Professionalisering van de wiskundedocent door middel van lesson study

Masterscriptie

J. Groenhuis en C.K.H.M. Mattijssen

Onder begeleiding van
dr. F.G.M. Coenders en dr. N.C. Verhoef

Universiteit Twente

19 september 2012

Voorwoord

Dit onderzoek is uitgevoerd ter afronding van de Master Science Education and Communication aan de Universiteit Twente. Het dient als afstudeerproject onder de naam 'Onderzoek van Onderwijs' met een omvang van 10 studiepunten.

Begin dit jaar heeft een lesson study project plaatsgevonden. Naar aanleiding hiervan is een onderzoeksvraag naar voren gekomen waar wij met plezier mee aan de slag zijn gegaan. Nellie Verhoef heeft ons hierin begeleid vanuit de onderwijsgroep ELAN, onderdeel van de faculteit Gedragswetenschappen aan de Universiteit Twente.

Wij willen Nellie bedanken voor haar fijne begeleiding en enthousiasme. We hebben leuke voortgangsgesprekken gehad. Ook danken wij Fer Coenders, die als tweede corrector in de beoordelingscommissie zit. Daarnaast willen wij ook alle docenten die betrokken waren bij het lesson study project bedanken voor hun medewerking. Wij hebben hun discussies en lessen op video mogen bekijken en dit was van grote informatieve waarde, zowel voor ons onderzoek als voor onze persoonlijke ontwikkeling: We hebben de kunst van het lesgeven nog even mogen afkijken. Ook waren zij gewillig met het openlijk invullen van enquêtes. Tot slot willen we Johan Jonker bedanken dat hij de video's voor ons heeft verzameld.

Caroline Mattijssen en Jessica Groenhuis, september 2012

Samenvatting

Menig docent doet z'n best om goede lessen te geven en deze te verbeteren. *Lesson study* is een methode voor docenten om zich te professionaliseren. In een lesson study project gaat een aantal docenten gezamenlijk aan de slag met een les waarin leerlingen een nieuw concept aanleren dat door docenten nogal eens lastig wordt gevonden te doceren. In dit onderzoek stellen wij ons de vraag hoe lesson study de docent helpt om zich dusdanig te professionaliseren dat hij zijn wiskundeonderwijs verbetert door in zijn lessen de wiskundige denkactiviteit van zijn leerlingen te verhogen. Het antwoord hierop zoeken we aan de hand van een lesson study project dat in het voorjaar van 2012 heeft plaatsgevonden.

Bij dit project waren zeven wiskundedocenten van verschillende scholen betrokken, begeleid door vier medewerkers van de Universiteit Twente. De docenten en begeleiders vormden samen het team, dat binnen een periode van enkele maanden twee opeenvolgende lessen voor het concept sinus heeft ontwikkeld. In deze lessen wordt voor de 4 vwo-klas het begrip "$\sin x$" geïntroduceerd, waarbij "SOSCASTOA" als voorkennis wordt beschouwd. Gedurende het project hebben zeven plenaire bijeenkomsten op de Universiteit Twente plaatsgevonden en zijn er door vijf van de zeven docenten lessen gegeven. Alle lessen, nabesprekingen en plenaire bijeenkomsten zijn opgenomen op video.

De werkbladen uit de lessen zijn naast alle video-opnamen gebruikt als data binnen dit onderzoek. Daarnaast is onder de betrokken docenten ook een enquête gehouden. Na het verwerken van de data was het mogelijk de belangrijkste leerlingenactiviteiten in te delen in drie niveaus van conceptbeheersing *waarnemen*, *bewerken* en *redeneren*. Daarnaast zijn de belangrijkste docentenactiviteiten ingedeeld in de drie categorieën *doen*, *icoon* en *symbool*. De enquêtes zijn gebruikt om de docenten zelf te laten vertellen

op welke vlakken zij zich persoonlijk hebben ontwikkeld.

Uit de analyse van de lessen komt duidelijk naar voren dat de deelnemende docenten gedurende het project de lessen steeds meer hebben ingericht met wiskundige denkactiviteiten. We zagen dat de leerlingen in de lessen van de eerste paar docenten vooral procedureel bezig waren, terwijl zij bij de andere docenten steeds meer uitdagingen voorgeschoteld kregen waar zij wiskundig aan het denken werden gezet. Hieruit concluderen we dat de docenten zich gedurende dit lesson study project hebben geprofessionaliseerd door de leerlingen tijdens de les steeds meer wiskundig te laten nadenken. De kenmerken van lesson study zijn duidelijk de hoofdingrediënten geweest voor het slagen van deze professionalisering van de deelnemende docenten.

Inhoudsopgave

1 Inleiding

De kwaliteit van het onderwijs is een veelbesproken onderwerp op de politieke agenda. Zeker in deze tijden van bezuinigingen is men van mening dat de kwaliteit van onderwijs niet achteruit mag gaan. Nederland moet als kenniseconomie blijven meedoen in Europa en de wereld. Onderzoeken waarin leerresultaten van leerlingen op internationaal niveau met elkaar worden vergeleken, laten echter zien dat de prestaties van Nederlandse leerlingen de laatste jaren gedaald zijn. [Ministerie van Onderwijs Cultuur en Wetenschap, 2011b] Een bevinding die ook wordt ondersteund door het onderwijsveld zelf: Zo menen universiteiten en hogescholen dat het instroomniveau van studenten is gedaald, worden vraagtekens gezet bij de kwaliteit van HBO-diploma's en is er in het voortgezet onderwijs een rekenprogramma ingevoerd om achterstanden van de basisschool weg te werken. [Tweede Fase Adviespunt, 2005, Inspectie van het Onderwijs, 2011a, Ministerie van Onderwijs Cultuur en Wetenschap, 2011a] Kortom, er zijn voldoende uitdagingen voor de overheid op het gebied van onderwijsverbetering.

1.1 Aanleiding

Uit onderzoek is gebleken dat de docent een zeer bepalende factor is voor de kwaliteit van het onderwijs. Daarom zijn de overheidsplannen met name gericht op de professionalisering van docenten. Veel professionaliseringsmaatregelen hebben betrekking op de initiële opleidingen en vervolgopleidingen van docenten. Zo stelt de overheid geld beschikbaar in de vorm van de lerarenbeurs, waarmee bijvoorbeeld tweedegraads docenten een opleiding tot eerstegraadsdocent kunnen volgen. [Diepstraten et al., 2010]

Daarnaast wil de overheid ook strengere eisen stellen aan de lerarenopleidingen. De bindende rekentoets op de pabo is hier een voorbeeld van. [Inspectie van het Onderwijs, 2011b]

Een goede docent is echter meer dan 'een docent in het bezit van zijn diploma'. Voor een adequate uitoefening van het beroep wordt verwacht dat de docent 'een leven lang leert'. Kennis, vaardigheden en attitude moeten up-to-date zijn, aangepast aan de huidige onderwijskundige en maatschappelijke werkelijkheid. Een professionele docent houdt zich daarom naast het lesgeven ook bezig met het aanleren van nieuwe kennis en vaardigheden, met als doel de kwaliteit van zijn onderwijs te verbeteren. [Kwakman, 1999]

Er zijn veel verschillende manieren waarop docenten en schoolleidingen invulling kunnen geven aan professionalisering. De meest bekende manier waarop leraren 'leren' is het *formeel leren*: Het volgen van cursussen, trainingen en opleidingen. [Diepstraten et al., 2010] Echter, de transfer van deze kennis naar de lespraktijk valt tegen. Er zijn maar weinig docenten die de nieuwe kennis en vaardigheden toepassen in de praktijk. Het rendement van deze investering is laag gebleken. [Kwakman, 1999]

Een professionele docent is iemand die zijn vak goed 'bijhoudt'. Hier kan ook onder worden verstaan dat docenten gebruik maken van de nieuwste wetenschappelijke inzichten in hun vakgebied. In de praktijk vindt de wetenschap maar moeilijk een weg naar de onderwijspraktijk. Het onderzoek

Figuur 1.1.: Informeel netwerkleren

staat vaak te ver af van de concrete behoeften van leraren. [Diepstraten et al., 2010]

Voor effectieve vormen van professionalisering lijkt een koppeling met de praktijk noodzakelijk. Om deze kloof te overbruggen wordt het steeds belangrijker gevonden, dat het leren plaatsvindt in de context van de werkplek, zodat nieuwe kennis en vaardigheden ook daadwerkelijk toepasbaar zijn. [van Driel, 2006] In de praktijk is echter te zien dat deze vorm van leren niet goed geïntegreerd is in het onderwijs. Dit is zowel op schoolniveau als op overheidsniveau het geval. De meeste scholen hebben alleen een beleid ten aanzien van de formele vormen van professionalisering. Daarbij is het beleid veelal gericht op schoolniveau: Schoolontwikkeling en leren als team staan centraal. De individuele ontwikkeling van de docent is daarbij van ondergeschikt belang. [Diepstraten et al., 2010] Ook het beleid van de overheid richt zich op formele vormen van professionalisering. Een voorbeeld hiervan is het lerarenregister, wat sinds kort is ingevoerd om de bekwaamheid van leraren te bewaken. Dit lerarenregister beoordeelt docenten alleen op basis van formele vormen van leren. Om de registratie als docent te behouden moeten certificaten worden behaald. [Ministerie van Onderwijs Cultuur en Wetenschap, 2011b] Het is de bedoeling dat het lerarenregister een stimulans is voor leraren om hun bekwaamheid op niveau te houden. Echter, als dit moet gebeuren via de conventionele leervormen zoals studiedagen of cursussen, waarvan is gebleken dat het rendement laag is, dan is de vraag of het register wel een goede afspiegeling geeft van de professionaliteit van de docent.

Er blijkt onder docenten voldoende bereidheid te zijn om zich te blijven professionaliseren. Scholen kunnen hier veelal geld voor beschikbaar stellen, maar het blijkt dat ook veel docenten bereid zijn om eigen tijd en geld te investeren in hun ontwikkeling. Docenten leren echter het liefst op een *informele* manier. Ze zijn van mening dat ze veel van elkaar kunnen leren, aan de hand van de praktijk. Er zijn legio mogelijkheden om op deze informele manier te leren: Online platforms waarop ervaringen kunnen worden uitgewisseld, samenwerkingen tussen docenten van verschillende scholen, het structureel uitvoeren van reflecties op het eigen functioneren, lessen observeren bij anderen of de eigen lessen laten observeren en video-opnamen van de eigen les terug kijken. Al deze methoden kunnen bijdragen aan de professionalisering van de docent, maar hebben ook één groot gezamenlijk nadeel: Er is geen certificaat of diploma mee te verdienen. [Diepstraten et al., 2010]

In dit onderzoek zullen wij het concept *lesson study*, één van de 'informele' manieren van het leren van docenten, nader bekijken om te onderzoeken of deze methode een waardevolle bijdrage kan leveren aan de professionalisering van de docent.

1.2 Context

Het instituut ELAN voor Lerarenopleiding, Wetenschaps- en techniekcommunicatie & Onderwijspraktijk, verbonden aan de Universiteit Twente, houdt zich bezig met de professionalisering van docenten. ELAN biedt voor verschillende vakken eerstegraads lerarenopleidingen aan, maar biedt daarnaast ook mogelijkheden voor docenten die hun diploma reeds op zak hebben en toch graag verder willen leren. Voor het vak wiskunde bestaat er een zogenaamde *Community of Learners*: een groep wiskundedocenten van verschillende scholen die van elkaar willen leren om zich daardoor te professionaliseren. Samen proberen ze theoretisch verantwoord lesmateriaal te ontwerpen en te onderzoeken. Deze Community of Learners heeft de eerste helft van 2012 een *lesson study project* doorlopen. In dit onderzoek bekijken wij de bijdrage van lesson study aan de professionalisering van de betrokken docenten aan de hand van dit project. Dit leidt tot de formulering van de onderzoeksvraag.

1.3 Onderzoeksvraag

In dit onderzoek gaan we proberen een antwoord te formuleren op de volgende vraag:

> "Hoe helpt lesson study de docent om zich dusdanig te professionaliseren dat hij zijn wiskundeonderwijs verbetert door in zijn lessen de wiskundige denkactiviteiten van zijn leerlingen te verhogen?"

In het volgende hoofdstuk zullen de begrippen *lesson study* en *wiskundige denkactiviteiten* nader worden toegelicht.

2 Theoretisch kader

In dit onderzoek wordt lesson study als professionaliseringsmethode bestudeerd. Voor het analyseren van het effect van lesson study worden theorieën gebruikt betreffende *het niveau van conceptbeheersing* en *didactische fasen*. Deze analysetheorieën worden gebruikt om te kijken naar het gebruik van *wiskundige denkactiviteiten*. Deze begrippen, alsmede het concept lesson study, zullen in dit hoofdstuk worden toegelicht.

2.1 Lesson study

In het vorige hoofdstuk is beschreven dat niet alleen de formele, meetbare vorm van professionalisering, middels het behalen van certificaten, wordt ondersteund, maar dat er ook voor gepleit wordt de informele individuele professionalisering te ondersteunen. Individuele professionalisering is veelal niet ingebed in het schoolbeleid. Wanneer docenten hier aan willen werken vindt dit meestal plaats door individueel te reflecteren. Dit houdt in dat de docent terugblikt op zijn eigen les en zelfstandig zijn lesmethode overdenkt. Er zijn verschillende hulpmiddelen beschikbaar om dit systematisch aan te pakken, zoals de STARR-methode of het reflectiemodel van Korthagen. Een nadeel van deze methode is dat de docent slechts vanuit één enkel perspectief de les kan beoordelen, namelijk vanuit zijn eigen perspectief. Het beeld dat docent over zijn les heeft is daarom 'gekleurd' en beperkt. Bij het reflecteren moet de docent altijd zelf invullen hoe de les voor zijn leerlingen moet zijn geweest. Lesson study kan deze eenzijdigheid doorbreken. Er zijn bij lesson study observanten in de klas aanwezig die de docent een objectief beeld proberen geven van hoe de leerlingen de les hebben ervaren.

2.1.1 Definitie

Zoals reeds genoemd is het grootste verschil tussen lesson study en reflecteren de beschikking over 'extra ogen' in de klas, ogen die puur gericht zijn op de leerlingen om hun leerproces in kaart te brengen. Het uiteindelijke doel van de professionalisering van docenten is immers de bevordering van het leerproces van leerlingen. Daarnaast is het een voordeel van lesson study dat er 'extra individuen' betrokken zijn, zowel in de voorbereidende fase als in de reflectieve fase. Maar het concept lesson study reikt nog verder: Door het cyclische karakter is het mogelijk om de les steeds opnieuw te verbeteren en testen. Stepanek definieert in zijn boek lesson study als volgt:

> "Lesson study is a professional development practice in which teachers collaborate to develop a lesson plan, teach and observe the lesson to collect data on student learning, and use their observations to refine their lesson. It is a process that teachers engage in to learn more about effective practices that result in improved learning outcomes for students." [Stepanek et al., 2007]

Binnen het format kan tevens extra ruimte gemaakt worden om wetenschap te verbinden met de lespraktijk. Normaal gesproken blijkt dat dit maar weinig gebeurt. Tijdens de lesson study kunnen wetenschappelijke inzichten worden gebruikt om de les te verbeteren. Dit zijn bijvoorbeeld theoriën over de manier waarop een leerling een nieuw concept kan aanleren.

2.1.2 Historie

De ideeën van lesson study vinden hun origine in Japan. In de jaren rond 1880 werden nieuwe theorieën over methodes van lesgeven ontwikkeld en laaiden discussies over het curriculum op. Als reactie hierop vonden real-time lesobservaties in klaslokalen plaats. Dit is de oorsprong van het concept lesson study geweest. Het eerste lesson study handboek 'Reform the Methods of Teaching' werd uitgebracht in 1883. In die tijd werd lesson study in Japan gelijktijdig met de invoering van een nieuw, door de overheid bestuurd schoolsysteem geïntroduceerd. In het handboek wordt ook al de methode beschreven om tijdens de les de leerlingen zelf te laten nadenken door vragen bij de leerlingen te leggen in plaats van alle lesstof top-down aan te reiken. Er werd een dialoogstijl ontwikkeld die communicatie en zelfstandig denkvermogen binnen de gehele klas bevorderde. [Isoda, 2010]

2.1.3 Praktijk

Een lesson study project wordt uitgevoerd door een team bestaande uit docenten die de les zullen geven en een aantal begeleiders die er voor zorgen dat alle randvoorwaarden in orde zijn. Zo is de voorzitter verantwoordelijk voor het structureren van de bijeenkomsten, bewaart de administrator alle documentatie van het project en is er een lesson study professional betrokken die (wetenschappelijke) input geeft. Als een team zullen de docenten en begeleiders gezamenlijk het project doorlopen. Het proces waarin dit gebeurt kan worden uitgedrukt in vijf fasen waarvan sommige fasen naar believen kunnen worden herhaald [Stepanek et al., 2007]:

1. *Doelen opstellen* - Het team zal gezamenlijk omschrijven wat het doel zal worden dat bij de leerlingen moet worden bereikt.

2. *Les voorbereiden* - Aan de hand van het beschreven doel zal een les worden bedacht. Deze les wordt van te voren inhoudelijk zeer gedetailleerd beschreven. Er wordt vaak een onderwerp gekozen dat leerlingen normaal gesproken moeilijk onder de knie krijgen.

3. *Les geven, observeren en evalueren* - Één docent zal de les geven aan zijn eigen leerlingen. De anderen uit het team observeren deze les waarbij zij data verzamelen over de effectiviteit van de les. Zij zullen hiertoe het inhoudelijk begrip bij leerlingen observeren en/of bevragen. Het is geenszins de bedoeling de docent te beoordelen. Naderhand zullen de docent en observanten de les evalueren en de bevindingen die zij over het leerproces van de leerlingen hebben verzameld met elkaar delen.

4. *Les herzien en opnieuw geven, observeren en evalueren* - De les zal worden vernieuwd op basis van de discussies en bevindingen uit fase 3, zodanig dat de leerlingen de lesstof tijdens deze les nog beter tot zich zullen nemen en het begrip bij de leerlingen wordt vergroot. Deze vernieuwde versie van de les zal vervolgens door één van de andere docenten uit het team worden gegeven aan een nieuwe groep leerlingen zoals in fase 3.

5. *Project reflecteren en de resultaten delen* - Het team zal de les zoals deze uiteindelijk het best wordt bevonden rapporteren in een document en deze verworven kennis delen met de buitenwereld.

Natuurlijk brengt lesson study ook een organisatorisch vraagstuk met zich mee. Docenten moeten van hun schoolleiding ook tijd krijgen om met elkaar in overleg te gaan en elkaars lessen te observeren.

Omdat het lesson study project veel tijd en energie vergt, moet er van te voren goed over een aantal zaken worden nagedacht. Het is bijvoorbeeld belangrijk van te voren te beslissen wat het doel van het project wordt, welke docenten er worden uitgenodigd voor deelname, wat de invloed van de groespleden zal zijn, hoeveel tijd het project gaat kosten, waar de groepsleden hun tijd vandaan kunnen halen, wat er van te voren over het onderwerp moet worden onderzocht, wie de administratie van het project bij zal houden en de organisatie op zich neemt, wie het project zal begeleiden en hoe deze persoon dat vorm kan geven, aan welke professional op gebied van lesson study eventueel vragen kunnen worden gesteld en wie het proces uiteindelijk zal beschrijven en de bevindingen gaat delen met de rest van de wereld.

Het moge duidelijk zijn dat een dergelijk project aardig wat tijd en energie van de betrokkenen vergt. Over het algemeen kan worden gezegd dat daarom voor een succesvol project vier hoofdingrediënten noodzakelijk zijn: Ten eerste dienen de docenten *bereidwillig* en *betrokken* te zijn. Daarnaast moeten zij ook genoeg *tijd* kunnen vrijmaken, welke het liefst wordt aangeboden door de school omdat uit ervaring blijkt dat anders de

Figuur 2.1.: Een observant tijdens een lesson study project

prioriteit niet hoog genoeg wordt geacht. Op de derde plaats is het van belang dat de docenten worden ondersteund door *begeleiders* die voldoende kennis op het gebied van lesson study bezitten en tot slot is het noodzakelijk dat de docenten een goed uitgewerkt *actieplan* hanteren. [Stepanek et al., 2007].

2.2 Wiskundige denkactiviteiten

Er wordt steeds meer gesproken over de vormgeving van het (wiskunde-) onderwijs. Vroeger was het normaal dat docenten volgens een vast stramien les gaven. Immers, de docent bezat alle kennis en gaf daarom klassikale uitleg, terwijl de leerlingen luisterden en de informatie opnamen. Inmiddels wordt tegen dit soort opvattingen over leren een stuk genuanceerder aangekeken. De klassieke methode van kennisoverdracht, het zogenaamde 'top-down' informatie overdragen, is al lang niet meer de enige manier om leerlingen te laten leren.

Van Streun beschrijft in zijn oratie een viertal doelen van het wiskundeonderwijs: *Weten dat*, *Weten hoe*, *Weten waarom* en *Weten over weten*. Het eerste doel *Weten dat* betreft kennis en reproductie. Het gaat erom dat de leerling wiskunde leert inzetten als een gereedschap in verschillende toepassingen. Wiskunde is één van de kernvakken van ons onderwijs en voor alle havo en vwo leerlingen een verplicht vak. Dit wordt veelal gelegitimeerd door wiskunde te benoemen als het vak waarbij je "leert denken". De doelen *Weten hoe* (Een probleem aanpakken, onderzoeksvaardigheden) en *Weten waarom* (Abstractie bereiken, een rijk cognitief schema ontwikkelen) zijn hierop gericht. Het laatste doel *Weten over weten* betreft het ontwikkelen van reflecterend vermogen en kennis over de eigen aanpak. [van Streun, 2001]

Een actuele benadering voor het lesgeven richt zich op de zogenaamde *wiskundige denkactiviteiten*. Met een wiskundige denkactiviteit worden leerlingen uitgedaagd: Zij krijgen een probleem voorgeschoteld wat zij niet procedureel op kunnen lossen. Het gebruik van wiskundige denkactiviteiten in de les sluit aan bij de doelen *Weten hoe* en *Weten waarom*. Er zijn vele definities mogelijk voor het begrip *wiskundige denkactiviteit*. Een opgave is alleen als wiskundige denkactiviteit te beoordelen als deze beoordeling gerelateerd wordt aan de kennis van de leerlingen die eraan werken. Een wiskundige denkactiviteit moet een "probleem" zijn: Er bestaat pas een probleem op het moment dat een leerling de oplossing niet onmiddelijk kan geven en er geen algoritme voor kent. Zo is het ook mogelijk dat "problemen" in een later stadium van het leerproces routineopgaven worden. [Drijvers, 2011] Een wiskundige denkactiviteit vraagt om een analyse van de probleemsituatie en een zoekprocedure. Hierbij kunnen de leerlingen terugvallen op reeds verworven wiskundige vaardigheden zoals *modelleren*, *algebraïseren*, *ordenen*, *structureren*, *analytisch denken*, *abstraheren*, *logisch redeneren* en *bewijzen*. [Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs, 2007]

In de analyse van dit onderzoek sluiten wij aan op recente theorieën. Deze theorieën over *niveaus van conceptbeheersing* en *didactische fasen* zullen hieronder worden beschreven in relatie tot wiskundige denkactiviteiten.

2.2.1 Niveaus van conceptbeheersing

In het leerproces van de leerlingen onderscheiden we drie *niveaus van conceptbeheersing*. Deze niveaus *waarnemen*, *bewerken* en *redeneren* zijn afgeleid van de niveautheorie van Pierre van Hiele, maar uitgebreid van de meetkunde naar andere wiskundige terreinen door David Tall [van Hiele, 1973, Verhoef et al., 2012a]. De wiskundeonderwijs doelen *Weten dat*, *Weten hoe* en *Weten waarom* zijn ook in het leerproces van de leerlingen terug te vinden.

Het leerproces van de leerlingen is in te delen naar het niveau van conceptbeheersing. In het niveau *waarnemen* zijn de leerlingen passief en worden van informatie voorzien door te kijken en te luisteren. Op het niveau *bewerken* voeren de leerlingen voornamelijk procedures uit. Deze twee niveaus komen overeen met het wiskundedoel *Weten dat*, het bezit van kennis en kunnen reproduceren. Bij het niveau *redeneren* bevinden de leerlingen zich op het conceptuele niveau. Redeneren vraagt om *Weten hoe* en *Weten waarom*. De wiskundige denkactiviteiten vinden met name plaats op dit niveau van conceptbeheersing.

2.2.2 Didactische fasen

De docenten gebruiken in het lesson study project de didactiek van *sensible mathematics*. Deze theorie is een leidraad voor docenten om een nieuw concept aan te reiken door middel van drie didactische fasen. De theorie is gebaseerd op de ideeën van Jerome Bruner en toegespitst op de wiskunde door David Tall. Het kenmerkt zich door de didactische fasen *doen*, *icoon* en *symbool*. [Tall, 2012, Bruner, 1996] Het icoon fungeert in dit geheel als een “kapstok” en helpt sturing te geven aan het wiskundig denkproces van de leerlingen. De leerlingen kunnen het icoon gebruiken om verbanden te leggen tussen allerlei belangrijke kenmerken van het concept. Het icoon helpt hierdoor de leerlingen tijdens het ontwikkelen van een rijk cognitief schema (*Weten waarom*).

De eerste fase “*doen*” wordt gekenmerkt door het gebruik van de eigen intuïtie van de leerlingen. Hier is het belangrijk dat de leerlingen proberen hun waarnemingen te herkennen en te beschrijven in hun eigen taal. Leerlingen moeten worden uitgedaagd tot gedachte-experimenten, waarbij het wiskundig denken gestimuleerd wordt.

In de tweede fase “*icoon*” van het leerproces wordt een visualisatie of icoon geïntroduceerd. Aan dit icoon zijn de belangrijke kenmerken van het concept verbonden. Het icoon moet daarom herkenbaar zijn en geschikt om bij leerlingen de kennis over het concept op te roepen.

In de derde en laatste fase “*symbool*” wordt de overstap gemaakt naar de universele, wiskundige taal. Met behulp van de formele definities kan er worden geredeneerd en is de opgedane kennis in nieuwe contexten toe te passen. Nu is het moment dat de kennis van het concept kan worden gevat in één enkel symbool, bijvoorbeeld het integraalteken. In deze fase wordt het mogelijk bewerkingen uit te voeren op en getallen te verbinden aan het concept. [Verhoef et al., 2012b]

3 Methode

In het voorjaar van 2012 heeft een lesson study project plaatsgevonden. In dit onderzoek wordt dit project gebruikt om iets te kunnen zeggen over de onderzoeksvraag, zoals deze is gesteld in Paragraaf 1.3:

> "Hoe helpt lesson study de docent om zich dusdanig te professionaliseren dat hij zijn wiskundeonderwijs verbetert door in zijn lessen de wiskundige denkactiviteiten van zijn leerlingen te verhogen?"

Het team dat het lesson study project heeft doorlopen bestaat uit wiskundedocenten en begeleiders van de Universiteit Twente. Het doel van dit project was twee opeenvolgende lessen te ontwikkelen waarin de sinusfunctie wordt geïntroduceerd aan 4 vwo-leerlingen op een manier die past bij de theorie van *sensible mathematics* (zie Paragraaf 2.2). Op het moment dat dit onderzoek is gestart (zomer 2012) is het lesson study project reeds beëindigd.

In dit hoofdstuk zal eerst het team van participanten worden beschreven. Daarna komen resp. de procedure, de instrumenten, en de dataverwerking- en analyse aan bod.

3.1 Participanten

Het lesson study team bestaat uit zeven wiskundedocenten van verschillende scholen uit Oost-Nederland en vier begeleiders van ELAN, het instituut voor Lerarenopleiding, Wetenschaps- en techniekcommunicatie en Onderwijspraktijk aan de Universiteit Twente. De vier begeleiders van ELAN hebben elk een vaste rol binnen het project als Voorzitter, Administrator, Vakdidacticus en Professional (in lesson study).

De docenten zijn allen eerstegraads bevoegd voor het vak wiskunde of hiervoor in opleiding en zijn allen actief in de bovenbouw. Ieder kreeg van zijn werkgever een tijdsbesteding van $0,1$ fte om voor dit project in te zetten. In tabel 3.1 is te vinden hoeveel jaar ervaring de docenten hebben met het doceren van wiskunde en hoeveel lesson study projecten zij al hebben doorlopen.

	aantal jaar docent	aantal lesson study projecten
Docent 1	24	3
Docent 2	2	1
Docent 3	21	3
Docent 4	17	1
Docent 5	25	5
Docent 6	26	2

Tabel 3.1.: Ervaring van de docenten

Docent 7 geeft zelf geen lessen meer, maar heeft een leidinggevende functie in het onderwijs. In dit project zorgt hij voor inbreng door lessen te observeren en deel te nemen aan de plenaire bijeenkomsten.

3.2 Procedure

De participanten hebben dit lesson study project doorlopen zoals beschreven in Paragraaf 2.1: Zij zijn meerdere malen bijeengekomen waarbij zij twee opeenvolgende lessen hebben ontwikkeld. In meerdere cycli zijn deze lessen gegeven en geobserveerd, direct op locatie geëvalueerd, en later besproken tijdens de plenaire bijeenkomsten. Op deze manier hebben de participanten gezamenlijk de lessen kunnen voorbereiden, uitproberen en verbeteren.

Docenten 1 t/m 5 hebben allen de twee opeenvolgende lessen gegeven. Docent 6 heeft de lessen ook gegeven, echter is deze les buiten het project gevallen (geen observanten en geen opnamen). Daarom wordt deze les niet meegenomen in dit onderzoek. In totaal is dus van tien lessen data aanwezig en bruikbaar voor dit onderzoek.

De lessen en bijeenkomsten hebben plaatsgevonden in de periode van januari tot juni 2012 in de volgorde zoals beschreven in Tabel 3.2.

16-01	Bijeenkomst 1
06-02	Bijeenkomst 2
05-03	Bijeenkomst 3
09-03	Docent 1 Les 1
12-03	Docent 1 Les 2
23-03	Docent 2 Les 1
26-03	Bijeenkomst 4
27-03	Docent 2 Les 2
03-04	Docent 3 Les 1
04-04	Docent 3 Les 2
23-04	Bijeenkomst 5
07-05	Docent 4 Les 1
10-05	Docent 4 Les 2
21-05	Bijeenkomst 6
24-05	Docent 5 Les 1
25-05	Docent 5 Les 2
18-06	Bijeenkomst 7

Tabel 3.2.: Verloop van het lesson study project

Figuur 3.1.: Plenaire bijeenkomst

Alle lessen en bijeenkomsten zijn opgenomen op video. Deze beelden zijn bewaard door de onderwijsgroep ELAN aan de Universiteit Twente. Tevens zijn de werkbladen en korte observantenverslagen van vier van de tien lessen door de Administrator bewaard. Al deze documentatie van het project is voor dit onderzoek beschikbaar gesteld.

3.3 Instrumenten

Voor dit onderzoek gebruiken we de opnamen van de tien lessen en de zeven plenaire bijeenkomsten. Ook maken we gebruik van de werkbladen die in de lessen zijn gebruikt. Deze werkbladen staan in Bijlage B. Bovendien is tijdens dit onderzoek een extra instrument ingezet in de vorm van een enquête, waaraan docenten 1 t/m 6 deelgenomen hebben. Deze ingevulde enquêtes zijn te vinden in Bijlage C. Hierin beschrijven de docenten onder andere hun achtergrond en waardevolle ervaringen die tijdens het project zijn opgedaan.

3.4 Dataverwerking en -analyse

Als eerste stap in de dataverwerking is schriftelijk verslag gelegd van alle bijeenkomsten en lessen met behulp van de video-opnamen. Deze verslaglegging is te vinden in Bijlage A. De lessen en discussies zijn verwerkt tot overzichtelijke lesbeschrijvingen, waarin zowel het verloop van de les wordt beschreven, alsmede de observaties en discussie na afloop. Hierin is fase 3 van de lesson study cyclus (*lesgeven, observeren en evalueren*) omvat. Als 'member check' hebben de betreffende docenten deze lesbeschrijvingen kunnen inzien en de mogelijkheid gehad eventuele aanpassingen in te brengen. De lesbeschrijvingen te vinden in Hoofdstuk 4.

