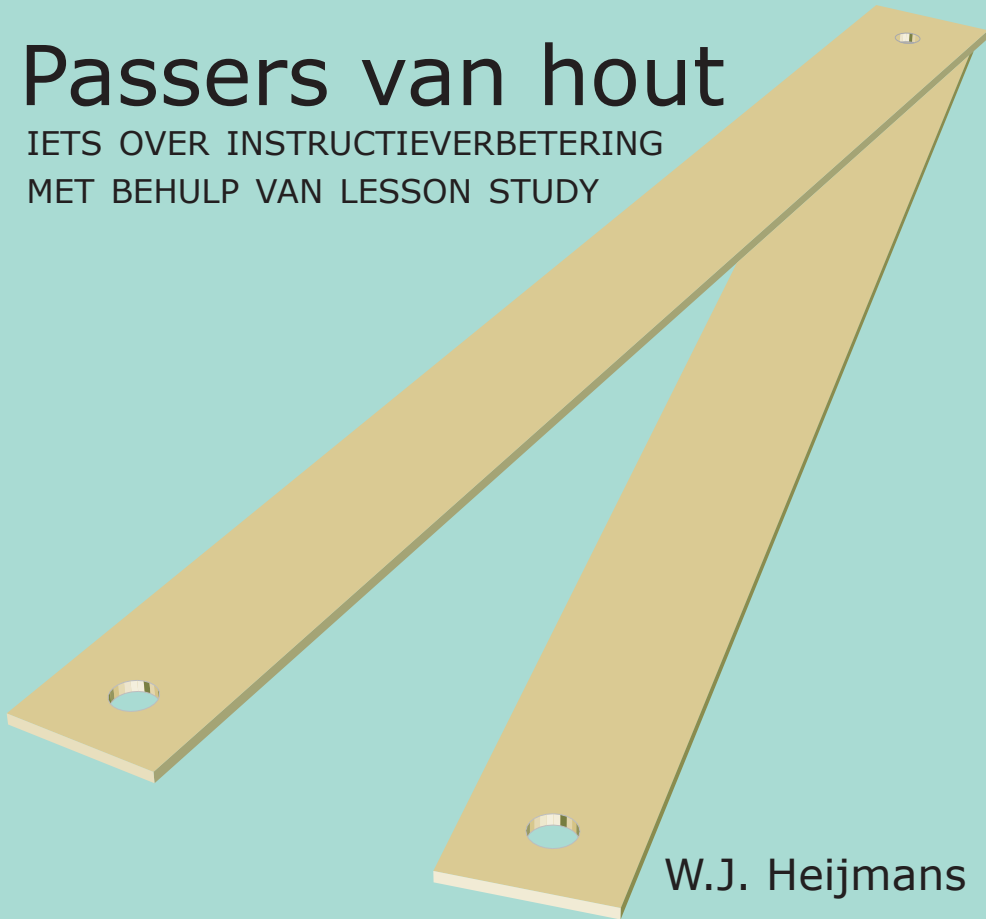


Passers van hout

IETS OVER INSTRUCTIEVERBETERING
MET BEHULP VAN LESSON STUDY



W.J. Heijmans

Universiteit Twente

PASSERS VAN HOUT

Passers van hout

Iets over instructieverbetering
met behulp van lesson study

W.J. Heijmans

Universiteit Twente
Enschede, 2013

De afstudeercommissie bestond uit:

Dr. N.C. Verhoef

Dr. G.A.M. Jeurink

Foto's: Ed Mulder, Marco de Vries

Boekverzorging en illustraties: Ricardo Liong-A-Kong

*Precies onder het uitleggen
van het verschil tussen
schijnbaar en blijkbaar
frommelde mijn gezicht
hulpeloos in mekaar.
Ik zag dat de hele klas
op de foto stond:
Jos K. eeuwig met open mond,
zijn zusje naar Heleen gedraaid,
Rob G. en Jerry W. over
een ander vak gebogen.
Eric R. die dacht zijn haar
stiekem te kunnen kammen
was blijven steken in dat werk,
zoals ikzelf het woord vergat
waaraan ik was begonnen.-
Maar niemand die het heeft gemerkt
want op hetzelfde ogenblik
leek alles weer gewoon
zijn gang te gaan, bleek
Jerry stereometrie te doen.*

T. van Deel, 'In de plooi', *Strafwerk* (1969)

Voorwoord

Wat moet je nou met zo'n dochter! Deze scriptie dient wel met haar te beginnen, domweg omdat de aanvang van mijn masterstudie *Science Education and Communication* (SEC) bij ELAN, het instituut voor Lerarenopleiding, Wetenschaps- en techniekcommunicatie & Onderwijspraktijk van de Universiteit Twente, rechtstreeks tot haar is terug te voeren.

Wat was het geval? Een paar jaar geleden ging Eva naar het gymnasium van SG De Grundel in Hengelo. Sindsdien kwam ze nu en dan met vragen over het wiskundig huiswerk naar me toe. Soms begreep ze iets nog niet tot in de puntjes, maar vaker wilde ze gewoon laten zien dat ze iets juist wel heel goed in de gaten had. Plotseling nam ze ook een vriendinnetje mee,- 'of ik haar niet even iets wilde uitleggen'. Dat werd, kortom, een soort huiswerkklasje. En van het een kwam het ander. Al doende ontdekte ik de grote kracht en schoonheid van de wiskunde weer.

Lang geleden had ik Toegepaste Wiskunde aan de toenmalige Technische Hogeschool Twente in Enschede gestudeerd, en daarna ook nog eens Wijsbegeerte van Wetenschap, Technologie en Samenleving aan de latere Universiteit Twente. Vervolgens was ik in de wandelgangen van de Nederlandse letterkunde verzeild geraakt, en kort daarop ook in het internationale circus van de beeldende kunst. Daarbij bleef de wereld van wetenschap en technologie overigens altijd wel een of andere horizon voor mij afbakenen. Lange tijd hield ik mij bezig op het grensvlak van kunst, wetenschap en technologie,- en dan niet met de voor de hand liggende voorbeelden van M.C. Escher of Leonardo da Vinci, maar eigentijdser, met Gerrit van Bakel, Theo Jansen en Peter Struycken. Ik bewonder hun werk nog steeds, maar uiteindelijk kreeg ik toch genoeg van het zelfgenoegzame wereldje van de beeldende kunst. In die dagen begon ik om te zien naar iets anders.

En toen was daar mijn dochter die haar huiswerk aan de tafel in de woonkamer zat te maken en mij wel eens een vraag over de wiskunde stelde. Zonder dat ze het zelf besepte, wees ze mij weer op de grote schoonheid van die discipline, zelfs letterlijk, met haar vinger op een tekening van een of andere functie in de door

haar gebruikte methode *Getal en ruimte*. Ik merkte hoe spannend ik het vond om iets wiskundigs aan haar uit te leggen, en het werd nog spannender als ik dat bij gelegenheid zelfs op een paar heel verschillende manieren moest doen.

Het was niet meer te vermijden: ik stuurde een email aan Nellie Verhoef, vakdidacticus wiskunde bij ELAN. In het daaropvolgende kennismakingsgesprek vertelde ik haar wat ik in het voorafgaande heb samengevat,- en voordat ik het wist, was ik ineens weer student: student *Science Education and Communication* aan de faculteit Gedragswetenschappen van de Universiteit Twente.

Terug van weggeweest, heb ik toen nog wel eens teruggedacht aan de wiskundige Gerrit Mannoury, schrijver van het onvergetelijke boekje *Mathesis en mystiek*; een signifiëse studie van kommunistisch standpunt (1925). Hij was nog veel tegendraadser dan 'het genie van Overschie', de even eigenzinnige als wereldberoemde intuïtionistische wiskundige L.E.J. Brouwer. Na de HBS te hebben doorlopen, koos Mannoury voor de professie van onderwijzer. Onderwijs liefhebberde hij op eigen houtje in allerlei wetenschappen. Waarschijnlijk om te controleren of hij de stof goed verwerkt had - zo merkt J.Ch. Boland in zijn voorwoord bij een herdruk van *Mathesis en mystiek* op - legde hij een groot aantal middelbare examens af, soms meerdere per jaar. Later heeft Mannoury daarover wel eens opgemerkt:

In mijn jeugd had ik belangstelling voor allerlei vakken, maar ik heb me tenslotte maar aan de wiskunde gehouden, want daar heb je tenminste nog enig houvast. Anders was ik geheel in de emotie opgegaan.

Allemaal heel herkenbaar voor mij, tot en met het aureool van eeuwige student aan toe.

Bij ELAN werden de zaken ondertussen voortvarend aangepakt. Binnen de kortste keren had ik een studieprogramma op maat en een plek voor de diverse schoolpractica. Mijn beide schoolpractica heb ik - op initiatief van ELAN-medewerker Nico Alink - vervuld aan de CSG Het Noordik in Almelo en de SG Twickel in Hengelo, respectievelijk onder leiding van Henk van der Liet en Frans de Kogel. Ik had mij geen betere begeleiders kunnen wensen en ik dank hen dan

ook voor hun adviezen en onze inspiratieve gesprekken over lesgeven, wiskundeonderwijs en andere zaken. Daarnaast heb ik als 'overjarige' student genoten van de vele, door Nellie Verhoef en soms ook door Gerard Jeurnink verzorgde vakdidactieve werkcolleges over wiskunde. Soms maakte Mannoury's emotie zich ook van mij meester. Ik herinner mij als de dag van gisteren dat ik een gastcollege van onderzoeker Daan van Smaalen over de Wageningse methode diepe indruk op mij maakte. De liefde voor de wiskunde die daaruit sprak... die volstrekt vanzelfsprekende onbaatzuchtigheid...

Al snel tijdens mijn studie kreeg ik een betrekking als docent wiskunde in het voortgezet onderwijs, aanvankelijk bij de Internationale School in Eerde, een instituut dat ik na een maand of vijf verruilde voor het Celeanum in Zwolle. Op dat categorale gymnasium werk ik nu alweer anderhalf jaar. Waarnemend rector Marco de Vries en zijn opvolgster Caren Japenga hebben mij in het kader van mijn studie alle ruimte geboden, bij voorbeeld om onderwijskundige experimenten op school uit te voeren. Deze scriptie is daarvan een van de tastbare resultaten. Beide rectoren dank ik voor hun inlevingsvermogen, evenals alle leerlingen en observatoren die aan mijn 'onderzoek van onderwijs' hebben meegewerkt.

Het hoeft geen betoog dat ik Nellie Verhoef en Gerard Jeurnink veel dank ben verschuldigd voor de inspiratieve wijze waarop ze mij tijdens mijn studie hebben begeleid. Als sprak het bijna vanzelf, boden ze mij de mogelijkheid om de vele verplichte opdrachten naar eigen inzicht in te vullen. Ik wilde essays schrijven, opstellen in de geest van Gerrit Krol - 'een schrijver die zoveel wiskunde in zijn boeken stopt', een van mijn grote literaire voorbeelden - en geen dorre, wetenschappelijk verantwoorde verhandelingen met eindeloze reeksen voetnoten en andere verwijzingen. Dat doe ik nog wel eens in een proefschrift.

Waar heeft deze studie onder meer toe geleid? In de afgelopen twee jaar heb ik zesentwintig essays van ruimhartige lengte geschreven over de vakdidactiek van de wiskunde en ook nog eens vijftien over allerlei onderwijskundige onderwerpen. Daarnaast heb ik twee nogal persoonlijk getinte verslagen afgeleverd over het door mij uitgevoerde schoolpracticum. En dan heb ik het onderhavige essay waartoe mijn onderzoek van onderwijs heeft geleid, nog niet eens meegerekend. Allemaal essays met een soortgelijke titel: 'Iets over' Alsof

ze bij elkaar horen,- al kon ik te elfder ure de verleiding niet weerstaan om dit laatste essay toch ook een andere titel mee te geven. Essays waarin ik de beroepspraktijk van het docentschap wiskunde en de in de werkcolleges gepresenteerde theoretische noties met elkaar in verband probeerde te brengen. Hand in hand. Een samenhangend portfolio,- het verhaal hoe ik de studie *Science Education and Communication* heb vervuld.

Ach, het is jammer dat ook dit alles nu weer tot het verleden behoort. Ik had nog wel meer willen doen, nog meer willen schrijven, maar de tijd ontbrak me eenvoudigweg. Indachtig de gewoonte van de romancier A.F.Th. van der Heiden om voortijdig nieuwe titels aan te kondigen - in zijn roman *De Movo Tapes* (2003) staan twaalf (!) werken in voorbereiding vermeld - wil ik hier overigens al wel kwijt dat ik, in het verlengde van alles wat ik voor deze studie heb gedaan, graag nog eens een essay over de schrijfster Frida Vogels en de wiskunde zou schrijven. Sterker nog, ik ben er al aan begonnen. Ook de methode *Getal en ruimte* heeft de nodige kritische aandacht in een uitgebreid artikel.

En daarmee ben ik weer terug bij dat eigenste ogenblik,- toen ik een van de boeken uit de genoemde methode thuis op tafel zag liggen. Eva keek op en ze vroeg mij: 'Papa, kun je me iets over de stelling van Thales uitleggen?' Daarom komt haar de meeste dank toe.

Hengelo, 20 juni 2012

Inhoud

Voorwoord	7
Inleiding	13
1 Oorsprong en opkomst van de lesson study	17
2 Min of meer kritisch intermezzo.....	33
3 Probleemstelling en stappenplan	39
4 Een kleine lesson study in klas 4	43
5 Een kleine lesson study in klas 3	63
6 Een kleine lesson study in klas 2	83
Enige conclusies.....	96
Samenvatting	99
Ten slotte.....	103
Literatuurlijst.....	105

Inleiding

Hoe weet je als docent of jouw instructie goed is afgestemd op de leerlingen tot wie je je richt? Dit is een van de belangrijkste vragen in de theorie en praktijk van het lesgeven, om het even om welke soort onderwijs het gaat. In zijn handboek *Onderwijskunde als ontwerpwetenschap*, een inleiding voor ontwikkelaars van instructie en voor toekomstige leerkrachten, besteedt de Belgische pedagoog Martin Valcke op welhaast uitputtende wijze aandacht aan de wijsgerige achtergronden en ontwerpstrategieën van allerlei vormen van instructie. Vergeleken daarmee, komt de vraag hoe je zou kunnen achterhalen, of een bepaalde vorm van instructie nu 'werkt' of niet, in dat boek veel minder uitgebreid aan bod.

Wil je iets zinnigs over de geopperde vraag te berde brengen, dan zul je eerst de vorm van instructie nader in ogenschouw moeten nemen. In de praktijk van het lesgeven blijkt het directe instructiemodel vaak erg effectief. Niets voor niets luidt een synoniem van directe instructie: *effectief leren*. Dit neemt evenwel niet weg dat deze vorm van instructie ook een enigszins technocratisch aureool heeft. Daar zijn de uitgangspunten van de directe instructie niet vreemd aan: die gaan terug tot het behaviourisme en de cognitieve psychologie. Het aloude verhaal van stimuli en responses, gewenst gedrag en bekrachtiging. De onderwijskundige Simon Veenman, werkzaam aan de Radboud Universiteit te Nijmegen, omschrijft directe instructie als een reeks 'gerichte handelingen van de leraar met het doel de leeractiviteiten van de leerling te ondersteunen en in een gewenste richting te structureren'. Ze is, volgens hem, en met hem vele anderen in het onderwijsveld, met name geëigend als een goed gestructureerd geheel van kennis, inzichten en vaardigheden dat door alle leerlingen dient te worden beheerst. Directe instructie is, kortom, een krachtig middel bij het aanleren van basiskennis en vaardigheden, in het bijzonder wanneer de docenten over een beperkte lestijd beschikken. Bovendien is ze een betrekkelijk inzichtelijk middel. Docenten werken immers met heldere leerdoelen, een doorzichtige opbouw van de leerstof en directe feedback. Toch schuilt hierin ook juist een groot gevaar van deze vorm van instructie. Mede

onder dwang van strakke studiewijzers, tijdsdruk en een nogal procedureel opgezette methode kan ze gaan neigen naar het aanleren van 'trucjes' en het negeren van inzichtelijkheden,- dit alles met het oog op de gewenste resultaten van de toetsen. Niettemin wordt in het onderstaande het directe instructiemodel voorlopig als uitgangspunt gekozen.

In de praktijk van het lesgeven wordt de kwestie of een instructie is begrepen, doorgaans op informele en formele wijze geëvalueerd. Een informele evaluatie van een instructie is bij voorbeeld een - al dan niet klassikaal gestelde - vraag, uit het antwoord waarvan helder wordt, of de leerlingen haar inderdaad hebben begrepen. Een formele evaluatie van een instructie is een toets achteraf, in welke vorm dan ook. Ten einde de vraag te kunnen beantwoorden of een instructie goed is afgestemd op de leerlingen tot wie de docent zich richt, komt een informele evaluatie niet zelden te vrijblijvend aan de orde, een formele evaluatie vaak te laat. De vraag is dus, of de afstemming van de directe instructie door de docent op de denkwereld van of de receptie door de leerlingen op een andere wijze kan worden benaderd, en zo ja, hoe?

Het moge duidelijk zijn: je zou het nodige te weten kunnen komen over de voorliggende vraag, indien je de leerlingen zou plaatsen in een of andere experimentele opzet volgens behavioristisch of cognitief psychologisch regime, compleet met elektroden, computers en geavanceerde software. Bij voorbeeld. Dergelijke experimenten stuiten niet alleen op nogal wat praktische bezwaren, maar ze roepen ook allerlei methodologische en ethische vragen op. Nee, het is handiger om een andere weg te bewandelen, een traject waarin de vraag meer in een sociaal-psychologische context wordt geplaatst.

Beschouw de leraar in relatie tot de leerlingen als een sociaal psychologisch systeem. Door middel van een vorm van directe instructie legt hij iets aan de leerlingen uit. De leerlingen op zich vormen ook weer sociaal-psychologische systemen, indien ze in kleine groepen aan de slag gaan. In de groepen is een andere leervorm dan de directe instructie aan de orde: die van het *samenwerkend leren*. Zou je observeren wat er in die groepen gebeurt, dan zou je misschien ook

iets kunnen zeggen over de vraag of de instructie van de docent is afgestemd op de receptie van de leerlingen.

Deze onderwijskundige benadering is niet nieuw. Nee, al meer dan een eeuw wordt ze toegepast in het Japanse basisonderwijs, zij het in een ruimer kader. Daar hebben ze haar als *lesson study* gemunt. Kortweg gezegd, is *lesson study* een professionaliseringsstrategie waarbij docenten in hun eigen lespraktijk onderzoek doen naar het doceren en leren door het gezamenlijk plannen, observeren en nabespreken van een les. *Lesson study* blijkt een uiterst bruikbare strategie te zijn om erachter te komen wat er tijdens de les in de hoofden van de leerlingen gebeurt. Krijg je daar als docent meer inzicht in, dan kun je er bij voorbeeld in je instructie op inspelen. Zou je deze aanpak ook kunnen gebruiken om de instructie van wiskundige begrippen in het voortgezet onderwijs te verbeteren?

In dit verslag beschrijf ik hoe ik met de aanpak van de *lesson study* heb geëxperimenteerd tijdens mijn lessen wiskunde aan het Gymnasium Ceeleum in Zwolle. Alvorens nader in te gaan op de diverse experimenten belicht ik eerst, aan de hand van de studie *The Teaching Gap* van Stigler en Hiebert, een aantal theoretische achtergronden van de *lesson study* aanpak in het eerste hoofdstuk. In het daaropvolgende chapter oefen ik, in alle bescheidenheid, enige kritiek op de analyses van Stigler en Hiebert. Ook probeer ik iets zinnigs te zeggen over een paar randvoorwaarden bij de uitvoering van een *lesson study*. In het derde hoofdstuk geef ik aan hoe de oorspronkelijke opzet van een *lesson study* zou moeten worden 'vertaald' met het oog op kleinschalige toepassing in het Nederlandse voortgezet onderwijs. Dat noem ik: *kleine lesson study experimenten*.

Vervolgens beschrijf ik in de daaropvolgende hoofdstukken drie van dergelijke experimenten. Die waren, zoals gezegd, in eerste instantie gericht op de verbetering van instructie. In het vierde hoofdstuk gaat het om een experiment in twee 4A-clusters waarbij de instructie handelde over 'het vaasmodel bij trekken met en zonder terugleggen'. In het vijfde handelt het om een experiment in twee klassen 3 waarbij de instructie handelde over de tangens. En in het zesde hoofdstuk gaat het om een experiment in twee klassen 2 waarbij de instructie

handelde over de constructie van de bissectrice. Het zesde hoofdstuk bevat een discussie over de uitkomsten van de diverse kleine lesson studies: in hoeverre gaven de experimenten aanleiding tot een verbetering van de instructie?

Een van de uitkomsten van het laatste experiment betrof de introductie van een 'passer van hout', een eenvoudig ding. Zonder benen en verdere opsmuk. Heel inzichtelijk. Dat ding beschouw ik als een metafoor voor de uitkomsten van de kleine *lesson study* experimenten die ik op het Gymnasium Coleanum heb uitgevoerd. Ik kon het niet laten.

Waarna, tot besluit van dit verslag, alleen nog een 'Ten slotte' rest.

1 Oorsprong en opkomst van de lesson study

Splash! Als een spreekwoordelijke steen kwam aan het einde van de twintigste eeuw het boek *The Teaching Gap* in de grote vijver van de onderwijswereld terecht. Deze invloedrijke studie werd geschreven door James W. Stigler, hoogleraar psychologie aan de Universiteit van California in Los Angeles, en James Hiebert, hoogleraar onderwijskunde aan de Universiteit van Delaware in Newark. Het was 1999. Met name de ondertitel van de publicatie spreekt tot de verbeelding. Die geeft op een uitdagende wijze aan waar het over gaat: 'Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom'. Kortom, een boek over het verbeteren van lesmethodes en van wat in het Engels zo mooi *classroom practices* heet.

De studie van Stigler en Hiebert verscheen in een tijd dat allerlei onderwijskundige professionals - van didactische, psychologische, sociologische, politieke of welke huize ook, in wetenschappelijke onderzoeksgroepen of niet - over elkaar heen buitelden met hun voorstellen over hoe het onderwijs kan worden verbeterd. En nog altijd is deze lawine aan gevraagde en ongevroegde adviezen niet geluwd. Veel van de gedane suggesties om het *classroom teaching* te verbeteren zijn vooral gericht op *de docenten en niet op het doceren*. De aanbevelingen gaan in dat geval meestal al snel in de richting van het aantrekken van betere lesgevers. De volgende suggesties liggen menigeeen dan in de mond bestorven: verbeter de kwalificaties van docenten, scherp de eisen van de lerarenopleidingen aan en verhoog het salaris en de werkvoorwaarden van de docenten. Steeds hetzelfde verhaal. Lees de opiniestukken, columns en ingezonden brieven in de diverse dag- en weekbladen er maar op na.

Tegen deze achtergrond stelden Stigler en Hiebert in *The Teaching Gap* - en ander werk - de volgende vraag aan de orde: hoe komt het toch dat het vele onderwijsonderzoek, in de laatste decennia verricht, zo betrekkelijk weinig heeft bijgedragen aan de verbetering van de kwaliteit van het onderwijs? En in het verlengde daarvan: hoe zouden we de kwaliteit van het onderwijs dan wel kunnen verbeteren?

