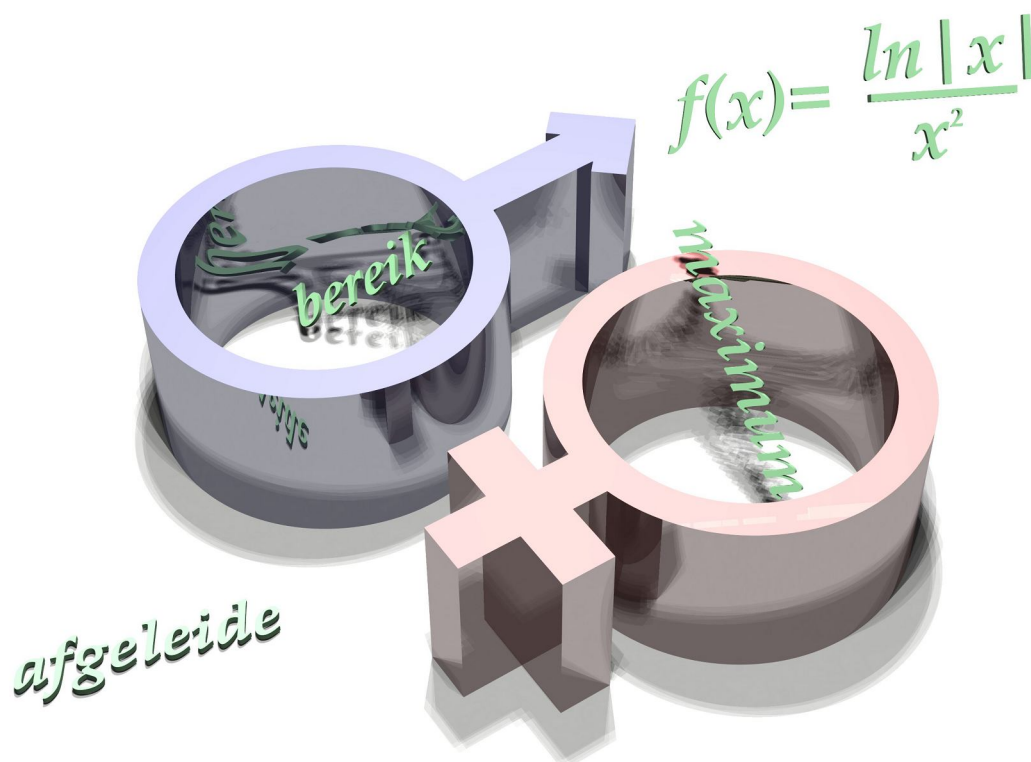


Genderverschillen in de wiskunde

Welke zijn de genderverschillen in aanpak bij wiskunde B 5 VWO-leerlingen van een wiskundig probleem in de analyse



Naam: Annelies van der Veen

Begeleider: Nellie Verhoef

Juni 2010

Voorwoord

Dit onderzoek is gedaan in het kader van het vak Onderzoek van Onderwijs (OvO) ter afronding van de eerstegraads lerarenopleiding aan de Universiteit Twente.

Het doel van het vak OvO is werken in de praktijk, waarbij ik persoonlijk didactisch bijleer als onderwijsgevende, maar ook een onderzoek waar de leerling, de school of de opleiding wat aan heeft.

Waar ik persoonlijk nogal in geïnteresseerd ben, is het verschil tussen jongens en meisjes op school, met name in de technische vakken (wiskunde, natuurkunde etc). Buiten dat ik daar nu veel meer over te weten ben gekomen, heb ik ook beter inzicht verkregen in mijn eigen lesmethode en de valkuilen waar ik als onervaren docent nog dagelijks mee te maken heb.

Bovendien wil ik de gelegenheid aangrijpen om een aantal mensen te bedanken.

Als eerste wil ik Nellie Verhoef bedanken omdat ze bijna dag en nacht wel bereikbaar is, snelle en goede feedback levert en bovenal ook omdat ze me van harte heeft gestimuleerd.

Verder bedank ik de proefpersonen (Jelle Beernink, Tim van 't Hof, Tycho Brug, Margriet Schokkin en Sophie ten Hoopen) en de afnemer van het onderzoek Gertjan Brug, mijn collega's voor het beoordelen en Lennard omdat hij mijn trouwe steun en toeverlaat is.

Mocht ik nog iemand vergeten zijn, dan bedank ik die natuurlijk ook van harte.

Annelies van der Veen
Enschede, juni 2010

Samenvatting

Uit recent onderzoek blijkt dat er al op de lagere school verschil is in prestaties op wiskunde tussen jongens en meisjes. Datzelfde geldt voor de middelbare school waar de genderverschillen vooral tot uitdrukking komen in zelfbeeld, verwachting en betere prestaties van jongens op moeilijkere vraagstukken in de wiskunde. Ook in het vervolgonderwijs zijn verschillen zichtbaar op diverse vlakken in de wiskunde.

Bij het leren van wiskunde doorlopen studenten een aantal niveaus. Een aantal theoretici (Van Hiele, Murray) geeft aan dat deze niveaus hiërarchisch doorlopen worden, terwijl de critici (o.a. Tall) aangeven dat de niveaus elkaar overlappen, aanvullen en niet persé op volgorde doorlopen hoeven te worden. Tall stelt ook dat er verschil is tussen denken en doen waar Skemp op aansluit met zijn theorie over relationeel (denken) en instrumenteel (doen) begrip. Hierop wordt door Van Streun aangevuld dat heuristische oplosmethoden kunnen helpen bij het opbouwen van relationeel begrip.

Dit onderzoek is opgezet om verschillen in relationeel en instrumenteel begrip tussen jongens en meisjes bij het aanpakken van een analytische wiskundig vraagstuk te onderzoeken.

Aan de hand van de door de onderzoeker opgestelde criteria zijn hardopdenksessies van de deelnemers beoordeeld. Tijdens de sessie moesten mannelijke en vrouwelijke deelnemers hardop een analytisch wiskundevraagstuk oplossen. De resultaten laten zien dat de verhouding tussen relationeel en instrumenteel begrip bij jongens en meisjes anders ligt.

Kanttekeningen bij het onderzoek zijn o.a. de statistische significantie (er zijn te weinig deelnemers voor significantie), de invloed van lesmethode en docent, de invloed van het weglaten van de grafische rekenmachine en de invloed van motivatie en gevoel.

Aanbevolen wordt dan ook om de kritische kanttekeningen mee te nemen in vervolgonderzoeken.

Inhoudsopgave

Voorwoord.....	1
Samenvatting	2
Inhoudsopgave	3
Inleiding.....	4
Theoretisch kader.....	6
Gendersverschillen, of toch niet?.....	6
Typeringen van het oplossen van wiskundige problemen in de analyse.....	8
Piaget.....	9
Van Hiele & Murray, een eerste overzicht van niveaus in aanpak (bij meetkunde).....	9
David Tall en de cognitieve ontwikkeling in 3 werelden.....	11
Relationeel en instrumenteel begrip volgens Richard Skemp	14
Heuristische oplosmethoden volgens van Streun.....	15
Methode.....	18
Deelnemers.....	18
Materiaal en dataverzameling.....	18
Verwachtingen en hypothese.....	19
Criteria.....	21
Aannames.....	21
Procedure.....	21
Analyse.....	22
Conclusie	24
Discussie.....	24
Statistische significantie.....	24
Lesmethode en docent.....	24
Grafische rekenmachine (GR)	26
Motivatie en gevoel	26
Aanbevelingen	29
Literatuurlijst.....	30
Bijlage 1.....	32
Bijlage 1.....	32
Bijlage 2:.....	34
Bijlage 2:.....	34
Bijlage 3:.....	35
Bijlage 4.....	36
Bijlage 5.....	37
Bijlage 6.....	38
Bijlage 7.....	39
Bijlage 8.....	40
Bijlage 9.....	43

Inleiding

“We moeten de jongens redden!” kopte de onderwijsbijlage van de Franse krant Le Monde in 2003. Want zowel in Frankrijk als in Nederland lijkt het steeds slechter te gaan met de jongens in het onderwijs, maar ook in andere landen maakt men zich terecht zorgen over de slechte prestaties van de jongens.

Anno 2009 blijkt dit ‘probleem’ nog steeds niet opgelost en wijdt het televisieprogramma Netwerk er een uitzending aan op 21 oktober.

In eerdere krantenartikelen, zoals die van 11 maart 2003 in de Volkskrant [1], worden deze verslechterde prestaties vooral aan de feminisering van het onderwijs geweten, maar tot op dat moment kon zowel in Nederland als in het buitenland geen enkele relatie worden gevonden tussen het toegenomen aantal vrouwelijke docenten enerzijds en de (verslechterde) leerprestaties van jongens anderzijds.

Uit recent onderzoek blijkt dat er al op de lagere school prestatieverschillen zijn bij wiskunde tussen jongens en meisjes [2], in tegenstelling tot oudere onderzoeken die (nog) geen significante verschillen vonden [3-5].

Op de middelbare school lijken zich genderverschillen te vormen die zich vooral uiten in zelfbeeld en verwachting [6-9] en betere prestaties van jongens bij moeilijkere vraagstukken [10-11], en betere prestaties van meisjes bij de meer verbale vakken [6-7, 11].

Uit verschillende typering van de aanpak van wiskundige problemen blijkt dat leerlingen bij het doorlopen van het oplosproces een aantal niveaus doorlopen [12-13]. De verschillende genoemde theoretici geven daar op verschillende manieren inhoud aan. Van Hiele doet dat vooral op het gebied van de meetkunde in vier niveau's, terwijl Tall meer kijkt naar de cognitieve ontwikkeling in de formelere of theoretische wiskunde en het onderscheid weergeeft in drie werelden. Buiten het feit dat de Van Hiele theorie vooral voor meetkunde geschikt is, is het verschil ook te vinden in de hiërarchie van de niveau's. Volgens de Van Hiele theorie doorloopt een leerling de niveaus op van laag naar hoog met soms een stapje terug, terwijl Tall zijn werelden meer ziet als verzamelingen die overlap kunnen vertonen en niet noodzakelijkerwijs op volgorde hoeven worden doorlopen. In zijn theorie komt in elk geval naar voren dat er verschil is tussen denken en doen. Datzelfde is terug te vinden bij Skemp [14] die het dan instrumenteel (doen) en relationeel (denken) noemt.

Om tot dit belangrijke relationele begrip te komen waarbij leerlingen verbanden gaan zien tussen de diverse (wiskundige) begrippen is de docent van groot belang. Ook Van Streun [15-17] sluit hierop aan door te concluderen dat docenten met vakkennis niet noodzakelijk ook diezelfde vakkennis op relationeel gebied kunnen overbrengen waardoor leerlingen dan blijven zitten met brokjes losse informatie in hun hoofd. Ook concludeert Van Streun dat buiten de docent ook de lesmethode invloed heeft op het relationele begrip van de leerling.

Dit onderzoek is gericht op de verschillen in aanpak tussen jongens en meisjes van een wiskundig probleem in de analyse, waarbij vooral gekeken wordt naar de twee begripvormen relationeel en instrumenteel.

Op basis van de bevindingen uit het theoretische vooronderzoek is een hypothese ontwikkeld over de verschillen in de aanpak van zo'n probleem tussen jongens en meisjes.

De onderzoeksvraag luidt dan ook als volgt:

Welke zijn de genderverschillen in aanpak bij wiskunde B 5 VWO-leerlingen van een wiskundig probleem in de analyse.

Theoretisch kader

In dit hoofdstuk wordt allereerst ingegaan op de onderzoeken met betrekking tot genderverschillen bij wiskunde. Hierbij valt bijvoorbeeld te denken aan motivatie-, verwachting- en prestatieverschillen tussen jongens en meisjes. Daarna wordt gekeken naar de verschillende manieren van aanpak van (analytisch) wiskundige problemen zoals die door de theoretici worden geschetst. Aan de hand van de theorieën zal uiteindelijk een hypothese worden geformuleerd.

Genderverschillen, of toch niet?

Op het gebied van genderverschillen is verschrikkelijk veel literatuur te vinden. Veelal zijn deze artikelen uit de tijd van voor het studiehuis of nog voor de mammoetwet (in Nederland), of ze hebben slechts zijdelings te maken met de onderzoeksvraag. In eerste instantie is vooral gekeken naar recente literatuur op het gebied van genderverschillen en dan met name in de wiskunde.

Volgens Driessen [18], die in 2004 een onderzoek¹ naar de feminisering in het Nederlandse onderwijs uitvoerde voor het ministerie van OCW, is er geen aantoonbaar bewijs gevonden voor de in de inleiding genoemde vermeende nadelige gevolgen van de feminisering van het onderwijs. Niet in Nederland, maar ook niet in het buitenland, aldus dit onderzoek.

Wel blijkt uit het onderzoek dat er kleine verschillen zijn tussen meisjes en jongens in de basisschoolleeftijd op het gebied van welbevinden, en niet-significante verschillen in rekenvaardigheid.

Sprigler [4] vond in 2003 ook op de lagere-school-leeftijd helemaal nog geen aantoonbare verschillen tussen meisjes en jongens op het gebied van wiskundig redeneren. Ook Wimer [5] vond eerder in 2001 een soortgelijk resultaat. En in een nog ouder onderzoek door Schofield [3] in 1982 werd ook geen significant verschil gevonden tussen jongens en meisjes. Wel vond Schofield dat er bij jongens een net wel significant sterkere relatie is tussen houding en prestatie dan bij meisjes op het gebied van wiskunde en bovendien vond Schofield dat zowel jongens als meisjes in die tijd wiskunde nog beschouwden als een typisch mannelijk domein (andere onderzoeken die in dit artikel genoemd worden vinden soortgelijke resultaten op domein-gebied).

Leerlingen aan het begin van de middelbare school, zo in de leeftijd van 11 tot 14 jaar blijken ook nog geen significante genderverschillen te vertonen, zo stellen Pajares en Graham [19], die het effect van zelfbeeld, het vermogen en overtuiging op de wiskunde prestaties onderzochten. Meisjes gaven in hun onderzoek wel aan dat ze aan het eind van het jaar wiskunde als minder waardevol inschatten en er daarom ook minder moeite en doorzettingsvermogen in te stoppen.