Vervolgens zijn de lessen geanalyseerd door de relevante activiteiten van zowel de leerlingen als de docenten te categoriseren. De activiteiten van de leerlingen worden ingedeeld in de drie 'niveaus van conceptbeheersing' *waarnemen*, *bewerken* en *redeneren*, de activiteiten van de docenten worden ingedeeld in de drie 'didactische fasen' *doen*, *icoon* en *symbool* (zie Paragraaf 2.2). Deze analyse is te vinden in Hoofdstuk 5.

De enquêtes zijn gebruikt om iets meer over de docenten te weten te komen qua ervaring met lesgeven en lesson study. Daarnaast is een aantal open vragen gesteld over het project. Dit zijn inhoudelijke vragen over de (leer-) ervaringen en gevolgen voor het lesgeven op de langere termijn. Citaten uit deze enquêtes zijn gebruikt ter ondersteuning van de resultaten in Hoofdstuk 6.

4 Verwerking

Tijdens deze lesson study zijn twee opeenvolgende lessen ontwikkeld welke beide door vijf docenten zijn gegeven. In dit hoofdstuk wordt de ontwikkeling van deze beide lessen in kaart gebracht. Dit doen we door het *verloop*, de *observaties* en de *discussie* voor elke les apart te beschrijven.

Tijdens de eerste plenaire bijeenkomst is besloten dat voor de tweede bijeenkomst verschillende lesvoorbereidingen worden gemaakt. Hieruit zijn vier verschillende voorbereidingen ontstaan, in duo's gemaakt door Docenten 3 en 5, Docenten 1 en 2 en individueel door Docent 4 en Docent 6.

Over deze voorbereidingen is tijdens de tweede en derde bijeenkomst gediscussieerd en naar aanleiding daarvan heeft de eerste docent zijn lessen ontwikkeld en gegeven. In de opvolgende cycli zijn de lessen steeds gebaseerd op een combinatie van de oorspronkelijke lesvoorbereidingen, de lessen die al zijn geweest, discussies en het eigen inzicht van de docent.

In dit hoofdstuk staan de beschrijvingen van de lessen in dezelfde volgorde als waarin zij zijn gegeven, gevolgd door een samenvatting in de afsluitende paragraaf.

4.1 Docent 1

4.1.1 Les 1

Lesdoelen: Symmetrie zien in een cirkel door het draaien en spiegelen van een punt. Tevens de bijbehorende hoeken (in graden) kunnen bepalen.
Connectie met sensible mathematics: De windmolen (Fig. 4.1) is het icoon van de symmetrie in de (eenheids)cirkel.
Bijzonderheden: De les duurt slechts een half uur in verband met herkansingen.

Verloop

De docent geeft eerst een korte introductie, waarbij voorkennis wordt opgehaald. Hier gaat het om de herhaling van SOSCASTOA, de stelling van Pythagoras en de standaarddriehoeken ‘1, 1, $\sqrt{2}$’ en ‘1, 2, $\sqrt{3}$’. Vervolgens wordt zo’n driehoek in een assenstelsel geïntroduceerd, waarna de punten worden gespiegeld in de assen, waarbij het ‘windmolentje’ ontstaat. Dan mogen de leerlingen op het werkblad de coördinaten van al deze gespiegelde punten invullen. De docent laat hierna een willekeurige driehoek in de eenheidscirkel zien waarvan de coördinaten bekend zijn. De leerlingen tekenen hieropvolgend ook alle andere punten (met het windmolentje) en schrijven daarbij de coördinaten die zij weten. Op hetzelfde werkblad geven de leerlingen nu aan welke hoek (in graden) de punten met de positieve x-as maken. De leerlingen krijgen als huiswerk een werkblad mee waar de eenheidscirkel op staat afgebeeld. Zij dienen hierop alle hoeken in te vullen.

Observaties

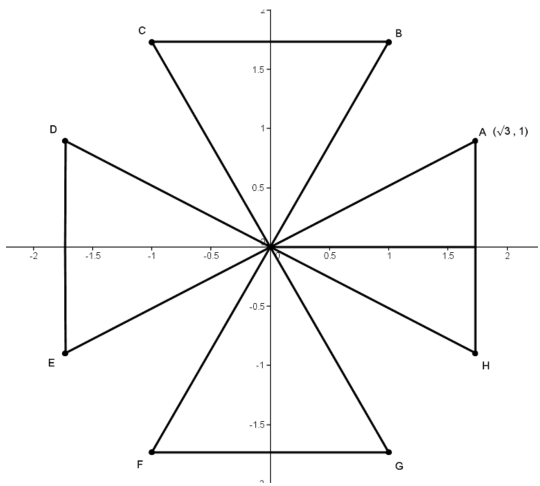
De leerlingen vonden het eerste werkblad eenvoudig en konden het zonder problemen invullen.

Het tweede werkblad geeft bij een enkele leerling wat opstartproblemen. De opdracht om zoveel mogelijk punten te zoeken waarvan je de coördinaten weet, is natuurlijk ook heel ruim op te vatten. Een leerling zoekt nieuwe punten in de driehoek ipv. op de eenheidscirkel. Hij ziet vervolgens zijn buurman weer allerlei spiegelingen tekenen en volgt hierna zijn voorbeeld op. De leerling voor hem kijkt achterom en volgt hun voorbeeld ook. De leerlingen lijken het eenvoudig te reproduceren en lijken het niet moeilijk te vinden de coördinaten te benoemen.

Bij het bepalen van de hoeken gaan sommige leerlingen eerst alleen de hoeken tussen de lijnen bepalen (in plaats van de hoek met de positieve x-as). De docent helpt de leerlingen hiermee beter op weg, waarna de leerlingen dit vervolgens eenvoudig achter elkaar invullen. Sommige leerlingen vonden het lastig op welke manier en op welke plek de grootte van de hoek het beste kon worden opgeschreven.

Discussie

De leerlingen konden de werkbladen erg snel en zonder grote problemen invullen. Dit betekent echter niet dat zij begrepen hebben wat ze hebben gedaan. Deze 'invuloefening' zou waarschijnlijk niet de juiste denkprocessen op gang hebben gebracht en is ook nog niet gekoppeld aan de sinus. Er wordt gesuggereerd dat het molentje niet statisch, maar draaiend zou moeten worden aangeboden, waardoor de functie van de hoek met de positieve x-as duidelijker kan worden gemaakt. Het zal dan ook beter aansluiten op de sinus.



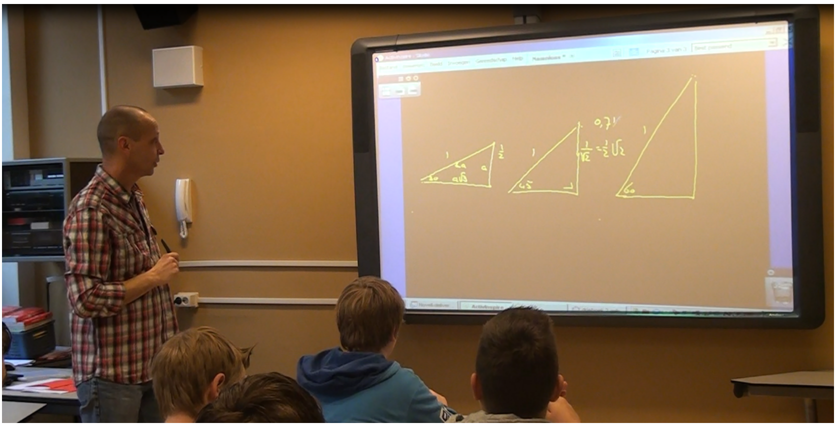
Figuur 4.1.: De windmolen (icoon)

4.1.2 Les 2

Lesdoelen: De leerlingen zullen de sinus als functie leren kennen. De leerlingen zullen de sinus in driehoeken in het eerste kwadrant uitbreiden naar de gehele eenheidscirkel en hiermee de sinusfunctie definiëren.
Connectie met sensible mathematics: De windmolen (Fig. 4.1) is het icoon van de symmetrie in de (eenheids)cirkel.
Bijzonderheden: De les duurt slechts een half uur in verband met herkansingen.

Verloop

De docent herhaalt eerst de belangrijkste punten uit Les 1. Dan gebruikt hij een GeoGebra applet om te laten zien dat altijd geldt: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Door dan de schuine zijde naar één te schalen, ontdekken de leerlingen dat de $\sin \alpha = y$-coördinaat. Dan voert hij een 'nieuwe definitie' van de sinus in, waarbij hij de sinus 'doortrekt' naar de andere kwadranten. Met spiegeling en draaiing kun je nu de sinus van alle mogelijke hoeken bepalen, ook als die groter zijn dan 90°, of negatief. Nu gaan de leerlingen aan de slag met een werkblad waarop zij met behulp van een (nog in te vullen) tabel de sinusfunctie tekenen (draaihoek (in graden) uitgezet tegen hoogte). Hieropvolgend laat de docent met behulp van een GeoGebra applet hoe de



Figuur 4.2.: Bijzondere driehoeken

grafiek tot stand komt door met een bolletje over de eenheidscirkel te lopen. Hierbij wordt precies één periode doorlopen. Ter afsluiting van de les krijgen de leerlingen een blad mee naar huis waarop de eenheidscirkel en alle bijzondere waarden zijn afgebeeld.

Observaties

De leerlingen waren niet bij het verhaal betrokken en er was weinig interactie. De docent stelde in zijn verhaal weinig vragen aan de klas en de leerlingen zijn hierbij dus niet aan het denken gezet. Een leerlinge fluisterde daarbij dat ze het niet snapte en het stom vond. De docent geeft achteraf zelf aan dat hij zijn verhaal niet goed genoeg had voorbereid, en dit is waarschijnlijk ook de reden dat leerlingen er niet bij betrokken werden.

Discussie

Een van de observanten vraagt zich af of de leerlingen begrepen hebben wat voor grafiek zij hebben getekend. “Begrijpen zij wat de graden op de x-as precies betekenen?” Er wordt gesuggereerd dat de stap naar radialen straks ingewikkeld zou kunnen worden, omdat nu met graden is gewerkt. Daarnaast worden er vraagtekens geplaatst bij het gebruik van de tabel voor het maken van de grafiek. Zouden de leerlingen de koppeling tussen de eenheidscirkel, getallen in de tabel en de grafiek zien? Of is het toch een invuloefening geweest zonder de ontwikkeling van besef? Het zou een idee zijn om meer met de leerlingen over de grafiek te praten en hierbij ook een koppeling te maken met Les 1, om ook echt iets met de windmolen te doen. Bovendien zouden de leerlingen al discussiërend de periodiciteit kunnen ontdekken. Wellicht ontdekken zij ook wat er zou gebeuren als we verder dan die ene periode zouden draaien.

4.2 Docent 2

4.2.1 Les 1

Lesdoelen: Symmetrie zien in een cirkel door het draaien en spiegelen van een punt. Tevens de bijbehorende hoeken (in graden) kunnen bepalen en deze koppelen aan de sinus.
Connectie met sensible mathematics: De windmolen (Fig. 4.1) is het icoon van de symmetrie in de (eenheids)cirkel.

Verloop

Eerst haalt de docent voorkennis op over de bijzondere driehoeken '1, 1, $\sqrt{2}$' en '1, 2, $\sqrt{3}$', de Stelling van Pythagoras en SOSCASTOA. Dan plaatst hij de tweede bijzondere driehoek in een assenstelsel waarna samen met de leerlingen de coördinaten van de drie hoekpunten worden bepaald. De windmolen wordt dan getekend en de leerlingen dienen de coördinaten van de andere punten op Werkblad 1 te schrijven. Daarna laat de docent zien hoe de sinus en cosinus met SOSCASTOA in de eenheidscirkel kunnen worden toegepast. De leerlingen bepalen vervolgens zelf de sinus van een aantal hoeken op het werkblad. Hierna wordt een hoek van 120° getekend en zet de docent de leerlingen aan het nadenken over de sinus van deze hoek. De docent vertelt hierbij dat er een probleem ontstaat omdat deze driehoek geen hoek van 90° heeft. Daarna deelt de docent Werkblad 2 uit met de eenheidscirkel waarop een driehoek met een hoek van 20° staat afgebeeld. De leerlingen moeten zo veel mogelijk andere punten op de eenheidscirkel vinden waarvan zij de coördinaten kunnen bepalen. Dit mogen zij daarna thuis af maken. De volgende keer zal er gezamenlijk bekeken worden wat er uit de figuur te halen valt.

Observaties

De leerlingen lijken het invullen van de coördinaten wat lastiger te vinden dan de leerlingen van Docent 1. Zo vond een leerling het niet logisch dat de afstanden van het molentje allemaal hetzelfde zijn. Dit staat op het blad ook niet vermeld. Toch melden de leerlingen bij het nabespreken wel dat het erg makkelijk was. Als zij de sinus van een aantal hoeken moeten bepalen begrijpen de leerlingen eerst niet zo goed hoe ze dit aan moeten pakken, maar met wat hulp lukt het wel. Bij het invullen van Werkblad

2, waarbij de docent zegt dat ze zo veel mogelijk coördinaten en sinussen moeten opschrijven, begrijpen de leerlingen niet wat de sinus ermee van doen heeft. Zij hebben nog niet ontdekt dat de sinus gelijk is aan de hoogte en de docent zegt hier ook niks over. Een leerling vraagt zich af of hij de Stelling van Pythagoras moet gebruiken.

Discussie

De docent had gehoopt dat de leerlingen zelf het verband tussen de sinus en de hoogte zouden ontdekken als hij zelf niet te veel sturing gaf. Helaas bleek in deze les dat zij met deze opdrachten juist te veel in het diepe waren gegooid. Dit zal de reden zijn dat de les wat chaotisch is verlopen en de lesdoelen niet zijn behaald. De docent had ook bewust de bewoordingen 'spiegeling' en 'draaiing' niet gebruikt, in tegenstelling tot Docent 1. Het is mogelijk dat de leerlingen het daarom lastiger vonden om de coördinaten van het windmolentje te vinden. Het idee van de windmolen was überhaupt niet aangeslagen bij de leerlingen. Ze gebruikten het niet om meer punten te genereren op het tweede werkblad. De koppeling tussen de coördinaten en de hoeken werd niet gemaakt. De sinus heeft in deze les voor de leerlingen geen nieuwe betekenis gekregen.

Om de lesdoelen wel te bereiken zal een koppeling tussen de werkbladen moeten worden gemaakt. Bovendien moet er iets met een draaiing worden gebruikt omdat dit erg belangrijk is voor het toewerken naar de sinus. De molen ziet er hiervoor niet vloeiend genoeg uit. Er wordt geopperd om een waterrad als icoon te gebruiken. Daarnaast zou de docent met de leerlingen ook meer moeten discussiëren over de hoogte.

4.2.2 Les 2

Lesdoelen: De leerlingen maken een koppeling tussen de sinus, de symmetrie-eigenschappen en de eenheidscirkel. Daarnaast zullen zij de grafiek van de sinus kunnen tekenen en begrijpen.
Connectie met sensible mathematics: De windmolen (Fig. 4.1) is het icoon van de symmetrie in de (eenheids)cirkel.

Verloop

Eerst bespreekt de docent het werkblad van de vorige keer, waarbij de leerlingen coördinaten en sinussen van nieuwe punten moesten vinden. Hierbij laat hij bewust ook leerlingen aan het woord met onjuiste antwoorden. De docent vraagt of er ook leerlingen zijn die bij deze opdracht gebruik hebben gemaakt van de eerste opdracht met het windmolentje. De link tussen de beide opdrachten zal hiermee voor iedereen duidelijk worden gemaakt. De docent legt uit dat de sinus gelijk is aan de hoogte in de eenheidscirkel. Vervolgens introduceert de docent de hoogtegrafiek. Deze wordt dan door de leerlingen zelf getekend aan de hand van een tabel.

Observaties

Naar aanleiding van het werkblad van de vorige keer wordt een leergesprek gevoerd waarin leerlingen hun antwoorden delen. Leerlingen haken spontaan op elkaar in en leren van elkaar. De link tussen de werkbladen wordt gelegd door een slimme leerling die ook gezien heeft dat $\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$, vanwege het spiegelen. De onafgemaakte discussie uit Les 1 over het bestaan van de sinus van een hoek van 120° lijkt een leerlinge de verkeerde kant op te hebben gestuurd. Zij dacht dat het bij het werkblad de bedoeling is geweest om zoveel mogelijk hoeken te tekenen totdat ze een hoek van 120° had gevonden. De leerlingen hebben bij de sinus nog steeds het beeld uit de onderbouw. De docent geeft één voorbeeld waarin te zien is dat de sinus van een hoek gelijk is aan de hoogte van een punt in de eenheidscirkel bij diezelfde hoek. De docent geeft $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ als voorbeeld en dat dit gelijk is aan de hoogte in de eenheidscirkel. Hiermee probeert de docent de leerling een zetje te geven om de gewenste denkstappen te maken, maar ze komen niet op dit idee. Een leerling merkt op het erg ingewikkeld te vinden: “Hoe kun je dat nou weten? Ik heb tot nu toe alles gesnapt, maar dit gaat mij te ver”.

Na de nieuwe definitie van de sinus discussiëren de leerlingen over de vorm van de grafiek en tekenen hem dan individueel. Een leerling tekent de grafiek met kaarsrechte lijnen. Na de vraag van één van de observanten of deze lijnen inderdaad recht moeten zijn, rondt hij de topjes af. De andere leerlingen neigen er ook naar de grafiek met rechte lijnen en afgeronde toppen te tekenen, als een soort zaagtand. Het is niet helemaal duidelijk of de koppeling met de eenheidscirkel voor de leerlingen nu duidelijk is omdat de leerlingen de grafiek veelal met behulp van een tabel hebben getekend. Één leerling merkt op de de x-coördinaat ook minder wordt, wat een mooie stap lijkt naar de cosinus.

Discussie

De docent vond dat de lesdoelen waren bereikt. Hij vond dat hij de leerlingen wel erg veel moest coachen, maar dat de leerlingen uiteindelijk wel zelf de grafiek hebben kunnen tekenen. Toch blijft de vraag hoeveel gevoel de leerlingen voor de grafiek hebben ontwikkeld. Dat de leerlingen een tabel gebruiken kan ervoor zorgen dat het een invuloefening is waarmee geen gevoel voor de grafiek verkregen wordt.

Figuur 4.3.: Leerlingen aan het werk; een observant kijkt mee

4.3 Docent 3

4.3.1 Les 1

Lesdoelen: De vorm van de sinusgrafiek begrijpen en kunnen aanvoelen voor de waarden van α tussen 0° en 90°.
Connectie met sensible mathematics: Het waterrad (Fig. 4.4) is het icoon voor de draaiing en hoogte op de eenheidscirkel.

Verloop

Tijdens deze les wordt het boek niet gebruikt. De leerlingen hebben alleen een pen, potlood en liniaal nodig. Aantekeningen krijgen ze aan het eind van de les van de docent mee. De docent opent de les met een introductie van het waterrad. Hij neemt een vast punt op het waterrad en begint gelijk over de hoogte van dit punt. De leerlingen wordt direct gevraagd de hoogtegrafiek tegen de tijd te schetsen. Nadat de leerlingen hier tijd voor gekregen hebben, tekent de docent gezamenlijk met een leerling de grafiek op het bord; de docent beweegt zijn krijtje over de cirkel en de leerling tekent hoe hoog de docent is en loopt daarbij naar rechts. Daarna wordt snel overgestapt op graden. De docent laat zien dat hij het rad een aantal keer stil zet en dan de hoogte berekent bij dat aantal gedraaide graden. Hiermee ontstaat de hoogtegrafiek heel nauwkeurig voor het eerste kwadrant. Vervolgens introduceert de docent de gehele grafiek met behulp van spiegelen en draaien. Hierna gaat hij samen met de leerlingen de hoogte in een cirkel met straal één exact bepalen. Hij neemt een voorbeeldpunt met bijbehorende hoek α en laat de leerlingen hiervan exact de hoogte bepalen. Daarna laat hij de leerlingen een paar verschillende driehoeken tekenen en de hoogtes met liniaal opmeten, om ze ervan bewust te maken dat ze met de hoogte in de grafiek bezig zijn. Hiervan wordt een grafiek getekend en de docent gaat nogmaals de discussie aan hoe deze grafiek zou moeten heten. Hieropvolgend vertelt hij dat niet alleen de grafiek uit het eerste kwadrant, maar elders ook, de sinusgrafiek heet. Dit is een nieuwe afspraak. Ter afsluiting wordt een huiswerkvraag gesteld: "Wat moeten we doen om vanuit dit kleine stukje grafiek de volledige sinusgrafiek te bepalen?".

Observaties

Bij het tekenen van de grafiek komen de leerlingen spontaan met begrippen als ‘symmetrie’, ‘herhaling’, ‘draaipunt’ en ‘periode’. Bij de vraag hoe we de tijd uit de grafiek kunnen halen en daar iets wiskundigs mee kunnen doen, werd meteen geopperd het aantal graden waarover gedraaid is te gebruiken. Bij het tekenen van driehoeken en het opmeten van de hoogte, bedenkt één leerling dat hij de driehoek van 60° niet hoeft te tekenen, omdat dit een standaarddriehoek is. Een andere leerling zegt dan gelijk dat je ook bij 30° niet hoeft te tekenen. Na het tekenen van de hele grafiek, vraagt de docent welke naam erbij zou passen. Een leerling vindt dat de boogjes op een parabool lijken. Hierover ontstaat een leuke discussie. Het exact bepalen van de hoogte in de eenheidscirkel doen de leerlingen direct met de sinus. Na het exact tekenen van de grafiek bedenkt een leerling dat het de sinusgrafiek moet heten.

Discussie

De leerlingen hebben duidelijk een goed gevoel voor de functie gekweekt. Er zijn door de docent goede denkvragen gesteld waardoor de eigenschappen van de sinus door de leerlingen zelf gevonden zijn. Dat de leerlingen bij verschillende punten op de eenheidscirkel de hoogte van de driehoek hebben moeten meten gaf de leerlingen een goed begrip van connectie tussen hoek en hoogte in de grafiek. Dit past bij sensible mathematics. De handeling waarbij de docent en de leerling op het bord gezamenlijk de sinusgrafiek tekenen wekt een goed gevoel voor de grafiek op. De leerlingen zien duidelijk wat de grafiek betekent en hoe deze ontstaat uit de eenheidscirkel.

Figuur 4.4.: Het waterrad (icoon)

4.3.2 Les 2

Lesdoelen: Sinusgrafiek exact bepalen. Introductie van de cosinus.
Connectie met sensible mathematics: Het waterrad (Fig. 4.4) is het icoon voor de draaiing en hoogte op de eenheidscirkel.

Verloop

De docent haalt terug wat in Les 1 is besproken en laat nog eens de sinusgrafiek op het bord zien. De huiswerkvraag wordt besproken: De docent vertelt dat in het eerste kwadrant de oude sinusdefinitie kan worden gebruikt voor het berekenen van de hoogte, maar in de rest van de cirkel niet. De grafiek ontstaat nu door spiegelen en draaien. Met het basisvormpje kan dus het verloop van de gehele grafiek exact worden bepaald. Hij introduceert het woord 'eenheidscirkel' nu ook. Hij vertelt dat de grafiek $\sin\alpha$ genoemd wordt en vraagt of dit ook geldt als niet in de eenheidscirkel wordt gewerkt. De docent concludeert nu dat de hoogte in de eenheidscirkel per definitie de sinus van de bijbehorende hoek is. Hier maakt de docent een erg langdradig verhaal van waarin een aantal zaken meerdere malen worden benoemd. Nu moeten de leerlingen een werkblad invullen waarop de sinusgrafiek ontstaat. Dan herhaalt hij nogmaals hoe de hoogte met de sinus wordt berekend, waarna hij dit ook voor de cosinus uitlegt. De docent introduceert nu de cosinusfunctie met een soortgelijk verhaal als de sinusfunctie. Tot slot wordt een tweede werkblad uitgedeeld waarop eerst de sinus wordt getekend en daarboven de cosinus met behulp van een spiegel boven de eenheidscirkel.

Observaties

De docent is vooral bezig met zijn eigen verhaal. Hierdoor zijn de leerlingen weinig betrokken. De leerlingen proberen echter wel mee te denken en gaan gretig in op de vragen die hij ze tussendoor stelt. Een leerling zegt gelijk dat $\sin\alpha =$ hoogte enkel in de eenheidscirkel geldt, omdat je anders nog door de straal moet delen. Bij de introductie van de eenheidscirkel vraagt een leerling zich af of 'eenheid' betekent dat de straal één is, of dat het hoort bij een grootheid. Nadat is getoond dat de hoogte bij 20° gelijk is aan de hoogte bij 160°, concludeert een leerling "Dus $\sin 20° = \sin 160°$" en hij vraagt zich af of we dan niet gewoon altijd alle hoeken kunnen terugvertalen naar het eerste kwadrant. Het eerste werkblad konden de leerlingen zonder al te veel problemen invullen. Dit geldt ook voor het tweede werkblad, maar of de leerlingen precies begrepen wat zij hier hebben gedaan tijdens het tekenen van de cosinusfunctie is de vraag.

Discussie

De docent vertelt dat hij het verhaal niet goed had voorbereid. Daardoor bedacht hij het verhaal ter plekke en kon hij de leerlingen er niet goed bij betrekken. Hij geeft toe dat dat deze les niet ten goede kwam, maar dat hij er zelf erg veel van geleerd heeft. Hij heeft nu een duidelijk beeld hoe hij de volgende keer deze les zou moeten geven.

De andere docenten vinden het werkblad waarop de cosinus met behulp van een getekende spiegel moet worden geconstrueerd onhandig. Het is verwarrend en je kunt niet toetsen of de leerlingen begrijpen wat zij doen. Het lijkt vooral een procedurele invuloefening waarbij het maar de vraag is of het inzicht verschaft.

Een nieuw idee is ontstaan om het in de eerste les niet meer over de sinus te hebben, maar alleen over de hoogtegrafiek. Dan kan in de tweede les een koppeling worden gemaakt met de sinus en de cosinus.

Figuur 4.5.: Aansluitende evaluatie op locatie

4.4 Docent 4

4.4.1 Les 1

Lesdoelen: Ontwikkelen van intuïtie voor de hoogtegrafiek. De hoogte tegen de afgelegde weg kunnen uitzetten in een grafiek.
Connectie met sensible mathematics: Het tandrad (Fig. 4.6) is het icoon voor draaien over de eenheidscirkel.
Bijzonderheden: Dit is niet de eigen klas van Docent 4, maar die van een collega.

Verloop

De leerlingen krijgen aan het begin van de les een werkblad. De docent geeft steeds een korte introductie voor een paar opgaven, waarna de leerlingen die paar opgaven op het werkblad proberen te maken. Tijdens de klassikale introducties van de docent worden ook de gemaakte opgaven besproken. In deze wisselwerking zijn de leerlingen vooral zelf veel aan de slag. De docent opent de les met de introductie van het tandrad met behulp van sheets. De leerlingen maken vervolgens opgaven 1 t/m 4, waarbij leerlingen de hoogte bepalen na een gegeven draaiing. In de volgende serie opgaven wordt nu de eerste hoogtegrafiek getekend en er wordt gerekend aan een rad met een ander aantal tanden. Bij het bespreken vraagt de docent met zijn vinger op een bepaalde hoogte na hoeveel tanden hij weer op dezefde hoogte zit. Hierna koppelt hij het aantal tanden dat het rad draait aan de afgelegde weg van het rad. Met twee tandraden met resp. 18 en 36 tanden wordt getoond dat het niet uitmaakt hoeveel tanden het rad heeft bij het tekenen van de grafiek met de afgelegde weg op de x-as, mits de straal van de tandraden gelijk is. Ter afsluiting geeft hij de laatste opgaven als huiswerk mee.

Observaties

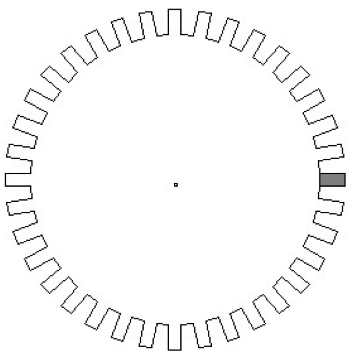
De leerlingen zijn erg rustig en hard aan de slag. Ze lijken heel gewillig de opgaven te maken en doen dus goed mee. Een leerling antwoord op de vraag na hoeveel tanden je weer op dezelfde hoogte zit direct met “Over een heel rondje”. De leerlingen kunnen de omslag van het aantal tanden naar de afgelegde weg snel maken en vinden het niet moeilijk te berekenen. Ook tijdens het maken van de opgaven wordt met elkaar overlegd en lijken de leerlingen heel goed te begrijpen hoe het allemaal zit. Een enkeling maakte een grove fout: Een leerling had de hoogte na draaiing over 3, 21 en 36 tanden uitgerekend en telde deze hoogtes bij elkaar op om de hoogte na draaiing over 60 tanden te berekenen. Hij had de grafiek wel netjes periodiek getekend, maar had hierbij blijkbaar geen link gelegd naar zijn tabel, die niet klopte. Verder is het symbool π misschien nog wel een aandachtspunt; het is bij de leerlingen al wat weggezakt wat dit precies inhoudt.

Discussie

De docenten hebben een discussie over wat een radiaal precies is. Volgens de Vakdidacticus gaat het om de afgelegde hoek, terwijl de docent met zijn les de radiaal wilde introduceren als zijnde de afgelegde weg op de eenheidscirkel.

De docent is erg tevreden over zijn les, hoewel de hoeveelheid aan de weinige kant was. De leerlingen gingen er een stuk sneller doorheen dan dat hij had verwacht. De docent heeft nog wel een opmerking over het werken met de slides: Op de slides staan precies de antwoorden zoals de docent denkt dat leerlingen ze zullen geven. Hij stuurt het denken van leerlingen dan ook bewust bij in die richting.

De docenten vragen zich af of het symbool π uitgebreider behandeld zou moeten worden. De leerlingen moeten dit symbool wel goed begrijpen voordat zij met de radialen aan de slag gaan.



Figuur 4.6.: Het tandrad (icoon)

4.4.2 Les 2

Lesdoelen: De sinusgrafiek kunnen tekenen en begrijpen dat het hier gaat om de hoogte uitgezet tegen de hoek. Hierbij maken de leerlingen een koppeling naar de eenheidscirkel.
Connectie met sensible mathematics: Het tandrad (Fig. 4.6) is het icoon voor draaien over de eenheidscirkel.
Bijzonderheden: Dit is niet de eigen klas van Docent 4, maar die van een collega.

Verloop

Ook in deze les is er een afwisseling van korte uitlegmomenten van de docent en het zelfstandig werken van de leerlingen aan het werkblad. De docent opent de les waarbij hij herhaalt wat tijdens Les 1 is geleerd. Hij besluit ermee dat de grafieken exact dezelfde zijn als op de x-as niet het aantal tanden, maar de afgelegde weg staat. Hieropvolgend construeert hij de grafiek op het bord met op de x-as de afgelegde weg (0, π en 2π staan aangeduid). De leerlingen mogen nu zelf werken aan de eerste opgaven. Daarna is er weer een introductie van de docent. Hij heeft een cirkel op het bord staan, en laat hierin met een gekleurde cirkelboog een afgelegde weg zien. Bij deze afgelegde weg hoort een bepaalde hoogte die ook is aangegeven. Hij geeft aan dat deze hoogte op verschillende plaatsen weer

Figuur 4.7.: Aansluitende evaluatie op locatie

terug komt en laat dit met een applet in de cirkel en in de hoogtegrafiek zien, wat erg duidelijk is. Hij laat ook een punt zien met afgelegde weg $\frac{1}{3}\pi$ en vertelt dat hier ook een hoek bij hoort. Daarna gaan de leerlingen weer aan het werk. De docent bespreekt vervolgens weer de opgaven en gebruikt voor het eerst het woord 'sinus' met daarbij de uitdrukking hoogte $= \sin\alpha$. Hij legt uit dat je voor enkele gevallen de bijzondere driehoeken kunt gebruiken om deze waarden te vinden. De laatste opgaven zijn als huiswerk meegegeven.

