niet zo heel erg vind ik)
5	Leerling weet dat alle zijden, hoeken en de hoogte te berekenen zijn als gegeven zijn: ZZ of ZH	Ja, wel weer benadrukken de volgende keer
6	Leerling weet dat de rechthoekige driehoek kan worden gevonden in de rechthoek/vierkant en de gelijkbenige driehoek	Ja, wel in een latere les weer terug laten komen in de volgende les bij het reflecteren over opgaven 5 en 6
7	Leerling weet dat het uitwerken van meetkundige berekeningen in 3 stappen gaat: 1. letterstap, 2. invulstap, 3. rekenstap	Ja, wel weer altijd terug laten komen in de lessen
8	Leerling weet dat de gelijkbenige driehoek kan worden doorgerekend door het	Ja, volgende keer wel weer aandacht

	introduceren van een hoogtelijn door de top	aan schenken

5.1.2.4.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*	*Gehaald?*
1	Leerlingen hebben actief gewerkt aan de stof	ja
2	Leerlingen hebben het eerste kennisblad ingevuld voor wat betreft de behandelde stof	Ja
3	Leerlingen weten wat het huiswerk voor de volgende keer is	ja

5.1.2.5 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

- Aan de randvoorwaarden was voldaan.
- De voorbereiding kost weinig tijd: kopiëren werkbladen en van tevoren goed 'inlezen' wat je uiteindelijk op het uitgewerkte kennisblad wilt hebben: welke precieze eigenschappen, welke kenmerken in het plaatje, etc.
- Het is handig om het digibord reeds opgestart te hebben, met de digitale les (waarin de werkbladen zijn opgenomen) direct oproepbaar. Dit houdt het tempo in de les en je kunt direct contact hebben met de klas, zonder eerst bezig te zijn met opstarten

Nr	*Randvoorwaarden en voorbereidingen*
1	De les wordt gegeven in een lokaal met digibord, of beter nog, in een lokaal met *whiteboard* en *beamer* omdat dit beter te beschrijven is.
2	In het lokaal is een computer beschikbaar met daarop Starboard software
3	De voorbewerkte kennisbladen moeten beschikbaar zijn, dus: voor het aantal leerlingen in de klas moet een werkblad gekopieerd zijn. Eventueel voor elke leerling in tweevoud; één versie als werkversie en de ander als 'nette' versie.
4	Het voor deze les beschikbare *Starboard*-bestand is beschikbaar en kan geopend worden.

5.1.2.6 Planning van de lesactiviteiten

- De planning kwam goed uit; de geplande stof is behandeld.

5.1.2.7 Bordgebruik

De digitale Starboard les voldeed goed. Het werkblad werd op juiste grootte getoond om met een normaal handschrift te kunnen aanvullen.

5.1.2.8 Werkblad / kennisblad

Het blad gaf voldoende richting voor leerlingen om zelf aan de gang te kunnen gaan en om er een overzichtelijk geheel van te maken. Leerlingen hadden geen vragen hoe met het blad om te gaan.

Persoonlijk denk ik dat het een goed overzicht is van datgene dat we nu over vlakke meetkunde hebben behandeld. De echte proef hiervan komt de volgende les wanneer leerlingen hieruit gaan leren en het als 'kennisbank' gaan gebruiken.

5.1.3 Les 3 (reflectie) – Plan van aanpak

5.1.3.1 Algemene indruk

- Ik heb een redelijk positieve indruk over de les: de meeste leerlingen zijn weer praktisch de gehele les actief bezig geweest en deden goed mee
- Ik was blij dat ik had gevraagd om eerst een plan te bedenken en dat mij te vertellen. Toen kon ik vrij snel centraal ingrijpen om een 'stapje hoger' na te denken over de som: wat zijn de grote denkstappen?
- Het was nu echter wel de tweede les op de dag en ook nog het 7de uur. De puf is er dan wel een beetje uit.
- Bij het maken van het plan, gingen de meeste leerlingen direct heel gedetailleerd aan de gang en was er geen aandacht voor het '*masterplan'*.
- Letterstappen slaan de meeste leerlingen van nature over
- Bij het begeleiden kon het kennisblad meteen worden gebruikt en kon ik probleemaanpak-tips geven
    a. wat herken je?
    b. Wat voor gegevens weet je?
    c. Weet je niet meer / herken je niet meer, pak je kennisblad er eens bij
- Sommige leerlingen gingen meteen aan de gang, terwijl ze achteraf geen idee hadden wat ze eigenlijk moesten gaan uitrekenen
- Ik had tips op het bord geschreven, maar deze waren niet nodig:

a. Begrijp ik vraag?
b. Herken ik het soort som?
c. Welke basisfiguren herken ik? Wat weet ik hiervan?
d. Bedenk een plan! Wat nodig voor het antwoord? Hoe kan ik daar aan komen?
e. Schrijf je plan op en kijk hoe ver je al bent
f. Teken extra lijnen om basisfiguren te maken. VB: bij een cirkel: teken slimme stralen

5.1.3.2 Werkvorm

- Leerlingen gaan zelf aan de slag, onder begeleiding van mij
- Gezien het 7de uur en dat het de tweede wiskundeles op de dag was, werd er heel aardig gewerkt. Wel heb ik iemand apart moeten zetten omdat er te weinig gewerkt werd.

5.1.3.3 Wiskundig inhoudelijke constateringen

- Probleemaanpak: Leerlingen gingen snel aan de slag om zo snel mogelijk een getal te krijgen. Volgende les op letten: "Eerst rust nemen om de opgave op je in te laten werken".
- Leerlingen herkenden over het algemeen vrij snel de benodigde onderdelen in de uitwerking. Persoonlijk denk ik dat dit komt doordat de kennis er op dat moment goed inzit.

5.1.3.4 Leerdoelen

In hoeverre zijn de leerdoelen behaald?

Nr	*Omschrijving doel*	*Behaald?*
1	Leerling kent de basissom 'regelmatige veelhoek' en kan de standaardonderdelen in de uitwerking benoemen	Ja, maar de volgende keer wel weer herhalen

5.1.3.4.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*	*Gehaald?*

1	Leerlingen hebben gewerkt aan opgaven 5, 6, 7	ja
2	Leerlingen hebben het eerste kennisblad ingevuld voor wat betreft de behandelde stof	Ja
3	Leerlingen weten dat opgaven thuis afgemaakt moeten worden	ja

5.1.3.5 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

- nvt

5.1.3.6 Planning van de lesactiviteiten

- De planning kwam goed uit; de meeste leerlingen konden een heel aardig eind met de opgaven komen.

5.1.3.7 Bordgebruik

n.v.t.

5.1.3.8 Werkblad / kennisblad

Bij het begeleiden van leerlingen, refereer ik meteen naar het kennisblad voor een vraag als “welke basisfiguren herken ik?”. Leerlingen konden dan vaak zelf met het antwoord komen, zonder dat ik het weggaf.

5.1.4 Les 4 (reflectie) – Regelmatige veelhoek Les 5 (reflectie) – Cirkelsector, koorde en segment

5.1.5 Les 6 (reflectie) – uitslagen

5.1.5.1 Algemene indruk

- Leerlingen hebben goed gewerkt.
- Uitleg over de uitslag van de piramide was misschien niet nodig: leerlingen hadden dit vrij goed door en daardoor kwam ik niet goed uit met de probleem,en war leerlingen tegen aanliepen bij opgave 18 (doorrekenen van gelijkvormige driehoeken).