Wilkins [9] onderzocht in 2004 de relatie tussen wiskundeprestaties en self-concept op het gebied van wiskunde en vond een positieve relatie. In de meeste landen bestaat er in het algemeen een kloof tussen de beide seksen in het voordeel van de

¹ Kanttekening bij de resultaten van dit onderzoek is dat men alleen heeft gekeken naar onvertraagde leerlingen (omdat die cijfers wel voorhanden waren), en dat zittenblijvers en doorverwezen leerlingen niet zijn meegenomen.

mannen aldus Wilkins. De TIMMS² data die Wilkins bekeek dateren van 1996 [20], en gaan over leerlingen op lagere school, en begin middelbare school en komen uit verschillende landen.

TIMMS heeft in 2007 een nieuw rapport uitgebracht waar later nog kort op teruggekomen wordt.

Ook Beller [10] bekeek in 1988 aan de hand van de internationale resultaten van een aantal IAE³ mathematics toetsen of er verschil is tussen jongens en meisjes in begin middelbare schoolleeftijd bij het beantwoorden van verschillende vraagsoorten (meerkeuze of open vragen). Hij vond een positieve correlatie tussen de moeilijkheidsgraad van het item en de prestatie van de jongens, terwijl er op het vlak van verschillende vraagsoorten juist geen gendersverschil bleek te zijn.

Gallagher [11] vond een soortgelijk resultaat in 2000. Uit hun onderzoek bleek dat flexibiliteit in oplossingsstrategieën een bron is van gendersverschillen bij het oplossen van SAT-M⁴ en GRE-Q⁵ vraagstukken. Mannen doen het volgens dit onderzoek over het algemeen beter, en naarmate er bij de vragen meer ruimtelijk inzicht of meerder oplossingsroutes nodig zijn, worden de verschillen met de vrouwen groter. De vrouwen scoren beter op vraagstukken die een meer verbale aanpak vereisen of over stof gaan die in het klaslokaal is behandeld.

Een breed onderzoek onder 77000 studenten uitgevoerd in 1986 door Kerr [6] liet zien dat jongens in de V.S. beter presteerden dan meisjes op het gebied van wiskunde en natuurwetenschappen in ACT⁶-scores. Dit in tegenstelling tot de meer verbale vakken zoals Engels, waarin de meisjes beter scoorden. Maar Kerr draagt in haar boek een hele andere reden aan dan Beller en Gallagher [10-11]. Ze geeft als reden aan dat de maatschappij de meisjes leert dat ze toch niet worden beoordeeld op hun intellectuele capaciteiten. Bovendien geeft zij aan dat er wel gezegd wordt tegen meisjes dat ze gelijk zijn aan jongens, maar geloven meisjes dat niet. Zij blijven volharden in stereotype ideeën, omdat hen dat door de maatschappij min of meer wordt opgelegd aldus Kerr. Het boek van Kerr heeft een (feministische) kijk die zich voornamelijk richt op de problematiek rond de slechtere prestaties van meisjes op het gebied van wiskunde en niet op de algemeen slechtere prestaties van jongens.

Skaalvik [7] komt in 2004 tot de conclusie dat meisjes niet beter of slechter presteren, maar dat zij wel een stereotyp lager self-concept op het gebied van wiskunde en een lagere verwachting hebben dan jongens. Zij geeft aan dat deze gendersverschillen ontstaan op de middelbare school, maar dat deze niet verklaard kunnen worden door verschillen in de gescoorde cijfers.

² TIMMS staat voor *Trends in International Mathematics and Science Study*, en zij leveren betrouwbare gegevens over wiskunde en wetenschapsprestaties van studenten uit de 4th (9-10 jaar) en 8th (13-14 jaar) grade in de Verenigde Staten vergeleken met studenten in 41 andere landen, waaronder Nederland. De gegevens zijn verzameld in 1995, 1999, 2003 en 2007.

³ IAE³ staat voor *International Assessment of Educational Progress*. De bedoelde toetsen werden uitgevoerd in 1988 door circa 1000 13-jarigen in 6 verschillende landen en in 1991 rond de 1650 9- en 13-jarigen uit 20 verschillende landen

⁴ SAT-M staat voor *Scholastic Assessment Test – Mathematics*. Dit zijn gestandaardiseerde testen die nodig zijn om toegelaten te worden tot een college in de Verenigde Staten. Ze worden gehouden bij studenten in de leeftijd van 16 tot 18 jaar

⁵ GRE-Q staat voor *Graduate Record Examination-Quantitative*. Ook dit is een gestandaardiseerde test die nodig is om toegelaten te worden tot (een) graduate school (vaak onderdeel van de universiteit) in de VS, en sommige andere Engels-sprekende landen. De toetsen worden gehouden onder studenten met een bachelor(undergraduate)-diploma.

⁶ ACT staat voor *American College Testing*, en wordt op soortgelijke manier als de SAT scores als toelating voor college beschouwd.

Dat meisjes en vrouwen gevoelig zijn voor op stereotypen gebaseerde ideeën blijkt ook uit een onderzoek van Thoman [8] gehouden onder undergraduate (bachelor) studentes. Een deel van de vrouwen uit dit onderzoek kreeg te horen dat mannen beter waren in wiskunde, omdat zij zich harder zouden inzetten en meer doorzettingsvermogen zouden hebben dan vrouwen. Deze groep vrouwen presteerden beter dan vrouwen in de controlegroep, en ook beter dan vrouwen uit een groep die te horen kregen dat mannen genetisch gezien beter zouden zijn in wiskunde (zij kregen een fictief wetenschappelijk artikel te lezen waar dat in stond). Thoman concludeerde hieruit dat vrouwen gevoelig zijn voor bepaalde stereotype ideeën, en wanneer men aangeeft dat een toets niet de bekwaamheid test maar de inzet, dan zouden de verschillen die door deze ideeën veroorzaakt worden wegvallen.

Op internationaal gebied vonden verschillende onderzoeken wel genderverschillen in verschillende leeftijdscategorieën aan de hand van gegevens van TIMMS [2]. De data in het rapport uit Nederland geven een representatief beeld van Nederland volgens de maatstaven van TIMMS. Dat wil zeggen dat er gegevens bij TIMMS bekend zijn van verschillende scholen in alle provincies en dat men ook de betrouwbaarheid heeft vastgesteld⁷.

Uit deze data blijkt dat in Nederland de jongens significant in hoger scoren dan meisjes op lagere-school-leeftijd (4th grade) in 2007 (dit in tegenstelling tot eerdere onderzoeken waaruit zou blijken dat op de lagere school er nog geen genderverschillen zouden zijn). Nederland wordt in dit rapport zelfs apart genoemd: "In the Netherlands, fourth grade girls showed increasing declines in average mathematics achievement across the assessments" [2].

Nederland deed in 1995 wel mee aan TIMMS, maar voldeed toen nog niet aan de betrouwbaarheidseisen, en er zijn dan ook (nog) geen cijfers bekend, die een trend kunnen weergeven door de jaren heen, zoals bij een aantal andere landen wel is gebeurd.

Typeringen van het oplossen van wiskundige problemen in de analyse

Dit onderzoek grijpt terug op de manier waarop leerlingen stof tot zich nemen. In dit geval is de stof een analytisch wiskundig vraagstuk (dit vraagstuk is te vinden in hoofdstuk Methode onder materiaal en dataverzameling). Omdat in de vraag besloten ligt of er verschil is in aanpak tussen jongens en meisjes is het van belang om te weten hoe een wiskundig probleem in zijn algemeenheid aangepakt kan worden.

Daarom worden diverse theorieën bekeken die schetsen hoe een kind het leerproces doorloopt te beginnen bij Piaget, die als (een van de) eerste de ontwikkeling van het denkproces van kinderen beschrijft. Omdat zijn theorie niet specifiek over wiskundige problemen gaat, maar ontwikkeling in het algemeen gaat de theorie daarna specifieker in op ontwikkeling in de wiskunde.

Een van de grondleggers van wiskundige denkniveaus is Pierre van Hiele, die zich vooral richtte op niveaus in de meetkunde. Vervolgens wordt gekeken naar theorieën die zich meer richten op algebra en analyse in de wiskunde en niet meer zozeer op de meetkunde, omdat de onderzoeksvraag niet meetkundig is.

⁷ Wilkins noemt een artikel van Beaton et al. uit 1996 waarin zij de betrouwbaarheid van het TIMMS hebben onderzocht.

Theorieën die zich meer richten op algebra zijn onder andere door Tall geformuleerd. Hij geeft de zwakke punten in de Van Hiele theorie aan op het gebied van algebra, en geeft een voor analyse en algebra meer geschikte theorie. Als laatste wordt de theorie van Richard Skemp behandeld die een voor dit onderzoek zeer geschikt simpel onderscheid maakt tussen twee fasen.

Piaget

Piaget raakte in de jaren '20 bekend door zijn theorie met betrekking tot de cognitieve ontwikkeling van kinderen.

Piaget [21] beschreef vier niveaus

- The Sensorimotor stage die op zichzelf ook weer is opgedeeld in een aantal niveaus en duurt vanaf geboorte tot ongeveer 2 jaar
- Preoperational stage: vanaf het tweede levensjaar tot ongeveer 7 jaar
- Concrete operational stage: van 7 tot ongeveer 12 jaar
- Formal operational stage: vanaf het twaalfde levensjaar

Het doorlopen van deze fasen is niet rechtlijnig. Een kind voert een actie uit, en krijgt daar op respons, bijvoorbeeld door ouders. Aan de hand van het 'antwoord' van de omgeving krijgt het kind inzichten, en leert het welk effecten bepaalde acties hebben op de omgeving. Dit wordt dan gegeneraliseerd op andere vlakken en het kind komt dan in een hoger cognitief niveau.

Deze theorie is erg algemeen en zeker niet specifiek ontwikkeld voor de ontwikkeling van een kind in de wiskunde. Sinds de jaren '20 dat Piaget zijn theorie lanceerde zijn er talloze wetenschappers, zoals Tall en Van Hiele, geweest die deze theorie verder hebben verfijnd en/of doorontwikkeld.

Van Hiele & Murray, een eerste overzicht van niveaus in aanpak (bij meetkunde)

Pierre van Hiele en Dina van Hiele-Geldoff zijn beide docent wiskunde in Nederland, en zij ontwikkelden in de jaren '50 een pedagogische theorie die vier kwalitatief benoembare niveaus onderscheid, te weten [12]:

1. grondniveau of nulniveau: visuele of intuïtieve herkenning
2. eerste niveau: beschrijvende herkenning (aan eigenschappen)
3. tweede niveau: informele deductie (zoeken van verbanden)
4. derde niveau: theoretische deductie (karakter van de eigenschappen)

Hoewel de theorie in eerste instantie voornamelijk bedoeld was voor het meetkunde onderwijs is zij later aangepast om geschikt te zijn voor alle vormen van wiskunde onderwijs. Desondanks is de theorie nog steeds het best bruikbaar voor meetkundevraagstukken en minder bruikbaar voor analytische vraagstukken zoals het probleem dat door de leerlingen is uitgewerkt, maar daarover later meer.

Het Mathematics Learning and Teaching Initiative (Malati) gebruikt de theorie van Van Hiele ook, maar voegt de laatste 2 niveaus samen zoals Murray [12] dat beschrijft in zijn paper "the van Hiele theory".

Het grondniveau van Van Hiele is dat de leerling heel intuïtief bezig is. Een object wordt als object herkend, maar het object zelf heeft geen specifieke eigenschappen (voorbeeld: een leerling herkent een kat, maar ziet het nog niet als een zoogdier met specifieke eigenschappen). Op het tweede niveau kijkt de leerling terug op het grondniveau. Het herkent eigenschappen van het object, en kan het object beschrijven in termen daarvan. Alles gaat nog empirisch en onderzoekend. Bij het derde niveau (en het vierde niveau samen als men Murray volgt) kan de leerling de eigenschappen die het net heeft beschreven verder uitwerken en hier verbanden

tussen leggen. Het kan logische stappen nemen, en de informatie ordenen zodat logische verbanden zichtbaar worden.

Murray benoemt dan de verschillende niveaus als volgt:

The Visual Level

The Analysis Level

The Ordering/ Informal Deduction Level

Zowel van Hiele als Murray geven beide aan dat de niveaus op volgorde doorlopen moeten worden. Oftewel een leerling kan zich niet in het derde niveau bevinden indien hij of zij het grondniveau en tweede niveau niet heeft doorlopen.

Dat laatste geldt voor alle wiskundige problemen, en niet alleen voor meetkundevraagstukken.

Bij het bekijken van de verschillende niveaus die Van Hiele noemt moet men er rekening mee houden dat deze niveaus niet zo discreet zijn als ze wellicht in eerste instantie lijken. Switchen tussen niveaus is dan ook mogelijk.

Bovendien is de taal van elk niveau kenmerkend voor dat niveau, en het is dan ook belangrijk dat de docent weet op welk niveau een leerling zich bevindt, zodat het taalgebruik daarop aangepast kan worden, waardoor de leerling deze taal zich eigen kan maken, en begeleid wordt in de 'tocht' naar een hoger niveau. Deze overgangen geschieden volgens een aantal fasen.

Dina van Hiele – Geldoff [22] geeft de fasen weer, waarin volgens haar de overgang geschiedt:

1. informatie: de leerling raakt bekend met het domein
2. (be)geleide oriëntatie: de leerling gaat op ontdekkingstocht mbv het materiaal
3. uitleg: de leerling ziet dat er verbanden zijn, en probeert deze in woorden uit te drukken
4. vrije oriëntatie: de leerling moet dmv opdrachten het domein verder ontdekken (de opdrachten moeten liefst op meer dan 1 manier op te lossen zijn)
5. integratie: de leerling reflecteert op datgene wat hij/zij heeft geleerd en heeft overzicht

Deze fasen zijn van groot belang voor de docent op pedagogisch gebied, omdat docent de leerling beter kan helpen door te onderscheiden wat de leerling nodig heeft voor de overgang naar het volgende niveau.

Vanuit diverse hoeken zijn er kritieken te horen op de beide theorieën. Men heeft o.a. kritiek op de hiërarchische structuur die in het niveau-model wordt gehanteerd door zowel Van Hiele als Murray. Bovendien geven verschillende onderzoekers, zoals David Tall aan dat de niveaus te algemeen zijn, en verfijnd zouden moeten worden. Deze verfijning is nodig opdat bijvoorbeeld systematiek en bewijs ook in een niveau vallen (dat is nu niet duidelijk het geval). Een direct gevolg hiervan is dat de theorie goed toepasbaar is in de meetkunde, maar lastiger (of misschien wel helemaal niet) toepasbaar in de algebra of de analytische wiskunde.