Observaties

De leerlingen werken hard en overleggen met elkaar. Zij zijn gewillig met het werkblad aan de slag. De leerlingen merken op dat de grafieken hetzelfde zijn; of nou het aantal tandjes op de x-as staat, of de afgelegde weg. De leerlingen lijken de uitleg van de docent niet moeilijk te vinden. Dat bij de afgelegde weg $\frac{1}{3}\pi$ een hoek hoort van 60° weten zij direct te beredeneren.

Discussie

Er werd actief door de leerlingen gewerkt. Ook hebben zij veel samengewerkt en daardoor veel over het onderwerp gecommuniceerd. Er bestond een mooie interactie tussen de docent en de leerlingen. De werkvorm was gelijk aan die van de vorige keer, echter werd er meer overlegd door de leerlingen nadat de docent dit uitdrukkelijk heeft aangemoedigd. Opgave 10 (met als afgelegde weg 'het abstracte α') werd door de leerlingen nog niet helemaal goed begrepen en daarom heeft de docent een duidelijke applet gebruikt om dit klassikaal extra aandacht te geven.

4.5 Docent 5

4.5.1 Les 1

Lesdoelen: Een gevoel krijgen voor de hoogtegrafiek en deze kunnen tekenen met op de x-as het aantal tanden. Deze hoogtegrafiek is direct gekoppeld aan de cirkel.
Connectie met sensible mathematics: Het tandrad (Fig. 4.6) is het icoon voor draaien over de eenheidscirkel.

Verloop

De les bestaat uit een klassikale uitleg van de docent waarin hij een leergesprek voert met de leerlingen. Regelmatig haalt hij een leerling naar het bord en gaat met de klas in discussie. Tussendoor zijn de leerlingen steeds aan de slag met de werkbladen. De docent opent de les met een introductie van het tandrad en stelt de vraag wat de hoogte van het punt zal zijn als je het rad over 9, 3 of 39 tanden draait. Hierna gaan de leerlingen met het werkblad aan de slag. Na een tijdje worden centraal de antwoorden besproken, waarbij leerlingen de beurt krijgen. Als leerlingen antwoorden geven vraagt de docent steeds op een goede manier door hoe zij aan de antwoorden zijn gekomen. De docent geeft nu aan dat de hoogte in de grafiek gaat worden uitgezet. Op het bord wordt naast een tandrad de grafiek met verschillende hoogtes getekend door een leerling. Hiervoor wordt een dia gebruikt die is afgebeeld op een whiteboard waardoor de leerlingen als het ware 'op de dia' kunnen tekenen. Op de x-as staat het aantal tanden en op de y-as de hoogte. Als de leerling is uitgetekend, kan de docent de slide tonen en is te zien in hoeverre de leerling de grafiek goed benaderd heeft. Er staan geen waarden bij de y-as; de schaal is hetzelfde als die van de cirkel die ernaast staat. Hierna maken de leerlingen zelf weer de opgaven van het werkblad. Op het eind van de les wordt er kort iets uitgelegd over de afgelegde weg, de docent haalt hiervoor de formule van de omtrek van een cirkel erbij. De opgaven op het werkblad die overblijven dienen als huiswerk.

Observaties

De leerlingen vinden het niet moeilijk en geven graag direct antwoord. Één leerlinge loopt uit zichzelf naar het bord om te laten zien dat ze het begrijpt. Er heerst een gezellige, maar op het juiste onderwerp gerichte sfeer. De leerlingen weten direct dat als het rad 39 tanden wordt gedraaid, het op dezelfde hoogte zit als een rondje ervoor. Bij een vraag over gelijke hoogten in de grafiek antwoordt een (autistische) leerling dat het enige punt waarbij dat kan, het punt 0 is, omdat daar zowel de hoogte als de afstand beide hetzelfde zijn. De leerlingen klinken wat onrustig, maar dat komt omdat zij allen hardop aan het meedenken zijn. Een leerling loopt naar voren om uit te leggen hoe de hoogtegrafiek ontstaat. Ze legt het zeer zorgvuldig en duidelijk uit en dat geeft een goede sfeer in de klas. De leerlingen waarderen dit overduidelijk. Een andere leerling komt uit zichzelf erbij staan om het af te maken. Vloeiend tekent hij de grafiek door de punten die de vorige leerling getekend had om de grafiek te laten ontstaan. De leerlingen gaan hierna nog hard aan het werk met de overige opgaven van het werkblad.

Discussie

De koppeling tussen de eenheidscirkel en de grafiek is duidelijk gemaakt, doordat leerlingen steeds hoogten aanwijzen in de cirkel en vervolgens uitzetten in de grafiek. De leerlingen konden deze vorm van lesgeven goed aan en zijn duidelijk aan het denken gezet. Het tandrad als icoon lijkt een succes. De leerlingen zeggen het niet moeilijk te vinden en geven aan dat het tandrad handig is om mee te werken. Het tandrad zou direct de juiste ideeën oproepen.

4.5.2 Les 2

Lesdoelen: De functie $\sin x$ aan de hoogtegrafiek koppelen.
Connectie met sensible mathematics: Het tandrad (Fig. 4.6) is het icoon voor draaien over de eenheidscirkel.

Verloop

De docent opent de les met een korte samenvatting van Les 1. Hij besluit ermee dat voor verschillende aantallen tanden de vorm van de hoogtegrafiek toch hetzelfde lijkt en zegt: "Vandaag gaan we de functie ontdekken die de vorm van de grafiek beschrijft". Twee leerlingen komen naar voren die op het bord een grafiek in het assenstelsel tekenen, één doet dit voor een rad met 18 tanden en de ander voor een rad met 36 tanden. Hierna wordt een belangrijke stap gezet: Waar eerst nog het aantal tanden op de x-as stond, komt nu de afgelegde weg te staan. Nu wordt het dus een afstand-hoogtegrafiek. De docent overlegt met de leerlingen heel kort wat het verschil is met wat zij voorheen deden. Dan gaan de leerlingen weer enthousiast verder met een werkblad waarbij zij met elkaar overleggen. Hierna laat de docent een enkel punt op een cirkel zien, dat hij kan spiegelen en draaien. Een leerling die bij het bord staat vertelt welke nieuwe punten (met de specifieke coördinaten) dat oplevert. De docent laat nu een

Figuur 4.8.: Leerlingen overleggen en observant luistert mee

plaatje zien van het tandrad met daarin een hoek getekend, waarmee de stap van afgelegde weg naar graden wordt gemaakt. De leerlingen gaan vervolgens weer zelf aan het werk. Op het eind van de les laat de docent zien hoe met de sinus de hoogte kan worden bepaald. De rest van de les wordt gebruikt om nog aan de laatste opgaven te werken.

Observaties

Twee leerlingen gaan op het bord de grafiek tekenen behorende bij een rad met 18 en 36 tanden. De eerste leerling doet het heel precies met veel verschillende punten, zoals dat in Les 1 is voorgedaan. De tweede leerling gebruikt alleen de hoogtes 0, 1 en -1 en tekent dan hierdoor de grafiek. Als de stap naar afstand-hoogtegrafiek wordt gemaakt concluderen de leerlingen dat het gewoon hetzelfde is als wat zij voorheen ook al gezien hebben. Als het spiegelen en draaien aan bod is gekomen, bedenken de leerlingen zelf dat de functie periodiek is en dat er dus herhaling in voorkomt. De leerlingen werken gezellig, maar gericht op de stof en er zijn leuke discussies tot stand gekomen.

Discussie

De docent geeft aan wat te snel door de dia's heen te zijn gegaan. De leerlingen lijken het over het algemeen wel goed begrepen te hebben, dus misschien was het tempo niet verkeerd. Weer is te zien dat leerlingen moeite hebben met rekenen met het abstracte α. Enkele leerlingen hadden moeite met deze opdracht en deze opdracht had daarom nabesproken moeten worden in de les. Dit is de docent vergeten en hierdoor is ook het opstapje gemist naar de symmetrie en rekenregel $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$.

4.6 Samenvatting

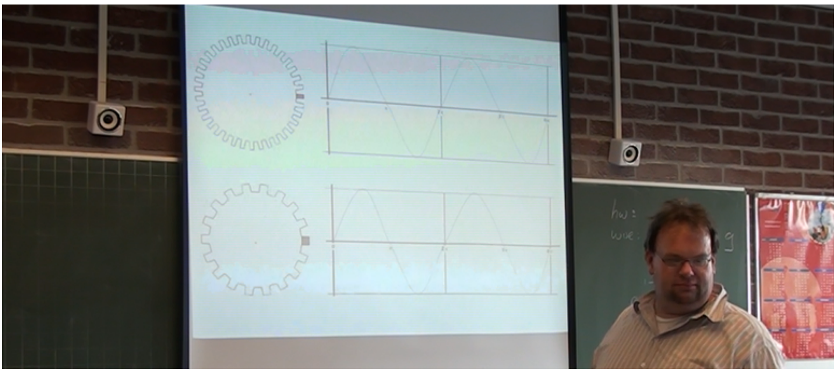
In de lessen van Docent 1 en 2 wordt er vanuit de SOSCASTOA definitie verder gewerkt naar de uiteindelijke nieuwe definitie "$\sin\alpha =$ y-coördinaat". De standaarddriehoeken zijn hierbij ook belangrijk omdat deze enkele exacte waarden voor de sinus op leveren. Als icoon wordt de windmolen gebruikt, om de spiegelingen en symmetrieën van de sinus in te leiden. Beide docenten hebben gebruik gemaakt van dezelfde werkbladen maar hebben wel een verschillende uitleg gegeven. Waar Docent 1 de leerlingen veel op weg hielp, door bijvoorbeeld de term 'spiegelen' te noemen alvorens de leerlingen nieuwe punten en coördinaten moesten zoeken, was het bij Docent 2 de bedoeling dat leerlingen zelf op deze ideeën kwamen. Bij Docent 2 vindt ook een leergesprek plaats, waar leerlingen met zowel goede als foute antwoorden de beurt krijgen. Op de werkbladen moeten de leerlingen punten spiegelen en hiervan de coördinaten bepalen. Daarna is het de bedoeling dat ze van deze punten de hoek met de positieve x-as bepalen. In de besprekingen achteraf komt naar voren dat het invullen van coördinaten het denken van de leerlingen niet stimuleert. Ook het tekenen van een grafiek met behulp van een tabel is een invuloefening. Na het tekenen van de grafiek wordt de windmolen ook niet meer aangehaald om de symmetrieën in de grafiek te benoemen. Hierdoor is het icoon ter discussie komen te staan: Het molentje wordt te statisch bevonden. Daarnaast wordt ook geconcludeerd dat de standaarddriehoeken later kunnen worden aangehaald. De docenten vinden het belangrijker dat leerlingen eerst gevoel krijgen voor de grafiek: Dat er een hoogte wordt uitgezet en dat het een vloeiende, periodieke beweging is. De exacte waarden komen later wel.

Docent 3 heeft het heel anders aangepakt. Het icoon is een waterrad dat half onder water staat en hierdoor ook al logischerwijs de 'negatieve hoogte' introduceert. De leerlingen gaan de hoogte van een punt op het rad volgen als de kraan wordt aangezet. De leerlingen voelen deze beweging intuïtief al goed aan, daarom past het icoon goed bij sensible mathematics. Het simultaan bewegen over de eenheidscirkel en het uitzetten van de grafiek geeft een duidelijke koppeling tussen de cirkel en de grafiek. Leerlingen noemen bij de grafiek uit zichzelf een aantal begrippen als symmetrie, herhaling, toppen en periode. Leerlingen worden aan het werk gezet: Ze tekenen driehoeken en meten hiervan de hoek en de hoogte. Hierdoor zien ze goed in dat de hoogte en hoek iets met elkaar te maken hebben. De grafiek in het eerste kwadrant kan worden berekend met SOSCASTOA. De docent maakt een nieuwe afspraak: De hoogtegrafiek wordt vanaf nu de sinusgrafiek genoemd. Later wordt dit geformuleerd als: "De hoogte in de eenheidscirkel is per definitie de sinus van de bijbehorende hoek". De cosinus wordt geïntroduceerd als breedtegrafiek, maar de leerlingen tekenen de cosinus met een trucje (een spiegel). Hierdoor is het een invuloefening geworden, waarbij de leerlingen geen koppeling maken met de breedtegrafiek.

Ook docenten 4 en 5 werken met een icoon dat beweging suggereert: Een tandrad. Deze beweging is intuïtief goed aan te voelen en past daarom bij sensible mathematics. Beide docenten gebruiken hetzelfde lesmateriaal, in de vorm van slides, applets en werkbladen. De applets geven het geheel een goede visuele ondersteuning. In de werkbladen staan vragen zoals "Wat is de hoogte na draaiing over 639 tanden?" en opdrachten zoals het tekenen van hoogtegrafieken. Er wordt gerekend aan tandwielen met een verschillend aantal tanden. De leerlingen tekenen eerst een hoogtegrafiek waarbij op de x-as het aantal tanden is uitgezet waarover gedraaid is. Later wordt de afgelegde weg geïntroduceerd en uitgezet op de x-as. De werkvorm is ook in beide klassen hetzelfde. Er is steeds een afwisseling tussen uitleg/bespreking en zelfstandig werken. Overigens laat Docent 5 bij de bespreking vaker leerlingen aan het woord, waarbij de leerlingen elkaar een goede uitleg geven. In het begin tekenen de leerlingen de hoogtegrafieken zonder getallen voor de hoogte: Het tandwiel dat naast het assenstelsel staat wordt gebruikt als referentie. Doordat de tandwielen naast het assenstelsel staan is er een goede koppeling tussen cirkel en grafiek. De symmetrie, zoals die door Docent 1 en 2 met behulp van het windmolentje werd behandeld, komt in de tweede les aan bod. Hier wordt zowel de symmetrie in de cirkel als in de grafiek duidelijk en samen op één slide getoond. De term sinus valt pas aan het eind van de tweede les als de leerlingen dus al een hele tijd met 'hoogtegrafieken' werken. Er wordt dan de volgende definitie gebruikt: "hoogte $= \sin\alpha$" De leerlingen maken ook al een start met het omrekenen van radialen naar graden.

5 Analyse

De verwerking van de lessen is in het vorige hoofdstuk weergegeven. Hierin staat gedetailleerd beschreven hoe het verloop van de lessen is geweest, wat de belangrijkste observaties waren en op welke manier de docenten dit vervolgens bediscussieerd hebben. In dit hoofdstuk zullen de lessen worden geanalyseerd met behulp van de theorieën over de niveaus van conceptbeheersing en de didactische fasen zoals beschreven in Paragraaf 2.2. Er zijn twee tabellen gemaakt waarin resp. de activiteiten van de leerlingen en de activiteiten van de docenten hiermee in kaart worden gebracht. Van beide tabellen is een samenvatting geschreven, waarin de belangrijkste processen worden belicht.



Figuur 5.1.: Het tandrad als icoon

5.1 Niveaus van conceptbeheersing

In de tabel op de pagina hiernaast zijn de activiteiten van de leerlingen onderscheiden in de niveaus van conceptbeheersing. Deze zijn per les onderscheiden. In de eerste kolom staat om welke les het gaat, waarbij het eerste getal de docent betreft, analoog aan de benaming uit Paragraaf 3.1. Het tweede getal zegt of het hier om Les 1 of Les 2 gaat.

De niveaus *waarnemen*, *bewerken* en *redeneren* zijn gebruikt zoals deze zijn uitgelegd in Paragraaf 2.2. Deze theorie wordt gebruikt om te bepalen op welk niveau van beheersing van het concept sinus de leerlingen zitten. De stadia *waarnemen* en *bewerken* geven aan dat de leerling nog niet op het conceptuele niveau zit. *Redeneren* is het hoogste niveau en vraagt ook de meeste wiskundige denkactiviteiten. In het stadium redeneren zijn de leerlingen op een niveau aangekomen waarbij ze zelfstandig of met elkaar wiskundig over de sinusfunctie nadenken.

Het is duidelijk te zien dat de leerlingen bij Docenten 1 en 2 vooral in de eerste twee stadia opereerden. De leerlingen hebben over de sinusfunctie niet of nauwelijks geredeneerd, waardoor zij zeer waarschijnlijk geen gevoel voor de functie ontwikkeld hebben. Dit is door de docenten in de nabesprekingen genoemd en 'gevoel voor de functie krijgen' werd hierna een lesdoel. Duidelijk werd dat de introductie van de sinusfunctie met behulp van het molentje niet de juiste manier was.

Na de eerste plenaire bijeenkomst is dit goed opgepakt. Docent 3 heeft de leerlingen gevoel voor de hoogtegrafiek laten creëren doordat het waterrad goed inspeelt op de intuïtie. Ook het simultaan op het bord tekenen van de hoogtegrafiek en het meten van hoogtes in driehoeken draagt hier aan bij. Deze activiteiten behoren dan wel niet tot de categorie *redeneren*, maar geven een mooi opstapje naar deze categorie.

Tijdens de lessen van Docenten 4 en 5 worden de leerlingen uitgedaagd met een werkblad. De vragen op het werkblad zijn dusdanig geformuleerd dat de leerlingen een sterk gevoel voor de hoogtegrafiek creëren. Doordat dit in de lessen zo goed gebeurt voor de hoogtegrafiek, kan als huiswerk zelfs worden meegegeven om de breedtegrafiek op 'zo'n zelfde wijze' te maken.

	Waarnemen	Bewerken	Redeneren
1.1	Docent spiegelt een punt waardoor molentje ontstaat.	Coördinaten invullen. Molentje vanuit nieuw punt reproduceren. Hoeken invullen.	Niet
1.2	Docent laat zien dat $\sin\alpha =$ hoogte en maakt hier definitie van.	Lln vullen tabel in en tekenen grafiek.	Niet
2.1	Docent construeert molentje.	Lln bepalen coördinaten en sinus van aantal hoeken.	Docent vraagt of $\sin 120°$ bestaat.
2.2	Docent geeft definitie sinus en introduceert grafiek.	Lln tekenen sinus.	Niet
3.1	Grafiek komt op het bord door samenwerking docent-leerling. Overstap x-as van tijd naar graden. Nieuwe definitie sinus.	Driehoeken tekenen en hoogtes meten.	Hoogtegrafiek schetsen. “Hoe halen we tijd uit de grafiek?” “Wat valt op aan de grafiek?” “Hoe noemen we deze grafiek?”
3.2	Grafiek op bord dmv spiegelen en draaien en heet $\sin\alpha$. Cosinus is breedtegrafiek.	Lln vullen tabel in en tekenen grafiek van zowel sinus als cosinus.	“Geldt $\sin\alpha =$ hoogte als niet in eenheidscirkel wordt gewerkt?”
4.1	Korte blokken uitleg.	Hoogtegrafiek tekenen mbv tabel. Rekenen aan aantal tanden. Omtrek cirkel berekenen.	Werkblad: “Wat is de hoogte na 369 tanden?”. In de les zagen de lln de hoogtegrafiek, het hw is de breedtegrafiek te tekenen.
4.2	Korte blokken uitleg. Grafieken met op de x-as de afgelegde weg zijn gelijk ongeacht het aantal tanden. Docent maakt koppeling van afgelegde weg naar hoek. Hij geeft hoogte $= \sin\alpha$.	Lln lezen hoogten en afstanden af uit de grafiek en het rad. Lln rekenen afgelegde weg om naar hoek, rekenen met SOSCASTOA en standaarddriehoeken. Grafiek tekenen in GR.	Werkbladvragen zetten lln aan het denken over periodiciteit en symmetrie. Lln gaan werken met abstracte waarden h en α.
5.1	Korte blokken uitleg. Animatie van rollend tandrad op het bord.	Hoogtegrafiek tekenen mbv tabel. Rekenen aan aantal tanden. Omtrek cirkel berekenen.	Lln voor het bord leggen hun redenaties uit. Lln koppelen zelf de cirkel aan hoogtegrafiek. Werkblad: “Wat is de hoogte na 369 tanden?”. Het hw is de breedtegrafiek te tekenen.
5.2	Korte blokken uitleg. SOSCASTOA-uitleg op het bord. Animatie van twee tandraden met verschillend aantal tanden die een kwartslag draaien.	Lln lezen hoogten en afstanden af uit de grafiek en het rad. Lln rekenen afgelegde weg om naar hoek, rekenen met SOSCASTOA en standaarddriehoeken. Grafiek tekenen in GR.	De lln leggen het huiswerk en nieuwe opgaven uit in een leergesprek aan medelln.

5.2 Didactische fasen

In de tabel op de pagina hiernaast zijn de activiteiten van de docenten onderverdeeld in de didactische fasen. Deze zijn per les onderscheiden. In de eerste kolom staat om welke les het gaat, waarbij het eerste getal de docent betreft, analoog aan de benaming uit Paragraaf 3.1. Het tweede getal zegt of het hier om Les 1 of Les 2 gaat.

De fasen *doen*, *icoon* en *symbool* zijn gebruikt zoals deze zijn uitgelegd in Paragraaf 2.2. In eerste instantie zullen de leerlingen gevoel voor de sinusfunctie moeten ontwikkelen in de categorie *doen*. Dit behoort met behulp van de categorie *icoon* te gaan, dat de leerlingen helpt met het herkennen van de belangrijke kenmerken van het concept. Uiteindelijk is het doel dat de leerlingen het *symbool* ("$\sin\alpha$") zullen gebruiken om de sinusfunctie aan te duiden. Als dit stadium in volle overtuiging behaald is, zullen zij het icoon kunnen loslaten.

In de eerste paar lessen waren de leerlingen vooral aan het produceren en werden niet tot wiskundig denken aangezet. Toen deze lessen opnieuw werden gegeven ging dit echter steeds beter, doordat er klassikaal interessante vragen werden gesteld en er discussies op gang gebracht werden die de leerlingen duidelijk zichtbaar wiskundig lieten nadenken. Hiermee werd gevoel voor het *icoon* ontwikkeld, waardoor zij in de toekomst de overstap naar het *symbool* sneller kunnen maken. Tijdens de lessen van Docent 4 zijn het niet de klassikale discussies geweest die hebben aangezet tot wiskundig nadenken, echter zijn de vragen die op de werkbladen werden gesteld wel van die kwaliteit. Tijdens de lessen van Docent 5 zijn de klassikale discussies en goede werkbladen zelfs beide gebruikt.

In de eerste paar lessen is het molentje gebruikt als *icoon* voor de symmetrie in de eenheidscirkel. De docenten werd duidelijk dat dit geen goede keuze is geweest. Vanwege de statische representatie van het icoon, het directe gebruik van exacte waarden en bijzondere driehoeken, werd niet bereikt dat leerlingen de belangrijkste kenmerken van de sinus, zoals vloeiendheid en periodiciteit, inzagen. Daarom werd er overgestapt naar het waterrad en Docent 4 koos voor vervolgens voor een tandrad, mede omdat hij hiermee radialen wilde introduceren met behulp van de afgelegde weg.

Duidelijk is dat de sinusfunctie door alle docenten is geïntroduceerd, echter lijkt het zo te zijn dat de leerlingen van Docenten 3, 4 en 5 meer gevoel voor het symbool $\sin\alpha$ hebben gekweekt dan die van Docenten 1 en 2.

	Doen	Icoon	Symbool
1.1	Lln reproduceren, en werden niet aangezet tot wiskundig denken. Invuloefeningen brachten geen denkprocessen op gang.	Windmolen als icoon is te statisch, en leidt niet naar sinus. Een vloeiende, draaiende beweging ontbreekt.	Niet in deze les behandeld
1.2	Eenzijdig verhaal van de docent activeert lln niet. Denkvragen zijn nodig.	Koppeling grafiek en windmolen ontbreekt omdat grafiek vanuit tabel wordt gemaakt.	Met SOSCASTOA laten zien $\sin\alpha = y$-coördinaat, dan ook voor andere kwadranten.
2.1	Docent zou meer met lln moeten discussiëren over de hoogte.	Icoon heeft geen indruk achter gelaten en windmolen als icoon is te statisch.	Niet in deze les behandeld
2.2	Bespreking klassikaal met foute én goede antwoorden brengt leergesprek op gang.	Geen koppeling tussen windmolen en grafiek, omdat grafiek vanuit tabel wordt getekend.	Lln bedenken niet uit zichzelf andere betekenis van $\sin\alpha$, dit moet gestuurd worden.
3.1	Schetsen hoogtegrafiek doet nadenken. Denkvragen tussendoor zijn nuttig, bijv. benoem vorm en eigenschappen grafiek. Het meten aan hoeken en hoogte geeft gevoel.	Sterke koppeling tussen waterrad en grafiek door simultaan tekenen.	Gezamenlijk bedenken grafieknaam is een opstap naar andere betekenis van symbool $\sin\alpha$.
3.2	Lang verhaal zonder denkvragen activeert niet. Tekenen cosinusfunctie is nu invuloefening. Lln weten misschien niet eens dat ze de breedtegrafiek tekenen.	Waterrad komt in deze les niet terug.	De betekenis van $\cos\alpha$ kan beter worden ontdekt door lln met analogie van sinus.
4.1	Samenwerken lln leidt tot redeneren.	Tandrad lijkt sterk icoon. Tandrad direct naast assenstelsel geeft gevoel voor de hoogtegrafiek. Logische introductie afgelegde weg, nadeel is tanddikte.	Niet in deze les behandeld
4.2	Werkblad bevat goede denkvragen.	Tandrad geschikt voor koppeling met sinusgrafiek eigenschappen (periodiciteit, toppen, etc.)	Introductie $\sin\alpha$ volgt pas nadat lln hoogtegrafiek begrijpen. Hierdoor zit voorkennis SOSCASTOA niet in de weg.
5.1	Lln leggen veel voor het bord uit en moeten er dus goed over nagedacht hebben.	Lln vinden het tandrad handig om mee te werken.	Niet in deze les behandeld
5.2	Gelijke ervaringen als bij Docent 4	Gelijke ervaringen als bij Docent 4	Gelijke ervaringen als bij Docent 4

6 Resultaten

Met behulp van de verwerking en analyse zullen in dit hoofdstuk de *resultaten* worden beschreven. Deze resultaten bevatten de relevante leerervaringen van de docenten tijdens het lesson study project betreffende het verhogen van de wiskundige denkactiviteiten van de leerlingen, corresponderend met de onderzoeksvraag (zie Paragraaf 1.3).

We behandelen de leerervaringen van de docenten aan de hand van de kenmerkende punten van lesson study in de categorieën *observaties*, *evaluaties*, *begeleiding*, *aansluiting met wetenschap*, *experimenteren en routines onderbreken* en *netwerkleren*.

6.1 Observaties

Gedurende het lesson study project hebben de observanten kunnen ondervinden welke opdrachten leerlingen wiskundig aan het denken zetten en welke opdrachten dit juist niet voor elkaar krijgen. Een voorbeeld hiervan is dat observanten hebben ontdekt dat het tekenen en meten in driehoeken leerlingen helpt te beseffen dat de hoogte een functie is van de hoek. Dit wiskundig denken wordt niet bereikt vanuit de aanpak met de standaarddriehoeken. Hier ondersteunen de bevindingen uit de observaties de theorie van sensible mathematics: Eerst moet er bij de leerlingen een gevoel voor het concept ontstaan, later kan dit geformaliseerd worden in formuletaal (symbool).

6.2 Evaluaties

Tijdens de nabesprekingen op locatie en de bijeenkomsten zijn er voor de docenten veel leermomenten geweest. Hier is onder andere uit naar voren gekomen dat de docenten het belangrijk vinden dat de eenheidscirkel en hoogtegrafiek sterk aan elkaar gekoppeld worden. In 5 vwo lopen leerlingen nogal eens vast op het concept sinus, omdat leerlingen de sinus in formuletaal niet meer kunnen koppelen aan de beelden van de eenheidscirkel en grafiek. Om dit te voorkomen is het dus belangrijk om in 4 vwo bij de introductie van het concept veel te schakelen tussen eenheidscirkel, grafiek en formule. Aan de hand van de evaluaties is gebleken dat je dit goed kunt bereiken door het construeren van een hoogtegrafiek doordat de docent rondjes over de eenheidscirkel gaat, terwijl een leerling de hoogte uitzet en tegelijk naar rechts loopt. Iedereen heeft kunnen zien hoeveel waarde deze methode in de praktijk heeft. Het team heeft samen bevonden dat het wiskundige denken van de leerlingen nog wordt versterkt als zij hieraan voorafgaand individueel een schets maken van hun verwachting van hoe de grafiek eruit komt te zien. Als leerlingen het begrip sinus nog niet wordt aangereikt, maar eerst een "hoogtegrafiek" moeten schetsen, dan hebben de leerlingen de ruimte om vrij wiskundig te denken, zonder dat zij gelimiteerd worden door de sinus uit hun voorkennis het al bekende concept SOSCASTOA. Daarnaast blijkt dat het tekenen van de grafiek vanuit een tabel juist niet aanzet tot wiskundig denken, omdat het een procedurele invuloefening is gebleken.

6.3 Begeleiding

De begeleiding van het lesson study project zorgt ervoor dat docenten steeds gericht blijven op het doel: De leerlingen wiskundig laten denken. In de bijeenkomsten geven de begeleiders hun mening over de opdrachten en of deze opdrachten het gewenste effect hebben. Ook helpen de begeleiders de docenten met veel ideeën, zoals Docent 5 aangeeft: "Verder is er een voortreffelijke input vanuit de UT door hun medewerkers die congressen bezoeken, literatuur aanreiken... kortom die de markt volgen." Begeleiders spelen ook een belangrijke rol in het aanreiken van wetenschappelijke kennis. Zo was het nuttig dat de begeleiders de theorie over *sensible mathematics* hebben ingebracht. Dit vormde een goed opstapje naar het ontwerpen van een les waarin de leerlingen wiskundig aan het denken gezet werden.

6.4 Aansluiting met wetenschap

De docenten zijn bewust bezig geweest leerlingen wiskundig aan het denken te zetten met als handvat de theorie over *sensible mathematics*. In de loop van het proces hebben de docenten ook geleerd hoe ze dit op de juiste manier kunnen toepassen. Zo bleek in de eerste lessen dat de werkbladen niet het juiste denkproces op gang zetten. Dit had onder andere tot gevolg dat de leerlingen de werkbladen als losse oefeningen zagen en de verbanden (met het icoon) hebben gemist. Daaruit concludeerden de docenten dat er door de leerlingen niet voldoende wiskundig was nagedacht. Lesson study biedt de docenten een goede mogelijkheid om de wetenschap in de praktijk te testen, omdat er meerdere ontwerpen kunnen worden gemaakt op basis van dezelfde theorie en deze allemaal getest kunnen worden.

6.5 Experimenteren en routines doorbreken

Lesson study kan docenten de mogelijkheid bieden om hun routine te doorbreken. In deze lesson study werd met name tot doel gesteld de leerlingen wiskundig te laten denken. Dit vraagt om een hele andere didactiek. Het is voor docenten lastig een nieuwe didactiek te gebruiken waarin zij niet in 20 minuten het hele verhaal mogen vertellen, maar de leerlingen handvatten moeten geven om zelf de stof te ontdekken. Door experimenteren hebben de docenten ondervonden dat er met deze manier van lesgeven ook resultaat kan worden geboekt. Zo zegt Docent 2: "Ook leer je er erg goed van om te coachen als docent, in tegenstelling tot doceren. Dat leerlingen zelf nieuwe stof ontdekken is prachtig, maar wel tijdrovend". De lesson study heeft geholpen om docenten bewust te maken van andere didactieken om leerlingen wiskundig te laten denken. Docent 4 geeft aan ook steeds meer bezig te zijn met het denken van zijn leerlingen: "Daar kijk ik nu toch nog meer dan dat ik al deed naar de zienswijze van de leerling. Wat ziet hij in de stof, en wat wil ik dat hij ziet?".

