

Introductie van de afgeleide in de vierde klas van het vwo
Onderzoek van Onderwijs - Wiskunde

Tessa Sprunken - s0006696

11 mei 2013

Samenvatting

In dit onderzoek wordt gekeken of een meer *sensible* aanpak van de introductie van het concept afgeleide in 4 vwo leidt tot meer conceptueel begrip bij leerlingen. Bij het volgen van de in het lesboek gebruikte methode met behulp van de limietbenadering richten leerlingen zich vooral op het kiezen en toepassen van procedures, waardoor het conceptuele begrip achterblijft. Met behulp van een aanpak waarbij we uit gaan van de eigen waarnemingen van de leerlingen wordt geprobeerd eerst het conceptuele begrip op te bouwen, waarna de toepassingen en procedures later volgen. Een groep leerlingen die volgens deze alternatieve methode les heeft gehad wordt vergeleken met een controle-groep die de aanpak uit het lesboek volgt. Zowel de procedurele als conceptuele kennis van beide groepen wordt vergeleken. Er zijn geen significante verschillen gevonden tussen de resultaten, maar er is wel genoeg aanleiding gevonden om verder onderzoek naar deze methode te doen.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	4
1.1	Onderzoeksvraag	4
1.2	Leeswijzer	5
2	Theoretisch kader	6
2.1	Wiskundige bekwaamheid	6
2.2	Drie werelden	7
2.3	Het concept afgeleide	8
2.4	Een <i>sensible</i> aanpak	8
2.5	Bekwaamheid in het concept afgeleide	9
3	Methode	10
3.1	Respondenten	10
3.2	Procedure	10
3.2.1	Materiaal introductieles	11
3.2.2	Lesverloop	13
3.3	Instrumenten	14
3.3.1	Proefwerk	14
3.3.2	Overhoring	15
4	Analyse	17
5	Resultaten	18
6	Conclusies en discussie	20
A	Appendix: Materiaal introductieles testgroep	23
B	Appendix: Lesverloop	34
C	Appendix: Proefwerk	37
D	Appendix: Overhoring	40
E	Appendix: Resultaten per vraag	42

1 Inleiding

In de vierde klas van het vwo maken leerlingen Wiskunde B voor het eerst kennis met de differentiaalrekening, beginnende met de onderdelen raaklijn en afgeleide functie. Volgen we de methode in het boek om de het concept afgeleide te introduceren, dan gaat dit via de limietbenadering: van een differentiequotiënt via de raaklijn naar de afgeleide functie. Het bij dit proces horende limietbegrip is voor leerlingen conceptueel erg lastig en hun problemen met de algebra staan een goed begrip ook in de weg. Ook ontstaat verwarring doordat in korte tijd veel nieuwe begrippen en notaties worden geïntroduceerd, waarbij vergelijkbare notaties ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en $\frac{dy}{dx}$) een verschillende betekenis hebben en verschillende termen ('differentiequotiënt' en 'gemiddelde verandering') juist naar dezelfde procedure verwijzen. Dit leidt er toe dat de leerlingen zich erg gaan richten op welke procedure bij welke soort som hoort, waardoor het conceptuele begrip naar de achtergrond schuift. Vooral na het worstelen met de limietdefinitie van de afgeleide zie je de opluchting als de eerste rekenregels verschijnen: hier kunnen ze wat mee, dit kan je weer gewoon uitrekenen. Begrijpen is niet nodig, gewoon het regeltje toepassen geeft toch het goede antwoord?

Alleen de regeltjes leren geeft echter op de korte termijn wel resultaat, maar levert op de langere termijn wel problemen op. Het onthouden van losse regels en procedures is veel lastiger dan als de verschillende onderdelen aan hetzelfde conceptuele begrip gekoppeld zijn. Door nu tijd te steken in een goed conceptueel begrip van de afgeleide, wordt het niet alleen makkelijker om wat er nu geleerd wordt te onthouden, maar ook om er weer op verder te bouwen als in de volgende jaren meer onderdelen van de differentiaal- en integraalrekening ter sprake komen. Aangezien de in het boek gebruikte methode kennelijk niet het gewenste effect heeft - de leerlingen besteden meer aandacht aan de procedures dan aan het begrijpen van het concept - zullen we op zoek moeten naar alternatieven.

In dit onderzoek gaan we op zoek naar een methode die zich vooral richt op het conceptueel begrijpen. Om dit te bereiken proberen we de differentiaalrekening op een meer intuïtieve (of *sensible*) manier te introduceren door uit te gaan van wat we zelf kunnen zien, daarmee het begrip op te bouwen en daarna pas aan het rekenen te slaan. Hoe dit precies vorm gekregen heeft, wordt verderop beschreven. Ook worden de resultaten van de nieuwe methode en de methode uit het boek vergeleken op zowel conceptueel begrijpen als het procedureel vloeiend werken.

1.1 Onderzoeksvraag

De vraag die we met dit onderzoek willen beantwoorden is:

Leidt een meer *sensible* introductie van de afgeleide functie tot meer conceptueel begrip bij leerlingen?

1.2 Leeswijzer

In dit verslag volgt nu eerst een theoretische beschouwing, waarin de verschillen tussen conceptueel en procedureel begrijpen besproken worden, alsmede de verschillende werelden waarin we volgens Tall de wiskunde kunnen beoefenen. Ook kijken we daar naar een schema van het concept afgeleide zoals beschreven door Roorda en de in dit onderzoek gebruikte *sensible approach*. In hoofdstuk 3 volgt een omschrijving van de testgroep en de gebruikte materialen, zowel het lesmateriaal als de gebruikte toetsen. Na een bespreking van de gebruikte analysemethode, worden de resultaten van de toetsen besproken en worden de verschillende groepen vergeleken. Tenslotte wordt de onderzoeksvraag beantwoord en worden enkele kanttekeningen bij het onderzoek geplaatst in hoofdstuk 6.

2 Theoretisch kader

Voordat we kunnen beginnen met het beantwoorden van de onderzoeksvraag, zullen we eerst moeten vastleggen wat we bedoelen met conceptueel begrip en hoe een *sensible* introductie eruitziet. Wat betreft het conceptueel begrijpen zullen we aansluiten bij het door Roorda (2012) ook voor het onderwerp afgeleide functie gebruikte model van de wiskundige bekwaamheid (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). In een lesson study (Verhoef, van Smaalen & Pieters, 2012) is een aantal docenten op zoek is gegaan naar een *sensible* aanpak voor de introductie van de afgeleide. Deze aanpak is geworteld in de drie-werelden-theorie van Tall (2004). In dit onderzoek zullen we op de daar ontwikkelde aanpak voortborduren.

We zullen hieronder eerst de theorie over wiskundige bekwaamheid en de drie werelden van Tall bespreken. Daarna kijken we naar een omschrijving van het concept afgeleide. Met deze achtergrond kunnen we de in de lesson study ontwikkelde aanpak beschrijven en bekijken we de meetbare indicatoren voor bekwaamheid in het concept afgeleide.

2.1 Wiskundige bekwaamheid

Conceptueel begrijpen is een van de vijf strengen van het model voor wiskundige bekwaamheid zoals omschreven door Kilpatrick et al. (2001). Het model gaat uit van vijf verweven *strengen*: conceptueel begrijpen, procedureel vloeiend werken, strategisch competent zijn, adaptief redeneren en een productieve houding hebben (vertalingen volgens Roorda, 2012). De verschillende strengen zijn niet onafhankelijk, maar met elkaar verweven: de vaardigheden ontwikkelen zich gezamenlijk en versterken elkaar. We zullen ons in dit onderzoek vooral richten op de eerste twee strengen, conceptueel begrijpen en procedureel vloeiend werken.

Streng 1: conceptueel begrijpen

Onder conceptueel begrijpen wordt in het model van wiskundige bekwaamheid verstaan het begrijpen van wiskundige concepten, bewerkingen en relaties. Een leerling die een onderwerp conceptueel begrijpt:

- kan feiten en methodes gemakkelijk herinneren, gebruiken en reconstrueren,
- kan situaties op verschillende manieren representeren en representaties aan elkaar relateren,
- kan overeenkomsten tussen, op het eerste gezicht verschillende, situaties herkennen,
- kan geclusterde kennis uitpakken.

Belangrijk voor het conceptueel begrijpen is dat alle kennis over een onderwerp verbonden is: de leerlingen kent geen losse feiten en procedures, maar weet op welke manieren deze samenhangen. Deze samenhangende kennis vormt vervolgens een goede basis om nieuwe concepten te leren en om kennis toe te passen in nieuwe situaties.

Streng 2: procedureel vloeiend werken

Onder procedureel vloeiend werken valt niet alleen het snel en accuraat uitvoeren van een procedure, maar ook het kiezen van een geschikte procedure. Een leerling die procedureel vloeiend werkt:

- kan een geschikte procedure kiezen,
- kan procedures aan elkaar relateren,
- kan procedures snel en accuraat uitvoeren.

Het conceptueel begrijpen en procedureel vloeiend werken vullen elkaar aan: een goed conceptueel begrip maakt het aanleren van procedures makkelijker en het goed beheersen van procedures maakt weer ruimte vrij om aandacht te besteden aan het begrijpen van nieuwe concepten.

Overige strengen

Naast conceptueel begrijpen en procedureel vloeiend werken, zijn er nog drie strengen in het model van wiskundige bekwaamheid. De eerste, strategisch competent zijn, betreft het formuleren, modelleren en oplossen van wiskundige problemen. De tweede, adaptief redeneren, betreft het logisch redeneren over de relatie tussen concepten en situaties. De laatste, een productieve houding hebben, verwijst naar het zien van wiskunde als nuttig, geloven dat inzet helpt bij het leren en zichzelf zien als een effectieve gebruiker en student van de wiskunde. Ook deze laatste drie componenten hebben een wisselwerking met het conceptueel begrijpen en procedureel vloeiend werken: elke van de vijf strengen ondersteunt de andere vier en ze ontwikkelen zich samen. Aangezien deze strengen zich wat meer op de langere termijn ontwikkelen, worden ze in dit onderzoek verder buiten beschouwing gelaten.

2.2 Drie werelden

Nu we de verschillende onderdelen van wiskundige bekwaamheid hebben bekeken, zullen we ook nog het drie-werelden-model van Tall (2004) bekijken. Volgens Tall reist een leerling bij het leren van wiskunde door drie werelden. Ze begint in de belichaamde wereld waarin objecten kunnen worden waargenomen en gemanipuleerd. Van daar uit reist ze naar de symbolische wereld, waarin we niet langer de objecten zelf manipuleren, maar gaan nadenken over de processen die we daarbij gebruiken. In deze wereld speelt de proces-object-dualiteit een rol: een actie op de belichaamde wereld leidt tot een *procept* in de symbolische wereld. Het gaat hierbij om symbolen die zowel een proces als een concept vertegenwoordigen (' $3+4$ ' symboliseert het proces van optellen maak ook het concept som). Van hieruit kan ze doorreizen naar de formele wereld van bewijzen en axioma's. Met de studie van het begrip afgeleide beginnen we deze formele wereld binnen te gaan. Dat betekent echter niet dat dit onderwerp geen plaats heeft in de eerdere werelden: we kunnen tenslotte de steilheid van een grafiek waarnemen, waarmee

we ons in de belichaamde wereld bevinden. Door vanuit deze eerste wereld te beginnen en aan te sluiten bij de waarnemingen van de leerling, ontstaat de *sensible* aanpak.

2.3 Het concept afgeleide

Om de theorie over wiskundige bekwaamheid en de drie werelden van Tall toe te kunnen passen op het concept afgeleide, moeten we eerste definiëren wat dat concept precies inhoudt. Volgens Daemen en Roorda (2012) kan het concept afgeleide worden weergegeven in een schema met vier niveaus met op elk niveau weer vier representaties. De representaties zijn: analytisch, grafisch, numeriek en verbaal. Op het eerste niveau gaat het daarbij om respectievelijk functies, grafieken, tabellen en de bijbehorende termen (tabel, grafiek, formule, enz.). Op het tweede niveau komen dan de differentiequotiënt, gemiddelde helling en gemiddelde toename/verandering. Hier leidt het delingsproces tot het nieuwe concept differentiequotiënt. Niveau drie betreft de differentiaalquotiënt, richtingscoëfficiënt van de raaklijn en momentane verandering. Hier wordt het nieuwe concept differentiaalquotiënt bereikt als gevolg van een limietproces. Op het laatste niveau vinden we de afgeleide functie, met zijn grafiek en een tabel met afgeleide waarden, dit laatste concept komt voort uit een lokaal-globaalproces. Iemand met een goed begrip van het concept afgeleide kan makkelijk schakelen tussen de verschillende representaties en niveaus.