Daarbij geven een aantal wetenschappers tevens aan dat studenten soms op verschillende onderwerpen een ander niveau kunnen behalen. In dat geval is het handiger om het percentage antwoorden van de student op de verschillende niveaus weer te geven in plaats van deze student in een specifiek niveau 'te stoppen' [13, 23-

24]. Dit probleem ondervangt van Hiele inderdaad niet, waardoor bij de onderzochte leerlingen dan ook geen grondniveau vastgelegd kon worden. Ook bleek het onmogelijk om een vertaalslag te maken tussen de niveaus en fasen uit de genoemde modellen en de benodigde theorie voor het gegeven wiskundevraagstuk.

Desondanks is het model wel een algemeen opstapje naar de theorie van Tall voor de formele (theoretische) wiskunde.

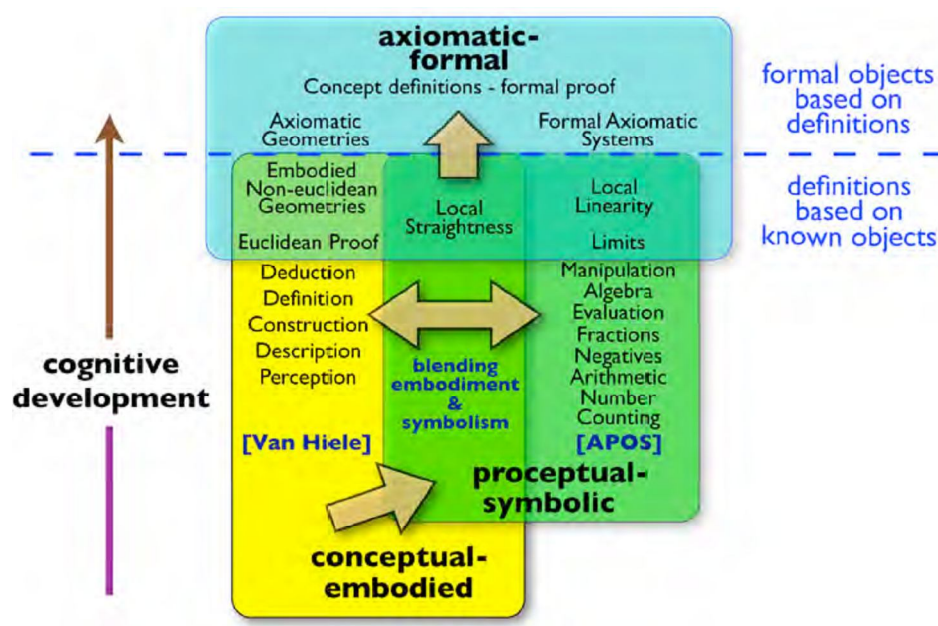
David Tall en de cognitieve ontwikkeling in 3 werelden

David Tall, momenteel emeritus hoogleraar aan de universiteit van Warwick, is in 1980 begonnen met lesgeven in wiskunde. Hij doceerde achter elkaar diverse klassen op verschillende niveaus. Die ervaring leidde tot een persoonlijke 'verplichting' om een theorie te vinden die beschrijft hoe een kind groeit in de wiskunde en al doende inzicht krijgt in een groter wordend spectrum als het ouder wordt.

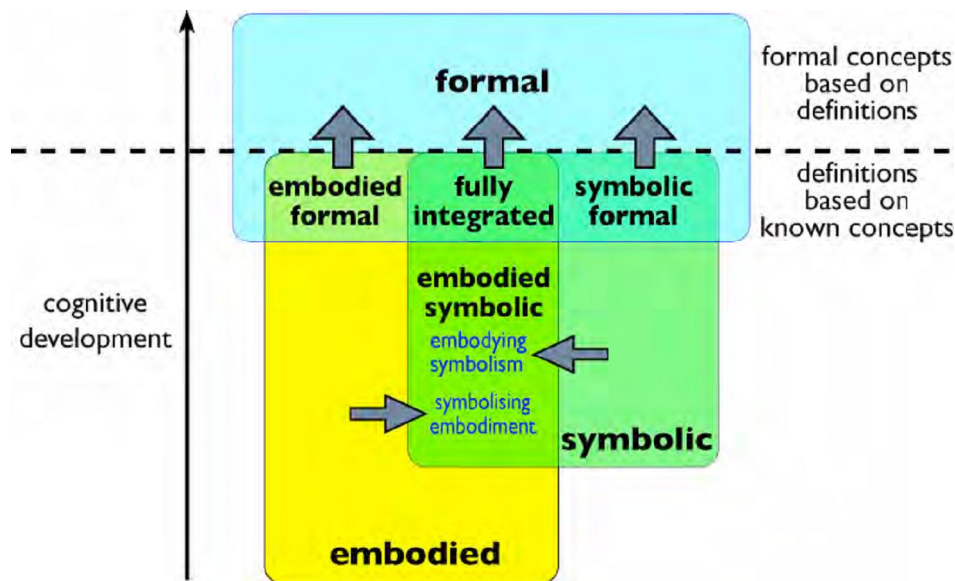
Samen met Eddie Gray [25] ontwikkelde Tall het begrip *procept* als een symbool dat zowel het proces als het concept tevoorschijn roept. Het is een soort wiskundige drie-eenheid geworden, omdat het begrip alle 3 begrippen in zich herbergt kort gezegd. Dit procept zorgt ervoor dat wiskundigen makkelijker tussen concepten en processen kunnen switchen.

Tall beschrijft 3 onderscheidbare ontwikkelingen in de 3 mentale werelden van de wiskundige cognitieve ontwikkeling [13]:

- (conceptual) embodiment (recognition leads to categorization)
- (conceptual) symbolism (repetition of actions leads through encapsulation to thinkable precepts)
- (axiomatic) formalism (using language for definition of axiomatic systems and deduction by formal proof)



Figuur 1: De 3 factoren geïllustreerd a.d.h.v. geselecteerde aspecten [13]



Figuur 2: cognitieve ontwikkeling door de 3 werelden v.d. wiskunde [13]

De schoolwiskunde doorloopt de verschillende stadia zoals Tall deze beschrijft. Kinderen leren omgaan met procedures, bijvoorbeeld door spelenderwijs objecten aan te wijzen. Zodra ze dit routineus kunnen, dan kan de leerling door naar de stap waarbij objecten gemanipuleerd kunnen worden.

De embodiment fase in de schoolwiskunde zorgt voor de zin van de verschillende contexten, terwijl de symbolism fase een mentale wereld van rekenkracht geeft. De overgang naar de formalism fase bevat het kunnen bewijzen van theorema's en het formuleren van formele definities.

Tall beschrijft bovendien hoe de genoemde fasen samenkomen bij bijvoorbeeld reële getallen, calculus en analyse.

Een mogelijkheid voor het onderzoek zou kunnen zijn om te bekijken welke stadia onderscheiden kunnen worden bij de leerlingen die het vraagstuk oplossen. Omdat de leerlingen slechts 10 minuten voor het betreffende vraagstuk kregen, en ze hardop denken niet gewend zijn is er niet voor gekozen om deze stadia te bekijken. Bovendien stelt Tall in zijn papers dat studenten de stadia niet hiërarchisch doorlopen, maar zoals figuur 1 en 2 ook is te zien op verschillende manieren kunnen doorlopen.

Dat laatste maakt het nog moeilijker om in kort tijdsbestek goed te oordelen over een hardopdenkproces van een leerling.

Om de door Tall hiervoor genoemde stadia te doorlopen maken leerlingen gebruik van de zogenaamde set-befores en met-befores.

Set befores gebruikt Tall [23] voor een geestelijke structuur waar men mee geboren wordt. Deze stellen ons in staat om bijvoorbeeld kleuren, beweging, gewicht en kleine hoeveelheden (2 dingen zijn meer dan 1) te onderscheiden van elkaar.

Tall onderscheidt een drietal fundamentele set-befores die ons lange-termijn-leren vormgeven en ervoor zorgen dat men wiskundig op een specifieke manier denkt [24].

-*herkenning* van patronen, gelijkenissen en verschillen

-*herhaling* van bepaalde reeksen van acties totdat ze een automatisme worden

-*taal* om de manier waarop men denkt te beschrijven en te verfijnen

Met-befores definieert Tall als 'een huidige geestelijke faciliteit gebaseerd op specifieke eerdere ervaringen van een individu'

Ook bij David Tall wordt duidelijk dat de taak van een docent in elk geval zou moeten behelzen dat hij of zij rekening houdt met datgene wat een student al weet. Er is inzicht nodig in de door hem beschreven met-befores.

Zodra een leerling zichzelf geen structuur kan aanleren, en dus alleen maar 'trucjes' leert wordt elke volgende stap in het proces (het doorgronden van de wiskunde) alleen maar moeilijker.

Bovendien kan een nieuw onderwerp moeilijkheden opleveren in de zin dat met-befores in sommige situaties niet opgaan, en een leerling dus geen gebruik meer kan maken van aangeleerde manieren. Dus ook al heeft een leerling de stof wel begrepen, en heeft hij/zij zichzelf een methode geleerd die in de meeste gevallen werkt, dan nog kan dat bij een nieuw onderwerp geen soelaas bieden, omdat het onderwerp niet geschikt is voor zo'n methode.

Een voorbeeld hiervan is kolomsgewijs aftrekken. Als een leerling de getallen onder elkaar zet en telkens de verschillen neemt per kolom dan werkt dat slechts in een beperkt deel van de gevallen. Bij $36 - 12$ gaat dat nog ($6 - 2 = 4$, en $3 - 1 = 2$, dus het antwoord moet zijn 24), maar $36 - 19$ werkt niet meer op deze manier (want $9 - 6 = 3$ en $3 - 1 = 2$, maar het antwoord is niet 23....)

Tall schetst in een ander paper [24] dat de Japanners een andere aanpak toejuichen. Zij proberen kinderen een aantal methodes aan te reiken waarbij het kind dan zelf de methode kiest die het meest efficiënt is.

Tall geeft aan dat er onderscheid gemaakt moet worden in datgene wat men doet (skills) en datgene wat men denkt (concepts). Hij gebruikt de tautologie "thinkable concept" om aan te geven dat de nadruk ligt op de manier waarop men denkt en de hulp die dat biedt bij het flexibel gebruiken van wiskundige symbolen als operaties die men gebruikt (doet) en concepten waar over men denkt.

De vier stadia die in de Japanse aanpak onderscheiden kunnen worden zijn door Tall als volgt gedefiniëerd:

- een enkele stap-voor-stap procedure om een taak te verrichten
- verschillende procedures om de meest efficiënte te vinden
- de realisatie dat de verschillende procedures andere stappen gebruiken maar hetzelfde resultaat oogsten
- het effect wordt bekeken als een concept zichzelf

Tall geeft hierin aan dat het langetermijnrenten meer is dan alleen maar doorbouwen op ervaring. Soms moeten oude ideeën die in een andere situatie werkten opnieuw bekeken worden en vervolgens aangepast om in een nieuwe situatie ook nog te functioneren (set-befores en met-befores, hiervoor al eerder genoemd).

Bovendien stelt Tall dat niet elke cultuur leren, en vooral wiskunde leren op dezelfde manier benadert. Zo merkt hij op dat in de Aziatische culturen de cijfers en getallen een regelmatige opbouw hebben in tegenstelling tot de westerse landen. In Japan is bijvoorbeeld 47: 4 maal tien plus 7, terwijl in westerse landen er een nieuw woord voor is bedacht (fortyseven in het Engels, en het nog veel ergere zevenenveertig in het Nederlands). Dat hindert het leren van getallen en plaatsbesef voor westerse leerlingen en studies tonen aan dat Aziatische kindertjes al veel eerder een beter idee hebben over plaats en getalwaarde dan de westerse kindertjes [24].

Bovendien blijkt dat de Japanse aanpak efficiënt is en bovendien de leerlingen aanmoedigt om zelf mee te doen, en iets te leren.

Toch geeft Tall aan dat ook de Japanse methode niet heilig is. Volgens hem leidt de methode vooral tot begrip over hoe een leerling het meest efficiënt iets kan doen, maar nog niet altijd tot verder liggende verbanden met andere begrippen. Een theorie die precies dat onderscheid maakt is de theorie van Richard Skemp.

Relationeel en instrumenteel begrip volgens Richard Skemp

Skemp [14] maakt onderscheid in wat hij noemt instrumenteel begrip en relationeel begrip.

Hij leidt zijn theorie in met een aantal voorbeelden die in het Frans faux amis genoemd worden. Dat zijn woorden die in twee talen (of meer) gebruikt worden, en qua schrijfwijze op elkaar lijken, maar die niet hetzelfde betekenen.

Twee mooie door mij gevonden voorbeelden daarvan zijn de Duitse woorden Dose en Kiste. Dat lijkt op het Nederlandse woord doos en kist, en beide worden gebruikt om iets in te stoppen of op te bergen. In het Nederlandse geval gaat het bij doos specifiek om een rechthoekig (meestal) kartonnen ding, terwijl de Duitse variant gaat om een cilindervormig (meestal) blikken ding (conservenblikje of –potje). Bij kist denken wij aan een rechthoekig specifiek houten ding, terwijl onze oosterburen een (plastic) bierkrat bedoelen. Deze faux amis kunnen voor veel problemen zorgen bij de communicatie in een vreemde taal, omdat het 'kennen' van een woord dan opeens toch niet genoeg blijkt te zijn.

Datzelfde geldt ook voor de wiskunde. Ook daar kan een woord verschillende betekenissen hebben afhankelijk van de context. Zo kan een docent een leerling vragen 'begrijp je het?', en de leerling die zich van geen kwaad bewust is zal wanneer de opgaven goed lijken uit te komen 'ja natuurlijk' antwoorden.

Desondanks bedoelen beide iets anders. De docent wil graag (en hoopt) dat de leerling ook de diepere betekenis van de sommen meekrijgt en dat de leerling ook verbanden kan leggen met andere vraagstukken. De leerling meent dat een goed antwoord automatisch inhoudt 'begrip', en juist daar gaat het al mis. Een goed antwoord kan immers gevonden zijn door trucjes uit te voeren, en daardoor niet leiden tot het begrip dat de docent beoogt.