Ten einde een licht te kunnen werpen op dergelijke vragen deden de beide wetenschappers een vergelijkende studie naar data van een op video vastgelegde wiskundeles aan 231 klassen van achtste groepers in drie verschillende landen: 81 klassen in de de Verenigde Staten, 100 in Duitsland en 50 in Japan. Dit was onderdeel van de zogeheten 'Third International Mathematics and Science Study' (TIMMS), een groots opgezette studie waarin toetsresultaten van leerlingen uit een aantal klassen in 41 verschillende landen met elkaar werden vergeleken, mede op basis van schriftelijke vragenlijsten, afgenomen bij de diverse betrokkenen. Sedert 1995 vindt de TIMSS elke vier jaar plaats en sedert 1999 staat de T in TIMSS niet meer voor Third maar voor Trends. Stigler en Hiebert komt de eer toe om video op een nieuwe wijze in onderwijskundig onderzoek te hebben ingezet, namelijk niet om docenten te laten zien hoe ze lesgeven, want dat gebeurde al, maar om transnationale data over het wiskundeonderwijs in achtste klassen te verzamelen en die vervolgens te analyseren. De mogelijkheid tot deze analyse is enigszins te vergelijken met die van speelfilms, toen eenmaal de videorecorder daartoe kon worden aangewend. Ineens kon je speelfilms terugspoelen, zoals je in een boek terugbladert. Kijk maar eens in *Het museum van licht* (1991) - werktitel: 'Droom van een videomaan' - van de essayist Willem Jan Otten. Wat een openbaring!

Beide onderzoekers besteden in hun boek ruime aandacht aan de methodologische aspecten van hun TIMMS Video Study - specifieke observaties in een gevideotapete wiskundeles werden als hypothese beschouwd, op basis daarvan als definitie omschreven, daarna aan de hand van de videos gecodeerd en vervolgens aan een zogeheten Math Group voorgelegd -, maar het voert te ver om daarop in dit verband uitgebreid in te gaan.

Tijdens hun analyse van de aan de videotapes ontleende data - bij voorbeeld bij het gebruik van het schoolbord in Japan en de overheadprojector in de Verenigde Staten - komen Sigler en Hiebert erachter dat lesgeven een sterk systeemkarakter heeft. Het is eigenlijk bijna een machine waarbij de afzonderlijke onderdelen elkaar opvolgen en versterken. Zo bewerkstelligen al die componenten samen iets. Er is een sterke innerlijke samenhang tussen de afzonderlijke onderdelen. Of zoals de onderwijskundige Koeno Gravemeijer

opmerkte, nadat hij een concept voor een *paper* van beide onderzoekers had gelezen: 'Je kunt geen losse onderdelen van een systeem veranderen zonder na te gaan wat dit betekent voor de rest van het systeem. Elk onderdeel op zichzelf zegt niet zo veel over de aard van het lesgeven. Maar als geheel zijn patronen in het lesgeven te herkennen en die kunnen worden vergeleken.'

Zodoende konden Stigler en Hiebert, op basis van hun onderzoeken, de kern van *The Teaching Gap* in drie bevindingen samenvatten:

1. *Het lesgeven, en niet de leraar, is de kritische factor.*

Volgens de beide onderzoekers zijn we in het (voortgezet) onderwijs sterk geneigd om ons te richten op de competenties van de leraar in plaats van de methodes die de leraar in de klas gebruikt. Zelfs de beste docenten, de meest competente, zijn nu eenmaal niet effectief bezig, indien ze gebruik maken van strategieën die de leerlingen niet beter laten leren.

Het gaat erom wat de leraar allemaal doet en zegt in de klas. Dat maakt het verschil in, zeg maar, leeropbrengsten. *Teaching methods* houden immers veel meer in dan louter de instructie van nieuwe stof en de begeleiding bij de individuele of klassikale verwerking daarvan. Ze gaan ook over de keuzes die de leraar maakt bij het aansturen van de leerlingen - welke rol verwacht hij van hen? -, hoe ze problemen oplossen, vragen stellen, begrippen verklaren enzovoort.

2. *Het lesgeven is een culturele activiteit.*

Volgens de beide onderzoekers verschillen de leermethodes van land tot land, maar in een en hetzelfde land lijken die methodes juist sterk op elkaar. Zo zijn er duidelijke, cultureel bepaalde verschillen in de Amerikaanse, Duitse of Japanse wijze van lesgeven.

In de Verenigde Staten omvat het lesgeven van wiskunde een relatief beperkt repertoire van aanpakken of recepten die erop zijn gericht om leerlingen min of meer geïsoleerde vaardigheden aan te leren door inoefening. Het gaat daarbij dus vooral om: *learning terms and practicing procedures*.

In Duitsland omvat het lesgeven van wiskunde veeleer het ontwikkelen van aanpakken waarmee verschillende soorten van problemen kunnen worden aangepakt. Kortweg: *developing advanced procedures*.

En bij het lesgeven in Japan gaat het daarentegen juist om een conceptuele benadering van wiskundige begrippen en wat je daar vervolgens mee kunt doen: *structured problem solving*.

Kortom, deze wijzen van lesgeven verhouden zich tot elkaar, zoals de beide onderzoekers zo treffend hebben verwoord: 'how much teaching varied across cultures and how little it varied within cultures'.

Veel van wat er in de klas gebeurt, wordt, aldus het duo, bepaald door het 'DNA van het leren'. De *teaching methods* worden van generatie op generatie doorgegeven middels een *culturele code* die in de meeste klassen voorhanden is. Juist deze code houdt in dat de verandering in de houding van leraren niet automatisch leidt tot de verandering in hun lesgeven. Daar is meer voor nodig.

3. *Er is een leemte in de benaderingen met behulp waarvan het lesgeven kan worden verbeterd.*

Volgens de beide onderzoekers hebben Amerikaanse leraren hun best gedaan om allerlei aanbevelingen in hun doceergedrag te implementeren, maar dit heeft niet of nauwelijks geleid tot een substantiële verandering in het lesgeven. Als we het lesgeven willen verbeteren, moeten we veel verder gaan dan de gebruikelijke kennistransfer. Ook hier dient een *teaching gap* overbrugd. Als lichtend voorbeeld daarbij noemen Stigler en Hiebert het Japanse onderwijsstelsel. Japanse docenten zijn het gewend om mee te doen aan allerlei verbetertrajecten ten behoeve van hun lesgeven. Die leiden daar juist wel, mede dankzij hun lange looptijd, tot een substantiële verandering in het lesgeven.

Het had misschien voor de hand gelegen dat Stigler en Hiebert op grond van deze en andere bevindingen in *The Teaching Gap* hadden geconcludeerd dat de methode van onderwijzen in Japan doorgaans tot betere resultaten leidt, maar

dat hebben ze toch niet gedaan, hoe vaak hun studie ook in deze zin is geïnterpreteerd. Daarentegen omcirkelen Stigler en Hiebert het idee van de 'teaching gap' juist in termen van verschillen tussen de gewoonlijk toegepaste 'teaching methods' in verschillende culturen. Dit geeft dan ook aanleiding tot de volgende vraag: hoe zou je een geleidelijke en meetbare verbetering van het lesgeven kunnen bewerkstelligen dat recht doet aan de culturele code die in de klas heerst? Tijdens hun vergelijkende studie naar de verschillen tussen het onderwijzen en leren van wiskunde in de drie eerder genoemde landen stuitten Stigler en Hiebert in Japan op een succesvolle aanpak van trajecten voor onderwijsverbetering. In hun studie pleitten zij ervoor om deze aanpak ook voor lessituaties in de Verenigde Staten toepasbaar te gaan maken. En daarmee importeerden ze als het ware de onderzoeksaanpak van de zogeheten *lesson study* van een Oosters onderwijsland naar een Westers land.

Voordat we nader zullen ingaan op de achtergronden van de *lesson study*, keren we eerst nog even terug tot de analyses van Stigler en Hiebert, uitmondend in het poneren van *The Teaching Gap*. Hun bevindingen die tot dat begrip hebben geleid, zijn sterk sociaal-psychologisch gekleurd, en niet alleen omdat ze het lesgeven als een culturele activiteit beschouwen. Het hele gebeuren in een klas is immers op te vatten als een gecompliceerd sociaal-psychologisch proces of systeem. Daarbij nemen leraar en leerlingen, zoals zo vaak wordt opgemerkt, verschillende rollen aan. Zo'n rol is een sociaal gedefinieerd gedragspatroon dat mensen in een bepaalde omstandigheid of groep behoren te vertonen. In een klas nemen leraar en leerlingen verschillende rollen aan. Er is sprake van roldifferentiatie. Denk bij voorbeeld alleen al maar aan de vijf rollen van de leraar die de onderwijskundig consultant Martie Slooter in haar bekende, daarnaar verwijzende CPS-publicatie heeft onderscheiden: die van gastheer, presentator, didacticus, pedagoog en afsluiter. Op praktisch niveau is een dergelijke onderscheiding vaak nog goed toepasbaar, maar op theoretisch niveau leidt de hantering van het rolbegrip toch al gauw tot een vertekening van de sociale werkelijkheid. In hoeverre kan je het intentioneel gedrag, voortvloeiend uit de rol van leraar adequaat beschrijven (zeker als je bedenkt dat die persoon ook nog is

gerelateerd aan allerlei andere lidmaatschapsgroepen)?

Stigler en Hiebert proberen deze heikele kwestie op te lossen door een begrip in stelling te brengen dat gerelateerd is aan het rolbegrip: de zogeheten 'scripts for teaching'. Een script is een begrip afkomstig uit de sociaal-constructivistische benadering van de werkelijkheid. Daarin staat het, zoals Peter Paul Verbeek in zijn proefschrift *De daadkracht der dingen* (2000) betoogt, voor een programma van handelingen dat in een artefact ligt besloten. Vergelijk het met een reeks instructies uit een programmeertaal. De onderwijskundige Valcke noemt het sociaal-constructivistische begrip in zijn standaardwerk in relatie tot de cognitivistische visie op leren, in het bijzonder tot de vraag hoe scripts de conceptuele of declaratieve kennis beïnvloeden. Deze scripts, verwijzend naar een volgorde van een reeks gebeurtenissen of handelingen, kunnen bij voorbeeld helpen om verbanden te leggen tussen denkschema's die er op het eerste gezicht niet zijn. Zo introduceren Stigler en Hiebert het scriptbegrip met betrekking tot de culturele activiteit die in het lesgeven ligt besloten:

People within a culture share a mental picture of what teaching is like. We call this mental picture a script. The script is, in fact, a mental version of the teaching patterns (...). The difference is that the patterns were observable in the videotapes; scripts are mental models of these patterns. We believe that the scripts provide an explanation for why the lessons within a country followed distinctive patterns: the lessons were designed and taught by teachers who share the same script.

In tegenstelling tot het wat ouderwetse sociaal-psychologische rolbegrip lijkt het modernere scriptbegrip een goede *clue* om het lesgeven te benaderen en dan niet alleen de bevindingen die tot *The Teaching Gap* hebben geleid, maar ook het dichten of herstellen daarvan, hetgeen, volgens Stigler en Hiebert, middels een *lesson study* aanpak zou kunnen worden bewerkstelligd. Daarbij gaat het immers om veranderingen in de reeks gebeurtenissen en handelingen die bij een specifieke rol horen. Die verandering zou je in de vorm van scripts kunnen vangen. En daarmee zou je misschien ook iets zinnigs kunnen zeggen over het

nogal ongrijpbare begrip 'denkactiviteit' dat in het *Handboek wiskundededidactiek* (2012) niet altijd in een en dezelfde zin wordt gebezigd. Het gaat de reikwijdte van deze scriptie evenwel verre te boven om de werking van een *lesson study* in termen van scripts te beschrijven. Helaas.

Om het voorafgaande nog even in een iets andere toonaard samen te vatten: lesgeven is niet een eenvoudige, maar juist een nogal ingewikkelde bezigheid. Die wordt mede bepaald door allerlei handelingen en overtuigingen waar het bewustzijn slechts gedeeltelijk vat op heeft. Het lesgeven is grotendeels een culturele bezigheid. Dat verklaart mede waarom het zo moeilijk is om daadwerkelijk iets in een klas te veranderen. Het onderwijs ligt zo diep verankerd in een cultuur dat het heel moeilijk is om daarin daadwerkelijk wijzigingen aan te brengen. Zeg je bij voorbeeld dat docenten beter moeten worden opgeleid, dan kun je iets veranderen aan hun scholing, maar een dergelijke aanpassing vindt nog steeds binnen dezelfde, aloude cultuur plaats. Daarmee wordt er nog niet een-twee-drie iets veranderd in de dagelijkse praktijk in de klas, en als dat wel gebeurt, dan beklijft het vaak nauwelijks.

In de meeste Westerse landen worden leraren in opleiding geacht competent te zijn, zodra ze hun lerarenopleiding hebben afgerond. Dan hebben ze in principe alle didactische en vaktechnische kennis in hun bagage bijeengegaaard die ze nodig hebben tijdens hun reis door onderwijsland. Ervaren docenten voegen de beginneling soms nog wel fijntjes toe dat het minstens een jaar of vijf duurt, voordat je het moeilijke vak van leraar een beetje onder de knie begint te krijgen.

In de Oosterse wereld, en dan in het bijzonder in Japan, wordt deze vooronderstelling omtrent de overgang van opleiding naar werkveld niet gemaakt. Daar behoort de deelname in professionele ontwikkelingsgroepen op school tot de vaste taak van de leraar. Deze groepen spelen een dubbele rol: niet alleen voorzien ze in een context waarbinnen docenten worden begeleid en getraind, maar ook vormen ze een laboratorium voor het ontwikkelen en uittesten van nieuwe onderwijstechnieken. Dit zogeheten proces van *kounaikenshuu* is wijdverbreid in Japan. Bijna elke basisschool en middelbare school neemt eraan deel. Het omvat een groot aantal uiteenlopende activiteiten die tezamen het

veelomvattende proces van onderwijsverbetering vormen. Leraren dienen bij voorbeeld samen te werken in verschillende binnenschoolse groepen (jaarlagen, discipline, ict) en soms ook in districtsgroepen. Zo besteden ze iedere maand een aanzienlijk deel van hun tijd op school aan *kounaikenshuu*.

Een opvallend onderdeel van het hele proces van *kounaikenshuu* is de zogeheten *lesson study*. Je kunt een lesson study - in het Japans: *jugyou kenkyuu* - kortweg omschrijven als een professionaliseringsstrategie. Daarbij doen docenten gezamenlijk onderzoek in hun eigen lespraktijk naar het doceren en leren. Dit doen ze door het gezamenlijk ontwerpen, plannen, observeren en evalueren van een of meerdere zogeheten research lessen. Die lessen heten in het Japans: *kenkyuu jugyou*. Het omgekeerde van het Japanse woord voor lesson study. Tussen haakjes, met deze drie vreemde woorden is de kleine cursus Japans in de context van dit verslag overigens alweer ten einde. Een groep van docenten die zich met lesson study bezighoudt, komt vaak gedurende een langere periode bij elkaar. Dit kan variëren van een paar maanden tot een jaar. Lesson study kost dus relatief veel tijd, maar de resultaten zijn opmerkelijk. Deze aanpak geniet een grote populariteit onder Japanse docenten. En dat al meer dan een eeuw. Het is moeilijk om in Japan een school te vinden waar geen research lessen op de jaaragenda staan. En sinds de jaren vijftig begon dat ook in China te gebeuren.

Tot het einde van de vorige eeuw was in het Westen nog maar weinig gepubliceerd over de strategie van de *lesson study*. Dat veranderde na de publicatie van Stigler en Hiebert's studie *The Teaching Gap* en het artikel 'A Lesson is Like a Swiftly Flowing River'; How Research Lessons Improve Japanese Education' van de ontwikkelingspsychologe Catherine C. Lewis en de onderwijskundige Ineko Tsuchida in de *America Educator* (winter 1998).

Deze twee publicaties hebben een stroom aan *papers* en andere onderzoeksrapportages op gang gebracht. Een Westerse spil in dit web van lesson study publicaties is de eerder genoemde Catherine Lewis. In 1999 richtte de Lesson Study Group aan het Mills College in Oakland op:

<http://www.lessonresearch.net>. Een *mer à boire* voor wie zich in *lesson study* wil verdiepen.

In ons eigen land staat het doen van onderzoek met behulp van lesson study nog in de kinderschoenen. Een ware platitude, maar het is niet anders. Slechts de vakdidacticus Nellie Verhoef publiceert de laatste jaren, al dan niet in samenwerking met anderen, met enige regelmaat over lesson study. En de informaticus Daan van Smaalen bereidt een proefschrift over dit onderwerp voor. Beiden maken bovendien deel uit van het Community of Learners (COL), een onderzoeksgroep van ELAN, het instituut voor Lerarenopleiding, Wetenschaps- en techniekcommunicatie & Onderwijspraktijk van de Universiteit Twente. Daarin doen docenten en vakdidactici onderzoek naar lespraktijken over de introductie van begrippen in de calculus, de integratie van meetkunde in het wiskundeonderwijs en de heroriëntatie op de rol van bewijzen. In de COL maken ze veelvuldig gebruik van de in Japan beproefde methode van de lesson study.

Eigenlijk heeft lesson study een eenvoudige premisse: als je het onderwijs wilt verbeteren, is de meest daarvoor aangewezen plaats die van het klaslokaal waarin een les wordt verzorgd. Als je je alleen op het lesontwerp richt, raakt vaak al snel buiten beeld hoe je je onderzoeksresultaten daarna in de klas wilt toepassen. Verzorg je evenwel een research les in de klas, dan zie je - en de observatoren met jou - wat er direct met de verbeteringen in de lesopzet in de klas gebeurt. De uitdaging wordt dan dus om de research les zodanig in elkaar te steken dat hij een verandering in het leergedrag van de leerlingen zal bewerkstelligen. De vraag is: hoe?

Ten einde deze vraag te kunnen beantwoorden, zullen we nog iets nader op het onderwijskundige verschijnsel van de lesson study moeten ingaan, en meer in het bijzonder op wat de onderliggende research les eigenlijk inhoudt. Teruggrijpend op het baanbrekende artikel van Lewis en Tsuchida kunnen we een research les als volgt omschrijven:

Research lessons are actual classroom lessons, taught to one's own students, which are

- 1. focused on a specific teacher-generated problem, goal, or vision of pedagogical practice,*

2. *carefully planned, usually in collaboration with one or more colleagues,*
3. *observed by other teachers,*
4. *recorded for analysis and reflection,*
5. *discussed by lesson study group members, other colleagues, administrators and/or an invited commentator.*

In een lesson study draait het dus om een research les, maar hoe kom je daartoe en hoe ga je daarmee om? Ten einde daar een beeld van te krijgen zoomen we iets van de research les uit en onderwerpen we het proces van lesson study aan een nadere beschouwing. In een lesson study kunnen we, globaal gezegd, acht stappen onderscheiden:

1. *Het definieren van het probleem.*

Lesson study is, op de keper beschouwd, een proces gericht op het oplossen van onderwijskundige problemen. Daartoe moet een probleem worden geformuleerd, het liefste een waarmee de leden van de *lesson study group* in hun eigen leservaring te maken hebben gehad. Dat probleem kan algemeen van aard zijn: hoe kunnen we de belangstelling van leerlingen voor wiskunde aanwakkeren? Maar het kan ook specifiek van aard zijn: hoe kunnen we het begrip van leerlingen over het optellen van breuken met ongelijke noemer bevorderen? Vervolgens moet de lesson study groep het probleem nader verkennen en uiteindelijk in de vorm van een lesontwerp gieten.

2. *Het ontwerpen van de research les.*

Zodra de docenten het probleem voldoende hebben verkend en het leerdoel vastgesteld, beginnen ze een lesopzet te maken. Daarbij is het belangrijk dat ze niet alleen een effectieve les ontwerpen, maar ook proberen te begrijpen hoe en waarom de les bijdraagt aan het inzicht van de leerlingen. Hoewel uiteindelijk één docent uit de lesson study group de les daadwerkelijk zal verzorgen, is het lesontwerp een product van de hele groep.

3. *Het verzorgen van de research les.*

Er wordt een datum voor de research les geprikt. Eén lid uit de lesson study groep zal de les geven, maar de rest van de leden draagt zij het nodige aan de voorbereiding bij. Tijdens de research les lopen ze rond, doen ze observaties en maken ze aantekeningen. Normaal gesproken moeten de betrokken docenten tijdens de research les gewoon voor hun eigen klas staan. Dit wordt in Japan opgelost door twee leerlingen een oogje in het zeil te laten houden in de achtergebleven klassen.

4. *Het evalueren van de research les.*

Meteen na afloop komt de lesson study group bij elkaar om de verzorgde les na te bespreken. Degene die de les heeft gegeven, krijgt als eerste het woord. Hij kan zijn ervaringen met de rest van de groep delen: hoe verliep de les en wat waren de belangrijkste problemen? Vervolgens komen de andere leden van de lesson study groep aan het woord. Hierbij is het belangrijk dat zij ingaan op hoe de les is verlopen en niet op hoe de docent de les heeft gegeven. Het gaat om hoe de les kan worden verbeterd en niet om hoe de docent wordt geëvalueerd. De research les is een groepsproduct.

5. *Het bijstellen van de research les.*

Op basis van hun observaties en reflecties stellen de leden van de lesson study group de research groep bij. Dit kan betrekking hebben op de materialen, de lesactiviteiten, de gestelde problemen, de opdrachten et cetera.

6. *Het verzorgen van de bijgestelde research les.*

Zodra de docenten de research les hebben bijgesteld, wordt hij opnieuw gegeven, zij het in een andere klas. Dat doet soms dezelfde docent, maar meestal een ander lid van de groep. In Japan zijn vaak alle leden van een hele sectie bij deze les aanwezig.

7. *Het evalueren van de bijgestelde research les.*

Wederom mag degene die de bijgestelde les heeft verzorgd als eerste van zijn bevindingen kond doen. Daarbij kan hij ook ter sprake brengen hoe de resultaten van het bijgestelde lesontwerp zich verhouden tot het oorspronkelijke opzet en de hypothese daarachter. Welke delen van de les moeten nog verder worden doordacht? Vervolgens brengen de andere leden van de lesson study groep hun observaties en reflecties in de discussie in. Wat heeft de groep geleerd van de les en zijn implementatie? In Japan is vaak ook experts van buiten de school bij deze bespreking aanwezig.

8. *Het verspreiden van de resultaten.*

Juist omdat in Japan zo veel verschillende lesson study groups actief zijn, is het noodzakelijk om de bevindingen omtrent een research les snel met de andere groepen te delen. Vandaar ook dat bij de evaluatie van de bijgestelde research les vaak docenten van andere scholen worden uitgenodigd.

Al deze stappen hebben betrekking op een enkel lesontwerp. Sterker nog, een lesson study groep kan wel een heel jaar aan zo'n enkele les werken. Ter vergelijking, in de COL van ELAN zijn in het schooljaar 2012-'13 twee maal twee lessen ontwikkeld: twee over Riemann-sommen en twee over een analytisch-meetkundige benadering van de parabool. Dat was al heel wat. De Westerse onderwijswereld kijkt toch een beetje vreemd tegen de Japanse werkwijze aan. Dit is waarschijnlijk precies een van de problemen bij het verbeteren van het onderwijs hier: alles moet zo snel mogelijk, op de korte termijn bewerkstelligd, - liever gisteren dan vandaag. Met alle gevolgen van dien. Daarmee ondermijnen we alleen maar de pogingen die mogelijk wel tot verbetering van het voortgezet onderwijs leiden. Pogingen, niet gebaseerd op korte termijn-oplossingen, maar juist op geleidelijke en lange termijn-verbeteringen.