6.6 Netwerkleren

Voor de introductie van de sinus kennen de docenten nu verschillende invalshoeken. Hiermee hebben ze als het ware hun repertoire verbreed. Ze weten, mede door de observaties, ook welke methoden leerlingen het meest prikkelen tot wiskundig nadenken. Naar aanleiding van de lessen van Docenten 1 en 2 kwamen er vruchtbare discussies op gang tijdens de plenaire bijeenkomst. Dit leverde nieuwe, waardevolle inzichten voor het hele team. Dit leidde er zelfs toe dat de docenten hele andere aspecten wilden bereiken in de les. De belangrijkste lesdoelen waren in eerste instantie de leerlingen de symmetrie en exacte waarden leerden kennen. Dit omvatte vooral het reproduceren van kennis. Het leidde niet tot redeneren en wiskundig denken en heeft daarom niet bijgedragen aan het gevoel voor het concept. De docenten vinden het nu veel belangrijker om aan te sluiten op de essentiële kenmerken van de sinus.

Figuur 6.1.: Docenten leren van elkaar

7 Conclusie

De onderzoeksvraag is in Paragraaf 1.3 gesteld:

> “Hoe helpt lesson study de docent om zich dusdanig te professionaliseren dat hij zijn wiskundeonderwijs verbetert door in zijn lessen de wiskundige denkactiviteit van zijn leerlingen te verhogen?”

Deze vraag zal hier beantwoord worden op basis van de analyse, resultaten en enquêtes.

Uit de analyse van de lessen komt duidelijk naar voren dat de deelnemende docenten gedurende het project de lessen steeds meer hebben ingericht met wiskundige denkactiviteiten. Door de activiteiten van de leerlingen in te delen in de niveaus van conceptbeheersing kan worden ingezien dat leerlingen in de eerste paar lessen niet het niveau van *redeneren* hebben behaald, terwijl dat in de latere lessen in steeds grotere mate wel het geval was. De docenten zijn meerdere malen tot inzicht gekomen dat een aantal ideeën niet geschikt is om leerlingen wiskundig aan het denken te zetten, in tegenstelling tot andere. Daarnaast konden we door de activiteiten van de docenten in te delen in de didactische fasen ondervinden dat de docenten een ontwikkeling hebben doorgemaakt betreffende het gebruik van het icoon. Het eerste icoon, het windmolentje, bracht niet de juiste wiskundige denkactiviteiten op gang: de leerlingen konden dit icoon niet gebruiken om verbanden tussen de kenmerken van de sinusfunctie te leggen. Het tandrad en het waterrad deden dat wel. De leerlingen konden met deze iconen een soepelere stap maken naar de sinusfunctie in de didactische fase *symbool*. We zagen dat de leerlingen in de lessen van de eerste paar docenten vooral procedureel bezig waren, terwijl zij bij de andere docenten steeds meer uitdagingen voorgeschoteld kregen waar zij wiskundig aan het denken werden gezet. Hieruit concluderen we dat de docenten zich gedurende dit lesson study project hebben geprofessionaliseerd door de leerlingen tijdens de les steeds meer wiskundig te laten nadenken.

De resultaten laten zien dat lesson study de mogelijkheid heeft geboden deze professionalisering te laten plaatsvinden. De kenmerken van lesson study zijn duidelijk de hoofdingrediënten geweest voor het slagen van de professionalisering van de deelnemende docenten. Zo geeft Docent 3 aan: "dit is 'in my honest opinion' de ENIGE zinvolle manier van professionalisering." Of docenten na het project verder gaan op het ingeslagen pad is persoonlijk en afhankelijk van de schoolcultuur. Docent 6 geeft aan dat hij zijn manier van lesgeven wel veranderd heeft, maar dat het wel lastig is voor hem om dit vol te houden: "Vaak ook moet je toch weer afstemmen met collega's waardoor de veranderingen weer minder worden". Echter geeft Docent 2 aan enthousiast te zijn en vertelt dat hij zijn manier van lesgeven veranderd heeft: "Zeker, lessen richt ik meer in op een manier dat leerlingen zelf ontdekken hoe de nieuwe stof in elkaar zit. Ik bedenk meer manieren van doorvragen en probeer in te schatten hoe leerlingen reageren. Ook is mijn manier van coachen in mijn ogen verbeterd".

8 Discussie

De Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs heeft een visie beschreven voor de vormgeving van het wiskundeonderwijs in de komende jaren. Wiskundige denkactiviteiten bij de leerlingen staan hierin centraal. [Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs, 2007] Logischerwijs zouden docenten hun didactiek hierop moeten aanpassen. Dit is niet altijd eenvoudig. Enerzijds komt dit doordat er een visie van bovenaf wordt opgelegd. Anderzijds is het voor docenten veelal moeilijk te veranderen, omdat het lesgeven voor vele docenten een routine is. Lesson study kan helpen om deze beperkingen te overwinnen. Bij een lesson study project hebben docenten zelf veel inspraak over hoe ze een bepaalde visie of theorie in de praktijk gaan inzetten. Dit verhoogt ook bij de docent de bereidheid om te veranderen. Daarnaast bieden de andere teamleden de docent ook veel steun bij het doorbreken van de routine. In dit onderzoek hebben wij gezien dat lesson study de docent kan helpen de wiskundige denkactiviteiten te verhogen in de les. Daarom adviseren wij scholen om deelname aan lesson study te faciliteren.

De overheid zou lesson study als informele vorm van leren meer moeten ondersteunen, vanwege de effectiviteit hiervan. Deelname van docenten aan lesson study projecten zou daarom volgens ons ook mee moeten tellen voor het lerarenregister.

Het meten van professionalisering is geen eenvoudige opgave. Omdat het gehele traject al doorlopen was, waren er geen mogelijkheden voor een pre-test. Dit maakt het lastig de ontwikkeling van de docent door het lesson study project vast te stellen. Ook hadden we niet de mogelijkheid om de gebruikelijke manier van lesgeven van deze docent te vergelijken met de "nieuwe" manier van lesgeven. Het was nuttig geweest als de docent aan twee klassen had lesgegeven: Een klas met de docent zijn gebruikelijke aanpak, en de andere klas met de les zoals deze door het lesson study team ontwikkeld is. Dan hadden deze lessen ook met elkaar vergeleken kunnen worden. We adviseren dat bij een lesson study project de leerlingen ook een vragenlijst invullen die procedurele en conceptuele kennis toetst. Dit geeft extra handvatten om het effect van de les te kunnen beoordelen. De vragenlijsten zouden dan moeten worden afgenomen direct na afloop van de betreffende les.

We sluiten af met een suggestie voor vervolgonderzoek. Dit onderzoek is gebaseerd op één lesson study project. In de toekomst zouden meerdere lesson study projecten kunnen worden onderzocht. De vraag is dan of de professionalisering een resultaat is van enkel dit project, of dat er een algemene conclusie kan worden gevonden. Daarnaast zou lesson study als professionaliseringsmethode ook kunnen worden vergeleken met andere methoden van professionalisering, zoals studiedagen.

Bibliografie

[Bruner, 1996] Bruner, J. S. (1996). *Toward a theory of instruction*. Cambridge.

[Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs, 2007] Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs, C. T. W. O. (2007). Rijk aan betekenis - visie op vernieuwd wiskundeonderwijs. *Visiedocument*.

[Diepstraten et al., 2010] Diepstraten, I., Wassink, H., Stijnen, S., Martens, R., and Claessen, J. (2010). *Professionalisering van leraren op de werkplek, jaarboek Ruud de Moor Centrum*. Open Universiteit.

[Drijvers, 2011] Drijvers, P. (december 2011). Wat bedoelen ze toch met... denkactiviteiten? *Nieuwe Wiskrant 31-2*.

[Inspectie van het Onderwijs, 2011b] Inspectie van het Onderwijs, I. O. (2010-2011b). De kwaliteit van leraren. *Onderwijsverslag*.

[Inspectie van het Onderwijs, 2011a] Inspectie van het Onderwijs, I. O. (2011a). Alternatieve afstudeertrajecten en de bewaking van het eindniveau bij hogeschool inholland. *Inspectierapport*.

[Isoda, 2010] Isoda, M. (2010). Lesson study: Problem solving approaches in mathematics education as a japanese experience. *Elsevier*.

[Kwakman, 1999] Kwakman, C. H. E. (1999). *Leren van docenten tijdens de beroepsloopbaan*. PhD thesis, Katholieke Universiteit Nijmegen.

[Ministerie van Onderwijs Cultuur en Wetenschap, 2011a] Ministerie van Onderwijs Cultuur en Wetenschap, O. C. W. (2011a). Actieplan beter presteren: opbrengstgericht en ambitieus. *Kamerstuk*.

[Ministerie van Onderwijs Cultuur en Wetenschap, 2011b] Ministerie van Onderwijs Cultuur en Wetenschap, O. C. W. (2011b). Actieplan leraar 2020. *Kamerstuk*.

[Stepanek et al., 2007] Stepanek, J. L., Appel, G., Mitchell, M., Leong, M., and Mangan, M. T. (2007). *Leading lesson study: a practical guide for teachers and facilitators*. Corwin Press.

[Tall, 2012] Tall, D. (2012). Making sense of mathematical reasoning and proof. Research paper.

[Tweede Fase Adviespunt, 2005] Tweede Fase Adviespunt, T. F. A. (2005). Zeven jaar tweede fase, een balans. *Evaluatierapport*.

[van Driel, 2006] van Driel, L. (2006). *Professionalisering in school, een studie naar verbetering van het pedagogisch-didactisch handelen*. PhD thesis, Universiteit Utrecht.

[van Hiele, 1973] van Hiele, P. M. (1973). *Begrip en inzicht: werkboek van de wiskundedidaktiek*. Purmerend.

[van Streun, 2001] van Streun, A. (2001). Het denken bevorderen. *Oratie*.

[Verhoef et al., 2012a] Verhoef, N. C., van Smaalen, D., and Pieters, J. M. (2012a). Elements of lesson study: effects on teachers' professional development.

[Verhoef et al., 2012b] Verhoef, N. C., van Smaalen, D., and Pieters, J. M. (2012b). Sensible mathematics: een zoektocht aan de hand van lesson study.

A Verslagen van de video-opnamen

In deze sectie wordt uitgebreid beschreven wat er tijdens de bijeenkomsten, lessen en evaluaties is gebeurd. Voor deze verslaglegging is gebruik gemaakt van de video-opnamen, met de werkbladen als ondersteuning. Niet alles is beschreven, maar enkel de zaken die gerelateerd zijn aan en in het belang zijn van deze lesson study. De individuen die bij deze lesson study betrokken zijn worden niet bij naam genoemd ter bescherming van hun privacy. Deze individuen zijn beschreven in Paragraaf 3.1. Bij de bijeenkomsten zijn de vier begeleiders en zeven docenten allen aanwezig, tenzij anders is vermeld. Bij de lessen is afzonderlijk genoemd wie de observanten zijn geweest. Alle gebeurtenissen zijn in chronologische volgorde beschreven (zie Paragraaf 3.2).

UT bijeenkomst 1 (16-01)

Afwezig: Docent 7

Tijdens deze eerste bijeenkomst op de UT vindt eerst een evaluatie van de vorige lesson study plaats. Dit neemt het grootste deel van de tijd in beslag. Er wordt een korte start gemaakt met de nieuwe lesson study. Er zullen twee opeenvolgende lessen worden voorbereid, die door zes docenten zullen worden gegeven. De lessen hebben als doel de sinusfunctie te introduceren in een 4 vwo wiskunde B klas. Om de lessen vorm te geven wordt de theorie over 'sensible mathematics' gebruikt. Deze theorie onderscheidt in het leerproces drie stappen om een concept te introduceren. Deze drie stappen zijn het ‘doen’, het ‘icoon’ en het ‘symbool’. Er wordt overlegd hoe deze drie stappen kunnen worden onderscheiden en toegepast tijdens de beide lessen. Er wordt geopperd dat de eenheidscirkel het icoon zou kunnen zijn en men vraagt zich af of de hoeken eerst nog in graden moeten worden gegeven, of dat de radialen direct moeten worden ingevoerd. Deze discussie blijft open. Men is het er over eens dat de les vooral over de symmetrie in de eenheidscirkel zal gaan.

Voor de volgende bijeenkomst wordt afgesproken dat de docenten in tweetallen de twee lessen voorbereiden op basis van de theorie van sensible mathematics. Hieruit worden dus drie keer twee opeenvolgende lessen ontworpen. Deze drie lesseries worden afzonderlijk van elkaar ontwikkeld en kunnen daarom van elkaar verschillen, ondanks dat zij op dezelfde wetenschappelijke achtergrond zijn gebaseerd. De drie tweetallen die deze lessen voor de volgende keer zullen voorbereiden bestaan uit Docent 1 & Docent 2 en Docent 3 & Docent 5 en Docent 4 & Docent 6.

UT bijeenkomst 2 (06-02)

Afwezig: Professional, Docent 7

Er wordt gesproken over de ‘Community of Learners’ (CoL) en lesson study en wat de waarde van zo’n project is voor de docent. Hierover een interessant citaat uit de bijeenkomst:
Administrator: “(...) dat er een bewustwording optreedt van hoe kinderen leren”
Docent 3: “Doordat je een keer zo’n bewustwordingstraject doorgemaakt hebt, dat je vervolgens je lessen gewoon anders doet. (...) Introductie sinus/cosinus; ik vermoed dat als we hier klaar mee zijn, dat dat ook goed gaat. Dit zijn dingen die je als bovenbouw wiskunde docent steeds weer tegenkomt; welke curriculum herzieningen je ook krijgt. Dat heb je dan ineens robuust in je repertoire. Dat is aan alle kanten winst.”

Naar aanleiding van discussies uit de vorige bijeenkomst hebben de docenten in koppels lesideeën voorbereid. Er zijn verschillende ideeën over de benadering van de les. Deze ideeën hebben elk een andere invalshoek voor de introductie van de sinus. Zo pleit iemand ervoor om in de eerste twee lessen de radialen nog volledig buiten beschouwing te laten, terwijl een ander juist direct als allereerste de radialen wil introduceren. Er volgt een korte discussie wat beter is, maar hier wordt uiteindelijk geen besluit over genomen. Een andere discussie begint over de koppeling van de sinus naar de lessen uit de onderbouw; verbind je deze les met SOSCASTOA, of juist niet? De uitwisseling van deze ideeën lijkt vruchtbaar voor de overdenking van docenten. Ook wordt er even gesproken over de koppeling die de docent gemaakt heeft tussen de les en sensible mathematics betreffende de categoriën doen, icoon, symbool.

Niet alle docenten hebben in de tweetallen gewerkt, daarom zijn er uiteindelijk vier lesvoorbereidingen ingebracht. De vier verschillende lesvoorbereidingen zijn grofweg in twee invalshoeken te verdelen:

A: Koppeling vanuit de historie en/of natuurkunde: beginnen met een periodiek verschijnsel en uitbreiden naar sinusfunctie

B: Koppeling vanuit driehoeken en meetkunde: sinus in driehoeken uitbreiden naar cirkel en sinusfunctie

Er is besloten om op basis van beide invalshoeken een lesserie in te richten en dat er dus twee verschillende lesseries worden ontwikkeld. Deze beide lesseries kunnen dan na afloop eventueel met elkaar vergeleken worden. Voor beide lesseries op zich zal er ook een ontwikkeling plaatsvinden, doordat de lesseries meerdere keren worden gegeven en tussentijds dus kunnen worden geëvalueerd en vernieuwd. De docenten zullen opnieuw in twee groepjes de lesvoorbereiding maken. Beide groepjes doen dit op basis van één van bovenstaande invalshoeken A of B. De lessen met invalshoek A zullen door Docent 6, Docent 5 en Docent 4 worden voorbereid en de lessen met invalshoek B door Docent 1, Docent 3, Docent 2 en Rob.

De volgende keer is de laatste bijeenkomst voordat de eerste lessen zullen worden gegeven en geobserveerd. De afspraak wordt gemaakt om voor de volgende keer voor beide invalshoeken de twee lesvoorbereidingen af te hebben.

UT bijeenkomst 3 (05-03)

Afwezig: Vakdidacticus, Docent 5

Er wordt begonnen met een discussie over de eerste les die is ontworpen bij methode B, de meetkundige benadering. De docenten proberen een logische volgorde te bedenken waarin de drie doelen (symmetrie, eenheidscirkel en sinus van een cirkelboog) in de les moeten worden ingepast. Deze drie doelen worden pas na lange tijd concreet benoemd, terwijl het misschien logischer zou zijn geweest om van daaruit te vertrekken. De docenten discussiëren lang, maar komen er uiteindelijk niet helemaal uit in welke volgorde ze het materiaal aanbieden. Ook worden de drie fasen van sensible mathematics ‘doen’, ‘icoon’ en ‘symbool’ niet in de discussie meegenomen. Éénmaal wordt door de lesson study professional geopperd om vragen te formuleren die moeten worden gesteld aan de leerlingen om hun gedachten in beeld te brengen. De docenten lijken dit erg interessant en nodig te vinden, echter wordt een ander onderwerp aangesneden en men komt hier niet meer op terug.

Docent 1 zal komende vrijdag de eerste les geven, zonder dat deze in de bijeenkomst volledig met de groep is uitgewerkt. Er is nog een aantal open eindjes, ontstaan uit niet afgemaakte discussies, waar de docent zelf een invulling aan kan geven. Tijdens de les zal dan blijken welke keuzes er uiteindelijk zijn gemaakt.

Ook wordt nog even tijd besteed aan de eerste les van methode A, met een natuurkundige/historische context. Één van de docenten heeft een heel persoonlijke invulling gegeven aan de les, waarbij echt in de geschiedenis van het begrip sinus wordt gedoken. Dit is wel dusdanig persoonlijk dat het voor de andere docenten niet mogelijk is dit aan te bieden, zij hebben hier niet genoeg kennis voor in huis. Er moet later nog besloten worden hoe deze docent de les dan uiteindelijk in zal vullen.

De vergadering wordt besloten zonder strakke inhoudelijke afspraken over de les gemaakt te hebben. Wel is afgesproken wie er de eerste en/of de tweede les zal bijwonen. Komende vrijdag is Docent 1 zo genoemd ‘de pineut’ om de les te geven. Hij zal dit doen in een klas die hij van een collegadocent overneemt. Hij kent de klas dus niet, op een paar individuele leerlingen na.

Docent 1 Les 1 (09-03)

> Observanten: Professional, Voorzitter, Docent 3, Docent 4 en Docent 7.

Deze les duurde een half uur in verband met herkansingen.

De docent heet de leerlingen welkom en geeft aan dat de leerlingen alles van tafel mogen doen, behalve een pen en/of potlood. De docent geeft eerst een uitleg waarbij de standaarddriehoeken 1, 1, $\sqrt{2}$ en 1, 2, $\sqrt{3}$ worden herhaald. Hierbij benoemt hij ook de stelling van Pythagoras nog even.

Bij de tweede standaarddriehoek introduceert hij een assenstelsel, waarbij het punt linksonder de oorsprong voorstelt. Hiermee worden de coördinaten van het punt rechtsboven klassikaal bepaald. Vervolgens dit punt in vele assen gespiegeld. Aan de leerlingen wordt nu gevraagd op een uitgedeeld werkblad de coördinaten van alle gespiegelde hoekpunten op te schrijven. De leerlingen hebben hier geen moeite mee.

De docent tekent in een nieuw assenstelsel op het bord een eenheidscirkel met daarin een willekeurige rechthoekige driehoek en geeft coördinaten aan de hoekpunten. De leerlingen krijgen de opdracht om zoveel mogelijk andere punten te tekenen waarvan ze de coördinaten zelf kunnen bedenken. De leerlingen gaan met de werkbladen aan de slag. Één leerling begint met het tekenen van nieuwe punten binnen de betreffende driehoek. Hij ziet vervolgens zijn buurman gebruik maken van het spiegelen en volgt zijn voorbeeld op. De leerling ervoor kijkt achterom en volgt het voorbeeld ook op. De leerlingen kijken wel bij elkaar maar overleggen er niet over.

Nu wordt de leerlingen gevraagd om alle hoeken die bij de nieuwe punten horen te benoemen (in graden). In eerste instantie begrijpen de leerlingen niet om welke hoek het gaat, namelijk de hoek die ontstaat tussen het lijnstuk van het punt naar de oorsprong en de positieve x-as. De docent komt langs en ziet dat; hij helpt enkele leerlingen hiermee beter op weg. De leerlingen pikken dit vervolgens op en vullen dan de hoeken eenvoudig achter elkaar in.

De leerlingen krijgen als huiswerkopdracht een werkblad met daarop de eenheidscirkel mee naar huis waarop zij alle coördinaten en hoeken dienen in te vullen zoals zij eerder tijdens de les ook gedaan hebben. De docent meldt hierbij dat ze hier niet langer dan tien minuten aan mogen besteden.

Er is geen evaluatiegesprek opgenomen.

Docent 1 Les 2 (12-03)

Observanten: Voorzitter, Administrator en Docent 4.

Deze les duurde een half uur in verband met herkansingen.

De docent start de les wederom met het herhalen van bijzondere driehoeken. Daaropvolgend laat hij met een geogebra applet zien dat sinus van 30°

altijd gelijk is aan $\frac{1}{2}$, ongeacht de vergroting van de driehoek. Dan schaalt de docent de schuine zijde naar één, zodat de sinus van de hoek gelijk is aan de y-coördinaat van het hoekpunt op de cirkel. Met een geogebra applet laat hij zien dat in het eerste kwadrant van de eenheidscirkel de sinus altijd gelijk is aan de y-coördinaat.

Om dit door te trekken naar het tweede kwadrant, geeft hij een nieuwe definitie van de sinus, waarbij hij aangeeft dat je de 90° driehoek los moet laten: “De sinus van een hoek is de hoogte die hoort bij die hoek in de eenheidscirkel”. Hij laat zien dat je met de hoogte in de eenheidscirkel de sinus kan uitrekenen voor alle hoeken. Hieropvolgend deelt hij een werkblad uit met grafiekpapier. Het derde en vierde kwadrant zijn nog niet ter sprake gekomen. De leerlingen moeten eerst een tabel invullen om er daarna een grafiek mee te tekenen, waar zij ruime tijd voor krijgen. Hier gaan zij direct mee aan de slag. Een leerling fluistert: “Snap jij dit? Dit is echt stóm”. Een andere leerling heeft het boek er open bij liggen. Leerlingen zijn vroeg klaar en beginnen wat verveeld gedrag te vertonen.

De docent neemt dan weer het woord en maakt de grafiek met behulp van een applet in geogebra. Eerst laat hij zien hoe één punt van de grafiek ontstaat. Vervolgens tekent hij door middel van het verschuiven van het punt op de eenheidscirkel de sinusgrafiek. Dit doet hij voor één periode. Leerlingen lijken ongeveer dezelfde grafieken te hebben gevonden.

Ter afsluiting van de les krijgen de leerlingen een blad waarop de eenheidscirkel met alle exacte waarden is afgebeeld mee naar huis.

Er is geen evaluatiegesprek opgenomen.

Docent 2 Les 1 (23-03)

Observant: Administrator

Tijdens UT-bijeenkomst 3 is alleen gecommuniceerd over de aanwezigheid van observanten bij de twee lessen van Docent 1. Wellicht is er daardoor nu slechts één observant aanwezig.

De docent opent de les met een dagopening. Daarna start de wiskundeles. De bijzondere driehoeken komen eerst aan bod om deze voorkennis bij de leerlingen weer paraat te krijgen. Hierbij zet hij de driehoek 1, 2, $\sqrt{3}$ op het bord en tekent er een assenstelsel bij. Hier begint een leerling hard van te zuchten. Over de vraag welke coördinaten het punt rechtsboven heeft moet even worden nagedacht.

In de figuur op het bord worden een aantal spiegelingen van de driehoek getekend met de vraag: “Door gebruik te maken van dezelfde stap als we net gedaan hebben; welke coördinaten horen bij alle andere hoekpunten?”. De leerlingen gaan aan de slag nadat het werkblad door de docent is uitgedeeld. De docent loopt rond om te kijken hoe het gaat en beantwoordt verscheidene vragen. Een leerling vraagt of de afstanden van de driehoeken allemaal hetzelfde zijn. De leerlingen lijken het wel lastig te vinden: “Hoe kun je dit nou weten?” (Misschien komt het doordat de docent het woord ‘spiegelen’ niet genoemd heeft. Dat had Docent 1 in zijn les wel gedaan. (*red.*)) De docent geeft er veel tijd voor, terwijl al redelijk snel de meeste leerlingen het af lijken te hebben en wat om zich heen kijken en kletsen.

Als de docent weer het woord neemt melden de leerlingen dat het heel makkelijk was. De antwoorden van de coördinaten worden direct foutloos gegeven. De docent haalt nu de begrippen sinus en cosinus erbij. Hij geeft het voorbeeld dat $\sin 30^\circ = \frac{\text{overstaande}}{\text{schuine}} = \frac{1}{2}$. De docent vraagt nu de leerlingen om in de figuur de sinus van verschillende hoeken te bepalen. Leerlingen gaan aan de slag en overleggen met elkaar hierover. Een leerling vraagt: “Wat is nou de bedoeling? Weet je al alle hoeken?”. De meeste leerlingen zijn serieus bezig, maar niet allemaal; hen lijkt het niet echt te interesseren.

De docent geeft aan dat hij gezien heeft dat de meeste leerlingen de sinus van 30° en 60° gevonden hebben. De docent wijst naar een hoek van 120° en vraagt of de sinus van zo’n hoek ook zou kunnen bestaan. Een leerling zegt hardop: “Ja misschien wel… van een hoek die groter dan 90° is? Een stompe hoek”. Daarna gaan de leerlingen weer enige tijd zelfstandig verder. Dan vertelt de docent klassikaal dat er een probleem bij 120° ontstaat, omdat er geen rechthoekige driehoek bestaat met een hoek van 120°.

Nu tekent de docent de eenheidscirkel op het bord. Hij deelt vervolgens Werkblad 2 uit waarop een cirkel en een driehoek met hoek van 20° staan afgebeeld. De leerlingen moeten nu zelf de driehoek spiegelen in de x en y-as en de hoeken en coördinaten erbij bepalen. Het is de leerlingen niet duidelijk wat ze nou eigenlijk moeten doen. De leerlingen zijn vervolgens wel serieus aan het werk.

De leerlingen lijken nog niet zo goed te snappen wat de sinus er nou mee van doen heeft. Er is nog niet uitgelegd dat de sinus de hoogte weergeeft in de eenheidscirkel. De docent wil het niet direct weggeven en zal het in

Les 2 pas aan bod laten komen. De leerlingen zijn er nu wat mee aan het stoeien. Een leerling vraagt zich af of hij de stelling van Pythagoras moet gebruiken. Er worden wat dingen uitgeprobeerd en dat gaat zo door tot het einde van de les.

De docent sluit af met mededeling dat het huiswerk voor volgende keer inhoudt dat ze het blad zoveel mogelijk moeten invullen en het weer mee moeten nemen zodat er gezamenlijk naar gekeken kan worden. Een leerling concludeert dat er dus geen huiswerk is.

De observant heeft een kort verslag geschreven over de les. Hieruit blijkt dat de leerlingen inderdaad de opdracht niet goed hadden begrepen. Het idee van de spiegelingen was niet aangeslagen en niemand koppelt de coördinaten aan hoeken. Leerlingen proberen allerlei technieken toe te passen die ze wel beheersen, zo tekenen ze er nog meer driehoeken bij en proberen daarmee bepaalde hoeken te maken. De sinus heeft voor de leerlingen nog geen nieuwe betekenis gekregen in vergelijking met het begin van de les.

Er is geen evaluatiegesprek opgenomen.

UT bijeenkomst 4 (26-03)

Afwezig: Voorzitter, Docent 4 en Docent 5.

Op de helft van deze bijeenkomst is het geluid van de video uitgevallen. Dit duurde ongeveer een half uur waarna de microfoon nieuwe batterijen heeft gekregen. Een half uur van de discussie is daarom niet meegenomen in dit verslag. In de bijeenkomst werd er veel gediscussieerd en dit leidde nog wel eens tot abrupte veranderingen van onderwerp. Daarom zijn de gebeurtenissen gecategoriseerd en niet opgeschreven in chronologische volgorde.

Gebeurtenissen Les 1 van Docent 1 en Les 1 van Docent 2

Docent 1 geeft een beschrijving van zijn les. Hij geeft aan dat het allemaal vrij eenvoudig liep en de leerlingen het begrepen. Het invulblad ging erg snel. Bij de tweede opdracht met de scherpe hoek moesten nieuwe punten worden bedacht. De meeste leerlingen gebruikten hiervoor wederom de windroos, hoewel niet iedere leerling zin had om netjes met geodriehoek te tekenen. Daarna was de laatste opdracht om van elk van deze punten de hoek met de positieve x-as te bepalen. De leerlingen wisten niet zo goed waar de hoeken handig opgeschreven konden worden op het werkblad. Één van de observanten merkt op dat bij deze opdracht grote verschillen tussen de leerlingen te zien waren, sommigen deden het heel gemakkelijk, anderen vonden dit nog lastig.

Bij Docent 2 ging het invullen van de werkbladen minder soepel. Er werd ook een discussie gestart over het bestaan van de sinus van 120°, maar deze discussie werd al snel beëindigd en de nieuwe figuur uitgedeeld. Hierbij vroeg de docent of ze sinussen, hoeken en coördinaten konden vinden. De leerlingen waren nog in het ongewisse wat betreft de sinus en vonden deze opdracht dan ook erg lastig. Om nieuwe hoeken en coördinaten te vinden gebruikte niemand het molentje uit de eerste opdracht. De docent had bewust weinig uitgelegd om uit te proberen wat de leerlingen zelf zouden ontdekken. Het bleek dat dit in de praktijk niet veel opleverde bij de meeste leerlingen.

Twee opvallende verschillen tussen de beide lessen: In de les van Docent 1 wordt duidelijk over spiegelingen gesproken, en de sinus wordt nog niet genoemd. De leerlingen maken ook gebruik van de spiegelingen om nieuwe punten te genereren. In de les van Docent 2 gaat het al wel over de sinus en wordt er niet op spiegeling gewezen. De leerlingen denken er niet uit zichzelf aan dat ze spiegelingen kunnen gebruiken om punten te maken.

Discussie over Les 1 van Docent 1 en Les 1 van Docent 2

Er ontstaat een discussie over het werkblad van de leerlingen. De professional vraagt zich af of het niet teveel een invulopdracht is geweest en of het de leerlingen wel echt aan het denken heeft gezet. De professional benadrukt ook dat als er wordt begonnen met een te makkelijke opdracht, dat leerlingen dan over de volgende opdracht ook niet goed nadenken. Dit kan tot gevolg hebben dat leerlingen de opdrachten ook niet aan elkaar koppelen.

Er wordt besproken hoe de relatie tussen de eerste opdracht met het windmolentje en het uiteindelijke doel de sinusfunctie verbeterd kan worden. Op zich bevat het molentje hiervoor goede elementen: Bij ronddraaien kun je spreken van periodiciteit en er zijn spiegelingen in te zien. Het molentje ziet er echter niet direct vloeiend uit. Er wordt geconcludeerd dat de leerlingen met de huidige werkbladen weinig na hoeven te denken en dat de koppeling tussen de werkbladen mist. Het windmolentje zou niet alleen statisch moeten worden aangeboden, maar er moet draaiing in komen om daarmee ook de eenheidscirkel te construeren. Maar een enkele leerling heeft echt een denkstap gemaakt, bijvoorbeeld de leerling die zich afvroeg of de sinus van 30° hetzelfde is als de sinus van 150°. Het is wel een doel dat leerlingen dit gaan inzien, dat de $\sin x$ gelijk is aan $\sin(180 - x)$, maar hier moet met tussenstappen naar toe worden gewerkt. Hierbij kunnen vragen helpen als: "Op welke plekken zit je op dezelfde hoogte?" of neutraler: "Kun je dan iets over de hoogte weten?". Er wordt ook de vraag gesteld: "Nu hebben we het over de hoogte, wanneer beginnen we dan te praten over hoeken? En coördinaten en breedte?".