De lastigste overgang is daarbij die van niveau twee naar drie: het limietproces. Dit is een geheel nieuw proces voor de leerlingen, dat zich vooral in de formele wereld afspeelt. In de *sensible* aanpak proberen we deze overgang te vergemakkelijken door terug te grijpen op de belichaamde wereld.

2.4 Een *sensible* aanpak

Door middel van een lesson study (Verhoef et al., 2012) hebben een aantal docenten gezocht naar een *sensible* aanpak voor de introductie van het concept afgeleide in 4vwo. Het gaat hierbij om

een benadering die aansluit bij de voorkennis van leerlingen, een beroep doet op bestaande intuïtie en verankerd is in de wiskunde (blz 1).

Dit houdt in dat we beginnen in de belichaamde wereld (Tall, 2004) en de leerlingen laten uitgaan van hun eigen intuïtie, waarnemingen en handelingen. Dit kan door met tastbare objecten te werken of door gebruik te maken van interactieve applets op de computer. Door de waarnemingen en handelingen kunnen nieuwe begrippen ontstaan, waarna er iconen worden ingevoerd om de ontwikkelde begrippen weer te geven. In de iconen is nog steeds het visuele aspect van het begrip herkenbaar aanwezig, terwijl wel al een eerste stap naar meer abstractie wordt gezet. Uiteindelijk kan dan overgegaan worden op een symbolische weergave, waarbij de directe visuele link niet meer aanwezig is.

De aanpak zoals deze in de lesson study is ontwikkeld, begint met omschrijven van het gedrag van een grafiek in eigen woorden, waarbij ingespeeld wordt op de intuïtie

van leerlingen. Daarna wordt overgegaan op een iconische weergave van de helling door middel van een lijnstukje op de grafiek. Hierna worden hier getallen aan gekoppeld, eerst door de helling van een lijn te vergelijken met een parabool, daarna door bij verschillende punten op de parabool een getal voor de helling te plaatsen. In een tweede les wordt dan met behulp van Geogebra ingezoomd op een grafiek om de lokale rechtheid te laten zien, waarna de raaklijn, differentiequotiënt en het differentiëren worden besproken. De introductieles die tijdens dit onderzoek is gebruikt, is gebaseerd op de in deze lesson study ontwikkelde methode.

2.5 Bekwaamheid in het concept afgeleide

Om te kunnen toetsen of leerlingen het concept afgeleide conceptueel begrijpen en er procedureel vloeien mee kunnen werken, hebben we een aantal meetbare indicatoren nodig. Roorda (2012) beschrijft een aantal indicatoren die hier gebruikt kunnen worden. Een leerling die het begrip conceptueel begrijpt, laat dit zien door de keuze en het gebruik van representaties (analytisch, grafisch, numeriek) en het gebruiken van en redeneren over verschillende aspecten van het concept afgeleide. De leerling kan dus gebruik maken van en schakelen tussen de verschillende niveaus en representaties in het afgeleideschema (zoals uitgelegd in sectie 2.3). Het procedureel vloeiend werken uit zich in het kiezen van een adequate procedure (een die tot een oplossing kan leiden), het gebruiken of benoemen van meerdere adequate procedures (breed repertoire) en het verantwoorden van de keuze voor een bepaalde procedure (samenhangend repertoire).

3 Methode

Het onderzoek is uitgevoerd met een testgroep en twee controlegroepen die elk van hun eigen docent les hadden. De controlegroepen hebben de methode van het boek ‘Getal en Ruimte 4vwo Wiskunde B deel 1, 10de editie’ (2010) gevolgd. De testgroep heeft eerst een introductieles gevolgd die via een elektronische leeromgeving is aangeboden en heeft daarna verder gewerkt met materiaal uit hetzelfde boek als de controlegroepen, maar enkele onderdelen zijn overgeslagen en de volgorde waarin de onderwerpen zijn doorlopen is aangepast. Alle leerlingen hebben vervolgens hetzelfde proefwerk gemaakt en een extra toets waarin vooral hun conceptuele kennis is getoetst.

In dit hoofdstuk volgt nu eerst een gedetailleerde omschrijving van de drie groepen, daarna een overzicht van het gebruikte lesmateriaal in de controlegroepen en de testgroep. Tenslotte volgt een beschrijving van de gebruikte toetsen.

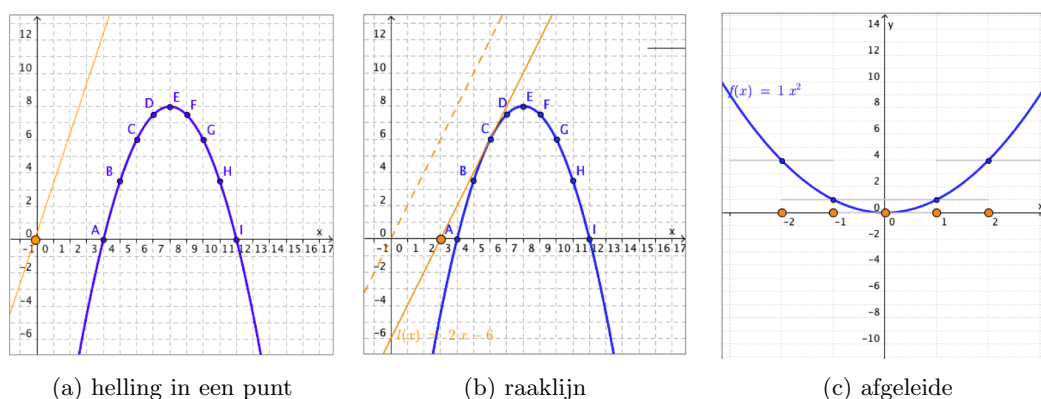
3.1 Respondenten

Aan het begin van het onderzoek bestond de testgroep uit 30 leerlingen en de controlegroepen uit 30 en 28 leerlingen. We zullen deze controlegroepen vanaf nu groep A en B noemen. Uiteindelijk zijn de resultaten van 25 leerlingen uit de testgroep en 53 uit de controlegroepen (26 uit groep A en 27 uit groep B) meegenomen. Dit komt omdat de doublanten niet zijn meegenomen in de resultaten en een aantal leerlingen van klas is gewijzigd. Groep B bestaat volledig uit leerlingen die het tweetalige vwo volgen, de testgroep en groep A bestaan deels uit leerlingen uit de tweetalige stroom en deels uit leerlingen uit het gewone vwo. Leerlingen in het tweetalige vwo hebben de eerste drie jaar hun wiskundelessen in het Engels gevolgd. In groep A zitten alleen leerlingen met een NG of NT profiel, terwijl in de testgroep en groep B ook leerlingen met een EM profiel zitten (respectievelijk 36% en 15%). Bijna alle leerlingen volgen ook het vak natuurkunde (waar ook wordt gewerkt met gemiddelde snelheden en raaklijnen), slechts 2 leerlingen uit de testgroep en 2 leerlingen uit groep B niet.

3.2 Procedure

Elke groep heeft les gekregen van een andere docent. In de testgroep zijn drie lessen gegeven, waarvan de eerste in het computerlokaal plaatsvond en gebruik maakte van het nieuw ontwikkelde materiaal. De andere twee lessen is gebruik gemaakt van het gewone boek. Voor het proefwerk was er ook nog ruimte voor een herhalingsles, waarin de leerlingen hebben geoefend met de diagnostische toets en de gemengde opgaven uit het boek. In de andere groepen zijn vijf respectievelijk vier lessen gegeven, gebruikmakend van het boek.

Hierna volgt eerst een beschrijving van het nieuw ontwikkelde materiaal en een overzicht van de gegeven lessen in zowel de controlegroepen als de testgroep.



Figuur 1: Drie applets uit de introductieles

3.2.1 Materiaal introductieles

Voor de introductieles in de testgroep is materiaal ontwikkeld op basis van de resultaten van de lesson study (Verhoef et al., 2012), zoals beschreven in sectie 2.4. De leerlingen krijgen deze les aangeboden via een elektronische leeromgeving. De eerste opdracht is om, in tweetallen, een grafiek te beschrijven of te tekenen aan de hand van de beschrijving. Hiermee wordt dus ingespeeld op de intuïtie en voorkennis van de leerlingen, zoals ook beschreven door Verhoef et al. (2012). Leerlingen moeten hun eigen woorden gebruiken om de grafiek zo nauwkeurig mogelijk te beschrijven, zonder gebruik te maken van coördinaten. Hierna worden de begrippen toenemend/afnemend/constant stijgend/dalend geïntroduceerd, zodat we een gemeenschappelijke taal hebben om de grafieken mee te omschrijven. Doordat de leerlingen eerst zelf een grafiek omschreven hebben, wordt een noodzaak voor deze termen gecreëerd.

Om de helling nog nauwkeuriger te kunnen omschrijven kijken we met een applet (zie figuur 1a) op welk punt een grafiek dezelfde helling heeft als een gegeven lijn (daarvan kunnen we namelijk met de richtingscoëfficiënt al wel nauwkeurig omschrijven hoe deze stijgt of daalt). Met de applet kunnen ze de lijn verplaatsen, waardoor we nog steeds in de belichaamde wereld werken. Ook hier spelen we dus weer in op de intuïtie en voorkennis: de leerlingen weten al wat de helling van een lijn is en je kunt intuïtief aangeven waar deze twee het meest op elkaar lijken. Nu wordt de term raaklijn geïntroduceerd voor een lijn met dezelfde helling als de grafiek in een bepaald punt, die ook door dat punt gaat. Weer volgt de definitie dus pas nadat leerlingen intuïtief kennis hebben gemaakt met het concept. Met behulp van een nieuwe applet (zie figuur 1b) kunnen de leerlingen een raaklijn aan een grafiek tekenen door de lijn te verplaatsen en de helling aan te passen. De lijn kan weer verplaatst worden zonder symbolisch te hoeven werken, wel wordt de formule weergegeven en deze moet ook als antwoord worden ingevuld.

Nu gaan we meerdere raaklijnen bij een grafiek tekenen, de leerling moet de hellingen goed zetten (zie figuur 1c). Hierbij worden de raaklijnen als kortere lijnstukken getekend, overeenkomend met de symbolen die bij de lesson study (Verhoef et al., 2012) worden gebruikt. Om de helling aan te passen, moet een punt in de verticale richting worden

verplaatst. De y-coördinaat van dit punt geeft de helling aan. Als voor vijf punten op de grafiek de raaklijn juist getekend is, wordt door de punten die de helling weergeven de grafiek van de afgeleide getekend. Het ontwerp van de applet is geïnspireerd op de oefening ‘derivative intuition’ op Khan Academy (2012). Aangezien als eerste grafiek een parabool gekozen is, is het lineaire patroon in de vijf punten erg duidelijk en is het tekenen van een rechte lijn door die vijf punten een aannemelijke stap. Daarna wordt de term afgeleide functie geïntroduceerd.

In de daaropvolgende applets moeten de leerlingen op zoek gaan naar regelmaat in de grafieken die ontstaan als ze de raaklijnen goed zetten voor grafieken van de vorm $y = ax$, $y = x + b$ en $y = x^n$. We wijken hier dus af van de aanpak in de lesson study (Verhoef et al., 2012) en gaan niet inzoomen om op zoek te gaan naar lokale rechtheid, waarbij impliciet toch het limietbegrip gebruikt wordt. In plaats daarvan zoeken we naar patronen in de data die gegenereerd wordt door in een aantal punten de helling te bekijken. Kijken we bijvoorbeeld naar verschillende grafieken van de vorm $y = ax$ en zoeken we steeds naar de afgeleide functie door in vijf punten de raaklijn te tekenen, dan is al snel te zien dat de afgeleide functie steeds van de vorm $y = a$ is. Op dezelfde manier is te zien dat een constante geen invloed heeft op de afgeleide en dat voor een functie van de vorm $y = x^n$ de afgeleide $y = n \cdot x^{n-1}$ is. Er is wordt dus geen strikte afleiding gegeven, maar we maken het begrip afgeleide en de rekenregels aannemelijk door onze observaties van verschillende grafieken.

Aan het eind van de les worden de differentieerregels die ze zo zelf hadden kunnen ontdekken nogmaals op een rijtje gezet. Daarna kunnen de leerlingen aan de slag gaan met enkele opgaven in het boek over hellinggrafieken (begin paragraaf 3). Zie appendix A voor de volledige eerste les.