Lesson study is, zoals eerder gememoreerd, uiterst succesvol gebleken in Japan. Waarom? Wat is het geheim van lesson study? Daar kunnen we een aantal interessante aspecten van belichten.

1. *Lesson study is een stapsgewijs verbeteringsmodel voor de lange termijn.*

Zoals reeds eerder aangegeven: lesson study is een proces waarin, in kleine stapjes, over een langere periode, kleine verbeteringen in het onderwijs worden nagestreefd. Het is dus niet zoiets als een hervormingsproces. Zo'n verbeteringsproces vergt veel tijd. Dat heeft alles te maken met het feit dat onderwijs een culturele activiteit is. Het is, zoals de psycholoog Ronald Gallimore in zijn paper 'Classrooms are just another cultural activity' zo treffend verwoordde:

Cultural activities are historically evolved solutions to adaptive challenges. They were constructed over time through collaborative human effort to achieve a stable daily routine. Changes in cultural activity are made slowly, gradually, and are built on existing routines.

Juist omdat onderwijs een culturele activiteit is, verandert het niet snel, laat staan drastisch.

2. *Lesson study richt zich gedurig op de leerdoelen van de leerlingen.*

Alle pogingen om met behulp van lesson study een les te verbeteren, worden steeds beoordeeld met betrekking tot welomschreven leerdoelen. Dit geldt natuurlijk ook voor de herziening van een research les. Ook daarbij wordt het leergedrag van leerlingen niet uit het oog verloren. De vraag of leraren slagen hangt vaak samen met de mate waarin zij geopperde adviezen over hun lespraktijk daadwerkelijk implementeren.

3. *Lesson study richt zich op de directe verbetering van het lesgeven in de klas.*

Aansluitend op de dagelijkse praktijk van het lesgeven, onderkent *lesson study* de ingewikkelde en systematische aard van het onderwijs. Zodoende brengt deze aanpak onmiddellijk toepasbare kennis voort. Dit verschilt nogal van ontwikkelingsprogramma's voor docenten waarbij onderwijskundige onderzoekers aanbevelingen doen die in het onderwijs moeten worden geïmplementeerd. Zij stellen onderwijsverbeteringen *van buitenaf* voort, terwijl *lesson study* juist onderwijsverbeteringen *van binnenaf* bewerkstelligt. Het klinkt bijna triviaal: *lesson study* richt zich op een les als een afzonderlijke eenheid die moet worden geanalyseerd en verbeterd. Enerzijds leidt deze aanpak tot een vereenvoudiging van het onderwijsproces in de klas, anderzijds blijft het ingewikkelde sociale proces in de klas ook intact. Zelfs een enkele les bevat alle ingrediënten die we in ogenschouw moeten nemen, willen we het leergedrag in de klas verbeteren: het curriculum, de materialen en methode, de eigenschappen van leerlingen, de fysieke omgeving...

4. *Lesson study is een kwestie van samenwerking.*

Werken docenten in groepen om hun instructie te verbeteren, dan ontwikkelen ze een gezamenlijke taal waarmee ze het onderwijsproces in de klas kunnen beschrijven en analyseren, maar tegelijkertijd geven ze elkaar dan les over het lesgeven. Daardoor kunnen ze hun eigen vaardigheden steeds verbeteren. De samenwerking in een *lesson study* groep houdt in dat de deelnemers steeds met elkaar in gesprek zijn over de meest effectieve lesmethoden en over hun observaties in andermans klassen. Daardoor gaan docenten nadenken over hun eigen lespraktijk en wat daaraan kan worden verbeterd. De samenwerking in de groep motiveert de deelnemers om te verbeteren. Tegelijkertijd laat ze de deelnemers niet in de kou staan: lesverbetering is niet de verantwoordelijkheid van een enkeling. Samen maakt sterk.

5. *Lesson study* spoort docenten aan tot nadenken, niet alleen over de vermeerdering van kennis over het lesgeven, maar ook over hun eigen professionele ontwikkeling.

Japanse docenten die deelnemen aan een lesson study group, ontwikkelen niet alleen hun eigen vak, maar ook zichzelf, zo ervaren ze dat zelf althans: 'Waarom zijn we bezig met research lessen? Volgens mij zijn daar geen regels voor. Maar als we niet met research lessen bezig zouden zijn, dan zouden we geen docenten zijn'. Dit getuigt van een heel andere attitude dan de houding van de leraar die een nieuwe, door onderwijskundigen aangedragen lesaanpak in de klas moet implementeren. Onderwijskundigen zijn natuurlijk niet gek, ze kennen de actuele stand van zaken van hele stukken uit Valcke's handboek *Onderwijskunde als ontwerpwetenschap*, maar ze ontberen domweg de informatie die docenten hebben als ze echte leerlingen in echte lessen met echte leerdoelen confronteren.

Op basis van deze aspecten van lesson study geven Stigler en Hiebert in hun boek *The Teaching Gap* een aantal principes die je goed in de gaten moet houden bij het streven naar een 'gradual, measurable improvement' van het lesgeven. Deze principes vloeien rechtstreeks voort uit wat lesson study in essentie is. In deze context spreken ze voor zichzelf. Derhalve worden ze, zonder commentaar verder, opgesomd. De onderwijskundige trainer Donald Bartalo heeft deze principes in zijn boek *Closing the Teaching Gap; Coaching for Instructional Leaders* (2012) nader geoperationaliseerd:

1. zorg dat de verbeteringen met kleine stapjes en langzaam worden ingevoerd;
2. richt je gedurig op de leerdoelen van de leerlingen;
3. richt je vooral op het lesgeven, niet op de leraren;
4. probeer de gehele context van het lesgeven te verbeteren;
5. probeer het eigenlijke werk van leraren te verbeteren;
6. zet altijd een systeem op dat kan leren van zijn eigen ervaringen.

Hiermee komen we aan het einde van onze theoretische verkenning van het Japanse verschijnsel van de lesson study. Het Japanse onderwijs is in de afgelopen halve eeuw sterk verbeterd. Dit geldt zowel voor de kennis van de leraren als voor de lessen die ze verzorgen. Gedurende het lesson study proces hebben ze niet alleen hun kennis over het lesgedrag in de klas uitgebreid, maar ze hebben haar ook met allerlei collega's gedeeld. Wat dit betreft, lijkt het proces van lesson study wel enigszins op een reis in een voor jou vreemd land. Als je daarbij geen gebruik maakt van het netwerk dat anderen inmiddels in dat land hebben ontwikkeld, kom je waarschijnlijk minder ver. Al is daarmee zeker niet gezegd dat je tijdens die reis geen beren op je weg zult tegenkomen. En zo ja, hoe wil je die ervaring overbrengen naar het thuisfront?

2 Min of meer kritisch intermezzo

Precies tien jaar na de publicatie van *The Teaching Gap*, de baanbrekende studie van Stigler en Hiebert, verscheen een nieuwe editie van dat boek, een paperback met een 'New Preface and Afterword'. In die nieuwe inleiding onderstrepen de beide auteurs nog maar eens waarom hun boek met betrekking tot onderwijsverbetering de nadruk op het doceren legt. Dat is cruciaal om de prestaties van leerlingen te verhogen. Sedert de publicatie van *The Teaching Gap* bleek evenwel dat deze aanbeveling van Stigler en Hiebert heel anders uitpakte dan zij hadden vermoed. De aandacht ging sindsdien vooral naar de docenten uit en niet naar het doceren. Met als gevolg dat de verbetering van het onderwijs sterk van *buitenaf* werd geïnitieerd. En niet van *binnenuit*. Vandaar dat de beide auteurs in hun voorwoord twee aanbevelingen doen om een verandering in deze situatie aan te brengen. Ten eerste: politici, opiniemakers, onderzoekers en de rest die zich met de onderwijswereld inlaat, dienen anders tegen het beroep van docent aan te gaan kijken. Ze moeten het veeleer gaan zien als een 'knowledge-based profession', een bezigheid die kan worden verbeterd door een systematische aanpak. Ten tweede: het beroep van docent vraagt om een herdefinitie. De leraren moeten de ruimte en de verantwoordelijkheid krijgen om zich in hun vak te verdiepen en het lesgeven zelf te verbeteren. Deze aanbevelingen vloeien rechtstreeks voort uit wat in *The Teaching Gap* te berde was gebracht.

Terugkijkend en afgaande op de ontvangen brieven en emails na de publicatie van hun studie komen Stigler en Hiebert tot de ontdekking dat ze het boek vooral blijken te hebben geschreven voor docenten, in het bijzonder voor die vakbroeders die het belang onderkennen van verbeteringstrajecten voor het lesgeven. Dit is minder vreemd dan beide wetenschappers doen voorkomen: hun publicatie heeft eerder een praktische dan een theoretische inslag.

Vooraf op de theoretische onderbouwing van de vergelijkende, cross-nationale studie naar data van op video vastgelegde wiskundelessen valt wel iets af te dingen. Merkwaardigerwijze bevat *The Teaching Gap* weinig statistische analyses van de data. Zoals we eerder opmerkten, bevat de studie wel de nodige

methodologische opmerkingen over de mathematisering van de videodata, maar op de validering van hun werkwijze - zeg maar, de kwestie in hoeverre de codering van de videodata nog heeft te maken met de werkelijkheid van de wiskundeles in de klas - gaan de auteurs nauwelijks in, laat staan dat ze die validiteit verder differentiëren. Uit hun analyses van de videodata van de wiskundelessen uit verschillende landen trekken Stigler en Hiebert de conclusie dat lesgeven een culturele activiteit is. Het lesgeven is daarom zo moeilijk te veranderen - lees: verbeteren - omdat leraren, aldus beide onderzoekers, zijn behept met 'een cultureel verankerd DNA'. Hetzelfde geldt overigens voor hun leerlingen. Met de introductie van sociaal-culturele aspecten van het gebeuren in de klas betreden Stigler en Hiebert het sociaal-psychologische onderzoeksveld, maar daar maken ze weinig woorden aan vuil. Als gevolg daarvan blijft hun voorspelling dat onderwijs een culturele activiteit is, enigszins in het luchtledige hangen. Hun uitspraak klinkt wel plausibel, maar hoe kan die verder worden begrepen? Welke sociaal-psychologische inzichten spelen daarbij een rol, en hoe? Enfin, in het voorafgaande hebben we daarover al het nodige gezegd.

Stigler en Hiebert hadden de sociaal-culturele context van het onderwijs in de klas ook nog in een andere richting kunnen onderbouwen. De Russische ontwikkelingspsycholoog Lev Vygotsky richtte zich vooral op sociale en emotionele aspecten van de ontwikkeling van een leerling. Volgens Vygotsky leert een kind vooral in de interactie met de sociaal-culturele wereld, bij voorbeeld gepersonifieerd door ouders en leerkrachten. Hierbij is een belangrijke rol weggelegd voor het oplossingsgerichte denken van leerlingen. Vygotsky maakte onderscheid tussen de problemen die de leerlingen zelf kunnen oplossen, het niveau van hun eigenlijke ontwikkeling, en de problemen die zij met behulp van iemand anders kunnen oplossen, hun potentiële ontwikkeling. De leemte daartussen is Vygotsky's bekende notie van de 'zone van naaste ontwikkeling', het gebied dat de leerlingen nog moeten bijleren. Daar kunnen zij een kenniskloof overbruggen, niet alleen met de hulp van leerkrachten, maar ook met die van medeleerlingen, precies zoals bij voorbeeld bij het samenwerkend leren gebeurt.

Daarentegen gebruiken Stigler en Hiebert hun inzicht dat onderwijs een culturele activiteit is, veeleer op welhaast op axiomatische wijze. Op basis

daarvan adstrueren zij het gegeven dat het lesgeven zo moeilijk te veranderen is. Sterker nog, het leren om les te geven blijkt evenzeer cultureel bepaald als het lesgeven zelf. Vaak kregen de beide auteurs de vraag voorgelegd, mede op basis van vervolgstudies op *The Teaching Gap*, of ze voorbeelden konden geven van 'best practices', uitgeoefend in landen met een hoge wiskundige geletterdheid. Maar voorzover die aanpakken al voorhanden zijn, kunnen ze niet zomaar naar onderwijssituaties in andere landen worden overgeplant. Wat dit betreft, ligt de ondertitel van de studie van Stigler en Hiebert heel wat genuanceerder dan op het eerste gezicht lijkt.

Aan het einde van het nawoord bij de paperback-editie van *The Teaching Gap* vatten beide onderzoekers samen hoe de leemte uit die titel, volgens hen, zou moeten worden overbrugd. In plaats van hen te parafraseren, kan ik ze nu het beste zelf aan het woord laten:

We know that there is not one best way to teach but a variety of methods that can be used effectively, depending on the context. We know that these methods can be studied and improved, and we know that developing the evidence for good teaching – for understanding how and when and under what conditions various strategies work – will require collaboration among researchers and teachers. And we know that the ultimate standard for good teaching will be in the kinds of learning opportunities that teaching creates, and students are able to make use of, in the classroom. In mathematics, we know that high-achieving countries succeed not by using particular methods but by finding ways to engage students in sustained efforts to grapple with mathematical ideas and relationships.

En er is nog meer wat Stigler en Hiebert zeggen uiteindelijk te weten:

We also know that becoming an expert teacher will require consistent opportunities over long periods of time for teachers to study and improve one's own teaching and the teaching of one's colleagues. Teaching the same old way is natural. Teaching in new ways is far more complicated than many think. Teachers must have knowledge of the domain (e.g., mathematics) and of how students

think about and learn the domain. They must also have skills at implementing a variety of different methods that have been validated and incorporated into a growing knowledge base for teaching. Finally, they must have the skills to assess what students know and where they are in a learning trajectory, as well as the judgment to decide which of the methods in their repertoire to deploy them.

De voorafgaande aanhalingen van Stigler and Hiebert, met al die herhalingen, klinken soms bijna als een *rap*-tekst over wiskunde-onderwijs. Althans in onze oren. Dat geldt vooral voor het eerste citaat. In het tweede gaat het over de vaardigheden die een 'expert teacher' zich eigen zou moeten hebben gemaakt.

Zoals we in het voorafgaande hoofdstuk al uitgebreid hebben besproken, verwijzen Stigler en Hiebert naar de uit Japan afkomstige aanpak van lesson study om wiskundeleraars verder te professionaliseren. Beide onderzoekers beschrijven uitgebreid wat die onderzoeksmethode vermag. Ondanks dat blijft ze toch iets van een *blackbox* houden. Op basis van *The Teaching Gap* valt voor ons nauwelijks te begrijpen waarom een lesson study experiment werkt. Ze is in Japan erg succesvol gebleken, maar waarom? Op deze vraag geven Stigler en Hiebert vooral een antwoord in onderwijssociologische zin en niet, zoals we eerder zouden verwachten, in sociaal-psychologische zin. Een methodologische inkadering van een lesson study als sociaal-psychologisch experiment ontbreekt in *The Teaching Gap* dan ook volkomen. En onder welke voorwaarden is de in Japan ontwikkelde aanpak van lesson study, gezien de sociaal-culturele context van docenten, leerlingen en het gebeuren in de klas, aan te wenden voor onderwijsverbetering in andere landen? Daarover zijn in de afgelopen jaar heel wat papers verschenen, maar die scherpen hoogstens de voorwaarden iets aan waaronder een lesson study experiment moet worden uitgevoerd. We noemen er enkele.

De linguïste Jackie F.K. Lee geeft in haar paper 'A Hong Kong case of lesson study - Benefits and concerns' bij voorbeeld een paar bevindingen over zaken die vaak voorkomen. Observatoren in zo'n experiment - veelal vakgenoten op school - komen vaak onder extreem grote tijdsdruk te staan. Tijdgebrek bij de voorbereiding, uitvoering en evaluatie c.q. bijstelling speelt niet zelden een rol bij

lesson study experimenten. Verder blijken observatoren in een klassituatie veeleer geneigd om de instructie van de docent te evalueren dan de samenwerking in de groepjes van leerlingen.

In hun paper onder de titel 'A US-Japan lesson study collaboration reveals critical lenses for examining practice' verkennen de onderwijspsychologe Clea Fernandez en enkele van haar collega's welke factoren een rol spelen bij de uitvoering van een *lesson study* in een ander land dan het land der herkomst: Japan. Ze beschrijven een experiment, door Amerikaanse docenten uitgevoerd, naar aanwijzingen van hun Oosterse collega's. De Japanse docenten benadrukken drie oogmerken van de *lesson study*:

1. *het oogmerk van de onderzoeker*

De docenten moeten zichzelf als onderzoekers beschouwen die een empirische proef uitvoeren over vragen omtrent de praktijk tijdens een wiskundeles. Deze proef moet natuurlijk voldoen aan de eisen van wetenschappelijk onderzoek:

1. kun je betekenisvolle en testbare hypothesen ontwikkelen?
2. kun je deze hypothesen met geëigende middelen verkennen?
3. kun je de betrouwbaarheid van de uitkomsten beoordelen?
4. kun je de uitkomsten van het onderzoek generaliseren?

2. *het oogmerk van de curriculum-ontwikkelaar*

De docenten moeten proberen te begrijpen hoe het curriculum van de school in elkaar steekt, niet alleen zoals het in de boeken van de methode is neergelegd, maar ook zoals het in de klas wordt geïmplementeerd. Ze moeten dus niet alleen de lessen van binnenuit kunnen doorzien, maar ook over de lessen heen.

3. *Het oogmerk van de leerling*

De docenten moeten proberen te begrijpen hoe de leerlingen alle aspecten van de les ervaren. Ze moeten het denken van de leerlingen doorgronden,

anticiperen op hun gedrag en nagaan hoe ze deze kennis kunnen gebruiken om in te zien hoe leerlingen iets begrijpen.

Deze belangrijke methodologische uitgangspunten en oogmerken van een *lesson study* experiment worden in *The Teaching Gap* niet genoemd. Ze geven als het ware opening aan de *blackbox*, om het even of die nu sociaal-wetenschappelijk van aard is of niet. Dankzij de genoemde oogmerken kunnen de observaties van de research les en de daarop volgende evaluatie gestructureerder verlopen. Op deze wijze wordt de mogelijkheid vergroot dat de docenten kunnen leren van hun eigen praktijkonderzoek. Het blijft evenwel vreemd dat de docenten een lesson study evalueren, maar de leerlingen die mogelijkheid niet wordt geboden. Werden zij bij voorbeeld gemotiveerd door deze aanpak? In sociaal-wetenschappelijk onderzoek brengen we de proefpersonen doorgaans in een experimentele situatie, maar dan moeten we hun daar natuurlijk ook weer uithalen. Dat kun je onder meer bewerkstelligen met behulp van een evaluatie.

3 Probleemstelling en stappenplan

Lesson study is, zoals we in het voorafgaande al vaker opmerkten, een strategie om het lesgeven te professionaliseren. Daarbij doen docenten gezamenlijk onderzoek in hun eigen lespraktijk naar het doceren en leren. Dit houdt in dat ze een of meerdere research lessen gezamenlijk ontwerpen, plannen, observeren en evalueren. Een groep van docenten die zich met lesson study bezighoudt, komt vaak gedurende een langere periode bij elkaar. Dit kan variëren van een paar maanden tot een jaar. Lesson study kost, met andere woorden, relatief veel tijd. En het bewandelen van zo'n onderzoekstraject is, zeker in organisatorisch en sociaal-psychologisch opzicht, een betrekkelijk ingewikkeld karwei.

Alleen al vanwege dergelijke dwingende randvoorwaarden is het niet goed mogelijk om een *klassieke lesson study* uit te voeren in het kader van een masterstudie zoals Science Education and Communication. Deze studie voorziet weliswaar in de verplichting om het onderdeel Onderzoek van Onderwijs tot een goed einde te brengen, maar daarmee zijn slechts 10 European Credits gemoeid. Dat houdt een studiebelasting van $10 \times 28 = 280$ uur in. Veel te weinig om een *klassieke lesson study* adequaat op te zetten en uit te voeren. Daar is meer voor nodig.

Sterker nog, een docent wiskunde aan een instelling voor voortgezet onderwijs krijgt nauwelijks de kans om naast zijn - vaak drukke - beroepspraktijk ook nog (veld)onderzoek te doen naar het onderwijs waar hij betrokken is. En dat terwijl de potentiële proefpersonen bij hem in de klas zitten. Ik wilde de kans om enig onderwijskundig onderzoek te kunnen doen in een reële *setting* niet aan mij voorbij laten gaan. Daarop stelde ik mijzelf de volgende vraag: hoe zou ik een onderzoek kunnen opzetten waarin ik, weliswaar op kleine schaal, gebruik zou kunnen maken van wat lesson study vermag? Welke mogelijkheden heeft die aanpak mij te bieden?

Ik besloot de hele professionaliseringstrategie die lesson study inhoudt, terug te brengen, tot één interessant aspect daarvan: kan ik deze aanpak gebruiken om mijn instructie aan leerlingen in het voortgezette onderwijs te verbeteren? Zeg

maar, een niet onbelangrijke splinter in het onderwijskundige bouwwerk van de lesson study.

De aldus geformuleerde onderzoeksvraag is natuurlijk veel te algemeen. Daarom heb ik de vraag geherformuleerd en die ligt aan deze scriptie ten grondslag: hoe zou in een aantal specifieke gevallen de wiskundige instructie aan leerlingen in het voortgezet wetenschappelijk onderwijs kunnen worden verbeterd? De specifieke gevallen waarop ik doel, zijn de volgende: de introductie van de bissectrice klas 2, de introductie van de tangens in klas 3 en het vaasmodel bij trekken met en zonder terugleggen in klas 4. De onderzoeksmethode die ik daarbij gebruik, is een afgeleide van de klassieke lesson study, een eenvoudiger opzet die ook veel minder tijd in beslag neemt. Vandaar dat ik deze benadering als *kleine lesson study* beschouw.

Vervolgens dien ik natuurlijk te laten zien in hoeverre deze afgeleide nog beantwoordt aan de acht kenmerkende stappen van de lesson study:

1. *Het definieren van het probleem.*

In dit onderzoek probeer ik om enige onderwijskundige problemen op te lossen, zoals ook bij de klassieke lesson study gebeurt. De gerezen vragen zijn in dit geval beperkt en overzichtelijk van aard. Ik heb die problemen geformuleerd na overleg met enkele van mijn collega's in de sectie wiskunde op het Gymnasium Coleanum in Zwolle. Ze vallen onder de volgende noemer samen: hoe kan de instructie aan de leerlingen op deze school worden verbeterd? Dan gaat het in het bijzonder over de introductie van de bissectrice in klas 2, over die van de tangens in klas 3 en het vaasmodel bij trekken met en zonder terugleggen in klas 4.

2. *Het ontwerpen van de research les.*

Weliswaar maak ik in dit onderzoek dankbaar gebruik van de expertise van mijn collega's op het Coleanum, maar we werken (nog) niet samen in een lesson study groep. Ik zal de research lessen uiteindelijk in m'n eentje opzetten.

Bij de eerste les sluit ik nog nauw bij de gebruikte methode *Getal & Ruimte* aan, maar bij de laatste opzet probeer ik al veeleer te begrijpen hoe en waarom de les bijdraagt aan het inzicht van de leerlingen. Daarbij zorg ik er nadrukkelijk voor dat de instructie de leerlingen bij de les houdt. De lesontwerpen zijn, anders dan bij een klassieke lesson study groep, het product van één hand: de mijne.

3. *Het verzorgen van de research les.*

Vervolgens kies ik een datum voor de diverse research lessen,- een lastige klus, aangezien diverse collega's, veelal uit de sectie wiskunde, als observator bij de lessen aanwezig moeten zijn. Zij wonen de door mij verzorgde research les bij en daarna lopen ze rond, doen ze observaties en maken ze aantekeningen.

