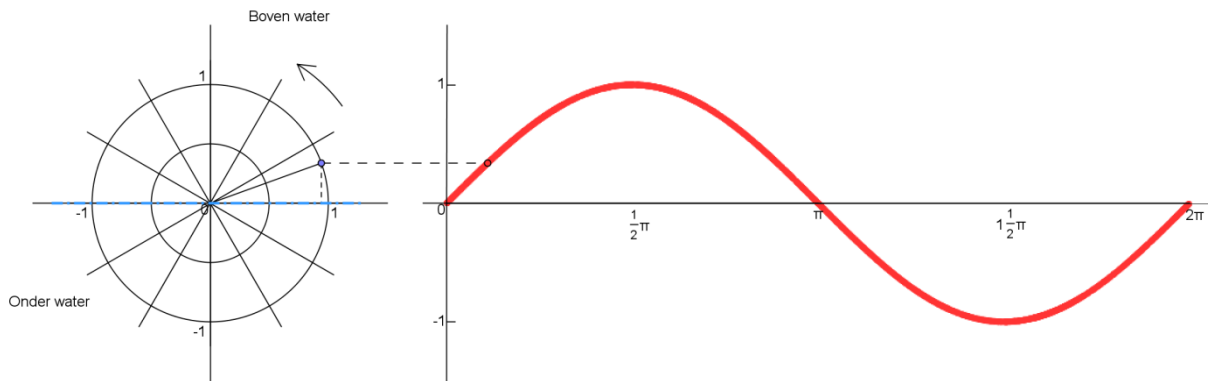


Sinus als procept

Het effect op het begrip van goniometrie door het gebruik van de *embodied world* van Tall tijdens het wiskundeonderwijs.



Cindy Berloth
S9015337
Universiteit Twente
oktober 2013

Voorwoord

Dit verslag is geschreven in het kader van het vak Onderzoek van Onderwijs van de 1^e graads lerarenopleiding aan de Universiteit Twente. Er wordt hierbij een open opdracht gemaakt, waarbij het onderwerp zelf mag worden gekozen. Het doel van deze opdracht is om op een sociaal wetenschappelijk niveau te kijken naar de begripsvorming van leerlingen.

De opdracht is uitgevoerd op het Stedelijk Lyceum locatie Zuid in Enschede, in een 4 havo wiskunde B klas. Tevens is gebruik gemaakt van de resultaten van een 4 havo klas een jaar eerder op dezelfde locatie.

Tijdens de uitvoering heb ik hulp gehad van veel mensen. Als eerst wil ik de 4 havo klas zelf bedanken omdat er zonder hen geen onderzoek zou zijn geweest. Daarnaast wil ik Nellie Verhoef van de Universiteit Twente bedanken voor haar geduld als ik weer eens een tijd niets van me liet horen, en haar snelle en waardevolle reacties op de momenten dat ik wel contact opnam.

Ook wil ik Marco bedanken voor de onvoorwaardelijke steun tijdens het zware studiejaar. Veel van het huishouden en het gezin is op zijn schouders terechtgekomen. Zonder die hulp had ik het niet gered.

Tenslotte wil ik Elvira en Durin bedanken voor hun geduld en begrip. Hoe vaak zijn zij op hun tenen achter mij langs geslopen om me toch maar door te laten werken. Hoe vaak heb ik de woorden 'nee, we kunnen mama niet vragen, die zit nu achter de computer dus ze is aan de studie' niet horen fluisteren. Vanaf nu is de tijd weer voor jullie!

Cindy Berloth

Enschede, 2013

Samenvatting

In dit onderzoek wordt gebruik gemaakt van de theorie van de reis door drie denkwerelden van de wiskunde van David Tall. De *embodied* (tastbare) aanpak wordt onder de loep genomen om vast te kunnen stellen of deze aanpak een positief effect kan hebben op een begripsverhoging van leerlingen rondom goniometrie.

De onderzoeksvraag van dit onderzoek luidt:

“Kan, met nadruk op de ‘*embodied world*’ het begrip van goniometrie van 4 havo B-leerlingen op een hoger niveau gebracht worden dan met behulp van de huidige methode Getal en Ruimte?”

In één 4 havo wiskunde B klas is een lessenserie gegeven over goniometrie op een tastbare manier. Afsluitend hieraan is een toets gehouden. De resultaten hiervan zijn vergeleken met een 4 havo wiskunde B klas van een jaar eerder, die les hadden gekregen volgens de gebruikelijke methode.

De experimentele groep blijkt een vergelijkbaar begripsniveau te hebben bereikt als de controlegroep. Op opgave niveau zijn er wel verschillen. Hoewel het om een kleine groep leerlingen is gegaan, en er nog kanttekeningen te plaatsen zijn, lijkt het erop dat de tastbare aanpak een positief effect kan hebben op het ontwikkelen van het abstracte denkvermogen van de leerlingen. Dit resultaat nodigt uit tot vervolgonderzoek.

Inhoudsopgave

Voorwoord	2
Samenvatting	3
1. Inleiding.....	6
1.1. Aanleiding	6
1.2. Doelstelling	6
1.3. Onderzoeksvraag.....	7
1.4. Leeswijzer	7
2. Theoretisch kader	8
2.1. Leertheorieën en denkniveaus in de wiskunde	8
2.1.1. Piaget	8
2.1.2. Bruner	8
2.1.3. Van Hiele.....	8
2.1.4. Tall.....	9
2.1.5. Samenhang tussen de leertheorieën en denkniveaus	10
2.2. De overgang van praktisch naar theoretisch niveau	12
3. Methode.....	14
3.1. Deelnemers.....	14
3.2. Onderzoeksinstrument.....	14
3.3. Materiaal.....	15
3.3.1. Goniometrie.....	15
3.3.1.1. Verhouding in een rechthoekige driehoek.....	15
3.3.1.2. Waarden in de eenheidscirkel.....	16
3.3.1.3. Functies met bijbehorende grafieken.....	17
3.3.1.4. Sinus en cosinus als procept	17
3.3.2. Lesmethode groep A.....	18
3.3.3. Lesmethode groep B.....	18
3.4. Procedure.....	19
3.4.1. Lessen geven	19
3.4.1.1. Lessen in groep A	19
3.4.1.2. Lessen in groep B	19
3.4.2. Dataverzameling.....	19
3.4.3. Data verwerking	19
3.4.4. Data analyse	20
3.4.4.1. Analyse toets opgaven.....	20
4. Resultaten.....	24
5. Conclusies, discussie en aanbevelingen.....	27
5.1. Conclusie	27

5.2.	Discussie.....	27
5.3.	Aanbevelingen.....	28
6.	Literatuur.....	30
Appendix I.	Lessenserie	31
Appendix II.	Resultaten toets opgaven.....	39

1. Inleiding

1.1. Aanleiding

Tegenwoordig is wiskunde één van de drie kernvakken in het middelbaar onderwijs. Dat betekent dat vrijwel alle leerlingen in de bovenbouw havo, en alle leerlingen in de bovenbouw vwo verplicht zijn eindexamen te doen in (minimaal) één van de wiskunde vakken A, B (eventueel in combinatie met D) of C. Het doel is dat alle leerlingen een wiskundig basisoniveau hebben als ze de middelbare school verlaten. Dit wordt getest met diverse schoolexamens en een afsluitend centraal eindexamen. Maar wat zegt dit cijfer precies over het denkniveau van de leerlingen?

In de klas merk ik dat veel leerlingen zich het ‘trucje’ eigen maken en dat steeds maar weer toepassen. Door op deze manier procedureel opgaven te oefenen kunnen de meeste leerlingen hun toetsen wel halen, maar het echte inzicht dat nodig is bij vervolgoopleidingen is lang niet altijd aanwezig. Slechts een enkele leerling vraagt door en laat zien dat hij een beter begrip heeft van het geheel. Veel wetenschappers hebben theorieën ontwikkeld over het wiskundig denken en het onderwijzen hiervan. Tall (2004) definieert 3 wiskundedenkwereelden, de zogeheten ‘*embodied world*’, de ‘*symbolic world*’ en de ‘*formal world*’. Een leerling begint met het leren van wiskunde in de ‘*embodied world*’ met tastbare voorbeelden, waarna langzaam een overgang naar de ‘*symbolic world*’ wordt gemaakt. Uiteindelijk, in het vervolgonderwijs, betreedt de leerling ‘*formal world*’. Deze werelden beïnvloeden elkaar en begripsniveau kan verhoogd worden door een nieuw wiskundig onderwerp te introduceren in de ‘*embodied world*’. Door nadruk te leggen op tastbare voorbeelden in de ‘*embodied world*’ wil ik het inzicht van leerlingen verbeteren, zodat minder leerlingen teruggrijpen naar het trucje. Leerlingen moeten beter in staat zijn om het geheel te overzien en zo te kiezen hoe ze een bepaalde opgave op lossen.

Eén van de deelgebieden van de wiskunde waarop nog maar weinig onderzoek is gedaan omtrent de didactiek ervan is die van de goniometrie. Daarnaast begon ik halverwege mijn stage met dit onderwerp in mijn eigen 4 Havo klas. In dit onderzoek richt ik mij daarom op de goniometrische kennis van de Havo leerling. Naar mijn ervaring vinden ze goniometrie vaak abstract, en vooral een verzameling van formules waaruit ze maar net de juiste moeten vinden om toe te passen. De overgang van de sinus en cosinus in een driehoek (meetkundig) naar een abstractere vorm als in de eenheidscirkel of zelfs als functie met een grafiek (analytisch) vinden ze moeilijk om te maken.

1.2. Doelstelling

Het wiskundeonderwijs op de Havo is zodanig ingericht dat gestart wordt met het ophalen van voorkennis. De docent behandelt nieuwe theorie in kleine stapjes en de leerlingen gaan oefenen met gestructureerde opgaven, waarbij wordt opgebouwd in moeilijkheidsgraad. Uiteindelijk wordt getest of de leerlingen de lesstof begrepen hebben middels een afsluitende toets. Afhankelijk van de school is dat soms een toets over slechts één hoofdstuk, soms over meerdere hoofdstukken. Op deze manier van onderwijs kan worden aangesloten door in het aanbieden van de theorie meer nadruk te leggen op de *embodied world*, eventueel aangevuld met extra opgaven.

Het doel van dit onderzoek is om na te gaan of het goniometrieonderwijs op de Havo verbeterd kan worden met behulp van extra nadruk op de *embodied world* van Tall, zodat leerlingen meer inzicht verwerven in de goniometrische verhoudingen, representaties en relaties.

Met dit onderzoek wil ik een bijdrage leveren aan de onderwijspraktijk, zodat (nieuwe) docenten wiskunde deze kennis als hun kennisbasis kunnen gebruiken in hun eigen klassen.

1.3. Onderzoeksvraag

Op basis van de bovenstaande overwegingen heb ik de volgende onderzoeksvraag geformuleerd:

“Kan, met nadruk op de ‘embodied world’, het begrip van goniometrie van 4 havo B-leerlingen op een hoger niveau gebracht worden dan met behulp van de huidige methode Getal en Ruimte?”

Hierbij heb ik mij beperkt tot de leerstof die de leerlingen zich normaal gesproken eigen maken aan de hand van Hoofdstuk 8 van de methode Getal en Ruimte deel 2 editie 2007. Dit betreft de overgang van sinus en cosinus als verhouding in een rechthoekige driehoek naar de eenheidscirkel en de analytische functies met grafieken, het werken met radialen, transformaties van de 2 goniometrische functies en trillingen.

In hoofdstuk 2 worden de theoretische achtergronden van Tall meer in detail besproken.

1.4. Leeswijzer

In hoofdstuk 2 komen de theoretische achtergronden van dit onderzoek aan bod op het gebied van cognitie. Hoofdstuk 3 behandelt de onderzoeksopzet, de deelnemers, de instrumenten, het materiaal en de analyse. In hoofdstuk 4 staan de resultaten van het onderzoek opgenomen en in hoofdstuk 5 wordt afgesloten met conclusies, discussie en aanbevelingen.

2. Theoretisch kader

In de onderzoeksvraag staat het effect op de denkniveaus van leerlingen op het gebied van goniometrie in 4 Havo centraal. Het is daarom van belang om een goed beeld te hebben van de denkniveaus in het algemeen en de wiskunde werelden van Tall in het bijzonder.

2.1. Leertheorieën en denkniveaus in de wiskunde

Diverse wetenschappers hebben zich gebogen over het leren van wiskunde. Hoewel dit onderzoek zich met name richt op de theorie van Tall, wil ik toch kort de ideeën van enkele andere wetenschappers noemen, om tot een totaalbeeld te komen. Tall (2004) geeft zelf een samenvatting van die theorieën.

2.1.1. Piaget

In de zestigerjaren was het wiskundeonderwijs vooral voorbehouden aan wiskundige vak beoefenaars. Jean Piaget (1896-1980) was één van de weinigen die ideeën had over het leren zelf. Hij onderscheidde een drietal niveaus van abstractie:

1. *Empirical abstraction*, met de focus op hoe een kind betekenis geeft aan eigenschappen van objecten. De basis is werelds onderzoek.
2. *Pseudo-empirical abstraction*, met de focus op hoe een kind betekenis geeft aan eigenschappen van acties op objecten. Voor het uitvoeren van acties op objecten is een schematisch beeld van het object nodig.
3. *Reflective abstraction*, met de focus op het assimileren van gethematiseerde objecten in een cognitief schema. Het kind kent niet alleen de feiten, het begrijpt.

2.1.2. Bruner

Ongeveer gelijktijdig met Piaget onderscheidde ook Jerome Bruner (1915- heden) een drietal niveaus waarop een individu een model maakt van de werkelijkheid met het oog op communicatie:

1. *Enactive* is gebaseerd op waarneming, belevenis.
2. *Iconic* is gebaseerd op een schematische weergave van de werkelijkheid.
3. *Symbolic* is het meest abstracte niveau en is gebaseerd op symbolen als weergave van de werkelijkheid.

2.1.3. Van Hiele

Waar Piaget en Bruner onderzoek deden met betrekking tot cognitieve ontwikkeling van kinderen in het algemeen, legde Pierre van Hiele (1909-2010) zich toe op het leren van wiskunde en in het bijzonder de geometrie. Van Hiele heeft zijn theorie in de loop der jaren in verschillende versies gepresenteerd. In latere jaren onderscheidt hij geen 3, maar zelfs 5 niveaus, welke als volgt samengevat kunnen worden (Hoffer, 1981):

1. *Recognition*. Dit is het laagste, visuele niveau. Een kind dat leert op dit niveau ‘speelt’ met objecten en leert door te kijken en ervaren.
2. *Analysis* (door Tall (2012) *description* genoemd). Op dit niveau onderscheidt het kind eigenschappen van objecten.

3. *Ordering* (door Tall (2012) *definition* genoemd). Met behulp van de eigenschappen van objecten worden verbanden gelegd.
4. *Deduction*. De leerling begrijpt het belang van deducties en is in staat bewijzen te geven.
5. *Rigor*. Op dit niveau is de leerling in staat abstracte deducties te maken.

In de meeste studies worden vooral de eerste 3 niveaus beschouwd, deze worden gelinkt aan het middelbaar onderwijs.