3.2.2 Lesverloop

In tabel 1 staat kort aangegeven wat er per klas in elke les is behandeld. Een gedetailleerdere omschrijving van de gegeven lessen is te vinden in appendix B. In beide controlegroepen is uitsluitend gewerkt met het materiaal uit het boek van Getal en Ruimte (2010). In de testgroep is naast het boek van Getal en Ruimte gebruik gemaakt van zelf ontwikkeld materiaal dat via een ELO is aangeboden tijdens de eerste les. De leerlingen hebben daarbij naast het boek ook de beschikking over de leerlingenset waarin naast een digitaal boek en alle uitwerkingen ook extra oefeningen en uitleg over de grafische rekenmachine (GR) is opgenomen.

les	testgroep	controlegroepen
0	voorkennis herleiden merkwaardige producten en breuken	
1	het concept afgeleide, volgens nieuw ontwikkeld materiaal (zie sectie 3.2.1)	voorkennis herleiden merkwaardige producten en breuken, soorten stijgen en dalen, differentiequotiënt bij gegeven grafiek
2	raaklijn, optie 'dy/dx' op de GR, bepalen afgeleide van polynoom	differentiequotiënt bij tijd-afstandgrafiek, gemiddelde snelheid, differentiequotiënt bij formule berekenen
3	differentiequotiënt (zowel bij grafiek als bij formule) en gemiddelde snelheid	snelheid op één moment, raaklijn, optie 'dy/dx' op de GR
4	herhaling	hellinggrafieken
5		limietdefinitie afgeleide, afleiden rekenregels voor polynomen, bepalen afgeleide van polynoom

Tabel 1: Lesverloop in de testgroep en controlegroepen

Door het uitvallen van een aantal lessen is het in groep B niet gelukt om les 5 nog voor het geplande proefwerk te geven, waardoor de proefwerkstof voor alle klassen is aangepast en dus alleen het materiaal dat in de controlegroepen in les 1 t/m 4 behandeld is omvatte.

Verschillen De verschillen tussen de lessen zoals die zijn gegeven in de controlegroepen en de testgroep zijn tweeledig: ten eerste is in de testgroep de introductieles gebaseerd op de *sensible* aanpak gegeven en ten tweede is de stof in de omgekeerde volgorde behandeld (van afgeleide naar raaklijn naar differentiequotiënt). Beide verschillen hebben tot doel om af te stappen van de limietdefinitie. Als wel begonnen wordt met de differentiequotiënt en daarna de raaklijn, kijkt men toch naar steeds kleinere intervallen te

kijken en gebruikt dus impliciet het limietproces.

3.3 Instrumenten

Voor de dataverzameling is gebruik gemaakt van twee toetsinstrumenten: een proefwerk en een schriftelijke overhoring. De proefwerken zijn door de eigen docent nagekeken, waarna de scores per onderdeel voor het onderzoek zijn meegenomen. De schriftelijke overhoringen zijn nagekeken door de onderzoeker en naast de puntenverdeling zijn de antwoorden ook gegroepeerd naar type. Hiervoor is bijvoorbeeld gekeken welke methode (bij het bepalen van een helling bijvoorbeeld: symbolisch differentiëren, klein interval-methode, rekenmachine optie, enz.) de leerlingen gebruikt hebben. Voor de analyse is zowel gekeken naar de behaalde punten, waarbij de vragen zijn onderverdeeld in conceptueel begrijpen en procedureel vloeiend werken, als naar de verdeling van de types antwoorden.

In de volgende secties worden de toetsinstrumenten besproken, waarbij ook gekeken wordt naar welke onderdelen voornamelijk procedureel vloeiend werken en welke voornamelijk conceptueel begrijpen toetsen.

3.3.1 Proefwerk

Alle leerlingen hebben hetzelfde proefwerk gemaakt. Dit proefwerk ging over hoofdstuk 1 (functies en grafieken) uit het boek van Getal en Ruimte en hoofdstuk 2 tot en met opgave 31. Het materiaal uit hoofdstuk 1 was grotendeels al eens eerder getoetst. De toets bestond uit 5 vragen, waarvan de eerste twee over hoofdstuk 1 gingen en de laatste drie vragen over hoofdstuk 2. De vragen over hoofdstuk 2 worden hieronder besproken, het gehele proefwerk staat in appendix C. De leerlingen kregen voor dit proefwerk 60 minuten de tijd.

Vraag 3: differentiequotiënten In onderdeel a moet de grafiek geschetst worden bij de formule $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 6x - 5$. Hiervoor moeten de leerlingen hun grafische rekenmachine gebruiken. De scherminstellingen moeten zo gekozen worden dat alle snijpunten met de assen en toppen zichtbaar zijn. Voor deze opgave moet de leerling kunnen vertalen van de symbolische naar de grafische weergave van een functie en correct gebruik maken van de grafische rekenmachine.

Voor onderdeel b moeten de leerlingen een differentiequotiënt uitrekenen op het interval $[-3, 0]$. Hierbij kan de schets gebruikt worden om de redelijkheid van het gevonden antwoord te toetsen en als hulpmiddel bij het interpreteren van de vraag. Dit onderdeel test of de leerling een adequate procedure kiest en deze accuraat uitvoert.

In onderdeel c wordt vervolgens gevraagd de formule op te stellen door twee punten A en B op de grafiek met $x_A = 1$ en $x_B = 5$. Hoewel de leerlingen het opstellen van een lijn door twee punten al eerder geleerd hebben, voor de term differentiequotiënt gebruikt wordt, maakt men hierbij natuurlijk wel gebruik van een differentiequotiënt. Ook hier draait het weer om het kiezen van een adequate procedure en deze accuraat uitvoeren.

Alle drie de onderdelen van vraag 3 zijn meegenomen in de procedurele score, aangezien de opdrachten vooral het kiezen en accuraat uitvoeren van een procedure testen. Daarnaast zijn deze opgaven vergelijkbaar met sommen uit het boek, waar de leerlingen uitgebreid mee geoefend hebben.

Vraag 4: snelheid en afstand Bij deze vraag gaat het om een contextopgave over een wegvarende motorboot waarvan de afgelegde afstand gedurende de eerste vijf seconden wordt gegeven door de formule $s = 2t\sqrt{t+1}$. In onderdeel a moet de snelheid na drie seconden worden bepaald, dat kan ofwel met de GR, ofwel door benaderen op een klein interval. In onderdeel b moet de gemiddelde snelheid worden berekend en moet dus weer een differentiequotiënt worden gebruikt. Het laatste onderdeel is wat lastiger. Na vijf seconden verandert de snelheid niet meer en de vraag is na hoeveel seconden de boot 50 meter heeft gevaren. Eerst moet dus de afstand na vijf seconden worden bepaald en de snelheid na vijf seconden. Daarna levert de resterende afstand gedeeld door de snelheid de tijd op die na de vijf seconden nog nodig is. Ook deze vraag toets het procedureel vloeiend werken in de vorm van het kiezen van een adequate procedure en deze accuraat uitvoeren en is dus meegerekend in de procedurele score. Bij onderdeel c komen ook de strategische competenties naar voren, die echter in dit onderzoek niet meegenomen worden.

Vraag 5: hellinggrafieken In de laatste vraag is een grafiek gegeven waarvan de hellinggrafiek geschetst moet worden. Ook moet een grafiek worden geschetst waarvan de gegeven grafiek de hellinggrafiek zou kunnen zijn. Hierbij is vooral het op de juiste plek tekenen van de nulpunten respectievelijk de toppen van belang. Ook hier draait het om het accuraat uitvoeren van een procedure, hoewel deze vraag ook vanuit een goed conceptueel begrip gemaakt zou kunnen worden. Aangezien dit type opdrachten uitgebreid geoefend is en er een duidelijke procedure voor is aangereikt, wordt de vraag meegenomen in de procedurele score.

3.3.2 Overhoring

Naast het proefwerk hebben alle leerlingen een overhoring gemaakt, welke mee zou tellen in het cijfer van het volgende proefwerk, waarvoor ze dertig minuten de tijd hadden. In tegenstelling tot de vragen op het proefwerk, waren de vragen op de overhoring grotendeels onbekend voor de leerlingen, waardoor ze meer gebruik moesten maken voor hun conceptuele begrip. De overhoring is pas gegeven nadat het hele hoofdstuk over de afgeleide functie was behandeld. De verschillende vragen van de overhoring worden hieronder besproken, de exacte formuleringen staan in appendix D.

Vraag 1: definities In de eerste vraag moesten de leerlingen in hun eigen woorden de begrippen differentiequotiënt, helling, raaklijn en afgeleide functie beschrijven. Dit is een type vraag waar leerlingen bij wiskunde niet aan gewend zijn. Het draait hierbij om conceptueel begrippen, dat getoond kan worden door het gebruiken en aan elkaar

relateren van verschillende aspecten van het concept afgeleide. Leerlingen zouden bij de vraag ook alleen procedurele kennis kunnen laten zien door als antwoord te geven welke procedure er bij het begrip hoort (“de differentiequotiënt reken je uit door het verschil in y te delen door het verschil in x ”). Deze vraag is meegenomen in de conceptuele score.

Vraag 2: gegevens interpreteren Bij deze vraag kregen de leerlingen wat informatie over een functie die ze vervolgens moesten schetsen. De gegeven informatie was:

1. Het punt $A(1,2)$ ligt op de grafiek van de functie $f(x)$.
2. Tussen de punten A en B met $x_B = 3$ op de grafiek van $f(x)$ is de differentiequotiënt 1.
3. In het punt A is de helling negatief.
4. Door het punt B gaat een raaklijn l met $rc_l = 3$.

Er moesten twee mogelijke functies worden getekend en de gegeven informatie moest worden uitgelegd. Ook hier komt de conceptuele kennis naar voren: de gegeven informatie moet van een verbale representatie worden omgezet in een grafische, en de vraag wordt dus meegenomen in de conceptuele score.

Vraag 3: extreme waarden Dit was een wat meer procedurele vraag waarbij een afgeleide functie gegeven was en de x -coördinaten van de extreme waarden van de functie gevonden moesten worden. De leerlingen kennen dit type vraag echter alleen in de vorm waarin een functie gegeven is en gevraagd wordt de toppen te berekenen, waarbij ze dus zelf de afgeleide moeten bepalen. De leerlingen moeten hier weer een adequate procedure kiezen en deze accuraat uitvoeren, dus deze vraag telt mee voor de procedurele score.

Vraag 4: helling in een punt De laatste vraag bestond uit drie onderdelen. In elk onderdeel moest, indien mogelijk, de helling van een functie in $x = 1$ worden bepaald. Voor het eerste onderdeel was de formule gegeven, voor het tweede onderdeel een tabel en als laatste de grafiek met een scherpe knik bij $x = 1$. De leerlingen moesten dus eerst bedenken of het bepalen van de helling wel mogelijk was en daarna een geschikte methode kiezen om deze te bepalen. Ook hier komt het conceptueel begrijpen naar voren in het werken met verschillende representaties. Ook voor het beredeneren of het bepalen van de helling mogelijk is, is een goed conceptueel begrip nodig. Staat dat eenmaal vast, dan moet er een adequate procedure gekozen worden en moet deze accuraat worden uitgevoerd. Aangezien dit laatste van minder groot belang is (vooral bij onderdeel b en c), is de vraag meegenomen bij de conceptuele score.

4 Analyse

Om te kunnen vergelijken of de leerlingen uit de testgroep een beter conceptueel begrip hebben dan de leerlingen uit de controlegroepen, moeten de antwoorden van het proefwerk en de overhoring worden verwerkt tot een conceptueel en procedureel begrip score (zie ook sectie 3.3.1 en 3.3.2 voor de indeling in procedureel/conceptueel per vraag). Voor het procedurele begrip zijn de drie vragen van het proefwerk en vraag 3 van de overhoring meegenomen. Voor het conceptuele begrip is gekeken naar de overige drie vragen van de overhoring. De scores zijn vervolgens omgerekend naar een percentage behaalde punten en ingedeeld in de categorieën onvoldoende (0-55%), voldoende (55-75%) en goed (75-100%). Op deze scores zijn een Pearson Chi-kwadraat toetsen uitgevoerd worden om te toetsen of de resultaten van een bepaalde variabele afhankelijk zijn (bijvoorbeeld de klas waarin de leerling les gehad heeft of het profiel van de leerling). Ook is er gekeken of er een correlatie is tussen de conceptuele en procedurele scores.

Er is ook nog in detail gekeken naar de antwoorden op de vragen van de overhoring. De verschillende antwoorden zijn in categorieën ingedeeld en naast de scores is ook gekeken of de verdeling over de categorieën per klas verschilde. Details over de indeling van de antwoorden staan in appendix E. Per vraag is weer een Pearson Chi-kwadraattoets uitgevoerd om te kijken of de verdeling van het soort antwoorden significante verschillen geeft tussen de groepen.