Het instrumentele begrip dat Skemp onderscheidt is precies datgene wat Tall eerder al omschreef als het 'doen'. Het relationele begrip lijkt op het 'denken' dat Tall beschreef. Relationeel begrip betekent aldus Skemp dat er ook verbanden gelegd kunnen worden, en dat de diepere betekenis duidelijk is zodat makkelijker een vertaalslag gemaakt kan worden naar een nieuwe taak door te extrapoleren op datgene wat men al weet.

Overigens is instrumenteel begrip niet meteen per definitie slecht zolang het maar gepaard gaat met relationeel begrip. Als dat niet het geval is, dan is het slechts een truc om tijdelijk tot goede antwoorden te komen, maar gaat het fout zodra er geëxtrapoleerd moet worden naar iets nieuws (en dan kom je daar ook pas achter).

Melanie Reason [26] geeft in een artikel over het model van Skemp een aantal zinnige classificaties in tabelvorm:

Tabel 1:

Relationeel	Instrumenteel
1. leren bestaat uit het opbouwen van conceptuele structuren	1. er is geen bewustzijn van de algemene relaties
2. het doel is om een mentale plattegrond te creëren of uit te breiden	2. doel is antwoorden genereren of punten krijgen
3. fouten zijn onderdeel van het leren, bij een verkeerde 'afslag' kan de fout worden gecorrigeerd	3. fouten resulteren in verdwalen tenzij de stapjes precies teruggevolgd kunnen worden en dan het juiste pad weer opgezocht
4. op het moment dat de 'plattegrond' zich uitbreidt worden we ons bewust van de steeds groter wordende hoeveelheid mogelijkheden	4. leren is slechts een toenemend aantal vaste trucjes
5. werkt tegen geheugenbeperkingen, want je hebt je geheugen minder nodig	5. vertrouwt op uit het hoofd leren, en heeft een nieuwe methode nodig voor elke nieuwe klasse van problemen
6. genereert vertrouwen in het vinden van nieuwe oploswegen zonder hulp van buiten	6. leerling afhankelijk van begeleiding voor het leren van elke nieuwe oplosweg
7. intrinsiek bevredigend doel op zichzelf	7. extrinsieke beloning is nodig
8. leidt tot lol in wiskunde	8. leidt tot falen
9. is makkelijker te onthouden, maar moeilijker te leren	9. binnen de eigen context makkelijker te begrijpen

Deze classificaties maken het makkelijker om in een later stadium beoordelingscriteria op te stellen.

Melanie Reason, die deze classificaties beschrijft in het artikel, is docent wiskunde op een school in Bristol en geeft aan dat niet alleen de leerlingen een lange weg te gaan hadden om tot relationeel begrip te komen, maar dat zij als docent ook een lange weg te gaan had in het onderwijzen daarvan. Dat klinkt erg herkenbaar, want veel van de genoemde theoretici komen tot een dergelijke conclusie.

Zo geeft Anne van Streun bijvoorbeeld in zijn inaugurele rede aan dat het hebben van vakkennis niet altijd wil zeggen dat je dat ook in context kunt gebruiken. Ook hij gebruikt de term transfer die ook door Tall gebezigd wordt.

Heuristische oplosmethoden volgens van Streun

Van Streun [15] geeft in zijn rede een voorbeeld dat door de aanwezige luisteraars zou moeten worden opgelost. Hij schetst een ideale oplossingsroute waarin de probleemoplossers moeten monitoren nadat ze een heuristische probleemverkenning hebben gedaan. Monitoren is volgens Van Streun het even 'uittreden' en naar de eigen aanpak kijken. Dat zorgt er volgens hem voor dat de oplosser een plan kan maken, en 'zien' wat er gebeurt. De oplosser kan dan terugkijken, een plan maken, en reflecteren of terugblikken achteraf. Dat heet het ontwikkelen van metacognitieve kennis.

Van Streun beschrijft een viertal aspecten van denken die volgens hem nodig zijn om een goede probleemoplosser te worden.

Hij begint met *weten dat*, wat vooral inhoudt dat iemand kennis heeft van feiten, begrippen en reproductie daarvan. Vervolgens geeft hij aan dat men moet *weten hoe*. Dat *weten hoe* betekent dat men een probleem kan analyseren, bekijken welke aanpak nodig is (bijvoorbeeld met behulp van de SPA-methode⁸), en bijvoorbeeld formuleren van een onderzoeksvraag. De volgende stap in het proces is *weten waarom*. Hier onderscheidt een docent zich van de leerling, omdat de eerste wel dat abstractie niveau haalt en de leerling (nog) niet. Als laatste noemt Van Streun het *weten over weten*, de zogenaamde metacognitie. Dat is de bekwaamheid om het eigen inzicht en denken te beoordelen, zoals het net genoemde monitoren.

Aan de hand van deze 'benodigdheden' schetst Van Streun dat men denkt dat in het onderwijs bij het overdragen van kennis het resultaat is dat er precies uitkomt wat er is in gestopt. Dat is volgens hem niet zo, omdat datgene wat wordt aangeleerd in fragmenten in het geheugen terechtkomt.

Van Streun concludeert vrijwel hetzelfde als Melanie Reason in haar artikel over het model van Skemp, namelijk dat docenten een lange weg te gaan hebben met het aanleren van leerstof op een relationele manier. Als dat niet gebeurt hebben leerlingen een grote brij van stukjes en brokjes in hun hoofd waar geen enkel onderling verband tussen zit.

Geven docenten alleen les op een instrumentele manier (wat nu in Nederland vaak door tijdgebrek gebeurt door de manier waarop het onderwijs is opgebouwd [15]) dan zullen leerlingen een aversie ontwikkelen tegen het onderwijs, ze zien immers niet waarvoor ze het nodig hebben of wat de verbanden zijn. Er ontstaat geen transfer, zoals David Tall [13] dat noemde en de leerling kan het geleerde niet toepassen.

Van Streun verwijst in zijn rede ook naar het promotieonderzoek dat hij heeft gedaan naar heuristische wiskunde. In dit onderzoek werd gekeken of leerlingen beter dan nu het geval is problemen kunnen oplossen als ze gebruik maken van heuristische methoden.

In dit onderzoek [17] schetst hij de verschillen tussen de verschillende wiskundemethodes zoals die in het Nederlandse onderwijs gebruikelijk zijn. Hij noemt onder andere WEDT en HWO. WEDT staat voor 'wiskunde eerst, dan toepassen', HWO staat voor heuristisch wiskunde onderwijs. De eerste methode wordt veel gebruikt in klassiek opgebouwde schoolboeken en besteedt geen aandacht aan heuristische methoden, maar gaat snel en vaak over tot explicitering van wiskundige begrippen.

Uit het onderzoek bleek dat leerlingen in het heuristisch wiskundeonderwijs beter leren wiskundige problemen op te lossen. Van Streun wijt dat aan het feit dat leerlingen in dit type onderwijs beter in staat zijn met hun basiskennis analytische modellen op te stellen in een probleemsituatie.

Deze leerlingen hebben relationeel begrip in tegenstelling tot de WEDT-leerlingen die over het algemeen instrumenteel begrip aangeleerd krijgen, zoals dat via een aantal leerboeken in Nederland het geval is.

⁸ SPA staat voor *systematische probleem aanpak* en is ontwikkeld door het SLO in eerste instantie voor vakken als biologie. Het bestaat hieruit dat eerst in de voorbereidingsfase geanalyseerd wordt wat de vraag precies is. De vraag wordt genoteerd, de gegevens nodig voor de verwerking van het probleem (in sommige gevallen kernbetrekkingen genoemd) worden vervolgens ook genoteerd en eventueel met behulp van een tekening omgezet in een stappenplan om het probleem aan te pakken. De laatste stap is pas het invullen van de bekende gegevens en het berekenen van het antwoord. Meestal wordt deze stap dan nog gevolgd door een controle van het antwoord bijvoorbeeld door een schatting te maken van de orde grootte waarin het antwoord zich zou moeten bevinden en/of een logische redenering daarover op te zetten waarmee het gevonden antwoord kan worden gecontroleerd.

Van Streun noemt in dit verband Sigma en Getal en Ruimte als voorbeelden van boeken die vooral via de klassieke WEDT-methode werken. Aangezien het Assink lyceum werkt met Getal en Ruimte kan dat effect hebben op het relationele begrip van de leerlingen die aan het onderzoek meewerkten.

Methode

In dit hoofdstuk wordt de methode beschreven die is gebruikt bij het uitvoeren van het onderzoek. Als eerste wordt aangegeven hoe de deelnemers aan het onderzoek zijn geselecteerd, en daarna wordt het onderzoeksinstrument beschreven. Vervolgens worden meer bijzonderheden gegeven over de dataverzameling en de manier waarop de data is verkregen en verwerkt.

Deelnemers

Voor dit onderzoek zijn een vijftal leerlingen uit VWO5 gevraagd om hun medewerking. In dit vijftal zitten drie jongens en twee meisjes.

Leerlingen uit VWO5 hebben al voorkennis, en zoals al eerder aangegeven is het met behulp van de methode van Van Hiele lastig om een nulniveau te bepalen en te kijken of alle vijf leerlingen hetzelfde niveau hebben. Om die reden zijn de leerlingen uitgezocht op hun gemiddelde cijfer.

Het fijnst zou zijn twee jongens en twee meisjes die een gelijk gemiddelde cijfer hadden gescoord op wiskunde B om ze zo goed mogelijk met elkaar te kunnen vergelijken.

Vier precies gelijke gemiddelden bleek niet mogelijk, maar wel konden vier leerlingen gevonden worden met bijna gelijke gemiddelden (verschil niet groter dan 0,2 cijferpunt)

Eén van de leerlingen wilde niet meewerken aan het onderzoek. Daarom zijn uiteindelijk twee andere jongens gevraagd. De oorspronkelijke drie leerlingen waren al gevraagd en zij hadden hun medewerking al toegezegd. Uiteindelijk zijn twee jongens ter vervanging gevraagd omdat bij beide hun gemiddelde iets lager lag (0,4 en 0,5 cijferpunt) dan bij de andere al gevraagde leerlingen en het nuttig is om te kijken of dat nog verschil uitmaakt. Er zou dus een afwijking kunnen zitten bij deze twee respondenten. De verwachting daarover is dat als zij een afwijking hebben dat deze dan voor beide gelijk zou moeten zijn als het cijfer van invloed is. Statistisch gezien kan is dat niet hard te maken, maar het is in elk geval wel iets waarover nagedacht moet worden bij het beoordelen van de resultaten.

Materiaal en dataverzameling

Het vraagstuk dat de leerlingen kregen om op te lossen was de volgende:

$$f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2} \quad \text{Gevraagd: geef het bereik van } f$$

Het begrip bereik hadden de leerlingen al eerder mee gewerkt, maar niet recent. En alle afzonderlijke stappen die nodig zouden kunnen zijn om het vraagstuk op te lossen hadden de leerlingen ook al eens gehad, maar dit specifieke vraagstuk nog niet.

De afnemer en begeleider van het onderzoek had het volgende schema van mij gekregen:

korte uitleg:

-duur van de som = 10 minuten (tijdslimiet ivm vergelijkbaarheid en toepasbaarheid)

-hardop denken en uitwerken

-het is niet erg als het niet 'af' is (het gaat namelijk niet om het antwoord)

-na afloop van het hele gebeuren kunnen de leerlingen -als ze dat willen- te horen krijgen wat het doel is van het 'onderzoek'

Houding van de afnemer is neutraal.

Wat mag wel gezegd worden:

-wat ben je nu aan het doen?

-probeer hardop na te denken

-geef eens aan wat je wilt gaan doen

-hoe wil je het aanpakken?

-wat denk je dat je moet doen?

-...

-hoe ziet je antwoord eruit?

-etc

(dus hints zonder echt hints te geven, het nadenken moet vooral door de leerling gebeuren, en dus niet naar aanleiding van een tip van de begeleider)

Wat mag absoluut NIET gezegd worden:

-je zou kunnen doen (invullen van de stappen)

-uitleg geven over de begrippen of de vraag (als de leerling het niet begrijpt dan proberen de leerling het antwoord zelf te laten vinden door alleen te vragen hardop na te denken etc)

-niet aangeven dat het speciaal gaat om de manier van aanpak (dus verschil jongen vs meisje etc)

-‘welke stappen wil je nemen’ is misschien al teveel hint

Verwachtingen en hypothese

Tijdens de sessie krijgt een leerling geen aanwijzingen hoe het probleem opgelost kan of moet worden. Hoewel de leerlingen misschien op andere oplossingen komen is dit de verwachting over de vragen die leerlingen zich zullen stellen of de stappen die zij zullen ondernemen in het stappenplan voor het oplossen van het vraagstuk:

-wat is domein, wat is bereik

-de 2 functies afzonderlijk tekenen

-grafiek zelf tekenen

-aan de hand daarvan bekijken waar een maximum of minimum zit (of dat je limieten moet berekenen)

-maxima zien, en afgeleide berekenen

-afgeleide nul stellen

-de x-waarde invullen in functie/grafiek

-bereik geven a.d.h.v. gevonden waardes (m.b.v. tekening/formule)

Aan de hand van dit verwachte stappenplan zijn de beoordelingscriteria (bijlage 8) opgesteld die in een van de volgende paragrafen zullen worden toegelicht.

Aan de hand van de onderzoeksvraag - *welke zijn de genderverschillen in aanpak bij wiskunde B 5 VWO-leerlingen van een wiskundig probleem in de analyse-* ontstond de verwachting dat er genderverschillen zouden zijn.

De verwachting was dat de meisjes het probleem systematischer zouden aanpakken (bijvoorbeeld de SPA-methode zoals van Streun die noemt [15-16] en meer het stappenplan dat ze van plan zijn te volgen op zouden schrijven en/of een tekening maken. Van de jongens werd verwacht dat ze direct het probleem bij de kop zouden pakken, geen tekening zouden maken, en dat ze veel meer een overzicht in hun hoofd zouden hebben in plaats van dat overzicht op papier te zetten.

De verwachting is in elk geval genderverschillen te zien in aanpak.