4. *Het evalueren van de research les.*

Na afloop van de research les komen de observatoren en ik meteen bij elkaar om het gebeurde na te bespreken. Ik krijg als eerste het woord om mijn ervaringen met de rest van de groep te delen: hoe verliep de les en wat waren de belangrijkste problemen? Vervolgens komen de observatoren aan het woord. Hierbij is het belangrijk dat zij ingaan *op hoe de les* is verlopen en *niet op hoe de docent* de les heeft gegeven. Het gaat erom hoe de les kan worden verbeterd en niet om hoe de docent wordt geëvalueerd.

5. *Het bijstellen van de research les.*

Op basis van de bevindingen van de observatoren stel ik de research les bij. Dit heeft meestal betrekking op de instructie en de lesactiviteiten, maar soms ook op de materialen.

6. *Het verzorgen van de bijgestelde research les.*

De bijgestelde research les verzorg ik steeds in een andere klas. Soms zijn daarbij dezelfde observatoren aanwezig, soms andere.

7. *Het evalueren van de bijgestelde research les.*

Na afloop van de bijgestelde research les mag ik, als docent *in charge*, wederom als eerste mijn bevindingen ten beste geven. Daarbij probeer ik ook al te reflecteren op hoe de resultaten van het bijgestelde lesontwerp zich verhouden tot het oorspronkelijke opzet en de hypothese daarachter. Vervolgens brengen de observatoren hun reflecties in de discussie te berde.

8. *Het verspreiden van de resultaten.*

Het spreekt vanzelf dat ik mijn bevindingen in dit onderzoek in schriftelijke vorm neerleg. Het is immers de afsluiting van het studieonderdeel Onderzoek van Onderwijs. Aangezien het ook geldt als afsluiting van de hele studie Science Education and Communication hou ik er ook nog een colloquium over. De beste plek om dat te doen is natuurlijk het Gymnasium Ceeleum in Zwolle, de plaats waar het onderzoek is uitgevoerd.

Met andere woorden, dit onderzoek naar de vraag hoe de instructie van een drietal specifieke wiskundige onderwerpen kan worden verbeterd middels een kleine lesson study, volgt in grote lijnen het stappenplan dat ten grondslag ligt aan de klassieke lesson study. Nu maar eens kijken wat er uiteindelijk van de bovenstaande probleemstelling en het bijbehorende stappenplan terecht is gekomen.

4 Een kleine lesson study in klas 4

Korte inhoud van het voorafgaande. Inmiddels hebben we ons enigszins verdiept in de achtergronden van de lesson study. Zouden we zo'n lesexperiment, zoals Catherine Lewis en de beide James-en, Stigler en Hiebert, in de Westerse wereld hebben geïntroduceerd, willen uitvoeren op het Gymnasium Celeanum in Zwolle, dan stuit dat op te veel praktische en organisatorische bezwaren. Daarom kies ik voor de uitvoering van een kleine lesson study, conform het voorafgaande. Ik heb nog nauwelijks een idee hoe zo'n lesson study in de praktijk zal verlopen, en waar de kracht van deze onderzoeksaanpak nu precies in schuilt, maar ik kan al wel vermoeden dat de observatoren zich graag over de aard van de gegeven instructie zullen willen uitlaten. Maar zal het hun ook lukken om inzicht te krijgen in wat er in de hoofden van de leerlingen gebeurt,- de denkactiviteiten?

Nu staat er dus ineens een kleine lesson study in klas 4 op het programma, in klas 4A om precies te zijn. Volgens de studiewijzer moet deze klas inmiddels zijn aangeland bij hoofdstuk 6 van *Getal en Ruimte*, VWO A/C, deel 2: 'Kansrekening'. Weldra komt paragraaf 6.3 aan de orde: 'Trekken met en zonder terugleggen'. Elke lesson study moet, wat mij betreft, zo naadloos mogelijk binnen de studiewijzer passen, ook al omdat elke wijziging daarin toch altijd enige onrust bij de leerlingen met zich meebrengt. Na overleg met een paar wiskunde-collega's op school die ook in de A-bovenbouw les geven, kies ik ervoor om een research les te ontwerpen over het vaasmodel bij trekken met en zonder terugleggen. Daar zijn verschillende redenen voor aan te geven. Kansrekening roept in een klas altijd sterk uiteenlopende reacties op. Sommige leerlingen die doorgaans matig presteren bij reguliere wiskundige onderwerpen, blijken plotseling goed uit de voeten te kunnen met kansrekenkundige vraagstukken. Maar ook andersom. Het lijkt wel, alsof de leerlingen een ander cognitief schema opbouwen bij dergelijke opgaven dan bij voorbeeld bij sommen over machten en logaritmen. Dat heeft deels te maken met de aard van de opgaven: het zijn veelal contextsommen. De werkelijkheid moet worden vertaald in een toevalsexperiment en het bijbehorende kansmodel. Wat moeten de leerlingen zich daarbij voorstellen, wat is relevant,

welke veronderstellingen spelen een rol? Een van de meest gebruikte kansmodellen heet het vaasmodel. Dat is precies wat het zegt te zijn: het model van een vaas dat een aantal knikkers bevat. Een of andere proefpersoon trekt daaruit een aantal nader omschreven knikkers. Bij het gebruik van het vaasmodel vindt dus ook een dubbele vertaalslag plaats: van de werkelijkheid naar het vaasmodel en van het vaasmodel naar een mathematisering. Daarenboven dienen zich bij het trekken zonder terugleggen twee aanpakken bij het vaasmodel aan: de productregel en de kansdefinitie van Laplace. Waarom vinden sommige leerlingen de kansrekening, bij voorbeeld het vaasmodel bij trekken met en zonder terugleggen, zo moeilijk? En wordt dat specifieke onderwerp eigenlijk wel adequaat uitgelegd in de methode *Getal en Ruimte*? Ten einde iets zinnigs over deze vragen te kunnen zeggen, blijf ik in deze allereerste kleine lesson study zo dicht mogelijk bij wat de methode te berde brengt.

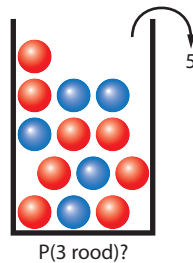
Op basis van hoofdstuk 6.3, in het bijzonder het stukje 'Theorie B' uit de methode *Getal en Ruimte*, VWO A/C, tiende editie, en de bovenstaande overwegingen kom ik tot het volgende lesplan:

LESPLAN HET VAASMODEL BIJ TREKKEN MET EN ZONDER TERUGLEGGEN

Leerdoel	Nader kennismaken met het vaasmodel. Onderscheiden van trekken met en zonder terugleggen.
Voorkennis	De leerlingen moeten kansen en combinaties bij het vaasmodel kunnen berekenen. Ze moeten de som- en productregel kunnen toepassen, alsook de complementregel.
Gangbare fouten	De leerlingen interpreteren de kansuitspraken verkeerd. Ze verhaspelen de werkelijkheid waar het kansexperiment plaatsvindt en het daarvan afgeleide kansmodel met bijbehorende rekenregels. Ze vergeten het mogelijk aantal rijtjes bij combinaties. Ze verwarren de som- en de productregel.

Start

Laten we even teruggaan naar het vaasmodel:



Of in woorden: er is een vaas met 8 rode en 5 blauwe knikkers. Iemand trekt 5 knikkers uit de vaas. Zonder terugleggen. Wat is de kans dat 3 knikkers daarvan rood zijn? In dat geval zijn er dus 2 blauw.

We hebben in een eerdere les gezien dat

$P(rrr) = \binom{5}{3} \cdot P(rrrb)bb$. Met andere woorden, die eerste term geeft aan hoeveel rijtjes we kunnen maken van rrrbb.

$$P(rrr) = \binom{5}{3} \cdot P(rrrb)bb = \binom{5}{3} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = 10 \cdot \frac{56}{1287} = 0.435$$

Dit konden we ook sneller berekenen met de kansdefinitie van Laplace;

$$P(rrrb)bb = \frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{13}{5}} = 0.435$$

Lesactiviteit

Het hoeft bij dit soort berekeningen natuurlijk niet altijd om vazen met knikkers te gaan, zakken met ballen en meer van dergelijke vergelijkbare gegevens.

Ook andere problemen kun je vaak terugvertalen naar een vaas met knikkers erin. Zeker als het om lastige opgaven gaat - lees: ingewikkelde verhaaltjes - verdient het aanbeveling om de omschreven situatie terug te vertalen naar het vaasmodel. Je moet dan wel even goed nadenken

over wat de vaas is, wat de knikkers zijn en hoeveel je er uithaalt. Daarbij moet je onderscheiden of dat met of zonder terugleggen gebeurt.

Gebruikten we tot nu toe het vaasmodel, dan had dat altijd te maken met trekken zonder terugleggen: de getrokken knikker wordt niet terug in de vaas gedaan. Met elke trekking verandert de samenstelling van de vaas. Willen we het vaasmodel toepassen, dan moeten we dus nagaan of het aantal mogelijkheden in een kansexperiment verandert.

Stel: in een grabbelton zitten zes enveloppen. Twee daarvan bevatten een prijs. Paul pakt drie enveloppen. Wat is de kans dat hij één prijs wint?

In dit experiment verandert de inhoud van de grabbelton na iedere trekking. Dit is een voorbeeld van trekken zonder terugleggen. We kunnen het terugvertalen naar het vaasmodel met trekken zonder terugleggen. Het vaasmodel bevat in dit geval twee rode knikkers (de prijzen) en vier witte (de nieten). Pak drie knikkers en de vraag is nu: wat is de kans op één prijs?

In het voorafgaande hebben we gezien dat deze vraag op twee manieren kan worden beantwoord:

1. Met de *productregel*:

$$P(\text{één prijs}) = \binom{3}{1} \cdot P(\text{rww}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = 0,6$$

2. Met de *kansdefinitie van Laplace*:

$$P(\text{één prijs}) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{6}{3}} = 0.6$$

Afgezien van de 'vertaalslag' van de gegeven werkelijkheid

naar het vaasmodel niets nieuws onder de zon.

Nu gaan we het vaasmodel gebruiken in het geval van trekken met terugleggen. Met andere woorden, de samenstelling van de vaas verandert niet. Welke kansexperimenten voldoen daaraan? Heel eenvoudig: het werpen met dobbelstenen, het draaien met schijven... Elke worp, elke draai komt overeen met het trekken van een knikker uit de vaas. Twee worpen, twee draaien komen dan overeen met het trekken van twee keer een knikker uit de vaas, maar dan moet de knikker daarin wel weer worden teruggestopt.

Stel: Dirk gooit drie keer met een dobbelsteen. Wat is de kans dat hij één keer minstens vijf ogen gooit?

In dit experiment veranderen de te trekken mogelijkheden niet. We kunnen dit terugvertalen naar het vaasmodel met trekken met terugleggen. Het vaasmodel bevat in dit geval twee rode knikkers (vijf of zes ogen) en vier witte (een, twee, drie of vier ogen). Pak drie knikkers en de vraag is dan: wat is de kans de kans dat hij gooit? Of te wel: wat is de kans dat hij één keer een rode knikker trekt?

We beantwoorden deze vraag met de *productregel*:

$$\begin{aligned} P(\text{één keer minstens vijf ogen}) &= \binom{3}{1} \cdot P(\text{rww}) = \\ &= \binom{3}{1} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \approx 0.444 \end{aligned}$$

Kortom, bij trekken met terugleggen gebruiken we altijd de productregel, bij trekken zonder terugleggen hetzij de productregel, hetzij de kansdefinitie van Laplace. (De beide gevallen heb ik naast elkaar op het white board gezet).

Huiswerk	Daar mag je, in kleine groepen, nu aan beginnen: opgave 38 en 39 (op bladzijde 67 van bovengenoemd leerboek).
Samenvatting	Je hebt nader kennis gemaakt met het vaasmodel. Daarbij kun je kansexperimenten met en zonder terugleggen onderscheiden. In beide gevallen kun je de productregel toepassen, maar bij het trekken zonder terugleggen mag je ook de kansdefinitie van Laplace gebruiken. Wanneer is het handiger om, in plaats van de productregel, de aanpak van Laplace te gebruiken?

Dit lesplan voer ik vervolgens op maandag 11 juni 2012 uit. Het is het zesdelesuur, dus: 13.15-14.00 uur. De klas die lokaal 17 binnenkomt, is het cluster A8(A8), 26 leerlingen in totaal. Ik vertel aan hen dat ze de bijzondere les krijgen waarvoor ik hen overigens al eerder toestemming heb gevraagd. Ze mogen de klas 'verbouwen' en in groepjes van vier gaan zitten. Ik stel de aanwezige observatoren voor: Harry Schutjes, docent wiskunde, en Marco de Vries, waarnemend rector. Daarna begint de les volgens het vooropgezette plan.

Onmiddellijk na de les komen de observatoren en ik bijeen om de research les na te bespreken. De docent van de les, ondergetekende dus, mag eerst even iets zeggen over het gebeurde: 'Ik ben niet geheel tevreden over de instructie. Naar mijn gevoel bleef ik te dicht bij de methode. Dat verliep niet zonder slag of stoot. Bovendien leek de instructie niet geheel over te komen bij de leerlingen, alhoewel die bij navraag mijnerzijds daarnaar vriendelijk bleven zwijgen. Ook heb ik het gebruik van de grafische rekenmachine, de GR, in het bijzonder de optie nCr, niet klassikaal (nogmaals) uitgelegd, terwijl A-leerlingen altijd snel geneigd zijn om naar dat ding te grijpen.'

Vervolgens komt observator Marco aan het woord: 'Het groepje dat ik heb geobserveerd, bestond uit twee jongens en twee meisjes. Je zag heel duidelijk dat de jongens aanvankelijk alleen met elkaar onderling samenwerkten en de meisjes ook. Pas gaandeweg gingen de leerlingen elkaar uitleg geven, maar niet dan

nadat er nadrukkelijk om was gevraagd. Daarbij bladerden ze af en toe in het leerboek terug. Naar aanleiding van opgave 38 bleek de instructie over het verschil tussen experimenten met of zonder terugleggen in het groepje niet duidelijk geworden. Ze gingen gewoon onmiddellijk de kansdefinitie van Laplace toepassen: 'Dat is makkelijk', maar het waarom daarvan was een ander verhaal. Ze begrepen ook niet goed wat $\binom{16}{2}$ eigenlijk inhoudt en ze wilden dat het liefst zo snel mogelijk in de GR intikken. Hoe? was dan de volgende vraag. De instructie over het vaasmodel bleek over de hoofden van dit groepje gegaan: 'Ik begrijp het niet goed. Het gaat over een dobbelsteen, maar dat komen ze steeds bij een vaas terecht'. En een andere leerling: 'Door het vaasmodel wordt het juist ingewikkelder'. En een derde: 'True'. Ze wilden het antwoordenboekje erbij bekijken en toen dat niet bleek te mogen, begonnen ze weer over de GR. Ze bleken niet (meer) te weten hoe ze combinaties met de GR kunnen bereken. Om 13.55 uur was het groepje niet verder gekomen dan opgave 38d.'

Observator Harry bevestigt de opmerkingen van Marco grotendeels. Hij heeft een sociaal-psychologisch schetsje van het groepsproces gemaakt en constateerde veel afleidende ruis tussen de vijf leerlingen: 'Veel gepraat over nagels, proefvertalingen en bespreekgevallen. Een van de leerlingen zat constant poppetjes te tekenen, omdat hij alles al had gemaakt en nagekeken. Toen twee leerlingen zich over opgave 38b bogen, hield hij zich dan ook nadrukkelijk afzijdig. Wat betekent de kans op minstens één blauwe knikker? Ze keken op het bord en kwamen er niet uit: 'Er staat in de opgave 38 zonder terugleggen, maar het is toch met?' Ze hadden de opgave dus niet goed gelezen. En een ander vroeg naar aanleiding van een antwoord op papier: 'Waar komt die derde macht vandaan? Omdat je drie knikkers pakt?' Toen vroeg de vijfde leerling ineens aan de eerste: 'Hoe doe je dat met nCR op de GR?' Kortom, op basis van de instructie begrepen de leerlingen het verschil tussen kansexperimenten met en zonder terugleggen niet of nauwelijks.'

Maar observator Harry moet ook nog iets kwijt over de gegeven instructie: 'Eigenlijk begrijp ik de voorbeelden op het bord nog steeds niet. De aanpak met terugleggen is de kans op minstens één keer vijf ogen, en zonder terugleggen

gaat het om de kans op precies één prijs. Uitgaande van de zwakke leerling kan ik me voorstellen dat hij het trekken met terugleggen associeert met dat 'minstens' en zonder terugleggen met 'precies'. Daarom wilde ik ook weten of deze voorbeelden uit het leerboek komen. Ik zou dat onderscheid niet zo vertroebelen. In het leerboek wordt het verschil tussen het kansexperiment met en zonder terugleggen erg verduisterd door het gebruik van dat 'minstens' en 'precies'. Weer een aanwijzing waarom ik weinig enthousiast kan zijn over de methode *Getal en Ruimte*.

Ook de docent die de instructie verzorgde, heeft een groep geobserveerd: 'Mijn groepje begon meteen verwoed aan opgave 38 te rekenen: Martijn pakt zonder terugleggen drie knikkers uit een vaas met 24 blauwe en 16 groene knikkers; bereken de kans op twee groene knikkers.

Een leerling uit deze groep: 'Ja, dat hebben we de hele tijd al gedaan, maar ik vergeet steeds hoe het precies in z'n werk gaat.' En een ander: 'Moeten we ook rekening houden met de volgorde? Hoe gaat dat ook alweer?' De leerlingen bladerden terug in het leerboek en ze keken op het white board. Uiteindelijk besloten ze tot de kansdefinitie van Laplace:

$$P(\text{twee groene knikkers}) = \frac{\binom{16}{2} \cdot \binom{24}{1}}{\binom{40}{3}} = \frac{120 \cdot 24}{9880} \approx 0,291...$$

Waarom zou dit niet goed zijn? Sommige leerlingen kregen een *syntax error* op hun GR, andere vroegen zich af, of ze goed hadden afgerond. Moet je ook tussendoor afronden? Bij de berekening van de kans op minstens één blauwe knikker nam een leerling de leiding in het groepje en hij zei dat hier de complementregel moet worden gebruikt:

$$1 - P(\text{nul blauwe knikker}) = 1 - \frac{\binom{16}{3} \cdot \binom{24}{0}}{\binom{40}{3}} = \frac{560}{9880} \approx 1 - 0,057 = 0,943$$

Hoe dezelfde kansexperimenten, maar dan met terugleggen, moeten worden gedaan, wisten de leerlingen niet meer. Weinig gestructureerd kwamen ze tot:

$$P(\text{twee groene knikkers}) = P(\text{ggb}) = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{24}$$

Dat was niet goed. Een van de leerlinge sprak olijk: 'We zijn nu in de fase dat we het probleem proberen te begrijpen'. Ze snapten niet hoe het voorbeeld met terugleggen werkt. Noch hadden ze een poging gewaagd om het in het vaasmodel te gieten. Bij het terugbladeren ontdekte een van hen dat de productregel kan worden gebruikt. En een ander suggereerde om de knikkers in de opgave als draaiende schijven te bekijken. Terwijl de halve groep het spoor bijster raakte, schreef een leerling, na enig terugbladeren, het volgende op:

$$P(\text{twee groene knikkers}) = P(\text{ggb}) = \frac{16}{40} \cdot \frac{16}{40} \cdot \frac{24}{40}.$$

En hij zei: 'Zo klopt het, denk ik. Ik zie het licht!' Bijna, overwoog ik, want hij vergat het aantal mogelijke rijtjes nog.'

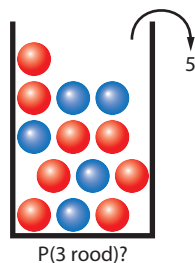
Na deze evaluatie van hoe de research les bij de leerlingen is aangekomen, zijn we het erover eens dat het vaasmodel bij trekken met en zonder terugleggen buitengewoon ondoorzichtig wordt uitgelegd in de methode. Dat kan dus geen leidraad meer zijn bij de aangepaste research les. Zoveel heeft deze lesson study, hoe bescheiden van opzet ook, in ieder geval al opgeleverd. Het lijkt veel verstandiger om opgave 38 als uitgangspunt voor de instructie te nemen. Weliswaar verliezen we dan de terugvertaling van een gegeven werkelijkheid naar het vaasmodel, maar de winst is dat we het trekken met en zonder terugleggen goed kunnen uitleggen. Vandaaruit kunnen we ook iets zeggen over dat 'minstens' in opgave 38b en 38d. Bovendien kan de optie nCr op de GR misschien nog even aan bod komen.

Wat de denkactiviteiten van de leerlingen betreft, bleek bovenal het gebrek aan elementaire wiskundige kennis en vaardigheden bij de leerlingen. Ze kennen de basisregels voor het afronden niet meer. Ze begrijpen niet wat de term als $\binom{n}{r}$ betekent, ze kunnen hem niet in wiskundige zin uitwerken en ze weten ook niet

hoe hij in de GR moet worden ingevoerd. Uit de denkactiviteiten van de leerlingen kwam naar voren dat ze doorgaans grote moeite hebben met de vertaling van een gegeven werkelijkheid naar het vaasmodel. En ze passen de kansdefinitie van Laplace graag toe,- te pas en te onpas. Omdat ze niet goed weten wanneer je handiger de productregel dan wel de kansdefinitie van Laplace kunt toepassen.

BIJGESTELD LESPLAN HET VAASMODEL BIJ TREKKEN MET EN ZONDER TERUGLEGGEN

Leerdoel	Nader kennismaken met het vaasmodel. Onderscheiden van trekken met en zonder terugleggen.
Voorkennis	De leerlingen moeten kansen en combinaties bij het vaasmodel kunnen berekenen. Ze moeten de som- en productregel kunnen toepassen, alsook de complementregel.
Gangbare fouten	De leerlingen interpretern de kansuitspraken verkeerd. Ze verhaspelen de werkelijkheid waar het kansexperiment plaatsvindt en het daarvan afgeleide kansmodel met bijbehorende rekenregels. Ze vergeten het mogelijk aantal rijtjes bij combinaties. Ze verwarren de som- en de productregel.
Start	Laten we even teruggaan naar het vaasmodel:



Of in woorden: er is een vaas met 8 rode en 5 blauwe knikkers. Iemand trekt 5 knikkers uit de vaas. Zonder terugleggen. Wat is de kans dat 3 knikkers daarvan rood zijn? In dat geval zijn er dus 2 blauw.

We hebben in een eerdere les gezien dat

$P(rrr) = \binom{5}{3} \cdot P(rrrb)$. Met andere woorden, die eerste term geeft aan hoeveel rijtjes we kunnen maken van rrrb.

$$P(rrr) = \binom{5}{3} \cdot P(rrrb) = \binom{5}{3} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = 10 \cdot \frac{56}{1287} = 0.435$$

Dit konden we ook sneller berekenen met de kansdefinitie van Laplace;

$$P(rrrb) = \frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{13}{5}} = 0.435$$

Lesactiviteit

Dit was een voorbeeld van het vaasmodel bij trekken zonder terugleggen. We kunnen dit voorbeeld ook uitwerken als de getrokken knikkers weer in de vaas worden teruggedaan.

Dan gaat het dus over het vaasmodel bij trekken met terugleggen. Hetgeen inhoudt dat de vaas voor elke trekking steeds 8 rode en 5 blauwe knikkers bevat. Diezelfde iemand trekt wederom 5 knikkers uit de vaas. Wat is de kans dat 3 daarvan rood zijn. In dat geval zijn er dus 2 blauw.