5 Resultaten

De in de analyse besproken scores voor procedureel vloeiend werken en conceptueel begrijpen, zijn per klas weergegeven in tabel 2.

klas	procedureel			conceptueel		
	onvoldoende	voldoende	goed	onvoldoende	voldoende	goed
test	4	8	13	14	8	3
A	6	7	13	13	10	3
B	4	9	14	18	6	3

Tabel 2: Scores op procedurele en conceptuele onderdelen

Meteen is al zichtbaar dat alle klassen op de procedurele onderdelen veel beter scoren dan op de conceptuele. Kijkt men binnen één klas naar de correlatie tussen de procedurele en de conceptuele score, dan blijkt deze voor testgroep veel hoger te zijn (0,7) dan voor de controlegroepen (respectievelijk 0,3 en 0,2). Om te bepalen of de procedurele en conceptuele scores afhankelijk zijn van de klas waarin de leerling les gehad heeft, is een Pearson Chi-kwadraat toets uitgevoerd. De gevonden p-waardes (0,94 voor de procedurele scores en 0,77 voor de conceptuele) geven aan dat deze onafhankelijk zijn van de klas.

Omdat op het niveau van de totaalscores geen verschil is te zien, is ook nog in detail gekeken naar de antwoorden op de vragen van de overhoring. De resultaten hiervan staan in tabel 3.

vraag	p-waarde
1a	0,6659
1b	0,4168
1c	0,9224
1d	0,5473
2b	0,4806
2c	0,4361
2d	0,2311
3	0,0067
4a	0,4385
4b	0,6319
4c	0,1247

Tabel 3: resultaten Chi-kwadraattoets per vraag

We vinden dus alleen een significant ($p < 0,05$) verschil bij vraag 3. Het ging hierbij om de vraag waar bij een gegeven afgeleide de x-coördinaten van de toppen van de grafiek berekend moesten worden. Er werden hierbij vier types antwoorden onderscheiden:

afgeleide nul stellen en integreren waren twee adequate procedures, daarnaast heeft een aantal leerlingen, foutief, het minimum van de afgeleide bepaalt en waren er nog enkele andere foutieve antwoorden.

klas	afgeleide nul	integreren	minimum afgeleide	overig
test	6	13	3	
A	19	4	1	2
B	9	16	1	1

Tabel 4: Antwoorden vraag 3: extreme waardes

Kijken we naar tabel 4, dan valt op dat de testgroep en groep B een vergelijkbare verdeling hebben, maar dat in groep A veel vaker voor de methode afgeleide nul stellen is gekozen en bijna niet voor integreren. Aangezien de testgroep dus maar van een van beide controlegroepen afwijkt, lijkt de gebruikte methode hier niet de onderliggende oorzaak.

6 Conclusies en discussie

Ondanks de verschillende methodes die gebruikt zijn in de testgroep en de controlegroepen, zijn er geen significante verschillen gevonden tussen de resultaten van de verschillende groepen. Er was slechts één onderdeel van de overhoring waarop een van de controlegroepen een significant andere verdeling van de gekozen oplossingsmethodes had, de andere controlegroep was hier echter vergelijkbaar met de testgroep. Het antwoord op de onderzoeksvraag “Leidt een meer *sensible* introductie van de differentiaalrekening tot meer conceptueel begrip bij leerlingen” zal aan de hand van dit onderzoek dus nee moeten luiden. Hier kunnen we echter nog wel een aantal kanttekeningen bij plaatsen, namelijk het beperkte aantal klassen, de kleine verschillen tussen de lesmethodes en de zuiverheid van de toets. Ook de correlatie tussen de procedurele en conceptuele scores levert nog een mogelijkheid tot verder onderzoek.

Voor het onderzoek zijn slechts drie klassen meegenomen en de onderlinge verschillen tussen leerlingen in een klas zijn vrij groot (de standaarddeviaties voor de resultaten liggen rond de 18%). Hierdoor wordt het lastig om significante verschillen te bereiken. Aangezien uit het onderzoek ook niet gebleken is dat de methode een negatief resultaat oplevert, zou dit probleem opgelost kunnen worden door het onderzoek nog een aantal jaren voort te zetten en de resultaten te combineren. Door op deze manier meer resultaten te verzamelen worden de onderlinge verschillen van de leerlingen minder belangrijk. Gezien de door Roorda (2012) gevonden onderlinge verschillen tussen leerlingen ook in gedetailleerde interviews erg groot zijn gebleken, lijkt het verzamelen van meer data de enige manier om een significant resultaat te bereiken.

Naast de beperkte hoeveelheid data, zou ook het kleine verschil tussen beide lesmethodes een reden kunnen zijn dat er geen verschillen zijn gevonden. Na de introductieles heeft ook de testgroep les gehad uit hetzelfde boek en dit boek ook gebruikt voor het leren voor de toetsen. Indien voor het hele onderwerp apart materiaal wordt ontwikkeld waarin continu aandacht wordt besteed aan het *sensible* maken, zullen de verschillen waarschijnlijk groter zijn. Het is echter lastig om voor slechts één groep alternatief materiaal te maken wat veel verschilt van het boek, aangezien de klassen wel allemaal het gecoördineerde proefwerk moeten maken. Ook het in een andere volgorde behandelen van de stof kan daardoor problemen opleveren als door lesuitval de planning aangepast moet worden en de klassen niet meer gelijk lopen ten tijde van het proefwerk.

Tenslotte nog een kanttekening bij de zuiverheid van de gebruikte meetinstrumenten. De vragen van het proefwerk, die grotendeels de procedurele score bepaalden, leken vrij veel op de vragen uit het boek. Dit in tegenstelling tot de vragen die meetelden voor de conceptuele score. Herkenning van de vragen kan dus ook een grote rol spelen bij het halen van een hoge procedurele score: het kiezen van een juiste procedure was hierdoor waarschijnlijk makkelijker. Voor alle klassen gold dan ook dat de procedurele score hoger was dan de conceptuele score. In dit onderzoek zal dit geen grote invloed gehad hebben op het vergelijken van de onderlinge verschillen van de klassen, aangezien de herkenning bij alle leerlingen in gelijke mate mogelijk was. Wordt er echter in de testgroep meer van het boek afgeweken, dan zal dit wel degelijk een effect kunnen hebben, aangezien

de herkenning dan in de testgroep in mindere mate zou kunnen optreden dan in de controlegroepen.

Naast deze kanttekeningen verdient ook het opvallende verschil in de correlaties tussen procedurele en conceptuele scores verdere aandacht. In de testgroep bleek de correlatie tussen de scores veel hoger dan in de controlegroepen. Gezien de verwevenheid van procedurele en conceptuele kennis, is een sterke correlatie tussen de twee scores te verwachten. Deze correlatie was echter in de controlegroepen niet aanwezig. De achterliggende oorzaak van dit verschil is niet duidelijk, misschien dat een gedetailleerder onderzoek naar de conceptuele en procedurele kennis, door middel van een opdrachtgebaseerd interview, hier wel meer duidelijkheid zou kunnen verschaffen.

Referenties

- Daemen, J. & Roorda, G. (2012). De afgeleide in breed perspectief. In *Handboek vakdidactiek wiskunde* (pp. 1-39). ELWIeR/Freudenthal instituut.
- Khan Academy. (2012). Derivative intuition. Verkregen 11 mei 2013, van https://www.khanacademy.org/math/calculus/differential-calculus/visualizing-derivatives-tutorial/e/derivative_intuition
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*.
- Reichard, L., Dijkhuis, J. & Admiraal, C. (2010). *Getal & ruimte; vwo B deel 1* (eerste opl). Noordhoff Uitgevers.
- Roorda, G. (2012). *Ontwikkeling in verandering*. (Proefschrift).
- Tall, D. (2004). Introducing Three Worlds of Mathematics. In *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 281-288).
- Verhoef, N., van Smaalen, D. & Pieters, J. (2012). *Sensible mathematics: een zoektocht aan de hand van lesson study*.

A Appendix: Materiaal introductieles testgroep

Op de volgende pagina's volgt een overzicht van het materiaal dat tijdens de introductieles (les 1) in de testgroep gebruikt is. Dit materiaal is aangeboden via een ELO, waarbij elke vraag op een nieuwe pagina stond en de leerlingen de antwoorden ook konden invullen. De gesloten vragen werden daarbij meteen beoordeeld en de resultaten werden teruggekoppeld.

Vraag 1

Voor deze opdracht heb je een partner nodig, zoek die dus eerst even.

Een van jullie moet zo meteen een grafiek beschrijven, de ander moet tekenen.

Kies hieronder jouw rol (zorg dus dat je allebei iets anders kiest!).

Let op: als je gaat beschrijven, zorg dan dat je partner niet op jouw scherm kan kijken!

☐ Ik ga beschrijven

☐ Ik ga tekenen

Vraag 2a (beschrijven)

Jouw taak is om de grafiek hieronder te omschrijven, je partner gaat de grafiek na tekenen. Je mag niet kijken wat hij/zij tekent en geen coördinaten noemen.



Vul in welke termen je gebruikt hebt.

Vraag 2b (tekenen)

Je partner gaat zijn/haar grafiek beschrijven, jij gaat proberen de grafiek te tekenen. Doe dat op een los blaadje en laat je tekening pas aan je partner zien als je helemaal klaar bent.

[Mijn tekening is klaar](#)

Vraag 3

Hieronder zie je nogmaals de originele grafiek.



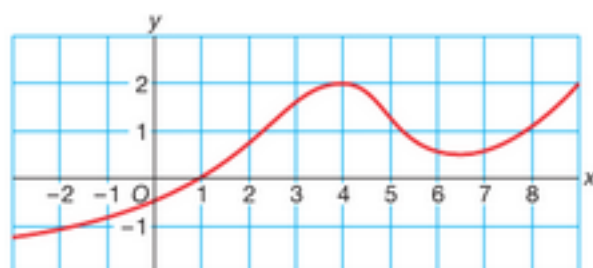
Lijkt dit op de tekening? Wat is er anders?

Vraag 4

Voor het beschrijven van een grafiek ken je al de termen stijgend, dalend en constant. Maar soms willen we nauwkeuriger zijn. Daarom voeren we een aantal extra termen in: toenemend en afnemend.

Soorten van stijgen en dalen			
stijging	constant	toenemend	afnemend
			
daling	constant	toenemend	afnemend
			

Zoek voor de grafiek hieronder bij elk interval de juiste term.



Op het interval $\langle -3, 2 \rangle$ is de grafiek

Op het interval $\langle 2, 4 \rangle$ is de grafiek

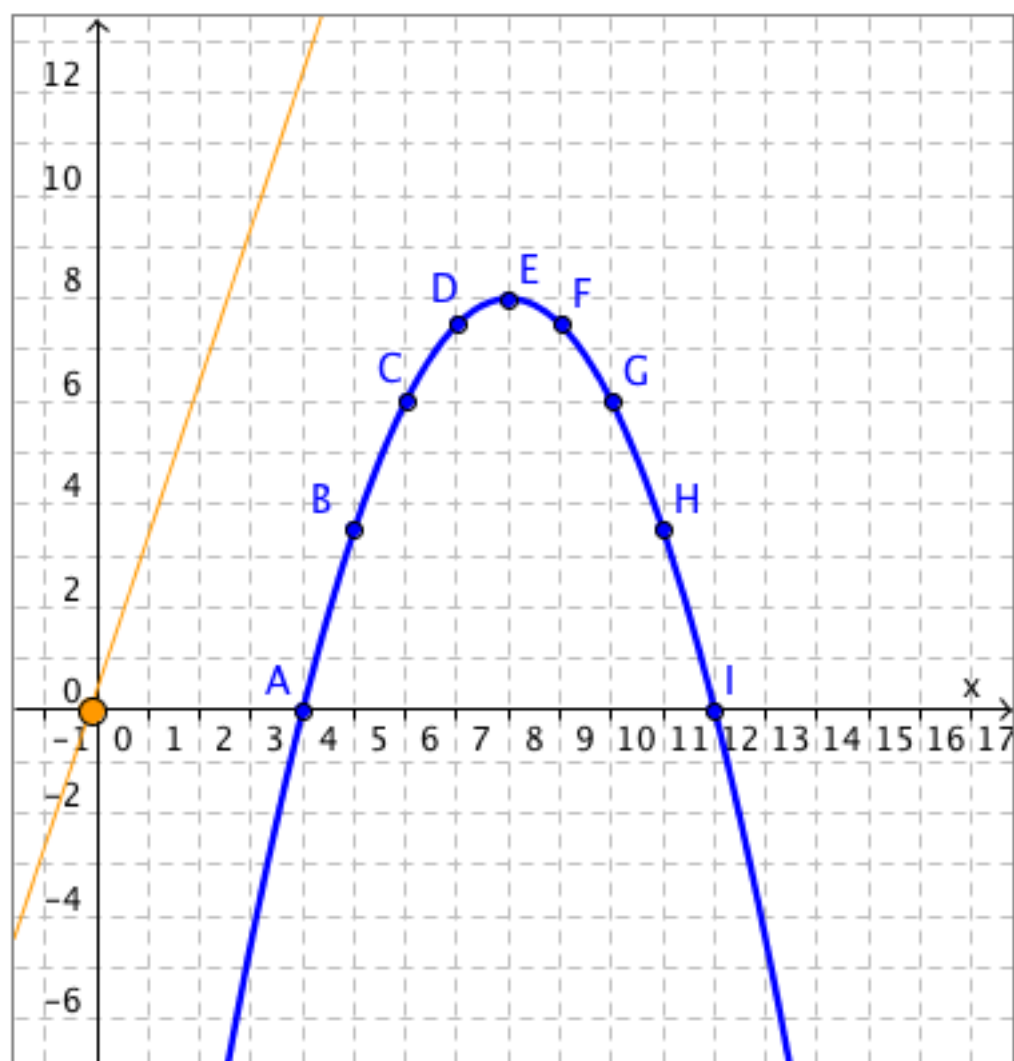
Op het interval $\langle 4, 5 \rangle$ is de grafiek

Op het interval $\langle 5, 6,5 \rangle$ is de grafiek

Vraag 5

Hoe zouden we nog nauwkeuriger kunnen beschrijven hoe een grafiek verandert? Bij een lijn weet je dat al, daar gebruiken we de richtingscoëfficiënt om aan te geven hoeveel de lijn toe- of afneemt. Zouden we zoiets ook bij een andere grafiek kunnen doen?