Een nieuw idee wordt ingebracht door Docent 3, hij denkt over het gebruik van een waterrad. Omdat je dit rad half onder water kunt zetten, is er dan ook duidelijk sprake van een positieve en negatieve waarde voor de hoogte en daarnaast suggereert het rotatie. Nu komt ter sprake wat de docenten nu eigenlijk als lesdoel zien in Les 1. Is dit wel alleen de symmetrie over brengen, door de leerlingen spiegeling en rotatie te laten zien met het windmolentje? Gezien het uiteindelijke doel is om naar de grafiek van de sinus toe te gaan, moeten meer kenmerken van de sinus worden overgebracht in Les 1. Deze kenmerken zijn bijvoorbeeld periodiciteit, een vloeiende beweging en de rotatie over de eenheidscirkel. Deze discussie geeft weer wat voor de docenten nu de essentiële eigenschappen van de sinus zijn. De periodiciteit komt pas in beeld als bijvoorbeeld gesproken zou worden over het draaien van de windmolen. Er worden nu ook vraagtekens gezet bij het gebruik van zulke specifieke coördinaten zoals dat is gedaan bij de werkbladen.

In de les van Docent 2 was er geen duidelijkheid bij de leerlingen over de sinus bij stompe hoeken. Docent 2: "Bij elke hoek in de eenheidscirkel hoort een hoogte. Hoe zorg je ervoor dat de leerlingen dit aan de sinus gaan koppelen, zonder dat je het zelf voorzegt?". Hij komt zelf met een idee: De leerlingen rekenen steeds de hoogte uit in de eenheidscirkel en ontdekken dat dit steeds gelijk is aan de sinus. En wellicht zullen zij dan het idee krijgen dat dit voor alle hoogten wel kan gelden.

Gebeurtenissen Les 2 van Docent 1

De leerlingen hebben een grafiek van de sinus getekend aan de hand van een tabel, waarbij het aantal graden tegen de hoogte wordt uitgezet. De docenten vragen zich af of de leerlingen wel zouden begrijpen wat een graad hierbij betekent en of een latere stap naar radialen verwarring zou geven. De docenten zijn het er ook niet over eens over de radiaal nu een hoek is, een lengte-eenheid of juist dimensieloos. Het zou logischer kunnen zijn om helemaal geen eenheid te gebruiken en de radialen later direct in te voeren, om discussies in de klas te voorkomen. Een voorbeeld om dit in te vullen zou het tekenen van een grafiek van de hoogte van een ventiel van een wiel dat draait kunnen zijn.

Discussie over Les 2 van Docent 1

De docenten vragen zich af of de leerlingen tijdens het tekenen van de grafiek van de sinus met behulp van de tabel echt begrijpen wat ze doen. Zouden de leerlingen de juiste relatie leggen tussen de coördinaten in de eenheidscirkel, de tabel en de grafiek? Krijgen de leerlingen gevoel voor wat ze hebben gedaan? Het zou een idee zijn om meer met de leerlingen over de grafiek te praten en hierbij een koppeling te maken met de vorige les. Bovendien zouden de leerlingen wellicht zelf de periodiciteit kunnen ontdekken en kunnen beredeneren wat er gebeurt als je verder dan die ene periode zouden draaien. De docenten verwachten dat de leerlingen daar niet al te lang over na hoeven denken.

Discussie over algemene lesvorm: top-down of ontdekkend leren?

Tijdens de bijeenkomst komt regelmatig een discussie over de manier van les geven naar boven. Aan de ene kant zouden de docenten graag de leerlingen aan het werk zetten waarbij een denkproces optreedt en de leerlingen zelf de eigenschappen van de sinus gaan ontdekken. Echter de docenten zijn sceptisch: “Als we zelf gewoon het verhaal in een kwartier of half uur vertellen, dan weten ze het ook wel en dat gaat veel sneller!”. Hierop volgt de vraag of de leerlingen de stof dan ook daadwerkelijk begrijpen. Aan de andere kant wordt de vraag gesteld of leerlingen de juiste denkstappen maken als zij zelfstandig aan het werk gaan. Zullen zij dan wel de juiste ontdekkingen doen en de goede informatie oppikken? Bovendien is het lastig om de leerlingen te coachen die al een paar denkstappen gemaakt hebben, terwijl de rest van de klas nog achter loopt.

Ook wordt aangedragen dat het een probleem kan zijn dat de leerlingen van een docent het niet gewend zijn om zelf aan het ontdekken te gaan. Het is dan de vraag hoe de leerlingen hierop reageren. Het zou voor de docenten die dit niet gewend zijn te doen ook meer voorbereiding vragen om op deze manier les te geven.

Als er over de daadwerkelijke les wordt gesproken, dan wordt er geopperd dat de huidige werkbladen eigenlijk maar een paar kleine opdrachtjes omvatten die de leerlingen gewoon doen zonder dat er veel denkwerk achter zit. Dit wijkt eigenlijk niet veel af van een verhaal waarin de docent gewoon vertelt hoe het zit. De leerling zou eigenlijk zelf alles moeten ontdekken en dat komt in deze opdrachtjes niet naar voren omdat deze te klein zijn om er groots over na te denken. De docenten vinden dat deze les daarom een beetje in het midden zit; de docent vertelt geen verhaal en de leerlingen krijgen geen actieve denkprocessen. Dat is dus niet de bedoeling.

Discussie over het aanleren van het concept sinus

Er wordt gediscussieerd over de manier waarop de sinus kan worden aangeleerd en waarom dit voor leerlingen een moeilijk onderwerp is. Enerzijds is het een lastig onderwerp vanwege de voorkennis uit de onderbouw die de leerlingen hebben. Wil je juist uitbreiden op die voorkennis of is het iets wat je als docent alleen maar in de weg zit? De sinus is ook een lastig concept om aan te bieden omdat er zoveel nieuwe dingen tegelijk komen.

In latere leerjaren hebben de leerlingen met name moeite met de goniometrische vergelijkingen. De leerlingen kunnen de formules moeilijk relateren aan de grafieken die in het vierde jaar behandeld zijn. In de eenheidscirkel is het logisch dat de sinus op verschillende plekken dezelfde waarde geeft. Echter als er een formule wordt gegeven dan vinden ze het lastig die te koppelen aan de eenheidscirkel. Het beeld dat de leerlingen bij de formules hebben heeft te weinig met de hoogte in de eenheidscirkel te maken. Het switchen tussen eenheidscirkel, grafiek en formule lijkt dus een belangrijk aspect in het aanleren van het concept sinus. Daar moet je het dus over hebben tijdens de lessen.

Planning Les 2 van Docent 2

Er wordt overlegd hoe de tweede les van Docent 2 eruit moet komen te zien. De les zou veel bijgesteld moeten worden, omdat de docent het gevoel heeft in de eerste les nog niet veel bereikt te hebben. De leerlingen hebben nauwelijks gevoel gekregen voor het onderwerp. Docent 2 was heel erg gericht op het zelf ontdekken van de leerlingen en gaf hier dan ook weinig sturing in, echter kwamen de leerlingen niet op het juiste pad. Docent 2: "Ik had gehoopt dat ze zelf het verband tussen sinus en hoogte zouden ontdekken. En dat ze zelf de link zouden leggen met hun voorkennis dat de sinus gelijk is aan de overstaande zijde gedeeld door de schuine zijde. De volgende stap die hierop zou volgen is dat de leerlingen in zouden zien dat dit te maken heeft met de hoogte in de eenheidscirkel.” Bovendien zouden de leerlingen in moeten gaan zien dat je ‘over de eenheidscirkel kan lopen’, waardoor een hoek met de positieve x-as wordt gemaakt. Vanuit hier zou de link met de grotere hoeken kunnen worden gemaakt met behulp van de symmetrie. Als eenmaal die hoeken die groter zijn dan 90° zijn ontdekt, dan kunnen we door naar het tekenen van de grafiek.

De tweede les van Docent 2 moet de eerste opvolgen en daarom moeten we verder gaan met de hoek die groter is dan 90°. Docent 2 zou daaropvolgend de leerlingen die de juiste stap gezet hebben klassikaal vragen wat ze hebben gevonden. Volgens Docent 1 voelt dit aan alsof dan de leerlingen eruit worden gehaald die precies dat verhaal gaan vertellen wat de docent anders zelf verteld zou hebben. De professional geeft aan dat je ook leerlingen een stem kunt geven die het niet goed gedaan hebben. De docenten zijn huiverig voor het inbrengen van verkeerde ideeën in de klas. De professional oppert dat je ook van fouten leert, en dat je dus best misconcepten in de klas kan brengen om er van te leren. Hier blijven gemengde gevoelens over.

Docent 2 wil in Les 2 bereiken dat de leerlingen een grafiek van de sinus kunnen tekenen. Het belangrijkste doel is dat de sinus, de symmetrie en de eenheidscirkel aan elkaar worden gekoppeld. Hiervoor zou eerst het begrip van de sinus van een grote hoek moeten worden geïntroduceerd. De stap moet worden gemaakt van de gedachte dat de sinus gelijk is aan de overstaande zijde gedeeld door de schuine zijde naar de gedachte dat de sinus gelijk is aan de hoogte in de eenheidscirkel.

Uiteindelijk legt Docent 2 een stappenplan als basis voor Les 2 voor:

1. De uitkomsten van het werkblad uit de vorige les bespreken.
2. Hiervan de goede en foute ideeën bediscussiëren.
3. Uitleg van idee doortrekken vanuit eerste naar tweede kwadrant.
4. Gezamenlijk kijken welke coördinaten dan horen bij die nieuwe punten in tweede kwadrant.
5. Een vel uitdelen met daarop de eenheidscirkel met alle bijzondere lijnen erin.
6. Nadat de leerlingen deze hebben ingevuld kijken wat de sinus is van de hoeken in het tweede kwadrant.

7. Een link leggen naar het tekenen van de grafiek van de sinus.

Er is nog discussie over hoe de grafiek moet worden geïntroduceerd. Het stappenplan "Het vinden van de coördinaten, het invullen van een tabel en het tekenen van de grafiek" is wellicht te procedureel; de leerlingen zien mogelijk niet wat ze doen. Een mogelijkheid om het denkproces beter op gang te brengen is het schrappen van het invullen van de tabel. De leerlingen kunnen wellicht gewoon gelijk een schets van de grafiek maken. Het gevolg zou zijn dat er meer wordt nagedacht over de vorm van de grafiek. De grafiek ontstaat nu niet meer toevalligerwijs.

Docent 6 geeft een leuk voorbeeld voor het schetsen van de grafiek: de docent staat samen met een leerling voor het schoolbord. Terwijl de docent met het krijtje over de eenheidscirkel gaat, zal de leerling tegelijkertijd de grafiek tekenen op het bord, waarbij hij het krijtje even hoog houdt als de docent en tegelijkertijd naar rechts beweegt.

Planning Les 1 van Docent 3

Om de leerlingen meer aan het denken te zetten en ze niet direct op het juiste pad te zetten met een invulopdracht, wordt geopperd om in de eerste les van Docent 3 te beginnen met de tweede opdracht, en de eerste dus niet te geven. Het coördinaat hoeft ook niet specifiek te zijn, maar kan worden gegeven als (a, b). Om de leerlingen hierbij op het juiste spoor te zetten moet er misschien toch gewerkt worden in de context van een wiel of rad dat draait. Dan gaat het al meer in de richting van draaien terwijl de oorspronkelijke opdracht alleen gericht was op spiegelen. Dit levert ook een betere koppeling op naar de sinusfunctie.

Docent 2 Les 2 (27-03)

Observanten: Vakdidacticus en Docent 1.

Naar aanleiding van de vorige bijeenkomst op de universiteit heeft de docent besloten om dit keer wat nieuws uit te proberen. Al wetende dat een aantal leerlingen niet de gewenste denkstappen hebben gezet, zal hij dit toch klassikaal op het bord gaan behandelen. De docent geeft aan dit normaal niet zo snel te doen. De docent vindt het lastig omdat hij het denkwerk van de leerling niet wil bekritiseren, maar toch de boodschap aan de klas wil geven dat het niet de juiste richting op gaat.

De docent begint de les met de bespreking van het werkblad van de vorige keer en geeft inderdaad eerst een leerling de beurt die niet direct de juiste stappen heeft gezet. Er vormt zich wel een soort 'leergesprek'. Een andere leerlinge roept spontaan dat zij iets anders heeft gevonden, dit komt ook op het bord. De docent probeert nu de antwoorden te sturen in de juiste richting, door te vragen of iemand misschien de link heeft gelegd tussen de eerste en de tweede opdracht. Één leerling zegt dat te hebben gedaan en heeft gevonden dat $\sin 20°$ gelijk is aan $\cos 70°$ en ook dat $\sin 70°$ gelijk is aan $\cos 20°$. De docent beaamt dat dit inderdaad te maken heeft met het spiegelen zoals dat in de eerste opdracht is gedaan. De docent geeft aan welke hoeken de leerlingen hadden kunnen vinden door gebruik te maken van het spiegelen.

De onafgemaakte discussie over het bestaan van de sinus van een hoek van 120° lijkt een leerlinge de verkeerde kant op te hebben gestuurd. Zij dacht dat het bij het werkblad de bedoeling was om net zo lang hoeken te tekenen totdat ze een hoek van 120° had gevonden. De leerlingen hebben bij de sinus nog steeds het beeld uit de onderbouw.

De docent geeft één voorbeeld waarin te zien is dat de sinus van een hoek gelijk is aan de hoogte van een punt in de eenheidscirkel bij dezelfde hoek. De docent geeft als voorbeeld de $\sin 30°$, dat deze $\frac{1}{2}$ is en dat dit gelijk is aan de hoogte in de eenheidscirkel. Hiermee probeert de docent de leerlingen een zetje te geven om de gewenste denkstappen te maken. De docent zet de leerlingen nu een tijdje aan het denken, maar ze komen niet op dit idee. De les wordt er ook onrustig van. Een leerling merkt op het erg ingewikkeld te vinden: “Hoe kun je dat nou weten? Ik heb tot nu toe alles gesnapt, maar dit gaat mij te ver”. Overigens is te observeren dat niet alle leerlingen de instructie hebben opgevolgd om hun rekenmachine weg te stoppen. Er zijn een paar leerlingen die de sinus van hoeken groter dan 90° op hun rekenmachine uitrekenen.

De overgang naar de grafiek wordt klassikaal gemaakt. De uitleg die daarbij gegeven is, is op de video moeilijk terug te zien of horen. De leerlingen tekenen individueel een soort sinusgrafiek. De observanten hebben hierbij veel tekeningen gezien met rechte lijnen, een soort zaagtand waarbij de toppen wel afgerond waren. Één van de observanten geeft aan zijn twijfels te hebben bij het feit of voor de leerlingen de grafiek en eenheidscirkel aan elkaar gerelateerd zijn. Dit komt wellicht doordat de meeste grafieken zijn getekend vanuit een tabel en niet vanuit de eenheidscirkel. Één leerling zit wellicht al een beetje op het spoor van de cosinus, want deze leerling maakt een opmerking over de x-coördinaat, dat deze dan ook minder wordt.

Evaluatie

Docent 2 geeft aan dat hij het lesplan gevolgd heeft, zoals hij dat van te voren voor ogen had. Hij vond dat hij de leerlingen wel veel gecoacht had, maar dat het de leerlingen uiteindelijk wel zelf lukte om de grafiek te tekenen. Ze hebben de grafiek getekend van het eerste kwadrant. Het huiswerk is om hem af te tekenen voor de andere kwadranten. Tijdens deze les was dit sommige leerlingen al gelukt, dus hij verwacht dat het de rest ook wel zal gaan lukken. Docent 2 heeft het gevoel zijn doelen voor deze les bereikt te hebben.

Een leuke observatie werd gedaan tijdens het tekenen van de grafiek. De leerlingen tekenden eerst een rechte lijn omhoog. Toen werd gevraagd of die recht of krom was, zei iemand dat hij toch krom zou moeten zijn. Daaropvolgend werden enkel de topjes afgerond.

Docent 3 Les 1 (03-04)

Observanten: Administrator, Vakdidacticus en Docent 2.

De docent heeft aan het begin van de les een paar regels op het bord gezet. De leerlingen worden geacht geen grafische rekenmachine te gebruiken, maar alleen potlood, pen en liniaal op tafel te hebben. Ook het boek is niet nodig. De leerlingen hoeven zich geen zorgen te maken over aantekeningen, want deze krijgen zij aan het einde van de les van de docent mee.

De docent heeft een waterrad op het bord getekend. Hij vertelt erbij dat het rad draait. Er staat een Punt P op het rad. De docent vraagt: “Als het rad gaat draaien, wat gebeurt er met het punt P?” Hij geeft aan wat de hoogte van P is door een assenstelsel te tekenen. Ook tekent hij een hoogte-tijd assenstelsel ernaast. “Nu kun je je afvragen wat er gebeurt met punt P als het rond gaat en ik een grafiek ga maken van de hoogte van punt P als de tijd gaat lopen.” Een leerling maakt de opmerking: “De baan van de zon”. De docent geeft nu aan dat de leerlingen een tekening moeten maken van de baan van P. “Hoe netter, hoe beter. Neem de tijd ervoor en het wiel mag een aantal keer ronddraaien, dat is niet erg.” De leerlingen overleggen zachtjes fluisterend en er heerst een goede werksfeer.

Nu haalt de docent een leerling naar voren die samen met hem de grafiek op het bord tekent. De docent draait met het krijtje over het rad en de leerling moet de hoogte volgen op het bord en tegelijkertijd naar rechts lopen. Het tegelijk bewegen maakt de link tussen de cirkel en de grafiek heel sterk. Als de grafiek af is doen ze het nog een keer, maar nu draait de docent veel sneller rond. De grafiek wordt dus meer ingedrukt. Daarna doen ze het nog eens, maar langzamer waardoor de grafiek veel uitgerekter wordt. Nu vraagt de docent aan de leerlingen "Wat valt er op aan deze grafiekvorm?" Een leerling antwoordt: "Toppen liggen op dezelfde hoogte." Andere leerling: "Er zit herhaling in." Andere leerling: "Het heeft een draaipunt, het is symmetrisch." Andere leerling: "Snelheid van draaien maakt uit.".

Nu bespreekt de docent op welke manier hij de snelheid en de tijd 'eruit krijgt' en de grafiek wiskundig kan beschrijven, in plaats van natuurkundig. Hij vertelt dat hij het wiel vast kan zetten door de watertoevoer na een tijdje te stoppen. Dan staat het punt P op een vaste plek. Hij vraagt hoe we nu de hoogte van dit punt kunnen bepalen. Een leerling antwoordt: "Met graden van draaien?". De docent laat zien hoe dat gaat. Hij varieert de middelpuntshoek vanaf nul naar 30° en daar tekent hij het punt P. Hij vraagt hoe we nu de hoogte van het punt kunnen bepalen, waarop een leerling antwoordt: "Een driehoek ervan maken?". De docent legt nu uit hoe de leerlingen hierbij een grafiek kunnen tekenen. Hierbij vertelt hij dat hij het rad een aantal keer stil zet en dan de middelpuntshoek gaat meten en de hoogte bepaalt. Op deze manier tekent hij een paar punten in de grafiek op het bord. Hij laat hierbij ook zien dat je verder kunt draaien dan 360° en ook dat je terug, de andere kant op kunt draaien.

Nu stelt hij de vraag hoe je de vorm van de grafiek kunt noemen. Een leerling zegt dat het op een parabool lijkt. De docent ontkent dit niet, maar houdt het als mogelijkheid aan. Hij vraagt hoe je de rest van de grafiek kunt maken als je een klein boogje weet. De leerlingen zien direct dat je dan kan spiegelen en draaien om de rest van de grafiek te krijgen. Docent: "Dus als ik zeker weet wat de vorm is van dit kleine stukje, dan weet ik dus alles."

Nu gaat de docent verder en neemt een hoek van $27,35°$, de straal van het rad wordt vastgesteld op één. Hij vraagt hoe we nou de hoogte van dit punt kunnen bepalen. Naar aanleiding van vragen van de leerlingen vertelt dat hierbij geen rekenmachine of standaarddriehoek nodig is. De leerlingen bedenken dat ze het met de sinus gaan uitrekenen. Ze gaan wel de goede kant op maar raken verward doordat ze denken dat $\sin 27,35°$

geen eindantwoord is. De docent vertelt dat met behulp van driehoeken in het eerste kwadrant en de sinus de hoogte van de punten op de cirkel kan worden berekend. Docent vraagt aan de leerlingen: "Wat is het verband tussen de hoek en de hoogte?" en laat zien dat dit dus $\sin\alpha = \frac{\text{hoogte}}{1} =$ hoogte is. Een leerling merkt op dat dit alleen goed gaat als de schuine zijde één is. Een andere leerling geeft aan dat het alleen tot 90° goed gaat. Nu moeten de leerlingen een tabel invullen waarbij de hoek varieert van 10° t/m 80° met steeds 10° verschil. De leerlingen moeten driehoekjes tekenen en de hoogte meten. Een leerling merkt op dat die van 60° niet getekend hoeft te worden, omdat dat een standaarddriehoek is. Een andere leerling merkt op dat dat ook geldt bij 30°. De docent spoort de leerlingen die de getallen ingevuld hebben aan om ze in een grafiek te tekenen. Daarna laat de docent dit op het bord zien.

Nu stelt de docent de vraag wat dan een goede naam voor dit grafiekje zou zijn. Een leerling suggereert de afgeleide. De docent ontkent en vraagt wat ze nou gedaan hebben. Een leerling zegt dat het een sinusgrafiek moet zijn. De docent bediscussieert dit even en koppelt hierbij nog even terug naar de andere mogelijkheid, de parabool. Ook vraagt hij of je op bepaalde plaatsen in de grafiek nog kunt zeggen dat het een sinus is; hij geeft het voorbeeld van een sinus bij een hoek van 0°. Daarna concludeert hij dat we dit toch gewoon doen en het toch de sinus noemen.

Ter afsluiting van de les stelt hij een huiswerkvraag om thuis over na te denken: "Wat moeten we doen om met behulp van de sinusgrafiek uit het eerste kwadrant de hele grafiek te krijgen?"

Evaluatie

De vakdidacticus vond dat het heel leuk ging en dat er verschillende momenten zijn aan te wijzen waarop er goede denkvragen zijn gesteld. De huiswerkopgave bleek te zijn geïmproviseerd, maar de docent zal er aan denken om hier de volgende les op in te gaan. Als is besproken hoe vanuit de grafiek van het eerste kwadrant de gehele grafiek kan worden gemaakt, dan zal hij ook terugkoppelen naar de hoogte van het punt op het waterrad, waarmee hij nogmaals de relatie tussen grafiek en eenheidscirkel kan leggen.

De doelstellingen voor de volgende les worden besproken. De docent heeft het gevoel dat de leerlingen een goed gevoel voor de grafiek aan het kweken zijn en is van plan de cosinus gaan introduceren en de periode te variëren. De radialen zal hij nog even achterwege laten. De cosinus gaat hij met behulp van een spiegel boven het waterrad laten zien, waarbij het principe hoek van inval is hoek van uitval gebruikt wordt. Docent 2 vindt dit jammer en zegt dat de leerlingen op analoge wijze denkstappen zouden kunnen maken als bij de introductie van de sinus.

De observanten geven aan dat de leerlingen de vorm van de grafiek niet helemaal juist hadden getekend: In het midden waren het kaarsrechte lijnen en alleen de toppen waren een beetje afgerond. De volgende keer zou duidelijk moeten worden dat dit anders moet.

Het was niet voor alle leerlingen duidelijk waarom de overgang werd gemaakt van de tijd-as naar de hoek-as. Een leerling had gezegd: "Je krijgt toch gewoon dezelfde grafiek; wat maakt het dan nog uit?". Een andere leerling had geroepen dat je als je in plaats van de tijd de hoek zou nemen, dat je dan de tangens moet nemen. Daar had de docent niet op gereageerd.

Een van de observanten merkt op dat een aantal leerlingen de hele les andere dingen gedaan heeft. De docent vertelt dat er over het gedrag van deze leerlingen afspraken zijn en dat hij het zo prettig vindt en daarmee accepteert dat ze niet meedoen. Dit klassenmanagement wordt even bediscussieerd, maar heeft verder niet met inhoud van de les te maken.

Men vond het tekenen van de driehoeken en het meten eraan goed passen bij het idee van 'sensible mathematics'. De leerlingen krijgen veel gevoel voor wat ze doen door de hoogte een paar keer letterlijk op te meten.

Docent 3 Les 2 (04-04)

Observanten: Administrator en Voorzitter.

Bij deze les zijn de beelden van slechts één camera bruikbaar omdat bij de andere camera al snel het geluid uitviel. De microfoon die wel werkte zit op een onhandige plaats; je hoort vooral veel geschuif, fluisterende leerlingen en de docent zelf is wat moeilijk te verstaan.

De docent opent de les door aan te geven dat het boek in de tas mag blijven, maar dat leerlingen wel geodriehoek, potlood, pen en passer op tafel moeten nemen. Hij geeft aan dat er verder wordt gegaan op de vorige les, waarbij gekeken wordt naar de vorm van de grafiek die ontstaat bij het volgen van een punt P op een draaiend waterrad. Docent: "We hebben gezien dat het daadwerkelijk de sinus is in het eerste kwadrant. Waarom kunnen we in het eerste kwadrant zeggen dat het de sinus was?" Een leerling antwoordt: “Omdat daar de hoek tussen nul en 90 graden zit”. De docent geeft aan dat als je het rad ronddraait, dat er in het eerste kwadrant wel een rechthoekige driehoek te maken is, maar in de andere kwadranten niet. De docent herhaalt de vraag van de huiswerkopgave: “Hoe kunnen we aan de hand van de informatie uit dat kleine stukje van de grafiek de rest van de grafiek bepalen?” Hij vertelt dat de vorige keer de vorm van de grafiek eigenlijk geschat is, en dat deze vandaag precies bepaald wordt. Hij herhaalt een stukje van de vorige les over het tekenen van de grafiek met behulp van hoeken en vertelt dat ook voor hoeken groter dan 360° het grafiekje gewoon doorgaat. Een leerling merkt op dat het zo lang door gaat als dat het rad draait. De docent brengt de discussie weer naar voren over wat de vorm van de grafiek nu eigenlijk is: “Is dit stukje een parabool, of een halve cirkel?”. Hij tekent hieropvolgend een cirkel met straal één. Hij neemt een punt P op de cirkel en vraagt wat de hoogte zal zijn en het verband met de middelpuntshoek. Hij haalt terug uit de vorige les dat nu bekend is dat hoogte $= \sin\alpha$.

Hij vraagt: “Geldt dit ook als ik niet in de eenheidscirkel werk?”. Een leerling antwoordt: “Nee, dan moet je nog delen door dat getal”. De docent geeft aan dat dat de reden is waarom er in de eenheidscirkel wordt gewerkt. Op die manier is in het eerste kwadrant met behulp van de hoek per direct de hoogte te documenteren. Hiervan geeft hij een voorbeeld met behulp van de SOSCASTOA-definitie en vertelt dat dit alleen in het eerste kwadrant kan, omdat dit nou eenmaal de afspraak is. Hij zegt dat we dus ook allerlei exacte waarden voor de sinus kunnen bepalen met deze grafiek. Een leerling fluistert dat ze er niks van snapt, maar de docent gaat gewoon verder.

Hij vraagt nu nog eens aan de leerlingen hoe je met de informatie uit het eerste kwadrant de hele sinusgrafiek kunt construeren. Een leerling antwoordt dit te kunnen met spiegelen en omklappen. De docent doet dit op het bord voor. “Het basisvormpje lijkt verrassend veel op een halve cirkel, maar dat is het dus niet”, zo legt hij uit. Daarop gaat hij verder door te vertellen dat alle exacte waarden uit de eerste basisvorm nu bekend zijn en dat hiermee exacte waarden voor de rest van de grafiek ook te bepalen zijn met het spiegelen en ompklappen. Nu wil hij dit wiskundig laten zien. Hiervoor herhaalt hij dat we met de eenheidscirkel te maken hebben. Een leerling vraagt hierop: “Eenheid in de zin van één, of in de zin van eenheid van grootheid?”. De docent bevestigt dat het om de straal gaat en gaat verder over uitleg van hoeken in de eenheidscirkel. De docent laat zien dat je bij 20° en 160° dezelfde hoogte hebt. Een leerling concludeert dat dus

$\sin 20° = \sin 160°$. De leerling vraagt zich af of dan niet gewoon alle hoeken kunnen worden terugvertaald naar het eerste kwadrant. De docent geeft aan dat dit teveel werk zou worden als de hoeken steeds groter worden.

De docent geeft aan dat er nu een nieuwe wiskundige stap moet worden gezet waarbij er een nieuwe afspraak wordt gemaakt. Hij vertelt dat vanaf nu de hoogte in de eenheidscirkel gewoon de sinus genoemd wordt en de sinus van de hoek dus per definitie de hoogte is. Er volgt nog een lang verhaal waarin de docent een aantal zaken herhaalt. De leerlingen lijken het al lang te begrijpen. Hij laat ook zien dat nu geldt: $\sin 0° = 0$ en $\sin 90° = 1$. Nu deelt de docent werkbladen uit. Één leerling ziet direct wat hij moet invullen. Een andere leerling concludeert dat de hoogte dus ook negatief kan zijn, waarop de docent een aantal keer herhaalt dat dit het gevolg is van de nieuwe afspraak. Vervolgens vertelt de docent weer over het bepalen van de grafiek door het uitbreiden van het eerste kwadrant.

De docent herhaalt nog eens hoe de hoogte te bepalen is in de eenheidscirkel met het gebruik van de sinus als opstapje naar de cosinus. De leerlingen zuchten bij het horen van 'de cosinus'. De docent legt, zonder de leerlingen mee te laten denken, uit hoe de cosinus is te construeren en dat het de breedtegrafiek betreft.

Tot slot geeft de docent een ingewikkelde tekening. De leerlingen moeten eerst in de onderste grafiek de hoogtegrafiek tekenen (sinusgrafiek) en daarna moeten zij de cosinusgrafiek tekenen, die met behulp van een denkbeeldige spiegel op het blaadje wordt geconstrueerd. Hij legt nog even uit dat de hele grafiek een sinusoïde genoemd wordt en de leerlingen mogen hiermee aan de slag tot het einde van de les.

Er is geen evaluatiegesprek opgenomen.

UT bijeenkomst 5 (23-04)

Afwezig: Vakdidacticus, Docent 6 en Docent 7.

In het begin van de bijeenkomst wordt er gesproken over andere secties binnen de school die ook met lesson study gewerkt hebben, maar toch minder enthousiast zijn. Het concept werkt niet als niet elke docent zich goed voorbereid. Ook wordt alvast besproken welke onderwerpen er volgend jaar centraal zullen staan en welke docenten er betrokken blijven bij het project.

Bespreking Les 1 en 2 van Docent 3

Er wordt gestart met de nabespreking van Les 1 en 2 van Docent 3. De docenten zijn het met elkaar eens dat Les 1 een erg goede les was, en dat Les 2 beduidend minder was. Dit heeft er mee te maken dat de leerlingen in Les 1 echt goed aan het denken zijn gezet. In Les 2 hield de docent het verhaal meer bij zichzelf, de leerlingen hoefden hierdoor minder te doen. Ook was de les wat rommelig. De docent geeft aan tijdens Les 2 veel te hebben geïmproviseerd en dat hij daarom niet in één keer het goede verhaal bracht. De docent was veel aan het woord en de leerlingen zaten onderuitgezakt in hun stoelen. Ondanks dat de les moeizaam liep, geeft de docent aan het niet erg te vinden dat het zo is gelopen. Hij heeft er juist van kunnen leren. De lesserie is nu voor de derde keer gegeven en met name deze lessen verschillen erg veel van de lessen van Docent 1 en Docent 2. Docent 2 geeft aan ook verschillen te zien in het leerresultaat bij de leerlingen. Doordat de leerlingen in de klas van Docent 3 allerlei driehoeken getekend hebben en de hoogte gemeten hebben, zien ze beter in dat de hoogte afhankelijk is van de hoek, en dat de hoogte als het ware een functie is van de hoek. Bij Docent 2 zijn de leerlingen aan het werk gezet met de standaarddriehoeken en zien de leerlingen dat verband minder goed. Docent 2: "Ik was juist begonnen met standaarddriehoeken en de cosinus, terwijl jij het anders deed met het gevoel van meet maar de hoogte en ze zien de hoogte nu veel meer als een functie van hoek α, dat werkt veel en veel beter. We moeten helemaal niet met die standaardwaarden en exacte waarden beginnen. Eerst moet het gevoel komen en later kunnen we het gevoel nog wel verfijnen met exacte waarden." Conclusie is wel dat dit verband tussen de hoogte en hoek α door beide docenten nog meer geëxpliciteerd moet worden.