2.1.4. Tall

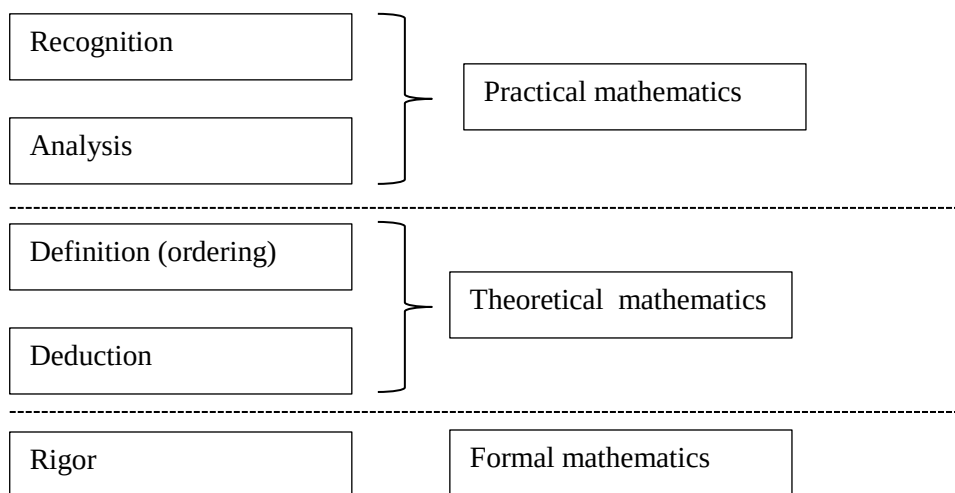
David Tall (1941 – heden) bouwt voort op de ideeën van Piaget, Bruner en van Hiele, en verricht, hoewel gepensioneerd, nog steeds onderzoek. Tall neemt een centrale plaats in in het hedendaags onderzoek naar het wiskundig leren, en is daarom voor mij de reden dit onderzoek te richten op zijn drie werelden. Hij richt zich op het wiskundig denken en de ontwikkeling van de cognitieve structuur. Tall (2004) onderscheidt 3 opvolgende denkniveaus, die hij de “*three worlds of mathematics*” noemt:

1. *Conceptual - embodied world*: de tastbare wereld, gebaseerd op de zintuigen. Om aan te tonen dat iets klopt wordt gebruik gemaakt van de zintuigen. Perceptie, actie en experimenten vormen een belangrijk onderdeel in het leren binnen deze wereld. Zo kan worden aangetoond dat $3 + 2 = 2 + 3$ door te spelen met blokjes en deze in groepjes samen te leggen.
2. *Proceptual - symbolic world*: de symbolische wereld, gebaseerd op het werken met symbolen. Deze symbolen kunnen zowel voor een proces staan (om wiskunde te doen) als voor een concept (om over wiskunde te denken). Een leerling die opereert binnen deze wereld toont de eerder genoemde gelijkheid $3 + 2 = 2 + 3$ aan door de beide sommen te berekenen en de uitkomsten te vergelijken.
3. *Axiomatic - formal world*: de formele wereld, waarin gewerkt wordt met formele rekenregels en definities. Eigenschappen zijn gedefinieerd en concepten worden geconstrueerd door formeel bewijs. Een leerling die dit niveau bereikt heeft is in staat te bewijzen dat de gelijkheid $2 + 3 = 3 + 2$ waar is door gebruik te maken van de commutatieve wet van het optellen, die zegt: $x + y = y + x$.

In de tweede wereld van Tall, de symbolische wereld, staat de term *procept* centraal, een samentrekking van de woorden *proces* en *concept*. Gray and Tall (1994) definiëren *procept* als een mengsel van drie componenten: een *proces* leidt tot een wiskundig *object* (het concept), en een *symbool* dat wordt gebruikt om ofwel het proces ofwel het object voor te stellen.

Een voorbeeld hiervan is het symbool “+” in $5 + 4$, welke gebruikt wordt om zowel het *proces* van optellen weer te geven, als wel het *concept* som ($5 + 4 = 9$). Gray en Tall suggereren dat het vermogen om flexibel om te kunnen gaan met deze dubbelzinnige symboliek de basis is van succesvol wiskundig denken. Hoe beter een leerling in staat is proceptueel te denken, hoe beter hij is in wiskunde.

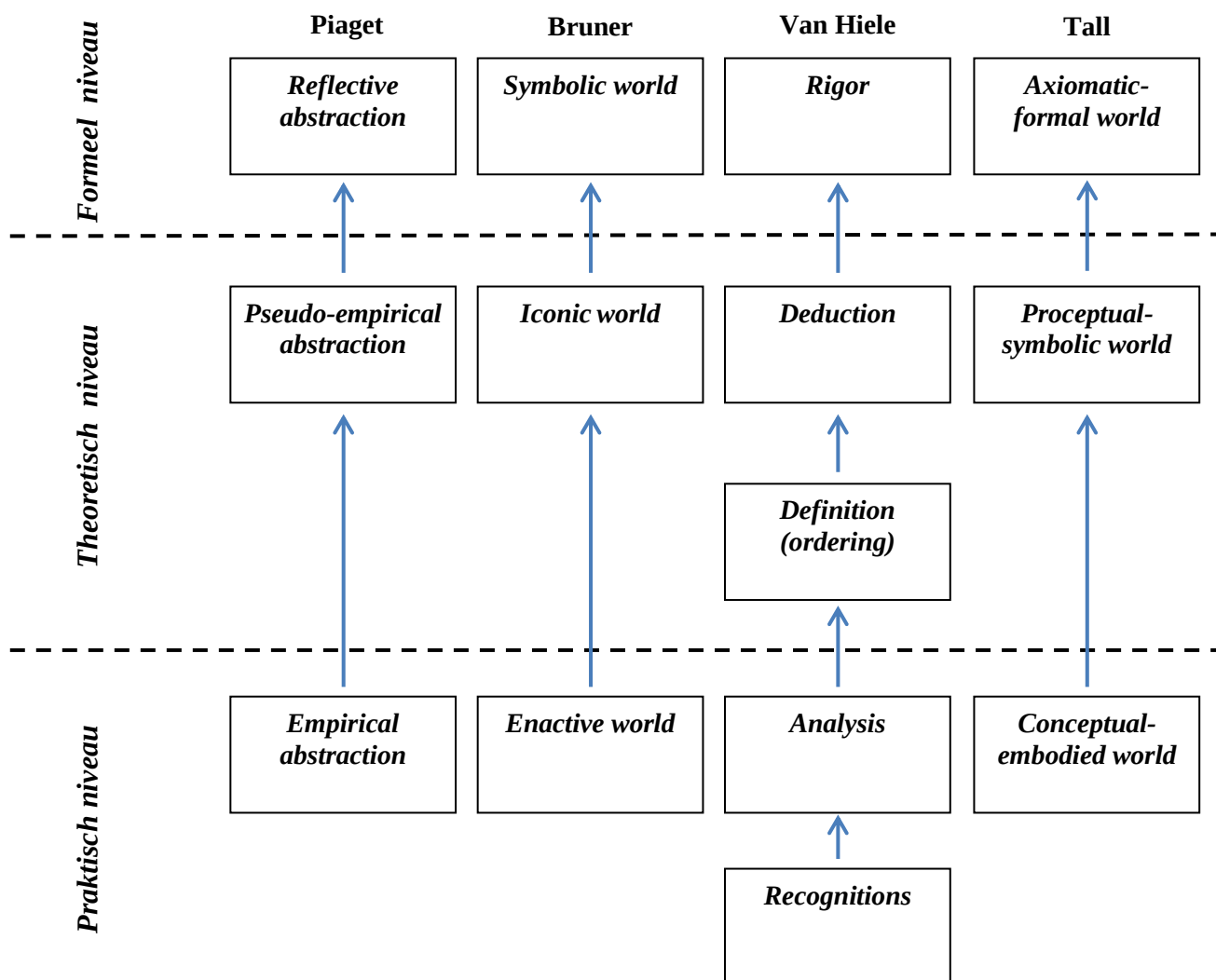
Tall ziet het leren van wiskunde als een proces waarbij de verschillende stadia worden doorlopen. De relatie met de niveaus van Van Hiele legt Tall (2012) als volgt:



Figuur 1. Relatie tussen ontwikkelniveaus van Tall en Van Hiele, Tall(2012)

2.1.5. Samenhang tussen de leertheorieën en denkniveaus

Hoewel niet alle vier theorieën evenveel niveaus kennen, zitten er veel overeenkomsten in. Ter illustratie zijn de 4 theorieën samen gebracht in één figuur, weergegeven op de volgende pagina. In de kolommen zijn per wetenschapper de niveaus opgenomen die zij onderscheiden. Het onderste niveau is het laagste niveau, dat waarin de leerlingen starten met leren. Het leerproces van leerlingen is weergegeven met pijlen. Globaal zijn 3 vergelijkbare niveaus te onderscheiden, weergegeven door de stippelijnen.



Figuur 2. Vergelijking denkniveaus in leertheorieën in de wiskunde

Het proces begint bij alle 4 wetenschappers in de tastbare wereld op een praktisch niveau, waarbij veel gebruik gemaakt wordt van voorbeelden en metaforen, van zien en doen. Bruner en Piaget geven een algemeen schema en gaan op dit niveau uit van pure waarnemingen. Van Hiele richt zich op vormen in de reële wereld en het herkennen van eigenschappen, vanuit de meetkunde bekeken. Tall kijkt meer naar algebra en beschouwt naast tastbare experimenten ook gedachtenexperimenten.

Bij het (wiskunde) leren moeten langzaamaan de gebruikte contexten losgelaten worden zodat de leerling een overstap maakt van het praktische naar het theoretische niveau. Dit niveau eist een zekere abstractie van de leerlingen, waarbij het kunnen werken met eigenschappen van belang is. Piaget en Bruner gaan uit van een schematische weergave van de werkelijkheid. Bij Van Hiele gaat het om letterlijke eigenschappen van een meetkundig begrip, waarmee verbanden gelegd worden. Tall bekijkt in de algebra proces en concept als geheel.

Pas wanneer de leerling het wiskundig begrip volledig losgekoppeld heeft van voorbeelden en kan deduceren van eigenschap naar eigenschap heeft hij het formele niveau bereikt. In plaats van het analyseren van objecten om eigenschappen te herkennen (op het praktische niveau), gaat hij uit van

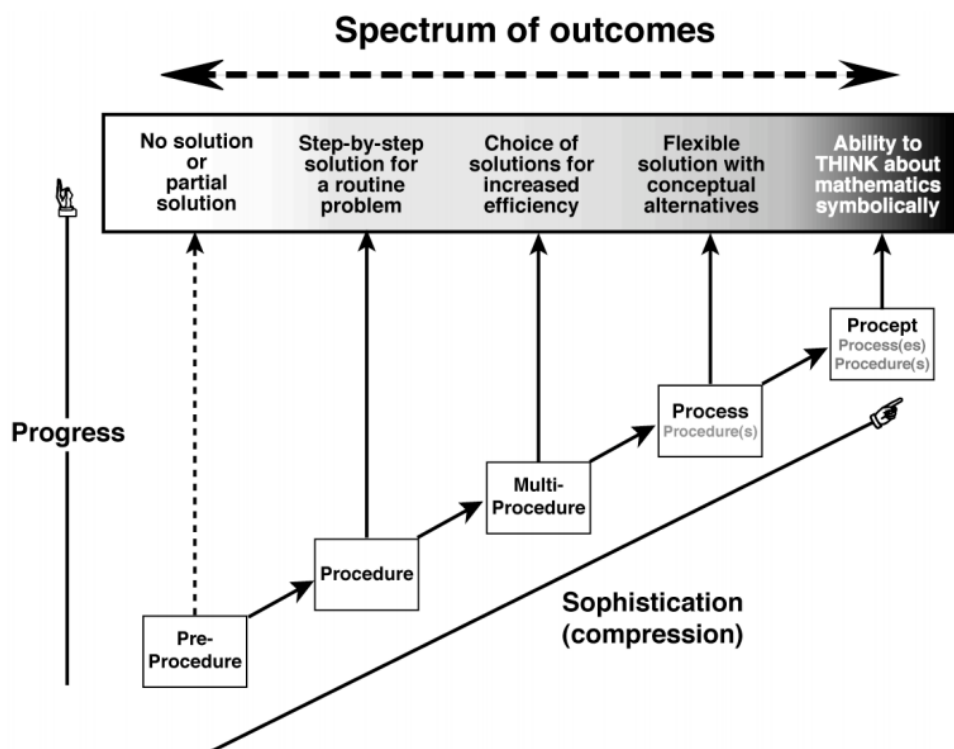
bestaande eigenschappen om nieuwe eigenschappen te bewijzen. Zo kan met behulp van de eigenschap $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ en de definitie $\frac{1}{x^a} = x^{-a}$ de nieuwe eigenschap $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ afgeleid worden. De samenhang tussen eigenschappen is duidelijk, de leerling gebruikt abstracte symbolen voor een wiskundig begrip. Tall (2004) geeft aan dat dit laatste niveau op het middelbaar onderwijs niet wordt gehaald.

Het algemene model van 3 niveaus is toepasbaar in elk wiskundig gebied. Nog niet op ieder gebied is echter evenveel onderzoek gedaan. Zeker binnen de goniometrie is nog geen kader ontwikkeld waarbinnen deze niveaus gedefinieerd kunnen worden. In dit document verwijs ik naar de werelden van Tall met de termen tastbaar, symbolisch en formeel.

2.2. De overgang van praktisch naar theoretisch niveau

Mijn onderzoek richt zich op de overgang van het praktische niveau naar het theoretische niveau in de werelden van Tall (de overgang van tastbaar naar symbolisch). Als de focus van een leerling zich verplaatst van de visualisatie naar het weergeven in en manipuleren van symbolen maakt de leerling deze overstap. Zoals eerder genoemd suggereert Tall dat het vermogen om flexibel om te kunnen gaan met de dubbelzinnige symboliek van procepten de basis is van succesvol wiskundig denken. Hoe beter een leerling in staat is proceptueel te denken, hoe beter hij is in wiskunde.

Tall (2005) geeft de ontwikkeling van het abstractieniveau van stap-voor-stap procedures naar het kunnen gebruiken van procepten weer in het volgende schema.



Figuur 3. Ontwikkeling abstractieniveau volgens Tall

Een procedure zoals genoemd in dit schema bestaat uit een opeenvolging van acties en beslissingen, in een vaste volgorde, waarbij iedere uitgevoerde stap een volgende oproept.

De term proces wordt gebruikt wanneer de focus komt te liggen op input en output, en niet meer op de specifieke procedure. Een leerling is in staat de meest efficiënte procedure te selecteren in een gegeven context.

Een eenvoudig voorbeeld is het volgende: De procedure *tel 3 op bij een getal en vermenigvuldig de uitkomst met 2* en de procedure *vermenigvuldig een getal met 2 en tel bij de uitkomst 6* op geven het zelfde resultaat. Beide kunnen ook nog eens weergegeven worden met symbolen: $2(n + 3)$ en $2n + 6$. Deze vier representaties geven hetzelfde proces weer. Voor een leerling die voor het eerst te maken krijgt met deze bewerkingen zullen deze procedures echter totaal verschillende zijn. Hij kan geen switch maken van de één naar de ander, laat staan dat hij ze flexibel kan gebruiken om een som als $7 \cdot 13$ makkelijk uit het hoofd op te lossen. Een leerling die dit proces wel goed in de vingers heeft, zal een opgave als $7 \cdot 13$ eenvoudig op lossen door de opgave te splitsen in de sommen $7 \cdot 10$ en $7 \cdot 3$.

Proceptueel denken treedt uiteindelijk op als de leerling in staat is om symbolen te manipuleren tot het punt waarop ze gezien worden als objecten. Deze objecten kunnen vervolgens op een flexibele manier worden ontbonden en weer samengesteld. Binnen de goniometrie, het onderwerp van dit onderzoek, kan de sinus bijvoorbeeld gezien worden als verhouding tussen twee zijden in een rechthoekige driehoek, maar ook als een manier om deze te berekenen (tegenoverliggende gedeeld door schuine). De sinus als procept wordt verder uitgewerkt in paragraaf 3.3.1.5.

3. Methode

Om de onderzoeksvraag te kunnen beantwoorden is een nieuwe lesopzet ontwikkeld, en deze is vergeleken met de huidige gebruikte methode (Getal en Ruimte). Daarnaast is getoetst of de resultaten inderdaad beter zijn dan bij de standaard methode.

3.1. Deelnemers

Het onderzoek is uitgevoerd op het Stedelijk Lyceum in Enschede, locatie Zuid. Deze locatie heeft slechts 1 wiskunde B klas in 4 Havo, bestaande uit 21 leerlingen (waarvan 2 doublanten). De studie speelt zich af binnen de reguliere lessen, de leerlingen kregen een alternatief programma aangeboden. Gezien de grootte van de groep is ervoor gekozen de hele groep de alternatieve opzet aan te bieden, dit is dus de experimentele groep. Op deze school is geen parallelklas waarvan de resultaten vergeleken kunnen worden met deze klas. De controlegroep is daarom gedefinieerd door de klas van het voorgaande schooljaar (2010-2011) en de resultaten van de toets die zij naar aanleiding van dit hoofdstuk gemaakt hebben.

Daarmee zijn de groepen deelnemers als volgt gedefinieerd:

	Positie	Deelnemers	Aantal	Doublanten
A	Controlegroep	4 Havo wiskunde B 2010-2011	25	
B	Experimentele groep	4 Havo Wiskunde B 2011-2012	21 (19)	2

Tabel 1. Opbouw deelnemersgroepen

De doublanten zijn in de resultaten buiten beschouwing gelaten, omdat zij door de opzet van het onderzoek zowel in de controlegroep als in de experimentele groep hebben deelgenomen.

Aangezien vooral de didactiek gewijzigd is ten opzichte van de reguliere methode, heb ik, als onderzoeker, zelf ook de lessen onderwezen en als eerste aanspreekpunt voor de leerlingen gefungeerd. Het verschil in persoonlijkheid van de onderwijzer kan uiteraard van invloed zijn op de resultaten van het onderzoek.