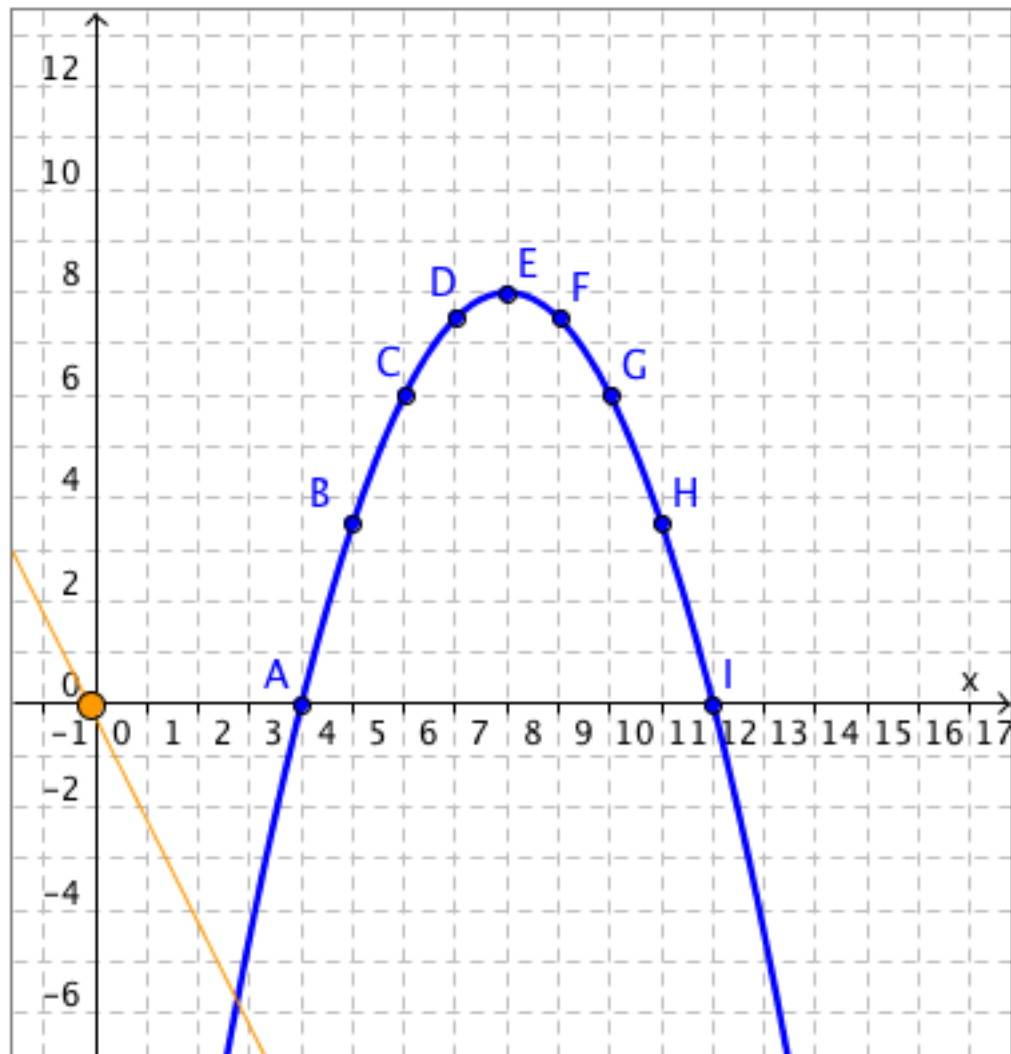
Zoek met behulp van de applet hieronder uit in welke punten van de parabool de helling gelijk is aan die van een lijn met helling 3. Je kunt de lijn verplaatsen door het oranje punt te verslepen.



In welk punt op de grafiek is de helling 3?

Vraag 6

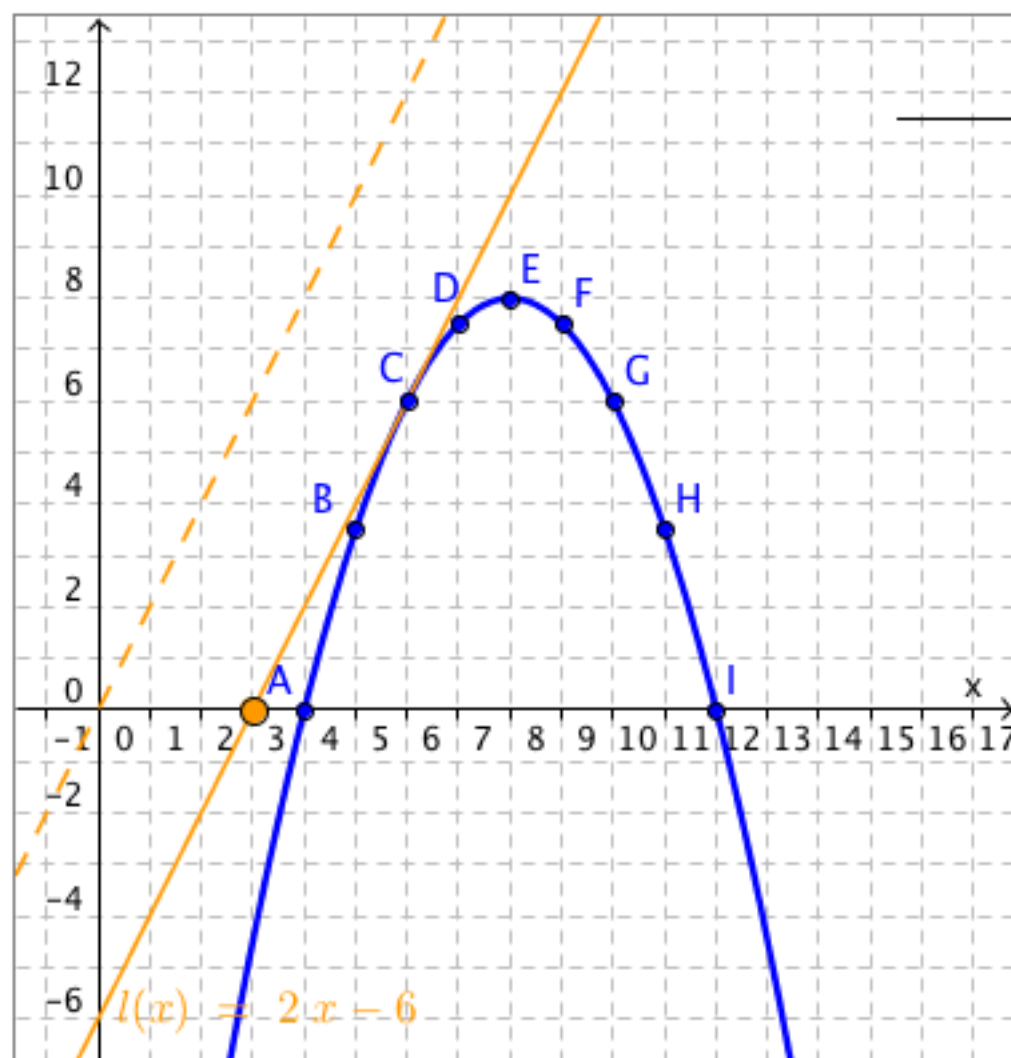
Zoek nu het punt op de grafiek waar de helling -2 is.



In welk punt op de grafiek is de helling -2?

Vraag 7

Zoals je hebt gezien kun je op een grafiek zoeken naar een punt dat dezelfde helling heeft als een gegeven lijn. Als de lijn ook nog door dat punt gaat, noemen we het een **raaklijn**. In de applet zie je de raaklijn aan het punt C.



Gebruik de applet om de raaklijn aan het punt I te tekenen. Met de schuifbalk rechtsboven kun je de helling van de lijn aanpassen.

☐ $y = 2x - 6$

☐ $y = 2x - 24$

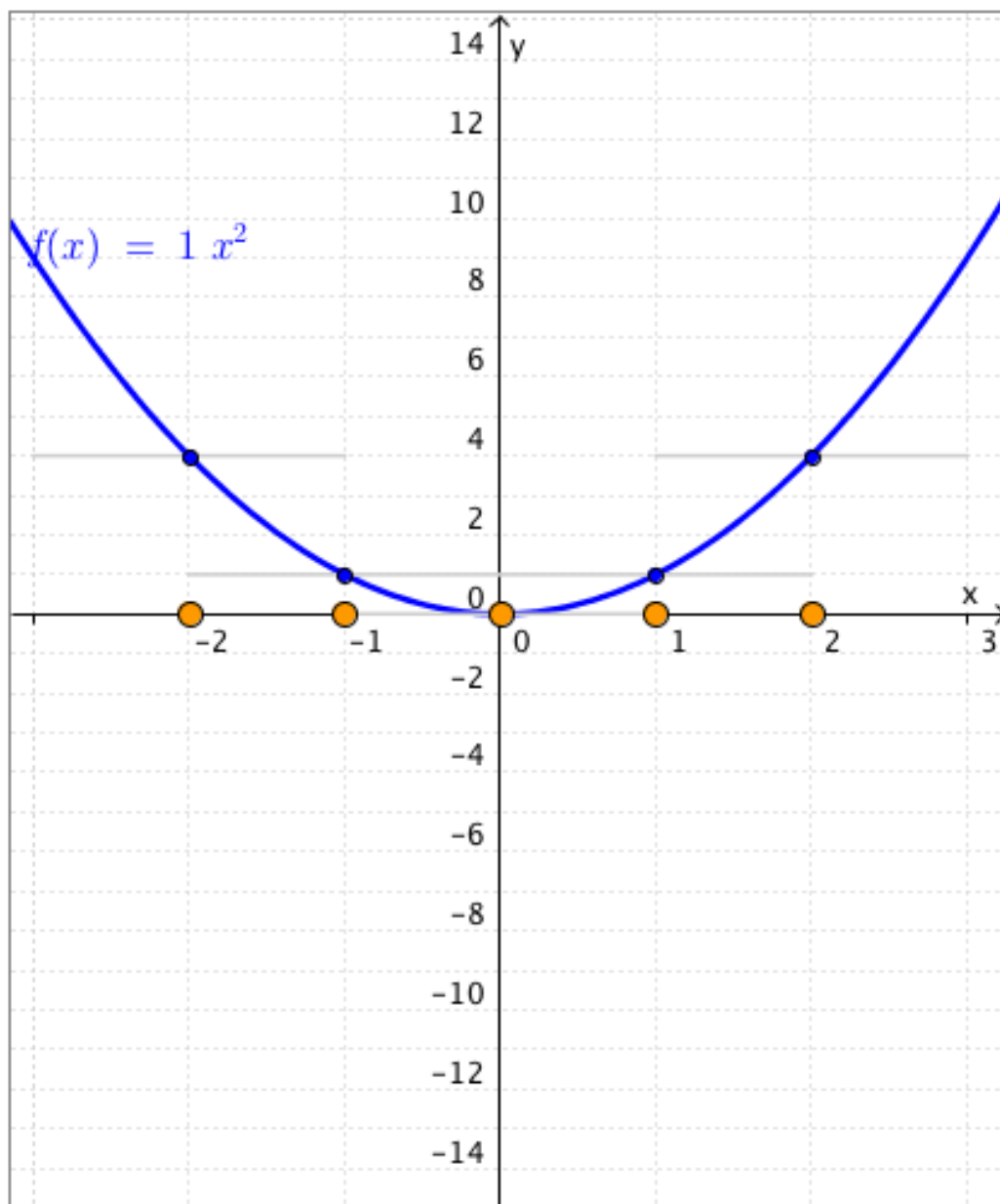
☐ $y = -4x + 48$

☐ $y = -3x + 36$

Vraag 8

We hebben gezien dat je de helling in een punt van een grafiek kunt omschrijven met de richtingscoëfficiënt van een lijn die aan de grafiek raakt. Wat gebeurt er nu als we dat in meerdere punten van de grafiek doen?