5.1.5.2 Werkvorm

- Klassieke werkvorm, zelf of in 2-tallen met de stof aan de gang; heeft goed gewerkt

5.1.5.3 Wiskundig inhoudelijke constateringen en didactiek

- Ik heb de indruk dat het principe van de uitslag volledig duidelijk is en dat leerlingen uitslagen kunnen construeren van de piramide.
- De (meeste) leerlingen zijn in staat om zich de ruimtelijk figuren piramide en kubus voor te stellen.

- Leerlingen werken slordig: uitslagen worden niet met de geodriehoek en passer gemaakt. Leerlingen zetten de letters van de hoekpunten er niet bij.
- De meeste leerlingen zijn niet meer vaardig in het doorrekenen van gelijkvormige driehoeken (snavelfiguur). Ik heb dit nu laten rusten, maar moet hier later zeker nog op terugkomen. (en dan ook het kennisblad aanvullen)
- Leerlingen vinden het leuk als ik kom met een kubusje dat 'uit zichzelf in elkaar vouwt': stimuleert en moet ik zeker vaker doen

5.1.5.4 Leerdoelen

In hoeverre zijn de leerdoelen behaald?

Nr	*Omschrijving doel*	*Behaald?*
1	Leerling heeft overzicht van welke soort sommen hij moet kennen over de vlakke meetkunde (§2.1)	Ja: de 2 sommen zijn wellicht bekend, maar is niet in staat om de cirkelsegmentsom uit te werken
2	Leerling kent de eigenschappen van de regelmatige piramide en kan zich een ruimtelijke hiervan voorstellen	Ja
3	Leerling weet wat een uitslag is	Ja
4	Leerling kan een uitslag maken van een gegeven ruimtelijke figuur en weet wat hierbij belangrijk is	Ja
5	Leerling weet wat afsnijden en afknotten is en weet welke soort effecten dit heeft op de figuur (sommige ribben korter / weg, sommige hoekpunt(en) weg, (sommige) vlakken afgesneden	Ja
6	Leerling weet hoe een snavelfiguur door te rekenen	Nee

5.1.5.4.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*	*Gehaald?*
1	Leerlingen hebben actief gewerkt aan opgaven 17 en	ja

	18	
3	Leerlingen weten wat het huiswerk voor de volgende keer is	ja

5.1.5.5 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

Aan de randvoorwaarden was voldaan.

5.1.5.6 Planning van de lesactiviteiten

- De planning kwam redelijk uit.
- Het centrale gedeelte was redelijk lang. Ik had daarvoor niet echt tijd om het doorrekenen van gelijkvormige driehoeken goed uit te leggen (waar veel leerlingen tegen aanliepen)
- Het centrale reflectieve deel was zeker zinvol en wat mij betreft onmisbaar. Wellicht moet de centrale uitleg korter.

5.1.5.7 Bordgebruik

Ik maak nu schetsen van de uitslagen. Ik moet in vervolg met passer en geodriehoek gaan werken om het goede voorbeeld te geven.

5.1.6 Les 7 (reflectie) – Uitslagen (kort i.v.m. bespreken proefwerk)

5.1.6.1 Algemene indruk

- Leerlingen werkten goed
- Het idee van een uitslag is duidelijk en leerlingen hadden voldoende basis om opgave 19 te kunnen maken.
- De les daarop (toen de kegel op het programma stond) vroeg een leerling me echter wel hoe je de uitslag moest maken bij opgave 20. Deze was inderdaad een stuk minder standaard en daar liep deze leerling dus tegen problemen aan. Hier moet ik dus op terugkomen; ik denk centraal, want ik denk dat meerdere leerlingen hier niet goed uitkwamen. Dit de volgende keer (dat zal zijn les 9) bekijken. Als mocht blijken dat meerdere leerlingen er niet uitgekomen zijn, dan moet ik nog eens goed kijken hoe de lessen ingericht moeten worden. Want andere leerlingen hebben me niet gevraagd en ik zou er zelf niet op terug zijn gekomen.

5.1.6.2 Werkvorm

- Klassieke werkvorm, zelf of in 2-tallen met de stof aan de gang

5.1.6.3 Wiskundig inhoudelijke constateringen en didactiek

- Leerlingen hadden de essentie goed door op het moment van behandelen
- Leerlingen hadden voldoende kennis en vaardigheden om met opgave 19 aan de gang te gaan

5.1.6.4 Leerdoelen

In hoeverre zijn de leerdoelen behaald?

Nr	*Omschrijving doel*	*Behaald?*
1	Leerling weet welke effecten het afsnijden of afknotten kan hebben	Ja
2	Leerlingen weet dat je de uitslag van een afgesneden figuur vanuit 2 gedachtegangen kan construeren: 1) uitgaan van de uitslag van een niet-afgesneden figuur, 2) direct beginnen met de afgesneden figuur	Ja

5.1.6.4.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*	*Gehaald?*
1	Leerlingen hebben actief gewerkt aan opgave 19	ja
3	Leerlingen weten dat het huiswerk opgave 19 en 20 is	ja

5.1.6.5 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

Er waren geen specifieke randvoorwaarden voor deze les.

5.1.6.6 Planning van de lesactiviteiten

De leerlingen hebben gedurende 10 minuten aan opgave 19 kunnen werken, ruim voldoende voor de meeste om de opgave af te ronden.

5.1.6.7 Bordgebruik

Geen specifiek bordgebruik.

5.1.7 Les 8 (reflectie) – Reflectie op vlakke meetkunde en starten met de kegel

5.1.7.1 Algemene indruk

- Ik heb een positieve indruk over de les, leerlingen hebben goed meegedaan
- Leerlingen waren zeer actief met de cirkelsegmentopgave aan de gang. Ze hadden een enorme *drive* om het te gaan snappen hoe deze opgelost moest worden. Wellicht moet ik dergelijke reflectieopgaven meer gaan doen.
- Bij het nagaan waarom het niet lukte met de cirkelsegmentopgave, was het muisstil in de klas. Ik had de indruk dat het nu toch we echt overkwam dat er iets niet goed gaat bij het leerproces. De vraag blijft natuurlijk of ze in staat zijn dit te veranderen. Ik moet hier iets mee blijven doen.
- De leerlingen vinden het lastig om te reflecteren over het proces; ze zijn er *gefocust* op het resultaat. Als ze er niet uitkomen, willen ze eerst graag uitleg hoe het moet, in plaats van nadenken waarom ze er niet uitgekomen zijn
- Ik heb bewust geen goed antwoord of de opgave uitgewerkt op het bord. Als er iets knaagt bij de leerling, dan moet deze nu zelf thuis aan de slag gaan. Het ging me echt alleen maar om het *proces*, niet om het goede antwoord.Ik hoop dat het proces op deze manier ook bij de leerling meer een plek krijgt.
- Nadat de theorie besproken was, was er een korte ontlading in de klas. Er moest even een paar minuten over schoolse roosterzaken gesproken worden; daarna ging men weer god aan de slag

5.1.7.2 Werkvorm

- Klassieke werkvorm, zelf of in 2-tallen met de stof aan de gang

5.1.7.3 Wiskundig inhoudelijke constateringen en didactiek

- De leerlingen konden de theorie afhandeling uiteindelijk wel goed volgen. Ik moest het verhaal wel 2x vertellen. Het blijft dus op zich lastig voor leerlingen om zo algebraïsch bezig te zijn.
- Leerlingen kunnen een formule als p/360 = r/R eigenlijk alleen maar doorrekenen met een verhoudingstabel
- Een leerling noemde een ezelsbrug om de formule goed te onthouden: “kleine hoek : grote hoek = kleine straal : grote straal”. Deze heb ik maar doorverteld aan de klas: ligt gemakkelijk in het gehoor en onthoudt daarom goed. Het inzicht in de formule was er sowieso wel, omdat de leerlingen zo actief met de kegel bezig zijn geweest en echt wel goed beseffen dat “lengte mantelboog = omtrek grondcirkel”
- Kegelonderzoek en de follow-up in de klas