3.2. Onderzoeksinstrument

Nadat de lesstof is aangeboden moet vastgesteld worden op welke niveaus de leerlingen denken. Omdat de leerlingen de wiskundige theorie nog niet beheersen is het niet mogelijk ze te vragen de opgaven van de toets van vorig jaar, of opgaven achter in het boek op te lossen. Daarom is ervoor gekozen geen pre-test te doen.

Het onderzoeksinstrument is de toets die het voorgaande jaar afgenomen is. Hierin zit lesstof van meerdere hoofdstukken. Alleen de opgaven die betrekking hebben op goniometrie zijn beschouwd. De leerlingen in de experimentele groep hebben deze toets als oefentoets gekregen, waarbij de antwoorden op de goniometrische opgaven ingeleverd werden. Op deze manier konden de antwoorden vergeleken worden met die van de leerlingen van vorig jaar.

In de toets hadden 3 vragen betrekking op het hoofdstuk goniometrie, deze staan beschreven in paragraaf 3.4.4.2 Analyse toetsopgaven.

3.3. Materiaal

Zoals aangegeven lag de basis van de lesstof in hoofdstuk 8, Goniometrie, van de methode Getal en Ruimte. Deze methode is aan een analyse onderworpen en een alternatief lesplan is ontworpen.

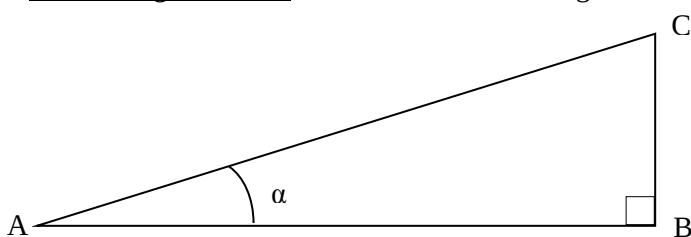
In dit hoofdstuk wordt eerst een algemene beschouwing gegeven van de onderwerpen binnen de goniometrie die de 4 Havo leerlingen moeten beheersen. Vervolgens wordt kort ingegaan op de lesmethode Getal en Ruimte en aansluitend wordt het extra materiaal voor het onderzoek beschreven.

3.3.1. Goniometrie

De goniometrie in dit onderzoek beperkt zich tot de begrippen sinus en cosinus. Deze kunnen in verschillende representaties weergegeven worden, waarvan een aantal hieronder beschreven is. Naast deze representaties kennen we nog andere representaties zoals de parametervoorstelling. Deze worden in 4 Havo niet onderwezen en zijn daarom ook niet meegenomen in dit onderzoek.

3.3.1.1. Verhouding in een rechthoekige driehoek

Op een meetkundig niveau worden sinus en cosinus (meestal in combinatie met de tangens die in dit onderzoek niet beschouwd is) weergegeven als definitie gebaseerd op verhoudingen in een rechthoekige driehoek zoals in onderstaande figuur is weergegeven.



Figuur 4. Verhoudingen in een rechthoekige driehoek

De leerlingen leren de definities

$$\sin \alpha = \frac{\text{Overstaande rechthoekszijde}}{\text{Schuine zijde}} \left(= \frac{BC}{AC} \right),$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Aanliggende rechthoekszijde}}{\text{Schuine zijde}} \left(= \frac{AB}{AC} \right) \text{ en}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Overstaande rechthoeks zijde}}{\text{Aanliggende rechthoekszijde}} \left(= \frac{BC}{AB} \right).$$

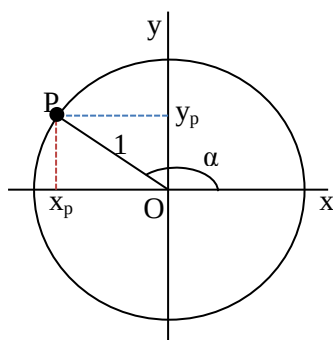
Vaak kom je het ezelsbruggetje SOSCASTOA tegen:

- Sinus is
- Overstaande rechthoekszijde gedeeld door
- Schuine zijde
- Cosinus is
- Aanliggende rechthoekszijde gedeeld door
- Schuine zijde
- Tangens is
- Overstaande rechthoekszijde gedeeld door
- Aanliggende rechthoekszijde.

De leerlingen in het onderzoek hebben deze definities in de onderbouw al gehad en zijn dus bekend met de termen. Ze gebruiken de definities om hoeken en zijden te berekenen in rechthoekige driehoeken.

3.3.1.2. Waarden in de eenheidscirkel

De eenheidscirkel is een cirkel in een assenstelsel met middelpunt O en straal 1 zoals weergegeven in de onderstaande figuur.



Figuur 5. De eenheidscirkel

De straal naar een willekeurig punt P op de cirkel maakt een hoek α met de positieve x -as. De sinus en cosinus van α worden geschreven als de coördinaten van P :

$$\sin \alpha = y_p \text{ en } \cos \alpha = x_p.$$

Op Havo niveau wordt de eerder geleerde tangens niet meegenomen in de eenheidscirkel definities.

Als P zich in het eerste kwadrant bevindt, geldt dat α tussen 0° en 90° ligt. De definities op het meetkundig niveau komen dan overeen met deze nieuwe definities:

$$\sin \alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}} = \frac{y_p}{OP} = \frac{y_p}{1} = y_p \text{ en}$$

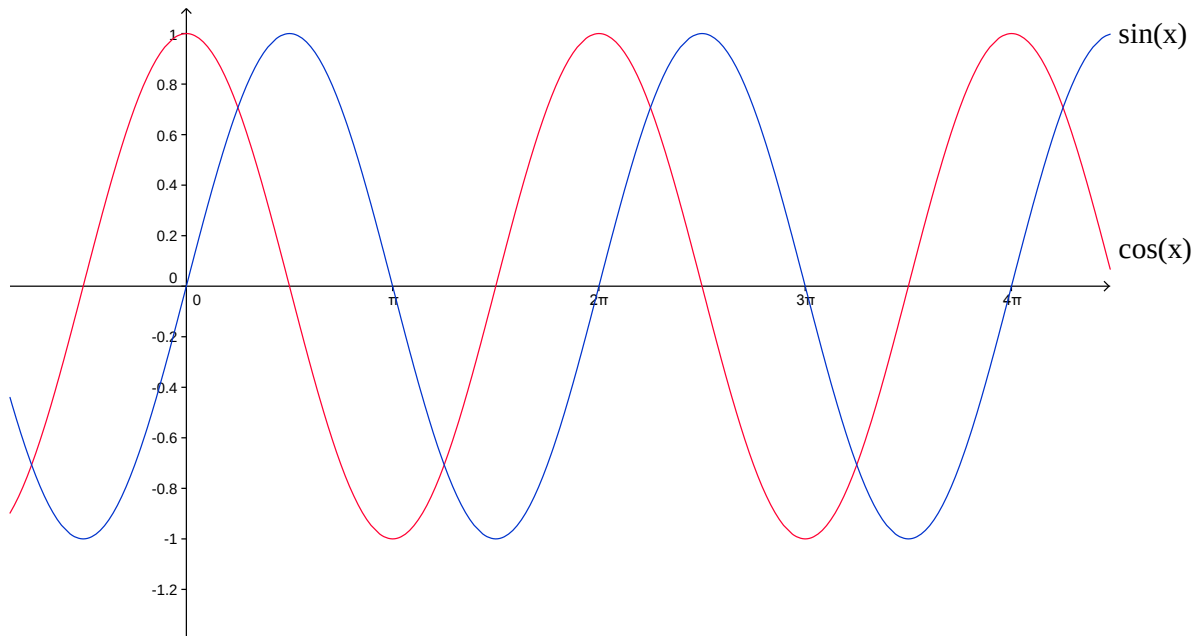
$$\cos \alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}} = \frac{x_p}{OP} = \frac{x_p}{1} = x_p$$

Deze nieuwe definities gelden echter ook als hoek α groter wordt dan 90° en er geen sprake meer is van een rechthoekige driehoek. Met de eenheidscirkel kunnen tevens eigenschappen van de sinus en cosinus ontdekt worden. De sinus is symmetrisch in de y -as, terwijl de cosinus symmetrisch is in de x -as. Omdat de straal van de eenheidscirkel 1 is, zullen sinus en cosinus altijd tussen -1 en 1 liggen.

Binnen de reguliere methoden is de eenheidscirkel het eerste goniometrische begrip waarmee de leerlingen kennismaken in 4 Havo. Tegelijk met de eenheidscirkel wordt ook het begrip radiaal geïntroduceerd als nieuwe hoekeenheid: de hoek in radialen tussen de stralen vanuit O naar twee punten op de eenheidscirkel is gelijk aan de booglengte tussen die punten. De hoek wordt nu gezien als verhouding tussen booglengte en straal en maakt het mogelijk om sinus en cosinus als functies van reële getallen te gaan beschouwen.

3.3.1.3. Functies met bijbehorende grafieken

Naast de bovengenoemde twee representaties is het ook van belang dat de leerlingen de sinus en cosinus als functies kennen samen met de bijbehorende grafieken, sinusoiden genoemd. Ook hier wordt de tangens op Havo niveau niet beschouwd.



Figuur 6. Sinus en cosinus als analytische functies met hun grafieken

De leerlingen leren in relatie met de sinusoiden de termen evenwichtsstand (de gemiddelde waarde van de sinus/cosinus), amplitude (de maximale uitwijking ten opzichte van de evenwichtsstand), en periode (de kortste tijdsduur waarna de grafiek zich gaat herhalen). Deze representatie van sinus en cosinus is de laatste die de leerlingen leren.

Trillingen

Een trilling is niet zozeer een nieuwe representatie van de sinus, alswel een specifiek voorbeeld van een periodieke beweging, die grafisch wordt weergegeven door een sinusoiden. Trillingen behoren tot de goniometrische lesstof van 4 havo, en maken dan ook deel uit van dit onderzoek. In plaats van de sinus als functie van een hoek, wordt bij een trilling de sinus als functie van de tijd weergegeven. Leerlingen moeten een overstap maken van de hoek naar de tijd, wat abstracter is en minder goed weer te geven in een plaatje. Op dat moment is het van belang dat leerlingen een goed ontwikkeld begrip hebben opgebouwd van de sinus. Daarnaast krijgen ze te maken met de termen trillingstijd (de tijdsduur van 1 trilling) en frequentie (het aantal trillingen per seconde).

3.3.1.4. Sinus en cosinus als procept

De kennis van de leerlingen rondom de sinus en cosinus beperkt zich aan het begin van dit onderzoek tot verhoudingen in een rechthoekige driehoek. Gedurende dit onderzoek verbreedt de kennis van de leerling zich naar de eenheidscirkel en de analytische functies. Sinus en cosinus kunnen nu op meerdere manieren gezien worden: als de verhoudingen van twee zijdes in een rechthoekige driehoek, als de coördinaten van een punt op een cirkel, maar ook als een proces waarbij aan een reëel getal een (ander) reëel getal toegevoegd wordt. De leerling heeft verschillende procedures tot zijn beschikking om goniometrische vraagstukken op te lossen. Zo kan hij, gevraagd naar de waarde van een sinus,

deze berekenen door gebruik te maken van de lengtes van zijden in een rechthoekige driehoek, door de coördinaten in de eenheidscirkel te bepalen, maar ook door de eigenschappen van de grafische weergave van de sinus te gebruiken.

Het gebruik van de eenheidscirkel helpt de leerlingen de eigenschappen van de sinus- en cosinusfunctie te herkennen, zoals de symmetrie in de assen, de periodiciteit, het bereik van de functies en de relatie tussen sinus en cosinus onderling. Een leerling die de procepten sinus en cosinus beheerst, kan zonder problemen switchen tussen de representaties van de sinus en cosinus, de meest geschikte procedure kiezen in een gegeven situatie en de eigenschappen gebruiken bij het oplossen van de opgaven in een toets. Hij of zij hoeft daarvoor niet terug te vallen op de context van de opgave.

3.3.2. Lesmethode groep A

De controlegroep heeft in schooljaar 2010-2011 les gehad volgens hoofdstuk 8 van de methode Getal en Ruimte van Reichard et al (2007). Daarbij wordt allereerst de eenheidscirkel geïntroduceerd, met daarbij de nieuwe definities van sinus en cosinus. Vervolgens wordt direct een overstap gemaakt naar radialen als hoekeenheid, en na de nodige opgaven worden uiteindelijk de functies sinus en cosinus met de bijbehorende grafieken uitgelegd.

3.3.3. Lesmethode groep B

Er is in het verleden nog weinig onderzoek gedaan naar de didactiek omtrent goniometrie. Chin en Tall (2012) zelf hebben onderzoek gedaan naar de goniometrische kennis van aanstaande wiskundeleraars, maar gaan daarbij niet in op didactiek. Weber (2008) heeft onderzoek gedaan naar de effecten van instructie op goniometrie binnen het meetkundige deelgebied. De leerlingen in mijn onderzoek, in de bovenbouw van de havo, hebben deze meetkundige kennis echter al opgedaan in 3 havo, waardoor het weinig aansluiting biedt met mijn onderzoek. Challenger (2009) heeft een uitgebreid onderzoek gedaan naar het opbouwen van concept schema's op basis van de APOS theorie (Action – Process – Object – Schema), maar hierbij wordt geen rekening gehouden met de dualiteit van de betekenis van objecten, zoals Tall dat wel onderscheidt in zijn definitie van procept. Bovendien zijn in geen van de onderzoeken sinus en cosinus als functie van een reëel getal meegenomen. Deze representatie is echter wel nodig om belangrijke aspecten van de sinus en cosinus zoals periodiciteit en de grafische weergave te begrijpen.

Wel hebben Heck (2012) en Demir (2012), ongeveer gelijktijdig met dit onderzoek, ook onderzoek gedaan naar de begripsvorming van leerlingen met betrekking tot de sinus en cosinus. Daarvoor heeft Heck een lesplan ontworpen waarbij (4 VWO) leerlingen de lesstof in een andere volgorde krijgen aangeboden en daarbij gebruik maken van ICT in de vorm van geogebra applets. Hij gebruikt het eindpunt van de reguliere methodes (de grafische weergave van sinus en cosinus) als startpunt in zijn eigen lesplan. Pas later maakt hij de overstap naar de eenheidscirkel. De gedachte hierachter is dat het begrip radiaal voor leerlingen veel duidelijker wordt. De resultaten van het bijbehorende onderzoek van Demir zijn veelbelovend maar omdat deze pas uitgegeven werden na de uitvoering van mijn eigen onderzoek heb ik dit niet mee kunnen nemen. In de aanbevelingen ga ik hier verder op in.

De nadruk in het lesplan voor de experimentele groep in dit onderzoek lag op het aanbieden van de lesstof op een *tastbare* manier, dus het begrijpen van de lesstof op basis van tastbare voorbeelden, in plaats van enkel de regeltjes te kennen. Bij de uitleg is telkens opnieuw teruggekeerd naar de eenheidscirkel of een tastbaar equivalent hiervan. In de lessen is gebruik gemaakt van een reuzenrad op de kermis, een waterrad, en de schaduw die een lamp werpt op een draaiend voorwerp. De relaties tussen meetkundig begrip, eenheidscirkel en grafiek zijn iedere les steeds opnieuw benoemd en getekend op het bord. De opgaven in het boek zijn onderzocht op de aansluiting hierop, en zoveel mogelijk gebruikt. De nadruk in dit onderzoek ligt op een andere manier van uitleg, in tegenstelling tot het onderzoek van Demir, waar een andere volgorde en geheel andere lesmethodiek is gekozen.

In appendix I is een overzicht opgenomen van de verdeling van de stof over de lessen en de aanpak per les.

3.4. Procedure

De uitvoering van het onderzoek bestond uit het geven van de lessen over het goniometrie hoofdstuk, waarna de leerlingen de toets van het voorgaande jaar als oefentoets meekregen. De antwoorden op deze oefentoets zijn vergeleken met de antwoorden van de leerlingen van het voorgaande jaar. In deze paragraaf wordt ingegaan op het verloop van de lessen, de dataverzameling en dataverwerking.

3.4.1. Lessen geven

3.4.1.1. Lessen in groep A

Tijdens 11 lessen van 50 minuten behandelde de docent steeds een deel van de lesstof, waarna de leerlingen zelf aan de slag gingen met de opgaven in de methode. Na de 11 lessen waren er enkele lessen ter voorbereiding op de toets. Hierin werd stof herhaald van voorgaande hoofdstukken (die ook onderdeel van de reguliere toets zijn) en maakten de leerlingen een oefentoets.