Een sterk punt van Les 1 was het simultaan bewegen over de eenheidscirkel door de docent en het uitzetten van de hoogte door de leerling. Ook zien de leerlingen alvast een keer dat je de beweging ook sneller kunt maken of langzamer. De intuïtie van de kinderen bleek goed. De les kan nog verbeterd worden door eerst de leerlingen individueel te laten schetsen hoe zij denken dat de grafiek eruit ziet. In de eerste les is het gelukt om het juiste evenwicht te vinden tussen vertellen hoe het zit en leerlingen zelf laten ontdekken. De leerlingen werden meegenomen in het verhaal van de docent, maar werden ook vaak aan het denken gezet door de vragen die tussendoor gesteld werden. In de Les 2 was het met name de docent die het verhaal deed. De docent geeft aan dat hij na afloop van zijn lesserie een gedetailleerd lesplan heeft geschreven. Hij geeft aan dat hij tijdens de lessen nog op nieuwe ideeën is gekomen en deze heeft gebruikt om zijn les nog verder te verbeteren. Het lesplan zoals hij dat nu heeft gemaakt zou hij dan volgend jaar weer kunnen gebruiken.

Er worden een paar vraagtekens gezet bij het begrip van de leerlingen van de cosinusfunctie. De docent geeft aan dat in Les 2 de cosinus goed kon worden getekend met behulp van de spiegel. Hiermee is echter niet getoetst of de leerlingen het ook daadwerkelijk begrijpen. De meeste docenten vinden het gebruik van de spiegel om aan de cosinus te komen geen goede methode. Professional: “Dat is gewoon een invuloefening, ze snappen echt niet dat die as hetzelfde is als deze. Ik ben er van overtuigd dat ze dat niet begrepen hebben. Ze kunnen het vast allemaal tekenen, maar ze hebben het echt niet door dat ze de x-coördinaat aan het uitzetten zijn.” Docent 2 zegt dat hij in zijn les gewoon een blaadje heeft gegeven, en dat leerlingen op basis van analogie met de sinus een heel eind kunnen komen in het zelf construeren van de cosinus. Docent 5 stelt voor om het als huiswerk mee te geven. Dan denkt elke leerling er sowieso individueel over na. Ook geeft Docent 5 aan het raar te vinden dat er bij deze lesserie geen huiswerk is.

Daarnaast vraagt de Administrator zich af of de leerlingen een bepaalde stap in de uitleg Les 2 wel hebben begrepen. Administrator: “Wat bedoel je met het omkeren tijdens de tweede les?”. Docent 3: “De definitie van de sinus in het eerste kwadrant. Dat omdraaien: We noemen de hoogte de sinus. Het is een omkering: van $sin(\alpha) = hoogte$ naar $hoogte = sin(\alpha)$. Dat vond ik zelf wel leuk.” Administrator: “Maar hebben de leerlingen dat ook door gehad? Dat het een omkering was?”. Docent 3: “Ja, kijk maar in de aantekeningen, dat hebben ze zeker door gehad.” Administrator: “Ja, je kunt het doen en niet snappen.”

Er wordt geopperd om het in de eerste les nog niet over de sinus te hebben. Er kan dan eerst worden gesproken over een hoogtegrafiek waarbij de hoogte een functie van de hoek is. In de tweede les kan de koppeling gemaakt worden naar de sinus. Ook kennen de leerlingen nog niet genoeg vormen om de hoogtegrafiek te beschrijven. Is het een idee om er een halve cirkel en parabool bij te tekenen zodat leerlingen zien dat het niet hetzelfde is? Daarna moet de sinusoïde als vorm geïntroduceerd worden. In de tweede les had de docent hier eigenlijk nog op terug moeten komen, omdat de discussie over de vorm wel gestart is.

Ideeën van de Professional

Er wordt teruggekomen op het molenwiekje dat door Docent 1 en Docent 2 is gebruikt, en hoe dit in de volgende lessen gebruikt zou kunnen worden. Professional: "We nemen nu steeds één punt en bepalen daarvan de coördinaten. Kunnen we dat niet gewoon direct voor alle punten tegelijk doen? Dus we nemen een punt (a, b) dat op de eenheidscirkel ligt en hoe ontstaat de rest van de punten? Dit helpt ook om rekenen te voorkomen. Of α dan $20°$ is of iets anders, maakt dan niet uit. Als ze het moeilijk vinden, dan kun je alsnog een voorbeeld geven van $20°$." Een andere docent is het hier wel mee eens, want als je op deze manier werkt, kun je ook sneller naar de algemene regels toe.

De Professional heeft wat nagedacht over de introductie van de sinus en geeft aan hoe hij het aan zijn leerlingen zou brengen. "Veel dingen komen nog uit de lucht vallen en daarom is het de vraag wat ervan blijft hangen. Het is goed om een fundering te maken voordat ze met de sinus aan de slag gaan. Dus eerst moeten de leerlingen een gevoel krijgen bij periodieke functies. Een simpele opdracht die daarbij kan helpen: Rol een A4tje op en knip het door in een hoek van $45°$. Dan vraag je de leerlingen na te denken over hoe de rand eruit ziet als het papier weer is uitgevouwen. Er ontstaat een zaagtandfunctie; je kunt dit aan de leerlingen introduceren als een herhalende figuur. Dan werk je eerst aan de introductie van periodieke functies. Ik heb een aantal goede opdrachten die leerlingen laten nadenken over periodieke functies. Met deze opdrachten in de voorafgaande les leg je de basis om daarna met de eenheidscirkel verder te gaan. Als je de fundering legt, dan kun je in de twee lessen erna ook veel sneller gaan."

Voorbereiding Les 1 en 2 van Docent 4

De laatste vier lessen van deze lesson study worden in de agenda's gezet. Nu komt Docent 4 aan het woord, hij is de eerstvolgende docent die les zal gaan geven. Hij zal dit doen in een klas van een collega. Hij vindt dat er meer stof in de eerste twee lessen kan, bijvoorbeeld door ook huiswerk op te geven. De docent heeft als kritiek op de andere lessen dat hij de leerlingen niet actief genoeg vindt. In zijn les zullen de leerlingen dus harder aan het werk gezet worden en ook al wat leren over radialen.

De doelen van Les 1 en 2 zijn dat de leerlingen een sinusgrafiek kunnen tekenen en dat ze hierbij meer dan één keer rondgaan over de eenheidscirkel. De cosinus wordt waarschijnlijk huiswerk na Les 2. En in Les 3, die buiten de lesson study valt, zal de molenwiek gebruikt worden. De docent wil werken met het tandrad, een idee dat hij al in een vroeg stadium van de lesson study bedacht had.

Over de werkvorm zegt Docent 4 het volgende: “Ik wil niet alles klassikaal doen, dat kost veel meer tijd dan wanneer ze in duo’s aan de slag gaan. Je kan dan het resultaat zien wat de leerlingen bedacht hebben, dat kun je dan klassikaal laten zien. Zo gaat het sneller. Ondertussen loop ik dan rond om te bekijken waar het loopt en waar het niet loopt en ik dus mensen kan helpen. Ik ga ook werkbladen uitdelen waarop ze dat zelf kunnen bekijken. Ik zal die werkbladen dus ook innemen zodat er naar gekeken kan worden.”

De Professional geeft nog het advies dat er moet worden nagedacht over welke specifieke vragen de docent kan gebruiken. “Eigenlijk zouden we met elkaar de goede vragen moeten verzinnen. Die goede vragen moet je dan kunnen gebruiken tijdens je lessen om de leerlingen aan het werk te zetten. We moeten gezamenlijk voorbereiden en een gezamenlijke les hebben. Welke vragen kunnen we stellen tijdens het construeren van de hoogtegrafiek om de leerlingen goed aan het denken te zetten?” Ook geeft de Professional als tip mee dat de goede elementen uit de vorige lessen wel behouden moeten blijven, zoals het tekenen van de sinusgrafiek door een leerling tegelijkertijd met het bewegen van het krijtje van de docent over de eenheidscirkel. Er worden geen vragen meer gezamenlijk bedacht dus dit blijft liggen voor de docent.

Docent 4 Les 1 (07-05)

Observanten: Administrator, Docent 3 en Docent 5.

Dit is niet de eigen klas van Docent 4.

De camera begint als de les al even bezig is. De docent heeft een korte introductie gegeven over het tandrad. De leerlingen moeten hieropvolgend opgaven 1 t/m 4 van het werkblad met elkaar maken en zij gaan hier dan ook rustig mee aan de slag. Op het werkblad moeten de leerlingen een tabel invullen waarbij draaiing over een aantal tanden wordt uitgezet tegen de hoogte van de gearceerde tand na die draaiing. De leerlingen zijn hier vrij snel mee klaar en lijken er geen moeite mee te hebben.

De docent neemt weer het woord. Hij bespreekt de antwoorden met de leerlingen. Dit heeft weinig inhoudelijke uitdaging; alleen de getallen worden vergeleken. Op de volgende pagina staat een rad met een nieuw aantal tanden dat draait. De leerlingen moeten nu bij deze gegeven waarden de grafieken gaan tekenen. Ze gaan hiermee gewillig aan de slag.

De docent neemt het woord weer en geeft aan dat hij zag dat de meeste leerlingen het goed deden. Toch gaat hij met de leerlingen een paar punten langs: “Op dit punt zit ik op deze hoogte. Na hoeveel tanden zit ik weer op dezelfde hoogte?”. Het gaat hem hier om het punt in het tweede kwadrant, maar een leerling antwoordt met “Over precies een heel rondje”. De docent stuurt aan op het andere mogelijke antwoord en krijgt dit van dezelfde leerling. Dan gaan de leerlingen aan de slag met opgaven 5 t/m 9. De leerlingen zijn erg rustig aan het werk. Er wordt zachtjes overlegd.

De docent neemt dan weer het woord en geeft aan dat het eigenlijk raar is om het aantal tanden te gebruiken om de hoogte uit te drukken. Hij koppelt nu de draaiing over een aantal tanden aan de afstand die het tandrad dan afgelegd heeft. Hij laat dit ook zien met een animatie. Hij vraagt de leerlingen wat de omtrek van de cirkel zou moeten zijn. De leerlingen moeten even nadenken over de formule voor de omtrek van een cirkel. De docent vraagt of de afgelegde afstand op de cirkel nu kan worden uitgerekend, waarop de leerlingen aangeven dat wel te kunnen. De docent geeft een voorbeeld waarbij de afgelegde afstand wordt uitgerekend. Nu moeten de leerlingen zelf verder met opgaven waarbij ze ook de draaiing over een aantal tanden moeten omrekenen naar de afgelegde weg van het tandrad. De leerlingen werken weer heel rustig, maar overleggen iets meer met elkaar dan voorheen. Ze lijken heel goed te redeneren hoe het zit.

De docent neemt weer het woord. Het is bijna tijd en hij wil de som nog even samen bespreken. Op de diapresentatie staan twee tandraden met daarnaast twee assenstelsels. Het bovenste rad heeft 36 tanden en het onderste heeft 18 tanden. Van beide wordt in een grafiek de hoogte van de gearceerde tand uitgezet tegen het aantal tanden waarover gedraaid is. Dit levert twee grafieken die op elkaar lijken, maar de bovenste grafiek is in de breedte uitgerekt.

Op het achterste blaadje staat huiswerk dat iedereen moet maken. Hij zegt dat hij bijzonder geïnteresseerd is naar de antwoorden die op vraag 10 van het huiswerk worden gegeven. Daarmee besluit hij de les. Er is nog aardig wat tijd over voordat de bel gaat.

Evaluatie

In de eerste les is het mogelijk vanuit de context vrij direct naar de vorm van de grafiek te gaan. Een opstapje naar de radialen is ook al gemaakt door de introductie van de afgelegde afstand van het tandrad. Dit was ook de bedoeling van de docent en hij is erg tevreden over hoe het is gegaan. Hij geeft aan het woord 'hoek' bewust niet te hebben gebruikt, maar alleen over afgelegde afstand te hebben gesproken. De koppeling aan hoeken is voor een later moment. Van te voren had de docent verwacht dat het een volle les zou zijn, maar dat bleek mee te vallen; de hoeveelheid stof was zelfs wat aan de weinige kant. De docent geeft aan het uiteindelijke lesdoel behaald te hebben, namelijk de afgelegde weg te koppelen aan de hoogte van de gearceerde tand.

De observanten vonden de introductie van het tandrad erg goed. De leerlingen leken het niet zo ingewikkeld te vinden om er aan te rekenen. Leerlingen hebben een goed gevoel voor draaiing en hoe dit van invloed is op de positie van de gearceerde tand. De les heeft bijgedragen aan het ontwikkelen van intuïtie voor de beweging en de grafiek. Het was jammer dat het concept periodiciteit hierbij niet expliciet benoemd is. Docent 4 zegt dat hij dat er tussendoor bij in wilde brengen, maar dat het er niet van is gekomen. Een observant heeft nog een interessante opmerking over een opgave waarbij de leerlingen de hoogte van de gearceerde tand moeten bepalen, nadat deze over 60 tanden gedraaid is. De observant had gezien dat een jongen de hoogtes bij draaiing over 3, 21 en 36 tanden had en die had opgeteld tot de hoogte bij een draaiing over 60 tanden. Hij had totaal niet in de gaten dat dit verkeerd was. Opvallend was ook dat de jongen geen link legde tussen de grafiek en de tabellen, omdat hij de grafiek wel netjes periodiek tekende.

De docent vertelt dat per ongeluk de slide met de hoogtegrafiek al in beeld was gekomen, terwijl hij de leerlingen hier eerst over had willen laten nadenken. Het viel de docent op dat leerlingen klakkeloos accepteerden dat na een draaiing over 3 tanden de gearceerde tand op hoogte $\frac{1}{2}$ was. De observanten vinden dat de docent meer aandacht had kunnen besteden aan de symmetrie.

De leerlingen hadden de formule voor de omtrek van een cirkel niet allemaal paraat. Het was daarom goed dat er nog een voorbeeld is gegeven waarin de afgelegde weg een keer wordt uitgerekend. Één van de observanten vraagt zich hierbij wel af, of het symbool π wel goed begrepen wordt. "Zouden ze in de gaten hebben dat het gewoon een getal is?" In een van de opgaven waren er twee cirkels met verschillende straal. De leerlingen wisten niet meer wat nou de straal was en dat gaf onduidelijkheid. Over het tandrad zelf is onder de docenten ook nog even verwarring, omdat de tanden niet als één ‘punt’ getekend zijn, is er geen eenduidige coördinaat voor de hoogte.

Docent 4 Les 2 (10-05)

Observanten: Voorzitter en Docent 1.

Eerst wordt herhaald wat de leerlingen de vorige les hebben geleerd. De docent vertelt kort over het tandrad, het draaien en de grafiek. Een leerling merkt op dat de grafiek een golfvorm had. Er zijn toen twee golfvormen aan bod gekomen; van een rad met 18 tanden en van een rad met 36 tanden. De docent vertelt: “Afhankelijk van het aantal tanden zie je de golf vaker of minder vaak. De lengte van een zo’n golf noem je de periode”. Hij vertelt dat de afstand die ze afleggen bij één keer rond gaan exact hetzelfde is, omdat ze beide dezelfde straal hebben. Van beide zullen uiteindelijk dezelfde grafieken verschijnen als hoogte niet wordt uitgezet tegen het aantal tanden waarover gedraaid is, maar wordt uitgezet tegen de afgelegde afstand. Op het bord staat nu een assenstelsel met op de x-as 0, π en 2π. De grafiek wordt erdoorheen getekend; die kennen we inmiddels. De docent vertelt: “Dit is hetzelfde plaatje als dat we eerder hadden, op een wijziging na: Eerst keken we naar het aantal tanden, maar nu kijken we naar de afgelegde weg.” De leerlingen merken op dat het gewoon dezelfde grafieken zijn. De docent laat zien dat onafhankelijk van het aantal tanden de grafiek er altijd op dezelfde manier uit ziet, ook als er geen tanden zijn. Hiermee wordt de stap richting eenheidscirkel gezet. De docent deelt nu werkbladen uit en de leerlingen gaan aan het werk met de opgaven 1 t/m 10. Er wordt hard gewerkt en de leerlingen overleggen met elkaar.

De docent neemt het woord weer. Nog niet alle leerlingen zijn op dat moment klaar met 1 t/m 10. Op het bord heeft hij nu een cirkel (een rad zonder tanden) staan. Daarin tekent hij een hoogte en in kleur een cirkelboog die de bijbehorende afgelegde afstand weergeeft. Hij bekijkt nu waar die hoogte nog meer voorkomt en welke afstand er dan is afgelegd. Hij benoemt ook het spiegelen in de x-as. Vervolgens stipt hij deze twee punten in de sinusgrafiek aan. Nadat hij dit heeft laten zien mogen de leerlingen weer even verder werken. Hij stelt de klas de vraag waarom zij zomaar geloofden dat de hoogte in de vorige les precies $\frac{1}{2}$ was. Hij laat het tandrad nog eens zien en tekent een lijn vanuit het midden naar de tand. De klas concludeert dat de afgelegde weg die bij dit punt hoort $\frac{1}{3}\pi$ is. Nu tekent hij een boogje in de hoek en stelt de vraag hoeveel graden deze hoek nu is. Leerlingen antwoorden direct dat het 60° moet zijn. De uitleg die zij geven is dat het $\frac{1}{3}$ van 180° moet zijn. Nu moeten de leerlingen zelf weer aan het werk met opgaven 11 t/m 16.

De opgaven worden besproken. De docent laat zien hoe met behulp van de sinus de hoogte in de driehoek uit te rekenen is. Hiermee komt hij op de vergelijking hoogte $= \sin\alpha$. De docent benadrukt dat de sinus een getal is, en dat leerlingen dat goed moeten onthouden. Hij geeft aan dat je, om dit getal te vinden, ook de bijzondere driehoeken kan gebruiken. Na deze uitleg gaan de leerlingen nog aan het werk met de opgaven 17 t/m 25. Er is te weinig tijd om dit in de les af te maken, dus deze opgaven worden het huiswerk. In de laatste paar minuten herhaalt de docent nog heel even de standaarddriehoeken.

Er is geen evaluatiegesprek opgenomen.

UT bijeenkomst 6 (21-05)

Afwezig: -

Bespreking Les 1 van Docent 4

De Voorzitter is naar de les van Docent 4 geweest en geeft aan dat hij vooraf geen lesvoorbereiding heeft ontvangen. Dat zou wel van tevoren moeten want de observanten hebben niet de tijd om het in de les nog door te lezen.

Docent 4 vertelt dat hij in Les 1 al de afgelegde weg heeft geïntroduceerd. De doelen zijn in de lessen wel bereikt. Met deze lessen is de eerste paragraaf uit het boek afgedekt. In de eerste les was er meer tijd dan gedacht, in de tweede les juist te weinig. De leerlingen werkten goed mee en waren actief bezig. De docent is er erg tevreden over. In de eerste les is het begrip ‘hoek’ niet gebruikt om de radialen echt te onderscheiden van de hoek. Ook het woord sinus is de eerste les bewust nog niet gebruikt. Er is gewerkt met een hoogte-afstand grafiek waarin de leerlingen een relatie zien tussen hoogte en de afgelegde weg. De docent is bewust al verder gegaan dan één periode. In eerste instantie heeft de grafiek voor de leerlingen nog niks met de sinus (zoals ze die kennen uit de onderbouw) te maken. De suggestie van de Professional uit de vorige UT-bijeenkomst is dus wel gebruikt.

Nu wordt gevraagd naar de mening van de observanten. Docent 3 zegt: “Ik heb zelf heel veel moeite met de dikte van het tandje, omdat je dan niet op één punt zit. Echter voor de leerlingen is het misschien helemaal geen probleem. De kinderen hadden geen moeite met de hoogte-afstandgrafiek.” De docent had in de eerste les eigenlijk meer aandacht willen schenken aan de symmetrie; maar heeft dit bij de start van Les 2 alsnog gedaan.

Discussie naar aanleiding van Les 1

Er is een discussie over de betekenis van radiaal. Docent 4 ziet de radiaal als afstandsmaat, terwijl de Voorzitter vindt dat de radiaal een maat voor een hoek is. De Professional brengt in dat het juist dimensieloos zou moeten zijn. De docenten zijn het er onderling al niet over eens en vinden het daarom belangrijk om eens na te denken over hoe je dit aan leerlingen uitlegt. Docent 4 zegt: “Je zou kunnen zeggen dat een hoek de grootheid is, en dat je dan graden en radialen als eenheid kunt kiezen. Bij ons in de onderbouw wordt altijd met dimensies gewerkt.” Docent 3 zegt: “Op zich is het in de lessen geen probleem, maar het leeft wel tussen ons wiskundigen onder elkaar”. Docent 4 geeft toe dat de definitie zoals die nu op zijn werkbladen staat inderdaad niet correct is. De Professional zegt dat het wel correct wordt door de opmerking die direct achter de definitie staat, namelijk dat de straal één is. Docent 6 vraagt, of in het kader van sensible mathematics, het belangrijk is dat de leerlingen nadenken over het feit dat ze bezig zijn met hoeken of afstanden. Docent 4 zegt: “Ik vind op dit moment van niet, niet in de eerste twee lessen. Op het eind van de periode, als ze door deze stof heen zijn, zou je die discussie kunnen starten.” De Professional zou het wel mooi vinden om hierover te kunnen discussiëren, maar hij geeft wel aan dat het zelfs onder de docenten een moeilijke discussie is.

Docent 4 heeft de antwoorden van de leerlingen op de werkbladen van de eerste les bekeken. De leerlingen hebben geen problemen gehad met het feit dat de hoogte zomaar tussen -1 en 1 was vastgelegd. Voor hemzelf is dit juist een punt van kritiek dat die waarden er zonder verklaring zijn ingebracht.

De Administrator heeft in de les van Docent 4 bij een leerlinge onderzocht wat haar gedachte was bij π. Het meisje tekende als antwoord op deze vraag het symbool voor π. Verder had ze er niets over te vertellen. Administrator: “Wat zou je met zo’n antwoord moeten doen? Moet je dat in een klein groepje bespreken? Of klassikaal? En moet dit in de vijfde klas nog weer herhaald worden? Leerlingen vergeten tenslotte toch snel weer wat ze geleerd hebben.” Docent 4 denkt dat er bij de leerlingen wel een koppeling is tussen π en cirkels. Hij denkt dat er maar weinig leerlingen zijn die π gebruiken zonder daarbij te weten dat π met cirkels te maken heeft. Docent 6: “Maar π is ook een getal. Weten leerlingen dat dan ook?” Docent 4: “Wat er bij leerlingen blijft hangen is dat π iets te maken heeft met cirkels en dat het ongeveer 3,14 is. Dat het een verhouding tussen de diameter en omtrek is dat vergeten ze.”

Bespreking Les 2 van Docent 4

De voorzitter vond dat er een goede interactie was in de les tussen de docent en de leerlingen. Alle leerlingen waren actief in de les. De werkvorm was hetzelfde als de vorige keer, maar er werd nu meer overlegd door de leerlingen, omdat de docent de leerlingen hier extra op gewezen heeft. Docent 4 geeft aan dat het opgave 10 wat lastig liep, en dat hij dit daarom klassikaal op heeft gepakt met een duidelijke applet, waarin ook de symmetrie goed werd aangestipt.

Ideeën van de Professional

De professional brengt nogmaals in dat het niet erg is om ook leerlingen voor het bord te laten die fouten maken, in plaats van direct zelf het goede antwoord te brengen. Andere leerlingen kunnen ook van deze fouten leren. Professional: “Dat is het probleem van ons onderwijs. Dat je alleen wil laten zien hoe het wel moet. Terwijl het ook niet erg is om af en toe een fout te maken.” Docent 4: “Je moet hier wel mee oppassen dat je niet elke keer dezelfde leerling de fout laat maken en steeds de beste van de klas daarop laat reageren.” Professional: “Zulke discussies zijn heel waardevol en bruikbaar in de les.” Docent 3 denkt dat niet alle leerlingen blij zijn met ‘leergesprekken’: “Vooral op de havo gebeurt het vaak, dat als een les wordt volgepraat, dat er paniek ontstaat. Het is niet eens dat je saai vertelt, maar het gaat ten koste van hun huiswerktijd als je de les voor andere dingen dan zelfstandig werken gebruikt.”

Over het introduceren van de sinus heeft de Professional nog een ander idee. Je zou de klas in twee groepen kunnen verdelen. “Dan moeten ze symmetrie zoeken in de eenheidscirkel en de andere groep zoekt dit in de grafiek. Dan haal je wat foute en goede redenaties van beide groepen erbij op het bord, en dan moeten ze wel zien dat het met elkaar te maken heeft."

Wat te doen met de resultaten van deze lesson study?

Vakdidacticus: "Ik heb het in het verleden al een keer gesuggereerd, om te kijken naar de verschillende manieren waarop jullie dit onderwerp aangekaart hebben. Dit is er eentje van. Om daar wat mee te doen. Waarom zou nou zo'n lesplan, zoals jullie die nu van de eerste twee lessen hebben gemaakt, moeten worden aangepast aan de ervaringen?" Docent 4 reageert hier positief op: "Ik zou het leuk vinden, je hebt nu die twee lessen gegeven, om dat niet zomaar achter je te laten, maar om nog verbeteringen aan te brengen, ik zou er de tijd wel willen instoppen." Er wordt gesproken over de mogelijkheid om materiaal te maken dat ook voor andere docenten beschikbaar zou kunnen worden. Docent 6 vraagt of in dit materiaal ook moet worden vermeld wat zij als docenten hebben geleerd van dit project. Er ontstaat een discussie over wat er met het materiaal moet gebeuren. De Professional stelt voor dat van alle methoden niet alleen moet worden verteld wat er is gedaan, maar ook wat de voor- en nadelen ervan zijn. Hij concludeert ook dat het jammer zou zijn als er verder niks meer wordt gedaan nadat iedereen zijn twee lessen gegeven heeft. De Vakdidacticus zou het leuk vinden om de discussies die er gevoerd zijn te gebruiken als input voor bijvoorbeeld een artikel. Docent 3 geeft aan ook wel benieuwd te zijn naar de leerresultaten van de leerlingen. Docent 4: "Kunnen we dat meten en zo ja, hebben we dat dan wel goed gedaan?" De Professional benadrukt dat het doel van deze lesson study breder is dan het construeren van de lessen, en dat het ook een doel is om docenten te laten inzien dat het ook op andere manieren kan.

Planning Les 1 en Les 2 van Docent 5

Er wordt overlegd welke van de lesideeën Docent 5 nu het beste kan geven. Hij is zelf enthousiast over het waterrad en het tandrad. Er wordt besloten dat als context het tandrad gebruikt wordt. De basis is dus al gelegd met de lesvoorbereidingen van Docent 4. De Professional stelt voor een nieuwe opdracht erbij te voegen om leerlingen gevoel te laten ontwikkelen voor de grafiek. Een voorbeeld hiervan is dat de leerlingen alle intervallen waar de hoogte boven $\frac{1}{2}$ is moeten aangeven. Op deze manier zet je de leerlingen aan het denken en ze zullen de symmetrie en periodiciteit vanzelf tegenkomen. Ook kun je het begrip periodiciteit nog beter introduceren door ook tegenvoorbeelden te laten zien, van grafieken die niet periodiek zijn. Docent 4 geeft aan dat de leerlingen helemaal geen probleem hebben met de periodiciteit, volgens hem kunnen de leerlingen dat best. Docent 4: "Wat is de winst als we op dit moment langer over de periodiciteit gaan praten? Gaan de leerlingen dan andere aspecten, zoals symmetrie, beter begrijpen?" De Professional vindt dit juist een goede basis om de rest aan op te hangen. Het lijkt een leuke context te zijn. Docent 5 denkt dat de periodiciteit wel heel belangrijk en voor leerlingen niet triviaal is. Er wordt opgemerkt dat er niet meer aan de les moet worden aangepast dan op korte termijn mogelijk is. Voorzitter: "Je zou wel iets verder in periodiciteit kunnen gaan, maar met het waterrad in het achterhoofd". De Professional: "Het hoeft ook niet gelijk een hele les daarover te zijn".

Nu wordt besproken of er nog iets veranderd moet worden aan de opgaven. Uit dit overleg komt naar voren dat opgaven 6 t/m 8 weggelaten mogen worden en opdracht 5 en 9 moeten blijven. De periodiciteit moet dan wel meer aandacht krijgen in deze opgaven. Het is ook een idee om de vragen die er nu worden uitgehaald als huiswerk op te geven. De vragen die eenvoudiger zijn kunnen dan individueel gemaakt worden en de vragen waar ze echt over na moeten denken en waar de docent bij moet zijn worden in de les behandeld. De opgave met de molenwiek wordt nu ook besproken, deze zat niet in de lessen van Docent 4 maar wel in de lessen van Docent 1 en Docent 2. Er wordt gezegd dat als deze opgave nog gebruikt wordt, dat het dan geen simpele invuloefening meer mag zijn. Er is discussie over het feit of de leerlingen met één punt met coördinaten (a, b) genoeg informatie hebben. Docent 4 zegt dat je ook twee punten zou kunnen geven, om iets meer sturing te geven. De Professional vindt dit niet nodig: "Docent 5 is in de klas, die kan altijd nog een punt aanwijzen als het bij groepjes niet lukt." Docent 4: "We hebben het wel over 4 vwo, het abstractieniveau van die leerlingen is nog niet zo hoog. Net als met die α, daar zaten ze eerst tegen aan te kijken van wat is dat?" Professional: "Je zou het ook kunnen vragen over bijvoorbeeld een x aantal tandjes."

Het idee om de klas in twee groepen op te delen, waarbij één groep werkt met de eenheidscirkel en de andere groep met de sinusgrafiek, wordt nog een keer genoemd. De discussie wordt nu, omwille van de tijd, gestopt. Er wordt gevraagd of het zo gaat lukken met de voorbereiding en of deze van te voren kan worden rondgestuurd. De lessen van Docent 6 zijn nog niet gepland en hij weet nog niet of hij het verhaal van het tandrad wil gebruiken of zijn historische verhaal over het ontstaan van het begrip sinus.

Docent 5 Les 1 (24-05)

Observanten: Administrator, Docent 1 en Docent 4.

De docent opent de les met het introduceren van het tandrad. Hij vertelt dat het rad gaat draaien en daarbij de beweging van een zo'n tand gevolgd wordt. Het rad waar mee gewerkt wordt heeft 36 tanden. Hij vraagt waar de tand zal zijn als je het rad 9 tanden draait. Een leerlinge loopt gretig naar voren om het te vertellen. De docent vraagt haar, terwijl ze voor het bord staat, wat er gebeurt als het rad 3 tanden gedraaid is. De leerlingen schatten met z'n allen hoe hoog de gearceerde tand dan staat. Er worden direct waarden geroepen. Nu stelt hij de vraag hoe hoog het tandje zit als het rad 39 tanden is gedraaid. Meteen roepen de leerlingen " Op dezelfde plek". Dan gaan de leerlingen aan het werk met opgave 1 t/m 4.