In de applet kun je door de oranje punten te verslepen de helling van de grijze lijnen aanpassen. De y-coördinaat van een oranje punt geeft de helling van de grijze lijn die er bij hoort. Zet ze zo neer dat alle grijze lijnen de helling van de grafiek weergeven.



Als je het goed gedaan hebt, dan verschijnt er een oranje lijn die door de punten gaat. Wat is de vergelijking van deze lijn?

☐ $y = x^3$

☐ $y = x$

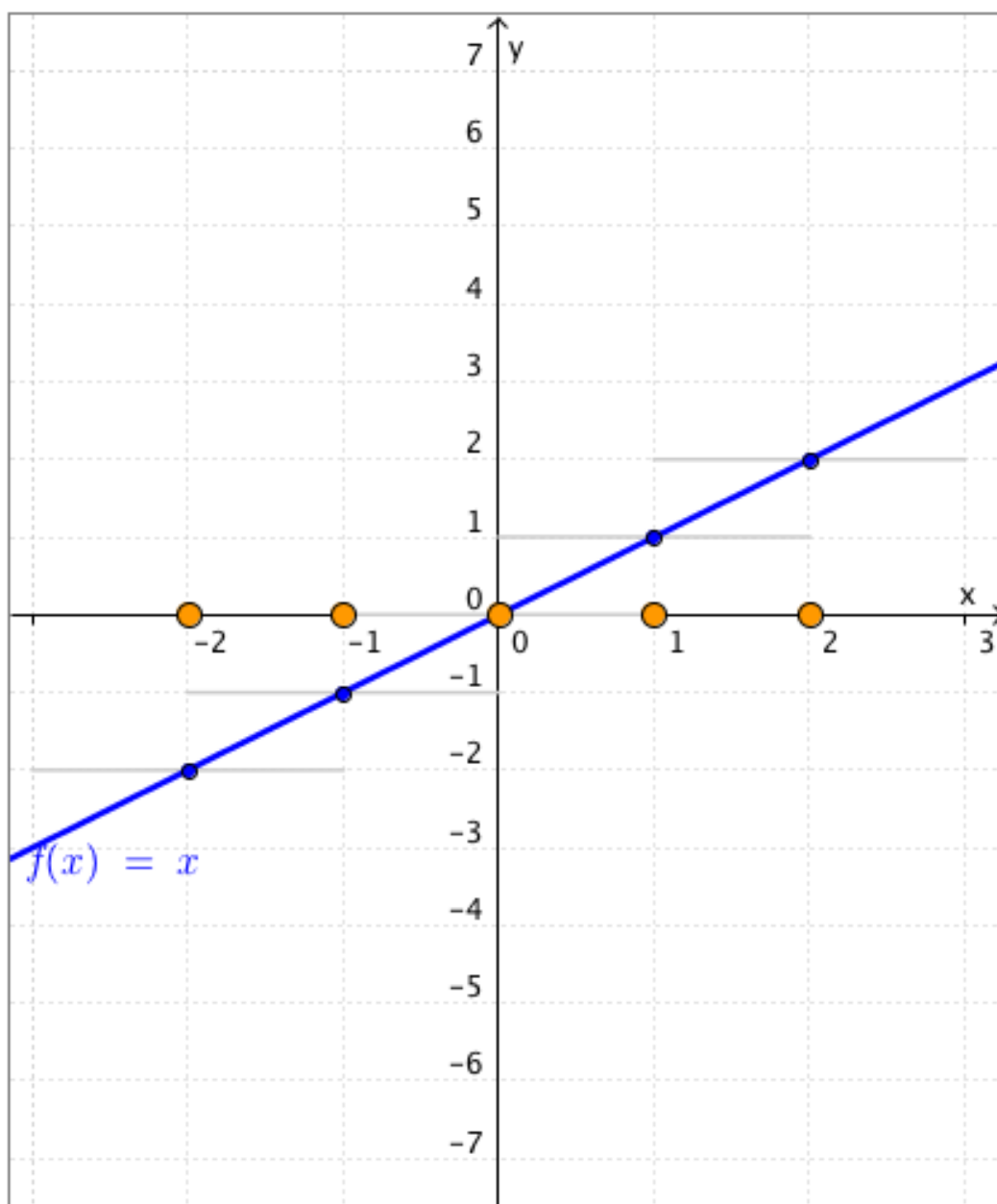
☐ $y = 2x$

☐ $y = x^2$

Vraag 9

In de vorige opdracht heb je kunnen zien dat als je van een aantal punten van een grafiek de helling bekijkt, dat daar dan een mooie functie doorheen gaat. Die functie noemen we de **afgeleide functie**, ook wel **afgeleide**. De afgeleide geeft dus voor elk punt van de grafiek aan, hoe de grafiek daar verandert.

In het geval van de parabool $y = x^2$ heb je gezien dat de afgeleide een rechte lijn is, namelijk $y = 2x$. Gebruik de applet om te onderzoeken wat de afgeleide is bij functies van de vorm $y = ax$. Rechtsboven kun je andere waarden voor a kiezen.



Formuleer een vermoeden voor wat de afgeleide is van een functie van de vorm $y = ax$.

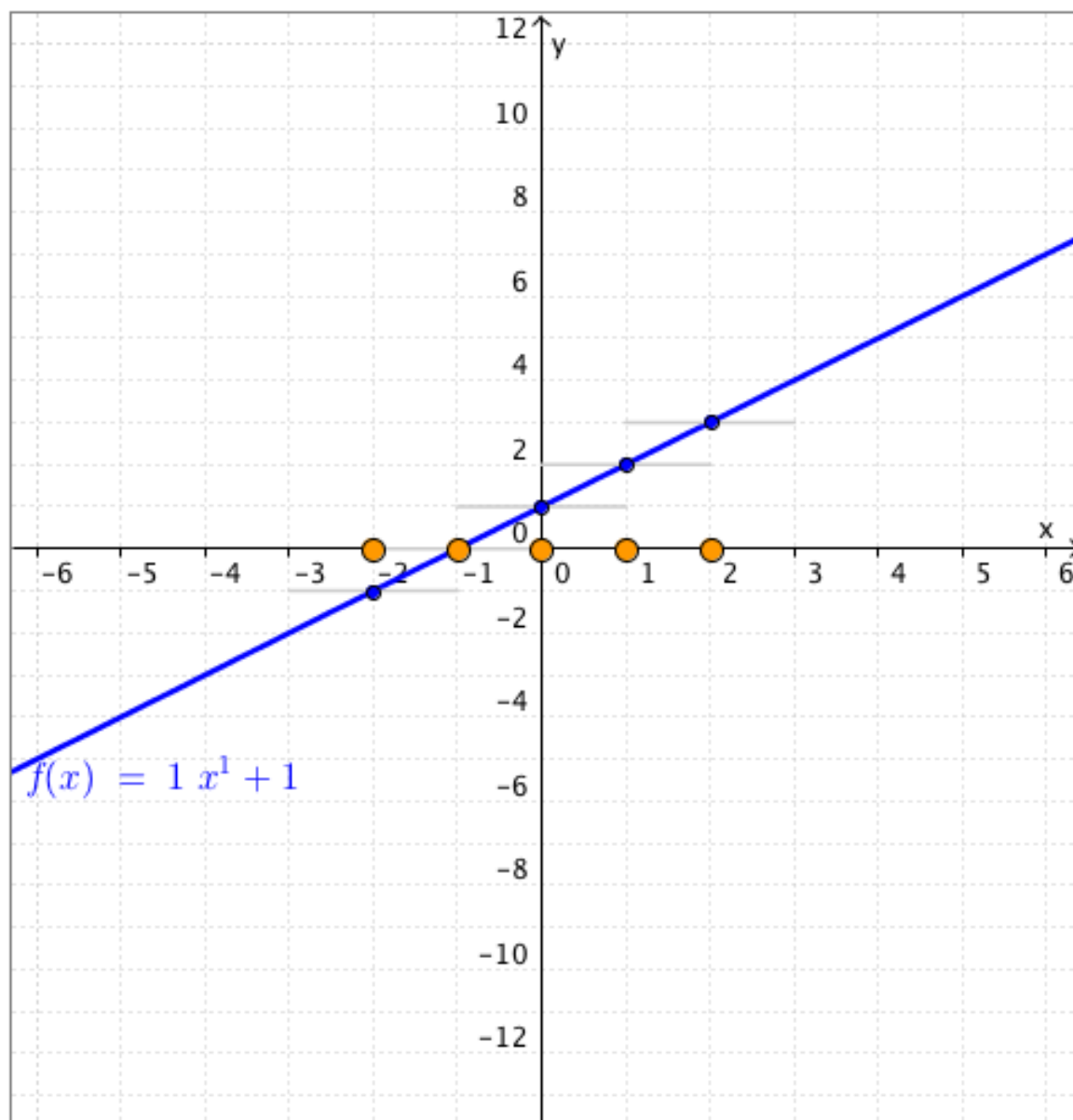
Vraag 10

In de vorige opgave heb je gekeken naar de afgeleide van lineaire functies van de vorm

$$y = ax.$$

Nu gaan we kijken naar functies van de vorm $y = x + b$.

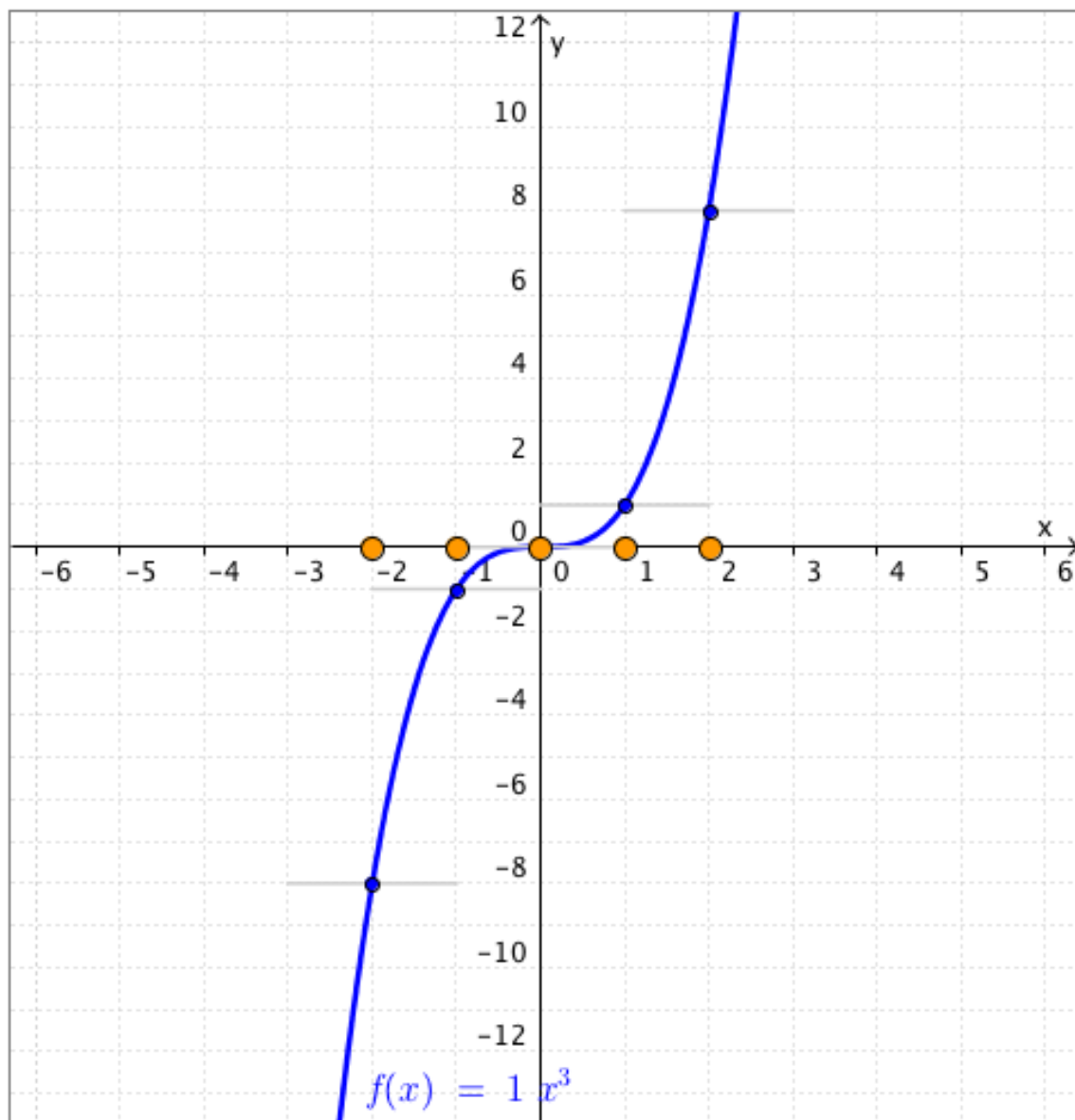
Gebruik weer de applet om een patroon te zoeken.