Dan geldt $P(3 \text{ rood en } 2 \text{ blauw}) =$

$$P(rrrb) = \binom{5}{3} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{5}{13} = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{8}{13}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

In beide gevallen kunnen we ook de kans op minstens één blauwe knikker berekenen. Bij het woord 'minstens' - en trouwens ook bij 'hoogstens' - kunnen we de complementregel toepassen:

$$P(\text{minstens één blauw}) = 1 - P(\text{nul keer blauw})$$

De laatste term houdt in dat we alleen maar rode ballen

trekken.

In het geval van een trekking zonder terugleggen geldt:

$$P(\text{minstens één blauw}) = 1 - \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = 1 - \frac{6720}{154440} \\ = 1 - 0,0435 \approx 0,956$$

In het geval van een trekking met terugleggen geldt:

$$P(\text{minstens één blauw}) = 1 - \frac{8}{13} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{8}{13} = 1 - \left(\frac{8}{13}\right)^5 \\ \approx 0,912$$

Samengevat kunnen we zeggen dat bij het vaasmodel met trekken met terugtrekken de productregel wordt gebruikt. Bij het vaasmodel met trekken zonder terugleggen wordt hetzij de productregel gebruikt hetzij de kansdefinitie van Laplace. Omvat het vaasmodel een kansexperiment waarbij 3 of meer knikkers worden gepakt, gebruik dan de kansdefinitie van Laplace. Die werkt sneller.

Huiswerk Daar mag je, in kleine groepen, nu aan beginnen: opgave 39 en 40 (op bladzijde 67 van bovengenoemd leerboek).

Samenvatting Je hebt nader kennis gemaakt met het vaasmodel. Daarbij kun je kansexperimenten met en zonder terugleggen onderscheiden. In beide gevallen kun je de productregel toepassen, maar bij het trekken zonder terugleggen mag je ook de kansdefinitie van Laplace gebruiken. Kun je het vaasmodel bij trekken met en zonder terugleggen ook gebruiken bij andere kansexperimenten, zoals het werpen van een dobbelsteen, het trekken van loten?

Dit lesplan voer ik vervolgens op dinsdag 12 juni 2012 uit. Het is het zevende lesuur, dus: 14.00-14.45 uur. De klas die lokaal 17 binnenkomt, is het cluster A8(A2), 21 leerlingen in totaal. Ik vertel aan hen dat ze de bijzondere les krijgen waarvoor ik hen overigens al eerder toestemming heb gevraagd. Ze mogen de klas 'verbouwen' en in groepjes van vier gaan zitten, maar ze moeten wel het white board goed kunnen blijven zien. Ik stel de aanwezige observatoren voor: Enteke Assink en Frederike van Perlo, beiden docent wiskunde. Daarna begint de les volgens het vooropgezette plan.

Onmiddellijk na de les komen de observatoren en ik bijeen om de bijgestelde research les na te bespreken. De docent van de les, ondergetekende dus, komt eerst even aan het woord: 'Deze les verliep al beter dan de vorige. Ik heb nadrukkelijker aangegeven wat ik van de leerlingen verwachtte, namelijk dat ze, al overleggend, de opgaven moeten maken: het gaat er immers om de denkactiviteiten van de leerlingen op het spoor komen. Verder heb ik de instructie beperkt tot kansexperimenten met betrekking tot trekken met en zonder terugleggen: een eigen lesplan, losjes gebaseerd op opgave 38. Ik wilde eerst eens zien hoe dit zou verlopen, alvorens verdere aanpassingen in de research les aan te brengen.'

Vervolgens komt observator Enteke aan het woord: 'Het groepje dat ik heb geobserveerd, was eigenlijk heel goed. De leerlingen gingen meteen met de verschillende opdrachten van opgave 39 aan de slag. Ze overlegden en ze kozen een methode op de opgave op te lossen, al gaven ze niet altijd expliciet aan welke situatie bij het gegeven kansexperiment aan de orde was: met of zonder terugleggen. Bij de opdracht van opgave 39 over 22 leerlingen - 10 jongens en 12 meisjes - waar de kans moet worden berekend dat de meisjes vier boeken winnen, nam één leerling in het groepje het voortouw. Zij dacht dat het antwoord op opgave 39a het volgende was:

$$(\text{vier meisjes}) = \frac{\binom{12}{4}}{\binom{22}{4}}.$$

Een andere leerling vroeg zich weliswaar af, of het in dit geval ging om met of zonder terugleggen, maar de anderen namen zonder meer aan dat het antwoord goed was. Op naar opgave b.

LI2: 'Nu moet er steeds een meisje uit.'

LI3: 'Dat wil dus zeggen dat we hier te maken hebben met: zonder terugleggen. Maar dan is de vorige opgave fout beantwoord, want daarin is sprake van met terugleggen.'

LI2: 'Ik denk dat het iets wordt van: $\frac{12}{22} \cdot \frac{11}{21} \dots$ '

LI3: 'Nee, ik denk juist: $\left(\frac{12}{22}\right)^4$, want het is met terugleggen'.

De eerste leerling rekende dit op zijn GR uit: het is ongeveer 0,089. Toen waren ze het snel met elkaar eens en gingen ze weer terug naar opgave b,- om te constateren dat ze die al hadden gemaakt.

Bij opgave c was het de leerlingen snel duidelijk dat het ging om P(mmmj). Ze kozen voor de productregel en niet voor de kansdefinitie van Laplace. Nadat $\frac{12}{22} \cdot \frac{11}{21} \cdot \frac{10}{20}$ was opgeschreven, gebeurde het volgende:

LI1: 'Hoeveel mogelijkheden zijn er voor dat groepje van drie meisjes en een jongen?'

LI2: 'O ja, er moet ook nog een jongen bij, dus het wordt: $\frac{12}{22} \cdot \frac{11}{21} \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19}$ '. (Hij noemt die laatste toevoeging overigens: 10 boven 19).

LI1: 'Maar wat moet er nu voor: $\binom{4}{1}$ of $\binom{4}{3}$?'

Het antwoord bleef in de lucht hangen. Om onduidelijke redenen kozen ze voor $\binom{4}{3}$. Een van hen berekende het uiteindelijke antwoord op de GR.

Bij opgave d merkte een leerling op: 'Een leerling kan meerdere reproducties winnen, dus het gaat het weer over: met terugleggen'. Dat moest dus met de productregel gedaan.

$$P(\text{mmmj}) = \binom{4}{1} \left(\frac{12}{22}\right)^3 \cdot \left(\frac{10}{22}\right)$$

Bij het uitrekenen ontstonden problemen over het uitrekenen van het aantal combinaties. Een leerling toonde met behulp van de GR aan dat $\binom{4}{1}$ niet gelijk aan 4 is, terwijl een ander juist dacht dat dat wel het goede antwoord was.

Qua denkstappen hebben ze het kansexperiment met en zonder terugleggen eigenlijk wel in de gaten, maar zodra ze iets verder moeten nadenken, vinden ze het al gauw lastiger. Wat ze nogal eens vergeten, is het volgende. Ze werken $P(\text{mmmj})$ uit, maar ze vergeten dat daarvoor nog $\binom{4}{1}$ of $\binom{4}{3}$ moet komen te staan. Dat zien ze niet.

Deze groep kwam ook aan opgave 40 toe. Wat is, als Toon 8 keer met een dobbelsteen gooit, de kans dat hij minstens twee keer 4 ogen gooit? Iemand begon een hele lange rij met breuken uit te schrijven. Toen zeiden de anderen al: 'Maar dat kan toch korter? Hoe noteren we dat handig?'

Ze keken weer op het bord. Toen kwamen ze erachter dat ze deze opgave veel handiger met de complementregel kon worden gemaakt. Anders moesten ze veel meer gevallen uitrekenen: twee keer 4 ogen, drie keer 4 ogen, enzovoort. Dat werd dan een heel gedoe met de productregel. Bij de complementregel hoefden ze alleen de gevallen nul keer 4 ogen en een keer 4 ogen te berekenen. Dat werd volgens het groepje:

$$P(\text{minstens twee keer 4 ogen}) = 1 - P(\text{nul keer 4 ogen}) - P(\text{een keer 4 ogen})$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8 + \left(\frac{5}{6}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$$

Bij berekening bleek dat de kans gelijk aan 1 was. Ze zagen niet wat ze fout hadden gedaan (aantal combinaties in tweede geval vergeten, +-teken moet --teken zijn). Bij het opschrijven van de complementregel letten ze niet op de notatie. Op de rekenmachine deden ze het wel goed. Ze telden de kansen voor 0x

en 1x bij elkaar op en vervolgens $1 - \text{ANS}$. Het antwoord is goed, maar de notatie klopt niet.

Het was trouwens wel grappig dat de jongens bij de GR zweerden en de meiden bij de oude rekenmachine. Die laatste is eigenlijk iets handiger bij deze kansrekening. Soms denk ik wel eens dat de GR bij dit hoofdstuk verboden zou moeten worden. Laat ze die oude rekenmachine maar meenemen. Ik vind het jammer dat de methode zo weinig aandacht besteedt aan hoe je al die kansexperimenten gewoon kunt uitschrijven. Dan krijg je breuken waarin je vaak van alles tegen elkaar kunt wegstrepen. Bovendien kun je dan ook snel laten zien dat $\binom{16}{1} = 16$ en $\binom{16}{0} = 1$.

Ook bij de tweede opdracht van opgave 40 gebruikten de leerlingen de vertaling naar het vaasmodel niet. Ze pasten weer onmiddellijk de complementregel toe:

$$P(\text{minstens 2 prijzen}) = 1 - P(\text{geen prijs}) - P(1 \text{ prijs}) = 1 - \frac{\binom{40}{8}}{\binom{48}{8}} - \frac{\binom{40}{7} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{48}{8}}$$

De leerlingen begrepen niet goed waarom de complementregel als volgt moest worden ingevuld. Ook hier zie je dat de leerlingen niet altijd even logisch nadenken. De opgeschreven kans is goed, maar de uitdrukking wordt zoveel logischer als je $\binom{8}{0}$ toevoegt in de teller van de term voor $P(\text{geen prijs})$.

Na deze waarnemingen volgen de bevindingen van observator Frederieke: 'Het groepje dat ik heb bekeken, was tegengesteld aan dat van Enteke. Er werd totaal niet gerefereerd aan wat in de instructie was verteld. Ik dacht steeds: nu gaan ze bij een opgave eerst vaststellen: is dit met of zonder terugleggen? Nee, geen woord. Het boek werd ook niet gebruikt, alleen de GR. De GR was heilig. Ze overlegden nauwelijks en er werd ook niet hardop gedacht.

Bij de eerste opgave over 22 leerlingen - 10 jongens en 12 meisjes - waar de kans moet worden berekend dat de meisjes vier boeken winnen, kwam zonder overleg het volgende op papier te staan:

$$P(\text{vier meisjes}) = \frac{\binom{12}{4}}{\binom{22}{4}}.$$

Dit is het antwoord, toch? vroeg een leerling zich hardop af. Nee, want ze hadden niet gezien dat het hier een experiment met terugleggen betreft en dat ze de kansdefinitie van Laplace helemaal niet kunnen toepassen. Ze gingen er ook nog eens druk aan zitten rekenen op hun GR.

Bij opgave 39b waarin elke leerling hoogstens één taart kan winnen, hadden de leerlingen in de gaten dat ze 'telkens een meisje eraf moeten halen'. Pas toen werd er voor de eerste keer na de instructie op het bord gekeken. Gelach. Het groepje besloot tot:

$$P(\text{vier meisjes}) = \frac{12}{22} \cdot \frac{11}{21} \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19}$$

Wederom hadden de leerlingen niet aangegeven welk type kansexperiment het betreft. 'Misschien moet er nog iets van $4 \times nCr$ bij of zo'. In het groepje werd veel gesteggeld over het $\approx$ -teken.

LI4: 'Weet je zeker dat het goed is?'

LI3: 'Nee, maar het ziet er wel logisch uit.'

Toen kwamen de leerlingen erachter dat ze bij opgave a een andere methode hadden moeten kiezen,- die voor een experiment met terugleggen. Ze keken even op het bord en ze konden die opgave daarna zonder veel problemen oplossen.

Bij opgave 39c waarin een leraar wiskunde willekeurig een groepje van vier leerlingen uit de klas kiest om een opdracht te maken, en de kans wordt gevraagd dat het groepje drie meisjes telt, keken de leerlingen weer naar het bord, maar ze benoemden niets. Vervolgens schreven ze ineens de volgende invulling van de kansdefinitie van Laplace op:

$$P(3m, 1j) = \frac{\binom{12}{3} \cdot \binom{10}{1}}{\binom{22}{4}} = \frac{220 \cdot 1}{7315} \approx 0,301$$

In het groepje ontstond een discussie over $\binom{10}{1}$. 'Dat is toch gewoon 1, hè, maar moet je dat dan nog wel opschrijven?'

Bij opgave 39d waarin de leraar 4 reproducties verloot, waarbij alle leerlingen steeds mogen meedoen, en de kans wordt gevraagd dat de meisjes 3 reproducties winnen, begonnen de leerlingen uit het groepje ineens driftig over de nCr-optie te spreken. Ze kwamen tot 12 nCr 3, 10 nCr 1 en 22 nCr 4. 'Hé,' zei een van hen, 'dat is hetzelfde als de vorige opgave. Klopt het dan wel? Doen we niet toch iets fout?' De leerlingen keken elkaar vragend aan. Een ander was al druk in de weer met zijn GR en ook de overigen pakten nu hun rekenmachine weer. Ze speelden maar wat, er was volstrekt geen structuur in hun denken aanwezig. Overleg bleef uit, een goede beschrijving van de situatie in de opgave ontbrak volledig, de leerlingen bleven zich richten op hun GR.

Na enige tijd gebeurde het volgende:

LI1: 'Nou, we moeten gewoon delen door $\binom{22}{4}$ '.

LI4: 'Nee, dan komen we toch weer op hetzelfde uit. Is het dan toch goed?'

LI3: 'Nou ja, dan zijn opgave c en d gewoon hetzelfde. Het zal wel niet goed zijn, maar ok.'

Bij opgave 40 wist niemand in het groepje aanvankelijk hoe het aan te pakken. Een van hen merkte nog op: 'Minstens 2 is 2 of vaker', maar verder kwamen ze niet. Toen keken de leerlingen elkaar lachend aan, vragend ook.'

Na deze evaluatie van hoe de bijgestelde research les bij de leerlingen is aangekomen, zijn we het erover eens dat de leerlingen nog betrekkelijk veel moeite hebben met het onderscheid tussen kansexperimenten met terugleggen en zonder terugleggen. Ze zien dan ook niet goed in wanneer ze de kansdefinitie van Laplace kunnen gebruiken. En ook niet wanneer je bij voorkeur de productregel gebruikt en wanneer nu juist de kansdefinitie van Laplace. Verder blijft het aantal rijtjes bij de productregel voor problemen zorgen. De leerlingen vergeten vaak om $\binom{p}{0}$ in de kansdefinitie van Laplace op te schrijven, waardoor ze de logica van die regel niet zien. Passen ze de complementregel toe, dan maken

ze nogal eens fouten met de min-tekens. En de terugvertaling van een kansexperiment naar het vaasmodel is voor de meeste leerlingen veel te abstract. Misschien moet een les over het vaasmodel bij trekken met en zonder terugleggen gewoon beginnen met een echte vaas waaruit leerlingen knikkers mogen pakken en terugleggen.

Na uitvoering van deze klein lesson study kunnen we tenslotte, op grond van alle opgedane bevindingen, in ieder geval de volgende twee belangrijke conclusies trekken:

1. Op de uitleg van de theorie over het vaasmodel bij trekken met en zonder terugleggen in paragraaf 6.3 van *Getal en Ruimte*, VWO A/C, is het nodige aan te merken.

De uitleg van het vaasmodel bij trekken met en zonder terugleggen is betrekkelijk summier, de voorbeelden werken eerder verwarrend dan verhelderend. Dat komt deels doordat twee volkomen verschillende voorbeelden worden vertaald naar het vaasmodel, deels doordat de voorbeelden ook nog eens reppen van aanduidingen als 'minstens' en 'precies'.

Het ware beter geweest als het vaasmodel bij trekken met en zonder terugleggen helder wordt uitgelegd, aan de hand van twee keer hetzelfde voorbeeld naast elkaar. Pas daarna is de stap naar het vertalen van een gegeven werkelijkheid naar het vaasmodel eventueel te maken.

Verder verdient het aanbeveling dat de methode bij de instructie over het vaasmodel bij trekken met en zonder terugleggen de verschillende aanpakken ook algebraïsch verder uitwerken dan nu het geval is. Dat kan inzicht bij de leerlingen opleveren dat anders als het ware in de GR verdwijnt.

Alhoewel daarvoor eigenlijk niet in eerste instantie bedoeld, kan een lesson study dus ook bijdragen aan het onderzoek naar de effectiviteit van de gehanteerde methode.

2. Een lesplan over het vaasmodel bij trekken met en zonder terugleggen moet veel algebraïscher en inzichtelijker in elkaar worden gestoken dan de methode in de uitleg van paragraaf 6.3 van *Getal en Ruimte*, VWO A/C, doet.

Allereerst moet scherp worden uitgelegd wat het vaasmodel eigenlijk is, desnoods aan de hand van een echte vaas, en vervolgens het verschil tussen trekkingen met en zonder terugleggen. Waarom geen voorbeelden aan de werkelijkheid ontleend? Dan raken de leerlingen al enigszins gewend aan hoe de werkelijkheid te lezen. Als je in de supermarkt een reep uit het schap pakt, je maakt hem open en breekt hem om te kijken of hij van binnen hard of zacht is, kun je hem dan nog terugleggen in het schap? Dit is een mooi voorbeeld van een trekking zonder terugleggen.

Is eenmaal het verschil tussen een trekking met en zonder terugleggen gevoelsmatig bij de leerlingen duidelijk, dan kan de docent de beide kansexperimenten met het vaasmodel algebraïsch iets verder uitwerken. Neem hetzelfde voorbeeld van een vaasmodel en werk dat uit voor het geval van met en zonder terugleggen. Het is handig als die beide gevallen dan letterlijk naast elkaar worden behandeld, opdat de overeenkomsten en verschillen duidelijk worden.

Pas daarna is het zinvol om in te gaan op de vertaling van een andersoortig kansexperiment naar een vaasmodel, maar dan zijn we inmiddels alweer aan het plan voor de volgende les toe.

Dit alles en nog veel meer bleek nadrukkelijk na uitvoering van bovenstaande kleine lesson study.

5 Een kleine lesson study in klas 3

Korte inhoud van het voorafgaande. Inmiddels hebben we een kleine lesson study in klas 4 achter de rug, nadat we ons eerder al hadden verdiept in de achtergronden van die strategie. Het bleek voor de observatoren niet altijd even eenvoudig om zich alleen maar uit te spreken over hun waarnemingen van de denkactiviteiten in de diverse groepen van leerlingen. Ze hebben het namelijk graag over de aangeboden instructie,- en dan vooral over de vraag hoe de docent die heeft verzorgd. Bij de observatoren heerste enige onduidelijkheid over de vraag, of ze de leerlingen mochten helpen, indien die dreigden vast te lopen. Nee. Dat heeft niet de voorkeur in een lesson study. Ook de schijnbare ruis, zoals het gedoe met een (grafische) rekenmachine, het praten over andere zaken, de onrust, noem maar op, levert in de context van deze methode vaak bruikbare informatie op. De lesson study kan een indicatie geven over de effectiviteit van de gehanteerde methode. En vooral ook over het wiskundig model dat in stelling wordt gebracht. De wiskunde achter het vaasmodel in de kansrekening is eigenlijk nogal eenvoudig, maar daar dachten een aantal leerlingen in het eerste lesson study experiment heel anders over.

Nu staat een kleine lesson study in klas 3 op het programma. Volgens de studiewijzer dient deze klas inmiddels te zijn aangeland bij hoofdstuk 2 van *Getal en Ruimte*, 3 VWO, deel 1: 'Gelijkvormigheid'. Elke lesson study moet, wat mij betreft, zo naadloos mogelijk binnen de studiewijzer passen, ook al omdat elke wijziging daarin toch altijd enige onrust bij de leerlingen met zich meebrengt. Na overleg met twee wiskunde-collega's die ook in de derde jaarlaag les geven, kies ik ervoor om een research les over de tangens te ontwerpen. Daar zijn verschillende redenen voor aan te geven. Zonder dat het begrip als zodanig wordt benoemd, is de tangens de eerste goniometrische verhouding waarmee de leerlingen kennismaken. De ervaring leert dat zij doorgaans de nodige moeite hebben met goniometrische onderwerpen. Daarom is het zaak om dit eerste goniometrische begrip zo helder mogelijk uit te leggen. De methode *Getal en ruimte* introduceert goniometrische verhoudingen als verhoudingstabellen. En

juist die vinden de leerlingen niet altijd even eenvoudig. Wat is een verhoudingstabel eigenlijk? Een middel dat leerlingen helpt bij het denken in verhoudingen. Tegelijkertijd wordt het als rekenhulpmiddel gepresenteerd. De methode definieert de tangens als een bepaalde verhouding van de hellingshoek. Deze is gelijk aan het hellingsgetal uit de voorafgaande paragraaf. Veel leerlingen hebben niet veel moeite met het hellingsgetal, maar des te meer met de tangens. Dat is waarschijnlijk terug te voeren tot het feit dat het hellingsgetal op een of andere wijze tot de ervaringsbasis van de leerlingen behoort. De meesten van hen hebben wel eens in werkelijkheid een berg of helling beklommen, op welke wijze dan ook. Het hellingsgetal is nog niet aan de grootte van de hellingshoek gekoppeld. Dat gebeurt pas in de paragraaf waarin de tangens aan bod komt. En dan wordt dat verhoudingsgetal, namelijk de verhouding van verticale en horizontale verplaatsing, ineens een probleem. Vervolgens moeten de leerlingen ook nog eens een extra handeling op hun rekenmachine uitvoeren: kijken of dat ding op DEG (graden) is ingesteld. Hoe kan een betrekkelijk abstract begrip als de tangens het beste bij de leerlingen worden geïntroduceerd, opdat het niet louter en alleen in een procedurele aanpak blijft steken? Uit het eerste lesson study experiment heb ik in ieder geval geleerd dat ik verder moet kijken dan de methode.

Op basis van het begin van hoofdstuk 2.4 uit de methode *Getal en Ruimte*, 3 VWO, deel 1, enkele passages uit de onvolprezen *Geschiedenis van de wiskunde* (1980) van D.J. Struik en de bovenstaande overwegingen kom ik tot het volgende lesplan:

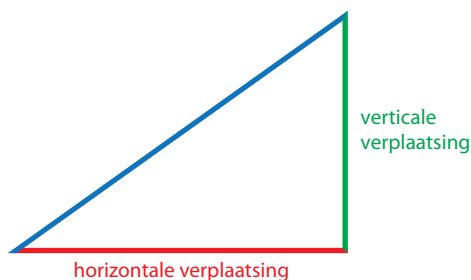
LESPLAN TANGENS

Leerdoel	Kennismaken met het begrip tangens. Berekenen van een tangens van een gegeven hoek. Berekenen van een verticale (horizontale) verplaatsing uit de horizontale (verticale) verplaatsing en de hellingshoek (met behulp van verhoudingstabel).
----------	--

Voorkennis De leerlingen moeten het hellingsgetal kunnen berekenen, indien de horizontale en verticale verplaatsing zijn gegeven.