Criteria

Om de hardopdenksessie beter te kunnen beoordelen is gebruik gemaakt van het OSAEV-model van Van Dormolen. Van Dormolen schetst in zijn boek 'Didactiek van de wiskunde' [27] dat het proces van bijvoorbeeld het oplossen van een vraagstuk opgedeeld kan worden in vijf fasen, te weten oriënteren, sorteren, abstraheren, expliciteren en verwerken. Vijf verschillende fasen onderscheiden voor een tien minuten durend onderzoek is wat vergaand. Daarom is er gekozen om het onderscheid slechts grofweg maken in enerzijds oriënteren, sorteren en abstraheren (eventueel nog expliciteren) en anderszijds expliciteren en verwerken (hierover meer in het volgende hoofdstuk).

Van Dormolen geeft in datzelfde boek ook nog een aantal tips over het lesgeven waar later nog op teruggekomen wordt bij de discussie.

Aannames

- zonder toelichting is ook een 'zinnig' antwoord *instrumenteel*
- een in eerste instantie 'onzinnig' antwoord waaruit blijkt dat de leerling heeft nagedacht over de relatie tussen begrippen en bijvoorbeeld een plan in het hoofd heeft over hoe iets aan te pakken is *relationeel*
- losse kreten en/of opmerkingen kunnen niet op instrumenteel of relationeel beoordeeld worden

Procedure

De leerlingen doorlopen tijdens een hardopdenksessie het oplosproces. Dit proces is opgenomen met camera en voicerecorder en daarna uitgetypt (te vinden in de bijlage 1 t/m 5 achterin).

Aan de hand van de theorie van Skemp worden later deze sessies geanalyseerd.

Voor beoordelen van de hardopdenksessies wordt gebruik gemaakt van de twee soorten begrip die Skemp [14] onderscheid, te weten instrumenteel en relationeel begrip.

Omdat de leerlingen tijdens het onderzoek hardop moeten 'denken' zullen ook veel antwoorden niet direct in deze twee categorieën passen. De aannames hiervoor zijn om de sessies zo goed mogelijk te kunnen beoordelen. De beoordelingscriteria zijn een aantal keren aangepast om deze te verfijnen en strenger te maken.

Een tweetal niet-wiskunde collega's zijn gevraagd om met de beoordelingscriteria de hardopdenksessies te beoordelen. Vanwege het feit dat beiden niks te maken hebben met wiskunde en dus puur af moeten gaan op datgene wat er op papier is gezet, zijn zij daarvoor uitgekozen. Aan de 'fouten' die zijn maken en/of de regels die ze niet konden beoordelen was te zien waar eventueel nog iets bijgeschaafd moest worden aan de criteria.

De criteria zijn aan de hand daarvan aangepast en bijgesteld en vervolgens heeft nogmaals een niet-wiskundige de sessies beoordeeld.

Als laatste zijn samen met een tweetal wiskunde-collega's nogmaals alle regels beoordeeld en gediscussieerd over de overgebleven verschilpunten.

Analyse

Aan de hand van de door mij opgestelde criteria konden de hardopdenksessies geanalyseerd worden met betrekking tot de hoofdvraag.

De hoofdvraag is *welke zijn de genderverschillen in aanpak bij wiskunde B 5 VWO-leerlingen van een wiskundig probleem in de analyse.*

De uitgetypte sessies zijn in een excelfile gezet en door verschillende mensen beoordeeld op relationeel en instrumenteel begrip.

Een overzicht van de resultaten in de vorm van een excelsheet is te vinden in bijlage 1 t/m 5.

Aan de hand van de hoeveelheid zinnen/regels die een leerling heeft gebruikt tijdens de sessie is het percentage van beide begripsoorten uitgerekend, zoals te zien in de volgende tabel:

Tabel 2:

leerling	1	2	3	4	5
aantal zinnen/regels	83	47	46	43	44
aantal regels door leerling	66	33	27	27	31
aantal keren niet van toepassing (nvt)	30	12	14	12	17
aantal keren relationeel begrip (r)	12	5	3	9	9
aantal keren instrumenteel begrip (i)	24	11	10	6	5
percentage r	18	15	11	33	29
percentage i	36	33	37	22	16
r/i	0,50	0,45	0,30	1,50	1,80
stiltetijd	18	100	195	154	53
schrijftijd	49	60	47	219	176
verhouding stilte/schrijf	0,37	1,67	4,15	0,7	0,3

Het aantal regels/zinnen zijn de hoeveelheden die gezegd zijn tijdens de hardopdenksessie inclusief stiltes en opmerkingen of vragen van de begeleider.

De rij eronder (aantal regels door leerling) is de hoeveelheid zinnen die door de leerling zelf zijn gezegd.

De drie regels die daarop volgen, te beginnen met 'aantal keren nvt' is het aantal keren dat door de beoordelaars werd aangegeven dat een bepaalde zin respectievelijk niet van toepassing, relationeel begrip of instrumenteel begrip inhield. De percentages voor relationeel en instrumenteel begrip zijn genomen ten opzichte van de hoeveelheid zinnen die door de leerling zelf zijn gezegd.

Omdat de stiltes en het schrijven niet voor iedere leerling even lang duurden zijn deze in tijd weergegeven, zodat zichtbaar is hoelang de leerling na heeft gedacht of heeft geschreven (in de uitgeschreven sessies is ook te zien per stilte hoe lang deze duurden, zie bijlage 1 t/m 5) in plaats van de hoeveelheid keren dat er een stilte viel.

Resultaten

Tabel 3:

	jongens	meisjes	opmerkingen
zinnen/regels	30	29	Eén jongen had ongeveer twee keer zoveel regels/zinnen als alle anderen (deze in het gemiddelde niet meegenomen). De totale werktijd was ongeveer evenveel.
relationeel	15%	31%	
instrumenteel	35%	19%	
r/i	0,42	1,65	
stiltetijd	148s	104s	Eén jongen had 18 seconden stiltetijd. Deze is niet meegenomen in dit gemiddelde
schrijftijd	55s	198s	Dezelfde jongen niet meegenomen in de schrijftijd omdat hij praten en schrijven tegelijk kan
stille/schrijf	2,91	0,5	Kanttekening: leerling 1 niet meegenomen, maar er is ook een complicatie bij leerling 3

In de tabel 2 uit het vorige hoofdstuk waren de percentage en verhoudingen te zien per leerling. Omdat de hoofdvraag was of er genderverschillen zijn, zijn hier de resultaten gepresenteerd in een tabel verdeeld over jongens en meisjes.

De getallen zijn gemiddeldes over respectievelijk de jongens en de meisjes. Bij een aantal getallen zijn niet alle leerlingen meegenomen, omdat er met één van de leerlingen iets aan de hand is. Zo is bij het aantal zinnen of regels in de eerste rij van de tabel de eerste leerling niet meegenomen in het gemiddelde. Deze leerling was beter in het praten tijdens het schrijven dan de anderen. Dat betekent dat de hoeveelheid zinnen in deze sessie twee keer zo groot is als gemiddeld voor de jongens (66 zinnen tegenover 33 en 27 van de andere 2 jongens). Hierdoor stijgt de hoeveelheid zinnen die relationeel of instrumenteel begrip inhouden ook meer, maar omdat deze getallen uitgedrukt zijn in een percentage ten opzichte van het totaal aantal door de leerling gesproken zinnen zie je dat verschil niet terug, en kunnen de percentages dus wel over alle drie jongens gemiddeld worden (regel twee en drie in de tabel). Hetzelfde geldt voor de verhouding tussen het aantal keren relationeel begrip en instrumenteel begrip. In deze verhouding zijn het aantal keren relationeel en het aantal keren instrumenteel begrip op elkaar gedeeld. Dat leerling 1 meer r's en i's heeft staan dan de anderen is niet meer van belang bij de verhouding. De getallen in regel vier van de tabel zijn de gemiddeldes over alle jongens en alle meisjes. Regel vijf van de tabel geeft de gemiddelde stiltetijd en regel zes de gemiddelde schrijftijd. Leerling 1 schreef ook tijdens het praten, terwijl de andere vier leerlingen dat niet deden. Dit is goed te zien in de visuele voorstelling van de geluidsopnames die te vinden is in bijlage 9. Om de getallen eerlijk met elkaar te kunnen vergelijken zijn de tijden van leerling 1 dus niet meegenomen in beide regels uit de tabel. Ook bij de laatste regel van de tabel is leerling 1 niet meegenomen, maar de vraag is of deze getallen wel iets zeggen over de genderverschillen. De reden waarom komt in het hoofdstuk Discussie aan bod.

Conclusie

Naar aanleiding van de onderzoeksresultaten kan worden bevestigd dat er genderverschillen zijn tussen VWO wiskunde B leerlingen bij het oplossen van een analytische vraagstuk.

De verhouding relationeel en instrumenteel begrip ligt bij meisjes in het voordeel van het relationele, en bij de jongens in het voordeel van het instrumentele.

Hierbij moet wel de kritische kanttekening geplaatst worden dat de meisjes beide een hoger gemiddelde hadden dan in elk geval twee van de jongens.

De derde jongen had een afwijkende score en dat zou kunnen liggen aan het feit dat de afnemer en begeleider zijn vader is (kinderen reageren anders op familie dan op een buitenstaander, vergelijk de boze reactie van leerling 3 met andere reacties van de andere leerlingen op vrijwel dezelfde vraag, zie bijlage 3).

Discussie

De keuzes die gemaakt zijn in dit onderzoek kunnen hebben geleid tot een incorrecte conclusie. Dat is dan ook de reden dat deze keuzes en eventuele andere bijkomstigheden in het onderzoek hier kritisch bekeken worden.

Statistische significantie

Het onderzoek is uitgevoerd op vijf leerlingen, drie jongens en twee meisjes. Dit aantal ligt zo laag, dat er van enige significantie geen sprake kan zijn.

De meisjes en jongens zijn bovendien uitgezocht op hun gemiddelde cijfer, maar niet op leerstijl. Dat kan betekenen dat voor de ene leerling hardop denken een uitkomst is, maar voor de andere leerling juist helemaal niet. Daarbij komt dat ook het feit dat er een bepaalde verwachting bestond over het opschrijven van (delen van) de opdracht, en ook dat hangt soms af van de leerstijl van de leerling.

Bovendien heeft de hoeveelheid leerlingen ook invloed op de reproduceerbaarheid. Zouden dezelfde leerlingen bij een ander, maar vergelijkbaar, onderzoek dezelfde uitslag laten zien? Of zouden drie andere jongens en twee andere meisjes met een onderling vergelijkbaar gemiddelde (van bijvoorbeeld 6) ook een dergelijke uitslag laten zien? Het onderzoek zou moeten worden uitgebreid naar veel meer leerlingen van hetzelfde niveau. Vijf leerlingen is te weinig om hier iets over te kunnen zeggen.

Lesmethode en docent

In de aangehaalde theorie werd Anne van Streun genoemd die in onder andere zijn inaugurele rede aangeeft dat er weinig aandacht wordt besteed aan heuristiek [15-17]. Ook geeft hij aan dat de lesmethode die het Assink gebruikt via de klassieke WEDT-methode werkt, wat van invloed kan zijn op het begrip van de leerlingen die les krijgen uit deze methode. Hierbij is het wel zo dat alle leerlingen uit hetzelfde boek les hebben gehad, en dus ook dezelfde mate van niet-relationeel begrip voorgeschoteld hebben gekregen.

Zoals in verschillende theorieën [18, 26, 28-29] aangegeven is de docent van grote invloed op de mate waarin een leerling al dan niet relationeel begrip aangeleerd krijgt.

Alle vijf leerlingen hebben in het jaar van het onderzoek les gehad van dezelfde docent, maar het jaar ervoor niet. Het kan dus betekenen dat de leerlingen die

bijvoorbeeld van een meer ervaren docent les hebben gehad misschien eerder tot relationeel begrip zouden kunnen komen aan de hand van hun opgedane kennis. Ook Van Dormolen [27] sluit hierop aan met zijn opmerking dat docenten soms (onbewust) verhinderen dat leerlingen een bepaald abstractieniveau halen, door irrelevantie informatie toe te voegen aan uitleg, waardoor er ruis ontstaat. Een fenomeen, dat jonge docenten in hun enthousiasme makkelijk zou kunnen overkomen.

In dit geval zou er dan verschil te zien moeten zijn tussen de beide meisjes en tussen de jongens die in het jaar voorafgaand aan het onderzoek een verschillende leraar hadden voor het vak wiskunde B. Uit de onderzoeksresultaten is niet af te lezen of de verschillen die er zijn ook daadwerkelijk het gevolg zijn van deze factor.

Mulryan [30] geeft in haar onderzoek aan dat het werken in kleinere groepen in plaats van klassikaal bovendien van positieve invloed is op het begrip van de leerlingen. Een klein onderzoek van Madrid [31] geeft hetzelfde resultaat in een onderzoek waarbij de standaard leraar-voor-de-klas-methode vergeleken werd met werken in kleinere groepjes. Hierbij werd nog wel verschil gevonden tussen kleinere groepjes die een soort competitief verband hadden, en kleinere groepjes waarbij de leerlingen werden gestimuleerd om elkaar te helpen. De prestaties van de laatste groep waren het best.

Zelfs hele kleine groepen waarbij leerlingen gestimuleerd worden om elkaar te helpen leveren een verhoging van het wiskunde-niveau op aldus Pijls [32]. Dit onderzoek is conform datgene wat er in diverse didactieken te leren is over horen, zien en uitleggen (men onthoudt 10% van wat men leest etc.⁹), namelijk dat datgene wat je zelf uitlegt het best onthouden wordt.

Ook Tall [24] bevestigt in zijn artikel over verschillen tussen de manier waarop men in het Westen omgaat met de lesstof en de manier waarop men dat in bijvoorbeeld Japan doet in kleinere groepjes, dat het werken in kleinere groepjes motiverender werkt en leidt tot betere prestaties.

Verdere verschillen tussen westers en Aziatisch worden ook door Uttal [34] genoemd, maar daar wordt verderop nog op teruggekomen.

Verschillen tussen docenten zijn logisch, maar soms ervaren leerlingen een docent verschillend. Dit heeft volgens Schiff [35] te maken met dat jongens en meisjes een andere perceptie hebben van hun docent. De factoren waarop ze beoordelen zijn anders en jongens ervaren hun docenten vaker als antagonistisch.