3.4.1.2. Lessen in groep B

Voor het hoofdstuk waren wederom 11 lessen beschikbaar. De locatie Zuid is met ingang van het schooljaar 2011-2012 overgegaan van een 50 minuten rooster naar een 45 minuten rooster, waardoor er effectief 55 minuten minder lestijd beschikbaar was. Ook hier waren na de 11 lessen enkele lessen beschikbaar ter voorbereiding op de toets en herhaling van eerdere hoofdstukken. De lessen in de experimentele groep werden gegeven door de onderzoeker zelf.

3.4.2. Dataverzameling

De controlegroep (groep A) heeft op 24 juni 2011 de toets gemaakt. Drie vragen uit de toets hadden betrekking op het goniometrie hoofdstuk.

De leerlingen in de experimentele groep (groep B) hebben dezelfde toets gekregen op 13 juni 2012, maar dan als voorbereiding op hun eigen afsluitende toets. Op deze school is het de gebruikelijke gang van zaken om de toets van het voorgaande jaar als oefentoets te gebruiken. Omdat hiervoor geen cijfer toegekend werd aan de leerlingen, kan dit echter wel invloed hebben op de motivatie van leerlingen om de opgaven te maken. De antwoorden op de goniometrie vragen zijn verzameld en verwerkt.

3.4.3. Data verwerking

Voor alle leerlingen is door de onderzoeker voor de drie vragen bijgehouden of deze goed beantwoord is, en zo ja, binnen welke wereld van Tall dit antwoord geplaatst kan worden is. Wanneer een vraag niet of niet juist beantwoord is, is de score niveau 0 toegekend. De categorisering van de antwoorden is opgenomen in appendix II.

3.4.4. Data analyse

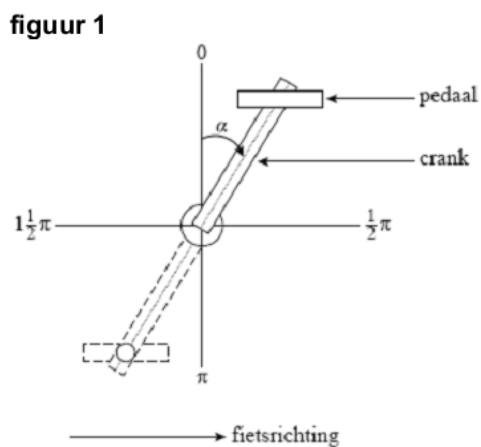
Voordat de vragen beoordeeld kunnen worden op de werelden van Tall, is eerst gekeken naar een verdeling van het onderwerp over deze werelden. Omdat er nog weinig onderzoek gedaan is naar de didactiek van goniometrie en de werelden van Tall is er geen kader waarbinnen deze verdeling geplaatst kan worden. De contexten zoals die aangeboden zijn in de lessen (waterrad, kermisattracties, etc.) zijn tastbare elementen die de leerlingen gebruikt hebben om een gevoel te krijgen voor de lesstof. Ook het gebruik van de eenheidscirkel en de grafieken om eigenschappen af te leiden worden gezien als hulpmiddel in de tastbare wereld. Op het moment dat leerlingen in staat zijn deze contexten en weergaven los te laten en kunnen redenen met behulp van de eigenschappen van de sinus en cosinus, hebben zij de symbolische wereld van Tall betreden.

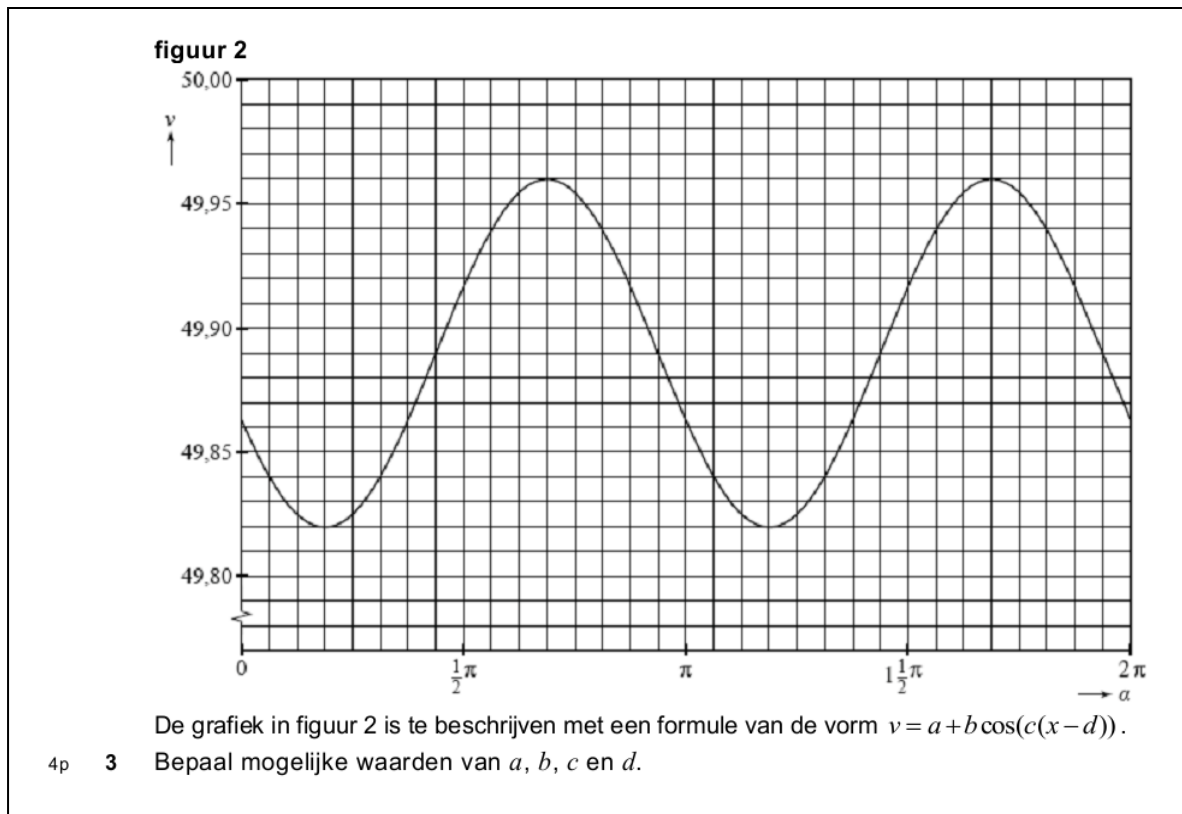
3.4.4.1. Analyse toets opgaven

In de afgenomen toets hadden 3 vragen betrekking op goniometrie. Deze vragen zijn beoordeeld en mogelijke antwoorden zijn ingedeeld op een bepaalde schaal. Elke leerling heeft na afloop van het onderzoek voor elke vraag een bepaald niveau behaald op deze schaal (0, 1 of 2 zoals hieronder gedefinieerd).

Eerste vraag met betrekking tot goniometrie: De eerste vraag is vraag 3 in de toets (deze figuur loopt door op de volgende pagina):

Fietsen met een constante snelheid is in de praktijk niet mogelijk omdat de kracht die op de pedalen wordt uitgeoefend, afhangt van de stand van de **crank**. De grootte van de hoek tussen de crank en de verticale richting in radialen noemen we α . Zie figuur 1. In figuur 2 op de volgende pagina is de snelheid v van een wielrenner in km/uur uitgezet tegen α .





Figuur 7. Eerste goniometrieopgave in de toets

Deze opgave gaat al uit van enige kennis in de symbolische wereld, maar bouwt direct voort op de tastbare wereld (de crank van een fiets, maar ook de representatie in de vorm van een grafiek). De leerling moet de onderdelen van de formule kunnen herkennen en rechtstreeks kunnen koppelen aan waarden die hij uit de grafiek kan verkrijgen. In dit geval is a de evenwichtsstand waarom heen de grafiek beweegt (dan wel de gemiddelde snelheid waarmee de fietser fietst), b de amplitude van de grafiek (dan wel het verschil tussen de maximale en de gemiddelde snelheid van de fietser), is c te berekenen met behulp van de periode van de grafiek en is d de hoek die de crank met de verticale richting maakte aan het begin van de meting. De verwachting is dat de meeste leerlingen in hun antwoord op deze opgave geen relatie met de fiets zullen leggen. De vraag heeft echter betrekking op het kunnen interpreteren van een grafiek en heeft daarmee hoe dan ook een relatie met de tastbare wereld. Waarden uit de grafiek, zoals minimum en maximum zijn noodzakelijk voor het bepalen van het antwoord. Daarom wordt een antwoord gecategoriseerd als symbolisch wanneer er alleen verwijzingen zijn naar het minimum en maximum van de grafiek.

De antwoorden op deze vraag worden onderverdeeld in 3 categorieën:

- Niveau 0: Geen kennis verkregen.
 - Antwoorden waaruit blijkt dat de leerling de stof in het geheel niet begrepen heeft;
 - Lege antwoorden.
- Niveau 1: Tastbaar, direct gerelateerd aan de context.
 - Ieder antwoord waarin verwezen wordt naar de context in de toets (de fiets) of naar gebruikte contexten in de les;
 - Een antwoord waarbij de leerling 2 begrippen door elkaar haalt. De reden hiervoor is dat er van uit gegaan wordt dat de leerling wel de begrippen kent en kan plaatsen in

- een visuele context, maar nog niet in staat blijkt om de volledige vertaalslag naar symbolen te maken. Een voorbeeld hiervan is een leerling die bij b de evenwichtsstand berekent;
 - Een antwoord waarbij de leerling bij herhaling terugvalt op de bekende termen als amplitude en evenwichtsstand, in plaats van direct de letters te manipuleren.
- Niveau 2: Symbolisch.
 - Ieder correct antwoord waarin direct met de letters gemanipuleerd wordt. Antwoorden die licht afwijken als gevolg van afleesfouten worden beschouwd als correct verkregen.

Tweede vraag met betrekking tot goniometrie: De tweede vraag die betrekking heeft op goniometrie is opgave 9 in de toets:

Men zegt dat in Nederlandse huishoudens het electriciteitsnet tegenwoordig 230 volt aan spanning levert. In werkelijkheid is de spanning een trilling die te beschrijven is met de formule $U = 325 \sin(0,04\pi t)$. Hierin is U de spanning in volt en t de tijd in seconden.

2p **9** Bereken de frequentie van de spanning.

Figuur 8. Tweede goniometrie opgave in de toets

De antwoorden op deze vraag worden onderverdeeld in dezelfde 3 categorieën:

- Niveau 0: Geen kennis verkregen.
 - Antwoorden waaruit blijkt dat de leerling de stof in het geheel niet begrepen heeft;
 - Lege antwoorden.
- Niveau 1: Tastbaar, direct gerelateerd aan de context.
 - Ieder antwoord waarin verwezen wordt naar de context in de toets (de netspanning) of naar gebruikte contexten in de les;
 - Ieder antwoord waarbij een tekening gemaakt is, dan wel een grafiek op de grafische rekenmachine gebruikt is.
- Niveau 2: Symbolisch.
 - Ieder correct antwoord waarin direct met de letters gemanipuleerd wordt. Mogelijke antwoorden binnen deze categorie zijn:

$$f = \frac{1}{T} \text{ en } T = \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{0,04\pi} = 50 \text{ dus } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ Hertz of}$$

$$f = \frac{1}{T} \text{ en } T = \frac{2\pi}{c} \text{ dus } f = \frac{c}{2\pi} = \frac{0,04\pi}{2\pi} = 0,02 \text{ Hertz}$$

Derde vraag met betrekking tot goniometrie: De derde vraag (opgave 10 in de toets) heeft betrekking op hetzelfde onderwerp als opgave 9 en luidt als volgt:

Met behulp van de maximale spanning $U_{\max}$ kan de effectieve spanning U_{eff} in Nederlandse huishoudens berekend worden met de formule $U_{\text{eff}} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$.

5p **10** Bereken hoeveel procent van de tijd de spanning hoger is dan de effectieve spanning.

Figuur 9. Derde goniometrie opgave in de toets

Deze opgave is meegenomen omdat onderliggend aan deze vraag het procept sinus goed getest kan worden. Het berekenen van het gevraagde percentage is in dit onderzoek buiten beschouwing gelaten omdat hier geen goniometrische kennis mee getoetst wordt, en dus ook geen denkniveau binnen de goniometrie. Het antwoord op dat deel van de vraag hoeft daarom overigens niet minder interessant te zijn.

De leerling kan domweg aan het rekenen gaan (of de grafische rekenmachine pakken) om het maximum te bepalen, maar kan ook laten zien dat hij de eigenschappen van een sinus kent en weet dat deze altijd een maximale waarde van 1 heeft. De antwoorden op de derde goniometrische vraag zijn als volgt onderverdeeld:

- Niveau 0: Geen kennis verkregen.
 - Antwoorden waaruit blijkt dat de leerling de stof in het geheel niet begrepen heeft;
 - Lege antwoorden.
- Niveau 1: Tastbaar, direct gerelateerd aan de context.
 - Ieder antwoord waarin de maximale spanning bepaald is met behulp van de grafische rekenmachine.
- Niveau 2: Symbolisch.
 - Ieder correct antwoord waarbij de maximale spanning bepaald is met behulp van differentiëren, of de eigenschappen van de sinus.

4. Resultaten

Ter afsluiting van de lessenserie is een proefwerk gehouden, waarbij enkele vragen betrekking hadden op het onderwerp goniometrie, zoals dat in 4 Havo besproken is. De controlegroep (groep A) heeft de toets gehad als laatste proefwerk voor de zomervakantie. De leerlingen in de experimentele groep (groep B) hebben de toets gekregen als voorbereiding op hun eigen toets.

Om de onderzoeksvraag te kunnen beantwoorden worden in dit hoofdstuk de resultaten van de leerlingen op de eerder genoemde 3 specifieke vragen in het proefwerk besproken. De antwoorden van zowel de controlegroep als de experimentele groep zijn gecategoriseerd op de eerder genoemde niveaus. Deze categorisering staat in detail opgenomen in appendix II, en is geheel door de onderzoeker zelf gemaakt. Omdat er nog weinig kader gevend materiaal is rondom goniometrie onderzoek is hierover discussie mogelijk.

Tijdens het onderzoeken van de antwoorden kwamen een paar, soms onverwachte, resultaten naar boven. In onderstaande tabel staan de resultaten van de experimentele en de controlegroep opgesomd. De percentages zijn uitgerekend per opgaven.

Opg	Niveau		Groep A (25 lln)	Groep A (perc)	Groep B (19 lln)	Groep B (perc)
3	0	Geen kennis	9	36%	16	84%
	1	Tastbaar	12	48%	0	0%
	2	Symbolisch	4	16%	3	16%
9	0	Geen kennis	16	64%	16	84%
	1	Tastbaar	5	20%	2	11%
	2	Symbolisch	4	16%	1	5%
10	0	Geen kennis	9	36%	16	84%
	1	Tastbaar	11	44%	2	11%
	2	Symbolisch	5	20%	1	5%

Tabel 2. Resultaten antwoorden toets opgaven en de werelden van Tall

Wat allereerst opvalt is dat zowel in de controlegroep als in de experimentele groep een groot aantal leerlingen een dusdanig fout (of leeg) antwoord gaf, dat niet bepaald kon worden op welk niveau deze leerling opereert.

Nadere analyse van de controlegroep leert dat een aantal leerlingen (5) op zeker zouden blijven zitten. Deze leerlingen hebben geen enkele vraag van het proefwerk beantwoordt, zij hebben alleen hun naam op het antwoordblad ingevuld en hebben toen de school weer verlaten. Het feit dat het betreffende proefwerk het laatste voor de zomervakantie was heeft eraan bijgedragen dat deze leerlingen geen moeite meer deden voor een cijfer. Dit verkleurt echter sterk het beeld van de controlegroep. De leerlingen die wel serieus hebben deelgenomen aan de toets, maar een antwoord in categorie 0 hadden, bleven vaak op dezelfde zaken hangen. Met name het berekenen van amplitude en evenwichtsstand deden zij op incorrecte wijze. Een aantal leerlingen ging bij het berekenen van de frequentie aan de slag met de amplitude.

In de experimentele groep is het proefwerk niet als proefwerk voor een cijfer afgenomen, maar alleen ter controle van de lesstof en voor de leerlingen ter oefening voor de echte toets. Veel leerlingen wilden de toets (of de losse vragen) niet in de les maken maar waren gewend deze mee naar huis te nemen en daar te maken. Omdat ik wel een terugkoppeling wilde, hebben ze ter plekke uiteindelijk

een leeg blad ingeleverd, omdat dit toch geen invloed zou hebben op hun cijfer. Daarnaast zat ook in deze klas een aantal leerlingen (4) dat zou blijven zitten, en het nut van oefenen niet meer inzag. Deze zaken verkleuren het beeld van de experimentele groep.