- Sommige zaken veronderstel je zo als vanzelfsprekend dat leerlingen dit zouden weten of beheersen, dat je er niet eens bij stil staat dat je hier expliciet aandacht aan moet besteden. Bij het behandelen van de kegelformule en daarop volgend het kegelonderzoek, vraag 2 (uit r en R kun je p berekenen; dit geeft met r=3 en R=5: p=216), Er was een leerling die de vraag stelde hoe je een hoek van 216 graden moest meten, zodat je de uitslag kon afmaken. Ik heb toen moeten uitleggen dat deze hoek gelijk is aan 180° + 36°. De 180° is een gestrekte hoek en de 36° kun je vervolgens hierbij afmeten. Een dergelijke vaardigheid beheerste niemand in de klas.
- Wat hierbij wel heel goed is om te constateren dat leerlingen echt actief meedoen in de les. Het is niet zo dat ze absorberen en verder niets, nee, er was daadwerkelijk iemand die nadacht over hoe je het moest gaan uitvoeren.
- Ook was er een leerling die er de vorige keer niet was en die alsnog graag het kegelonderzoek wilde hebben. Ondanks het feit dat we de theorie nu hebben behandeld en dat het 'nut' misschien niet meer zo nodig zou kunnen zijn in de ogen van een leerling. Ook dit geeft aan dat (ik denk de meeste) leerlingen er wat van willen maken. Tegenvallende prestaties op een proefwerk zijn vooral een teken van *onvermogen* om de wiskunde goed onder de knie te krijgen, doordat ze niet gewend zijn om te reflecteren over het leerproces en vervolgens actie te ondernemen (=extra inspanning verrichten!)

5.1.7.4 Leerdoelen

In hoeverre zijn de leerdoelen behaald?

Nr	*Omschrijving doel*	*Behaald?*
1	Leerling beseft dat hij / zij eventueel eigen leerproces moet herzien	Op dat moment wel, maar of het leerproces wordt aangepast is zeer de vraag Blijvend aandacht aan besteden.
2	Leerling kent de formule die de relatie aangeeft tussen de kegeluitslag eigenschappen r, R en p, en kan deze afleiden	Ja

5.1.7.4.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*	*Gehaald?*

1	Leerlingen hebben actief gewerkt aan de stof	ja
3	Leerlingen weten wat het huiswerk voor de volgende keer is	ja

5.1.7.5 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

Aan de randvoorwaarden was voldaan. Ik heb bij aanvang van de les leerlingen gepolst hoe het ging met het kegelonderzoek en de meeste leerlingen hadden zich ermee bezig gehouden. We was het zo dat eigenlijk niemand de vragen echt goed kon beantwoorden. Maar goed, daar was de les dan ook voor.

Nr	*Randvoorwaarden en voorbereidingen*
1	De leerlingen hebben het kegelonderzoek in de vorige les uitgereikt gekregen en hebben dit onderzoek uitgevoerd.
2	De volgende materialen moeten aanwezig zijn - Uitslag A van het kegelonderzoek - Grote kegeluitslag - Grote kegelmantel met schuifbare mantel en losse grondcirkel

5.1.7.6 Planning van de lesactiviteiten

5.1.7.7 Bordgebruik

De digitale Starboard les voldeed goed. Het werkblad werd op juiste grootte getoond om met een normaal handschrift te kunnen aanvullen.

5.1.7.8 Werkblad / kennisblad

-

5.1.8 Les 9 (reflectie) – Herhaling en explicitering uitslagen, en uitleg cilinder

5.1.8.1 Algemene indruk

- Opgave 20 was door vrijwel niemand echt afgemaakt en volledig 'volgens de eisen'
- Ik heb een rondje gemaakt door de klas om de uitwerkingen te zien. Sommige leerlingen kwamen in de richting, maar de meeste leerlingen niet
- Praktisch alle leerlingen waren slordig in de uitwerking: geen geodriehoek, geen passer, geen letters bij de hoekpunten, etc.
- Het is dus zeker goed geweest dat ik er aandacht aan heb besteed.
- Een opgave als 20 is toch wel het randje van wat de leerlingen aankunnen. Er is veel begeleiding nodig en dan wordt het uiteindelijk wel begrepen en kunnen leerlingen het nadoen. Ik vraag me ten zeerste af of ze een dergelijke opgave straks op het proefwerk kunnen reproduceren.
- De uitleg over cilinder en het strak gespannen touwtje werd vrijwel direct goed begrepen door praktisch alle leerlingen
-

5.1.8.2 Werkvorm

- Klassieke werkvorm, zelf of in 2-tallen met de stof aan de gang

5.1.8.3 Wiskundig inhoudelijke constateringen en didactiek

- Het werken met papieren ruimtefiguren die je kunt uitklappen tot uitslagen, werkt naar mijn mening erg goed.
- Er waren leerlingen die dachten dat het strak gespannen touwtje rondom de cilinder (opgave 26) 'heen-en-weer' zou moeten gaan. Met de papieren cilinder erbij en met een touwtje kun je een leerling de baan van het touwtje laten tekenen op de mantel, vervolgens de cilinder laten uitklappen en dan kun je duidelijk laten zien dat het een diagonaal is.

5.1.8.4 Leerdoelen

In hoeverre zijn de leerdoelen behaald?

Nr	*Omschrijving doel*	*Behaald?*
1	Leerling kent twee aanpakken om een uitslag te tekenen van een afgesneden ruimtefiguur	Ja
2	Leerling kent de eisen aan de uitwerking van een uitslag: 1. Netjes met geodriehoek en passer, 2. Afmetingen in verhouding, 3. Letters bij hoekpunten	Ja Maar het blijft de vraag in hoeverre het daadwerkelijk wordt gedaan!
3	Leerling kent de uitslag van een cilinder	Ja
4	Leerling weet dat een omgespannen touwtje om een ruimtefiguur resulteert in rechte lijnstukken op de uitslag	Ja

5.1.8.4.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*	*Gehaald?*
1	Leerling heeft actief gewerkt aan opgave 20 en 26-27	ja

5.1.8.5 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

Nr	*Randvoorwaarden en voorbereidingen*
1	Gekopieerde kennisbladen moeten beschikbaar zijn om uit te delen en om aan te werken
2	De volgende materialen moeten aanwezig zijn - De papieren cilinder, die tot uitslag 'geknipt kan worden' - Touwtje

5.1.8.6 Planning van de lesactiviteiten

De planning kwam goed uit.

5.1.8.7 Bordgebruik

-

5.1.8.8 Werkblad / kennisblad

Leerlingen konden goed met het kennisblad werken. Er was wel een leerling die vroeg waarom ze niet alle bladen in 1 keer kregen en zodanig dat het gemakkelijker te bewaren was. Het werd zo wat slordig met al die bladen.
Dit is iets om over na te denken voor een volgende keer dat dit hoofdstuk zo wordt behandeld.