Andersom reageren docenten ook anders op jongens dan op meisjes volgens het onderzoek van Gore [36]. Zij laat zien aan de hand van de tijd die een docent aan een leerling geeft om tot een antwoord te komen dat jongens meer tijd krijgen dan meisjes. Bovendien zijn docenten vaak geneigd om bij meisjes direct het eindantwoord te geven in plaats van een hint tot het antwoord zoals bij jongens het geval is.

De meeste docenten zijn zich niet bewust van dit gedrag. Artikelen uit de Klasse (een blad van het Belgische ministerie van onderwijs) [37-41] onderschrijven dat door aan te geven dat in de klas ook bij het geven van voorbeelden of aanspreken al

⁹ De percentages komen uit de zogenaamde leerpiramide, waarbij voor de percentages naar totaal verschillende bronnen wordt verwezen (in totaal zeker tien). Waar de ene auteur bijvoorbeeld refereert aan het boek 'How the brain learns' van David Sousa, verwijst een ander naar 'Audio-visual methods in teaching' van Edgar Dale. Nog gekker is dat geen van die bronnen het onderzoek beschrijft dat aan de piramide ten grondslag moet liggen. Wel is er een Amerikaanse organisatie die claimt het originele onderzoek te hebben uitgevoerd maar de onderzoeksgegevens te zijn kwijtgeraakt [33] R. v. d. Sande. 29-6). Mensen onthouden 10% van wat ze lezen...? Available: <http://knol.google.com/k/rutger-van-de-sande/mensen-onthouden-10-van-wat-ze-lezen/3bfsim0q0rvrq/2#>

onderscheid gemaakt wordt tussen jongens en meisjes. Een veelgehoorde stereotype is 'jij bent een kletstante' tegen een jongen, waarbij de vrouwelijke vorm meteen een negatieve lading krijgt. Terwijl een opmerking als 'Wiens vader werkt er op het internet' een positieve lading geeft voor de mannelijke vorm. Hierdoor voelen meisjes zich emotioneel buitenstaanders, en zoals verderop nog aan de orde komt, is dat van invloed op hun prestaties.

Niet alleen de docent en diens lesmethode zijn van invloed op prestaties van leerlingen, maar ook de grootte van de groep of klas, en hoe in de groep met elkaar omgegaan wordt (competitief of coöperatief). Bovendien ervaren jongens en meisjes de docenten verschillend en andersom reageren docenten anders op meisjes dan op jongens.

Grafische rekenmachine (GR)

Tijdens het onderzoek gaven verschillende leerlingen aan graag de grafische rekenmachine te gebruiken om te zien hoe een grafiek 'eruit ziet'. In het curriculum van wiskunde B ligt besloten dat de grafische rekenmachine een belangrijke rol speelt, en leerlingen zijn na de vierde klas (waarin een aantal proefwerken zonder rekenmachine gemaakt moeten worden) niet meer gewend om iets zonder rekenmachine te kunnen. Dit kan van invloed zijn op het denk- en oplosproces.

Wanneer een leerling altijd gebruik kan maken van de rekenmachine en dan opeens bij dit onderzoek niet meer, dan heeft dat zeker invloed op de resultaten.

Desondanks is terug te zien in de uitgeschreven sessies dat leerlingen ondanks het niet kunnen gebruiken van de grafische rekenmachine wel voor zichzelf een overzicht of plan hebben gecreëerd (waar de GR al dan niet een plekje in heeft). Het is dus niet zo dat het gebruiken van de grafische rekenmachine het maken van een plan in de weg staat, maar in de praktijk grijpen leerlingen wel (te?) snel naar hun rekenmachine waarmee ze dan in het wilde weg aan het rekenen slaan. Vergelijken van proefwerken zonder en met rekenmachine leert ook dat leerlingen zonder rekenmachine veel meer van te voren een idee proberen te hebben over wat ze moeten doen (en met rekenmachine dus juist het tegenovergestelde) en ook meer en beter opschrijven wat ze doen of van plan zijn te gaan doen.

Tijdens het onderzoek gebeurt het een aantal keer dat leerlingen om bevestiging vragen. Dat is een punt waarbij de rekenmachine soms ook een rol speelt. De GR geeft soms een bepaalde mate van vertrouwen. Ter vergelijking: iemand die een muziekstuk eigenlijk zonder papier zou kunnen spelen, maar 'voor de zekerheid' toch graag het papier voor zich heeft omdat dat vertrouwen geeft of iets 'om op terug te vallen'. Dat kan betekenen dat de leerlingen misschien onnodig naar hun rekenmachine verlangen vanwege het veilige gevoel, en niet omdat ze het apparaat ook daadwerkelijk nodig hebben.

Afhankelijk van de manier waarop de leerling er naar vraagt is dat van invloed op de uitslag van dit onderzoek (zie bijlage 8: beoordelingscriteria)

Motivatie en gevoel

In de inleiding van het onderzoek stelt de begeleider de leerlingen op hun gemak, en vertelt hij dat het onderzoek vooral gaat om het oplosproces en niet zozeer om de oplossing zelf. Een dergelijke opmerking kan volgens het onderzoek van Thoman [8] (zie hoofdstuk Theoretisch kader onder typering van het oplossen van wiskundige problemen in de analyse) tot gevolg hebben dat vrouwen beter presteren, omdat

negatieve verschillen, veroorzaakt door stereotype ideeën door dit soort opmerkingen, wegvallen.

De verschillen die in ons onderzoek zijn gevonden zijn daardoor wellicht te wijten aan de manier waarop het vraagstuk werd ingeleid. Verder onderzoek is nodig om te onderzoeken of de inleiding inderdaad van invloed is op de prestaties van de meisjes bij een dergelijk onderzoek.

Niet alleen meisjes kunnen bepaalde (positieve) motivatie halen uit een opmerking, maar zowel jongens als meisjes hebben in het onderzoek van Hannula [42] laten zien dat in een klas- of onderzoekssituatie ze niet altijd gemotiveerd zijn om te werken aan wiskunde. Dat kan veel oorzaken hebben zoals trek in eten (les voor de pauze), verdriet (omdat het uit is met vriend(innet)je) en meer van dergelijke externe factoren. Bij een onderzoek kan het dus van belang zijn om te zorgen dat deze externe factoren het onderzoek niet of nauwelijks beïnvloeden. Dat is lastig, want zoals Hannula ook aangeeft is motivatie slecht meetbaar.

Dan geeft Nye [43] in haar onderzoek aan dat minderheden die in normale klassen slechter presteren door gevoelens van onbehagen, onbegrip of andere externe factoren baat kunnen hebben bij kleinere klassen. Dit wordt onderschreven door verschillende artikelen in Klasse [37-41]. In deze artikelen wordt aangegeven hoe een docent beter kan inspringen op verschillen tussen jongens en meisjes, maar vooral komt hieruit naar voren dat meisjes en met name meisjes uit een minderheidsklasse (migrantengezinnen) heel vatbaar zijn voor negatieve verwachtingen van hun omgeving.

In dezelfde artikelen wordt geschetst dat jongens baat hebben bij de (meestal) positieve leerhouding van de meisjes, maar dat de meisjes nogal eens ten onder gaan in een gemengde klas. Ook Van de Gaer [29] schetst iets dergelijks in haar onderzoek voor het Belgische ministerie van onderwijs. Verwachtingen van de omgeving (ouders en docent) zijn wel degelijk van invloed op de prestaties van meisjes in de wiskunde.

Dan is er ook nog een punt wat in dit geval geen invloed heeft op het door ons uitgevoerde onderzoek, maar waar wel rekening mee gehouden moet worden als er uitgebreide onderzoeken in verschillende landen zouden plaatsvinden. Uttal [34] vond in zijn onderzoek dat er verschil is tussen de manier waarop ouders omgaan met hun kinderen in verschillende culturen, en dat heeft effect op de manier waarop kinderen al dan niet gemotiveerd zijn voor het doen of leren van wiskunde.

In het Westen gelooft men dat talent aangeboren is in tegenstelling tot Azië, waar men juist gelooft dat je alles kunt bereiken als je er maar hard genoeg voor werkt. Dit heeft tot gevolg dat kinderen in het westen minder moeite en tijd stoppen in wiskunde dan hun leeftijdsgenoten in Azië.

Uit ditzelfde onderzoek blijkt verder dat dat niet zo makkelijk te veranderen is, maar dat een effectieve leermethode van de docent al een stap in de goede richting is, omdat de docent, zoals hier eerder al is aangegeven, grote invloed heeft op de leerlingen.

Een punt dat ook in een artikel over motivatie van studenten genoemd wordt is de zogenaamde 'struggle' [44]. Een vraagstuk moet zo uitdagend zijn dat leerlingen het antwoord niet een, twee, drie zien, maar ook niet zo moeilijk dat het antwoord nooit gevonden kan worden, ook niet met heel veel inzet. Wanneer men niet verder komt met een opgave en deze dus klaarblijkelijk te moeilijk is dan werkt dat demotiverend voor het verdere verloop. Hierbij is wel verschil tussen de leerlingen zichtbaar, waarbij het niveau van de leerling bepalend is voor de mate van 'struggle'. In elk geval is duidelijk dat zonder enige mate van 'struggle' het niveau van de leerling niet

stijgt. Dat lijkt op wat Trautwein [45] in 2002 al vond over huiswerk, waarbij teveel huiswerk demotiverend werkt, maar te weinig ook niet motiveert. De juiste hoeveelheid vinden is wat dat betreft dan weer een punt waarbij de docent zijn of haar invloed en ervaring zou moeten laten zien, omdat deze hoeveelheden van persoon tot persoon en niveau tot niveau verschillen.

Nieuwsgierigheid of intrinsieke motivatie is in dit onderzoek kort bekeken door de laatste vraag van het onderzoek. Hier stelde de begeleider de vraag 'waarom deed je mee aan het onderzoek?'. Geen enkele leerling gaf aan intrinsieke motivatie of nieuwsgierigheid naar het onderzoek zelf te hebben. De leerlingen gaven allemaal aan dat ze het deden omdat de onderzoekster dat had gevraagd (die zat er zelf bij, dus in hoeverre dat invloed heeft gehad op het antwoord is moeilijk te zeggen). Geen van de leerlingen gaf het door de begeleider verwachtte antwoord dat ze geen nee durfden te zeggen of dat ze bang waren dat de onderzoekster (ook hun docente) negatief beïnvloed zou worden door een afwijzing. Maar omdat de onderzoekster zelf aanwezig was, lijkt dit antwoord ook niet voor de hand liggend.

Voor het onderzoek is het in elk geval nodig om te beseffen dat er wellicht anders gereageerd zou worden wanneer de onderzoeker een voor de leerling onbekende is. Zo is er ook een relatie tussen leerling 3 en de begeleider van het onderzoek, zijn vader. Deze leerling werd boos tijdens de sessie wat een gevolg zou kunnen zijn van deze relatie. Uit ervaringen van anderen is bekend dat mensen anders reageren op bekenden en/of familie dan op volkomen onbekenden.

Het feit dat bij de resultaten uit het onderzoek in de verhouding tussen schrijftijd en stiltetijd ook de tijd van leerling 3 is verwerkt kan dus voor een vertekening van de resultaten zorgen. Of dat ook daadwerkelijk zo is zou nader onderzocht moeten worden.

Slechts één van de leerlingen gaf na afloop van het onderzoek aan dat hij graag wilde weten hoe hij de som op had moeten lossen. De rest interesseerde dat niet of heeft er niet aan gedacht om dat te vragen. Voor zover met één vraag daarover beoordeelbaar is of leerlingen voor dit onderzoek intrinsiek gemotiveerd waren lijkt dat niet het geval.

Dan zijn er nog een aantal opmerkelijkheden die misschien geen invloed hebben op het resultaat, maar het wel waard zijn om te noemen.

Zo dachten alle beoordelaars dat leerling 1 het er 'slecht' vanaf had gebracht. Pas nadat ze de andere vier leerlingen ook hadden beoordeeld gaven de beoordelaars aan dat ze vonden dat leerling 1 'het zo slecht nog niet' had gedaan.

Ook opmerkelijk is dat geen van de leerlingen de modulusstrepen in de functie heeft zien staan, of misschien wel heeft zien staan, maar daar geen opmerking over gemaakt of er iets mee gedaan heeft. Een verklaring hiervoor zou kunnen zijn dat het meer dan een jaar geleden is dat modulusfuncties werden behandeld in de lesmethode. Het ligt daarom niet meer vers in het geheugen. Bovendien kan dan de camera ook nog eens gezorgd hebben voor een zekere schuwheid, het niet hardop willen uitspreken van onkunde of onbegrip.

Aanbevelingen

Naar aanleiding van het onderzoek en de daaruit voortvloeiende resultaten kunnen een aantal aanbevelingen worden gedaan.

Zoals in de vorige paragraaf al werd aangegeven is vijf leerlingen veel te weinig voor statistisch verantwoord onderzoek. Vervolgonderzoek zou in elk geval meer leerlingen als proefpersoon moeten omvatten.

Daarbij komt dat factoren die verder van invloed kunnen zijn als lesmethode (docent, boek, etc), leerstijl van de leerling, cijfer van de leerling en dergelijke ook minder invloed hebben wanneer de aantallen proefpersonen groter zijn.

Bovendien verdient het de aanbeveling dat leerlingen die meewerken aan een dergelijk onderzoek waarbij het proces gevolgd wordt in een hardopdenksessie dit ook al eens eerder geoefend moeten hebben. Dat voorkomt grote stiltes, en verschillen tussen leerlingen die kunnen schrijven en hardop denken tegelijk en leerlingen die dat niet kunnen.

Ook verdient het de aanbeveling dat familie van de onderzoeker of afnemer niet meedoet aan het onderzoek om beïnvloeding van de resultaten daardoor te voorkomen.

Een mogelijk vervolgonderzoek zou ook kunnen kijken naar de mate waarin er naar de grafische rekenmachine gegrepen wordt door jongens of meisjes.

En als laatste zou er gekeken moeten worden naar motivationele invloeden bijvoorbeeld of bepaalde zinnen in het inleidende deel van de opdracht ook invloed hebben op de prestaties van de meisjes, vergelijkbaar met die van Thoman [8].