De docent neemt het woord en gaat de antwoorden bespreken. De leerlingen geven de antwoorden en moeten daarbij goed uitleggen hoe ze aan het antwoord komen. De docent vraagt steeds goed door op de gegeven antwoorden. De leerlingen klinken vrij onrustig, maar dat komt omdat ze druk aan het meedenken zijn. De sfeer is erg leuk. De docent vertelt dat nu de hoogte in een grafiek gaat worden uitgezet. Hij laat op het bord het tandrad zien met een assenstelsel ernaast waar een paar hoogtes met behulp van pijlen al staan gegeven. Hij vraagt nu of de leerlingen meer hoogtes kunnen tekenen aan de hand van de gegeven hoogtes. Één leerling komt naar het bord en legt heel duidelijk uit hoe het moet. Hij tekent de andere punten, die op basis van symmetrie of herhaling dezelfde hoogte hebben er ook bij. Het is echt te merken dat deze leerling het erg goed snapt. Zijn duidelijke uitleg kunnen de andere leerlingen ook waarderen. Een andere leerling komt er uit zichzelf bij staan om het af te maken. Vloeiend tekent hij de grafiek door de punten en zo ontstaat de hoogtegrafiek. De koppeling tussen de eenheidscirkel en de grafiek is door de leerlingen heel duidelijk gemaakt, doordat ze tijdens het tekenen in de grafiek wijzen naar punten op de eenheidscirkel. Op de x-as is het aantal tanden waarover gedraaid is uitgezet. De hoogte wordt niet met waarden aangeduid, maar de cirkel die ernaast staat is gebruikt als referentiekader. De leerlingen moeten nu de opgaven 5 t/m 9 maken. De oefeningen zijn dus niet meer aangepast sinds de laatste bijeenkomst. De leerlingen redeneren met elkaar om uit de opgaven te komen. Er hangt een prettige werksfeer.

De docent geeft een korte uitleg over het berekenen van de afgelegde afstand en laat ook de animatie zien die dit illustreert. De leerlingen gaan nu allerlei afstanden bepalen. Leerlingen doen enthousiast mee en komen er gezamenlijk steeds wel uit. Vervolgens werken de leerlingen aan opgaven 10 t/m 17. De leerlingen moeten het werkblad afmaken als huiswerk en moeten de volgende les alles inleveren. Hiermee wordt de les afgesloten.

Er is geen evaluatiegesprek opgenomen.

Docent 5 Les 2 (25-05)

Observanten: Docent 4 en Docent 6.

De docent opent de les door te vertellen dat hij eerst kort gaat samenvatten wat de eerste les is behandeld. Hij vertelt dat ze de vorige les al hebben gezien dat het voor de uiteindelijke vorm van de grafiek niet uitmaakt hoeveel tanden er op het rad zaten. Hij kondigt aan dat ze vandaag de functie gaan ontdekken die de hoogte op een cirkel beschrijft. Het huiswerk wordt erbij gehaald, op het bord zijn twee tandraden te zien met daarnaast twee assenstelsels waarin de hoogtegrafiek moet komen. Er komt een leerlinge naar voren die heel duidelijk uitlegt hoe ze de grafiek heeft getekend en ze doet dit voor op het bord. Ze maakt een begin en dan zegt ze "En hier doen we gewoon hetzelfde, maar dan ondersteboven". Ze tekent alle hoogtes met pijlen en uiteindelijk met een andere kleur de grafiek erdoorheen. De volgende dia, die over haar tekening op het bord geprojecteerd wordt, laat zien dat ze de grafiek heel precies getekend heeft. Vervolgens komt een andere leerling naar voren om de grafiek eronder te maken, eenzelfde type opdracht alleen dit tandrad heeft minder tanden. De leerling vertelt duidelijk wat hij doet om de grafiek te tekenen, maar doet het globaler. Deze leerling zet geen pijlen, maar stipjes. Hij doet het veel grover met alleen punten op de hoogtes 1, -1 en 0.

Nu laat de docent een animatie zien waarin beide tandraden (met gelijke straal) een kwartslag draaien. Hij vraagt de leerlingen welke afstand de tandraden hebben afgelegd. De leerlingen komen tot de conclusie dat ze beide een even grote afstand hebben afgelegd. Een animatie laat zien hoe de hoogte tegen de afgelegde weg wordt uitgezet in een grafiek. Er wordt nu geswitcht van draaiing over een aantal tanden op de x-as naar de afgelegde weg op de x-as. De leerlingen moeten nu weer opnieuw de grafieken tekenen, maar met dit nieuwe assenstelsel. Er komt een andere leerlinge naar voren die het grof, maar heel duidelijk uitlegt en tekent. Ze zegt dat het gewoon hetzelfde is als wat daarvoor gedaan is. Een andere leerling komt naar voren om voor het rad met minder tanden ook een hoogtegrafiek te tekenen met op de x-as de afgelegde weg. Deze leerling lijkt het nog wel lastig te vinden. De leerling denkt er even over na en kijkt ook naar het werk van de voorganger, en komt dan tot de conclusie dat het gewoon weer hetzelfde is. De leerlingen moeten nu de opgaven 1 t/m 10 van het tweede werkblad maken. Ze gaan weer enthousiast aan het werk en overleggen met elkaar.

Na een tijdje gaat de docent weer verder. Hij haalt een leerling naar voren die voor punten op de eenheidscirkel de afgelegde weg moet bepalen. Hierbij wordt de hint “Een getal met iets met π” gegeven. De leerling laat zien hoe hij allemaal punten kan tekenen met behulp van symmetrie en hoe hij de waarden erbij uitrekent. Hij vind op deze manier 4 punten. De docent vraagt de klas wat er kenmerkend is aan de functie. Leerlingen antwoorden dat hij periodiek is en de docent gaat hierop in door te vragen wat dan de kenmerken zijn. Een leerling roept ‘Herhaling’. Nu koppelt hij de afgelegde weg aan de hoek: Hij laat een tandrad zien dat drie tanden gedraaid is en zegt “De draaiing bij een afgelegde afstand van $\frac{1}{3}\pi$ is gelijk aan 60°”. Leerlingen gaan aan het werk met opgaven 11 t/m 16.

De opdrachten worden tegen het einde van de les besproken. De sinus komt nu voor het eerst aan bod. De docent laat zien hoe met de sinus de hoogte kan worden bepaald en benoemt ook kort dat dit in standaarddriehoeken exact kan. Leerlingen gaan bezig met de laatste opgaven van hun werkblad tot het einde van de les. De docent besluit de les door de leerlingen een prettig weekend te wensen.

UT bijeenkomst 7 (18-06)

Afwezig: -

Dit is de laatste bijeenkomst van deze lesson study. Eerst worden de thema’s voor de lesson studies voor volgend schooljaar vastgelegd. De lessen van Docent 5 worden besproken. Hij geeft aan dat hij voor zijn gevoel te snel door de sheets is gegaan, waardoor hij de symmetrie niet volledig genoeg heeft besproken. Hij denkt daarnaast dat er te weinig centrale terugkoppeling is geweest nadat de leerlingen aan de opgaven gewerkt hadden. De powerpoint liep goed en heeft ook een indruk achter gelaten bij de leerlingen. De opgave waarbij de leerlingen met ‘α’ moesten werken is hij vergeten nog te bespreken, terwijl er best wat leerlingen zijn geweest die er niet uit kwamen. De klas is inmiddels bijna aangekomen bij het proefwerk. De meeste leerlingen zien er totaal niet tegenop, omdat ze het tandrad nog goed kennen en het eenvoudig vinden. Het tandrad roept de juiste ideeën op, leerlingen weten dan waar ze gelijke hoogten en de tegengestelde hoogten kunnen vinden. De Vakdidacticus vraagt of er nog bijzondere reacties waren. Één van de observanten vertelt dat leerlingen een rare denkstap maakten: de hoogte die hoort bij $\frac{1}{6}\pi$ was gelijk aan de hoogte die hoort bij $\frac{5}{6}\pi$ en vervolgens werd er geconcludeerd dat de hoogte die hoort bij α dus ook gelijk moest zijn aan de hoogte die hoort bij 5α. Deze denkstap was ook al eerder in de les van Docent 4 gezien. Docent 5 vertelt ook nog over een autistische jongen uit zijn klas, die de vragen heel precies las. Op de vraag “Waar is de hoogte hetzelfde?” antwoordde hij: “Dat kan maar in één punt, het punt 0. Daar is de hoogte 0 en daar is de x-coördinaat 0 en nergens anders kan dat”.

Er wordt geopperd om een klas die wel heeft meegedaan met de lesson study te vergelijken met een klas die gewoon les heeft gekregen, binnen dezelfde school. Helaas vindt men het type vragen dat gesteld wordt op de standaard afsluitende toets niet geschikt om het begrip van de leerlingen te toetsen.

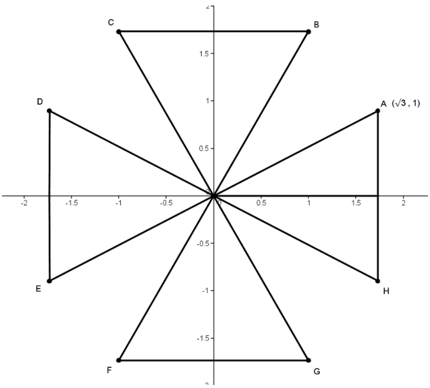
Gebeurtenissen van de les van Docent 6

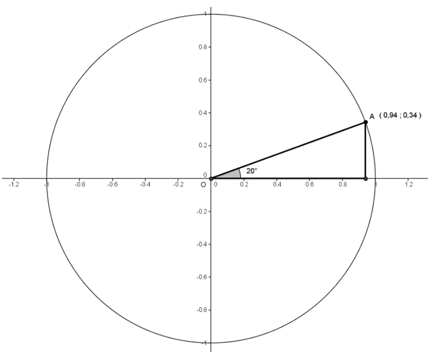
Docent 6 heeft inmiddels ook zijn lessen gegeven, hier zijn echter geen observanten bij geweest en ook geen opnamen van gemaakt. Hij vertelt aan de anderen hoe de lessen zijn verlopen. In de eerste les zijn de leerlingen bezig geweest met driehoeken en hebben daar sommetjes over gemaakt. Dit was voorkennis uit Getal en Ruimte. In de tweede les zijn de leerlingen hierover overhoord. Hiertoe kwamen er twee leerlingen voor het bord, waarbij de ene leerling een stapel kaartjes kreeg met vragen erop en de andere leerling moest deze zo snel mogelijk beantwoorden. Binnen de gestelde tijd moesten de leerlingen op deze manier zoveel mogelijk kaartjes afwerken.

Daarna heeft de docent het oude probleem ‘Wat is de relatie tussen een lijnstuk en een ander lijnstuk’ behandeld. Vervolgens heeft hij een aantal driehoeken op het bord getekend met één gemeenschappelijk punt en allen één lijnstuk van dezelfde lengte. Met de uiterste punten van al deze driehoeken kwam er een figuur tot stand en de leerlingen zagen gelijk dat het een cirkel ging worden. De docent heeft hierna wat uitgelegd over hoeken in een cirkel en daarbij zijn ook de koordenvierhoek en de middelpuntshoek van een koorde behandeld. Dit kon hij gebruiken als inleiding op een oud vraagstuk “Wat is de verhouding tussen de koorde en de hoek”. Hierbij vertelde hij het verhaal van de Koorde van Ptolemeus; dat verhaal vonden de leerlingen erg interessant en hierdoor kwamen ze uiteindelijk bij de sinus terecht. Het icoon bij deze aanpak is de pijl en boog in de cirkel. De les was eigenlijk meer meetkunde dan goniometrie. In de volgende lessen is het de bedoeling terug te gaan naar het icoon en daarmee op de eenheidscirkel te komen. Van hieruit wil hij de sinusgrafiek construeren met een leerling op het bord. De anderen zijn erg benieuwd naar het precieze verhaal en zouden willen dat hij een uitwerking van het verhaal zou maken. Docent 6 belooft dat hij het op papier zal zetten. Hiermee is de lesson study met het onderwerp ‘De introductie van de sinus’ afgerond. De groep zal, na de zomervakantie, een nieuwe lesson study starten met een ander onderwerp.

B Werkbladen

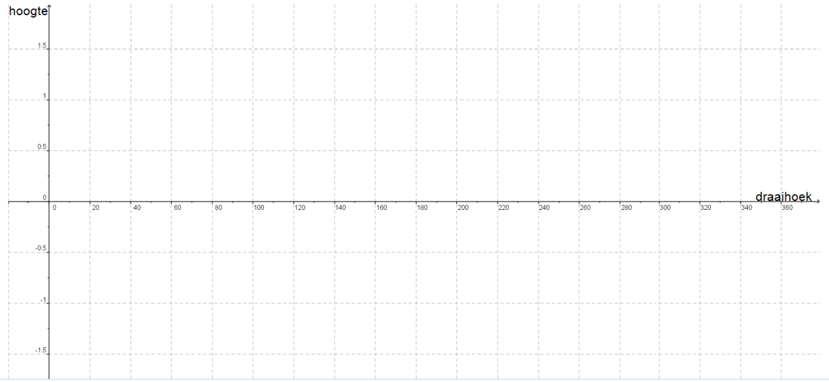
Docenten 1 en 2, Les 1



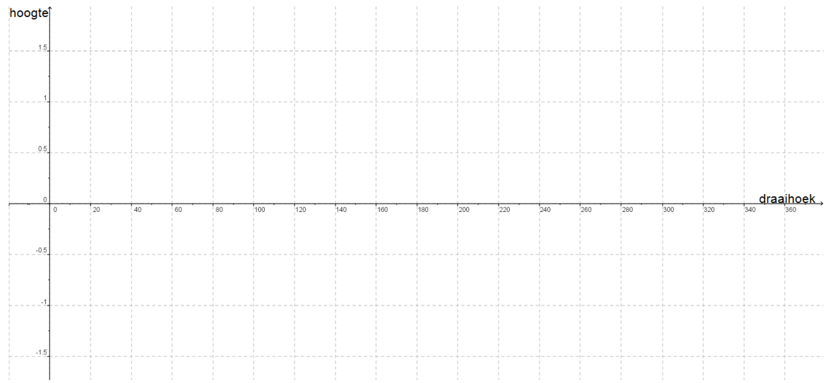


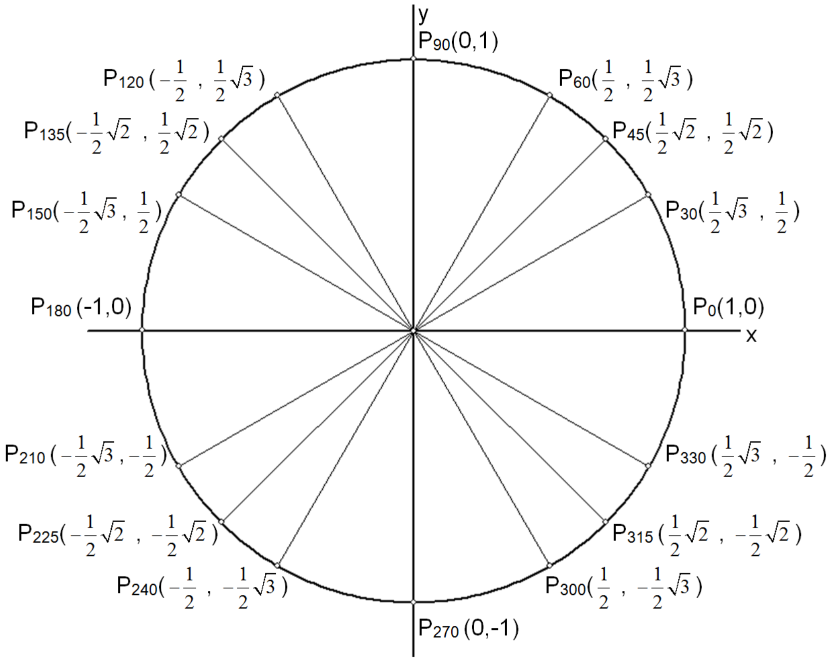
Docenten 1 en 2, Les 2

draaihoek	30																		
hoogte	0,50																		



draaihoek	30																		
…………	0,87																		

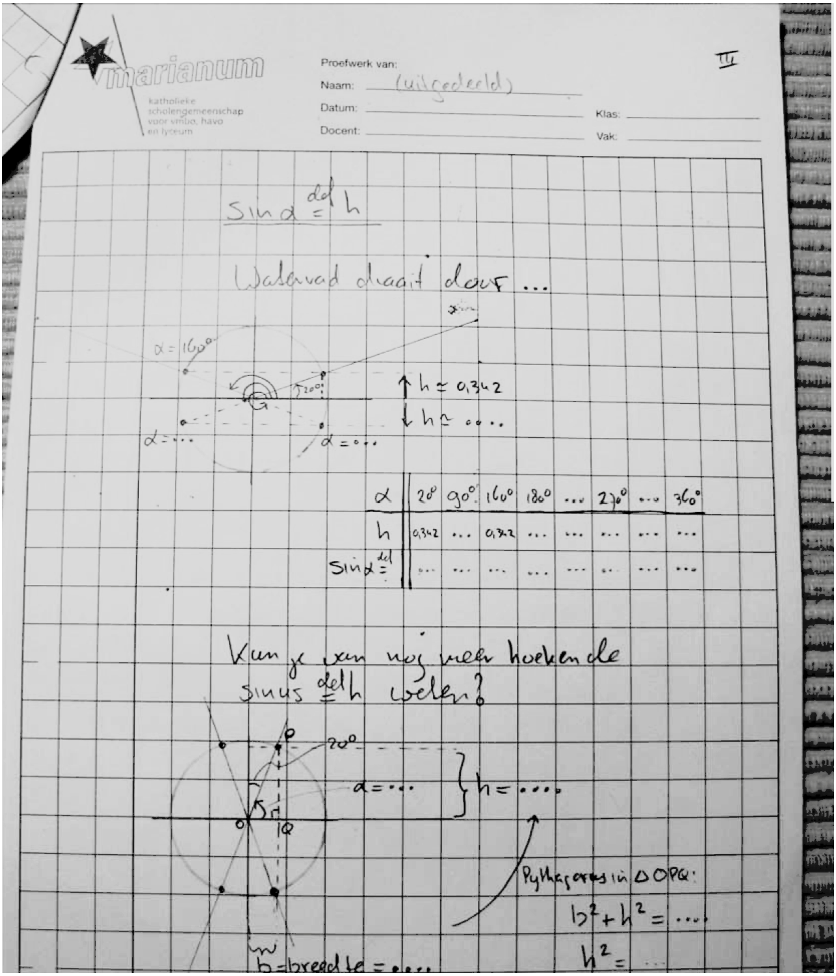




$\frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}71$ $\qquad$ $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}87$

Docent 3, Les 2

(Docent 3 heeft voor Les 1 geen werkbladen gebruikt)



marianum
katholieke scholengemeenschap voor vmbo, havo en lyceum

Proefwerk van:
Naam: (uitgedeeld)
Datum: Klas:
Docent: Vak:

III

$\sin\alpha \stackrel{def}{=} h$

Waterrad draait door ...

$\alpha = 160°$

$20°$

$\uparrow h \approx 0{,}342$

$\downarrow h \approx \ldots$

$\alpha = \ldots$

$\alpha = \ldots$

α	$20°$	$90°$	$160°$	$180°$	...	$270°$	...	$360°$
h	0,342	...	0,342	...	...	...	...	...
$\sin\alpha \stackrel{def}{=}$	...	...	...	...	...	...	...	...

Kun je ook nog meer hoeken de sinus $\stackrel{def}{=} h$ weten?

P

$20°$

$\alpha = \ldots$

$h = \ldots$

O

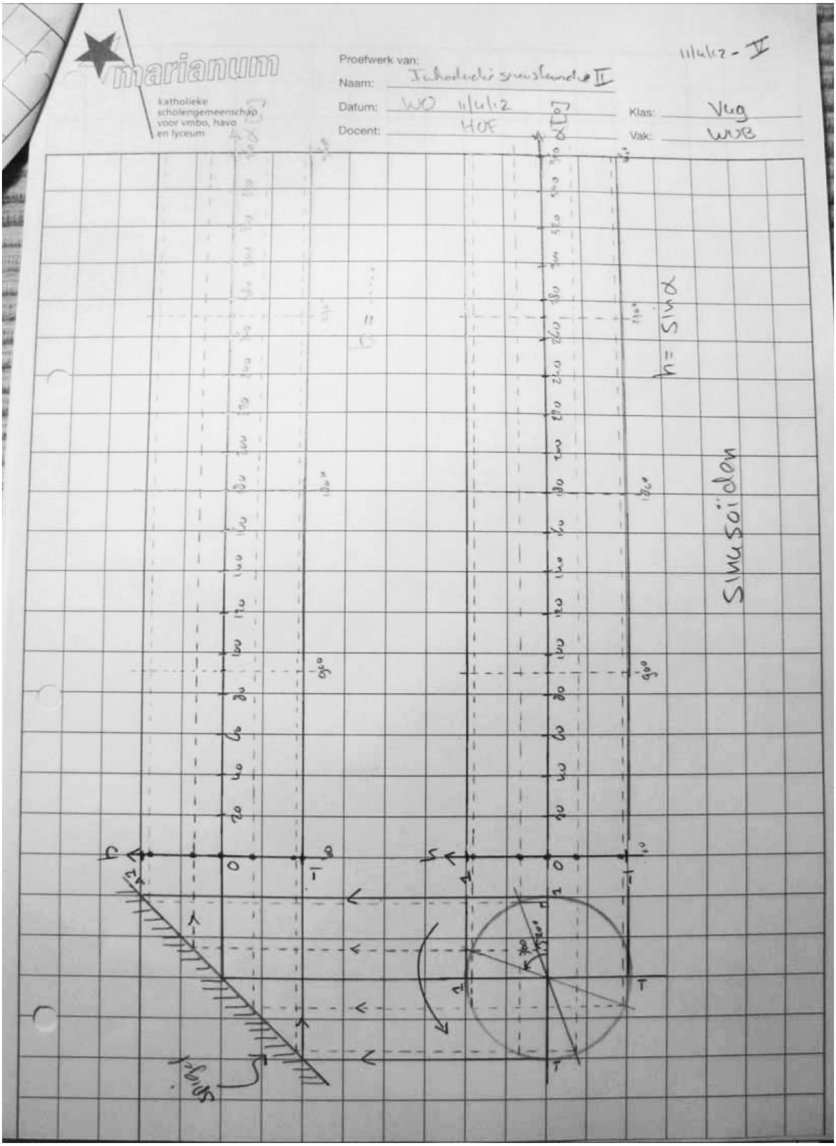
Q

Pythagoras in ΔOPQ:

$b^2 + h^2 = \ldots$

$h^2 = \ldots$

b = breedte = ...


marianum
katholieke scholengemeenschap voor vmbo, havo en lyceum
Proefwerk van:
Naam:
Datum:
Docent:
Klas:
Vak:
Sinusoïden

Docenten 4 en 5, Les 1

Wiskunde B vwo 4

Goniometrie - periodieke functies

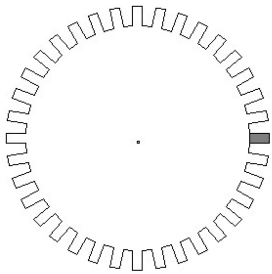
1 Tandradbanen

In de Alpen zijn op veel plaatsen aan het eind van de 19^{de} en aan het begin van de 20^{st} eeuw veel spoorwegen gebouwt. Maar omdat de traktie (wrijving) bij normale wielen niet groot genoeg is moest men op sommige plaatsen gebruikmaken van een *tandrad* systeem.

Figuur 1: Systeem Riggenbach

Eén van de systemen die hiervoor gebruikt werd is dat van *Riggenbach*. Hierbij is tussen het spoor een extra rail aangebracht zoals hiernaast.

Onder de treinen zit dan een tandrad dat grijpt in de derde rail. Hierdoor kan de trein de stijging wel aan. Zo'n tandrad kan een verschillend aantal tanden hebben. Hieronaast zie je een tandrad met 36 tanden. Eén daarvan hebben we ingekleurt.
Deze bevind zich nu op as-hoogte. Als de trein rijdt dan draait de tand verder. Na 9 tanden is deze op de hoogste positie.



Figuur 2: tandrad met 36 tanden

1 ☐ Waar bevind zich de gekleurde tand nadat er 18 tanden zijn verreden?

2 ☐ En waar bevind zich de gekleurde tand nadat er 27 tanden zijn verreden?

3 ☐ En na 369 tanden?

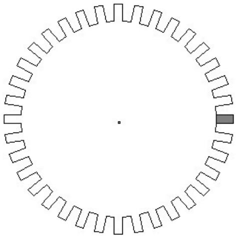
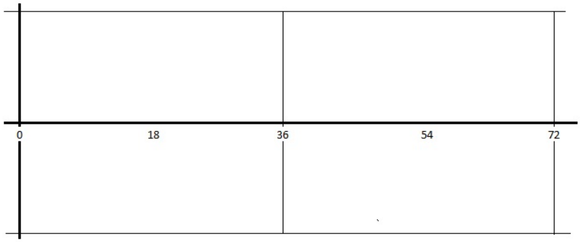
We kunnen natuurlijk ook de andere tussenliggende waarden van tanden krijgen.

4 ☐ Vul de onderstaande tabel in. Gebruik hierbij *plus* of *min* om aan te geven of de gekleurde tand boven of onder de as-hoogte ligt en geef een schatting op welk deel van de maximale hoogte de tand ligt.

tanden	0	3	9	18	...	36	60
hoogte	0	...	+1	...	$-\frac{1}{2}$	...	...

Nu we een tabel hebben kunnen we ook proberen een hoogte-grafiek te tekenen.

5 ☐ Teken de grafiek die hoort bij het tandrad van 36 tanden.

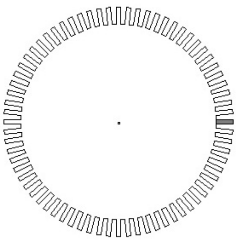
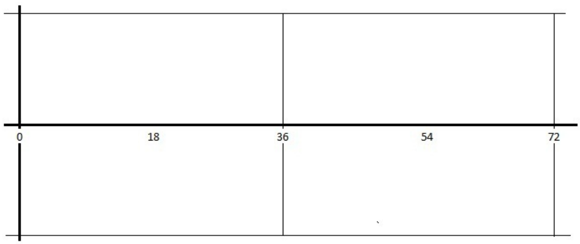



Maar niet alle treinen hebben tandraden van 36 tanden. Stel het tandrad heeft 72 tanden. Ook hier hebben we de tand rechts op as-hoogte gekleurd.

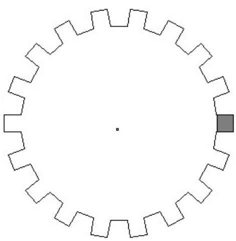
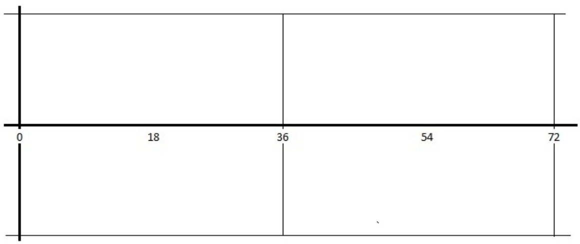
6 ☐ Hoeveel tanden duurt het voordat dit tandrad een halve draai gemaakt heeft?

7 ☐ Na hoeveel tanden is bij dit tandrad de gekleurde tand op z'n hoogste punt, gerekend vanaf de beginpositie?

8 ☐ Teken de hoogte-grafiek die hoort bij het tandrad van 72 tanden.

9 ☐ Teken de hoogte-grafiek die hoort bij het tandrad van 18 tanden.

Natuurlijk worden afstanden die afgelegd worden niet in tanden maar in meters of kilometers weergegeven. Zo is bv. op de website van de *Wendelsteinbahn* te lezen dat deze 7,6 km, of om precies te zijn 7624 meter, lang is. De tandraden die ze hier gebruiken hebben 18 tanden.


Erlebnis. Genuss. Tradition.

Die Zahnradbahn am Wendelstein - Deutschlands erste Hochgebirgsbahn

Die **Zahnradbahn auf den Wendelstein** war bei ihrem Bau in den Jahren 1910-1912 eine **technische Pionierleistung**. Seit mittlerweile rund 100 Jahren dient sie Berg-, Wander- und Skifreunden als sichere und bequeme Aufstiegshilfe.

1991 wurde die Bahn modernisiert. Seither kann man die knapp halbstündige Fahrt auf der malerischen Strecke, vorbei an saftig blühenden Almwiesen, durch schattigen Wald und über schroffe Felsen hinauf zum Wendelstein-Massiv in Doppeltriebwagen mit großzügigen Panoramafenstern genießen.

Technische Daten:

- **Talbahnhof Brannenburg/Inntal:** 508 m über NN
- **Kapazität Doppeltriebwagen (DTW)**: 130 Sitz- und 70 Stehplätze, d.h. 200 Pers./Fahrt, 400 Pers./Stunde
- **Fahrzeit**: 30 Minuten/einfach
- **Streckenlänge**: 7,6 km

100 Jahre
1912-2012
WENDELSTEINBAHN

Übrigens:

Im Mai 2012 feiert die Wendelstein-Zahnradbahn ihren 100. Geburtstag.

Zwei Nostalgiegarnituren aus der Gründerzeit werden auch heute noch zu besonderen Anlässen eingesetzt, wie z.B. bei den **Mondscheinfahrten**

Figuur 3: Website Wendelstein

10 ☐ Het tandrad heeft een straal van precies 0,5m. Wat is de omtrek van dit tandrad?

11 ☐ Hoevaak heeft het rad gedraaid als het de voledige 7624 m heeft afgelegd?

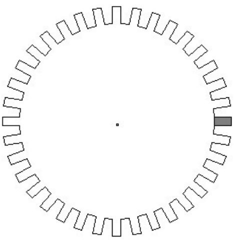
Om het ons zelf makkelijk te maken, nemen we vanaf nu steeds een straal van 1. Hierdoor is de omtrek van een rad precies 2π, de straal is nu immers 1.

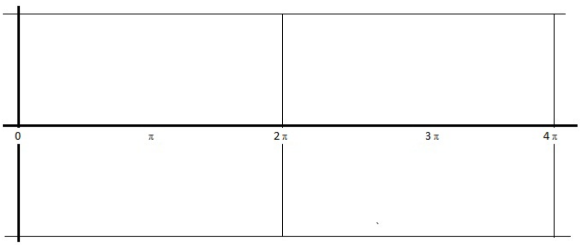
12 ☐ We kunnen nu de tanden omrekenen in een afstand die afgelegd is. We nemen nu weer een tandrad met 36 tanden.
Vul de onderstaande tabel in:

tanden	0	3	9	18	...	36	60
afstand	0	...	$\frac{1}{2}\pi$	...	$1\frac{1}{4}\pi$	...	...

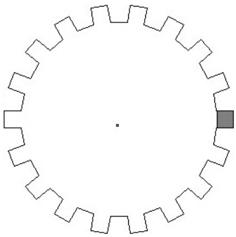
Ook nu kunnen we proberen een hoogte-grafiek te tekenen.

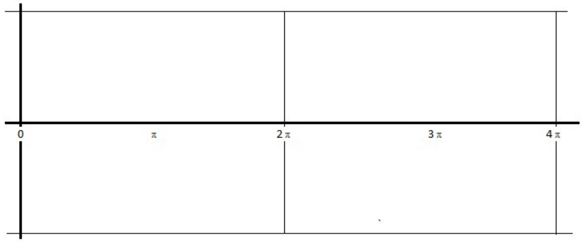
13 ☐ Teken de hoogte-grafiek die hoort bij het tandrad van 36 tanden.





14 ☐ En hoe ziet nu de grafiek die hoort bij het tandrad van 18 tanden eruit.





15 ☐ Vergelijk de grafiek van som 14 en som 7. Wat valt je op?

16 ☐ Hoe ziet de hoogte-grafiek van 72 tanden er uit?