5.1.9 Les 10 (reflectie) – Oppervlakte kegel

5.1.9.1 Algemene indruk

- Deze les staat in het teken van herhalen een eerdere kegelformule en het behandelen van een nieuwe kegelformule. Deze worden beide door de leerlingen opgeschreven op het kennisblad
- Ik merkte bij mezelf een zekere negatief gevoel bij de les. Ik deed veel voor op het bord en de leerlingen schreven dit dan over. Sommige leerlingen zouden zeker in een passieve consumptiehouding kunnen verzeilen: gewoon opschrijven wat op het bord geschreven staat en dan kom ik de les wel door. Dit is niet het soort les dat ik wil geven.
- Het kwam natuurlijk mede doordat ik voldoende tempo wilde maken doordat de les kort was.
- Het kennisblad werkt op zich goed om duidelijk te maken dat 'wat we nu opschrijven heel belangrijk is en goed onthouden moet worden', maar het moet niet te veel tijd gaan kosten waardoor er te weinig tijd is om daadwerkelijk te denken en te reflecteren.

5.1.9.2 Werkvorm

- Klassieke werkvorm, zelf of in 2-tallen met de stof aan de gang

5.1.9.3 Wiskundig inhoudelijke constateringen en didactiek

- Leerlingen vinden de afleiding van de oppervlakteformule lastig
- Het vervangen van p/360 door r/R wordt raar gevonden
- Leerlingen vragen zich af of ze deze formule moeten kunnen afleiden

- Bij het maken van de opgaven verwarden sommige leerlingen toch de tophoek van de kegel met de middelpuntshoek van de manteluitslag

- Bij opgave 31 was er een leerling die niet in staat was om de oppervlakte van de kegel te bepalen. Uit opp. grondcirkel en de hoogte kon niet de R worden bepaald. Ik denk dat meerdere leerlingen niet uit zullen komen thuis wanneer ze de opgave maken. De volgende les dus op terugkomen.

5.1.9.4 Leerdoelen

In hoeverre zijn de leerdoelen behaald?

Nr	*Omschrijving doel*	*Behaald?*
1	Leerling kent de oppervlakteformule van de kegel en kan deze afleiden	Ik denk van niet
2	Leerling heeft inzicht in de informatie die de kegeldoorsnede kan geven en hoe hiermee te rekenen	Toen wel, maar later niet meer denk ik

5.1.9.4.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*	*Gehaald?*
1	Leerling heeft kennisblad bijgewerkt voor wat betreft de nieuw behandelde theorie: de kegel oppervlakteformule	Ja
2	Leerling heeft kennisblad bijgewerkt voor wat betreft	Ja

	de herhaalde stof: de kegeluitslag formule	
3	Leerling heeft actief gewerkt aan opgaven t/m 33	Ja

5.1.9.5 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

5.1.9.6 Planning van de lesactiviteiten

De planning kwam goed uit.

5.1.9.7 Bordgebruik

-

5.1.9.8 Werkblad / kennisblad

Leerlingen konden goed met het kennisblad werken. Er was wel een leerling die vroeg waarom ze niet alle bladen in 1 keer kregen en zodanig dat het gemakkelijker te bewaren was. Het werd zo wat slordig met al die bladen.
Dit is iets om over na te denken voor een volgende keer dat dit hoofdstuk zo wordt behandeld.

5.1.10 Les 11 (reflectie) – Kegelkennis herhalen en uitbreiden: doorsnede door de as

5.1.10.1 Algemene indruk

- Deze les is de eerste les na de vakantie. Leerlingen moeten er duidelijk weer inkomen. Toch ben ik zeker tevreden over de inzet en de werkhouding.
- Ik vind dat mijn aanpak om de leerlingen actief te krijgen, goed werkt. Ik ga niet direct vertellen, maar zet ze aan het werk om de boel voor zich zelf op te frissen.
- Ik merk wel dat sommige leerlingen het niet echt leuk vinden om het kennisblad bij te werken. Ze willen liever sommen maken. Toch wil ik dat ze het opschrijven omdat ik de expliciteringen die we maken in de les, belangrijk vind. Wellicht dat leerlingen denken dat ze het wel gaan onthouden, maar ik denk dat het weer vergeten wordt en dan moeten ze het wel ergens weer terug kunnen vinden.
- Wel moet ik voor een volgende keer goed nadenken wat wel en wat niet op het kennisblad te zetten. Het moet niet te veel worden, waardoor het aan ‘accent’ en ‘dit is belangrijk!’ verliest.
- Ik was teleurgesteld dat leerlingen niet op schema liepen. Of het huiswerk was niet goed doorgekomen, of ze hebben er gewoon niets meer thuis aan gedaan.

- Om niet te veel centraal voor te doen en om niet te veel in 1 les aan het kennisblad te werken, heb ik de afgeknotte kegel doorsnede niet voorgedaan bij opgave 33 en 34. Dit heb ik opgelost door te zeggen dat er aanvullende uitleg zal komen op It's Learning.

5.1.10.2 Werkvorm

- Klassieke werkvorm, zelf of in 2-tallen met de stof aan de gang

5.1.10.3 Wiskundig inhoudelijke constateringen en didactiek

- Sommige leerlingen vinden het lastig om een plan van aanpak te maken bij opgaven 30-32. Zelfs als we in de les aandacht hebben besteed aan de doorsnede en wat je hiermee kunt doen, passen deze leerlingen dit niet toe.
- Is de uitleg voor hen te veel uit de lucht komen vallen? Hebben leerlingen niet goed deze nieuwe theorie (of aanpak) kunnen 'absorberen' zodat ze het inderdaad kunnen toepassen?
- Ik heb geen uitleg gegeven over opgave 33 en je ziet dus dat leerlingen daar gaan stranden. Dit is dus stranden op een zuiver instrumentele vaardigheid. Er is een leerling die niet goed doorheeft dat er haakjes geplaatst moeten worden om de term $(x+6)$ in de verhoudingstabel. Dit is enerzijds geen begrip, anderzijds is de vaardigheid niet goed ingesleten. Dit is gewoon misgegaan in het leerproces in VWO 3 (deze leerlinge was een overstapper vanuit VWO).

5.1.10.4 Leerdoelen

In hoeverre zijn de leerdoelen behaald?

Nr	*Omschrijving doel*	*Behaald?*
1	Leerling weet dat de doorsnede door de as van de kegel informatie geeft over relaties tussen r, R, h en t	Ja
2	Leerling begrijpt dat als twee van de vier kegeleigenschappen (r, R, h en t) bekend zijn, de andere twee ook berekend kunnen worden.	Ja
3	Leerling weet wanneer een kegeldoorsnede door de as benodigd is en kan hiermee gevraagde of benodigde eigenschappen berekenen m.b.v. de goniometrische	Weet ik niet goed

	verhoudingen	

5.1.10.4.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*	*Gehaald?*
1	Leerling heeft kennisblad bijgewerkt voor wat betreft de nieuw behandelde theorie: de kegeldoorsnede	Ja
2	Leerling heeft actief gewerkt aan opgaven t/m 34	Ja

5.1.10.5 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

-

5.1.10.6 Planning van de lesactiviteiten

De planning kwam goed uit.