Gangbare fouten De leerlingen verwarren de horizontale verplaatsing (aanliggende zijde) nog wel eens met de afgelegde weg (schuine zijde).
Vaak hebben ze hun rekenmachine niet juist ingesteld: RAD of GRAD in plaats van de standaardinstelling DEG. Elke leerling moet dit zelf kunnen herstellen.

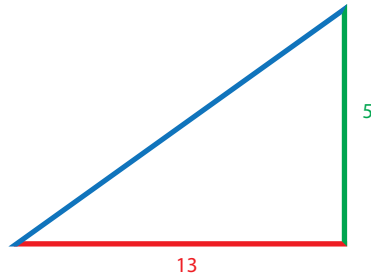
Start Laten we teruggaan naar het hellingsgetal. Wat was dat ook alweer? Bij een helling heb je te maken met een horizontale- en een verticale verplaatsing:



$$\text{hellingsgetal} = \frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}}$$

Hoe steiler de helling, des te groter het hellingsgetal.

Bekijk nu het volgende voorbeeld. Bereken van de helling hieronder het hellingsgetal in twee decimalen nauwkeurig:



Berekening:

$$\text{hellingsgetal} = \frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}} = \frac{5}{13} = 0,385$$

Lesactiviteit

Bij elk hellingshoek hoort een hellingsgetal. De hoek tussen de rode en de blauwe zijde noemen we: α . We definiëren de tangens van deze hoek α als volgt:

$$\tan \alpha = \frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}} = \frac{5}{13} = 0,385$$

We kunnen dit ook iets anders opschrijven:

$$\tan \alpha = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}} = \frac{5}{13} = 0,385$$

Hierbij moeten we wel bedenken dat beide zijden deel uitmaken van een rechthoekige driehoek.

Zo kunnen we ook de tangens van hoek β definiëren, de hoek tussen de groene en de blauwe zijde:

$$\tan \beta = \frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}} = \frac{13}{5} = 2,6$$

Er is, kortom, een betrekking tussen de grootte van de hellingshoek (de grootte van de tangens van die hoek) en het hellingsgetal:

$$\tan 21^\circ = 0,385$$

Als we de hellingshoek kennen en een van beide verplaatsingen, dan kunnen we de andere berekenen. Laten we dit iets wiskundiger formuleren. Kennen we in een rechthoekige driehoek de grootte van een niet-rechte hoek kennen en een van de twee zijden, aanliggend aan de rechte hoek, dan kunnen we de andere berekenen.

Als we in ons voorbeeld bij voorbeeld de overstaande zijde kennen, namelijk $o = 5$, dan kunnen we de aanliggende a berekenen:

$$\tan 21^\circ = \frac{\text{overstaande zijde } o}{\text{aanliggende zijde } a} = \frac{5}{a} = 0,385$$

Je kunt dit in een verhoudingstabel schrijven. Kruislings vermenigvuldigen geeft dan:

$$0,385 \cdot a = 5$$

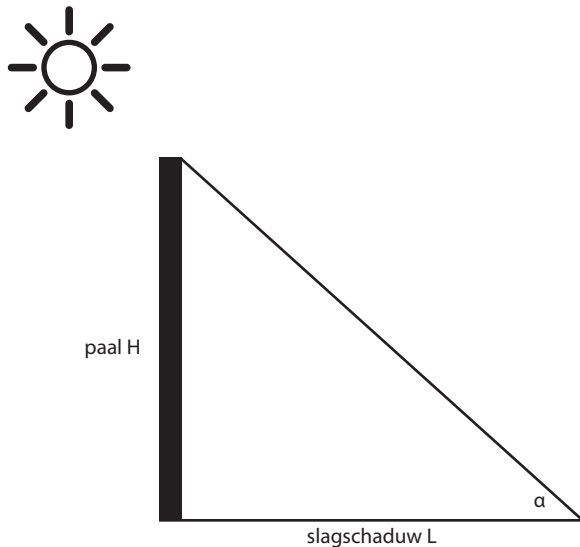
Met andere woorden, de aanliggende zijde is 13.

Met de optie 'inverse tangens' kun je op je rekenmachine ook de grootte van de hellingshoek berekenen als je de verhouding van overstaande en aanliggende zijden kent:

$$\tan^{-1}(0,385) = 21$$

Hier gaan we in een volgende les pas verder op in.

Ten slotte nog een toepassing van het rekenen met de tangens. Stel je voor dat een paal in de zon staat. Dan kun je de lengte van de schaduw berekenen, als je de grootte van de zogenaamde zonnehoek kent. Of andersom, als je de grootte van de zonnehoek kent en de lengte van de schaduw van een voorwerp, dan kun je de hoogte daarvan berekenen.



De lengte L van de slagschaduw van een voorwerp kan worden berekend als het quotiënt van de lengte van de paal en de tangens van de zonnehoek:

$$L = \frac{H}{\tan \alpha}$$

Als $H = 3$ meter en $\alpha = 58^\circ$, dan is de lengte van de slagschaduw:

$$L = \frac{H}{\tan \alpha} = \frac{3}{\tan 58} = 1,87 \text{ meter}$$

	Bij het gebruik van je rekenmachine moet je gewoon $\tan(58^\circ)$ invoeren. Bedenk wel dat je bij dergelijke opgaven tussentijdse uitkomsten, zoals $\tan 58^\circ$, nooit apart uitrekent.
Huiswerk	Daar mag je, in kleine groepen, nu aan beginnen: opgave 47, 48 en 49 (op bladzijde 68 van bovengenoemd leerboek).
Samenvatting	Je hebt nader kennis gemaakt met de tangens. Dat is een verhoudingsgetal. Je kunt het beschouwen als de verhouding van de verticale en horizontale verplaatsting, maar ook als de verhouding van de overstaande en de aanliggende zijde in een rechthoekige driehoek. Weet je twee van die gegevens weet, dan kun je de derde berekenen met behulp van een verhoudingstabel.

Dit lesplan voer ik vervolgens op dinsdag 16 oktober 2012 uit. Het is het vijfde lesuur, dus: 12.30-13.15 uur. De klas die lokaal 15 binnenkomt, is 3D, 25 leerlingen in totaal. Ik vertel aan hen dat ze de bijzondere les krijgen waarvoor ik hen overigens al eerder toestemming heb gevraagd. Ze mogen de klas 'verbouwen' en in groepjes van vier gaan zitten. Ik stel de aanwezige observatoren voor: Jeroen Vogel, docent economie en begeleider nieuwe docenten op school, en Frederieke van Perlo, docent wiskunde. Daarna begint de les volgens het vooropgezette plan.

Onmiddellijk na de les komen de observatoren en ik bijeen om de research les na te bespreken. De docent van de les, ondergetekende dus, mag eerst even iets zeggen over het gebeurde: 'Ik ben verre van tevreden over de les. De klas was onrustig. Een beetje te vrijmoedig ook. Ik had aanvankelijk bij voorbeeld helemaal niet in de gaten die een leerling de oortjes van z'n Iphone nog 'in' had. Stom. Verder vond ik mijn instructie niet inzichtelijk genoeg. Het was een beetje te veel stof voor de weinige beschikbare tijd. Ook was het, achteraf gezien, niet erg handig om het gebruik van de rekenmachine niet klassikaal te behandelen. Dan gaan de leerlingen het zelf proberen uit te vinden,- met alle rumoer van dien. De rekenmachine is immers altijd een goed alibi voor de leerlingen om weg te

vluchten van het in de les geïnstreerde begrip. Dat had ik moeten vermijden. Ik had de leerlingen directiever moeten benaderen: 'Pak allemaal je rekenmachine. Kijk op dat ding op DEG staat ingesteld'. Et cetera.'

Vervolgens komt observator Jeroen aan het woord: 'Bij het eerste groepje dat ik heb geobserveerd, hadden de leerlingen geen idee wat ze moesten doen. Het was voor hen niet duidelijk of ze mochten overleggen of niet. Ik kan me voorstellen dat die situatie enerzijds heeft te maken met het nieuwe tangensbegrip en alle informatie die daarbij op hen afkomt, anderzijds met de nieuwe *setting* in de klas. De meeste leerlingen vonden het samenwerken overigens wel leuk. In minstens twee groepen werd de opmerking gemaakt dat de driehoek in opgave 47 een andere was dan op het *white board*. 'Hé, dat is een heel andere driehoek!'

Ik voel de behoefte om Jeroen even te onderbreken: 'Ja, dat heb ik bewust gedaan. Het is een goede oefening om rechthoekige driehoeken in allerlei verschillende formaten en vormen aan de leerlingen aan te bieden. Dan gaan ze zich vanzelf afvragen waar de helling oftewel de schuine zijde zich bevindt. Een goede vraag is dan de volgende: 'Kun je de helling aanwijzen?' Dan kun je de driehoek weer relateren aan die op het *white board*. Eigenlijk maak je de driehoeken dan als het ware ook al een beetje los van de helling - en beweeg je je iets meer in de richting van de klassieke tangens.'

Jeroen vervolgt: 'De groepjes die in de driehoeken zochten naar de helling, kwamen doorgaans tamelijk snel uit de opgaven. 'Heeft de driehoek een rechte hoek? Waar is de helling?' Dat was ongeveer de strategie. Daarna konden ze dus iets met de tangens aanvangen. 'Hoe gaat dat op de rekenmachine?' Dan zaten de leerlingen meestal even te knoeien, maar uiteindelijk kwamen ze er wel uit. Als de eerste opgave eenmaal was gelukt, waren de tweede en derde meestal geen probleem meer. Even een hulplijntje in de derde opgave... dan lukte dat ook wel.'

Observator Frederieke vertelt dat de leerlingen in door haar geobserveerde groep aanvankelijk überhaupt geen stap vooruit konden maken, 'ook niet toen ik tegen hen had gezegd dat ze een verhoudingsgetal nodig hadden.' En ze vervolgt: 'Op een gegeven ogenblik gingen de leerlingen toch maar in het lesboek kijken.

Daarin zagen ze dat een verhoudingstabel wordt gebruikt. Alleen, ze begrijpen die tabel niet goed en ze kunnen hem elkaar ook niet goed uitleggen. Waarom staat daar een 1? Toen heb ik aan hen verteld dat een tangens een verhoudingsgetal is. Daarbij kun je een verhoudingstabel denken. Kruislings vermenigvuldigen levert geeft dan bij voorbeeld: $1 \times AC = 700 \times \tan(23^\circ)$. Die 1 laat je dan weg. Mijn leerlingen in de vierde klas hebben overigens soms ook nog steeds moeite met het kruisproduct.'

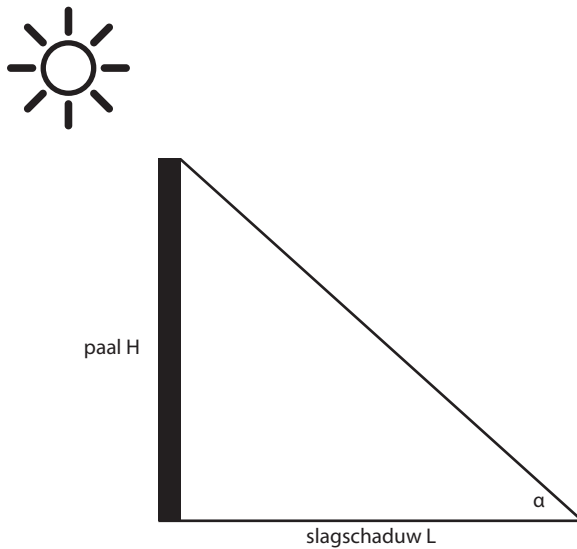
Wederom interrompeer ik de observator: 'Daarom geef ik altijd graag een eenvoudig getallenvoorbeeld van het kruisproduct. Hoe zat het ook alweer: $\frac{6}{3} = \frac{2}{1}$. Dan wordt het onmiddellijk duidelijk: $6 \times 1 = 2 \times 3$. En dan is die 1 ineens ook geen probleem meer.'

Ook de docent die de instructie verzorgde, heeft enkele groepen geobserveerd: 'Mijn indrukken komen sterk overeen met die van mijn voorgangers. De leerlingen in een van de groepen deden de opgave die op het *white board* stond nog een keer over, maar nu met behulp van een rekenmachine. Een andere groep vroeg zich af wanneer je van een hellingshoek spreekt? Heeft die driehoek dan altijd een rechte hoek? Gaat een helling altijd naar boven of kan ze ook dalen? Daarna gingen de leerlingen experimenteren met allerlei rechthoekige driehoeken,- of ze de helling en de hellingshoek konden aanwijzen.'

Na deze indrukken bespreek ik met de observatoren hoe de research les zou moeten worden aangepast. Het is beter dat de instructie onmiddellijk met een voorbeeld te beginnen. De inverse tangens gaat eruit. Die werkt in dit stadium alleen maar verwarrend en bovendien: dat begrip is nog niet aan de orde. In plaats daarvan verdient het kruisproduct de nodige aandacht. Je zou een voorbeeld kunnen behandelen van een gegeven hoek en een gegeven zijde, waarbij je de tweede zijde moet uitrekenen. En verder moet je op enig moment aan de leerlingen vragen: snapt iedereen de rekenmachine?

BIJGESTELD LESPLAN TANGENS

Leerdoel	Kennismaken met het begrip tangens. Berekenen van een tangens van een gegeven hoek. Berekenen van een verticale (horizontale) verplaatsing uit de horizontale (verticale) verplaatsing en de hellingshoek (met behulp van verhoudingstabel).
Voorkennis	De leerlingen moeten het hellingsgetal kunnen berekenen, indien de horizontale en verticale verplaatsing zijn gegeven. Ze moeten met een eenvoudige kruistabel kunnen rekenen.
Gangbare fouten	De leerlingen verwarren de horizontale verplaatsing (aanliggende zijde) nog wel eens met de afgelegde weg (schuine zijde). Ze kunnen niet met een kruistabel rekenen. Vaak hebben ze hun rekenmachine niet juist ingesteld: RAD of GRAD in plaats van de standaardinstelling DEG. Elke leerling moet dit zelf kunnen herstellen.
Start	Laten we teruggaan naar een periode lang geleden in de geschiedenis van de wiskunde. Omstreeks het jaar 900 hield een zekere Al-Battani, een Arabische astronoom, zich bezig met de verhouding van de lengte van een staaf tot die van de schaduw. Ze bleek een maat voor de hoek, de zogenaamde zonnehoek. Dus stel je voor: een paal in de woestijn, de zon schijnt en er 'ligt' een schaduw van de paal in het zand. Zoiets:



Als de zonnehoek bekend is, dan kun je de lengte van de slagschaduw berekenen. Hoe kun je dit probleem oplossen? De zon projecteert de paal op de grond. Zo ook de top van de paal. Zo ontstaat een denkbeeldige driehoek met een schuine zijde. Er is dus sprake van een hellingsgetal:

$$\text{hellingsgetal} = \frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}}$$

Hoe steiler de helling, hoe hoger de zon aan de hemel staat, des te groter het hellingsgetal. Je kunt je voorstellen dat als het hellingsgetal groter wordt, ook de hellingshoek α groter wordt. Er is namelijk een verband tussen de hellingshoek en het hellingsgetal. Dat noemen we de tangens van die hoek:

$$\tan(\text{hellingshoek}) = \frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}}$$

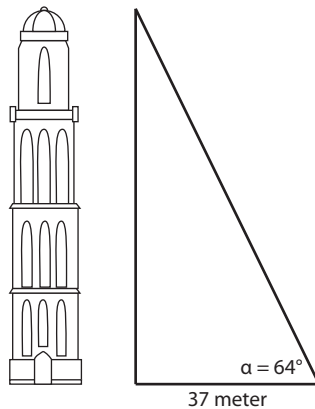
We hadden een driehoek gemaakt van de paal en zijn schaduw. Dat is natuurlijk een rechthoekige driehoek: de

paal staat loodrecht in de grond. In zo'n driehoek wordt de verticale verplaatsing ook wel de overstaande zijde genoemd, de horizontale verplaatsing de aanliggende zijde, dit alles ten opzichte van de hellingshoek. Je kunt dus ook zeggen:

$$\tan(\text{hellingshoek}) = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}}$$

De tangens van een bepaalde hellingshoek is altijd dezelfde verhouding van overstaande en aanliggende zijde. Dan kun je in zo'n driehoek ineens het nodige uitrekenen.

Laten we eens naar de Peperbus, hier in Zwolle, kijken. De Peperbus is de bijnaam van de Onze-Lieve-Vrouwetoren. Hij lijkt er ook een beetje op. Ik wil wat rekenen aan de schaduw van de Peperbus. Ik had ook voor de Euromast in Rotterdam kunnen kiezen, waarover de methode een opgave bevat, maar de Peperbus is natuurlijk leuker. Als ik de hoek zou weten waarmee de zon de spits van de Peperbus op de grond in Zwolle afbeeldt en de afstand van die plek tot de voet van de toren, dan kan ik berekenen hoe hoog hij is. Kijk maar:



Als de hellingshoek $\alpha = 64^\circ$ en de afstand tot de Peperbus is gelijk aan 37 meter, dan kun je dus de hoogte van de Peperbus uitrekenen:

$$\tan(\text{hellingshoek}) = \tan 64^\circ = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}} = \frac{\text{hoogte Peperbus}}{37}$$

Dit kun je als een verhoudingstabel opvatten. De hoogte van de Peperbus kun je vervolgens met het kruisproduct uitrekenen:

$$37 \times \tan 64^\circ = 1 \times \text{hoogte Peperbus}.$$

Dat doe je met je rekenmachine. (Voor de klas voordoen. Pak je rekenmachine. Zorg dat je rekenmachine op DEG is ingesteld. Denk om de haakjes). Daaruit volgt dat de Peperbus ongeveer 75 meter hoog is.

Als niet meer precies weet, hoe het kruisproduct werkt, kun

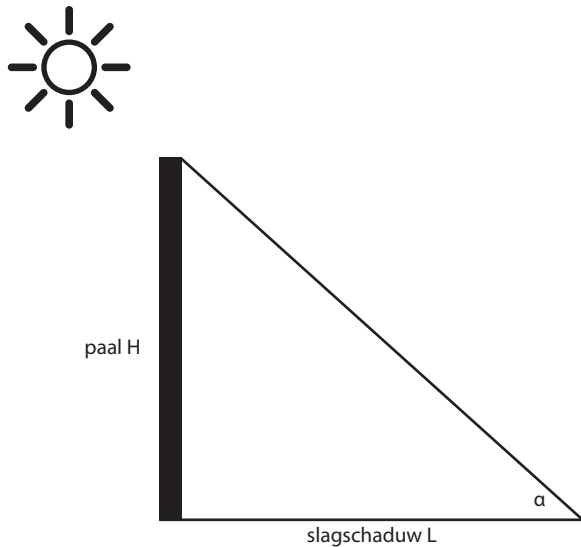
je voor jezelf altijd even een eenvoudig getallenvoorbeeldje opschrijven:

$$\frac{6}{3} = \frac{2}{1}$$

Dus: $6 \times 1 = 2 \times 3$.

Dat werkt altijd. Wiskunde is eigenlijk: moeilijke zaken tot eenvoudige terugbrengen.

En dan keren we nu tenslotte nog even terug naar die paal van Al-Battani in de woestijn, meer dan 1000 jaar geleden.



Voor Al-Battani was het niet moeilijk om het verband tussen de lengte van de paal en die van de slagschaduw daarvan op te schrijven:

$$\tan (\text{zonnehoek } \alpha) = \frac{H}{L}$$

Daaruit volgde voor de lengte van de slagschaduw:

$$L = \frac{H}{\tan \alpha}$$

Allemaal dankzij de tangens. Hij zag dan ook hoe de zonnehoek van graad tot graad veranderde als de schaduw van de paal over het zand kroop.

Huiswerk	Daar mag je, in kleine groepen, nu aan beginnen: opgave 47, 48 en 49 (op bladzijde 68 van bovengenoemd leerboek).
Samenvatting	Dankzij een historische gebeurtenis in de Arabische woestijn en de Peperbus in Zwolle hebben jullie kennis gemaakt met de tangens. Dat is een verhoudingsgetal. Je kunt het beschouwen als de verhouding van de verticale en horizontale verplaatsting, maar ook als de verhouding van de overstaande en de aanliggende zijde in een rechthoekige driehoek. Weet je twee van die gegevens weet, dan kun je de derde berekenen met behulp van een verhoudingstabel.

Dit lesplan voer ik vervolgens op woensdag 17 oktober 2012 uit. Het is het tweede lesuur, dus: 9.30-10.15 uur. De klas die lokaal 15 binnenkomt, is 3A, ongeveer 25 leerlingen in totaal. Dit is geen reguliere klas van mij. College Ed Mulder verzorgt het wiskundeonderwijs aan deze leerlingen. Ik ken ze dan ook niet. Daat heeft misschien als voordeel dat de leerlingen extra aandachtig zijn, omdat er iets bijzonders in de klas plaatsvindt. Ik stel me voor en ik vertel aan hen dat ze de bijzondere les krijgen waarvoor hun eigen docent hen overigens al eerder toestemming heb gevraagd. Ze mogen de klas 'verbouwen' en in groepjes van vier gaan zitten. Ik stel de aanwezige observatoren voor: Jeroen Vogel, docent economie en begeleider nieuwe docenten op school, Nellie Verhoef, vakdidacticus aan de Universiteit Twente, en Ed Mulder, hetgeen tot enig gelach in de klas leidt. Daarna begint de les volgens het vooropgezette plan.

Onmiddellijk na de les komen de observatoren en ik bijeen om de research les na te bespreken. De docent van de les, ondergetekende dus, mag eerst even iets zeggen over het gebeurde: 'Ik ben heel wat meer bespreken over deze les dan over die van gisteren. De instructie was veel compacter geworden, coherenter ook. Over het algemeen lette de klas tijdens de instructie goed op, maar achterin waren een paar jongens met andere zaken bezig: voetbal en zo. Dan is het vervelend dat je als docent, als gast in deze klas, de leerlingen niet bij hun naam kent. Na de instructie gingen de groepjes met de opgaven aan het werk. Die jongens achterin bleven druk met andere dingen in de weer, maar wel onderwijl de opgaven maken. In de laatste vijf minuten van de les stelde ik een paar vragen aan de klas om een eerste indruk te krijgen van wat er zoal was gebeurd. Iedereen had opgave 47 kunnen maken, bijna iedereen opgave 48, maar bij opgave 49 stuitten de leerlingen op de moeilijkheid dat in de opgave over het droogrek geen rechte hoek was aangegeven. Toen moesten ze dus op het idee van een hulplijn komen. En dat was niet iedereen gelukt. De meeste leerlingen hadden het groepswerk leuk en leerzaam gevonden, voor herhaling vatbaar. En ten slotte bleek bij navraag dat ze ook de helling in twee willekeurig geroteerde rechthoekige driehoeken op het *white board* konden aanwijzen.'



Observator Ed begint met een paar opmerkingen over hoe de docent van dienst de instructie heeft verzorgd, maar na een opmerking van collega-observator Nellie – 'Concentreer je op de leerlingen' - constateert hij: 'De leerlingen reageerden goed op de situatie. Ze zaten allemaal braaf te kijken bij de instructie

en daarna gingen ze in de groepjes aan het werk met de opgaven. Als vanzelf gingen ze elkaar vragen stellen. Dat gebeurde gewoon.'