Wanneer de antwoorden die als niet bruikbaar gecategoriseerd waren (om welke reden dan ook) buiten beschouwing gelaten worden, komt de volgende tabel tot stand. Ook hier hebben de percentages steeds betrekking op de losse opgaven, en niet op het geheel van de drie opgaven.

Opg	Niveau		Groep A	Groep A (perc)	Groep B	Groep B (perc)
3	1	Tastbaar	12	75%	0	0%
	2	Symbolisch	4	25%	3	100%
9	1	Tastbaar	5	56%	2	67%
	2	Symbolisch	4	44%	1	33%
10	1	Tastbaar	11	69%	2	67%
	2	Symbolisch	5	31%	1	33%

Tabel 3. Gecorrigeerde resultaten antwoorden toets opgaven en de werelden van Tall

Opgave 3 blijkt in de controlegroep vaak op het tastbare niveau beantwoord te zijn, waar in de experimentele groep relatief meer leerlingen op het symbolische niveau antwoorden. Veelal kwamen in de controlegroep verwijzingen naar amplitude en evenwichtsstand naar voren, niemand maakte een directe link met de fiets.

Opgave 9 werd door de leerlingen blijkbaar lastig gevonden, gezien het aantal leerlingen dat überhaupt een correct antwoord op de vraag heeft weten te geven. Veel leerlingen in de controlegroep goochelden met de getallen en wisten niet goed meer wat door wat gedeeld moest worden. Ook in de experimentele groep wist één van de leerlingen alsnog niet goed te benoemen wat frequentie is. De leerlingen die deze vraag op tastbaar niveau hebben beantwoord hebben veelal gebruik gemaakt van de grafische rekenmachine, waarbij ze keken naar de nulpunten van de grafiek en daar de trillingstijd uithaalden.

Ook bij opgave 10 pakten veel leerlingen hun grafische rekenmachine erbij om het maximum te berekenen van de gevraagde functie. Slechts een enkeling geeft aan dat het maximum 325 is omdat dat blijkt uit de eigenschappen van de sinus, dan wel uit de algemene formule van een sinusoidale.

Het absolute aantal leerlingen dat daadwerkelijk een correct antwoord heeft gegeven op één of meer van de drie opgaven is klein. Dit sluit aan bij eerdere studies waarin gesteld werd dat leerlingen goniometrie een moeilijk onderwerp vinden en slechts een gefragmenteerd beeld van het geheel hebben. Een weloverwogen conclusie is daardoor echter lastig te trekken. Bovendien kan afgevraagd worden of de leerlingen die daadwerkelijk antwoorden hebben ingeleverd in de experimentele groep net de leerlingen zijn geweest die het toch al wel begrepen. Daar staat tegenover dat verwacht mag worden dat de leerlingen in de experimentele groep bij de uiteindelijke toets beter zouden presteren dan bij de oefentoets, aangezien zij dan nog meer tijd hebben gehad om (thuis) te oefenen en de daadwerkelijke toets voor een cijfer meetelt.

Toch is het verschil bij met name opgave 3 tussen de experimentele en de controle groep vrij groot. Dat is echter wel de opgave waarbij het verschil tussen niveau 1 en 2 erg lastig te meten is.

Samenvattend is niet zonder meer te concluderen dat het leggen van nadruk op de tastbare wereld tijdens de uitleg een positief effect heeft op het begrip van leerlingen. Door de kleine groep, het gebrek aan kaders en de verschillen tussen de experimentele en controle groep, is meer onderzoek nodig om hier met zekerheid iets over vast te kunnen stellen.

5. Conclusies, discussie en aanbevelingen

In dit hoofdstuk wordt ingegaan op de bevindingen betreffende het wiskundige begripsniveau van leerlingen na het volgen van een lessenserie over goniometrie aan de hand van een *tastbare* aanpak.

Als eerste worden op basis van de resultaten conclusies geformuleerd die antwoord geven op de vraag van het onderzoek. Verder wordt er ingegaan op opmerkelijke zaken met betrekking tot het onderzoek, die aanleiding geven voor discussie en verder onderzoek.

5.1. Conclusie

Uit de resultaten lijkt geen duidelijk verschil waar te nemen dat wijst op een positief effect van de tastbare aanpak. Er moet wel een kanttekening bij worden geplaatst dat het hier om kleine groepen leerlingen gaat, waardoor een weloverwogen conclusie lastig te trekken is. Daarbij komt dat een deel van de leerlingen geen serieuze moeite meer heeft gedaan om de opgaven naar behoren op te lossen, wat een sterk verkleurd beeld van de resultaten geeft.

5.2. Discussie

Een aantal factoren is bij dit onderzoek niet meegenomen, maar deze kunnen in meer of mindere mate wel invloed hebben gehad op de resultaten.

Lesomstandigheden.

De lesstof werd in twee opeenvolgende schooljaren aangeboden aan de leerlingen. De experimentele groep (schooljaar 2011-2012) had een jaar na de controlegroep les (schooljaar 2010-2011). Dat jaar was de school overgestapt van een 50-minuten rooster naar een 45-minuten rooster. De experimentele groep had dus per les 5 minuten minder contacttijd. Het aantal lessen rondom het onderwerp is echter niet veranderd, waardoor de experimentele groep uiteindelijk effectief 55 minuten minder contacttijd met de docent heeft gehad dan de controlegroep. Het is niet bekend wat dit voor invloed heeft gehad op het onderzoek.

Daarnaast hebben beide groepen les gehad van andere docenten. De controlegroep had les van de eigen docent, verbonden aan de school. De experimentele groep kreeg les van mij als onderzoeker. Het is zeer goed mogelijk dat karakter en aanpak van de docent zelf al invloed hebben gehad op de resultaten van de leerlingen.

Verskil in klassen.

De beide klassen waren niet homogeen samengesteld (leerlingen die uit 3 havo komen, leerlingen van 4 VMBO, van 4 VWO, doublanten). De doublanten zijn buiten de groep gehouden, maar er is verder geen rekening gehouden met de samenstelling van de groep, al aanwezige voorkennis bij de diverse leerlingen, en het niveau waarop de leerlingen al kennis hadden van het meetkundig goniometrisch begrip.

Keuze op de inhoud van de lessen.

De nadruk in het onderzoek heeft gelegen op het tastbaar maken van goniometrie tijdens de uitleg door gebruik te maken van contexten. Hierbij is niet gekozen om de leerlingen expliciet meer zelf te laten ontdekken, of de volgorde van de lesstof te veranderen.

Afgenomen toets en beoordeling van de resultaten

De afgenomen toets was voor de controlegroep de laatste toets van het schooljaar. Leerlingen die al wisten dat ze zouden blijven zitten hadden de moed opgegeven en hebben niet meer de moeite genomen de vragen te beantwoorden. Aangezien het onderzochte hoofdstuk ook nog eens als laatste in het schooljaar werd behandeld, kan tevens verwacht worden dat deze leerlingen in de lessen al niet meer hun best deden. Dat betekent echter nog niet dat al deze leerlingen met hun goniometrische kennis zijn blijven hangen op het tastbare niveau.

Voor de experimentele groep was deze toets een oefentoets. Omdat hier geen cijfer tegenover stond hebben veel leerlingen niet serieus naar de toets gekeken en veelal lege antwoorden ingeleverd. Waarschijnlijk heeft het merendeel van deze leerlingen op een later moment de oefentoets alsnog (thuis) gemaakt ter voorbereiding op het echte proefwerk, maar hiervan is geen verslaglegging gedaan. Ook werd de oefentoets afgenomen enige tijd voordat het daadwerkelijke proefwerk gegeven werd. De leerlingen in de experimentele groep hebben daardoor minder tijd gehad zich thuis voor te bereiden op de toets, dan de leerlingen in de controlegroep. Het feit dat er minder druk op de experimentele groep lag heeft zeker invloed gehad op de resultaten van het onderzoek. Ook kan men zich afvragen of de leerlingen in de experimentele groep die wél antwoorden op de opgaven hebben ingeleverd, nou juist de leerlingen zijn die op een hoger niveau denken dan hun klasgenoten. In dat geval kan het onderzoek een te positief resultaat schetsen.

Omdat er nog weinig onderzoek gedaan is naar het begrip van leerlingen met betrekking tot goniometrie is er nog geen goed kader waarbinnen resultaten gerangschikt kunnen worden. Dit had tot gevolg dat de onderzoeker zelf niveaus heeft gedefinieerd en de resultaten van de leerlingen daarop beoordeeld heeft. Hierin zullen ongetwijfeld nog beperkingen zitten die pas bij breder gebruik, door meerdere personen, naar boven zullen komen.

5.3. Aanbevelingen

Op basis van de conclusie en de discussiepunten kan een aantal aanbevelingen gedaan worden voor vervolgonderzoek. De doelstelling van dit onderzoek was om te kijken of leerlingen op een hoger begripsniveau rondom goniometrie zouden komen door gebruik te maken van veel uitleg in de tastbare wereld van Tall. Impliciet wordt daarbij uitgegaan van de aanname dat leerlingen allemaal in de tastbare wereld beginnen. Leerlingen hebben echter al enige goniometrische voorkennis, namelijk die met betrekking tot verhoudingen in rechthoekige driehoeken. Het dient aanbeveling om bij een volgend onderzoek een pre-test te doen op dit deel van de goniometrie, zodat meegenomen kan worden welke leerlingen al werken in de symbolische wereld, hoewel binnen een beperkt deelgebied. Op die manier kan beter de overgang van de tastbare naar de symbolische wereld onderzocht worden. In dat geval moet ook gekeken worden naar de resultaten per leerling, en niet zozeer naar de resultaten per vraag.

De nadruk in het onderzoek heeft gelegen op het tastbaar maken van goniometrie tijdens de uitleg door gebruik te maken van contexten. In navolging van Van Hiele kan het de moeite zijn om leerlingen meer zelf aan de slag te laten gaan met het opbouwen van de eenheidscirkel en de grafieken, waardoor het zelf-doen centraal komt te staan. Hiervoor moeten extra opgaven, dan wel werkbladen en/of

applets ontwikkeld worden die passen bij de nieuwe lesopbouw. Het is verstandig hier extra tijd voor te reserveren aangezien leerlingen niet gewend zijn aan een dergelijke manier van wiskunde lessen.

Het niet-krijgen van een cijfer voor de afsluitende toets heeft veel invloed gehad op de inzet en de antwoorden van de experimentele groep. Daarnaast hebben de beide groepen niet dezelfde docent gehad, en zelfs niet evenveel contacttijd met de docent. Het dient daarom aanbeveling nader onderzoek in twee parallel klassen te houden, bij voorkeur met dezelfde docent, en eenzelfde toets moment.

Bij de opbouw van de lessen zijn de onderwerpen in dezelfde volgorde aan de leerlingen aangeboden als in de methode. Bij het uitleggen van de transformaties was een visualisatie aan de hand van een praktijk voorbeeld daardoor niet helemaal mogelijk. Bij een volgend onderzoek kan het de moeite zijn om ook te kijken naar de volgorde van de onderwerpen, en de transformaties pas uit te leggen als de overstap naar de sinus als functie van de tijd is gemaakt. In dit kader is het ook interessant om het eerder genoemde onderzoek van Heck (2012) en Demir (2012) mee te nemen, waarin de lessen gestart worden met de sinus als analytische functie. Hoewel hun onderzoek zich gericht heeft op VWO leerlingen, betreft het in de basis dezelfde lesstof.

6. Literatuur

Alberink, M. and Muijlwijk, H. and Timmer, M. (2011) De sinus: Van meetkundige definitie naar analytisch begrip. *Euclides*, 86 (6). pp. 250-252.

Chin, K.E. and Tall, D. (2012). Making sense of mathematics through perception, operation & reason: The case of trigonometric functions. *Proceedings of the 36th Conference of PME*, Taipei, 2012.

Challenger, M (2009). *From triangles to a concept: A phenomenographic study of A-level students' development of the concept of trigonometry*. Thesis. University of Warwick, Engeland.

Demir Ö. (2012). *Students' concept development and understanding of sine and cosine functions: A new theoretical and educational approach*. Thesis. University of Amsterdam, Nederland.

Gray, E. and Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 115-141.

Heck, A. (2012). Vakantiecursus 2012: Een GeoGebra-ondersteunde benadering van sinus en cosinus. Platform Wiskunde Nederland.

Hoffer, A. (1981) Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher*, 74(1). pp 11-18

Kindt, M. (1998). *Differentiaal- en Integraalrekening. Deel 4: Cirkelbewegingen*. Utrecht: Freudenthal Instituut, 50 pp.

Reichard, L.A. et al. (2007). *Getal en ruimte havo B2*. Houten: Educatieve Partners Nederland.

Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of PME, Bergen, Norway, 2004*, p. 158-161. Retrieved May 2012 from <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2004d-3worlds-pme.pdf>

Tall, D (2005). *A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof*. Plenary lecture for the International Colloquium on Mathematical Learning from early childhood to adulthood, Belgium, 5-7 July, 2005. Retrieved May 2012 from <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2005e-crem-child-adult.pdf>

Tall, D (2008) The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 2008, 20 (2), 5-24

Tall, D. (2012). *Making Sense of Mathematical Reasoning and Proof*. Plenary to be presented at Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground: A Symposium in Honor of Ted Eisenberg, April 29-May 3, 2012, Ben-Gurion University of the Negev, Beer Sheva, Israel. Retrieved May 2012 from <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2012s-making-sense-of-mathematical-proof-final.pdf>

Weber K. (2008). Teaching trigonometric functions: Lessons learned from research. *Mathematics Teacher*, 102(2). pp 144-150

Appendix I. Lessenserie

Er is voor gekozen de lesstof uit te leggen in een onderwijsleergesprek. De reden hiervoor is dat de klas bijgestuurd kan worden als een verkeerd gedachten pad opgegaan werd. Wanneer de klas individueel of in kleine groepjes opdrachten moeten uitvoeren is dit met 1 docent moeilijker in de gaten te houden.

I.1. Les 1. Sinus en cosinus in eenheidscirkel

De basis voor deze les is het lesontwerp van Alberink et al (2011), waarbij de nadruk ligt op het tekenen van de eenheidscirkel rondom de driehoek.

1. Voorkennis ophalen rondom sinus en cosinus: Teken rechthoekige driehoek OQP met hoek α . Laat leerlingen formules van sinus en cosinus noemen en schrijf deze op. Zet nu zijde $OP = 1$ en laat opnieuw sinus en cosinus opnoemen. Zet bij PQ sinus.
2. Overstap naar assenstelsel: Teken een assenstelsel om OQP met O in de oorsprong, Q op de x -as en schaal zodanig dat $OP = 1$. Geef uitleg assenstelsel: om te kunnen praten over de coördinaten van de hoekpunten van de driehoek. Laat leerlingen de y -coördinaat van Q geven, evenals de coördinaten van O en nadenken over de sinus van α . Leg het verband met y_p .
3. Extra voorbeeld: Teken met een andere kleur een tweede driehoek $OQ'P'$ in het assenstelsel met een hoek β en $OP' = 1$. Wat is de sinus van β ? Laat leerlingen nadenken over de vraag: “Stel nu dat ik nog een stel van dit soort driehoeken zou tekenen, wat hebben de punten P dan gemeen?”
4. Overstap naar eenheidscirkel: Teken de eenheidscirkel zo dat de punten P en P' erop liggen. Vraag de leerlingen naar de minimale waarde en maximale waarde van $\sin(\alpha)$ in het eerste kwadrant. Benoem het begrip eenheidscirkel en schrijf dit op het bord.
5. Overstap naar tweede kwadrant: Teken een driehoek met een hoek van 120° . Er is nu geen rechte hoek meer, dus de bekende definitie kan niet meer gebruikt worden. Hoe zouden we nu de sinus kunnen bepalen? Vertel dat de y -waarde ook geldt als we de hoek groter maken dan 180° en geef de nieuwe definitie $\sin(\alpha) = y_p$ (omkaderd). Doe hetzelfde met de cosinus.
6. Overstap naar symmetrie. Als je de andere kant uitdraait, dan zie je dat de cosinus bij een negatieve hoek gelijk is aan die van de positieve hoek. Je ziet dat de sinus juist de negatieve waarde is. Teken een hoek $\alpha > 270^\circ$ en een hoek $\beta = -(360 - \alpha)$.
7. Benoem de afspraken (en schrijf deze op): tegen de klok indraaien noemen we de draaiingshoek positief en met de klok mee negatief.