5.1.10.7 Bordgebruik

-

5.1.10.8 Werkblad / kennisblad

-

5.1.11 Les 12 (reflectie) – Bespreken afgeknotte kegel a.d.h.v. opgave 33

5.1.11.1 Algemene indruk

- Het valt me steeds weer op dat de leerlingen vol goede wil zijn in de les. Ze letten goed op, stellen vragen en werken goed aan de opgaven.
- Verder is de huiswerkdiscipline wel iets minder. Sommigen lopen toch wel wat achter en deze heb ik flink aangespoord.
- De reflectie over de opgaven 11-14 heb ik niet centraal besproken, omdat maar weinig leerlingen dit daadwerkelijk gedaan hadden. Ik maakte de inschatting dat een centrale bespreking geen zin had: leerlingen zitten niet voldoende in de opgaven en het komt dus 'niet goed aan'. Ik heb de leerlingen dit weer als huiswerk opgegeven
- Wat me ook opvalt, is dat het niveau over het algemeen niet zo hoog is. In elk geval, de stof van de onderbouw is niet zo paraat meer aanwezig. Zaken als gelijkvormigheid, snavelfiguur en hoe die door te rekenen m.b.v. de onbekende *x*, is gewoonweg niet meer paraat
- Een centrale uitleg neemt dan ook veel tijd in beslag, waardoor er beperkt tijd is voor het maken van opgaven. Laat staan dat er nog tijd is om erover te reflecteren. Je bent al zo veel tijd kwijt met het gewoonweg laten snappen, dat er daarna eigenlijk geen tijd meer is voor iets anders.

En verder

- Van de leerlingen hoorde ik in de les dat maandag praktisch de gehele klas aanwezig zal zijn i.v.m. een toets die wordt afgenomen. Om eerlijk te zijn overviel me dit. De laatste stof moest dus ingedikt worden uitgelegd. Lesaanpak voor de laatste lessen:
    a. Maandag in de les kunnen de leerlingen die er wel zijn, werken aan de opgaven. Ik zal wel vragen beantwoorden, maar geen nieuwe stof uitleggen
    b. De opgaven die voor maandag waren gepland, moeten in eigen tijd worden gemaakt
    c. Volgende week wil ik dat alle leerlingen de opgaven gemaakt hebben. Anders moeten sommigen nog maar even blijven.
    d. De les in de middag zal hoofdzakelijk worden gewerkt aan de opgaven. Alleen volgende week donderdag zal nog centraal stof worden toegelicht.

5.1.11.2 Werkvorm

- Klassieke werkvorm, zelf of in 2-tallen met de stof aan de gang

5.1.11.3 Wiskundig inhoudelijke constateringen en didactiek

- Ik heb de indruk dat de meeste leerlingen opgave 33 begrepen en daarna ook opgave 34 konden maken. Dat is winst, maar het heeft ook zo'n 20 minuten lestijd gekost

5.1.11.4 Leerdoelen

In hoeverre zijn de leerdoelen behaald?

	Leerdoel	*behaald*
1	Leerling weet hoe de oppervlakte van een afgeknotte kegel door te rekenen	Ja
2	Leerling begrijpt dat bij het doorrekenen van een afgeknotte kegel eerst de afmetingen van de oorspronkelijke kegel bepaald moeten worden.	Ja
3	Leerling begrijpt dat de hoogte van afknotten (afknothoogte) en de straal van de ontstane cirkelschijf (afknotstraal) beide bepalen hoe hoog de top van de	ja

	oorspronkelijke niet-afgeknotte kegel is	

5.1.11.4.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*	*behaald*
1	Leerling begrijpt opgave 33	Ja
2	Leerling heeft actief gewerkt aan de opgaven t/m 40	ja

5.1.11.5 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

-

5.1.11.6 Planning van de lesactiviteiten

De planning kwam goed uit.

Zoals verwacht, nam de bespreking van opgave 33 de nodige tijd in beslag en was er relatief weinig tijd voor het zelf maken van opgaven.

5.1.11.7 Bordgebruik

-

5.1.11.8 Werkblad / kennisblad

5.1.12 Les 13 (reflectie) – werken aan opgaven

5.1.12.1 Algemene indruk

- De klas was enorm druk. Het is misschien het klassieke verhaal van de storm; het was namelijk erg stormachtig. Een erg vermoeiende les door het geluid.

- Het kan natuurlijk ook komen omdat er minder structuur in de les zat. Leerlingen moesten in wezen gewoon 50 minuten gewoon sommen maken. Misschien te veel gevraagd van een H4 leerling
- Tijdens zo'n les ben ik enorm druk. Leerlingen lopen snel vast en daar probeer je dan zoveel mogelijk begeleiding in te geven. De begeleiding is vooral op metaniveau: heb je het voorbeeld goed bekeken, hoe doen ze het daar, etc.

5.1.12.2 Werkvorm

- Klassieke werkvorm, zelf of in 2-tallen met de stof aan de gang

5.1.12.3 Wiskundig inhoudelijke constateringen en didactiek

Het blijft me verrassen hoe weinig parate kennis er is. Veel van wat we vastgelegd hebben op de kennisbladen, zit nog niet in de hoofden.

5.1.12.4 Leerdoelen

In hoeverre zijn de leerdoelen behaald?

	Leerdoel	*behaald*
-	-	-

5.1.12.4.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*	*behaald*
1		

5.1.12.5 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

-

5.1.12.6 Planning van de lesactiviteiten

De planning kwam goed uit, voor zover je van een planning kunt spreken...

5.1.12.7 Bordgebruik

-

5.1.12.8 Werkblad / kennisblad

-

5.1.13 Les 15 (reflectie) – Reflectie op 11-14 en afronden hoofdstuk

5.1.13.1 Algemene indruk

- Ik weet niet precies wat leerlingen nu precies hebben gehad aan de reflectie. Tijdens de bespreking of achteraf individueel merk ik dat deze stof bij sommige leerlingen er nog steeds niet echt goed in zit. Sommigen hebben nog steeds geen vaardigheid om de oppervlakte van een sector te bepalen. Tja.. Bij anderen is dat hopelijk beter.
- Het was achteraf wellicht beter om de reflectie af te sluiten met het daadwerkelijk maken van een opgave van dit soort. "*The proof of the pudding is in the eating*". Dan kun je de waarde van de reflectie in laten zien en was de reflectie ook beter verankerd.
- Leerlingen hebben op zich goed gewerkt. Ik was deze les erg druk met leerlingen op weg te helpen. Het is erg aantrekkelijk om soms de opgave te verklappen, omdat een leerling dan sneller weer op weg is. Maar je, daar leert hij ook niet zo veel van. Aan de andere kant, als een andere leerling hem helpt, zal het op zich niet veel anders gaan ben ik bang.
- Het blijven toch lastige sommen voor de leerlingen. Er is weinig routine en leerlingen lopen regelmatig vast. Ik ben heel erg benieuwd wat dat volgende week wordt met het proefwerk.
- Enkele keren heb ik leerlingen laten bijspringen (Govert, help jij die jongens aan de andere kant eens met die som), dat werkt ook goed. Aan de andere kant, zie vorige punt.
- Tijdens het controleren van de voortgang krijg ik discussie dat leerlingen niet kunnen blijven i.v.m. bijbaantjes en sport. Dit vind ik altijd erg lastig. Ik kreeg daarover wat discussie met de klas en dat gaf een wat vervelende sfeer vond ik zelf. Ik heb maar water bij de wijn gedaan en gezegd dat ze het dan maar thuis moeten doen, maar dat het ontzettend belangrijk is om de opgaven te maken en er later nog eens goed naar te kijken

- Leerlingen vonden de werkbladen zo ontzettend veel. Ik heb hier maar op gereageerd dat het ook veel is maar dat het toch echt nodig is om deze te kennen. “Als je niet weet wat de oppervlakte van een cirkel is, dan loop je toch maar mooi vast als je deze nodig hebt”

5.1.13.2 Werkvorm

- Klassieke werkvorm, zelf of in 2-tallen met de stof aan de gang

5.1.13.3 Wiskundig inhoudelijke constateringen en didactiek

-

5.1.13.4 Leerdoelen

In hoeverre zijn de leerdoelen behaald?