Formuleer een vermoeden voor de afgeleide van $y = x + b$. Leg ook uit waarom je dit resultaat krijgt.

Vraag 11

Laten we nu eens kijken naar functies van de vorm $y = x^n$. Gebruik weer de applet om een patroon te zoeken door voor verschillende waarden van n de afgeleide te tekenen.



Formuleer een vermoeden voor de afgeleide functie van $y = x^n$.

Vraag 12

We hebben vandaag gezien dat je kan beschrijven hoe een grafiek verandert door te kijken naar de helling van een lijn die aan de grafiek raakt, de raaklijn. Als we dat voor alle punten op de grafiek doen, krijgen we een nieuwe functie die we de afgeleide noemen. We noemen dit ook wel de hellingfunctie en de bijbehorende grafiek heet dan de hellinggrafiek.

Je hebt ook gezocht naar verbanden tussen de grafiek en de afgeleide. Deze verbanden kun je gebruiken om de formule van de afgeleide uit te rekenen, dat noemen we ook wel **differentiëren**. Als het goed is heb je de volgende verbanden gevonden:

- $y = ax$ -> afgeleide is $y = a$
- $y = b$ -> afgeleide is $y = 0$
- $y = x^n$ -> afgeleide is $y = nx^{n-1}$

Je gaat nu weer verder met sommen uit het boek, namelijk opgave 24 t/m 29. Vraag daarvoor een werkblad aan de docent.

Ik pak mijn boek en schrift en ga aan het werk.

B Appendix: Lesverloop

Lesverloop controlegroepen

In beide controlegroepen is uitsluitend gewerkt met het materiaal uit het boek van Getal en Ruimte (2010). De leerlingen hebben daarbij naast het boek ook de beschikking over de leerlingenkit waarin naast een digitaal boek en alle uitwerkingen ook extra oefeningen en uitleg over de grafische rekenmachine (GR) is opgenomen.

Les 1: voorkennis en differentiequotiënt

Het hoofdstuk ‘De afgeleide functie’ begint met een stuk voorkennis over het herleiden van merkwaardige producten en breuken, waarbij ook aandacht is voor het herleiden van $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ voor verschillende functies $f(x)$. Daarna begint de paragraaf ‘het differentiequotiënt’ waarvan in les 1 de onderdelen soorten van stijgen en dalen en het differentiequotiënt bepalen bij een gegeven grafiek zijn behandeld. De notaties $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ worden ingevoerd en ook wordt uitgelegd dat de differentiequotiënt de gemiddelde toename is op een interval, ofwel de richtingscoëfficiënt of helling van de lijn tussen twee punten.

Les 2: gemiddelde snelheid

In les twee is het resterende deel van paragraaf 1 behandeld. Eerst werd gekeken naar de differentiequotiënt in een afstand-tijdgrafiek en de bijbehorende interpretatie als gemiddelde snelheid. Daarna wordt uitgelegd hoe de differentiequotiënt te berekenen is als de formule bekend is waarbij de notatie $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ wordt gebruikt. Naast veel vragen waarin differentiequotiënten moeten worden berekend, wordt hier ook enige reflectie gevraagd met de opgaven “Gegeven een tijd-afstandsgrafiek die afnemend stijgend is. Wat kun je zeggen van de gemiddelde snelheid op het interval $[0, t]$ als je t steeds groter neemt?”. “Wat weet je van de differentiequotiënt van een lineaire functie?” en het tekenen van een mogelijke grafiek bij een aantal gegeven differentiequotiënten en een beginpunt.

Les 3: raaklijn en snelheid

In de derde les is paragraaf twee ‘Raaklijnen en snelheden’ behandeld. Aan de hand van een opgave over een boete voor te hard rijden, ondanks dat de gemiddelde snelheid lager was dan het toegestane maximum, wordt de noodzaak voor *snelheid op één moment* gecreëerd. In eerste instantie wordt deze met de hand benaderd door de differentiequotiënt op een klein interval ($\Delta t = 0,01$ of $\Delta t = 0,0001$) te berekenen. In een reflectievraag moeten de leerlingen nadenken over waarom we Δt niet 0 mogen nemen. Hierna wordt de raaklijn geïntroduceerd door op een steeds korter interval de koorde te tekenen. Met behulp van de GR kan de richtingscoëfficiënt worden bepaald met de optie ‘dy/dx’. De notatie $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$ wordt ingevoerd en omschreven als de richtingscoëfficiënt van de raak-

lijn in A, ofwel de helling van de grafiek in A, ofwel de snelheid waarmee y verandert voor $x = x_A$.

Les 4: hellinggrafieken

In de vierde les is een begin gemaakt met paragraaf 3 ‘Limiet en afgeleide’. In het eerste deel van deze paragraaf wordt het schetsen van hellinggrafieken behandeld. Naast het schetsen van een hellinggrafiek bij een gegeven grafiek of functie, moeten leerlingen ook aan de hand van een hellinggrafiek een mogelijke grafiek van de originele functie tekenen. Heel kort wordt ook het tekenen van hellinggrafieken met behulp van de GR getoond.

Les 5: limietdefinitie en rekenregels

In les vijf is het resterende deel van paragraaf 3 behandeld. Eerst worden voor de hellingfunctie de nieuwe naam afgeleide functie en notatie f' geïntroduceerd. Na de omschrijving dat de afgeleide voor elke x de richtingscoëfficiënt van de raaklijn en de helling van de grafiek in het bijbehorende punt geeft, volgt de limiet-definitie van de afgeleide: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Deze wordt vervolgens gebruikt om een aantal afgeleides te berekenen en om differentieerregels aan te tonen. Hierna volgen de regels voor het differentiëren van polynomen en wordt daarmee geoefend.

Door het uitvallen van een aantal lessen is het in groep B niet gelukt deze laatste les nog voor het geplande proefwerk te geven, waardoor de proefwerkstof voor alle klassen is aangepast en dus alleen het materiaal dat in les 1 t/m 4 behandeld is omvat. In de laatste les voor het proefwerk is er altijd gelegenheid om nog te oefenen met de diagnostische toets en of gemengde opgaven en om vragen te stellen.

Lesverloop testgroep

In de testgroep is naast het boek van Getal en Ruimte (2010) gebruik gemaakt van zelf ontwikkeld materiaal dat via een ELO is aangeboden tijdens de eerste les. In plaats van, zoals in het boek gebeurt, naar steeds kleinere intervallen te kijken en gebruik te maken van het limietbegrip, zijn we begonnen met een intuïtief, *sensible* begrip van de afgeleide en hebben vervolgens teruggewerkt naar de differentiequotiënt.

Les 0: voorkennis

Voordat we begonnen zijn met de lessen over de afgeleide hebben de leerlingen de voorkennis van hoofdstuk 2, over het herleiden van merkwaardige producten en breuken al gemaakt.

Les 1: het concept afgeleide

Aangezien de eerste les via een ELO is aangeboden aan de leerlingen, vond deze in het computerlokaal plaats. Om te zorgen dat de leerlingen gemotiveerd en serieus mee zouden doen met deze activiteit telde het resultaat mee voor hun rapportcijfer. Via de

ELO krijgen de leerlingen steeds een opgave, eventueel met uitleg en/of een applet, die ze moeten beantwoorden om door te gaan naar de volgende pagina. Zie sectie 3.2.1 voor een omschrijving van het materiaal.

Les 2: raaklijn en differentieerregels

In de tweede les hebben we gekeken hoe we de helling van de raaklijn met de GR kunnen bepalen en hoe we dan de formule van de raaklijn kunnen opstellen. Ook hebben we nog een keer de differentieerregels herhaald en daarmee geoefend. Uit het boek is het laatste deel van paragraaf 3 gemaakt en het laatste deel van paragraaf 2.

Les 3: differentiequotiënt en gemiddelde snelheid

In les drie is de differentiequotiënt behandeld en hebben leerlingen een aantal opgaven uit paragraaf 1 gemaakt over het bereken van de differentiequotiënt bij een gegeven grafiek of formule en het berekenen van de gemiddelde snelheid bij een tijd-afstandgrafiek. Ook de opgave over het schetsen van een mogelijke functie bij gegeven differentiequotiënten is gemaakt.

Les 4: herhaling

In de laatste les voor het proefwerk is geen nieuwe stof meer behandeld, maar hebben leerlingen geoefend met de diagnostische toets en gemengde opgaven.

C Appendix: Proefwerk

Het proefwerk, zoals besproken in sectie 3.3.1, staat op de volgende pagina's.

Proefwerk 4 vwo wiskunde B hoofdstuk 1 en 2 t/m opgave 30

Je hebt 60 minuten. Lees de vragen goed door en schrijf al je berekeningen op.

Succes!

OPGAVE 1

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3\frac{1}{4}x^2 + 9x - 2$.

- 3p **a** Bereken de extreme waarden.
3p **b** Neem $D_f = [0, 4]$ en bereken B_f .
2p **c** Los op $\frac{1}{3}x^3 - 3\frac{1}{4}x^2 + 9x - 2 = 0$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

OPGAVE 2

Gegeven zijn de functies $f_p(x) = -3x^2 + px + 4p$.

- 4p **a** Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.
4p **b** Bereken voor welke p de top van de grafiek van f_p op de parabool $y = x^2 + 2x$ ligt.

OPGAVE 3

Gegeven is de functie $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 6x - 5$.

- 2p **a** Schets de grafiek van f . Welk scherm heb je gekozen?
2p **b** Bereken het differentiequotient van $f(x)$ op $[-3, 0]$.
3p **c** Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = 1$ en $x_B = 5$.
Stel de formule op van de lijn m door A en B .

OPGAVE 4

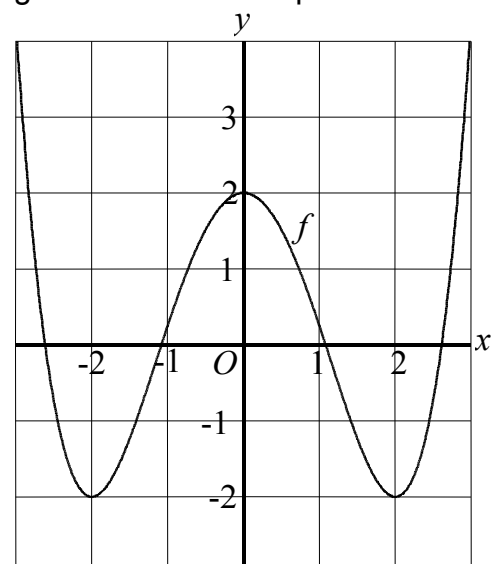
Een snelle motorboot vaart weg. Gedurende de eerste vijf seconden wordt de afgelegde afstand gegeven door de formule $s = 2t\sqrt{t+1}$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.

- 2p **a** Bereken in één decimaal nauwkeurig de snelheid op $t = 3$.
2p **b** Bereken in één decimaal nauwkeurig de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval $[1, 2]$.
4p **c** Na vijf seconden verandert de snelheid niet meer.
Na hoeveel seconden heeft de boot 50 meter gevaren? Rond af op één decimaal.

OPGAVE 5

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van een functie f . Deze grafiek staat ook op het werkblad.

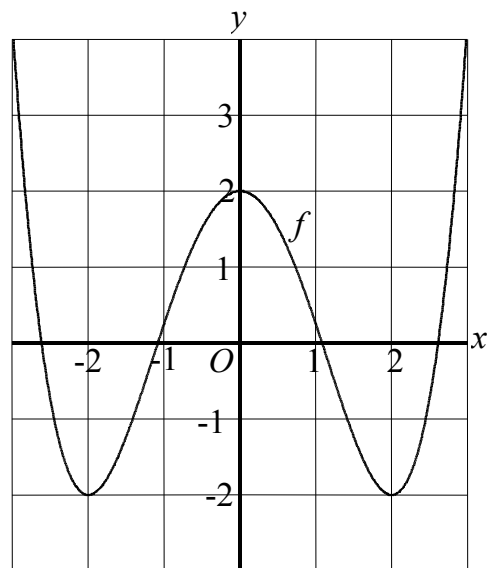
- 2p **a** Schets de hellinggrafiek van f op het werkblad.
3p **b** Neem aan dat de grafiek van f de hellinggrafiek is van de functie g .
Schets een globale grafiek van g op het werkblad.