Na dit onderwijsleergesprek zijn de leerlingen aan het oefenen gegaan met opgave 3, 4, 5, 7 en 8 uit de normale methode. De inleidende opgaven uit de methode zijn bewust overgeslagen, aangezien deze vervangen zijn door deze lesopzet.

I.2. Les 2. Radialen

De basis voor deze les is een eigen ontwerp waarbij de nadruk ligt op visueel maken van het begrip. De volgende stappen zijn gemaakt:

1. Voorkennis ophalen vanuit de vorige les: Teken de eenheidscirkel op het bord en laat leerlingen aangeven wat de straal hiervan is, en wat daarmee de omtrek van de cirkel is.
2. Overstap naar afgelegde afstand op de cirkel: Vraag de leerlingen wat de afgelegde weg is als ik eenmaal over de cirkel loop. Teken een gekleurde stip op de eenheidscirkel in het eerste kwadrant en geef aan dat ik wil weten welke afstand ik daar heb afgelegd. Dit kunnen ze niet zonder meer weten, dus maak het makkelijker: zet een stip op 180° en vraag de klas welke afstand ik heb afgelegd als ik vanuit Q over de bovenste cirkelhelft naar dit punt loop. Doe hetzelfde met 90° en 270° .
3. Overstap naar term radiaal: In de les knip ik een stukje touw af met de lengte van de straal van de eenheidscirkel die op het bord getekend staat. Dat leg ik met behulp van een leerling langs de eenheidscirkel, en deze teken ik met rood af. Definieer de term radiaal als de lengte van het stukje boog dat ik nu heb afgelegd op de eenheidscirkel. Dus wanneer precies een stukje boog van lengte 1 is afgelegd, noemen we de bijbehorende hoek 1 radiaal. Schrijf de definitie op het bord: Radiaal is de hoekmaat waarbij de lengte van de boog gelijk is aan de hoek. Voorbeeld 1 rad betekent een hoek van 1, maar ook een booglengte van 1. Laat de leerlingen nadenken over het nut hiervan.
4. Overstap naar grotere straal: Teken een cirkel die 2 keer zo groot is, in een andere kleur. Laat de leerlingen nadenken over de vraag of de hoek van 1 radiaal nu anders is, aangezien ik de straal veranderd heb. Knip ondertussen een touwtje af in de lengte van de tweede straal. Leg deze langs de tweede cirkel en laat zien dat het punt in het verlengde ligt van het punt op de eerste cirkel, vanuit O bezien. Stel nogmaals de vraag of de hoek veranderd is.
5. Overstap naar gebruik van π in de hoek: 'loop' met het krijt of de stift over de eenheidscirkel helemaal rond. Vraag de klas welke afstand nu afgelegd is, en welke hoek hierbij hoort in radialen. Herhaal dat voor de hoeken van 180° , 90° en 270° en schrijf op het bord het schema (met uitzondering van de laatste regel):

Hoek in graden	Booglengte b op eenheidscirkel	Hoek in radialen
360°	2π	2π
180°	π	π
90°	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
270°	$1\frac{1}{2}\pi$	$1\frac{1}{2}\pi$
α°	$b = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{180} \alpha$	$\frac{\pi}{180} \alpha$

Tabel 4. Relatie hoeken en booglengte

6. Overstap naar algemene verhouding radialen ten opzichte van graden: Vul de laatste regel in het schema met links hoek α° . Laat leerlingen nadenken over hoe ze de booglengte bij deze willekeurige hoek kunnen bepalen en maak de laatste regel af.
En andersom: bij booglengte b is de hoek in graden: $\alpha = \frac{180}{\pi} b$.
7. Uitleg GR: Geef aan dat ook de rekenmachine met radialen kan werken, naast graden, en leg uit hoe ze dit kunnen instellen.

Na dit onderwijsleergesprek zijn de leerlingen wederom aan het oefenen gegaan. Opgave 9 en 11 zijn overgeslagen omdat deze vervangen zijn door de lesopzet. De leerlingen zijn aan de slag gegaan met opgave 10, 12, 13, 14 en 15.

I.3. Les3. Verder inoefenen

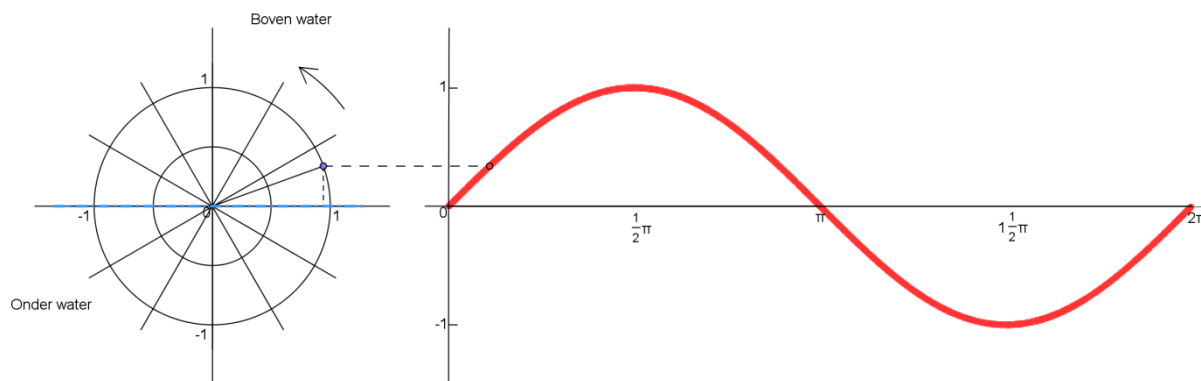
In les 3 is geen nieuwe theorie aangeboden. De les is gestart met het klassikaal behandelen van enkele opgaven van het huiswerk (13 f en g, 14 e en f). Tevens is kort de symmetrie herhaald (tekenen van de eenheidscirkel en opnieuw benoemen symmetrie cosinus en sinus). De leerlingen zijn aan de slag gegaan met opgave 16 tot en met 20 uit het boek. Omdat opgave 20 goed aansluit bij de tastbare

aanpak van deze lessen, is deze opgave klassikaal behandeld, nadat de leerlingen hem eerst zelf geprobeerd hadden.

I.4. Les 4. De grafiek van de sinus

Deze les is gebaseerd op het ontwerp van Kindt (1998). Hij gebruikt een waterrad dat half onder water hangt en waardoor water stroomt als visualisatie.

1. Voorkennis ophalen vanuit de vorige les: Teken de eenheidscirkel links op het bord en laat de leerlingen ophalen wat een radiaal is, en laat ze de 4 bekende hoeken in radialen geven. Schrijf deze bij de punten in de cirkel.
2. Overstap naar waterrad. Teken enkele schoepen op de cirkel en teken een waterstroom halverwege de cirkel. Geef de leerlingen aan dat dit een waterrad is met een straal van 1 meter, dat half onder water staat en water stroomt van links naar rechts. Het rad gaat dan uiteraard draaien. Het assenstelsel blijft gelijk. Kunnen de leerlingen aangeven wat er met de hoogte van een schoep gebeurt (degene die bij de start precies op het wateroppervlak is en naar boven beweegt)?
3. Grafiek tekenen van de hoogte. Teken rechts naast het waterrad een assenstelsel met op de horizontale as de hoeken en op de verticale as de uitwijking (de afstand tot aan de waterlijn). Zorg ervoor dat de x -as gelijk loopt met de waterlijn en dat de y -as tussen -1 en 1 gelijk loopt met de onder- en bovenkant van het rad. Vraag een leerling om naar het bord te komen en de lijn mee te trekken. Beweeg het punt op het rad langzaam vanaf 0 rad over de cirkel helemaal rond en laat de leerling rustig in de grafiek mee tekenen. Sta even stil bij het hoogste en laagste punt. Ga 2 tot 3 keer de cirkel rond zodat de leerlingen duidelijk wordt dat de grafiek zich herhaalt.
4. Overstap naar sinus. Vraag de leerlingen hoe ze de hoogte ook alweer uit zouden kunnen drukken in de hoek die er gemaakt is en vraag waarvan de grafiek nu getekend is. Op het bord staat nu de volgende tekening (met verdere doorloop van de grafiek):



Figuur 10. Overstap naar sinus als grafiek

5. Overstap naar cosinus. Laat de leerlingen nu voor zichzelf de grafiek van de cosinus maken op een vergelijkbare manier (ongeveer 5 minuten zelfstandig werken). Werk daarna op dezelfde manier de grafiek uit op het bord, op aanwijzing van een leerling.
6. Benoemen evenwichtsstand, amplitude en periode. Benoem de definities van evenwichtsstand, amplitude en van periode en geef deze duidelijk met een kleur aan in de grafiek.

De leerlingen zijn tijdens de les zelf aan de slag gegaan met de cosinusgrafiek, waarna dit klassikaal besproken is. Opgave 22 is daarom niet opgegeven als huiswerk aan de leerlingen.

De leerlingen hebben de opdracht gekregen om te kijken naar nulpunten en toppen van de grafieken in relatie met de eenheidscirkel, en moesten opgave 23 maken.

I.5. Les 5. Effect transformaties op grafiek

De basis van deze les is een reuzenrad op de kermis.

1. Voorkennis ophalen vanuit de vorige les: Teken een reuzenrad met bakjes op het bord, waarbij het rad deels ondergronds draait (de evenwichtsstand op de hoogte van de grond). Geef aan dat we een gat moeten graven in de grond om het rad te laten draaien. Vertel de leerlingen dat één van hen zich in het bakje op de grond bevindt. Teken de grafiek van de sinus ernaast. Laat de leerlingen kort de relaties tussen cirkel en grafiek ophalen (toppen, nulpunten).
2. Voorkennis ophalen transformaties: Laat de leerlingen 5 minuten zelfstandig nadenken over transformaties op grafieken die ze kennen, en hiervan zoveel mogelijk opschrijven.
3. Vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as: Teken met een andere kleur om het rad een tweede cirkel met een straal 2 keer zo groot en vraag aan de leerlingen wat er zou gebeuren met de grafiek van de sinus als ons reuzenrad groter wordt. Teken dit met dezelfde kleur in de sinusgrafiek. Welk transformatie patroon kennen ze dat hetzelfde resultaat geeft? Maak een tabel op het bord en geef in 1 rij de relatie weer tussen de cirkel en de grafiek, het kenmerk van de grafiek en het transformatieschema dat van toepassing is.
4. Translatie ten opzichte van y : Teken met een derde kleur in het deel van de cirkel een nieuwe cirkel die hoger ligt dan de oorspronkelijke. Op deze manier hoeven we geen gat meer te graven in de grond, en kunnen we zelfs op iets grotere hoogte instappen zodat de bakjes niet over de grond slepen. Vraag de leerlingen wat er zal gebeuren met de grafiek van de sinus, als we het oorspronkelijke nulpunt aan blijven houden. Teken dit met dezelfde kleur in de sinusgrafiek. Benoem het kenmerk evenwichtsstand. Welk transformatiepatroon kennen ze dat hetzelfde resultaat geeft? Vul de tabel hiermee aan.
5. Translatie ten opzichte van x : Markeer met een vierde kleur één van de bakjes (bv midden onder) en stel ze voor dat daar een andere leerling inzigt. Vraag de leerlingen wat voor beweging deze leerling zal volgen, en wat er met de grafiek gebeurt als we dit tekenen, in plaats van degene die start op de evenwichtsstand. Teken dit met dezelfde kleur in de sinusgrafiek. Definieer het kenmerk beginpunt als de coördinaat in de grafiek. Deze start op (0,0) bij de standaardfunctie. Leg de relatie met het beginpunt in het reuzenrad. Welk transformatiepatroon kennen ze dat hetzelfde resultaat geeft? Vul de tabel wederom aan.
6. Vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as: Voor deze transformatie heb ik geen visualisatie gevonden die het element tijd buiten beschouwing laat¹. Leg aan de hand van de standaardtransformatie patronen uit wat er gebeurt bij een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as.
7. Op het bord staat nu de volgende tabel:

Cirkel	Effect op kenmerk	Grafiek	Transformatie
Straal wordt b keer zo groot	Amplitude wordt b keer zo groot	$y = b\sin(x)$	$V_{x-as,b}$
Cirkel verplaatst a omhoog	Evenwichtsstand verplaatst a omhoog	$y = a + \sin(x)$	$T(0, a)$

¹ De vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as is te visualiseren door een kermisattractie waarbij het bakje niet op een vaste plek op het rad zit, maar ook nog eens met een bepaalde snelheid over het rad beweegt. Wanneer het bakje met dezelfde snelheid over het rad gaat als waarmee het rad beweegt, dan gaat het bakje dus 2 keer zo snel. Daarmee is de hoek die het bakje maakt 2 keer zo groot als de hoek die het rad maakt. Bij deze uitleg wordt echter het element tijd meegenomen, wat op dit moment nog niet aan de orde is geweest. De grafiek als functie van de hoek verandert niet. Een verbetering zou kunnen zijn om deze visualisatie te maken NADAT de overstap naar de sinus als functie van de tijd is gemaakt.

Schoep op d radialen afstand wordt gevolgd	Beginpunt verplaatst d naar rechts	$y = \sin(x - d)$	$T(d, 0)$
	Periode verandert	$y = \sin(cx)$	$V_{y-as, \frac{1}{c}}$

Tabel 5. Transformaties sinus

8. Overstap cosinus: Vraag de leerlingen wat de effecten zullen zijn op de grafiek van de cosinus. Waar zitten verschillen en waar zitten overeenkomsten? Schrijf expliciet de beginpunten van de standaardgrafieken van de sinus en cosinus op het bord zodat leerlingen het verschil hiertussen goed duidelijk hebben.

Naar aanleiding van deze les zijn de leerlingen aan de slag gegaan met de opgaven 25 tot en met 30 uit de methode.

I.6. Les 6. Teken van grafiek bij bepaald functievoorschrift

Deze les bouwt voort op de grafiek van de sinus uit de vorige les. In deze les wordt het embodied werken losgelaten, door niet opnieuw het waterrad te tekenen en de diverse kenmerken te gebruiken, omdat de les dan grotendeels hetzelfde verloopt als de vorige, met slechts enkele toevoegingen. Dit zou met name herhaling betekenen. Op het moment dat de leerlingen het niet meer weten of een vraag niet direct kunnen beantwoorden, wordt wel terugverwezen naar de vorige les en het waterrad/reuzenrad om ze op het goede spoor te helpen. Deze les wijkt daarmee niet af van de les die ik gegeven zou hebben als ik het boek rechtstreeks gevolgd zou hebben (op verwijzingen naar de vorige les na), maar voor de volledigheid volgt hieronder toch een korte beschrijving.

1. Voorkennis ophalen vanuit de vorige les: Teken de grafiek van een sinusoïde $y = a + b\sin(c(x - d))$ op het bord en vraag de leerlingen de kenmerken te benoemen. Geef deze aan in de grafiek. Schrijf de algemene formule op het bord.
2. Overstap naar het tekenen van een grafiek: Schrijf de functie $= -0,8 + 2\sin(3(x - \frac{1}{2}\pi))$ op het bord en teken een nieuw assenstelsel. Vraag de leerlingen wat ze weten van deze functie (beweegt om de evenwichtsstand van -0,8, heeft een amplitude van 2, etc). Vraag de leerlingen wat een handige start zou zijn om de grafiek die hoort bij deze functie te tekenen. Hoe zouden ze de evenwichtsstand kunnen bepalen? Als ze dit niet direct zien, kan verwezen worden naar de algemene grafiek die eerder getekend is. Trek stippellijnen op toppen en evenwichtsstand wanneer deze in het gesprek met de leerlingen naar voren komen. Geef het beginpunt en de periode aan met twee stippen. Vraag de leerlingen hoe ze kunnen bepalen waar de 2 toppen moeten komen te liggen en teken uiteindelijk de grafiek.
3. Vat de stappen samen: Dit komt overeen met de stappen die in het boek genoemd zijn en wordt hier daarom verder niet beschreven.

De leerlingen maken de opgaven 32 tot en met 35.

I.7. Les 7. Functievoorschrift opstellen bij grafiek

Ook deze les bouwt voort op de grafiek van de sinus uit de vorige lessen en wordt er niet specifiek op embodied werken ingezet. Deze les wijkt daarmee niet af van de les die ik gegeven zou hebben als ik het boek rechtstreeks gevolgd zou hebben, maar voor de volledigheid volgt hieronder toch een korte beschrijving.