Observator Nellie gaat verder: 'Wat doet zo'n groepje nou eigenlijk? Ik zat bij dat groepje met vier meisjes:

LI1: 'We gaan hetzelfde doen als op het bord. We moeten afronden, maar hoe... een decimaal, twee decimalen, wanneer moeten we afronden?'

LI2: 'Je moet elk getal afronden!'

LI1: 'Nee, dat is fout! Je moet alles uitrekenen en dan pas afronden'

LI3: 'Ik weet gewoon niet wat ik moet doen'. Ze schreef helemaal niets op.

LI4: 'In wiskunde ben ik niet zo goed, maar ik vind dit wel harstikke leuk.'

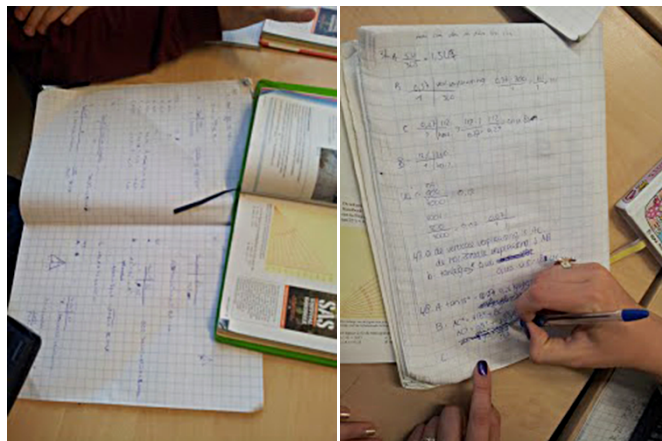
Toen moesten ze gaan rekenen. De stelling van Pythagoras gebruiken. Daar waren ze het over eens. Dan moet je toch iets met de wortel doen, maar hoe dan? Dat was een probleem. Dat denkproces was niet goed vertaald in wat ze moeten doen op de rekenmachine. Wat ze wel goed deden, was het volgende:

LI2: 'Kijk nou eens wat eruit komt! Klopt dat een beetje?' Heel knap.

Bij die som over die kunstschaan, met die groene rechthoek, waren ze daarentegen weer onmiddellijk gericht op het uitvoeren van de procedure, zonder te beseffen waar de opgave nu eigenlijk over gaat. Uiteindelijk kwamen ze terecht bij die vraag: 'Wat is nu het hellingsgetal? Dat is toch die schuine streep?' Dergelijke dingen zie je pas, als je dicht op de leerlingen zit. Zoals nu.'



Observator Jeroen voegt daaraan toe: 'Normaal gesproken ben je als docent niet zo lang met een groepje bezig. Dan ga je sneller langs de leerlingen en zie je doorgaans ook eerder als iemand vastloopt. Een enkele jongen in de klas deed helemaal niet mee: hij had na tien minuten nog steeds zijn schrift gesloten op tafel liggen en bij navraag bleek hij ook geen rekenmachine bij zich te hebben. Een andere leerling was wel serieus met de opgaven bezig, maar in zijn schrift heerst Koning Chaos: allemaal losse strepen en getallen, zonder enige structuur.'



Observator Nellie: 'Lang niet iedereen wist wat een hellingsgetal is. Dan gaan ze te snel met hun procedure aan de slag, ook al omdat de context van zo'n opgave een hel voor hen is. Als je niet wilt dat leerlingen meteen naar een procedure grijpen, ben je heel lang met zo'n begrip bezig.'

Jeroen: 'Toen je het woord rekenmachine liet vallen, greep iedereen meteen naar zijn machine. Ze gingen kijken of de berekening klopte. Dan zou ik, heel nadrukkelijk, een moment van pauze inlassen: 'Kijk maar even of het klopt'. Daardoor ontsaat er even gerommel, maar na een halve minuut kun je de aandacht wel weer vangen.'

Nellie: 'Wat sterk was, is dat kruiselings vermenigvuldigen: $2 : 1 = 6 : 3$. Dat is een verhouding. Daarom is dat kruisproduct ook zo ingewikkeld voor hen. Maar wat is nu een hellingsgetal? Dat is toch ook een verhouding? Je kon merken dat de leerlingen dat lastig vinden. Ik vind dat hellingsgetal een krankjorem begrip. Het bestaat eigenlijk helemaal niet. Het is volkomen inherent aan de methode.'



Na uitvoering van deze klein lesson study kunnen we tenslotte, op grond van alle opgedane bevindingen, in ieder geval de volgende twee belangrijke conclusies trekken:

Er is op de uitleg van de theorie over de tangens in paragraaf 2.4 van *Getal en Ruimte*, *Getal en Ruimte*, 3 VWO, deel 1, is het nodige aan te merken.

De tangens wordt geïntroduceerd aan de hand van een begrip dat in de wiskunde eigenlijk niet bestaat: het hellingsgetal. Dat is een didactische vondst van de methode. Die komt aan de orde in paragraaf 3.3, maar hij gaat grotendeels voorbij aan een onderliggend probleem, namelijk dat het een verhoudingsgetal is. Dit probleem blijft bestaan als in de volgende paragraaf de tangens aan bod komt. De tangens van de hellingshoek wordt min of meer gedefinieerd als het hellingsgetal.

Vervolgens introduceert de methode hoe je de tangens op je rekenmachine kunt uitrekenen. Dat is heel kenmerkend voor deze methode: een begrip introduceren en dan meteen laten zien hoe je dat uit je rekenmachine kunt toveren. Pas daarna komt de methode op de tangens als verhoudingsgetal terug. Heel zijdelings wordt gerept van verhoudingstabellen, wederom een didactische vondst die in de wiskunde eigenlijk niet bestaat, en kruiselings vermenigvuldigen, maar volgens mij is het kwaad dan al geschied. De procedure lijkt boven het inzicht te gaan. Dan moet je ook niet verbaasd zijn als leerlingen bij het minste of geringste naar hun rekenmachine grijpen.

Een lesplan over de tangens moet veel algebraïscher en inzichtelijker in elkaar worden gestoken dan de methode in de uitleg van paragraaf 2.4 van *Getal en Ruimte*, 3 VWO, deel 1.

Wat is er op tegen om een voorbeeld aan de werkelijkheid te ontleen om de tangens te introduceren. Op een gymnasium kun je dan mooi aansluiten bij het curriculum door terug te gaan naar de Griekse oudheid. Of naar de bloeitijd van de Arabische wetenschappen. Voorbeelden te over om de tangens enigszins inzichtelijk te maken. Dan heb je een begrip als hellingsgetal helemaal niet meer nodig. Weg ermee! Het is veel belangrijker om bij de tangens duidelijk te maken dat het om een verhoudingsgetal gaat. Die vertelt iets over de relatie tussen een hoek in een rechthoekige driehoek en de zijden, grenzend aan de rechte hoek daarin. Daarbij moet je dan wel de nodige aandacht besteden aan het kruiselings vermenigvuldigen, veel meer dan de methode nu doet. Zet bij voorbeeld twee gelijkvormige driehoeken op het bord, duidelijk verschillend in grootte, en vraag vervolgens aan de leerlingen wat de tangens van de overeenkomstige hoek is! 's Kijken wat er dan gebeurt!

6 Een kleine lesson study in klas 2

Korte inhoud van het voorafgaande. Inmiddels hebben we een kleine lesson study in klas 4 achter de rug en ook een in klas 3. Het bleek voor de observatoren bepaald niet eenvoudig om alleen maar over de denkactiviteiten van de leerlingen te praten. Ze hebben het graag over de gegeven instructie,- en dan vooral ook over de vraag hoe die is verzorgd. Wat dit betreft hebben docenten soms wel iets weg van journalisten. Los daarvan is gebleken dat de methode *Getal en ruimte* af en toe wonderlijke keuzes maakt bij de introductie van nieuwe wiskundige noties: ze geeft een definitie of een omschrijving van een begrip en vervolgens vaak onmiddellijk een procedure om daarmee operaties op de rekenmachine uit te voeren. Zo komt het inzicht over een wiskundig begrip als het ware in de rekenmachine terecht in plaats van in het hoofd van de leerling. Ook om andere redenen verdient het aanbeveling om de instructie niet volledig op de methode te baseren. Een grote kracht van de genoemde methode is de grote hoeveelheid opgaven die ze herbergt, een nuttig hulpmiddel met het inoefenen van allerlei vaardigheden en het interpreteren van toepassingen, maar bij de introductie van nieuwe begrippen kan een docent beter op zijn eigen inzichten en voorbeelden afgaan. Hoe dichter de voorbeelden bij de leefwereld van de leerlingen aansluiten, des te beter.

Nu staat een kleine lesson study in klas 2 op het programma. Volgens de studiewijzer moet deze klas inmiddels zijn aangeland bij hoofdstuk 2 van *Getal en Ruimte*, 2 VWO, deel 1: 'Vlakke figuren'. Elke lesson study moet, wat mij betreft, zo naadloos mogelijk binnen de studiewijzer passen, ook al omdat elke wijziging daarin, zoals al vaker gememoreerd, toch altijd enige onrust bij de leerlingen met zich meebrengt. Na overleg met twee wiskunde-collega's die ook in de tweede jaarlaag les geven, kies ik ervoor om een research les over de bissectrice te ontwerpen. Daar zijn verschillende redenen voor aan te geven. Na de middelloodlijn die in de eerste paragraaf van dit hoofdstuk aan de orde komt, volgt de bissectrice als tweede lijn waarvan de methode een constructie introduceert. Het construeren van een bissectrice wordt na het tekenen (en

meten) van die lijnen behandeld. Is dat wel handig? Bovendien klinkt het woord bissectrice de meeste leerlingen nog vreemder in de oren dan de middelloodlijn. Een woord met twee c's en twee s'en. Ze kunnen het nog niet afleiden: een bissectrice is een (richt)lijn die het gebied van een hoek, opgespannen door twee benen, in twee gelijke delen splitst. Vandaar dat een bissectrice ook wel deellijn heet. En tenslotte een heel praktische reden. Ik kan de constructie en eigenschappen van de bissectrice uitleggen in een instructie van minder dan tien minuten.

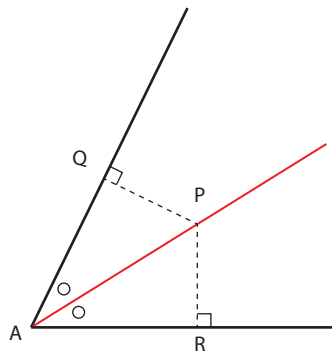
Op basis van hoofdstuk 2.2 uit de methode *Getal en Ruimte*, 2 VWO en het bovenstaande kom ik tot het volgende lesplan:

LESPLAN BISSECTRICE

Leerdoel	Kennismaken met het begrip bissectrice (deellijn). Construeren van een bissectrice.
Voorkennis	De leerlingen moeten met passer en geo-driehoek kunnen omgaan. Ze moeten een lijnstuk kunnen verdelen in twee gelijke stukken.
Gangbare fouten	De leerlingen meten de hoeken en lijnen in plaats van dat ze die construeren. Ze vegen de constructielijnen uit (met name de cirkelboogjes).
Start	Stel je het volgende voor: een voetballer is doorgebroken en gaat alleen met de bal op de keeper af. Wat kan de keeper het beste doen? Maak een schetsje. Hij loopt volgens de deellijn van de hoek op de speler af. Waarom? Deze lijn deelt de hoek tussen de stippellijnen naar de beide doelpalen precies in tweeën. Loopt de keeper

Lesactiviteit

volgens deze deellijn, dan maakt hij zijn doel steeds kleiner. Doet hij dat niet, dan laat ie een gat vallen. Deze lijn heet de bissectrice oftewel de lijn die het gebied van een hoek precies in tweeën deelt, vandaar dat hij ook wel deellijn heet.



Je kunt een bissectrice heel eenvoudig met een geo-driehoek meten en tekenen. Je meet de hele hoek op - 64° -, deelt dat getal door 2 en geeft een punt P aan. Dan kun je de rode lijn AP trekken.

Definitie: de bissectrice van een hoek deelt die hoek middendoor.

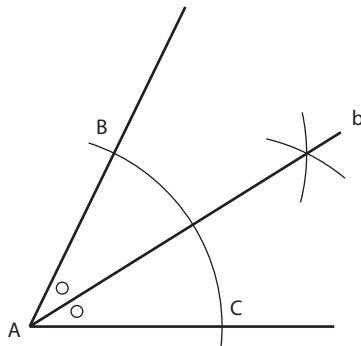
Maar ook: de bissectrice is de symmetrieas van de hoek.

Daarom heeft elk punt op de bissectrice dezelfde afstand tot de benen van de hoek. Deze afstand is de loodlijn van een punt op de deellijn op de benen van de hoek. In de tekening: $PQ = PR$.

Je kunt de bissectrice dus op twee manieren benaderen: ten opzichte van de hoek (die in tweeën wordt gedeeld) en ten opzichte van de benen van die hoek (waartoe een verzameling van punten, namelijk die op de deellijn, gelijke afstanden heeft).

Je kunt een bissectrice meten en tekenen, maar je kunt haar ook construeren. Dat wil zeggen dat je die deellijn op papier tevoorschijn met louter en alleen, potlood, lineaal en passer. Met de lineaal mag je dan dus niet meten.

Bij de constructie van de bissectrice van een hoek maak je gebruik van het feit dat deze deellijn precies de verzameling punten is die gelijke afstanden tot de benen van die hoek heeft.



Je past op beide benen van de hoek dezelfde afstand met je passer af. Zo krijg je de punten B en C. Dan pas je diezelfde afstand nog een keer af, maar nu vanuit B en C. Het snijpunt dat je vervolgens krijgt, is het tweede punt dat je nodig hebt om een lijn te tekenen, in dit geval de bissectrice. Het eerste punt is natuurlijk A. Je mag ook andere afstanden vanuit B en C afpassen, mits ze maar gelijk zijn. Waarom zou je dat doen? Als je bij de constructie de bissectrice vanuit A steeds dezelfde afstand afpast, krijg je een mooie ruit. Omdat de beide driehoeken waaruit die ruit is opgebouwd, helemaal gelijk zijn, moeten de beide deelhoeken van A ook gelijk zijn.

Huiswerk

Daar mag je, in kleine groepen, nu aan beginnen: opgave 21, 22 en 23 (op bladzijde 55 van het boek).

Samenvatting

Je hebt kennis gemaakt met de bissectrice, de deellijn van een hoek, de eigenschappen daarvan en hoe die lijn kan

worden geconstrueerd. Ten slotte nog een vraag: hoe zouden de oude Grieken een bissectrice hebben geconstrueerd? Die hadden natuurlijk geen handige passers.

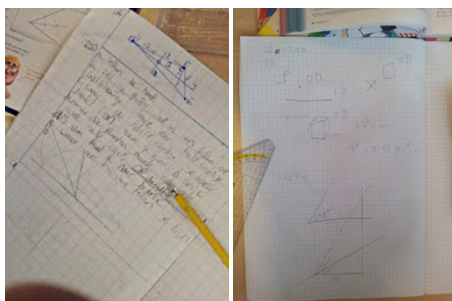
Dit lesplan voer ik vervolgens op 16 oktober 2012 uit. Het is het tweede lesuur, dus: 9.15-10.30 uur. De klas die binnenkomt, is 2F, 26 leerlingen sterk. Ik vertel aan hen dat ze de bijzondere les krijgen waarvoor ik hen overigens al eerder toestemming heb gevraagd. Ze mogen de klas 'verbouwen' en in groepjes van vier gaan zitten. Ik stel de aanwezige observatoren voor: Marco de Vries, waarnemend rector - en voormalig docent wis- en natuurkunde - en Bob Vaalburg, docent klassiek talen. Daarna begint de les volgens het vooropgezette plan, al verloopt hij toch iets minder overtuigend dan ik had gehoopt.

Onmiddellijk na de les komen de observatoren en ik bijeen om de research les na te bespreken. De docent van de les, ondergetekende dus, mag eerst even iets zeggen over het gebeurde: 'Zoals zo vaak ben ik niet erg tevreden over de les. Het kan altijd beter. De klas was rumoerig, maar er hing geen vervelende sfeer. De instructie moet nog eenvoudiger, ik haalde er te veel zaken bij die (nog) niet echt relevant zijn, zoals het feit dat bij de constructie van een bissectrice in feite een ruit ontstaat, ten minste als je de stand van de benen van de passer intact laat. Aangezien ik nog te weinig gebruik maak van een programma als Geogebra en ook het active board regelmatig ledig laat, moest ik een bissectrice op het white board construeren. Dat viel niet mee,- en het zorgde ook voor onrust in de klas. Dat rumoer bleef nog een beetje hangen toen bleek dat lang niet iedereen een passer had meegenomen. Toen de leerlingen met de opgaven bezig waren, werd me alras duidelijk dat velen van hen behoefte hadden aan een tekeninstructie. Blijkbaar moet ik mijn uitleg daaromtrent verbeteren en vereenvoudigen. Ik was de instructie begonnen met een herkenbaar probleem uit de werkelijkheid, maar het is voor mij nog maar de vraag of de bedoeling daarvan bij de leerlingen voldoende duidelijk werd'.

Observator Bob begint te vertellen: 'Wat ben ik soms toch jaloers op wiskundeleraren! Die hebben van die ambachtelijke onderdelen in hun lesstof. Als leerlingen die ambachtelijke vaardigheden beheersen, gaan ze het vak waarschijnlijk ook leuker vinden. Dit wil overigens nog niet zeggen dat leerlingen goed beseffen wat construeren is. Misschien moet je dat een volgende keer nog even expliciteren. In mijn groepje werd het nodige gekibbeld over wat construeren nou eigenlijk is. Twee van hen werkten goed samen, maar de twee anderen zaten alleen maar een beetje te ruziën.'

Hij vervolgt: 'En dan nog iets. Op een gegeven moment vertelde je dat je een bissectrice op twee manieren kunt benaderen. Je kunt hem beschouwen als een lijn die een hoek in tweeën deelt, dan bekijk je hem dus vanuit de hoek, maar je kunt hem ook beschouwen als een lijn waarvan de punten gelijke afstanden tot beide benen hebben, en dan bekijk je hem dus veeleer vanuit de benen. Die tweede benaderingswijze is totaal niet geland bij de leerlingen. Toen haakten heel wat van hen af.'

Observator Marco heeft de problemen van de leerlingen met het construeren ook opgemerkt: 'Bij het groepje achterin hadden drie leerlingen het werkboek niet bij zich. Daar vonden ze snel een oplossing voor. Ze sloegen opgave 21 over en gingen naar opgave 25 over. Drie leerlingen uit dat groepje gingen snel aan de slag. Ze begonnen met de geo-driehoek te construeren en ze vonden dat ze goed bezig waren. Een van hen was trager. Die las het lesboek goed en zei op een gegeven moment: 'Jongens, we moeten met de passer construeren'. Aanvankelijk werd die opmerking door de andere drie van tafel geschoven, maar laten fluisterden ze: 'Hij kon toch wel eens gelijk hebben!' Het was heel opvallend wat er in dat groepsproces gebeurde. Die ene leerling werd eerst uitgelachen en naderhand bleek hij juist degene die het goed had aangepakt. Toen die leerlingen zich daarvan bewust werden, gingen ze naar hem luisteren en kreeg hij status.'



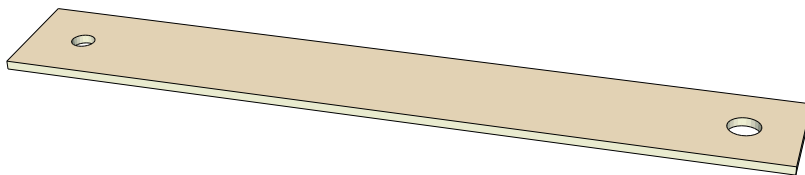
En Marco vervolgt: 'Het was de leerlingen niet helemaal helder wat construeren is. In het boek wordt de bissectrice aanvankelijk geïntroduceerd als een deellijn die je gewoon kunt meten en tekenen met je geo-driehoek. Als de docent dan juist in de weer gaat met een passer, raken de leerlingen snel in de war. Volgens mij moet dat construeren nog centraler in de instructie komen te staan. Wat is construeren? Dat is blijkbaar iets met een passer en een potlood. Je mag dus niet meten, met andere woorden, je mag je geo-driehoek niet gebruiken. Ik zag wel leerlingen met een passer bezig, maar vooral in de zin van: wat moet ik er nu mee? De tekentechnieken zijn niet goed bij hen ontwikkeld, het wordt gauw onoverzichtelijk. Ze hebben juist behoefte aan die simpele tekenaanwijzingen. De basistechnieken zijn onvoldoende ontwikkeld om de opdrachten goed te kunnen maken. Waarschijnlijk zijn ze met een paar aanwijzingen of een paar opmerkingen in de instructie al snel op de rit: je werkt stap voor stap, met passer, potlood en lineaal, eventueel paar kleurpotloden. Dat is de basis van construeren. Juist omdat ze niet goed weten waar te beginnen, stranden de leerlingen in die ambachtelijke vaardigheden. De opgaven die ze moesten maken, zijn heel simpel, maar als de basis bij hen niet goed wordt aangelegd, komen ze later in de problemen.'

Dan doet Marco een suggestie: 'Je moet niet met die geo-driehoek beginnen. Volgens mij moet je dat ding zelfs helemaal niet noemen, want leerlingen nemen het snel over. Ergens in je instructie refereerde je aan de oude Grieken. Dat was heel sterk. Dat begin met die doelman was ook aardig, maar waarom begin je niet met de vraag hoe de Grieken een hoek verdeelden. Hoe deden ze dat? Dan kun je beginnen met een touwtje waaraan je een krijtje hebt vastgeknoopt. Zo breng je die oude Griekse wiskunde meteen tot leven. En naar het heden. Wacht eens: je

kunt ook een cirkel tekenen met een latje waarin twee gaten zijn geboord. Als je zo'n latje zou gebruiken, dan bouw je de instructie niet vanuit de geo-driehoek op, maar juist precies vanuit de andere kant. Ze zijn gewend om hun geo te pakken en te gaan meten. Dat is voor hen een natuurlijke gang van zaken bij een wiskundeles. Met zo'n latje richt je je meteen op de essentie van het construeren. De eenvoud van die basisvaardigheden. Dan begrijpen ze misschien ook iets beter wat de kracht van een passer is. Bij het maken van de opgaven zaten bij het afzetten van een afstand voortdurend aan de benen van de passer te trekken. De afstand tussen beide benen veranderde voortdurend. Dat kun je misschien voorkomen als je je instructie begint met zo'n latje en de geo-driehoek helemaal niet meer ter sprake brengt. Misschien schep je als docent zelf de wanorde wel door beide manieren te laten zien hoe je een bissectrice kunt tekenen. Ga maar terug naar de oude Grieken en zet alles met dat latje op. Je mag niets meer meten. Vergeet je geo-driehoek. Het enige wat je hebt, is dat latje en iets om te schrijven, passer en potlood.'

Deze - ik kan niet anders zeggen: bijna jaloersmakende - suggestie van Marco heb ik onmiddellijk in de praktijk gebracht. De clavigers op school hadden nog wel een stukje hout in de werkplaats liggen, een Gamma-latje met een gaatje, en ze waren bereid om er nog een extra gat in te boren.