	Leerdoel	*behaald*
1	Leerling heeft overzicht over de oppervlakteberekening van een figuur bestaande uit sectoren, gelijkbenige driehoeken en segmenten - hoe herkennen - hoe oplossen - vaste onderdelen en tips	Ik vraag het me ten zeerste af, nee dus

5.1.13.4.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*	*behaald*
1	Leerling heeft gewerkt aan de opgaven	ja

5.1.13.5 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

-

5.1.13.6 Planning van de lesactiviteiten

De planning kwam goed uit.

5.1.13.7 Bordgebruik

-

5.1.13.8 Werkblad / kennisblad

-

5.1.14 Les 16 (reflectie) – Laatste les

5.1.14.1 Algemene indruk

- Ik heb geen goede ervaringen om een HAVO 4 klas een geheel 'leeg uur' te geven om zich met elkaar voor te bereiden voor het proefwerk. Mijn ervaring is dat ze meer structuur nodig hebben. Bovendien wilde ik echt nog wat vertellen over de methode van probleemaanpak. Daarom deze les een vrij centraal gestuurde les, waarin de gehele klas meedeed met de bespreking. Dergelijke lessen zijn goed te doen met deze klas. Leerlingen willen graag opletten en meedoen.
- Ook deze les was een les waarin ik erg aanwezig was en waarin we met elkaar met hetzelfde bezig waren.
- Ik heb zoveel mogelijk in een klassengesprekvorm gedaan. Eerst aansturen dat iedereen ergens over moet nadenken en dan vervolgens iemand een beurt geven waarin hij / zij iets moet produceren: een denkstap, alle kennis die hij / zij heeft over bijvoorbeeld een 8-hoek, etc.
- Ik was positief verrast dat er veel goede respons kwam op de vragen en hoe leerlingen meededen met de probleemaanpak-uitleg.
- Mijn ervaring is dat hoe meer 'meta' je het hebt over de stof of over de aanpak, dat veel meer leerlingen afhaken. Het wordt of te abstract, of te open deuren, of de relatie met concrete sommen is te ver weg, etc. Daarom heb ik een hele concrete 3-kolommen methode bedacht om te gebruiken bij het verhaal over de probleemaanpak. Dit sloeg naar mijn idee aan.
- De heuristieken vielen heel concreet en natuurlijk op hun plaats en leerlingen konden er goed in meegaan. Ik heb de volgende heuristieken extra veel aandacht gegeven
    a. Duidelijk krijgen wat er gevraagd wordt

i. Wat heb je nodig om dit uit te rekenen? (schrijf eventueel alle kennis die je hebt op!)

b. Duidelijke krijgen wat de gegevens zijn
   i. Wat kun je hiermee?
   ii. Wat voor kennis komt er naar boven bij de bijbehorende wiskundige concepten? (dit soort taalgebruik, gebruik ik niet in de klas, dan heb ik het over “wat komt er naar boven borrelen als je denkt aan een oppervlakte van een grondcirkel?” “wat weet je hier allemaal van?”

c. Kijken of je een verbinding kunt leggen tussen wat gevraagd wordt en wat je uit de gegevens kunt afleiden
   i. Als je nog geen verbinding kunt leggen, denk nog eens na of je niet iets over het hoofd ziet. Bijvoorbeeld: is er echt niet iets wat je ook nog weet, en wat je hier zou kunnen gebruiken?

- Achteraf denk ik wel dat het jammer is dat ik dit niet zo vanaf het begin heb gedaan. Het is een mooi en concreet toepasbaar denkmodel. Volgende keer.
- Leerlingen komen zonder problemen voor het bord om iets te tekenen of iets aan te wijzen.
- Als klas geheel voldeed deze les goed. Maar nu ik dit opschrijf, denk ik ook of ik echt iedereen heb meegekregen. Ja, dat weet ik niet zeker.
- Ik heb tijdens deze les duidelijk nog niets kunnen vertellen over probleemaanpak en eisen aan de uitwerking. Dit is volgend mij goed overgekomen. Ik zet het dan vaak dik aan: “als je alleen maar getallen gebruikt, dan zou het zomaar kunnen dat er een dikke streep door heen gaat en dat je er geen punten voor krijgt. Terwijl het antwoord misschien wel helemaal goed was! Laat dat je niet overkomen!”.Er was wel heel wat gesteiger over de eisen aan de uitwerking. “Moeten we dit echt allemaal opschrijven, dan ben je toch een eeuwigheid bezig?!”. Een dergelijke reactie vind ik eigenlijk best wel ok. Dan wordt er tenminste flink wat emotie opgeroepen en dan is het blijkbaar goed aangekomen.

5.1.14.2 Werkvorm

- Veel centraal klassengesprek. Leerlingen deden goed mee.

5.1.14.3 Wiskundig inhoudelijke constateringen en didactiek

Ik was positief verrast dat leerlingen zoveel inbreng hadden. Natuurlijk hadden ze de opgaven al gemaakt, maar toch.

Ik was weer wat minder blij dat sommige (in elk geval bij de VMBO-) leerlingen niet wisten wat een hoek als hoek ABC is. Ze hadden een dergelijke notatie voor een hoek niet meer paraat en konden deze dan ook niet duiden. En dat terwijl dergelijke hoeknotaties in het hoofdstuk veelvuldig gebruikt werden. Typisch...

Dan denk ik ook meteen weer, had ik misschien toch meer opgaven op het bord voor moeten doen zodat dit soort notatiewijzen meer aan de leerling getoond werden. Maar goed, dat kan nu niet meer. En sowieso, waar zou ik de tijd vandaan hebben moeten halen? Met mijn huidige ervaring en het tempo dat ik daarom kan hanteren (compact formuleren, etc.) kon ik echt niet meer in de les besproken krijgen. En de andere dingen die ik heb verteld, moesten toch ook verteld worden.

5.1.14.4 Leerdoelen

In hoeverre zijn de leerdoelen behaald?

	Leerdoel	*behaald*
1	Leerling kent strategie om tot een plan van aanpak te komen, met als onderdelen • Wat wordt er gevraagd? • Wat is er gegeven? • Wat voor soort kennis heb ik hierover? • Hoe kan ik dit alles met elkaar verbinden?	Ja
2	Leerling weet welke eisen er gesteld worden aan de uitwerkingen.	ja

5.1.14.4.1 Overige lesdoelen

Nr	*Omschrijving doel*	*behaald*
1	Leerlingen weten dat donderdag een presentatie wordt gehouden en dat het 7de uur al om 14:00 uur begint	Ja
2	Leerlingen weten dat we donderdag met H3 beginnen en	ja

	dat hier 2 weken voor zijn gepland.	

5.1.14.5 Randvoorwaarden en voorbereiding vóór de les in het lokaal

-

5.1.14.6 Planning van de lesactiviteiten

De planning kwam goed uit.

5.1.14.7 Bordgebruik

5.1.14.8 Werkblad / kennisblad

-

6 Resultaten

6.1 Resultaten over de 100 minutentoets (experimentgroep)

De resultaten over de gehele toets zijn in onderstaande tabel opgenomen. Per toetsonderdeel is geregistreerd hoe door elke individuele leerling gescoord heeft, wat het overall scoringspercentage is, wat de hoogste individuele puntscore is met het daarbijbehorende individuele scoringspercentage.