1. Voorkennis ophalen vanuit de vorige les: Vraag de leerlingen de kenmerken van een sinusoïde te benoemen, en de relatie met de grafiek ervan. Schrijf de algemene formule op het bord.
2. Overstap naar het opstellen van een functievoorschrift: Teken de grafiek op het bord van de functie $f(x) = 20 + 40 \sin(\frac{1}{25}\pi x)$. Omdat de leerlingen het proces van het tekenen niet hoeven te leren kan dit voorafgaand aan de les al gebeuren. Indien deze les in een lokaal met beamer en whiteboard plaatsvindt kan ook een applet gebruikt worden. Vraag de leerlingen wat een handige start zou zijn om de functie die hoort bij deze grafiek te bepalen. Hoe zouden ze de evenwichtsstand kunnen bepalen? De amplitude? Waar zit het beginpunt en wat is de periode?
3. Vat de stappen samen: In een tabel worden de kenmerken genoemd en hoe deze in het algemeen uit de grafiek bepaald kunnen worden.

			In het voorbeeld
a	evenwichtsstand	$\frac{\text{maximum} + \text{minimum}}{2}$	$\frac{60 + (-20)}{2} = 20$
b	amplitude	Maximum - evenwichtsstand	$60 - 20 = 40$
c	uit periode	Periode = $\frac{2\pi}{c}$	$50 = \frac{2\pi}{c}$ dus $c = \frac{2\pi}{50} = \frac{1}{25}\pi$
d	uit beginpunt	Sinus: Beginpunt (d, a) Cos: Beginpunt $(d, a + b)$	Sinus: Beginpunt $(0, 20)$ Cos: Beginpunt $(12\frac{1}{2}, 60)$

Tabel 6. Kenmerken sinus- en cosinusgrafiek

De leerlingen maken de opgaven 38 tot en met 41.

I.8. Les 8. Harmonische trilling

Voor deze les is gebruik gemaakt van een cirkel waarover een punt beweegt. De cirkel wordt aangelicht door een lamp, een gekeken wordt wat de projectie van de cirkel op een muur erachter doet.

1. Voorkennis ophalen vanuit de vorige les: Teken een cirkel met een straal van 4 op het bord, met daarop een punt P gemarkeerd. Vraag de leerlingen wat ook alweer de y -waarde was van P en schrijf dit naast de cirkel.
2. Overstap naar trilling: Teken een 'tl-lamp' rechts van de cirkel en teken een 'muur' links van de cirkel. Markeer op de muur de schaduw van P met P' . Vraag de leerlingen wat er gebeurt met P' als P gaat bewegen. Beweeg met één hand P over de cirkel en de andere P' over de muur. Vraag de leerlingen hoe ze de hoogte van P' op de muur kunnen weergeven in een formule. Geef indien nodig een hint naar de y -as (projectie op de muur zou je in het eerste en vierde kwadrant ook als projectie op de y -as kunnen zien). Schrijf de formule (met hoek) op het bord en benoem deze beweging als een harmonische trilling.
3. Hoek uit formule weghalen: Vraag de leerlingen hoe ze de hoogte van P' kunnen bepalen als ze de beweging van P niet zien. Benoem dat er bij de beweging van P' geen hoek meer te vinden is, en dat je de formule van P' dan ook niet meer uit wil drukken in een hoek. Vraag de leerlingen of ze iets anders weten waarvan P en dus P' afhangt. Schrijf op het bord dat P er 5 seconden over doet om één keer rond te gaan. Wat voor beweging maakt P' in die tijd? Welke hoek heeft P afgelegd in die tijd? Schrijf deze op het bord erbij. Welke hoek heeft P afgelegd in 1 seconde? En op 2 seconden? En op t seconden? Schrijf de hoek als functie van de tijd en de omwentelingstijd op het bord, en schrijf daarna de functie verder uit als functie van t .
4. Definiëren trillingstijd: Benoem dat de periode bij de cirkelbeweging gelijk is aan de tijd dat P' erover doet om 1 keer heen en weer te bewegen. Definieer trillingstijd T als de tijd van 1 trilling.
5. Definiëren frequentie: Benoem dat we naast trillingstijd bij een harmonische trilling ook de term frequentie gebruiken en geeft de definitie als het aantal omwentelingen per seconden, inclusief de formule $f = \frac{1}{T}$

Opgave 43 tot en met 47 worden door de leerlingen gemaakt ter verwerking van de lesstof.

I.9. Les 9. Faseverschil

Bij deze les is wederom het reuzenrad op de kermis als uitgangspunt gekozen. Ook in de methode wordt als inleidende opgave gebruik gemaakt van een reuzenrad, waardoor deze les niet veel afwijkt van de methode.

1. Voorkennis ophalen: Teken een cirkel op het bord met daaraan de bakjes, zoals een eenvoudig reuzenrad aangeduid kan worden. Geef aan dat 1 leerling zich in het bakje bevindt dat zich rechts in het midden bevindt (de evenwichtsstand). Noem dit bakje A en schrijf de naam van de leerling erbij.
2. Overstap naar faseachterstand: Geef aan dat een andere leerling is ingestapt in het bakje dat precies onderaan hangt als de eerste leerling zich in het bakje rechts-midden bevinden (noem dit bakje B). Wat voor beweging maakt de nieuwe leerling? Is dit heel anders dan de leerling die al in het reuzenrad zat? Definieer het begrip faseachterstand als deel van de periode dat de tweede leerling achterloopt op de eerste en schrijf deze op het bord. In dit geval een faseachterstand van $\frac{1}{4}$.
3. Verschil fasevoorsprong en faseachterstand: Geef aan de leerlingen aan dat de leerling in bakje B nu als eerste is ingestapt en dat leerling in bakje A pas een ronde later in is gestapt. In dat geval kun je dus ook zeggen dat de leerling in het bakje B niet achterloopt op de leerling in bakje A, maar juist voorloopt. Wat zou zijn/haar fasevoorsprong zijn? Stel de leerlingen dat je aan komt lopen terwijl het reuzenrad al aan het draaien is en alle bakjes gevuld. Heeft de leerling in bakje B dan een fasevoorsprong of –achterstand op de leerling in bakje A? Geef op deze manier aan dat zowel van een voorsprong als achterstand gesproken kan worden, en dat deze altijd binnen de periode gedefinieerd wordt.
4. Overstap naar formules: Het rad is 30 meter hoog en draait rond met een omlooptijd van 1 minuut, bakje A bevindt zich in de evenwichtsstand op $t = 0$. Vraag de leerlingen wat ook alweer de formule was van de hoogte van deze leerlingen, als functie van de tijd in seconden en schrijf deze op het bord: $h_A = 15\sin(\frac{2\pi}{60}t)$. Weten de leerlingen na hoeveel tijd de leerlingen in bakje B het punt van bakje A bereiken? Een faseachterstand van $\frac{1}{4}$ betekend dat ze $\frac{60}{4} = 15$ seconden nodig hebben om op die plek te komen. Schrijf dit op het bord. Vraag de leerlingen hoe dat er in de formule uitziet en schrijf deze ook op het bord:
$$h_B = 15\sin(\frac{2\pi}{60}(t - 15))$$
Wijs de leerlingen op het juiste gebruik van de haakjes. Verwijs naar les 5, waarbij de leerlingen geconstateerd hebben dat instappen in een ander bakje ervoor zorgt dat de grafiek op een ander punt begint, maar er verder hetzelfde uitziet. Een translatie ten opzichte van de x -as dus.
5. Formules en fasevoorsprong en –achterstand: Grijp terug naar de tweede stap en het verschil tussen fasevoorsprong en faseachterstand. Laat de leerlingen een tweede formule opschrijven voor de hoogte van bakje B, uitgaande van een fasevoorsprong, en zet deze ook op het bord: $h_B = 15\sin(\frac{2\pi}{60}(t + 45))$.

De inleidende opgave in de methode maakt ook gebruik van een reuzenrad en is vervangen door de bovenstaande les. Opgave 49 tot en met 52 zijn als huiswerk opgegeven. Deze opgaven zijn alle gebaseerd op voorbeelden uit de werkelijkheid en hebben daardoor een link met de embodied wereld.

I.10. Les 10. Trend

Bij de uitleg van het begrip trend is de methode gevolgd. De leerlingen hebben opgave 53 en 54 als huiswerk gekregen.

I.11. Les 11. Oefenen

Ook in de elfde les is geen nieuwe theorie aangeboden. De les is gestart met het klassikaal behandelen van enkele opgaven van het huiswerk van de voorgaande lessen (51, 52 en 54). Tevens is er gelegenheid gegeven om vragen te stellen over eerdere delen van de lesstof ter voorbereiding op de toets. De leerlingen zijn aan het werk gegaan met de opgaven uit de diagnostische toets.

Appendix II. Resultaten toets opgaven

II.1. Resultaten controlegroep

De resultaten hieronder zijn losgekoppeld van de leerlingen en willekeurig genummerd zodat geen persoonlijke scores achterhaald kunnen worden. Antwoord 1 op opgave 3 hoeft dus niet van dezelfde leerling te komen als antwoord 1 op opgave 9. De enige reden om nummering aan te houden is dat op deze manier de antwoorden snel geteld zijn, en de verschillende antwoorden te onderscheiden zijn.

II.1.1. Resultaten eerste vraag

De volgende antwoorden op vraag 3 zijn gecategoriseerd op niveau 0 (niet klassificeerbaar):

Antwoord 1 (te veel foutieve waarden):

3 $a = 49.89$ $l = 0.14$ $d = \frac{7}{16}\pi$ $c = \frac{2\pi}{2\pi}$ $v = 49.89 + 0.14 \cos\left(\frac{2\pi}{2\pi}\left(x + \frac{7}{16}\pi\right)\right)$

$l_2 = 49.96$
 $\frac{49.82 -}{0.14} \rightarrow B$
 $0.14/2 + 49.82 = 49.89$

-3

Antwoord 2 (foutieve aanpak):

3 $u = a + b \cos(c(x-d))$
 $a = 48.86$ want als $a = 0$ is $u = 48.86$
 $u = 48.86 + b \cos(c(x-d))$
 $TL = \frac{11}{16}\pi$ L.O.V. x-as
 49.89 L.O.V. y-as
 en de grafiek is een half pie π korter dan normaal (2pi)
 $u = 48.86 + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{11}{16}(x)\right)$??

-4

Antwoord 3 (te weinig uitleg om te beoordelen op welk niveau deze leerling denkt):

3. $a. 49.89$ $b. 0.07$ $c. -1$ $d. \frac{1}{8}$

-2

Antwoord 4 (te weinig uitleg en te veel antwoorden fout):

3 $a =$ evenwichtstand $= 49,88$
amplitude $= 49,96$
periode $= \frac{2\pi}{\pi} = 2$
beginpunt $= (0; 49,86)$

1

$a = 49,88$ (3)
 $b = 49,96$
 $c = 2$ 1
 $d = 49,86$

Naast bovenstaande antwoorden zijn 5 lege proefwerken ingeleverd, welke niet meer gescand zijn.

De volgende antwoorden op vraag 3 zijn gecategoriseerd op niveau 1 (tastbaar):

Antwoord 1 (duidelijke referenties naar de begrippen rondom de grafiek):

3 $v = a + b \cos(c(x-d))$
 $a =$ evenwicht
max + min : 2 (1)
 $(49,96 + 49,82) : 2 = 49,89$
 $b =$ amplitude
max - evenwicht
 $49,96 - 49,89 = 0,07$ 1
 $c =$ periode $\frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ 1 (1)
 $d =$ beginpunt $= (\frac{\pi}{\pi}, 49,96)$

2

Antwoord 2 (duidelijke referenties naar kenmerken van de grafiek):

3 $v = a + b \cos(ccx - d)$
evenwichtstand $= \frac{\text{max} + \text{min}}{2} = 49,89$
 $= \frac{49,96 + 49,82}{2} = 49,89 \rightarrow 1$
 $\rightarrow a = 49,89$

amplitude = max - evenwichtscand = $49,96$
 $= 49,96 - 49,89 = 0,07 = b$
 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$
 $c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$
 $d = \text{negatieve afstand tussen de top en de y-as.}$
 $\text{top} = \frac{1}{16}a \Rightarrow d = +\frac{1}{16}\pi$

Antwoord 3 (duidelijke referenties naar kenmerken van de grafiek):

3 $b = \text{amplitude}$
 $a = \text{evenwichtscand} = \frac{49,96 + 49,82}{2} = 49,89$
 $49,96 - 0,07 = 49,89$ $49,82 + 0,07 = 49,89$
 dus de evenwichtscand is $49,89 = a$
 $d = \text{sin beginpunt bij stijging}$
 $(d = \text{cos in de top})$

3 $d = \frac{11}{16}\pi$
 $c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$

Antwoord 4 (duidelijke referenties naar kenmerken van de grafiek):

3 $v = a + b \cos(c(x-d))$
 $a = \text{evenwicht}$ $\text{max} = 49,96$ $\text{max } x =$
 $\frac{\text{maximum} + \text{minimum}}{2}$ $\text{min} = 49,82$
 $\frac{49,96 + 49,82}{2} = 49,89$
 $b = \text{amplitude}$
 $\text{maximum} - \text{evenwicht} = 49,96 - 49,89 = 0,07$
 $c = \frac{2\pi}{T}$ $T = 16$ $c = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$
 $d = \text{beginpunt}$ $(\frac{3}{16}\pi, 49,82)$ $c = \frac{3}{16}\pi$
 $v = 49,89 + 0,07 \cos(\frac{3}{16}\pi(x - \frac{3}{16}\pi))$

Antwoord 5 (duidelijke referentie naar kenmerken grafiek):

3 evenwichtstand = $\frac{49,96 - 49,82}{2} = 0,07 \Rightarrow 48,89 + 0,07 = 48,96$
 amplitude = $0,07$
 periode = $\frac{2}{16}\pi - \frac{2}{16}\pi = \frac{1}{8}\pi = \frac{1}{8}\pi$
 $48,89 + 0,07 \sin(\pi x)$
 $D = \text{evenwichtstand} - 49,86$ (waar $x=0$)
 $D = (-0,03)$
 $V = 48,89 + 0,07 \sin(\pi(x + 0,03))$

Antwoord 6:

3 onderste punt grafiek = $49,82$
 bovenste " = $49,96$
 $49,96 - 49,82 = 0,14$
 amplitude = $0,07$
 dus is $b = 0,07$
 $49,82 + 0,07 = 49,89$ evenwichtstand
 = a , dus is $a = 49,89$
 $d = \frac{1}{16}\pi$

Antwoord 7:

3 $V = a + b \cos(c(x-d))$
 $a = \text{evenwichtstand} = \frac{\text{max} + \text{min}}{2} = \frac{49,95 + 49,82}{2} = 49,885$
 $b = \text{max.} - \text{evenwichtstand} = 49,95 - 49,885 = 0,065$
 $c = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$
 $d = \text{beginpunt} = \frac{11}{16}\pi$ Dus: $V = 49,885 + 0,065 \cos(2(x - \frac{11}{16}\pi))$

Antwoord 8:

3 maximum = $45,96$
 minimum = $45,82$
 $a = \frac{45,96 + 45,82}{2} = 45,89$
 $b = \text{maximum} - \text{evenwichtstand} = 45,96 - 45,89 = 0,07$
 $b = 0,07$
 $c = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$
 $d = \frac{1}{2}\pi$ tot $\frac{1}{2}\pi$ dus $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi = 0$
 $c = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

$$V = 49,89 + 0,07 \cos(2(x-d))$$

$$d =$$

figuur 2: 0 tot $\frac{1}{2}\pi$ is 8 halve dus

$$\frac{1}{2}\pi = 0,156 \text{ stu A}$$

van 0 tot maximum is 11 dus

$$11 \cdot 0,156 = 2,15 \Rightarrow \frac{11}{16}\pi$$

4 dus $d = \frac{11}{16}\pi$

$$V = 49,89 + 0,07 \cos(2(x - \frac{11}{16}\pi))$$

Antwoord 9:

$$3 \quad v = a + b \cos(c(x-d))$$

$a = \text{evenwichtsstand} = \frac{\text{min} + \text{max}}{2}$

$b = \text{amplitude} = \text{max} - \text{evenwichtsstand}$

$c = \frac{2\pi}{\text{periode}}$

$d = \text{verschuiving} = x\text{-coördinaat van } 2^{\circ} \text{ min}$

$a \Rightarrow \frac{49,82 + 49,96}{2} = 49,89$

$b \Rightarrow 49,96 - 49,89 = 0,07$

$c \Rightarrow 1 \text{ periode duurt } \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\pi} = 2$

4 $d \Rightarrow 16 \text{ voljes is } \pi \text{ dus volje is } \pi/16 = 0,196345. \text{ maximum is op het 11e volje dus } 11 \times 0,1963 = 2,1598$

$a = 49,89, b = 0,07, c = 2, d = 2,1598$

Antwoord 10:

$$3 \quad a = \frac{y_{\text{MIN}} + y_{\text{MAX}}}{2} = \frac{49,82 + 49,96}{2} = 49,89$$

$y_{\text{MIN}} = 49,82$

$y_{\text{MAX}} = 49,96$

$b = y_{\text{MAX}} - a (\text{evenwichtsstand}) = 49,96 - 49,89 = 0,07$

$d = x_{\text{MAX}} = \frac{11}{16} \pi$

3 $c = \text{er zijn 2 periodes in een domein van } 2\pi$

$$\frac{2\pi}{2} = \pi$$

Antwoord 11:

3 $V = a + b \cos(c(x-d))$

~~maximum~~ $\text{maximum} = 49,96$

$\text{minimum} = 49,82$

$\text{evenwichtsstand} = \frac{49,96 + 49,82}{2} = 49,89$

$\frac{0,14}{2} = 0,07 (= \text{amplitude})$

$\text{evenwichtsstand} = 49,82 + 0,07 = 49,89$

$\text{amplitude} = 0,07$

$\text{periode} = \pi$

$a = 49,89 = \text{evenwichtsstand}$

$b = 0,07$

$c = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

$d =$

Antwoord 12:

opgave 3 $V = a + b \cos(c(x-d))$ Domain $[0, 2\pi]$ erook bij ongeveer 4x.