Zo zag dat latje er toen uit:

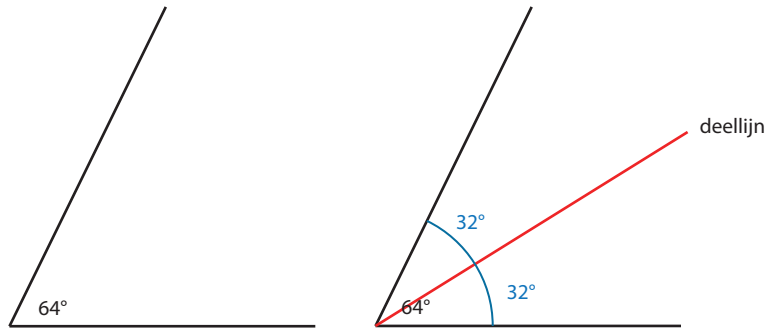


Een passer van hout, ook al lijkt hij helemaal niet op het instrument dat bij voorbeeld in de vakken bij de schoolafdeling van de HEMA is te vinden. Dit ding houdt een essentie van een passer vast: afstanden bewaren en verplaatsen. En

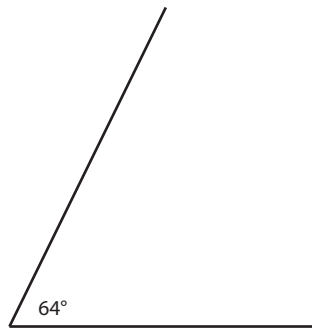
daarmee begin ik de herziene research les over de bissectrice, de laatste les van deze kleine reeks lesson study experimenten.

LESPLAN BISSECTRICE

Leerdoel	Kennismaken met het begrip bissectrice (deellijn). Construeren van een bissectrice.
Voorkennis	De leerlingen moeten met passer en geo-driehoek kunnen omgaan. Ze moeten een lijnstuk kunnen verdelen in twee gelijke stukken.
Gangbare fouten	De leerlingen meten de hoeken en lijnen in plaats van dat ze die construeren. Ze vegen de constructielijnen uit (met name de cirkelboogjes).
Start	Stel je het volgende voor: een voetballer is doorgebroken en gaat alleen met de bal op de keeper af. Wat kan de keeper het beste doen? Maak een schetsje. Hij loopt volgens de deellijn van de hoek op de speler af. Waarom? Deze lijn deelt de hoek tussen de stippellijnen naar de beide doelpalen precies in tweeën. Loopt de keeper volgens deze deellijn, dan maakt hij zijn doel steeds kleiner. Doet hij dat niet, dan laat ie een gat vallen.
Lesactiviteit	Deze lijn heet de bissectrice oftewel de lijn die het gebied van een hoek precies in tweeën deelt, vandaar dat hij ook wel deellijn heet:

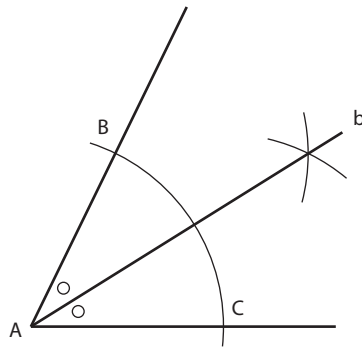


De oude Grieken konden die deellijn al construeren, maar hoe deden ze dat? De vraag is dus: construeer de bissectrice van een gegeven hoek.



Na een korte discussie met de klas vertel je eerst iets over construeren. Wat is dat? Passen zonder meten. Construeren doe je zonder te meten. Je mag alleen een passer, een lineaal (en dan niet de schaalverdeling daarop) en een potlood gebruiken. Je moet heel secuur werken, met een scherp potlood, en de boogjes van de passer in je tekening laten staan. Zo kun je goed zien hoe je te werk ben gegaan. Bij het construeren mag je je geo-driehoek dus beslist niet gebruiken!

Nu zal ik jullie iets bijzonders laten zien. De clavigers op school hebben iets voor mij gemaakt dat een passer en een lineaal in een is. En dat laat ik de leerlingen de houten passer zien. Daarmee construeer je dan een bissectrice op het *white board*:



Je past op beide benen van de hoek dezelfde afstand met je passer van hout af. Zo krijg je de punten B en C. Dan pas je diezelfde afstand nog een keer af, maar nu vanuit B en C. Het snijpunt dat je vervolgens krijgt, is het tweede punt dat je nodig hebt om een lijn te tekenen, in dit geval de bissectrice. Het eerste punt is natuurlijk A. Om de uiteindelijke lijn te tekenen gebruik je wederom je passer van hout, want het is immers ook een lineaal zonder schaalverdeling. Je hebt nu een lijn getekend die de hoek A in tweeën verdeelt. En elk punt op die lijn ligt even ver van beide benen van de hoek af.

Huiswerk

Daar mag je, in kleine groepen, nu aan beginnen: opgave 21, 22 en 23 (op bladzijde 55 van het boek).

Samenvatting

Je hebt kennis gemaakt met de bissectrice, de deellijn van een hoek, de belangrijkste twee eigenschappen daarvan en hoe die lijn kan worden geconstrueerd. Ten slotte nog een vraag: hoe zouden de oude Grieken een bissectrice hebben geconstrueerd? Die hadden natuurlijk geen handige passers.

Dit lesplan voer ik vervolgens op 17 oktober 2012 uit. Het is het vierde lesuur, dus: 11.20-12.05 uur. De klas die binnenkomt, is 2G, 22 leerlingen sterk. Ik vertel aan hen dat ze de bijzondere les krijgen waarvoor ik hen overigens al eerder toestemming heb gevraagd. In de voorafgaande weken hadden ze overigens al een paar keer gevraagd wanneer ze die bijzondere les nou zouden krijgen. Enfin, nu dus. Ze mogen de klas 'verbouwen' en in groepjes van vier gaan zitten. Ik stel de aanwezige observatoren aan de klas voor: José Lorijn en Ed Mulder. Beiden zijn collega-docenten wiskunde, eerstgenoemde is ook nog vakcoach, dat wil zeggen: ze begeleidt leraren-in-opleiding.

Eerst observator Ed: 'Het voorbeeld met de doelman waarmee je je instructie begon, is misschien een beetje link, juist omdat leerlingen de bissectrice dan te snel gaan combineren met de zwaartelij. Of je zou aan de hand van dat voorbeeld het verschil tussen een bissectrice en een zwaartelij moeten uitleggen, maar dan wijk je misschien te veel van het lesboek af. Is het een optie om een ander voorbeeld te kiezen? Nou ja, in ieder geval was het groepje dat ik heb gevolgd, heel oplossingsgericht aan het werk. Het construeren verliep voorspoedig en het resultaat zag er ook redelijk netjes uit.'

En dan observator José: 'Je hebt voor een andere aanpak dan het boek gekozen. Het lesboek begint met het gebruik van een geo-driehoek om de bissectrice te meten en pas daarna wordt die lijn ook geconstrueerd. Je legde veel nadruk op de constructie waardoor de eigenschappen van de deellijn er een beetje bekaaid af kwamen. Het ging, volgens mij, te snel. Misschien had je de volgorde van de opgaven moeten aanpassen, want in opgave 22 wordt juist een van die andere eigenschappen van de bissectrice gevraagd. Dat was jammer. De groepjes die ik heb gevolgd, waren goed bezig. Het construeren van de bissectrice ging de meeste leerlingen ook goed af. Het zag er over het algemeen netjes uit. Trouwens, bij de constructie van de bissectrice hoeven de beide tweede passerboogjes, de boogjes vanaf dat afgepaste punt op de benen, niet gelijk te zijn aan de twee eerste, maar ja.. dat is natuurlijk inherent aan het latje dat je

gebruikt. Je hebt al een straal voor de hoek gekozen, dan neem je toch lekker dezelfde straal voor die twee punten op de benen. Wel zo makkelijk, maar het hoeft niet.'

Tot mijn vreugde pakte het gebruik van de passer van hout in de bijgestelde research les verrassend goed uit, de schoonheidfoutjes in de instructie daargelaten. Niet alleen lukte het me om met dat latje onmiddellijk de aandacht van de leerlingen te vangen, maar het construeren ging hen ook veel beter af dan de klas die ik in de oorspronkelijke research les met de bissectrice had laten kennismaken. Toen had ik me nog aan de volgorde van het lesboek gehouden: eerst de introductie van de bissectrice met de geo-driehoek, daarna pas de constructie van die deellijn.

Dat de aanpak van de bijgestelde research les aan te bevelen is boven die van de oorspronkelijke les blijkt ook uit de resultaten van de opgave uit het proefwerk waarin de leerlingen werd gevraagd om de bissectrice te construeren. De leerlingen die de bijgestelde research les aangeboden hadden gekregen, scoorden op deze vraag aanmerkelijk beter dan de leerlingen die de oorspronkelijke les hadden gevolgd: ze hadden de constructie namelijk allemaal goed uitgevoerd. Een 100%-score. Dat zegt iets, maar natuurlijk ook weer niet alles.

Enige conclusies

In het kader van een Onderzoek van Onderwijs-project heb ik onderzocht in hoeverre de aanpak van lesson study kan bijdragen aan instructieverbetering. Daartoe heb ik drie maal een lesson study experiment uitgevoerd op het Gymnasium Ceeleum in Zwolle. Elk van die experimenten omvatte de voorbereiding, uitvoering en evaluatie van een research les en van een bijgestelde research les. Deze lessen werden aan verschillende klassen of clusters in dezelfde jaarlaag aangeboden. De instructie handelde in twee 4A-clusters over 'het vaasmodel bij trekken met en zonder terugleggen', in twee klassen 3 over de tangens en in twee klassen 2 over de constructie van de bissectrice.

Uit alle uitgevoerde experimenten kwam naar voren dat de leerlingen nogal wat problemen ondervonden met het maken van de opgaven, indien de docent z'n instructie volledig had gebaseerd op de gehanteerde methode, in dit geval *Getal en Ruimte*. Deze problemen werden in de lesson study experimenten manifest bij het geobserveerde werken in groepen door de leerlingen. Daarbij legden ze aan elkaar de aanpak bij de opgaven uit. Zodoende kwam aan het licht in hoeverre zij de instructie hadden verwerkt. Daardoor doemde als vanzelf een aantal suggesties op om de instructie te verbeteren, opdat de leerlingen meer inzicht in de stof en de opgaven krijgen.

Een deel van de problemen die de leerlingen ondervonden bij het maken van de opgaven, was rechtstreeks terug te voeren tot de methode. *Getal en ruimte* richt zich sterk - wat mij betreft: te sterk - op een procedurele aanpak. Dat blijkt onder meer uit de grote hoeveelheid opgaven waarmee allerlei vaardigheden rondom een nieuw wiskundig begrip kunnen worden ingeoefend. Daarentegen verloopt de eerste verkenning van zo'n begrip vaak via geo-driehoek of rekenmachine: nameten en narekenen (maar niet uit het blote hoofd). Bovendien hanteert de methode bij de introductie van nieuwe begrippen soms hulp-noties die niet erg wiskundig van aard zijn. Wat te denken van een begrip als hellingsgetal of verhoudingstabel! En dat geldt in zekere zin ook voor het vaasmodel dat, tussen haakjes, wel erg onhandig in stelling wordt gebracht door het meteen te koppelen aan een aantal erkende moeilijkheden uit de

kansrekening, zoals 'de kans op minstens ...', met de nadruk op 'minstens'. Met deze hulp-noties zet de methode de leerlingen op een spoor waarvan ze maar moeilijk weer zijn af te krijgen.

Het verdient derhalve aanbeveling, zoals ontegenzeggelijk uit de lesson study experimenten is gebleken, om de instructie veel algebraïscher en inzichtelijker in elkaar te steken dan de methode doet. Dit geldt niet alleen voor de introductie van het vaasmodel, maar ook voor de tangens en de bissectrice. Bovendien is het handig gebleken om de nieuwe wiskundige begrippen te introduceren aan de hand van voorbeelden die aansluiten bij de beleavingswereld van de leerlingen. Op een gymnasium kan de wiskundeleraar dan bij voorbeeld mooi aansluiten op de rest van het curriculum door terug te gaan naar de Griekse oudheid.

Uit de lesson study experimenten is ook gebleken dat de voorbeelden sterker werken, naarmate ze aanschouwelijker zijn. Dit vergt evenwel de nodige oorspronkelijkheid, vindingrijkheid en een dito improvisatievermogen van de wiskundedocent. Hoe sterk een aanschouwelijke instructie kan werken, heeft de introductie van een passer van hout bewezen. Dat is een vondst die, *in al z'n eenvoud*, de vinger onmiddellijk op de zere plek van het construeren legt. Een lesinstrument dat de leerlingen op subtiele, maar niet mis te verstane wijze wegleidt van een paar, door hen veel gemaakte fouten bij het construeren. Simpelweg, omdat een en ander juist in die passer van hout is vastgelegd, - letterlijk en figuurlijk.

Het moge duidelijk zijn: lesson study experimenten, oorspronkelijk ontworpen om onderwijsverbetering op de langere termijn te bewerkstelligen, kunnen ook op een kortere termijn hun vruchten al afwerpen, bij voorbeeld om de effecten van de instructie van een nieuw wiskundig begrip te verhogen. Dergelijke experimenten geven een lesson study groep - de observanten en dus ook de docent - een inzicht in de hoofden van de leerlingen. Wat gebeurt daar met de instructie? Wat doen ze zoal om een opgave op te lossen? Waarom lopen ergens vast? Allemaal vragen waarop de antwoorden de instructie kunnen verbeteren. Dat hebben de uitkomsten van deze verkennende lesson study experimenten wel bewezen.

Er is evenwel nog veel werk op dit gebied te verzetten. Denk bij een suggestie voor verder onderzoek bij voorbeeld aan de wijze waarop de observanten naar de groepswork van de leerlingen kijken, hoe ze dat interpreteren. Zouden die observaties niet wat preciezer moeten worden voorgestructureerd? Wie weet krijgen we dan ook een preciezer inzicht in de vraag die in het voorafgaande niet of nauwelijks is beantwoord: waarom werkt een lesson study nou eigenlijk zo verbazingwekkend goed?

Samenvatting

Lesson study is een professionaliseringsstrategie waarbij docenten in hun eigen lespraktijk onderzoek doen naar het doceren en leren door het gezamenlijk plannen, observeren en nabespreken van een les. Dit blijkt een bruikbare strategie om erachter te komen wat er tijdens de les in de hoofden van de leerlingen gebeurt. De inzet van de lesson study strategie vergt over het algemeen een betrekkelijk lange termijn, opdat onderwijsverbetering daadwerkelijk beklijft. Kan deze aanpak ook worden gebruikt om de instructie van wiskundige begrippen in het voortgezet onderwijs op de kortere termijn te verbeteren?

Alvorens deze vraag in de onderhavige scriptie aan de orde komt, worden eerst de oorsprong en achtergronden van de lesson study belicht. Daarbij staat de studie *The Teaching Gap* van Stigler en Hiebert centraal, een boek over de 'Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom'. Een publicatie over het verbeteren van lesmethodes en *classroom practices*. Stigler en Hiebert vragen zich het volgende af: hoe komt het toch dat het vele onderwijsonderzoek, in de laatste decennia verricht, zo betrekkelijk weinig heeft bijgedragen aan de verbetering van de kwaliteit van het onderwijs? En in het verlengde daarvan: hoe zouden we de kwaliteit van het onderwijs dan wel kunnen verbeteren?

Aan de hand van een vergelijkende studie naar data van een op video vastgelegde wiskundeles aan meer dan 200 klassen in drie verschillende landen komen ze tot drie conclusies waarom het zo moeilijk is om de kwaliteit van het onderwijs te verhogen:

1. Het lesgeven, en niet de leraar, is de kritische factor.
2. Het lesgeven is een sterk cultureel-gebonden activiteit.
3. Er is een leemte in de benaderingen met behulp waarvan het lesgeven kan worden verbeterd.

Daarom bepleiten Stigler en Hiebert een volkomen andere aanpak om te komen tot de verbetering van de kwaliteit van het onderwijs: die van de *lesson study*, een van origine Japanse professionaliseringstrategie die in het afgelopen decennium op steeds meer belangstelling mocht rekenen vanuit de Westerse onderwijswereld. Deze strategie lijkt beloftevol, maar is ze dat ook in een andere onderwijscultuur dan de Japanse?

Nadat de voorwaarden zijn geschetst waaronder een *klassiek lesson study* experiment in een *andere culturele setting* tot zijn recht zou kunnen komen, volgt de beschrijving van drie *kleine lesson study experimenten* gericht op instructieverbetering en uitgevoerd op het Gymnasium Coleanum in Zwolle: een instructie over 'het vaasmodel bij trekken met en zonder terugleggen' in twee 4A-clusters, de tangens in twee klassen 3 en de constructie van de bissectrice in twee klassen 2.

Deze experimenten gaven onder meer aanleiding tot de volgende conclusies:

1. Een deel van de problemen die de leerlingen ondervinden bij het maken van de opgaven, is rechtstreeks terug te voeren tot de methode. *Getal en ruimte* maakt te veel gebruik van niet-wiskundige noties en richt zich te sterk, op een procedurele aanpak.
2. Het verdient aanbeveling om de instructie van nieuwe wiskundige begrippen veel algebraïscher en inzichtelijker in elkaar te steken dan de methode doet. Bovendien is het handig gebleken om de nieuwe wiskundige begrippen te introduceren aan de hand van voorbeelden die aansluiten bij de belevingswereld van de leerlingen.
3. Voorbeelden in de wiskundeles werken sterker, naarmate ze aanschouwelijker zijn. Dit vergt evenwel de nodige oorspronkelijkheid, vindingrijkheid en een dito improvisatievermogen van de wiskundeleraar. Hoe sterk een aanschouwelijke instructie kan werken, heeft de introductie van een passer van hout bewezen.

Kortom, *lesson study* experimenten, oorspronkelijk ontworpen om onderwijsverbetering op de langere termijn te bewerkstelligen, kunnen ook op

een kortere termijn al effecten sorteren. Ze kunnen bij voorbeeld betrekkelijk snel leiden tot een instructieverbetering bij de introductie van een nieuw wiskundig begrip.

Ten slotte

Lesson study is een uiterst bruikbare strategie gebleken om erachter te komen *wat* er, na een of andere verzorgde instructie in de klas, in de hoofden van de leerlingen gebeurt. Des te vreemder dat we nauwelijks weten *waarom* deze aanpak werkt. Deze scriptie heeft ook geen duidelijk antwoord op die vraag opgeleverd. *Lesson study werkt gewoon*. Of juist niet: gewoon. 'Anything goes', zou de wetenschapsfilosoof Paul Feyerabend zeggen. Daar moeten we het maar mee doen. Dat is, alle interessante onderzoeksresultaten ten spijt, eigenlijk best onbevredigend. We hebben een strategie gebruikt en we weten nauwelijks waarom die ergens toe leidt. Alleen dát ie ergens toe leidt, bij voorbeeld instructieverbetering. In een wiskundeles zouden we daarmee waarschijnlijk geen genoeg nemen, - te veel procedurele en te weinig conceptuele kennis.

Wat deze scriptie en al die *lesson study experimenten* uiteindelijk wel hebben opgeleverd, is bij voorbeeld een passer van hout. Een even eenvoudig als handig ding. Daarmee kun je in de wiskundeles tegemoet komen aan een aantal problemen die zich bij de constructie van een bissectrice nogal eens voordoen.

Nu ik het einde van deze scriptie bijna heb bereikt, moet mij nog van het hart dat die passer van hout voor mij meer is geworden dan hij aanvankelijk was: een metafoor voor alle handige en inzichtelijke uitkomsten van de twee maal drie experimenten over instructieverbetering met behulp van *lesson study* die ik op het Gymnasium Ceeleum in Zwolle heb verricht. Vandaar dat ik deze scriptie graag met het volgende kwatrijn besluit:

*Passers van hout zijn, hoe klassiek ze ook
lijken, niet altijd gevormd uit takken oud,*

*soms uit weinig meer dan iets, doorzichtig
als stof, waarop alle wiskunde is gebouwd.*

Literatuurlijst

Bartalo, Donald B.: *Closing the Teaching Gap*; Coaching for Instructional Leaders, Thousand Oaks, 2012.

Drijvers, Paul, Anne van Streun, Bert Zwaneveld: *Handboek wiskundendidactiek*, Utrecht, 2012.

Dudley, Peter: 'Teacher learning in Lesson Study: What interaction-level discourse analysis revealed about how teachers utilised imagination, tacit knowledge of teaching and fresh evidence of pupils learning, to develop practice knowledge and so enhance their pupils' learning', *Teaching and Teacher Education* 34, 2013, 107-121.

Duijker. H.C.J.. A.C. Dudink. P.A. Vroon: *Leerboek der psychologie*, Groningen, 1981.

Groenhuis, J. en C.K.H.M. Mattijssen: *Professionalisering van de wiskundeleraar door middel van lesson study*. [Masterscriptie], Universiteit Twente, 2012.

Fernandez, Clea, Joanna Cannon and Sonal Chokshi: 'A US-Japan lesson study collaboration reveals critical lenses for examining practice', *Teaching and Teacher Education* 19, 2003, 171-185

Keers, C, H. Wilke en P.O. Kampschuur: *Oriëntatie in de sociale psychologie*; het individu en de groep, Alphen aan de Rijn / Brussel, 1981.

Lee, Jackie F.K.: 'A Hong Kong case of lesson study - Benefits and concerns', *Teaching and Teacher Education* 24, 2008, 1115-1124.

Lewis, Catherine C. & Ineko Tsuchida: 'A Lesson Is Like A Swiftly Flowing River; How Research Lessons Improve Japanese Education, *American Educator*, Winter 1998, 12-17, 50-52.

Lewis, Catherine, Rebecca Perry and Jacqueline Hurd: 'A Deeper Look at Lesson Study', in: *Educational Leadership*, Feb 2001, 18-22.

Lewis, Catherine: What is the nature of knowledge development in lesson study?, in: *Educational Action Research*, 17/1, 95-110.

Meer, Frans-Bauke van der: *Organisatie als spel; sociale simulatie als methode in onderzoek naar organiseren*, [diss.], Enschede, 1983.

Rock, Tracy C. & Cathy Wilson: *Improving Teaching through Lesson Study*, in: *Teacher Education Quarterly*, Winter 2005, 77-92.

Stigler, James W. & James Hiebert: *The Teaching Gap; Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*, [Updated with a New Preface and Afterword], New York, 2009, [oorspronkelijk: 1999].

Stigler, James W. & James Hiebert: 'Closing the Teaching Gap', in: *Kappan*, Nov 2009, 32-37.

Struik, D.J.: *Geschiedenis van de wiskunde*, Amsterdam, 1980.

Takahashi, Akihiro: Characteristics of Japanese mathematics Lessons, [paper presented at the APEC International Conference on Innovative Teaching Mathematics through Lesson Study, Jan 14-20, Tokyo, 2006].

Valcke, Martin: *Onderwijskunde als ontwerpwetenschap; Een inleiding voor ontwikkelaars van instructie en voor toekomstige leerkrachten*, Gent, [2010].

Verbeek, Peter Paul: *De daadkracht der dingen; Over techniek, filosofie en vormgeving*, [diss.], Amsterdam, 2000.

Verhoef, Nellie: 'De kunst van het lesgeven: lesson study', in: *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 2011, Ser. 5, vol. 12 (3), 206-209.

Verhoef, Nellie: 'Lesson Study; Deel 1', in: *Euclides* 87/3, 111-113.

Verhoef, Nellie: 'Lesson Study; Deel 2', in: *Euclides* 88/3, 120-122.

Verhoef, Nellie & Mark Timmer: 'Lesson Study; Deel 3', in: *Euclides* 88/4, 173-178.

Yoshida, Makoto: *Lesson Study: A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning*, [PPT], Center for Lesson Study, William Peterson University.

<http://www.lessonresearch.net/>

<http://www.tc.columbia.edu/lessonstudy/index.html>

<http://www.hhofstede.nl/index1.htm>