Bij de x-as hebben we inmiddels getallen staan. Deze getallen heten $radialen$. Een $radiaal$ geeft dus de afgelegde weg op een cirkel weer. De straal is daarbij wel gelijk aan 1.
Maar ook bij de y-as kunnen we getallen neerzetten.

17 ☐ Wat is de grootste en kleinste waarde bij de y-as, als we de waarde 0 bij de as-hoogte neerzetten?

Huiswerk

We hebben een tandrad met 60 tanden. Wederom is de tand rechts naast de draai-as gekleurd.

1 ☐ Waar bevind zich de gekleurde tand na een omwenteling van 45 tanden.

Figuur 4: Tandradbaan

De staal van het rad is 1m.

2 ☐ Hoe groot is de omtrek van het tandrad?

3 ☐ Het rad draait 5,5 keer. Hoeveel meter heeft het rad afgelegd?

4 ☐ We nemen de hoogte van de as gelijk 0. Wat is de maximale hoogte die je kunt bereiken?

5 ☐ Als we de as op hoogte 1 stellen, wat zijn dan de minimale en maximale waarde die je kunt bereiken?

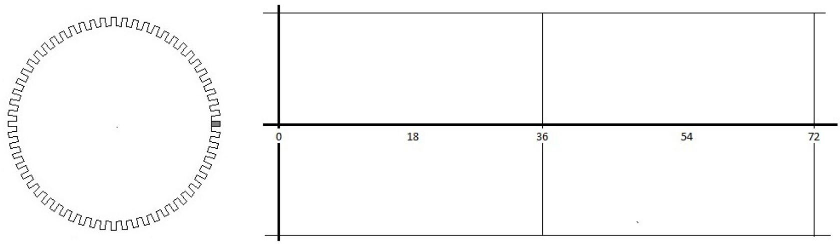
Hieronder zie je een tabel met tanden, afgelegde afstand en hoogte. De as-hoogte is 0.

6 ☐ Vul de tabel in:

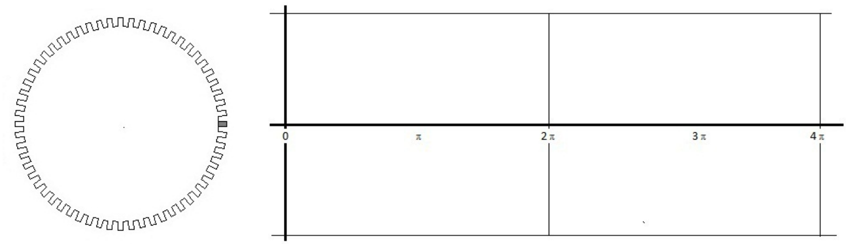
tanden	0	15	30	60	...	...	135
afstand	0	...	π	...	$1\frac{1}{4}\pi$	...	...
hoogte	0	...	...	...	...	0	...

7 ☐ In sommige vakjes zijn meerdere antwoorden mogelijk. Welke vakjes zijn dat.

8 ☐ Teken de hoogte-grafiek die hoort bij het tandrad van 60 tanden met op de x-as de tanden.



9 ☐ Teken de hoogte-grafiek die hoort bij het tandrad van 60 tanden met op de x-as de afstand.



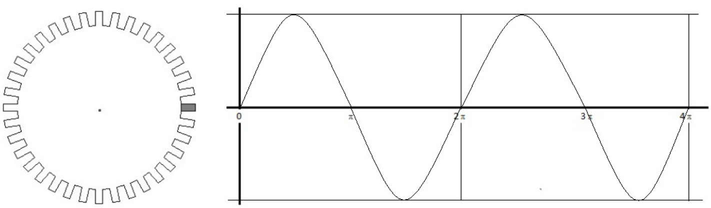
Tot slot een denkopgave. We hebben steeds een afstand-hoogte grafiek getekend.
Hieronder staat de tekening nog een keer. Probeer eens een breedte-afstand grafiek te tekenen.
Een tip. Bij de afstand 0 hoort een breedte van +1.

10 ☐ Teken de breedte-grafiek die hoort bij het tandrad van 60 tanden met op de x-as de afstand.

2 functie bij de grafiek

In de vorige les hebben de hoogte-afstand grafiek van een tand op een tandrad gemaakt. Hieronder zie je grafiek over een afstand van 4π. Denk eraan dat we de straal op 1 gezet hebben, zodat bij één hele draaiing een afstand van 2π wordt afgelegd. Het aantal tanden maakt dan niet meer uit. De afgelegde weg bij ieder tandrad is hetzelfde.

We gaan eens wat preciezer kijken naar de grafiek.



1 ☐ In de grafiek hierboven zie je eigenlijk twee keer hetzelfde stukje. Hoeveel weg heb je afgelegd om zo'n stuk te doorlopen?

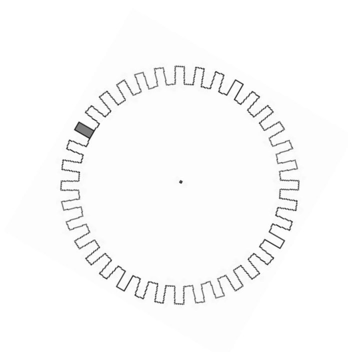
2 ☐ Waar vind je de afgelegde weg van de vorige vraag terug op het rad?

3 ☐ Bij welke afgelegde afstand vind je de laagste waarden? (twee antwoorden)

4 ☐ Hoeveel afgelegde weg zit tussen de beide gevonden waarden van de vorige vraag?

In de grafiek zie je een stukje dat zich steeds herhaald.
De afgelegde weg die één volledig stukje nodig heeft het *de periode* **van de grafiek**
Bij deze grafiek is de periode dus 2π

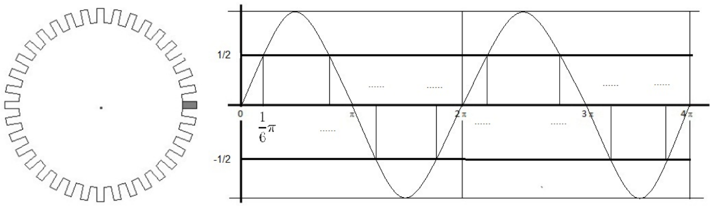
Vorige les hebben we gezien dat bij een rad van 36 tanden, na 3 tanden ongeveer de hoogte een $\frac{1}{2}$ bereikt wordt.
De afgelegde weg die hierbij hoort was $\frac{3}{36} \cdot 2\pi = \frac{1}{6}\pi$



5 ☐ Maar er is nog een tweede afstand waarbij de hoogte van een half bereikt wordt, bij welke afstand is dat?

6 ☐ Bij 21 tanden hoort een waarde voor de afgelegde weg van $1\frac{1}{6}\pi$ en een hoogte van ongeveer $-\frac{1}{2}$.
Bij welke waarde van de afgelegde weg is er ook sprake van $-\frac{1}{2}$?

7 □ In de grafiek hieronder zie je de lijnen van $\frac{1}{2}$ en van $-\frac{1}{2}$. De waarde bij $\frac{1}{6}\pi$ is al gegeven. Vul de rest van de waarden in.

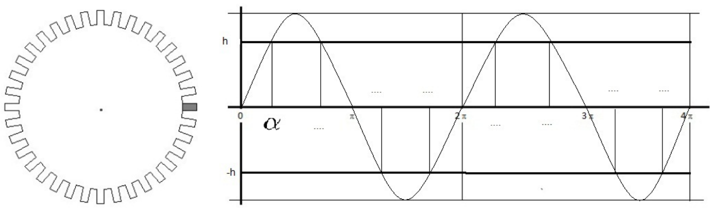


Nu algemeen: Bij een waarde van α voor de afgelegde weg hoort een waarde van h bij de hoogte.

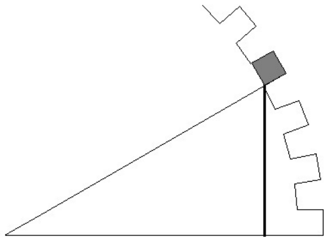
8 □ Bij welke waarde voor de afgelegde weg heb je dezelfde hoogte?

9 □ En bij welke waarden van de afgelegde weg heb je de hoogte van $-h$

10 □ Vul de onderstaande grafiek in:



Maar is de $\frac{1}{2}$ bij de afgelegde weg wel precies $\frac{1}{2}$ bij de afstand van $\frac{1}{6}\pi$?
Laten we eens precies kijken:



Hierboven zie je een gedeelte van het tandrad. Je ziet ook de hoogte eringetekend. Zo ontstaat een rechthoekige driehoek.

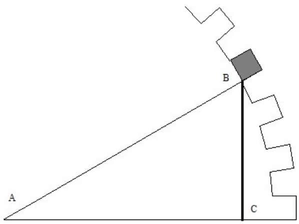
11 ☐ Hoeveel graden moet de gekleurde tand in totaal draaien om één hele omwenteling te maken?

12 ☐ Het betreft hier een tandrad met 36 tanden. We draaien precies één tandje verder. Hoe groot is de hoek waarover gedraaid wordt?

13 ☐ Hoe groot is de hoek bij de as, in de situatie hierboven?

14 ☐ Welke afstand is er op dit moment afgelegd (in radialen)

Hiernaast zie je hetzelfde plaatje nog een keer. De hoek bij A is dus 30° ofwel $\frac{1}{6}\pi$
De driehoek ABC is een rechthoekige driehoek.



15 ☐ Hoe groot is de schuine zijde in deze driehoek? (Zijde AB)

16 ☐ Bereken de hoogte BC in deze driehoek

Bij een afstand van $\frac{1}{6}\pi$ hoort dus een hoogte van $\frac{1}{2}$. Laten we eens verschillende andere waarden uitrekenen:

17 ☐ Vul de tabel in:

tanden	1	2	3	4	5	6	7	8	9
afstand	$\frac{1}{18}\pi$	$\frac{2}{18}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	.....	.....	.....	.....	.....	.....
hoogte	.....	.....	$\frac{1}{2}$	.....	.....	.....	.....	.....	.....

Blijkbaar heeft de $sinus$ iets te maken met de hoogte van de tand.
Als we kijken naar de sin dan weten we dat deze gelijk is aan $\frac{overstaande}{schuine}$.
Maar ook hebben we de schuine (dat is de straal) gelijk genomen aan 1 dus geldt:

$$sin(\alpha) = \frac{overstaande}{schuine} = \frac{overstaande}{1}$$

dus de $overstaande$ is gelijk aan de $sin(\alpha)$. En deze overstaande is de hoogte die we zoeken. Dus het klopt.

Tot nu toe hebben we de sin alleen gebruikt bij een hoek, in een rechthoekige driehoek. Maar hier zoeken we afgelegde weg - hoohte grafiek. Gelukkig kan de Grafische rekenmachine dat ook. Daarvoor moet de rekenmachine op $radian$, dus $radialen$ staan.

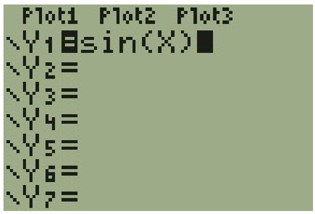
Als je de grafische rekenmachine op $radialen$ hebt staan dan werkt het invullen van de afstand ook.

18 ☐ Bereken $sin(\frac{1}{6}\pi)$

19 ☐ Bij welke afstand (in radialen) hoort een hoogte van $0,75$?

20 ☐ De rekenmachine geeft maar 1 waarde, maar we weten dat er twee zijn. Geef ook de andere waarde waarbij de hoogte $0,75$ is

De afstand-hoogte grafiek is dus een grafiek van de $sinus$. Laten we eens kijken of de GRM deze ook kan tekenen.



21 ☐ Vul in $y_1 = sin(x)$

22 ☐ Laat de x-as van 0 tot 4π lopen en de y-as van -1 tot 1, en teken daarna de grafiek.

En we krijgen dezelfde grafiek als in figuren die we eerder gezien hebben. De afstand-hoogte grafiek heeft blijkbaar als functievoorschrift $f(x) = sin(x)$.

23 ☐ Teken ook de lijn $y = \frac{1}{2}$ met de GRM in de grafiek van de sinus.

24 ☐ Bereken de beide snijpunten van $sin(x)$ met $y = \frac{1}{2}$.

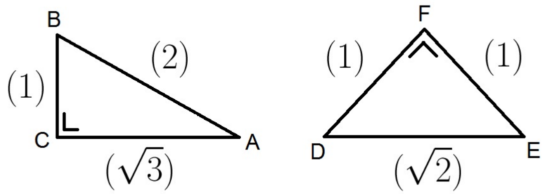
25 ☐ Kloppen deze waarden met die van som 7?

Je kunt vanuit de hoek ook de afstand en de hoogte berekenen.

26 ☐ Vul de tabel in:

hoeken	$60°$	$90°$	$150°$	$210°$	$235°$	....	....	....	....
afstand	$\frac{1}{3}\pi$	....	....	.....	.....	.....	.....	2π	$2\frac{1}{4}\pi$
hoogte	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	....	....	.....	-1	$-\frac{1}{2}$	.....	.....

Uit de derde klassen ken je de volgende beide driehoeken:



27 ☐ Hoe groot is de hoek bij A?

28 ☐ Welke afstand hoort bij $\angle A$?

29 ☐ Vul de tabel in:

	$\angle A$	$\angle B$	$\angle D$
hoek in graden	.....	.....	.....
afstand in radialen	.....	....	.....
hoogte (exact)	.....	.....	.....

30 ☐ Geef de exacte waarde van

a) $sin(1\frac{1}{6}\pi)$
b) $sin(\frac{3}{4}\pi)$
c) $sin(1\frac{5}{6}\pi)$
d) $sin(1\frac{1}{3}\pi)$
e) $sin(-\frac{1}{4}\pi)$

31 ☐ Bereken alle exacte waarden van α met α tussen 0 en 2π:

a) $sin(\alpha) = -\frac{1}{2}$
b) $sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
c) $sin(\alpha) = -1$
d) $sin(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
e) $sin(\alpha) = 0$

C Docentenenquêtes

Op de volgende pagina's staan de ingevulde docentenenquêtes.

Docent 1

Algemene vragen

1. Aantal jaren ervaring met lesgeven: **24**
2. Bevoegdheid als wiskundedocent: **1e graads**
3. School: **OSG Erasmus**
4. In welke klassen geeft u het meest les: **bovenbouw**
5. Aantal doorlopen lesson study projecten: **3**

Vragen mbt tot dit lesson study project

6. Wat was de mate van tijdsbesteding aan dit lesson study project?
   Gemiddeld zo'n 4 uur per week
7. Wat is uw mening over de bijeenkomsten op de UT?
   Nuttig en leerzaam. Je kunt discussiëren met collega's over de beste aanpak. Welke voor- en nadelen zitten aan de verschillende aanpakken en waar leg je de klemtoon bij je lesopzet.
8. Wat vindt u van de organisatie van dit project? Wat ging goed en wat kan beter?
   De groep wordt wat groot waardoor de lessen te veel een compromis van verschillende meningen wordt. Verder ben ik tevreden over de huidige organisatie.
9. Ervaart u het project als waardevol? En waarom wel/niet?
   Wel. Zie vraag 7. Dit zijn zaken waarvoor je in de dagelijkse gang van zaken weinig tijd hebt.
10. Wat zijn uw belangrijkste leermomenten betreffende de introductie van sin(x)?
    De aanpak met driehoekjes ging dit jaar niet goed. Vorig jaar heb ik een soortgelijke aanpak gekozen en toen liep het als een trein. Het verschil zit hem in het icoon "molentje". Moet nog eens goed op een rijtje zetten hoe dat komt.
11. Hoe is dit project van invloed op uw toekomstige manier van de introductie van sin(x)?

Weet ik nog niet. Mogelijk ga ik voor de andere opzet mbv tandraderen. Het kan ook zijn dat ik voor mezelf ontdek waar de verschillen tussen mijn huidige aanpak en die van het jaar daarvoor liggen. In dat geval bespreek ik dat wel weer in de CoL.

12. Zijn er veranderingen in uw manier van lesgeven in het algemeen (werkvormen, voorbereidingen, lesdoelen, vraagstelling, toetsing, etc)?
    Als docent ontwikkel je je steeds dus ook ik verander elk jaar wel het een en ander. Het leuke van de CoL is dat je dit deels kunt bespreken met collega's.
13. Deelt u ervaringen van de lesson study met collega's op school? Zo ja, met welke secties en in welke vorm?
    Binnen mijn eigen sectie besprek ik eea op sectievergaderingen. Verder laat ik het afhangen van de belangstelling van mijn collega's. Een deel weet dat ik bij de CoL zit en tijdens de koffiepauzes komt dit dan ter sprake. Dit zijn collega's uit allerlei secties.
14. Heeft u, ter afsluiting, nog een mooie anekdote over dit lesson study project?
    Zo aan het eind van de vakantie staat school zo ver weg van het dagelijks leven dat ik geen leuke anekdotes paraat heb. Volgende week begint het feest weer en dan komen deze dingen ook wel weer boven drijven. De afstand die je in de vakantie van je werk neemt vind ik erg prettig zodat je weer met een frisse blik aan het nieuwe schooljaar kunt beginnen.

Docent 2

Algemene vragen

1. Aantal jaren ervaring met lesgeven: **2**
2. Bevoegdheid als wiskundedocent:**In opleiding voor 1e graads**
3. School: **CSG Reggesteyn**
4. In welke klassen geeft u het meest les: **was beide, nu bovenbouw**
5. Aantal doorlopen lesson study projecten: **alleen deze**

Vragen mbt tot dit lesson study project

6. Wat was de mate van tijdsbesteding aan dit lesson study project?
   Wat onduidelijke vraag… Ik heb vol meegedaan aan het project. Omdat het (zeker in mijn geval) combineerde met de lesson study van een ander onderwerp. Qua tijd kan ik het helaas ook moeilijk inschatten, omdat het voor mij de eerste keer van voorbereiden van de lessen was. Dus een groot deel van de besteedde tijd is eigenlijk gewoon werktijd, niet specifiek voor het project.
7. Wat is uw mening over de bijeenkomsten op de UT?
   Zeer nuttig en erg leerzaam. Het bespreken van de lessen en de inzichten horen van collega's heb ik als zeer waardevol ervaren. Daarnaast was het ook leuk om te doen. Je leert veel over de denkwijze van je/de leerlingen, maar je ontwikkelt jezelf ook.
8. Wat vindt u van de organisatie van dit project? Wat ging goed en wat kan beter?
   Het liep eigenlijk allemaal erg soepel. Het enige dat bij mij als nieuweling wat vreemd overkwam was dat er onderwerpen waren gekozen die al eerder gebruikt waren. Hierdoor werd er soms ook oud materiaal gebruikt, wat volgens mij beter is om niet te doen. Aangezien zelf voor het eerst meedraaide was dit voor mij van beperkte invloed. Voor anderen kan ik me voorstellen dat dit niet zo zal zijn geweest.
9. Ervaart u het project als waardevol? En waarom wel/niet?
   Ja, om eerder genoemde redenen. Het verschaft veel inzicht in de leerlingen, hoe ze denken en wat ze meenemen van je uitleg en welke aanpak goed voor ze werkt. Daarnaast leer je veel van collega's en krijg je nieuwe inspiratie voor en inzichten in je eigen functioneren.
10. Wat zijn uw belangrijkste leermomenten betreffende de introductie van sin(x)?
    Vooral het moment dat je een les hebt uitgedacht en visualiseert hoe de leerlingen er mee aan de slag zullen gaan, maar dat het compleet

anders loopt. Dat leerlingen een bepaalde link niet zien en dus een andere kant op gaan dan uiteindelijk de bedoeling is. Dit is niet erg, het geeft juist veel inzicht in de denkprocessen en verbanden die leerlingen leggen. Ook leer je er erg goed van om te coachen als docent, in tegenstelling tot doceren. Dat leerlingen zelf nieuwe stof ontdekken is prachtig, maar wel tijdrovend.

11. Hoe is dit project van invloed op uw toekomstige manier van de introductie van sin(x)?
    Na het geven van mijn les werd duidelijk dat het niet de juiste aanpak was voor mijn groep. We hebben dit verder aangepakt en collega's hebben een andere route gekozen hierdoor. Dit bleek goed te lopen. De uiteindelijke lessen die er nu na het project liggen zal ik zeker gebruiken in de toekomst. Ook geven de eerdere pogingen een goede basis voor gevarieerde manieren van uitleggen en mogelijkheden om verschillende leerlingen op verschillende wijzen aan de slag te zetten met het onderwerp sin(x).
12. Zijn er veranderingen in uw manier van lesgeven in het algemeen (werkvormen, voorbereidingen, lesdoelen, vraagstelling, toetsing, etc)?
    Zeker, lessen richt ik meer in op een manier dat leerlingen zelf ontdekken hoe de nieuwe stof in elkaar zit. Ik bedenk meer manieren van doorvragen en probeer in te schatten hoe leerlingen reageren. Ook is mijn manier van coachen in mijn ogen verbeterd.
13. Deelt u ervaringen van de lesson study met collega's op school? Zo ja, met welke secties en in welke vorm?
    Jazeker. Ik heb in de unit een presentatie gegeven over de lesson study. De manier van aanpakken, de ervaring en de resultaten. Daarnaast heb ik met mijn vakgroep gesproken over de meer vakspecifieke aspecten ervan en de ontwikkelde les met ze gedeeld.
14. Heeft u, ter afsluiting, nog een mooie anekdote over dit lesson study project?
    Een leuke ervaring was dat tijdens het geven van de les, leerlingen wisten dat het een soort project was. Er kwam van een aantal leerlingen ook de vraag: "is dit wel wiskunde?" en "waarom doen we dit?". Na afloop kwamen echter dezelfde leerlingen met opmerkingen als "leuk dat we het eens iets anders aangepakt hebben" en "nu begrijp ik het denk ik beter dan als het gewoon uitgelegd was". Zeker een succeservaring dus!

Docent 3

Algemene vragen

1. Aantal jaren ervaring met lesgeven: **VO 5jr / Universiteit 16jr**
2. Bevoegdheid als wiskundedocent: **1e graads**
3. School: **Marianum, Groenlo**
4. In welke klassen geeft u het meest les: **bovenbouw**
5. Aantal doorlopen lesson study projecten: **3**

Vragen mbt tot dit lesson study project

6. Wat was de mate van tijdsbesteding aan dit lesson study project?
   160u/jr – klopt wel. 1e les -> 8 uur, tweede les 4 uur
7. Wat is uw mening over de bijeenkomsten op de UT?
   Inspirerend: les doordenken, les ontwerpen, les geven, les observeren en les evalueren. Zo moet dat.
8. Wat vindt u van de organisatie van dit project? Wat ging goed en wat kan beter?
   Prima. Niets meer aan doen.
9. Ervaart u het project als waardevol? En waarom wel/niet?
   Ja – dit is imho de ENIGE zinvolle manier van professionalisering.
10. Wat zijn uw belangrijkste leermomenten betreffende de introductie van sin(x)?
    De vorm van de kromme zien de leerlingen snel genoeg, het formaliseren van dat inzicht – dat is het probleem.
11. Hoe is dit project van invloed op uw toekomstige manier van de introductie van sin(x)?
    Als er (voorbereidings)tijd is en goede lokalen bovendien, geef ik zo mijn eerste twee lessen.
12. Zijn er veranderingen in uw manier van lesgeven in het algemeen (werkvormen, voorbereidingen, lesdoelen, vraagstelling, toetsing, etc)?
    Voor de lessen die in de CoL voorbereid zijn, heb ik nu goed

materiaal – dat ik waar het kan gebruik. Andere opbrengst: 1e stimulans om eigen materiaal te maken en 2e interesse in "open" courseware.

13. Deelt u ervaringen van de lesson study met collega's op school? Zo ja, met welke secties en in welke vorm?
    Ja, met de bovenbouw wiskunde sectie, via verhalen en uitwisseling van lesplannen.
14. Heeft u, ter afsluiting, nog een mooie anekdote over dit lesson study project?
    Nee.

Docent 4

Algemene vragen

1. Aantal jaren ervaring met lesgeven: **17**
2. Bevoegdheid als wiskundedocent: **1^e^ graads**
3. School: **Het Assink Lyceum**
4. In welke klassen geeft u het meest les: **bovenbouw**
5. Aantal doorlopen lesson study projecten: **1**

Vragen mbt tot dit lesson study project

6. Wat was de mate van tijdsbesteding aan dit lesson study project?
   Ongeveer 200 uur
7. Wat is uw mening over de bijeenkomsten op de UT?
   Leuk, goed uitdagend
8. Wat vindt u van de organisatie van dit project? Wat ging goed en wat kan beter?
   Organisatie is goed, weinig punten voor verbeteringen
9. Ervaart u het project als waardevol? En waarom wel/niet?
   Het is waardevol, vooral voor je eigen zienswijze op onderwijs en het leren van leerlingen
10. Wat zijn uw belangrijkste leermomenten betreffende de introductie van sin(x)?
    Verschil in inzicht van wat een sinus is. De leerlingen zien het als iets dat bij een hoek hoort, maar we willen graag een functie zien. Hoe krijg je de leerling zo ver? Goede handvatten gekregen die bruikbaar zijn.
11. Hoe is dit project van invloed op uw toekomstige manier van de introductie van sin(x)?
    Ik ga dit jaar het gemaakte materiaal weer iets aanpassen en dan gebruiken. Ik zal waarschijnlijk ook een vervolg maken voor meer lessen. Als de tijd het toelaat dan hoop ik het hele hoofdstuk te vervangen
12. Zijn er veranderingen in uw manier van lesgeven in het

algemeen (werkvormen, voorbereidingen, lesdoelen, vraagstelling, toetsing, etc)?
In de werkvormen niet, wel in de vraagstellingen en toetsen. Daar kijk ik nu toch nog meer dan dat ik al deed naar de zienswijze van de leerling. Wat ziet hij in de stof, en wat wil ik dat hij ziet.? Het bereiken daarvan is dan een nieuw doel. Hierbij is het goed om eerst na te denken over wat wil je graag bij de deze stof bereiken. (ookal ben ik het niet altijd eens met voorgestelde doelen binnen de COL. Maar daar is een goede discussie voor)

13. Deelt u ervaringen van de lesson study met collega's op school? Zo ja, met welke secties en in welke vorm?
    Ja, maar nog te beperkt. Ik heb een verhaaltje gehouden bij een sectievergadering en het nieuwe materiaal aangeboden aan de sectie, met wisselende reacties. De één ziet het helemaal zitten, de ander helemaal niet. Logisch…
14. Heeft u, ter afsluiting, nog een mooie anekdote over dit lesson study project?
    pfoe… nee eigenlijk niet. Alles liep wel goed, maar om nou te zeggen dat er tijdens de lessen of later nog iets leuks gebeurt is, nee.

Docent 5

Algemene vragen

1. Aantal jaren ervaring met lesgeven: **25**
2. Bevoegdheid als wiskundedocent: **bezig met 1e graads**
3. School: **Rietveld Lyceum Doetinchem**
4. In welke klassen geeft u het meest les: **bovenbouw**
5. Aantal doorlopen lesson study projecten: **5**

Vragen mbt tot dit lesson study project

6. Wat was de mate van tijdsbesteding aan dit lesson study project?
   Naast de bijeenkomsten in Twente en het nodige leeswerk ben ik nog 4x ca 2 uur met een collega aan de slag geweest en heb 1 les van een andere docent bijgewoond.
7. Wat is uw mening over de bijeenkomsten op de UT?
   Prima, niets op aan te merken.
8. Wat vindt u van de organisatie van dit project? Wat ging goed en wat kan beter?
   Uitstekend. Als al ziet hoe moeilijk het is om binnen school collega's bij elkaar te krijgen/zaken georganiseerd te krijgen, dan verdient dit project waarbij zoveel diverse parameters een rol spelen een compliment.
9. Ervaart u het project als waardevol? En waarom wel/niet?
   Zeker: het is leerzaam. Mijn reden om erbij te komen was in eerste instantie vooral om eens niet het standaard commentaar/visie van de collega's die je al 25 jaar kent te horen, maar dat van volslagen vreemden. Verder is er een voortreffelijke input vanuit de UT door hun medewerkers die congressen bezoeken, literatuur aanreiken… kortom die de markt volgen.
10. Wat zijn uw belangrijkste leermomenten betreffende de introductie van sin(x)?
    Het idee om de standaardopzet vanuit de definitie van een sinus in een driehoek los te laten en te zien dat dit net zo goed werkt.

11. Hoe is dit project van invloed op uw toekomstige manier van de introductie van sin(x)?
Ik zal deze introductie blijven houden, laat echter later in een herhaling ook de kortere directe relatie tot de eenheidscirkel zien. Heb tevens de variant van "Docent 6" gebruikt in de zesde klas vwo om vanuit Ptolemeus mooie dingen als de sinusregel, formules van de dubbele hoek etc. te demonstreren. Had daar net als "Docent 6" altijd al een zwak voor, maar zou als ik hem niet in de COL had getroffen dit toch niet zo makkelijk hebben gedaan; ik heb zo een sparringpartner.
12. Zijn er veranderingen in uw manier van lesgeven in het algemeen (werkvormen, voorbereidingen, lesdoelen, vraagstelling, toetsing, etc)?
Ja, zeker nu twee collega's ook meedoen en de schoolleiding enthousiast is: we krijgen vanuit de schoolorganisatie meer tijd om als sectie aandacht aan de door jullie genoemde zaken te besteden… zie ook 13.De ontwikkelingen gaan natuurlijk niet supersnel (het kost nogal tijd) maar we zijn er vooral op gericht om een aantal lessen waarin nieuwe begripsvormende onderwerpen worden geïntroduceerd alternatief aan te bieden.
13. Deelt u ervaringen van de lesson study met collega's op school? Zo ja, met welke secties en in welke vorm?
Yep, we doen mee met "de Professional", ook dit cursusjaar weer. De sectie engels zou mee gaan doen, of dit lukt is een tweede.
14. Heeft u, ter afsluiting, nog een mooie anekdote over dit lesson study project?
Weet niet zo gauw wat te bedenken. Ik heb deze lln. om roostertechnische redenen nu niet meer, maar ze zijn al wel komen zeggen dat ze me missen en ook dit jaar toch wel verwachten dat ik op z'n minst een paar lessen kom verzorgen met een filmploeg erbij.

Docent 6

Algemene vragen

1. Aantal jaren ervaring met lesgeven: **26**
2. Bevoegdheid als wiskundedocent: **1e graads**
3. School: **Almere College Kampen**
4. In welke klassen geeft u het meest les: **bovenbouw**
5. Aantal doorlopen lesson study projecten: **2**

Vragen mbt tot dit lesson study project

6. Wat was de mate van tijdsbesteding aan dit lesson study project?
   10 uur
7. Wat is uw mening over de bijeenkomsten op de UT?
   Goed om bij te praten
8. Wat vindt u van de organisatie van dit project? Wat ging goed en wat kan beter?
   Wat betreft m'n eigen organiseer-vermogen: mijn bijdrage kwam minder goed uit de verf dan verwacht wegens tijdsgebrek.
9. Ervaart u het project als waardevol? En waarom wel/niet?
   Zeker. Het met meerdere mensen nadenken over onderwijs ervaar ik als leerzaam.
10. Wat zijn uw belangrijkste leermomenten betreffende de introductie van sin(x)?
    Het uitvogelen waar het begrip eigenlijk voor uitgevonden is; het zien waar de leerlingen toch mee blijken te worstelen.
11. Hoe is dit project van invloed op uw toekomstige manier van de introductie van sin(x)?
    Ik blijf zoeken naar een (nog betere) introductie.
12. Zijn er veranderingen in uw manier van lesgeven in het algemeen (werkvormen, voorbereidingen, lesdoelen, vraagstelling, toetsing, etc)?

Ja, maar vaak ook moet je je toch weer afstemmen met collega's waardoor de veranderingen weer minder worden.

13. Deelt u ervaringen van de lesson study met collega's op school? Zo ja, met welke secties en in welke vorm?
    Ja, met de (wiskunde)sectie. Door mondeling verslag te doen.
14. Heeft u, ter afsluiting, nog een mooie anekdote over dit lesson study project?
    Nee.