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{ev. st.} & \text{amp.} & \text{per.} & \text{bp.} \end{matrix}$

de evenwichtsstand = $49,89$ dus $a = 49,89$

amplitude = $49,96 - 49,89 = 0,07$ dus dat is b .

$c = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

$d = \frac{5}{8}\pi, 0$ want $\cos$ begint in top.

De volgende antwoorden op vraag 3 zijn gecategoriseerd op niveau 2 (symbolisch):

Antwoord 1 (enige verwijzing naar grafiek is min en max):

3 a de grafiek is max $49,96$ en min $49,82$

$a = 49,89$

$b = 0,07$

$(49,89 + 0,07 = 49,96)$

$(49,89 - 0,07 = 49,82)$

$\frac{2\pi}{c} = p$

$\frac{2\pi}{c} = \frac{1\pi}{16}$

$c = \frac{2\pi}{\frac{1\pi}{16}} = 32$

$c = 2$

4 $\text{max gaat door } \frac{11}{16}\pi$

$d = \frac{11}{16}\pi$

Antwoord 2 (geen enkele verwijzing naar kenmerken, maar wel berekeningen gegeven):

3 $v = a + b \cos(c(x-d))$

$a = \frac{49,82 + 49,96}{2} = 49,89$

$b = 49,96 - 49,89 = 0,07$

$c = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

$d = \frac{11}{16}\pi$

Antwoord 3:

3 ~~6π max geeft~~

$a = (\text{max} - \text{min}) : 2$

$a = (49,96 - 49,82) : 2$

$a = 0,07$

$b = \text{max} - a$

$b = 49,96 - 49,89$

$b = 0,07$

$a = 0,07 + 49,82$

$a = 49,89$

c is de hele omwenteling dus $c = \pi$

bij π begint de omwenteling

d is de verschuiving naar rechts van het maximum

$d = \frac{7}{16}\pi$

Antwoord 4:

3 $v = a + b \cos(c(x-d))$
 periode = $\frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{1/10\pi} = 20$
 translatie = $c(1/10\pi, 49,09)$ $a = 1/10\pi$ $d = 49,09$

II.1.2. Resultaten tweede vraag

De volgende antwoorden op vraag 9 zijn gecategoriseerd op niveau 0 (niet klassificeerbaar), allen omdat het foutieve antwoorden zijn:

Antwoord 1:

9 $U = 325 \sin(0,04\pi t)$
 $F = 1/T$
 $F = 1/0,04 = 25 \text{ hertz}$

Antwoord 2:

9 de frequentie is trillingstijd en dat is de periode
 $P = \frac{2\pi}{c}$ $P = \frac{2\pi}{0,04\pi} = 493,5 \text{ Hz}$
 dus hij trilt 493,5 keer / seconde

Antwoord 3:

9 $325 \sin(0,04\pi t) = 0$
 invullen 6R, calc zero $\rightarrow x = 75$
 frequentie is 75

Antwoord 4:

9 frequentie = $2 \times \text{amplitude} = 2 \times 325 = 650$

Antwoord 5:

g $U = 325 \sin(0,04\pi t)$
 $U = b \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$
 $b = \text{amplitude} = 325$
~~trillingstijd~~ $T = \text{trillingstijd}$
 frequentie $= \frac{1}{T}$
 $\frac{2\pi}{T} = 0,04\pi$
 $T = 2 \cdot 0,04 = 0,08$
 frequentie is dus $0,00$

Antwoord 6:

31 frequentie = aantal trillingen per seconde
 $230 = 325 \sin(0,04\pi t)$
 gr: $y_1 = 325 \sin(0,04\pi t)$
 $y_2 = 230$
 calc intersect geeft $t \approx 6,26$

Antwoord 7:

g frequentie $= \frac{1}{f} = \frac{1}{230} = 0,0043$

Antwoord 8:

g frequentie $= \frac{1}{0,04\pi} = 7,74$

Antwoord 9:

g $U = 325 \sin(0,04\pi t)$ $U = \text{spanning in volt}$
 $t = \text{tijd in seconde}$
 CALC-max geeft 325
 CALC-min geeft -325
 amplitude = max - evenwicht = $325 - 0 = 325$
 evenwicht = $\frac{\text{max} + \text{min}}{2} = 0$

Antwoord 10:

opgaveg. $U = 325 \sin(0,04\pi t)$ $U = 230 \text{ volt}$
 ~~$325 \sin(0,04\pi t) = 230$~~ $f = \frac{1}{p}$ dus $f = \frac{1}{0,04} = 25$ dus frequentie =
 ~~25~~ 25 -2

Daarnaast zijn 5 lege proefwerken ingeleverd en heeft één leerling deze vraag niet beantwoord.

De volgende antwoorden op vraag 9 zijn gecategoriseerd op niveau 1 (tastbaar), allen vanwege verwijzing naar de grafiek:

Antwoord 1:

3 $y_1: 325 \sin(0,04\pi t)$
 ga calc zero geeft $x = 0$
 $x = 50$
2 ~~de~~ de frequentie is 1 x per 50 seconden

Antwoord 2:

9 calc: maximum $x = 62,5$
 calc: ~~max~~ (ordinate) $x = 12,5$
 $62,5 - 12,5 = 50$
 $1 \text{ sec} : 50 = 0,02$
-1

Antwoord 3:

9 $f = \frac{1}{T}$
 GR: $y_1 = 325 \sin(0,04\pi x)$
 1 trilling duurt 50 seconden dus $T = 50$
 $f = \frac{1}{50} = 0,02$ (Hertz) 1

Antwoord 4:

9 $F = \frac{1}{T}$
 GR: $y_1 = 325 \sin(0,04\pi x)$
 optie calc-zero: $x = 25$ en $x = 75$
 dus $T = 75 - 25 = 50$ sec
 $F = \frac{1}{50} = 0,02$ hertz. 2

Antwoord 5:

9 voer in op GR
 $y_1 = 325 \sin(0,04\pi x)$
~~maxie calc maximum geeft $y = 325$~~
~~minie calc minimum geeft $y = -325$~~
~~periode = frequentie = calc zero~~
 Calc zero geeft $x = 0$ en $x = 50$ ✓
 periode = $50 - 0 = 50$ (-1)

De volgende antwoorden op vraag 9 zijn gecategoriseerd op niveau 2 (symbolisch):

Antwoord 1:

9 $f = \frac{1}{p}$
 $p = \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{0,04\pi} = 50$
 $f = \frac{1}{50} = 0,02$ ✓

Antwoord 2:

1 g $\frac{2\pi}{0.04\pi} = 0.20 \checkmark \checkmark$ (-1)

Antwoord 3:

g de frequentie is $1/50 = 0.02 \checkmark$
1

Antwoord 4:

g $U = 325 \sin(0.04\pi t)$
↓ hij gaat 1 keer per 50 seconde ~~per~~ frequentie
is $1\frac{1}{5}$ per ~~minute~~ minuut

II.1.3. Resultaten derde vraag

De volgende antwoorden op vraag 10 zijn gecategoriseerd op niveau 0 (niet klassificeerbaar):

Antwoord 1:

10 CAIC Max $x = 12.5$ $y = 300$
 ~~$U_{eff} = \frac{300}{\sqrt{2}} = 0.84$~~
~~CAIC - Intersect $2x$~~
 ~~$x = 0.84$~~
 ~~$U_{eff} = \frac{12.5}{\sqrt{2}} = 0.84$~~

Antwoord 2:

10. Calc intersect ~~2x~~

~~calc - max~~

~~calc - max~~

$x = 4,2$ $y = 162,6$

$x = 54,2$ $y = 162,6$

$I_e = \frac{\text{deel}}{\text{ geheel }} \times 100\%$

$4,2 + (325 - 54,2) = 275$

$\frac{275}{325} \times 100\% = 84,6\%$

Dus 84,6% is de tijd de spanning hoger dan de effectieve spanning.

Antwoord 3:

10 GR

$y_1 = u$

calc - max

$u_{\text{eff}} = \frac{u_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = \frac{62,5}{\sqrt{2}} = 44,2$

$y_2 = 44,2$

Daarnaast zijn er 5 lege proefwerken ingeleverd en heeft één leerling deze vraag niet beantwoord.

De volgende antwoorden op vraag 10 zijn gecategoriseerd op niveau 1 (tastbaar):

Antwoord 1:

10 $u_{\text{eff}} = \frac{u_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$

$u_{\text{max}} = \text{calc GR: calc max} = 325 \text{ V}$

$u_{\text{eff}} = \frac{325}{\sqrt{2}} \approx 230 \text{ V}$

Antwoord 2:

10 u_{max} , invullen GR formule u , calc max $\rightarrow 325$

$u_{\text{eff}} = \frac{325}{\sqrt{2}} \approx 230$

Antwoord 3:

10. $\text{random } [0, 50]$
 $U_{\text{MAX}} = \text{CALC MAX} = y = 325 \text{ volt}$
 $U_{\text{eff}} = \frac{325}{\sqrt{2}}$

Antwoord 4:

10 GR: $y = 325 \sin(0,04\pi t)$
 $\text{calc-MAX} = 325$
 $U_{\text{eff}} = \frac{325}{\sqrt{2}} = 229,01$

Antwoord 5:

10 $U_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$ $U_{\text{max}} = \text{calc maximum geeft } 325$

Antwoord 6:

10 $y = 325 \sin(0,04\pi x)$
 $\text{CALC-MAX} = 12,5$
 Dus 12,5 seconden
 $y = 325$ dus $U_{\text{max}} = 325$

Antwoord 7:

10 $230 = \frac{U_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$ Calc: maxy = 325
 $U_{\text{eff}} = \frac{325}{\sqrt{2}}$
 $230 = \frac{325}{\sqrt{2}}$ ✓ ✓

Antwoord 8:

10 $U_{\text{max}} \stackrel{!}{=} \text{Calc-max} = 325$ $y = 325$
 $U_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{325}{\sqrt{2}} \approx 230 \text{ Volt}$

Antwoord 9:

$$10 \quad u_{\text{eff}} = \frac{u_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

$$u_{\text{eff}} = \frac{325}{\sqrt{2}} = 229$$

Antwoord 4:

$$10 \quad u_{\text{eff}} = \frac{u_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = \frac{325}{\sqrt{2}} = 229,8$$

Antwoord 5:

$$10 \quad u_{\text{max}} \\ u_{\text{eff}} = \frac{u_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \quad u_{\text{eff}} = \frac{325}{\sqrt{2}} = 229,8 \text{ volt}$$

II.2. Resultaten experimentele groep

II.2.1. Resultaten eerste vraag

De volgende antwoorden op vraag 3 zijn gecategoriseerd op niveau 0 (niet klassificeerbaar):

Antwoord 1 (te weinig uitleg en te veel fouten):

$$3. \quad 49,89 + 0,14 \cos(2(x - \frac{3}{8}\pi))$$

Er zijn geen antwoorden gecategoriseerd op niveau 1 (tastbaar).

De volgende antwoorden op vraag 3 zijn gecategoriseerd op niveau 2 (symbolisch):

Antwoord 1:

$$3 \quad y = a + b \cos(c(x-d))$$

$$a = \frac{49,96 + 49,82}{2} = 49,89 \quad c = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$b = 49,96 - 49,89 = 0,07 \quad d = \frac{11}{16} \pi$$

Antwoord 2:

opgave 3: $v = a + b \cos(c(x-d))$

a $\begin{matrix} \max = 49,96 \\ \min = 49,82 \\ 99,78 \end{matrix}$

$99,78 : 2 = 49,89$

b $\begin{matrix} \max - \min = \text{evenw} \\ 49,96 - 49,89 = 0,07 \end{matrix}$

c π

d $\frac{7}{16} \pi$

$v = 49,89 + 0,07 \cos(\pi(x - \frac{7}{16} \pi))$

Antwoord 3:

[3] $v = a + b \cos(c(x-d))$

$\begin{matrix} \max = 49,96 \\ \min = 49,82 \\ \hline 99,78 \end{matrix}$

$b = 49,96 - 49,89 = 0,07$

$c = \pi$

$d = \frac{7}{16} \pi$

$49,89 + 0,07 \cos(\pi(x - \frac{7}{16} \pi))$

II.2.2. Resultaten tweede vraag

De volgende antwoorden op vraag 9 zijn gecategoriseerd op niveau 0 (niet klassificeerbaar):

Antwoord 1 (foutief antwoord):

9 $\begin{matrix} 325 \sin(0,04\pi t) \\ 325 \sin(\frac{2\pi}{157} t) \end{matrix}$

$f = \frac{1}{157} = 0,006$

De volgende antwoorden op vraag 9 zijn gecategoriseerd op niveau 1 (tastbaar):

Antwoord 1:

opgave 9 $U = 325 \sin(0,04\pi t)$
 calc zero $\Rightarrow x = 25$ & $x = 75$
 $75 - 25 = 50$
 $\frac{1}{50}$ is de frequentie

Antwoord 2:

9 $U = 375 \sin(0,04\pi t)$
 zero $x = 25$
 zero $x = 75$ $75 - 25 = 50$
 frequentie $= \frac{1}{50}$
 $6,25$ $18,75$ $56,25$
 $12,5 : 50 \times 100$

De volgende antwoorden op vraag 9 zijn gecategoriseerd op niveau 2 (symbolisch):

Antwoord 1:

g periode $= T = \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{0,04\pi} = 50$'s
 $f = \frac{1}{T}$
 $f = \frac{1}{50}$
 $f = 0,02$ builingen

II.2.3. Resultaten derde vraag

De volgende antwoorden op vraag 10 zijn gecategoriseerd op niveau 0 (niet klassificeerbaar):

Antwoord 1 (foutief antwoord):

opgave 10 $U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$
 $= \frac{325}{\sqrt{2}}$
 $= 162,63$
 Calc intersect $3x \Rightarrow x = 6,25$ & $x = 18,75$ & $x = 56,25$
 periode $= 56,25 - 6,25 = 50$
 $18,75 - 6,25 = 12,5$
 $12,5 : 50 \cdot 100\% = 25\%$

De volgende antwoorden op vraag 10 zijn gecategoriseerd op niveau 1 (tastbaar):

Antwoord 1:

$$\begin{array}{|l|l|} \hline 10 & \text{calc max} = 325 \\ \hline & u_{\text{eff}} = 325/\sqrt{2} = 229,8 \\ \hline \end{array}$$

Antwoord 2:

$$\begin{array}{|l|l|} \hline 10. & u_{\text{max}} = \text{calc-max} \Rightarrow 325 = u_{\text{max}} \\ & u_{\text{eff}} = \frac{u_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \\ & u_{\text{eff}} = \frac{325}{\sqrt{2}} = 229,8 \text{ V} \\ \hline \end{array}$$

De volgende antwoorden op vraag 10 zijn gecategoriseerd op niveau 2 (symbolisch):

opgave 10

$$\begin{aligned} & \text{GR } 325 \sin(90,9\pi t) \text{ \& } 325 \quad (\text{periode } 50,0) \\ & \Rightarrow \text{calc intersect 2x geeft} \\ & \quad 6,25 \text{ \& } 18,75 \\ & \quad 18,75 - 6,25 = 12,5 \\ & \quad \frac{12,5}{50,0} \cdot 100\% = 25\% \text{ van de tijd ziet} \\ & \quad \text{die er boven} \end{aligned}$$