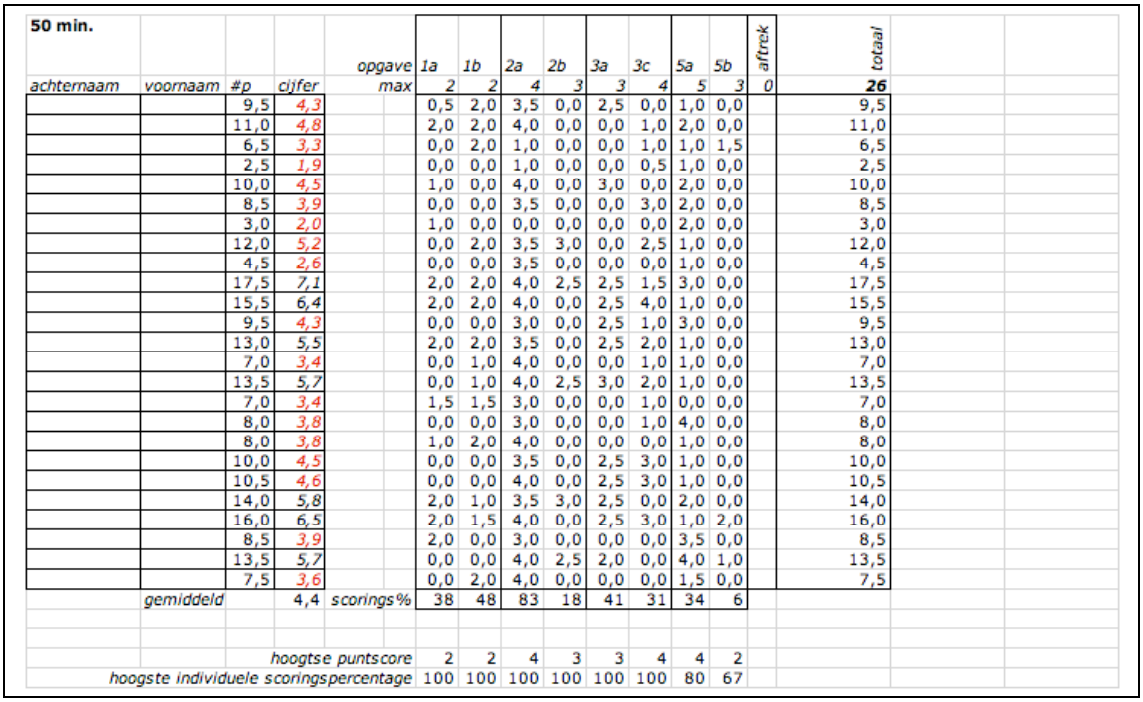
Het overall scoringspercentage per toetsonderdeel is berekend door voor een specifiek onderdeel het percentage te berekenen van de gesommeerde individuele scores ten opzichte van het theoretisch maximaal te behalen totaal aantal punten op dit onderdeel.

De namen van de leerlingen zijn geanonimiseerd.

100 min.				opgave	1a	1b	2a	2b	3a	3b	3c	4	5a	5b	6	7a	7b	aftrek	totaal
achternaam	voornaam	#p	cijfer	max	2	2	4	3	3	7	4	5	5	3	4	5	3	0	**50**
		15,5	3,8		0,5	2,0	3,5	0,0	2,5	0,0	0,0	2,0	1,0	0,0	0,0	4,0	0,0		15,5
		21,0	4,8		2,0	2,0	4,0	0,0	0,0	2,5	1,0	5,0	2,0	0,0	0,0	2,5	0,0		21,0
		11,0	3,0		0,0	2,0	1,0	0,0	0,0	2,5	1,0	1,0	1,0	1,5	0,0	1,0	0,0		11,0
		5,0	1,9		0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0,5	0,0	1,0	0,0	0,0	1,5	0,0		5,0
		20,5	4,7		1,0	0,0	4,0	0,0	3,0	2,0	0,0	3,0	2,0	0,0	2,5	3,0	0,0		20,5
		20,0	4,6		0,0	0,0	3,5	0,0	0,0	2,5	3,0	3,0	2,0	0,0	4,0	2,0	0,0		20,0
		16,0	3,9		1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,0	0,0	3,0	2,0	0,0	2,0	5,0	0,0		16,0
		18,0	4,2		0,0	2,0	3,5	3,0	0,0	2,0	2,5	1,0	1,0	0,0	2,0	0,0	1,0		18,0
		11,0	3,0		0,0	0,0	3,5	0,0	0,0	2,0	0,0	0,5	1,0	0,0	4,0	0,0	0,0		11,0
		29,5	6,3		2,0	2,0	4,0	2,5	2,5	4,0	1,5	4,5	3,0	0,0	0,0	2,5	1,0		29,5
		29,5	6,3		2,0	2,0	4,0	0,0	2,5	5,0	4,0	5,0	1,0	0,0	0,0	3,5	0,5		29,5
		13,5	3,4		0,0	0,0	3,0	0,0	2,5	2,0	1,0	2,0	3,0	0,0	0,0	0,0	0,0		13,5
		21,5	4,9		2,0	2,0	3,5	0,0	2,5	1,5	2,0	0,0	1,0	0,0	4,0	2,0	1,0		21,5
		14,0	3,5		0,0	1,0	4,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	1,0	0,0	3,0	4,0	0,0		14,0
		22,5	5,1		0,0	1,0	4,0	2,5	3,0	3,0	2,0	1,0	1,0	0,0	3,0	1,0	1,0		22,5
		16,0	3,9		1,5	1,5	3,0	0,0	0,0	0,5	1,0	2,5	0,0	0,0	2,0	4,0	0,0		16,0
		14,5	3,6		0,0	0,0	3,0	0,0	0,0	1,5	1,0	0,5	4,0	0,0	4,0	0,5	0,0		14,5
		17,0	4,1		1,0	2,0	4,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,5	1,0	0,0	2,0	3,5	0,0		17,0
		24,0	5,3		0,0	0,0	3,5	0,0	2,5	3,5	3,0	3,5	1,0	0,0	2,5	4,0	0,5		24,0
		24,5	5,4		0,0	0,0	4,0	0,0	2,5	6,0	3,0	4,0	1,0	0,0	4,0	0,0	0,0		24,5
		16,0	3,9		2,0	1,0	3,5	3,0	2,5	0,0	0,0	0,0	2,0	0,0	0,0	2,0	0,0		16,0
		24,5	5,4		2,0	1,5	4,0	0,0	2,5	2,0	3,0	0,5	1,0	2,0	3,5	2,5	0,0		24,5
		17,0	4,1		2,0	0,0	3,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,5	3,5	0,0	2,0	3,0	0,0		17,0
		17,5	4,2		0,0	0,0	4,0	2,5	2,0	0,0	0,0	3,0	4,0	1,0	0,0	0,0	1,0		17,5
		11,0	3,0		0,0	2,0	4,0	0,0	0,0	1,0	0,0	2,5	1,5	0,0	0,0	0,0	0,0		11,0
	gemiddeld		4,3	scorings%	38	48	83	18	41	27	31	44	34	6	45	41	8		
				hoogtse puntscore	2	2	4	3	3	6	4	5	4	2	4	5	1		
	hoogste individuele scoringspercentage				100	100	100	100	100	86	100	100	80	67	100	100	33		

6.2 Resultaten over de 50 minutentoets

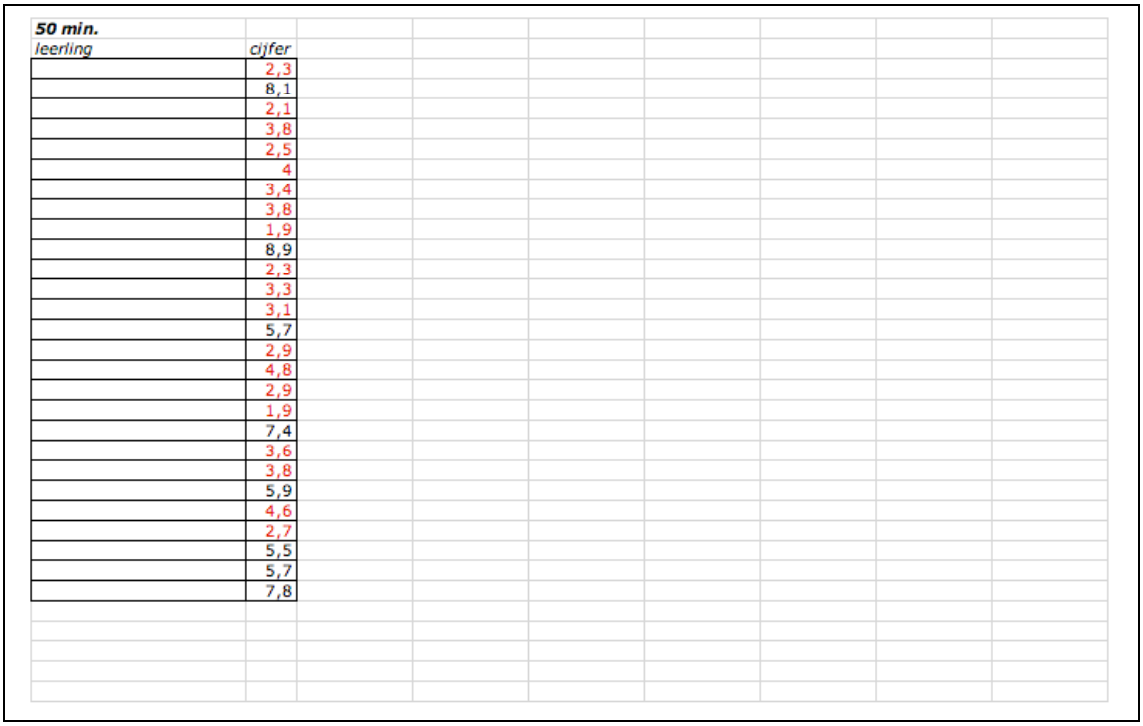
Als alleen gekeken wordt naar die toetsonderdelen die ook in het jaar ervoor zijn afgenomen, wordt het volgende beeld gekregen van de resultaten van de experimentgroep. De namen van de leerlingen zijn geanonimiseerd.



50 min.

achternaam	voornaam	#p	cijfer	opgave max	1a 2	1b 2	2a 4	2b 3	3a 3	3c 4	5a 5	5b 3	aftrek 0	totaal **26**
		9,5	4,3		0,5	2,0	3,5	0,0	2,5	0,0	1,0	0,0		9,5
		11,0	4,8		2,0	2,0	4,0	0,0	0,0	1,0	2,0	0,0		11,0
		6,5	3,3		0,0	2,0	1,0	0,0	0,0	1,0	1,0	1,5		6,5
		2,5	1,9		0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,5	1,0	0,0		2,5
		10,0	4,5		1,0	0,0	4,0	0,0	3,0	0,0	2,0	0,0		10,0
		8,5	3,9		0,0	0,0	3,5	0,0	0,0	3,0	2,0	0,0		8,5
		3,0	2,0		1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	2,0	0,0		3,0
		12,0	5,2		0,0	2,0	3,5	3,0	0,0	2,5	1,0	0,0		12,0
		4,5	2,6		0,0	0,0	3,5	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0		4,5
		17,5	7,1		2,0	2,0	4,0	2,5	2,5	1,5	3,0	0,0		17,5
		15,5	6,4		2,0	2,0	4,0	0,0	2,5	4,0	1,0	0,0		15,5
		9,5	4,3		0,0	0,0	3,0	0,0	2,5	1,0	3,0	0,0		9,5
		13,0	5,5		2,0	2,0	3,5	0,0	2,5	2,0	1,0	0,0		13,0
		7,0	3,4		0,0	1,0	4,0	0,0	0,0	1,0	1,0	0,0		7,0
		13,5	5,7		0,0	1,0	4,0	2,5	3,0	2,0	1,0	0,0		13,5
		7,0	3,4		1,5	1,5	3,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0		7,0
		8,0	3,8		0,0	0,0	3,0	0,0	0,0	1,0	4,0	0,0		8,0
		8,0	3,8		1,0	2,0	4,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0		8,0
		10,0	4,5		0,0	0,0	3,5	0,0	2,5	3,0	1,0	0,0		10,0
		10,5	4,6		0,0	0,0	4,0	0,0	2,5	3,0	1,0	0,0		10,5
		14,0	5,8		2,0	1,0	3,5	3,0	2,5	0,0	2,0	0,0		14,0
		16,0	6,5		2,0	1,5	4,0	0,0	2,5	3,0	1,0	2,0		16,0
		8,5	3,9		2,0	0,0	3,0	0,0	0,0	0,0	3,5	0,0		8,5
		13,5	5,7		0,0	0,0	4,0	2,5	2,0	0,0	4,0	1,0		13,5
		7,5	3,6		0,0	2,0	4,0	0,0	0,0	0,0	1,5	0,0		7,5
	gemiddeld		4,4	scorings%	38	48	83	18	41	31	34	6		
				hoogtse puntscore	2	2	4	3	3	4	4	2		
				hoogste individuele scoringspercentage	100	100	100	100	100	100	80	67		

De resultaten van de controlegroep zijn alleen beschikbaar als proefwerkcijfer, zie het onderstaande overzicht. Ook in onderstaande overzicht zijn de namen van de leerlingen geanonimiseerd.



50 min.

leerling	cijfer
	2,3
	8,1
	2,1
	3,8
	2,5
	4
	3,4
	3,8
	1,9
	8,9
	2,3
	3,3
	3,1
	5,7
	2,9
	4,8
	2,9
	1,9
	7,4
	3,6
	3,8
	5,9
	4,6
	2,7
	5,5
	5,7
	7,8

6.3 Statistische verwerking en analyse

In Excel is de t-toets uitgevoerd, met als resultaat.

	populatie	controlegroep
	4,3	2,3
	4,8	8,1
	3,3	2,1
	1,9	3,8
	4,5	2,5
	3,9	4
	2	3,4
	5,2	3,8
	2,6	1,9
	7,1	8,9
	6,4	2,3
	4,3	3,3
	5,5	3,1
	3,4	5,7
	5,7	2,9
	3,4	4,8
	3,8	2,9
	3,8	1,9
	4,5	7,4
	4,6	3,6
	5,8	3,8
	6,5	5,9
	3,9	4,6
	5,7	2,7
	3,6	5,5
		5,7
		7,8
gemiddelde	4,42	4,25
std. deviatie	1,35	2,00

T.TOETS(B3:B27;C3:C29;1;3) geeft 0,358

Op basis van de vastgestelde onbetrouwbaarheidsfactor van 10%, kan de conclusie getrokken worden dat er geen reden is om de nulhypothese te verwerpen. Ofwel, de cijfers van de experimentgroep liggen niet significant hoger dan die van de controlegroep.