Werkblad bij opgave 5

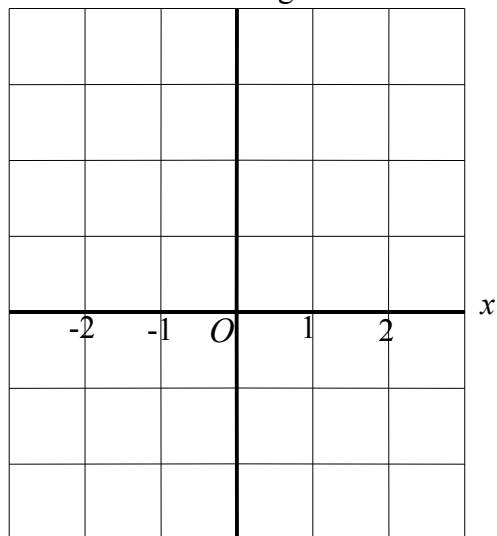
naam

klas

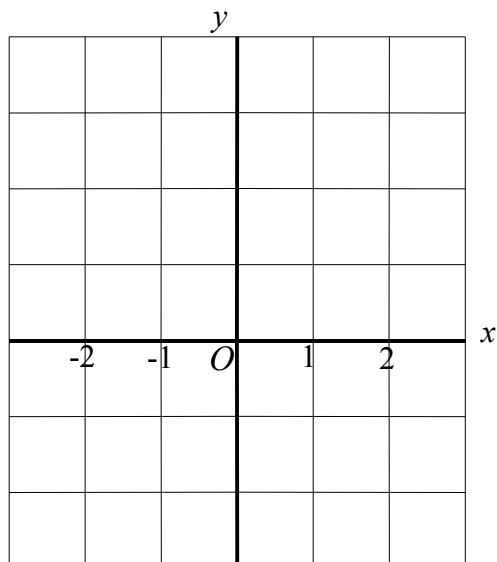


a

helling



b



D Appendix: Overhoring

De overhoring, zoals besproken in sectie 3.3.2, staat op de volgende pagina.

Opgave 1 (4 punten)

Beschrijf in je eigen woorden de volgende begrippen:

- Differentiequotiënt
- Helling
- Raaklijn
- Afgeleide functie

Opgave 2 (6 punten)

Je krijgt hieronder vier stukjes informatie over de functie $f(x)$.

- Het punt $A(1,2)$ ligt op de grafiek van functie $f(x)$.
 - Tussen de punten A en B met $x_B = 3$ op de grafiek van $f(x)$ is de differentiequotiënt 1.
 - In het punt A is de helling negatief.
 - Door het punt B gaat een raaklijn l met $rc_l = 3$.
- Maak een schets van hoe de functie $f(x)$ er uit zou kunnen zien en leg uit wat de gegeven informatie betekent.
 - Maak nog een andere schets van een mogelijke functie $f(x)$.

Opgave 3 (3 punten)

Van een functie $g(x)$ is de afgeleide $g'(x) = 3x^2 - 6x$.

Bereken de x -coördinaten van de extreme waarden van $g(x)$.

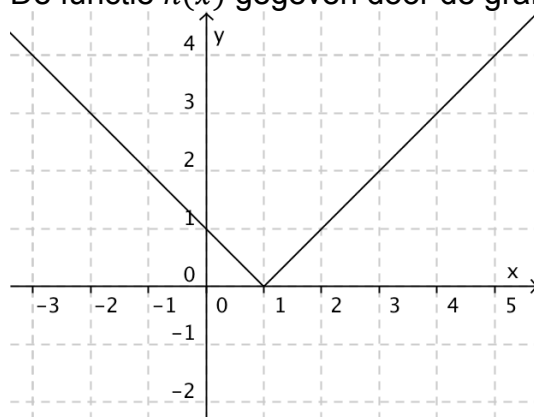
Opgave 4 (7 punten)

Bepaal, zo mogelijk, de helling in $x = 1$ van de onderstaande functies. Leg uit hoe je aan je antwoord komt.

- De functie $f(x) = 2x^2$
- De functie $g(x)$ gegeven door de tabel:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	0	0,71	1	1,22	1,41

- De functie $h(x)$ gegeven door de grafiek:



E Appendix: Resultaten per vraag

In deze appendix staat per vraag van de schriftelijke overhoring de indeling in soorten antwoorden uitgelegd en worden de aantallen per klas gegeven.

Vraag 1: definities

De antwoorden op onderdeel a, de definitie van differentiequotiënt zijn ingedeeld in 5 groepen. Als eerste de antwoorden waarin *gemiddelde verandering* wordt genoemd, zoals “gemiddelde stijging of daling tussen twee punten in een grafiek” en ook “Gemiddelde snelheid op een stuk van de grafiek”. Antwoorden in deze categorie leverden 1 punt op. Leerlingen die alleen *verandering* noemden (“stijging van een lijn op een bepaald domein $[x_a, x_b]$ ”) of de alleen de *formule* gaven (“Rise/run, gradiënt van de lijn, berekenen met $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ”) kregen een half punt. Werd er specifiek genoemd dat het om verandering *in een punt* ging (“De stijging in een bepaald punt”), dan leverde dat 0 punten evenals overige incorrecte antwoorden.

klas	gemiddelde verandering	verandering	formule	in een punt	overig
test	6	7	5	5	2
A	13	4	3	3	3
B	11	4	5	3	4

Tabel 5: Antwoorden vraag 1a: differentiequotiënt

Voor onderdeel b, de definitie van helling, waren 6 groepen te onderscheiden. Hierbij hebben alleen de geheel incorrecte antwoorden 0 punten gekregen, de andere 5 groepen leverden allemaal 1 punt op. De meeste antwoorden vielen in de categorie *richtingscoëfficiënt* en beschreven de helling van een lijn: “hoeveel de grafiek stijgt of daalt per horizontale verplaatsing of wel de rc”, “Hoeveel vakjes omhoog als je 1 vakje naar rechts gaat”. Daarnaast werd ook vaak genoemd dat het de *differentiequotiënt is*, de stijging *in een punt* (“Steilheid van een lijn in een punt”) of een beschrijving van de verschillende *soorten* stijgen en dalen (“de stijging, daling (toenemend, afnemend, constant) van een grafiek”). Een paar leerlingen noemen de richtingscoëfficiënt van de *raaklijn*.

klas	rc	differentiequotiënt	in een punt	soorten	raaklijn	overig
test	9	6	5	1	1	3
A	12	3	3	3	2	3
B	17	2	2	4		2

Tabel 6: Antwoorden vraag 1b: helling

Bij de omschrijving van een raaklijn zijn 6 categorieën te onderscheiden. Leerlingen kreeg 1 punt voor een correcte omschrijving van een lijn die *door een punt gaat en*

dezelfde helling heeft: “een lijn die de grafiek raakt op 1 punt en waarvan de rc even groot is als de steilheid van het punt in de grafiek dat hij raakt”. Ook werd een aantal keer genoemd dat het een lijn door twee *samenvallende* punten is (“lijn die twee samenvallende punten gemeenschappelijk heeft met de functie”), dit leverde ook 1 punt op. De meeste leerlingen behaalden echter maar een half punt met ofwel verwijzingen naar de *methode om de helling te bepalen* (“Lijn die wordt gebruikt bij het bepalen van de helling op een punt”) ofwel alleen een verwijzing naar de *helling* (“Lijn die parallel loopt aan een punt in de grafiek”) ofwel alleen een verwijzing naar *door een punt* (“rechte lijn die een punt gemeen heeft met de kromme”). Andere antwoorden leverden 0 punten op.

klas	punt en helling	samenvallend	methode	helling	punt	overig
test	5		10	5	3	2
A	3	1	15	2	4	1
B	4	1	13	3	4	2

Tabel 7: Antwoorden vraag 1c: raaklijn

Bij het laatste onderdeel, de afgeleide functie, zijn weer 5 groepen. Veel leerlingen verwijzen, zonder verdere uitleg naar de *hellingfunctie* of de *hellinggrafiek*. Dit leverde een half punt op, met *omschrijving* erbij (“is een functie die de helling van de niet-afgeleide functie weergeeft”) leverde het 1 punt. Voor antwoorden waarbij werd verwezen naar een *methode* (“geeft de rc van een punt op de grafiek. Dit punt is te bepalen door de x in te vullen in de afgeleide functie.”) kregen leerlingen ook een half punt. Overige antwoorden leverden 0 punten.

klas	omschrijving	hellingfunctie	hellinggrafiek	methode	overig
test	3	6	7	1	8
A	4	6	2	4	10
B	6	4	6	4	7

Tabel 8: Antwoorden vraag 1d: afgeleide functie

Vraag 2: gegevens interpreteren

Voor deze vraag waarbij twee grafieken getekend moesten worden, hebben de leerlingen in eerste instantie een score uit zes gekregen, waarbij er per gegeven 1 punt was te verdienen en de laatste twee punten waren voor de uitleg en de tweede grafiek. Om daarna in meer detail de verschillende antwoorden te vergelijken zijn er nogmaals punten toegekend op een andere manier. Aangezien het interpreteren van het eerste gegeven (de locatie van het punt A) bij bijna alle leerlingen goed is gegaan, zijn daar geen punten aan gegeven. Voor de overige gegevens is per grafiek gekeken of dit gegeven goed verwerkt is, per gegeven per grafiek is dan 1 punt te verdienen.

klas	locatie B			helling A			helling B		
	0	1	2	0	1	2	0	1	2
test	8	5	12	7	3	15	8	5	12
A	13	4	9	4	7	15	7	9	10
B	14	6	7	8	3	16	14	4	9

Tabel 9: Antwoorden vraag 2: gegevens interpreteren

Vraag 3: extreme waardes

Bij het berekenen van de x-coördinaten van de extreme waardes aan de hand van een gegeven afgeleide functie waren er twee manieren waarop leerlingen op het goede antwoord kwamen. Ten eerste was er de gebruikelijke methode: de *afgeleide nul stellen* en oplossen voor x. Daarnaast hebben veel leerlingen de afgeleide *geïntegreerd*, zonder rekening te houden met een integratieconstante, en van die nieuwe functie de extreme waardes bepaalt. Aangezien alleen differentiëren behandeld is, was dit een onverwacht resultaat. Daarnaast hebben een aantal leerlingen het *minimum van de afgeleide* bepaald en waren er nog enkele andere foutieve antwoorden.

klas	afgeleide nul	integreren	minimum afgeleide	overig
test	6	13	3	
A	19	4	1	2
B	9	16	1	1

Tabel 10: Antwoorden vraag 3: extreme waardes

Vraag 4: helling in een punt

Bij onderdeel a van deze vraag was een formule gegeven en er werden drie verschillende methodes gebruikt om de helling in $x = 1$ te bepalen. De meeste leerlingen hebben de *afgeleide* bepaalt en daar $x = 1$ ingevuld, een groot deel gebruikte de *grafische rekenmachine* en een paar leerlingen heeft de helling *numeriek* benaderd met een differentiequotiënt op een klein interval. Daarnaast waren er ook een aantal foute antwoorden.

klas	afgeleide	gr	numeriek	overig
test	9	9	2	5
A	15	3	3	5
B	12	9	1	5

Tabel 11: Antwoorden vraag 4a: formule

Voor onderdeel b moest de helling bepaald worden bij een tabel. Slechts enkele leerlingen antwoorden dat dit *niet mogelijk* is en twee leerlingen geven aan dat hun antwoord een *benadering* is. De meeste leerlingen bepalen de helling met behulp van een differentiequotiënt (*numeriek*), een aantal tekent er een grafiek bij en gebruikt een *raaklijn*. Meer dan de helft van de leerlingen heeft geen goed antwoord op deze opgave.

klas	niet mogelijk	benadering	numeriek	raaklijn	overig
test		1	7		17
A	1	1	8	2	14
B	2		7	3	15

Tabel 12: Antwoorden vraag 4b: tabel

Het laatste onderdeel, waarbij een grafiek gegeven was levert nog minder goede antwoorden op. Bij de foutieve antwoorden valt vooral op dat leerlingen alleen naar rechts kijken (“1 naar rechts, 1 omhoog”). Slechts twee leerlingen vinden dat het *niet mogelijk* is, vrij veel zeggen dat de helling nul is omdat het een *top* is en een aantal omdat de *raaklijn* horizontaal is.

klas	niet mogelijk	top	raaklijn	overig
test		6	1	18
A		11	3	12
B	2	5	1	19

Tabel 13: Antwoorden vraag 4c: grafiek