Literatuurlijst

- [1] M. Vermeulen, "Oorlog aan de jongens," in *Volkscrant*, ed, 2003.
- [2] M. Martin, *et al.*, "TIMSS 2007 international mathematics report: Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades," 2007.
- [3] H. Schofield, "Sex, grade level, and the relationship between mathematics attitude and achievement in children," *The Journal of Educational Research*, vol. 75, pp. 280-284, 1982.
- [4] D. Sprigler and J. Alsup, "An Analysis of Gender and the Mathematical Reasoning Ability Sub-Skill of Analysis-Synthesis," *Education*, vol. 123, pp. 763-770, 2003.
- [5] J. Wimer, *et al.*, "Higher Order Teacher Questioning of Boys and Girls in Elementary Mathematics Classrooms," *The Journal of Educational Research*, vol. 95, pp. 84-92, 2001.
- [6] B. Kerr, *education*, vol. 108, pp. 123 - 124.
- [7] S. Skaalvik and E. Skaalvik, "Gender Differences in Math and Verbal Self-Concept, Performance Expectations, and Motivation," *Sex Roles*, vol. 50, pp. 241-252, 2004.
- [8] D. Thoman, *et al.*, "Variations of Gender-math Stereotype Content Affect Women's Vulnerability to Stereotype Threat," *Sex Roles*, vol. 58, pp. 702-712, 2008.
- [9] J. Wilkins, "Mathematics and science self-concept: An international investigation," *The Journal of Experimental Education*, vol. 72, pp. 331-346, 2004.
- [10] M. Beller and N. Gafni, "Can Item Format (Multiple Choice vs. Open-Ended) Account for Gender Differences in Mathematics Achievement?," *Sex Roles*, vol. 42, pp. 1-21, 2000.
- [11] A. M. Gallagher, *et al.*, "Gender Differences in Advanced Mathematical Problem Solving," *Journal of Experimental Child Psychology*, vol. 75, pp. 165-190, 2000.
- [12] J. C. Murray, "The Van Hiele theory," MALATI, University of Stellenbosch, South Africa, Stellenbosch, 1997.
- [13] D. Tall, "The transition to formal thinking in mathematics," *Mathematics Education Research Journal*, vol. 20, pp. 5-24, 2008.
- [14] R. Skemp, "Relational understanding and instrumental understanding," *Mathematics Teaching in the Middle School*, vol. 12, p. 88, 2006.
- [15] A. van Streun, "Het denken bevorderen," *NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE*, vol. 3, pp. 294-301, 2002.
- [16] A. van Streun, "Gerommel aan de Tweede Fase," *NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE*, vol. 4, pp. 56-57, 2003.
- [17] A. van Streun, "Heuristisch wiskunde-onderwijs. Verslag van een onderwijsexperiment," 2008.
- [18] G. Driessen and J. Doesborgh, "De feminisering van het basisonderwijs," *Effecten van het geslacht van de leerkracht op de prestaties de houding en het gedrag van de leerlingen*. Nijmegen: ITS, 2004.
- [19] F. Pajares and L. Graham, "Self-Efficacy, Motivation Constructs, and Mathematics Performance of Entering Middle School Students," *Contemporary Educational Psychology*, vol. 24, pp. 124-139, 1999.
- [20] A. Beaton, *et al.*, *Mathematics achievement in the middle school years: IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS): TIMSS International Study Center*, Boston College, Chestnut Hill, MA, 1996.
- [21] 27 juni 2010). *Jean Piaget*. Available: http://en.wikipedia.org/wiki/Jean_Piaget
- [22] M. Crowley, "The van Hiele model of the development of geometric thought," *Learning and teaching geometry, K-12*, pp. 1-16, 1987.
- [23] D. Tall, "The historical & individual development of mathematical thinking: ideas that are set-before and met-before," 2008.
- [24] D. Tall and M. Isoda, "Long-term development of mathematical thinking and lesson study," 2007.

- [25] E. Gray and D. Tall, "Abstraction as a natural process of mental compression," *Mathematics Education Research Journal*, vol. 19, pp. 23-40, 2007.
- [26] M. Reason, "Relational, instrumental and creative understanding," *MATHEMATICS TEACHING-DERBY*, pp. 5-7, 2003.
- [27] J. Van Dormolen, *Didactiek van de wiskunde*. Utrecht: Oosthoek's Uitgeversmaatschappij, 1974.
- [28] M. Delfos, "Een jongen is geen meisje," *De wereld van het jonge kind, jaargang*, vol. 31, pp. 183-186, 2004.
- [29] E. Van de Gaer, *et al.*, "Het verschil in schools presteren tussen jongens en meisjes : eindrapport van het KULEuven-luik," Leuvens instituut voor onderwijsonderzoek, KU Leuven, Leuven, 2002.
- [30] C. Mulryan, "Perceptions of intermediate students' cooperative small-group work in mathematics," *The Journal of Educational Research*, vol. 87, pp. 280-291, 1994.
- [31] L. Madrid, *et al.*, "Effects of team competition versus team cooperation in classwide peer tutoring," *The Journal of Educational Research*, vol. 100, pp. 155-160, 2007.
- [32] M. Pijls, *et al.*, "Reconstruction of a collaborative mathematical learning process," *Educational Studies in Mathematics*, vol. 65, pp. 309-329, 2007.
- [33] R. v. d. Sande. 29-6). *Mensen onthouden 10% van wat ze lezen...?* Available: <http://knol.google.com/k/rutger-van-de-sande/mensen-onthouden-10-van-wat-ze-lezen/3bfsim0q0rvrq/2#>
- [34] D. Uttal, "Beliefs about genetic influences on mathematics achievement: a cross-cultural comparison," *Genetica*, vol. 99, pp. 165-172, 1997.
- [35] M. Schiff and M. Tatar, "Significant teachers as perceived by preadolescents: do boys and girls perceive them alike?," *The Journal of Educational Research*, vol. 96, pp. 269-276, 2003.
- [36] D. Gore and D. Roumagoux, "Wait-time as a variable in sex-related differences during fourth-grade mathematics instruction," *The Journal of Educational Research*, vol. 76, pp. 273-275, 1983.
- [37] "Ze slikken het in," *Klasse voor Leerkrachten*, pp. 8-9, 1997.
- [38] "Jongens onbewust bevoordeeld," *Klasse voor Leerkrachten*, pp. 44-45, 2000.
- [39] "Meisjes-jongens," *Klasse voor Leerkrachten*, pp. 49-52, 2000.
- [40] "Meisjes met extra weinig kansen," *Klasse voor Leerkrachten*, pp. 49-52, 2000.
- [41] "Meisjes studeren beter," *Klasse voor Leerkrachten*, pp. 4-7, 2003.
- [42] M. Hannula, "Motivation in mathematics: Goals reflected in emotions," *Educational Studies in Mathematics*, vol. 63, pp. 165-178, 2006.
- [43] B. Nye, *et al.*, "Do minorities experience larger lasting benefits from small classes?," *The Journal of Educational Research*, vol. 98, pp. 94-100, 2004.
- [44] S. Harkness, *et al.*, "Preservice elementary teachers' voices describe how their teacher motivated them to do mathematics," *Educational Studies in Mathematics*, vol. 65, pp. 235-254, 2007.
- [45] U. Trautwein, *et al.*, "Do Homework Assignments Enhance Achievement? A Multilevel Analysis in 7th-Grade Mathematics," *Contemporary Educational Psychology*, vol. 27, pp. 26-50, 2002.

Bijlage 1

Hardopdenksessie leerling 1:

G:.....	
J: dat wordt nog wat.	n
J: ik ga eerst natuurlijk even kijken wat de som is, en even bedenken, dat het bereik, dat euh heeft te maken met verticale, van die grafiek zeg maar.	r i
J: ja ik maak dan zelf ja het bereik van de functie dan stel je, maak ik vaak eerst even een hele simpele schets. Het hoeft niet netjes nou toch he?	i
A: nee	
J: het bereik heeft met verticaal...	i
J: dan zal je vaak eerst even de...	n
J: de dinge op, de formule	n
J: dat is weer heel lang geleden	n
8	
A: probeer hardop te blijven denken, wij weten niet wat jij denkt anders	
J: ik zit te denken wat we nou ook weer moesten gaan doen	n
10	
J: ja ik ben hier niet zo heel best in	n
G: hoe wil je het gaan aanpakken?	
J: even denken hoe ook alweer de stappen waren hoe we dat moesten gaan doen	r
J: het is alweer een poosje geleden	n
7	
J: euhm	n
G: wat kun je je van die stappen herinneren?	
J: ja niet zo veel meer	n
J: even denken	n
9	
J: zoiets met een afgeleide, heeft dat ermee te maken?	i
J: wat slecht	n
J: het bereik van f, dat heeft te maken, dat die grafiek loopt op een bepaalde manier	r
J: en dan gaat ie zo zeg maar	i
J: ja je moet, euhm, je moet het hoogste en laagste punt hebben	i
J: dus waar de grafiek nul is	i
J: en dan moet je de afgeleide uitrekenen	i
J: en die moet je dan nul stellen	i
J: nou even afgeleide hiervan uitrekenen	n
5	
J: en dan doe je....	n
J: ik weet eigenlijk niet eens hoe die regel heet	n
J: de noemer maal de afgeleide van de teller	i
J: min de teller maal de afgeleide van de noemer	i
J: delen door de noemer in het kwadraat	i
J: ja en dat stel je dan gelijk aan nul	i
J: even vereenvoudigd opschrijven	r
3	
J: nou dit kun je delen door x is x	i
J: delen door x kwadraat	i
J: nou dan mag je de onderste weglaten	r
J: als er wordt gesteld aan is nul	r
J: dus dan krijg je $x - 2x \ln x$ is nul	r
J: en dan moeten we dat uit gaan rekenen	n
J: maar dat $\ln x$ dat heb ik in het proefwerk helemaal fout gedaan, dus dat wordt nog wat	n
16	
J: nou zit ik even te denken hoe ik ook alweer met $\ln x$ euhm....	n
J: je zou de x buiten haakjes kunnen halen, geen idee of dat goed is	i
J: $x = 0$ of $2 \ln x$ is 1	n
J: $x = 0$ of $\ln x$ is een half	n

J: nou dan moet er nog wat uitkomen, maar ik heb echt geen idee	n
J: ik zit even te denken wat $\ln x$ ook alweer was	i
6	
J: ja het had iets met e-machten te maken, maar....hoe zit dat ook alweer	i
J: (mompelend) $\ln x$ oplossen, e tot de macht x ofzo	i
J: (mompelend) ja het is iets in deze richting	i
3	
J: maar of dat goed is (lacht)	n
J: stel dat f_1 dat doe je dan met $\ln x$ de	i
J: Maar dan zou je deze 2 punten hebben, en dan heb je de grafiek hoe die loopt. Ja je hebt een nulpunt	r
J: En dan heb je hier de, bij $x = 0$, het hoogste of het laagste punt	r
J: En bij e tot de macht half en die vul je dan in $f(0)$	i
J: Ik weet niet of dat wel kan, en of dat wel goed is	n
J: ja dat zal dan denk ik nul moeten worden	r
J: maar dat kan niet want dan heb je de noemer al nul, en dat mag geloof ik niet	i
J: volgens mij is het helemaal fout	n
J: maar als je $f(\text{een half})$ zou invullen	i
J: mag ik niet om hints vragen	n
J: want het is helemaal fout he?	n
J: dat zit er dik in	n
J: gaat u niks vertellen?	n
G: ik ga niks vertellen, het gaat meer om hoe jij denkt	
A: de tijd is bijna om hoor	
J: volgens mij zit ik er helemaal naast	n
J: je hebt de y nodig en dan moet je die x dan invullen	r
J: maar mijn x klopt geloof ik allebei al niet	r
J: dus dat is het probleem	n
A: je mag stoppen hoor	
J: ja?	n

	opmerking door afnemer of onderzoeker of stilte (in seconden)
	schrijftijd in seconden
J:	opmerking door leerling zelf

Bijlage 2:

Hardopdenksessie leerling 2:

G: ga je gang, de vraag is dus geef het bereik van de functie die op dat papertje staat en je mag gewoon op het papier schrijven	
T: ok, euhm volgens mij zou ik sowieso eerst mijn grafische rekenmachine pakken en kijken hoe die grafiek loopt.	r
T: Ik weet niet of dat mag nou? Of is dat niet toegestaan? (kijkt, er wordt nee geschud)	n
T: ok, niet toegestaan	n
T: euhm, even kijken	n
T: eerst even een nulpunt berekenen, dan weet je ongeveer hoe die loopt	r
3	
T: euhm, afgeleide berekenen	n
9	
T: hoe was het ook alweer	n
25	
G: wat schrijf je nou op?	
T: ik probeer de afgeleide te berekenen, dus euhm, met euhm, meer welke regel dat ook al weer was	i
afgeleide van de bovenste keer de onderste min de afgeleide van de onderste keer de bovenste gedeeld door de	i
onderste kwadraat, ik weet niet	i
T: maar ik weet niet of ik er dan zo wel kom	i
27	
10	
T: sss, sja	n
T: dan moet ik gelijk stellen aan nul, die bovenste moet nul zijn, dat kan alleen maar nul zijn	i
T: dan zou ik niet weten hoe ik dan verder moet	n
T: het bereik van $f(x)$	n
T: want je moet de toppen berekenen	i
T: vandaar uit kun je dan het bereik geven	i
T: maar ik weet even niet hoe ik van mijn afgeleide op nul uit kom	i
T: want volgens mij is mijn afgeleide ook niet helemaal goed	r
5	
T: euhm...	n
G: wat denk je nou	
T: ik moet eerst bedenken hoe ik dit op moet gaan lossen en of het op te lossen is	r
T: maar ik zou niet weten hoe	n
30	
T: nee ik zou niet weten hoe ik dan hieruit verder moet...gaan	n
T: je krijgt dus een of 2, je krijgt in ieder geval een top, of 2 toppen, nee 1 top	i
T: en vanuit daar gaat ie of omhoog of omlaag en daaruit krijg je het bereik	r
T: maar aj die top niet weet kun je ook weinig met het bereik	i
11	
G: weet je wat er met het bereik bedoeld wordt?	
T: dat is als je de grafiek hebt, de ja, hoe zeg je dat	n
T: dit is het, nee wacht	n
T: als je een parabool hebt dan is onder de top van de parabool is het bereik van de grafiek	i
T: tenminste dat denk dat het bereik is	i
T: maar hoe ik daar dan aan kom weet ik echt niet	n
40	
T: nee ik kan het nou niet zeggen	n
G: je mag stoppen als je dat wilt, je mag ook nog even doorgaan	
T: nee, dan stop ik nou, want ik zou niet weten welke kant ik nu op moet	n
T: want ik zie het niet op dit moment	n

	opmerking door afnemer of onderzoeker of stilte (in seconden)
	schrijftijd in seconden
T:	opmerking door leerling zelf

Bijlage 3:

Hardopdenksessie leerling 3:

G: ja je mag aan de gang gaan. De opgave staat daaronder genoteerd, er zit ook een briefje bij waarop je je uitwerkingen kunt doen.	
T: ok	n
8	
T: bereik dat is over de lengte dacht ik	i
T: eerst even alles opschrijven	n
18	
T: nou x mag niet nul zijn, want je kunt niet delen door nul	i
En volgens mij mag, kan x ook niet kleiner zijn, want dat mag niet bij ln	i
T: nou als x dus groter of gelijk aan nul moet zijn dan....	r
10	
T: volgens mij is het nul invullen	i
17	
20	
G: geef eens aan wat je wil gaan doen	
T: ik zou niet weten wat ik moet doen eigenlijk	n
T: bereik dat is toch het verschil, welke y, euhm.... waar de formule f zich bevindt	i
(kijkt voor de zoveelste keer vragend naar Gertjan)	
A: hij heeft opdracht dat hij jou niet mag helpen, hij mag alleen jou vragen om hardop te denken	
T: oh, ok	n
A: dus als jij denkt dat dat het is, dan moet je daarmee verder gaan	
G: hoe wil je het aanpakken	
T: ja dat weeknie	n
14	
T: normaal denk ik even invoeren in je rekenmachine, dan kun je een beetje zien waar het zit, en dan kijk je welke punten je moet berekenen om te kijken waar het bereik zit	r
T: maar dat kan hier niet	n
T: maar ik denk dat het wel handig is om de afgeleide te berekenen, want dan kun je de toppen berekenen	r
T: als je de afgeleide berekent ga je de productregel gebruiken	i
T: dan krijg je eerst de afgeleide van $1 \times \ln$ in het kwadraat dat is (krast wat)	i
T: heb je $\ln x$ keer 1 delen door x plus 1 delen door x plus $\ln x$ keer $\ln x$	i
11	
T: euhm	n
76	
G: wat ben je nu aan het doen?	n
T: ben dit aan het afleiden	n
T: maar ik weet niet meer precies hoe je de afgeleide van $\ln x$ berekent, dus	i
T: ik kom niet veel verder	n
50	
G: wat denk je dat je moet doen	
T: (boos) de afgeleide, dat zei ik net ook al	i
T: maar ik weet de afgeleide van $\ln x$ niet, dus kom ik niet verder	n
8	
A: als je zegt ik kom hier helemaal niet uit, dan mag je ook stoppen	
T: ja dat weet ik	n
10	
T: ik stop ermee denk ik	n
T: ik kom er niet verder uit	n

	opmerking door afnemer of onderzoeker of stilte (in seconden)
	schrijftijd in seconden
T:	opmerking door leerling zelf

Bijlage 4

Hardopdenksessie leerling 4:

G: je mag aan de slag gaan	
M: ok	n
(pakt som erbij)	
M: bij het bereik moet je natuurlijk de afgeleide berekenen	i
25	
G: kun je aangeven wat je wilt gaan doen?	
M: ja de euhm hoe heet dat toch	n
M: de quotiëntregel, klopt dat? En dan de afgeleide berekenen en dan daarmee de toppen berekenen, zodat je weet van het laagste punt en het hoogste punt	r
M: En dan de afgeleide berekenen en dan daarmee de toppen berekenen,	r
M: zodat je weet van het laagste punt en het hoogste punt	r
G: ok	
52	
G: kun je hardop zeggen wat je doet?	
M: ik ben nog bezig met de afgeleide te berekenen	i
M: en even kijken, x kwadraat delen door x is x , min $2x \ln x$, delen door x tot de vierde	r
M: en nu moet je de afgeleide gelijk stellen aan nul, zodat je de raaklijn kunt berekenen bij de toppen	r
5	
M: ja en dan....	n
34	
G: wat ben je nu aan het doen?	
M: aan het nadenken (lacht), over wat ik moet doen	i
M: euhm...	n
18	
M: ik heb echt geen idee	n
30	
G: probeer hardop wat te vertellen over wat je...	
M: ok, ik heb nu x min $2x \ln x$ is nul	i
M: ik weet niet precies hoe ik het moet oplossen door die $\ln x$	n
48	
M: ow ja wacht, volgens mij kun je x buiten haakjes halen, zo krijg je	i
47	n
M: ja euhm, de afgeleide is nul bij x is nul of x is wortel e heb ik nu	n
M: en...	n
M: dan moet ik die invullen bij de formule van $f(x)$	r
M: zodat ik weet hoe hoog die punten liggen	r
30	
M: volgens mij is ie bij $x = 0$ geen oplossing, want je kunt niet delen door nul	r
60	n
M: en bij x is wortel e krijg je als y coördinaat 1 gedeeld door 2 e	i
M: dus even kijken	n
M: ik denk dat het bereik van f dan van euhm, oneindig dan denk ik tot $1/2$ e loopt	r
24	

	opmerking door afnemer of onderzoeker of stilte (in seconden)
	schrijftijd in seconden
M:	opmerking door leerling zelf

Bijlage 5

Hardopdenksessie leerling 5:

G: zeggen wat je denkt en hoe jij het euh....	
S: bereik?..	n
S: ik schrijf eerst de som even over	n
5	
S: en het bereik heeft te maken volgens mij met de y-as	i
S: ja ok ja	n
S: bereik van f	n
8	
S: dan moet ik euh	n
S: ow god	n
S: daar ligt y ergens tussen, en dan de afgeleide van f berekenen en die gelijk stellen aan nul	r
S: dan reken ik eerst de toppen uit	r
S: euhm	n
93	
G: wil je vertellen wat je aan het doen bent?	
S: euhm, eerst de afgeleide berekend, volgens mij is dat $x-2x \ln x$ is nul, of ja tenminste, gelijk stellen aan nul.	r
S: dan eerst x buiten haakjes, kijken of dat lukt	i
S: $x = 0$ of $1-2\ln x$ is nul	n
S: euh	n
42	
S: volgens mij moet eruit komen x is nul of x is wortel e	i
S: dat klopt wel?	n
(kijkt vragend naar Gertjan)	
A: hij mag je geen hint geven he	
S: ow ja, dat klopt	n
S: nu moet ik nog het bereik	r
28	
S: ik vul nu de x waarden in bij f om te kijken welke y waarden eruit komen	r
S: euhm	n
53	
G: kun je vertellen wat je.....gedaan hebt	
S: ja de y waarden uitgerekend euhm van de toppen	i
S: en dan zal daar het bereik tussen liggen, toch?	r
G: wat zijn de y waarden van de toppen?	n
S: y is nul en y is $1/2 e$	n
S: en dan zou ik het niet meer weten	n
S: nu moet je toch eerst de grafiek plotten, anders weet je nog steeds niks?	r
S: ik heb geen idee hoe die grafiek eruit ziet	r
S: die zal wel 2 toppen hebben dan maar....	i
S: zo zal het bereik volgens mij tussen 0 en $1/2 e$ in liggen	r
S: dat zou ik als oplossing hebben gegeven	n
G: ok dank je wel	
G: ben je hiermee klaar	
S: ja, *grinnik*, als dit een toets was geweest had ik dit zo ingeleverd	n

	opmerking door afnemer of onderzoeker of stilte (in seconden)
	schrijftijd in seconden
S:	opmerking door leerling zelf

Bijlage 6

De som:

$$f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2}$$

Gevraagd: geef het bereik van f

Bijlage 7

protocol:

$$f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2}$$

Gevraagd: geef het bereik van f

korte uitleg:

- duur van de som = 10 minuten (tijdslimiet ivm vergelijkbaarheid en toepasbaarheid)
- hardop denken en uitwerken
- het is niet erg als het niet 'af' is (het gaat namelijk niet om het antwoord)
- na afloop van het hele gebeuren kunnen de leerlingen -als ze dat willen- te horen krijgen wat het doel is van het 'onderzoek'

Houding van de afnemer is neutraal.

Wat mag wel gezegd worden:

- wat ben je nu aan het doen?
- probeer hardop na te denken
- geef eens aan wat je wilt gaan doen
- hoe wil je het aanpakken?
- wat denk je dat je moet doen?
- ...
- hoe ziet je antwoord eruit?
- etc

(dus hints zonder echt hints te geven, het nadenken moet vooral door de leerling gebeuren, en dus niet naar aanleiding van een tip van de begeleider)

Wat mag absoluut NIET gezegd worden:

- je zou kunnen doen (invullen van de stappen)
- uitleg geven over de begrippen of de vraag (als de ll het niet begrijpt dan proberen de leerling het antwoord zelf te laten vinden door alleen te vragen hardop na te denken etc)
- niet aangeven dat het speciaal gaat om de manier van aanpak (dus verschil jongen vs meisje etc)
- ‘welke stappen wil je nemen’ is misschien al teveel hint

Bijlage 8

Criteria voor beoordeling

Fase: Oriënteren, Sorteren, Abstraheren (evt. Expliciteren)

Algemeen:

- de vraag "wat is bereik" met uitleg/toelichting (bv koppeling met domein) => r
- de vraag "wat is bereik" met als intonatie *wat is ook al weer bereik* => niet r, niet i

-Opmerkingen uit de volgende categorieën **zijn zonder uitleg *instrumenteel*** (i):

- Bereik is iets met y
- Bereik is iets met y-as
- Bereik is iets met verticaal
- Bereik is iets met lengte
- Bereik is iets met omhoog
- Bereik is iets met (naar) beneden
- Bereik is iets met omlaag
- Bereik is iets met omhoog en omlaag
- Bereik is iets met hoogste en laagste punt
- Bereik is iets met toppen
- Bereik is onder de top van de grafiek
- Bereik is van de top uit omhoog of omlaag

NB met uitleg (afh van de uitleg) kan het *relationeel* begrip zijn (maar dan moet uit de uitleg, de opmerkingen eromheen duidelijk zijn dat de leerling een bedoeling heeft).

- het maken van een schets of tekening om inzicht te krijgen is *instrumenteel*
- het maken of aangeven van een stappenplan met toelichting is *relationeel* (als alleen de stapjes genoemd worden omdat deze gevolgd 'moeten' worden dan betreft het *instrumenteel* begrip)

NB. Er is verschil in zeggen en doen. Leerlingen kunnen aangeven dat ze iets willen gaan doen, en het vervolgens niet doen. Ook kunnen ze niets zeggen, en toch iets doen.

In dit geval is alleen gekeken naar datgene wat de leerling zegt (en niet wat de leerling doet)

Fase: Expliciteren, Verwerken

Hoe kun je het bereik uitrekenen? Wat zeggen leerlingen dat ze willen doen:

- het bereik kun je uitrekenen door de afgeleide uit te rekenen
=> zonder uitleg *instrumenteel*, met uitleg waarom *relationeel*
- het bereik kun je uitrekenen door te kijken waar de grafiek nul is
=> i
- het bereik kun je uitrekenen door de GR te pakken
=> i, tenzij uitleg over waarom GR (overzicht, relatie), dan r
- het bereik kun je uitrekenen door de toppen te berekenen
=> i, tenzij met uitleg, dan r
- het bereik kun je uitrekenen door te kijken waar grafiek omhoog of omlaag gaat
=> i, tenzij met uitleg, dan r
- het bereik kun je uitrekenen door punten te berekenen adhv een figuur
=> r
- het bereik kun je uitrekenen door de afgeleide gelijk te stellen aan nul
=> i, tenzij met uitleg (waarom), dan r
- het bereik kun je uitrekenen door afgeleide nul is in te vullen in $f(x)$
=> i, tenzij met uitleg, dan r
- het bereik kun je uitrekenen door de toppen te bekijken
=> i, tenzij met uitleg, dan r
- het bereik kun je uitrekenen door de toppen te bekijken, daar ligt y ergens tussen
=> r waarschijnlijk (tenzij het een losse opmerking betreft, dan i)
- het bereik kun je uitrekenen door de x-waarden in te vullen om te kijken welke y-waarden eruit komen
=> i, tenzij met uitleg, dan r

Wat wordt er dan daadwerkelijk uitgerekend (verbaal):

- de functie is een quotiënt dus de afgeleide kan worden berekend door middel van de quotiëntregel =>i, tenzij met uitleg
- je moet de productregel gebruiken (om de afgeleide uit te rekenen)
=>i
- afgeleide van de teller maal de noemer min de afgeleide van de noemer maal de teller gedeeld door de noemer kwadraat
=>i
- afgeleide van de bovenste keer de onderste min de afgeleide van de onderste keer de bovenste gedeeld door de onderste kwadraat
=>i
- een gedeeld door x maal x kwadraat min twee x maal ln x gedeeld door x kwadraat in het kwadraat =>i
- x kwadraat delen door x, min 2 x ln x, delen door x tot de vierde
=>i
- de noemer mag niet nul worden
=> i, tenzij met uitleg r
- je moet de afgeleide nul stellen
=>i, (tenzij uitleg, dan evt r)
- x-2x ln x is nul
=>i, tenzij uitleg, dan r
- teller nul stellen
=>i, tenzij uitleg (bv dat noemer nooit nul kan worden), dan r
- de bovenste gelijk aan nul stellen
=>i
- de afgeleide moet je oplossen
=>i
- x buiten haakjes halen
=>i
- de afgeleide is nul bij x is nul of x is wortel e
=> niet i, alleen r als ook conclusie dat x = 0 geen opl kan zijn (uitleg)
- bij deze x-coördinaat krijg je als y-coördinaat
=>i, tenzij uitleg (b.v. voor bereik y-coörd. nodig), dan r
- dus x=0 en $2 \ln x = 1$
=> niet i, niet r
- dus x=0 en ln x is een half
=>niet i, niet r
- dus x=0 en x = wortel e
=>niet i, niet r
- je moet de x-waarden invullen om de y-waarden te krijgen voor het bereik
=>r (uit context waarschijnlijk, als losse opmerking, dan i)

Bijlage 9

Visuele voorstellingen van de geluidopnames:

