

DOCENTONTWIKKELING AAN DE HAND VAN LESSON STUDY BIJ TELPROBLEMEN

Onderzoek van Onderwijs (10 EC-variant)

Student: ir. F. S. Warrink

s0009490

Datum: 7-01-2014

Begeleider: dr. N.C. Verhoef

SAMENVATTING

Lesson Study is een professionaliseringsmethode voor docenten overgewaaid uit Japan. De van oorsprong gesloten Nederlandse onderwijssystemen zijn deze vorm van docentontwikkeling aanvankelijk niet gewend. Desalniettemin wordt binnen het onderwijs de koers van peer review ingezet zoals blijkt uit het overheidsplan 'actieplan leraar 2020'. Hieruit wordt duidelijk hoe actueel Lesson Study in het Nederlandse onderwijs staat.

In dit onderzoek is LS gekoppeld aan een veelgebruikt instrument om de kwaliteit van docenten mee te meten: de door Stichting Beroepskwaliteit Leraren (SBL) opgestelde lijst docentcompetenties. Deze lijst van vaardigheden die een docent meester moet zijn is voor dit onderzoek gereduceerd tot de interpersoonlijke/pedagogische, didactische, vakinhoudelijke en organisatorische competenties. Op dit moment is de OnderwijSCOöperatie (OC), die de SBL vervangen heeft, bezig met een herijking van de oorspronkelijke SBL competenties maar het huidige voorstel tot herijking bevat alle hierboven genoemde competenties. Daarmee zijn de geselecteerde competenties niet alleen actueel maar ook relevant met het oog op de toekomst.

In dit onderzoek is de ontwikkeling van docenten onderzocht bij deelname aan een Lesson Study traject met combinatoriek als onderwerp. Aangezien telproblemen een lastig onderwerp voor de leerlingen aan het begin van de Tweede Fase vormen, is gebruik gemaakt van de 13 telproblemen van Batanero, Navarro-Pelayo en Godino (1997) vanwege hun heldere categorisering.

Met drie docenten zijn de LS-lessen voorbereid, uitgewerkt, geobserveerd en geëvalueerd/bediscussieerd. Vervolgens is de tweede les eveneens uitgevoerd, geobserveerd en geëvalueerd/bediscussieerd. Op basis van de discussies tussen de participanten over de gegeven lessen en interviews achteraf is gezocht naar ontwikkeling van de specifieke competenties. Met behulp van lijsten met signaalwoorden per competentie is die ontwikkeling in kaart gebracht. Op deze wijze is een indeling verkregen van de vier gemeten competenties en de mate waarin die tijdens Lesson Study zijn ontwikkeld. Opvallend daarbij is de relatief sterke ontwikkeling bij de interpersoonlijk/pedagogische en didactische ontwikkeling en nauwelijks ontwikkelde vakinhoudelijke ontwikkeling.

Mogelijk is zijn de startkwalificaties van de docenten hier debet aan: de docenten waren wellicht vakinhoudelijk sterker ontwikkeld dan pedagogisch en didactisch waardoor op dat gebied eenvoudigweg minder te ontwikkelen viel. Daarentegen is het ook goed mogelijk dat Lesson Study in het algemeen hogere opbrengsten oplevert bij pedagogische en didactische competenties. Verder onderzoek hiernaar verdient zeker aanbeveling.

Mocht na verder studie blijken dat Lesson Study inderdaad een sterke stimulans is voor met name de pedagogische en didactische vaardigheden dan valt LS als professionaliseringsmethode uitstekend in te zetten als trainingsinstrument voor beginnend docenten. Het is voorstelbaar dat docenten die nog in opleiding zijn of net starten voor de klas aanvankelijk meer moeite hebben met deze beide competenties dan de vakinhoudelijke. Dat Lesson Study niet alleen geschikt voor de ervaren docenten, maar ook zeer geschikt voor docenten in opleiding.

INHOUDSOPGAVE

SAMENVATTING	2
1. INLEIDING	5
1.1 AANLEIDING	5
1.2 ONDERZOEKSVRAAG	5
2. THEORETISCH KADER	7
2.1 SBL DOCENTCOMPETENTIES	7
2.1.1 INTERPERSOONLIJK/PEDAGOGISCH	9
2.1.2 DIDACTISCH	9
2.1.3 VAKINHOUDELIJK	9
2.1.4 ORGANISATORISCH	10
2.2 LESSON STUDY	10
2.3 TELPROBLEMEN	12
3. METHODE	21
3.1 PARTICIPANTEN	21
3.2 ONDERZOEKSINSTRUMENTEN	22
3.3 MATERIAAL	23
3.4 PROCEDURE	24
4. DATAVERZAMELING EN -VERWERKING	26
5. ANALYSE	29
6. RESULTATEN	31
7. CONCLUSIES	34

8. DISCUSSIE EN AANBEVELINGEN	36
APPENDIX	39
<i>A. LESOBSERVATIES</i>	39
<i>B. DISCUSSIES AAN DE HAND VAN LESOBSERVATIES</i>	43
<i>C. INTERVIEWS PARTICIPANTEN</i>	45
<i>D. CIJFERUITDRAAIEN</i>	48
<i>E. 13 TELPROBLEMEN</i>	51
LITERATUUR	54

1. INLEIDING

1.1 Aanleiding

Via de Masteropleiding SEC ben ik reeds enkele jaren geleden in aanraking gekomen met de COL (Community Of Learners) op de Universiteit Twente waaraan Nellie Verhoef leiding geeft en deelneemt. De COL heeft als doel docenten te professionaliseren en hen met diverse (nieuwe) didactieken in aanraking te laten komen. Onder meer de effectiviteit van Lesson Study (hierover later meer) werd beproefd en in de tijd dat ik daaraan deelnam stond het begrip afgeleide centraal. Als eerste opzet voor het vak Onderzoek voor Onderwijs heb ik destijds samen met Tom Coenen onderzoek gedaan naar de afgeleide, hoe het begrip geïntroduceerd wordt in de vierde klas en hoe de uitleg door de leerlingen wordt geïnterpreteerd. Het doel van het onderzoek was de actuele didactiek onderzoeken voor de introductie bij het concept afgeleide en op zoek te gaan naar een mogelijke verbetering daarin.

Ter aanvulling op deze eerdere invulling van het vak Onderzoek voor Onderwijs heb ik in samenspraak met Nellie Verhoef aanpalend onderzoek gedaan naar docentontwikkeling binnen een Lesson Study opzet. In plaats van het eerder genoemde thema van de afgeleide draait dit onderzoek om de telproblemen die in de vierde klas worden geïntroduceerd, deels als inleiding op kansrekening. Hoewel het thema combinatoriek een op zichzelf staand wiskundig onderwerp vormt, staat het in het v.o. nagenoeg volledig in het teken van de kansrekening. Met andere woorden, de combinatoriek wordt behandeld als basis voor de aansluitende theorie van kansrekening. Zo lijkt het ten onrechte, als docent en leerling niet goed opletten, dat combinatoriek uitsluitend bestaansrecht ontleend aan de kansrekening. Er ligt hier dus een belangrijke rol voor de docent die de positie van combinatoriek binnen de wiskunde op de juiste wijze kan uiteenzetten voor de leerlingen.

Daarnaast is het stuk combinatoriek dat leerlingen krijgen in het v.o. vrij basaal en behoort daardoor tot minder abstracte en enigszins eenvoudiger theorie uit de bovenbouw. Wellicht heeft dit niveauverschil gevolgen voor eventuele opbrengsten van het Lesson Study traject wat een interessant verschil met eerder onderzoek kan opleveren.

Het onderzoek was een verbreding van eerder werk van Tom Coenen en Nellie Verhoef.

1.2 Onderzoeksvraag

In het onderzoek gaat het erom hoe docenten zich ontwikkelen aan de hand van het gezamenlijk ontwerpen van een les en het bestuderen en analyseren van de impact van de ontworpen les op een klas en hoe leerlingen de theorie en gekozen didactiek interpreteren. Van 2011 tot en met 2013 zet Verhoef achtereenvolgens Lesson Study uiteen om aansluitend de praktijk onder de loep te nemen rond bewijzen en redeneren (Verhoef, 2012) en periodieke verschijnselen (Verhoef, 2013). Een jaar

later onderzoekt Coenen eveneens de mate van professionalisering a.h.v. Lesson Study, dit maal rond telproblemen/combinatoriek (Coenen, 2014).

Waar vergelijkbaar onderzoek de effectiviteit van Lesson Study als professionaliseringsmethode bekeek bij diverse wiskundige onderwerpen en begrippen, is hier de les gecentreerd rond de combinatoriek die leerlingen in het vierde leerjaar krijgen. De concrete opzet van de les en de combinatorische vraagstukken die aan de orde komen zullen in hoofdstuk 3 onder 'Methode' beschreven worden. Om te onderzoeken of de opbrengsten van Lesson Study ook rond het onderwerp combinatoriek aanwezig zijn en, zo ja, welke competenties het dan betreft zal tijdens dit onderzoek een antwoord getracht worden te vinden op de vraag:

"Stelt een Lesson Study traject over combinatoriek docenten in staat zich te ontwikkelen en, zo ja, welke competenties ontwikkelen zij daarbij?"

Bij deze eventuele ontwikkeling wordt onderscheid gemaakt tussen interpersoonlijke/pedagogische, didactische, vakinhoudelijke en organisatorische ontwikkeling. Deze ontwikkelingen zijn afgeleid van de SBL docentcompetenties en zullen verder worden toegelicht in paragraaf 2.1 SBL Docentcompetenties. Het is voorstelbaar dat de soort en mate van ontwikkeling samenhangt met de ervaring en vooropleiding van de participanten wat een verwerking van de onderzoeksvraag genuanceerd kan maken.

2. THEORETISCH KADER

Er is met dit onderzoek onderzocht wat de effectiviteit is van Lesson Study als ontwikkelmethode voor docenten met als thema enkele combinatorische problemen. Hiermee wordt de efficiëntie van Lesson Study als professionaliseringsmethode ook bij andere wiskunde-onderwerpen op de proef gesteld. Daarnaast is getracht eventuele ontwikkeling m.b.v. competenties te categoriseren zodat wellicht duidelijker kan worden bepaald in welke situatie Lesson Study toepasbaar en efficiënt is. In de voorgaande paragraaf is de aanleiding voor dit onderzoek geformuleerd en hieruit is een onderzoeksvraag gekomen. Er is voor gekozen, zoals uit de onderzoeksvraag blijkt, de ontwikkeling van docenten te meten aan de hand van enkele voor een docent relevante competenties. Welke competenties zijn onderzocht zal hier worden uiteengezet.

Daarnaast is Lesson Study een belangrijk begrip dat enige toelichting verdient. Bij Lesson Study draait het om het bestuderen van één of meerdere lessen door een groepje docenten om niet de leerlingen maar juist de docenten te ontwikkelen. Meer uitleg zal volgen in paragraaf 2.2.

De telproblemen die zijn gekozen als basis voor dit onderzoek, de 13 telproblemen van Batanero, Navarro-Pelayo en Godino (1997), zijn niet willekeurig gekozen en om te zien welke typen combinatoriek in de opgaven terugkomen zal eerst een uitdieping van verschillende soorten combinatoriek worden gegeven in paragraaf 2.3. De telproblemen zijn opgenomen in Appendix E: 13 Telproblemen.

2.1 SBL Docentcompetenties

De Stichting Beroepskwaliteit Leraren heeft een zevental SBL docent competenties opgesteld om een nauwkeurige profielschets voor een docent in kaart te brengen. De SBL is in 2011 opgeheven en wordt opgevolgd door de Onderwijscoöperatie. Deze zeven competenties worden veel gebruikt om docenten in opleiding te beoordelen of de vooruitgang/professionalisering van docenten te monitoren. De competenties zijn achtereenvolgens:

1. Interpersoonlijk competent
2. Pedagogisch competent
3. Vakinhoudelijk en didactisch competent
4. Organisatorisch competent

5. Competent in het samenwerken met collega's
6. Competent in het samenwerken met de omgeving
7. Competent in reflectie en ontwikkeling.

Sinds 2006 is de wet BIO van kracht: de Wet voor beroepen in het onderwijs. In deze wet zijn de zeven bovengenoemde SBL docentcompetenties opgenomen als bekwaamheidseisen waaraan onderwijzend personeel moet voldoen. Deze wet geldt voor docenten in het (speciaal) basisonderwijs, het (speciaal) voortgezet onderwijs en beroepsonderwijs/volwasseneneducatie. (Wet BIO, 2006)

Vanuit de vo-raad zijn diverse initiatieven op poten gezet om scholen te helpen actualiseren, verbeteren, ontwikkelen en vernieuwen. Eén van die initiatieven is het leermiddelenvo.nl waarin schoolbestuurders veel materiaal kunnen vinden voor het opzetten van verschillende beleidsstukken of beoordelingsinstrumenten van docenten. Ook hier worden de sbl competenties als leidraad gesuggereerd als profielschets voor de docent. (leermiddelenvo.nl)

Een trend in het huidige onderwijs is het ontwikkelingsgericht denken. Met de komst van het ontwikkelingsgericht onderwijs hebben enkele scholen de handen ineen geslagen met OGO (ontwikkelingsgericht onderwijs) als resultaat. Achterliggende visie bij dit onderwijs is dat de leerlingen zich ontwikkelen door en met behulp van interactie met de docent en leeftijdsgenoten. Docenten worden daarmee invloeden die de leerling tot bepaalde ontwikkelingen kunnen sturen; het leren en ontwikkelen zelf komt (nog steeds) van de leerlingen zelf. OGO scholen hebben een eigen kwaliteitskeurmerk (kwaliteitskaart) om te beoordelen of een school OGO-onderwijs biedt en ook in deze kwaliteitskaart zijn de 7 sbl docentcompetenties terug te vinden. Met andere woorden, naast een eigen visie op de ontwikkeling van de leerling hanteren zij eveneens de door de SBL opgestelde vakbekwaamheidseisen. (Van Oers, 2003; www.ogo-academie.nl)

Aangezien Lesson Study draait om het bestuderen en gezamenlijk analyseren van slechts enkele onderwerpen, zullen in dit project de laatste drie competenties (relatie met collega's, relatie met omgeving en reflectie) buiten beschouwing worden gelaten. De competentie samenwerken met collega's zoals beschreven door de SBL gaat over een breder perspectief dan Lesson Study beoogt, net als het samenwerken met de omgeving en de competentie reflectie en ontwikkeling. Uiteraard zijn de participerende docenten weliswaar aan het samenwerken met collega's en bezig met reflectie en ontwikkeling maar de competenties zoals hierboven beschreven gaan over de samenwerking binnen een geheel docententeam en reflectie over één of meerdere jaren.

Bij het gebruik van de eerste vier competenties is de vakinhoudelijke en didactische competentie opgesplitst in beide delen, in het bijzonder omdat dit project wordt uitgevoerd aan de hand van een specifiek wiskundig onderwerp, te weten combinatoriek/telproblemen. Afzonderlijk zullen beide competenties worden uitgediept in de komende subparagrafen 2.1.2 Didactisch en 2.1.3 Vakinhoudelijk.

Aangezien het verschil tussen de interpersoonlijke en pedagogische competenties klein is en zeker moeilijk meetbaar, is besloten deze twee competenties te fuseren tot één. Onder deze competentie

wordt dan persoonlijke interactie verstaan tussen de docent en de leerling of de klas als geheel. De docent is in staat een goede sfeer in de klas te bewerkstelligen en de juiste relatie met de leerlingen, zowel individueel als collectief. Een gedetailleerdere uitwerking komt in paragraaf 2.1.1 Interpersoonlijk/pedagogisch aan bod.

Met deze wijzigingen in acht genomen wordt de lijst met competenties gehanteerd aan de hand van de volgende vier docentcompetenties:

1. Interpersoonlijk/Pedagogisch
2. Didactisch
3. Vakinhoudelijk
4. Organisatorisch

Deze vier competenties zullen verder worden toegelicht.

2.1.1 Interpersoonlijk/ Pedagogisch

Met de interpersoonlijke/pedagogische competentie wordt de menselijke interactie bedoeld die nodig is om de juiste sfeer in de klas te bewerkstelligen. De docent is in staat op het juiste moment te complimenteren of juist te corrigeren. Hij kan uitlatingen van leerlingen op de juiste waarde schatten, zal van een klein incident niks groots maken, maar kan ook herkennen als een ogenschijnlijk detail meer aandacht verdient. De docent zal uitlachen niet tolereren en weet een goede schoolhouding te stimuleren. De docent is bekwaam in zijn omgang met kinderen, begrijpt welke effecten zijn handelen op de leerlingen heeft en kan hun sociaal-emotionele en morele ontwikkelingen stimuleren. Hij weet in de klas een veilige omgeving te creëren waar leerlingen zonder angst tot bloei kunnen komen. De docent is in staat kinderen te leren respectvol met elkaar om te gaan, hen uit te dagen en hun initiatieven op waarde te schatten.

2.1.2 Didactisch

Didactisch vaardig betekent dat de docent in staat is de stof op diverse manieren aan de leerlingen over te brengen en de overdracht op de kinderen af te stemmen. Daarbij streeft hij naar een situatie waarbij die leeropbrengst maximaal is. Dat betekent zowel de manier van uitleg, lestempo, werkvorm als het gebruik van leermiddelen.

2.1.3 Vakinhoudelijk

Vakinhoudelijk dient de docent te weten waar hij het over heeft. Hij moet de stof niet alleen zelf geheel beheersen, hij moet er tevens verder boven staan zodat verbanden duidelijk zijn en het vervolg helder. Voor een docent is het niet voldoende de stof te kennen op leerling-niveau maar hij moet weten welke theorie daarna komt, wat de vervolgstappen zijn. Niet enkele weten wát er gedaan wordt maar ook weten waaróm het gedaan wordt. De docent moet op de meeste verdiepingsvragen (van de leerlingen) het antwoord weten en in staat zijn hun nieuwsgierigheid aan te wakkeren, te inspireren.

2.1.4 Organisatorisch

Onder organisatorisch competent wordt de bekwaamheid verstaan om een goede manier leiding te geven aan een groep en het klassenmanagement te beheersen. De docent creëert een prettige werksfeer waarin een goed leerklimaat heerst. Hij bewaakt goede omstandigheden voor ordelijk te verlopen lessen. Door kaders op te stellen, afspraken te maken en hier consequent naar te handelen brengt hij een sfeer tot stand waarin de leerlingen weten waar ze aan toe zijn.

2.2 Lesson Study

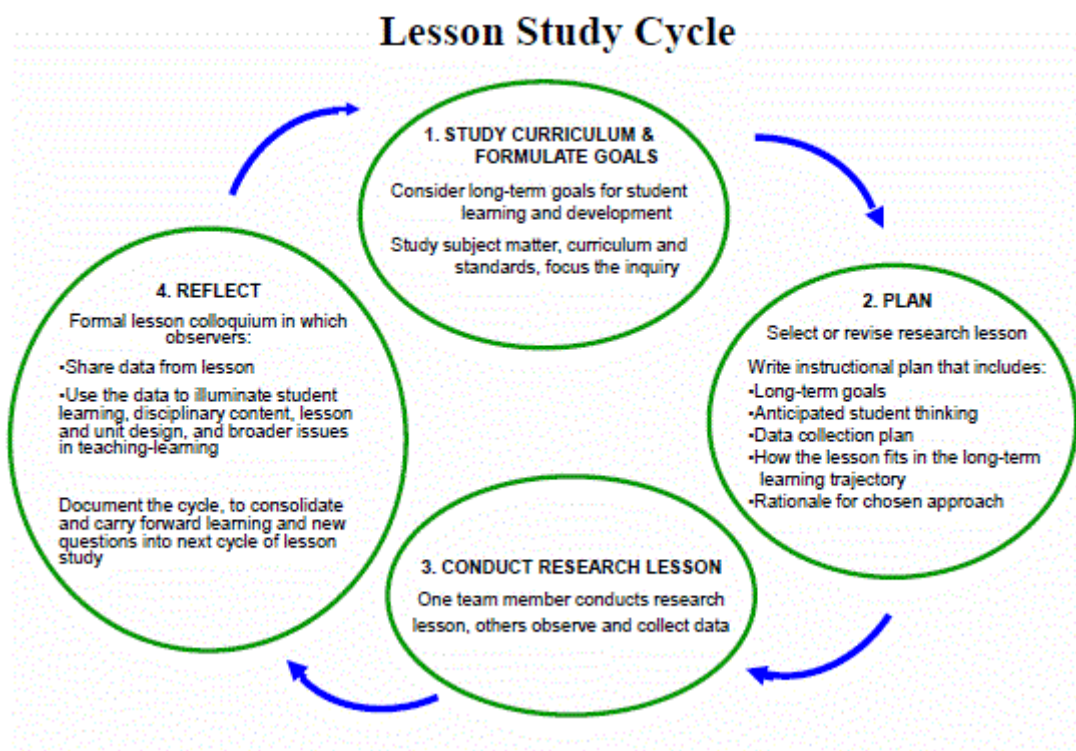
Ten grondslag aan de lesopzet ligt de in Japan ontwikkelde methode van Lesson Study. Lesson Study is een professionaliseringsmethode met als doel docenten te ontwikkelen door deze zich te laten verdiepen in de leerprocessen van leerlingen. Hierbij wordt niet gekeken naar een lange reeks lessen of hoe de docent de theorie uiteenzet maar er wordt gefocust op het observeren van leerlingen bij één les of enkele lessen.

De betekenis van het begrip Lesson Study kan enigszins variëren. Afgaande op vele, met name Engelse, artikelen heeft Lesson Study een vrij ruime betekenis met het verbeteren van de docent ontwikkelmethodes op scholen en professionalisering van de docenten. De Japanse (oorspronkelijke) opvatting van het begrip wordt gekenmerkt door verschillende facetten:

Lesson Study	
Lesson Study cyclus	Planning (voorbereiding), uitvoeren (observatie) en zien (discussie en reflectie), alle stappen doorlopen met andere docenten
Open Klaslokaal op diverse niveaus	Bij één klas, voor de gehele school, of zelfs op regionale of landelijke grootte.
Thema van de Lesson Study	Het thema waar de LS om draait kan iedere keer verschillen.
Lesplan	Een lesplan staat niet vast, maar wordt opgesteld aan de hand van het thema.
Docenten	De groep observanten/participanten bij Lesson Study bestaan altijd uit docenten.
Resultaten	De resultaten verschillen afhankelijk van het thema, maar ook van de groep participanten.
Doorlopende ervaring	Lesson Study houdt niet op na één cyclus. Ontwikkeling roept op tot nieuwe uitdagingen.

(Isoda, 2010)

Net als in de VS en Groot-Brittannië zijn klaslokalen in Nederland van oudsher gesloten systemen. De docent heeft de regie in de klas en er is geen tot weinig invloed van buiten het lokaal. In 1993 ontdekte Lewis een andere aanpak bij Japanse scholen. Benaderingen zijn onderzoekend en probleemoplossend, de klaslokalen zijn open systemen en op de vraag aan docenten hoe deze houdingen zijn ontstaan antwoorden zij met Lesson Study.



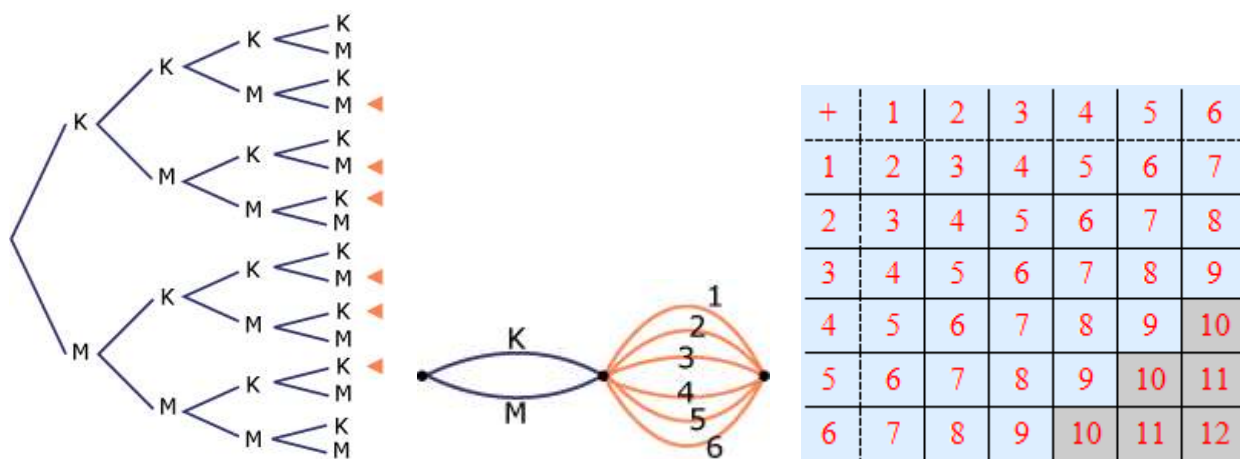
Figuur 2: Lesson Study cyclus

In bovenstaande figuur wordt de cyclus afgebeeld die met Lesson Study wordt doorlopen. Als eerste wordt het curriculum van de leerlingen bestudeerd en aan de hand daarvan worden doelen opgesteld voor dit Lesson Study traject. Bij stap 2 formuleren de docenten een plan van aanpak waarin lesplannen zijn opgenomen, verwachte resultaten op korte en lange termijn en hoe de lessen zullen worden uitgevoerd. Bij stap 3 wordt de les uitgevoerd door één van de participanten terwijl de overige deelnemers observeren. De laatste stap bestaat uit de discussie en reflectie van de docenten. Ze delen hun informatie en proberen het leergedrag van de leerlingen aan het licht te brengen. Na deze 4^e stap begint het gehele proces opnieuw. (Lewis, 2011)

Door met een selectie observanten (docenten) de leerlingen te bestuderen bij een vooraf ontworpen les kunnen analyses gemaakt worden over leerprocessen en de problemen die leerlingen tegenkomen als ze worden geconfronteerd met abstracte theorie, moeilijke begrippen of lastige probleemstukken. Aan de hand van aantekeningen van leerlingen en/of aantekeningen van observerende docenten kunnen de docenten na de les in een collegiaal overleg verwerken hoe de uiteengezette les door de leerlingen is geïnterpreteerd. Een mogelijke verrijking daarbij kan feedback zijn van de leerlingen na de lessen in de vorm van een interview of enquête. Een essentieel element in dit proces is het gebruik van de collectieve kennis en expertise van meerdere collega's en de diverse perspectieven die voor een aanzienlijke meerwaarde zorgen ten opzichte van individuele reflectie.

2.3 Telproblemen

Een klassiek struikelblok voor veel leerlingen in de vierde klas is een inleiding in de combinatoriek (Coenen, 2014). Verschillende situaties die op het eerste oog op elkaar lijken, blijken genuanceerde verschillen te kennen die voor leerlingen moeilijk zijn te doorgronden. Reden voor die problemen is de veelzijdigheid van de combinatoriek en de mate waarin de moeilijkheidsgraad van twee gelijkende problemen sterk uiteen kunnen lopen. In paragraaf 3.3 Materiaal wordt de keuze voor het materiaal toegelicht waarbij dieper op de lastig te doorgronden combinatoriek wordt ingegaan. Bij telproblemen van beperkte omvang is het systematisch noteren van alle mogelijkheden nog een optie. Doorgaans wordt dit kort behandeld aan de hand van notatiewijzen als een wegendiagram, een boomdiagram, een rooster of systematisch noteren.



Figuur 2: v.l.n.r. een boomdiagram, een wegendiaqram en een rooster

De linker afbeelding van figuur 2 is een voorbeeld van een boomdiagram bij het werpen van 4 dobbelstenen. Alle mogelijke resultaten zijn weergegeven en met pijltjes zijn uiterst rechts alle opties voor 2 keer Kop (K) en 2 keer Munt (M) getoond. Hieruit volgt tevens dat de kans op 2 keer K en 2 keer M gelijk is aan $6/16 = 3/8$: van 16 mogelijkheden zijn er 6 geselecteerd met 2 keer K en 2 keer M.

De middelste afbeelding toont een wegendiaqram met een muntworp en een dobbelsteenworp. Het totaal aantal mogelijkheden is te berekenen door de aantallen wegen tussen de punten te vermenigvuldigen: $2 \cdot 6 = 12$ mogelijkheden.

De rechter afbeelding vormt een rooster bij 2 dobbelsteenworpen, met als invulling de som van alle mogelijke uitkomsten. Het aantal mogelijkheden om meer dan 9 negen te krijgen op 2 dobbelstenen is aangegeven: 10 (3 keer), 11 (2 keer) en 12 (1 keer). De kans op meer dan 9 ogen wordt daarmee $6/36 = 1/6$ (het totaal aantal mogelijkheden is immers $6 \cdot 6 = 36$).

Hoewel deze drie mogelijkheden intuïtief prettig weergeven kennen ze grote beperkingen zodra de aantallen groeien: een boomdiagram blaast op en een rooster kan enkel bij een tweetal experimenten worden toegepast. Het systematisch noteren is de meest praktische methodiek maar ook hier is een beperkte omvang van het probleem een voorwaarde. (Noordhoff Uitgevers, 2011)

Het belang van het onderwerp combinatoriek op de middelbare school zit deels in de voorbereiding op het onderwerp Kansrekening. Maar ook zonder Kansrekening (op HAVO uit het examenprogramma per 2015-2016) speelt de veelzijdigheid van de combinatoriek een belangrijke rol in de opleiding van de middelbare scholier. Het is een onderdeel van de wiskunde waarvoor geen tot weinig algebra vereist is en waarvan de toepassingen zich uitstrekken tot diverse andere wiskundige onderwerpen. (English, 2005)

De telproblemen van Batanero, Navarro-Pelayo en Godino (1997) die in dit onderzoek zijn gebruikt, zijn zorgvuldig gekozen en opgenomen in Appendix E. De keuze voor deze problemen heeft te maken met gelijkmatige verdeling over de verschillende categorieën binnen de combinatoriek. Om diverse telproblemen te kunnen categoriseren hanteren zij op basis van Dubois (1984) de drie onderdelen

waarin de combinatoriek opgedeeld is: **selectie, distributie en partitie**. De gekozen opgaven van Batanero, Navarro-Pelayo en Godino (1997) zijn gelijkmatig verdeeld over deze categorieën. Deze drie categorieën zullen nader worden toegelicht:

- **Selectie**

Bij selectie bekijken we een groepje van m verschillende objecten waaruit we n objecten selecteren. Om dit en de volgende variaties toe te lichten kiezen we probleem 11 van de 13 telproblemen die Batanero, Navarro-Pelayo en Godino (1997) kozen:

Probleem 13

In een doos zitten vier genummerde knikkers met de getallen 2, 4, 7 en 9. We nemen een willekeurige knikker en noteren het nummer dat erop staat. Daarna doen we de knikker terug in de doos. We herhalen deze handeling drie keer, zodat we een getal gekregen hebben van drie cijfers. Hoeveel verschillende getallen van drie cijfers kunnen we

zo krijgen? Bijvoorbeeld hadden we het getal 222 kunnen krijgen.

Het is duidelijk dat in dit geval de oorspronkelijke objecten de knikkers 2,4,7 en 9 zijn waarbij de groepsgrootte $m=4$. Het aantal knikkers dat daaruit wordt geselecteerd is $n=3$. Dat is echter niet de enige relevante informatie in de opgave. Er kunnen op eenvoudige wijze belangrijke variaties op het selectiemodel worden gecreëerd.

Een relevant element is bijvoorbeeld of het mogelijk is een eerder geselecteerd object opnieuw te selecteren is. Met andere woorden: is herhaling mogelijk? Daarnaast kun je onderscheid maken tussen selectieproblemen waarbij de volgorde van de selectie wel of juist niet uitmaakt. In het eerste geval, als verschillende volgordes wél apart geteld moeten worden, spreken we van rangschikkingen. In het laatste geval noemen we de gemaakte groepjes objecten combinaties.

Als we deze twee variaties bestuderen bij probleem 11 zien we dat herhaling mogelijk is aangezien de knikkers na iedere trekking worden teruggelegd zodat uiteindelijk het groepje '222' kan ontstaan. Daarnaast wordt uit de vraagstelling duidelijk dat verschillende volgorde apart geteld moeten worden. Als ze namelijk vragen naar het aantal rijtjes dat kan ontstaan wordt onderscheid gemaakt tussen de rijtjes '2,4,9' en '9,2,4'. Het zijn dezelfde knikkers in andere volgorde dus we spreken hier van rangschikkingen.

Aan de hand van deze 2 tweedelingen ontstaan 4 variaties bij het selectiemodel:

Selectie		
	Met Herhaling	Zonder Herhaling
Rangschikkingen: Volgordes apart tellen	Probleem 11	Trek 3 knikkers <i>zonder</i> tussendoor terug te leggen [Probleem 5] [Probleem 13]
Combinaties: Volgordes niet apart tellen	Zelfde situatie. Nieuwe vraagstelling: Hoeveel setjes van 3 getallen kun je krijgen?	Trek 3 knikkers <i>zonder</i> tussendoor terug te leggen. Nieuwe vraagstelling: Hoeveel setjes van 3 getallen kun je krijgen? [Probleem 8]

TABEL 1: SELECTIE

Als je probleem 11 iets wijzigt kun je alle 4 de varianten krijgen. In bovenstaande tabel staan de 4 variaties met bijbehorende varianten voor probleem 11. Oorspronkelijk valt probleem 11 dus linksboven te categoriseren, maar als de knikkers tussendoor niet worden teruggelegd hoort het probleem rechtsboven. Met soortgelijke wijzigingen kunnen alle 4 typen worden gecreëerd.

Op basis van deze indeling valt te zien dat ook de andere variaties in de telproblemen van Batanero, Navarro-Pelay en Godino terug komen:

Probleem 8

Vijf leerlingen (Angela, Bernadette, Claudia, Dirk en Ezra) hebben zich opgegeven om een docent Frans te helpen met het klaarzetten van glazen en dergelijke voor een wijn-

proeverij (in een bovenbouwklas ter gelegenheid van de 87e verjaardag van de school). Hij heeft er maar drie nodig. Op hoeveel manieren kan hij drie leerlingen kiezen uit deze vijf? Hij kan bijvoorbeeld Bernadette, Claudia en Dirk kiezen.

Bovenstaand probleem is een selectieprobleem met $m=5$ (groepsgrootte) en $n=3$ (selectiegrootte). Daarnaast is herhaling niet mogelijk (de docent kan immers niet dezelfde leerling vaker aanwijzen) en zijn volgordes irrelevant. Hij past dus in de tabel rechtsonderin.

Probleem 5

In een vaas zijn drie knikkers die voorzien zijn met de cijfers 2, 4 en 7. We trekken willekeurig een knikker uit de vaas en noteren het cijfer dat erop staat. Zonder de knikker

terug te stoppen, pakken we nog een knikker en noteren ook dat cijfer. Tenslotte trekken we de laatste knikker uit de vaas. Hoeveel 3-cijferige getallen kunnen we op deze

manier krijgen? We kunnen bijvoorbeeld het getal 724 krijgen.

In dit geval geldt dat de oorspronkelijke groepsgrootte $m=3$ en ook de selectiegrootte $n=3$. Herhaling is wederom niet mogelijk (de knikker wordt niet terug gestopt in de vaas dus kan niet opnieuw worden getrokken) maar is de volgorde wel van belang. Getal 724 is niet hetzelfde als 247 en wordt dus apart geteld: rangschikkingen. In de tabel hoort dit probleem daarom rechtsbovenin.

Probleem 13

Een bestuur van een studentenvereniging moet bestaan uit drie personen (een voorzitter, secretaris en een penningmeester). Om dit bestuur te vormen zijn er vier kandidaten: Arthur, Ben, Carla en David. Hoeveel verschillende besturen zouden kunnen gevormd kunnen worden? Een mogelijkheid is dat Carla voorzitter wordt, David penningmeester en Ben tenslotte secretaris.

Bij de studentenvereniging geldt $m=4$, de groep studenten waaruit te kiezen valt, en $n=3$, er wordt voor 3 bestuursleden gekozen. Een persoon kan niet twee keer gekozen worden dus herhaling is niet toegestaan en volgorde is wél van belang: Verschillende volgordes betekenen immers dat de studenten op verschillende manieren over de bestuurlijke posities worden verdeeld. Vergelijk bijvoorbeeld de volgordes CDE en EDC waarbij in het eerste geval C=Carla voorzitter wordt en in het tweede geval E=Ezra voorzitter wordt.

Op basis van deze indeling lijken probleem 5 en 13 veel op elkaar en het klopt dat ook dat de berekening voor het aantal mogelijkheden identiek is. Het enige inhoudelijke verschil is echter dat bij probleem 5 de volledige oorspronkelijke groep wordt geselecteerd, dus $m=n$. In dat geval spreken we heel specifiek van **permutaties**. In het geval van permutaties kan de vraagstelling ook anders geformuleerd worden: Op hoeveel manieren kan een groep van m objecten gerangschikt worden? Bij probleem 5 zou dat worden: Op hoeveel manieren zijn de getallen 2,4 en 7 te rangschikken?

- **Distributie**

Hoewel er van het selectiemodel verschillende variaties bestaan, is de basale situatie overal gelijk: uit een groep van m objecten worden n objecten geselecteerd. *Bij distributie daarentegen beschouwen we n containers waarover we m objecten verdelen.* Een voorbeeld hiervan is probleem 3:

Probleem 3

We hebben drie dezelfde brieven en vier verschillend gekleurde enveloppen: een gele, een blauwe, een rode en een groene. We doen niet meer dan één brief in een enveloppe. Op hoeveel manieren kunnen we de drie identieke brieven in de vier verschillende enveloppen doen? Eén van de mogelijkheden is bijvoorbeeld: één brief in de gele enveloppe, één brief in de blauwe enveloppe, en de resterende brief in de groene enveloppe.

In bovenstaand probleem vormen de enveloppen de containers en de brieven zijn de objecten. Daarmee hebben we een situatie waarin het aantal containers $n=4$ en het aantal objecten $m=3$. Net als bij het selectiemodel bestaan er echter verschillende variaties bij distributieproblemen met elk hun eigen oplosmethoden. Er moet bijvoorbeeld onderscheid gemaakt worden tussen verschillende of juist identieke containers. In het voorbeeld van probleem 3 zijn de containers (de enveloppen) verschillend: er is een gele, blauwe, rode en groene enveloppe. Daarnaast kunnen ook de te verdelen objecten verschillend of identiek zijn. De objecten in ons voorbeeld, de brieven, zijn identiek. Een derde indelingsoptie is in probleem 3 niet aan de orde: worden verschillende volgordes binnen een container apart geteld? Met andere woorden: tellen binnen de containers combinaties of rangschikkingen? Aangezien in probleem 3 iedere enveloppe maximaal 1 brief krijgt zijn combinaties vs. rangschikkingen irrelevant.

Op basis van de 3 indelingscriteria (containers verschillend/identiek, objecten verschillend/identiek, combinaties of rangschikkingen binnen container) zouden $2 \times 2 \times 2 = 8$ variaties bestaan ware het niet dat volgordes niet interessant zijn zodra de objecten identiek zijn. Als er namelijk meerdere identieke objecten in een container komen maakt de volgorde automatisch niks meer uit. Daardoor vallen 2 variaties af en houden we 6 mogelijke variaties voor distributieproblemen over:

Distributie				
Verschillende Objecten	Verschillende Containers		Identieke Containers	
	Combinaties	Rangschikkingen	Combinaties	Rangschikkingen
	[Probleem 4]	[Probleem 9]		
	[Probleem 6]			
	[Probleem 9]			
Identieke Objecten	Probleem 3			

TABEL 2: DISTRIBUTIE

De 6 mogelijke variaties zijn in de tabel verdeeld door in de linker kolom onderscheid te maken tussen verschillende en identieke objecten, in de bovenste rij onderscheid te maken tussen verschillende en identieke containers en in de één-na-bovenste rij combinaties en rangschikkingen binnen de container te onderscheiden. Zoals gezegd is die laatste indeling overbodig bij identieke objecten (in de onderste rij).

De verdeling van identieke brieven over verschillende enveloppen, probleem 3, hoort in de tabel linksonderin.

Aan de hand van bovenstaande tabel kunnen ook enkele andere problemen worden ingedeeld:

Probleem 4

Een jongen heeft vier speelgoedauto's die verschillend van kleur zijn (zwart, oranje, wit en grijs). Hij besluit deze auto's weg te geven aan zijn vriendinnen: Petra, Joke en Linda. Op hoeveel manieren kan hij dat doen? Hij zou bijvoorbeeld alle vier de auto's aan Linda kunnen geven.

Bij de verdeling van de speelgoedauto's zijn de vriendinnen de containers, $n=3$, waarover de auto's, de objecten, verdeeld moeten worden: $m=4$. Zowel de containers (vriendinnen) als de objecten (auto's) zijn verschillend en als één container meerdere objecten heeft (een vriendin heeft meerdere auto's) is de volgorde niet van belang: combinaties. Probleem 4 behoort dus in de linkerbovenhoek van de tabel.

Probleem 6

Vier kinderen, Alice, Bert, Caroline en Diana mogen samen een nachtje logeren bij hun grootmoeder. Ze heeft twee slaapkamers (één op zolder en één beneden) met elk vier

bedden, zodat alle kinderen in één kamer kunnen slapen. Maar dat hoeft niet, ze mogen er ook voor kiezen beide kamers te gebruiken. Op hoeveel verschillende manieren

kunnen de vier kinderen zich over de slaapkamers verdelen? Bijvoorbeeld kunnen alle kinderen op één kamer, of (nog een voorbeeld) kunnen Alice, Bert en Caroline beneden slapen en Diana boven op zolder.

Grootmoeder heeft 2 slaapkamers, daarmee is het aantal containers $n=2$. Er zijn 4 kinderen die daarover verdeeld moeten worden: $m=4$. In dit probleem zijn wederom zowel de containers (slaapkamer op zolder en beneden) als de objecten (4 kinderen) verschillend en net als bij het vorige probleem is de volgorde van objecten in iedere container niet van belang. Daarmee is probleem 6 dezelfde variatie als probleem 4: linksbovenin.

Probleem 9

De parkeergarage onder het appartement van Klaas heeft vijf genummerde plaatsen: 1 2 3 4 5. Omdat het gebouw nog heel nieuw is, zijn niet alle appartementen verhuurd. Alleen Klaas, Leonard en Maurice wonen er op dit moment en kunnen daar hun eigen auto parkeren. Bijvoorbeeld kan Klaas zijn auto op plaats nummer 1 zetten, Leonard op nummer 2 en Maurice op nummer 4. Op hoeveel verschillende manieren kunnen Klaas, Leonard en Maurice hun auto parkeren?

Bij probleem 9 zijn er 5 containers (parkeerplaatsen) en 3 objecten (K,L en M), dus $n=5$ en $m=3$. Zowel de containers als de objecten zijn verschillend maar omdat iedere container maximaal 1 object mag bevatten (op iedere parkeerplaats maximaal 1 auto) maken volgordes niet uit

- **Partitie**

Bij partitie draait het om de vraag op hoeveel manieren we een groep van m objecten in n deelgroepjes of partities kunnen delen.

Een belangrijke notitie hierbij is dat er een groot raakvlak bestaat tussen distributie- en partitieopgaven: sommige problemen kunnen op beide manieren gelezen worden. Dit zal aan het einde van deze paragraaf verder worden toegelicht.

Het type van partitie zal worden toegelicht aan de hand van probleem 7:

Probleem 7

Vier vriendinnen: Anne, Beatrice, Cathy en Demi moeten nog twee praktische opdrachten afronden, één voor wiskunde en één voor Nederlands. Ze besluiten zich te verdelen over deze twee vakken in groepjes van twee, zodat elk groepje zich maar hoeft te verdiepen in één opdracht. Op hoeveel manieren kunnen deze vier leerlingen zich verdelen in twee groepjes van twee voor de beide vakken? Bijvoorbeeld zouden Anne en Cathy samen de wiskundeopdracht kunnen afmaken en Beatrice en Demi de opdracht voor Nederlands.

Bij bovenstaand vraagstuk wordt een groep van $m=4$ objecten, de vriendinnen, verdeeld in $n=2$ partities, de praktische opdrachten. Net als eerder is het bij partitie belangrijk of de objecten verschillend of identiek zijn evenals de partities. In tegenstelling tot distributie zal bij partitie in iedere partitie minimaal 1 object terecht komen: het aantal partities is maximaal gelijk aan het aantal objecten. Dus, naar probleem 7, er zullen nooit meer praktische opdrachten zijn dan leerlingen. Bij distributie is dat geen probleem: er mag een lege container overblijven.

Voortbordurend hierop lijkt het logisch dat de objecten gelijkmatig over de partities verdeeld moeten worden (zoals de 4 lln in 2 groepjes van 2 worden verdeeld) maar dat is niet nodig. Weliswaar zal het

in veel praktische gevallen zo uitpakken maar een ongelijke partitie is eveneens toegestaan: op hoeveel manieren zijn kunnen de 4 meisjes zich verdelen zodat er 3 met de opdracht voor wiskunde en 1 met de opdracht voor Nederlands aan de gang gaan?

Wel belangrijk is of van tevoren de groottes van de afzonderlijke partities vaststaat. In het geval van probleem 7 staat vooraf vast dat beide partities (de praktische opdrachten) elk 2 objecten (de meisjes) gaan krijgen. Als dat niet vast staat, dus verdelingen 1:3, 2:2 en 3:1 over de PO's zijn allemaal toegestaan, kan uitwerking van het vraagstuk nog vrij bewerkelijk blijken te zijn.

Partitie		
	Verschillende Partities	Identieke Partities
Verschillende Objecten	Probleem 7 <i>[Probleem 10]</i>	Pr 7: De meisjes moeten in tweetallen dezelfde PO voor Nederlands uitwerken.
Identieke Objecten	Verdeel 10 rode knikkers in 3 schalen A, B en C met min. 1 knikker per schaal	Verdeel 10 rode knikkers in 3 dezelfde schalen met min. 1 knikker per schaal

TABEL 3: PARTITIE

Probleem 10

Marije en Nico hebben vier postzegels, genummerd van 1 t/m 4. Ze gaan de zegels verdelen, elk twee. Op hoeveel manieren kunnen ze dat doen? Bijvoorbeeld kan Marije de

zegels 1 en 2 nemen en Nico de zegels 3 en 4.

Bij probleem 10 zijn de postzegels het aantal objecten, $m=4$, die worden verdeeld onder de partities Marije en Nico: $n=2$. De objecten worden gelijkmatig verdeeld dus elke partitie krijgt evenveel objecten: Marije en Nico krijgen elk de helft van het aantal postzegels. Het aantal objecten per partitie staat dus van tevoren vast.

In hoofdstuk 2 zijn de theoretische kaders uitgezet waarbinnen het onderzoek is opgezet. De competenties waarin de docentontwikkeling is gemeten, het Lesson Study-principe en de achterliggende theorie voor de gebruikte combinatorische problemen is uiteengezet. In het volgende hoofdstuk zal de onderzoeksmethode worden toegelicht met daarin aandacht voor de participanten, de onderzoeksinstrumenten, het gebruikte materiaal en de gevolgde procedure.

3. METHODE

In het voorgaande hoofdstuk zijn de relevante theoretische begrippen van onderbouwing voorzien en is een theoretisch kader geschetst waarmee in dit onderzoek is gewerkt. Aansluitend zal in hoofdstuk 3 de methode uiteengezet worden beginnend bij deelnemende participanten: de docenten. Vervolgens zullen de instrumenten aan bod komen waarmee de onderzoeksvraag is onderzocht:

"Stelt een Lesson Study traject opgetrokken rond combinatoriek docenten in staat zich te ontwikkelen en, zo ja, welke competenties ontwikkelen zij daarbij?"

In paragraaf 3.3 staat het voor het onderzoek gebruikte materiaal gevolgd door de procedure in een chronologische volgorde.

In het kort: Om te onderzoeken of, en zo ja, welke competentie(s) docenten ontwikkelen in een Lesson Study opzet is een team samengesteld dat volgens het LS-format een tweetal lessen ontwierp. De ontworpen lessen zijn uitgevoerd onder leiding van één van de docenten onder observatie van de andere docenten. Zowel na de eerste als na de tweede les zijn de bevindingen van de docenten a.h.v. observaties, aantekeningen en berekeningen van de leerlingen geanalyseerd en besproken.

3.1 Participanten

Essentieel bij Lesson Study is het perspectief en de professionele insteek van collega's. In deze paragraaf zal het deelnemende team docenten worden uitgelicht.

De deelname aan dit onderzoek bestond uit drie docenten wiskunde, allen actief in de bovenbouw van het middelbaar onderwijs, waarvan twee eerstegraads bevoegd (docent 2 en 3) en één in opleiding voor de bevoegdheid (docent 1). Gedrieën zijn de lessen voorbereid, geobserveerd en geanalyseerd. De docent in opleiding gaf de lessen waarbij de rest van het team de leerlingen observeerde en aantekeningen maakte over hun bevindingen.

	Geslacht	Leeftijd	Ervaring (jaren)	Fte's
Docent 1	M	32	5	1.0
Docent 2	V	41	16	0.8
Docent 3	M	36	10	0.8

TABEL 4: PARTICIPANTEN

Docent 1 heeft Toegepaste Wiskunde gestudeerd aan de Universiteit Twente met als vervolg de master Science Education voor de eerstegraadsbevoegdheid. Daarnaast is hij reeds vijf jaar werkzaam voor de klas met wiskundelessen in de boven- en onderbouw. De klas bij wie het Lesson Study traject wordt afgenomen heeft hij het afgelopen jaar lesgegeven.

Na de doctoraalstudie werktuigbouwkunde heeft docent 2 haar eerstegraadsbevoegdheid behaald en heeft de meeste ervaring binnen dit onderzoek. Zij geeft eveneens diverse klassen les van verschillende leerjaren.

Net als docent 1 heeft docent 3 Toegepaste Wiskunde aan de UT gestudeerd om daar achtereenvolgens de tweede- en eerstegraads opleiding aan te verbinden. Hij geeft met name bovenbouwklassen les en neemt de 5 en 6 vwo wiskunde D klassen voor z'n rekening waarmee hij een leidende rol binnen de sectie op zich heeft genomen.

3.2 Instrumenten

De onderzoeksinstrumenten vormen de belangrijkste bronnen waarmee de onderzoeksvraag wordt uitgewerkt. In dit onderzoek is gekozen voor de discussies naar aanleiding van de lessen (Appendix B) alsmede de interviews met de participanten (Appendix C). Van de discussies en interviews is een schriftelijk verslag gemaakt waarin is opgenomen waar de discussie of het interview over ging en wat er gezegd is. Aan de hand van die verslaglegging is gekeken naar docentontwikkeling en, specifieker, naar het type competentie dat is ontwikkeld. Meer details over de analyse van de instrumenten is beschreven in H 5: Analyse.

Aangezien de doelgroep van het onderzoek de docenten zijn, maakt directe feedback van deze participanten zelf een vrij effectief meetinstrument. Het is immers mogelijk deelnemers zelf te vragen

hoe zij een ontwikkelingsmethode als Lesson Study hebben ervaren en of zij zelf de indruk hebben of Lesson Study een wezenlijke bijdrage kan leveren aan de professionalisering van docenten.

3.3 Materiaal

Voor de uitwerking van de onderzoeksvraag zijn de discussies naar aanleiding van de lessen (Appendix B) en de interviews van de participanten (Appendix C) geraadpleegd.

De telproblemen van Batanero, Navarro-Pelayo en Godino (1997) zijn zorgvuldig gekozen en opgenomen in Appendix E. Op basis van Dubois (1984) hanteren zij de drie onderdelen waarin de combinatoriek opgedeeld is: selectie, distributie en partitie, zoals toegelicht in paragraaf 2.3 Telproblemen.

<i>Combinatorische Operatie</i>	<i>Wiskundig Model</i>		
	<i>Selectie</i>	<i>Distributie</i>	<i>Partitie</i>
Combinaties	Probleem 8 – mensen	Probleem 3 - objecten	Probleem 10 – getallen
Permutaties met herhaling	Probleem 2 – objecten	Probleem 12 – brieven	Probleem 7 - mensen
Rangschikking met herhaling	Probleem 11 – getallen	Probleem 6 - mensen	Probleem 4 – objecten
Permutaties	Probleem 5 – getallen	Probleem 1 – mensen	
Rangschikkingen	Probleem 13 - mensen	Probleem 9 - objecten	

TABEL 5: VERDELING TELPROBLEMEN

Zoals hierboven te zien is, zijn de problemen verdeeld over de drie categorieën *selectie*, *distributie* en *partitie* enerzijds en de *combinatorische operatie* benodigd om het probleem op te lossen anderzijds. Daarnaast is rekening gehouden met de grootte van de parameters n en m en met het onderwerp van de opgave: worden er mensen, objecten of getallen verdeeld/geselecteerd? Bij het opstellen van de 13 telproblemen is dus gelet op 4 criteria:

1. Type probleem: selectie, distributie of partitie.

2. Combinatorische operatie voor het bepalen van het aantal mogelijkheden: combinaties, permutaties (met of zonder herhaling), rangschikkingen (met of zonder herhaling)
3. De grootte van het aantal objecten, m , en het aantal containers/partities, n .
4. Het onderwerp van de opgave: Mensen/knikkers/getallen/etc.

Als we deze vier criteria hanteren behoort probleem 3 tot *distributie* en is met een combinatie op te lossen (4 boven 3 verschillende mogelijkheden). We verdelen $m=3$ objecten (de brieven) over $n=4$ containers (de enveloppen). Op dezelfde manier zijn alle 13 problemen zodanig verdeeld dat alle 4 criteria duidelijk aan bod komen.

Als extra materiaal is in Appendix D de cijfermatige resultaten van de Kennistoets van de klas vergeleken met dezelfde toets van het voorgaande jaar. Hoewel de leerlingen, en dus hun resultaten, niet de doelgroep van dit onderzoek vormen is het toch een nuttige aanvulling niet in de minste plaats omdat alle participanten deze resultaten hebben meegekregen. De resultaten kunnen samen met de didactiek van de gegeven lessen een inspiratie zijn voor de deelnemers, zelfs naast het Lesson Study-programma.

3.4 Procedure

In deze paragraaf zal chronologisch het onderzoek worden doorlopen om helder uiteen te zetten welke handelingen zijn uitgevoerd en in welke volgorde.

In oktober 2013 zijn de drie participerende docenten aan het onderzoek begonnen met een voorbereidende bijeenkomst. De inhoud van de lessen en de algemene didactiek werd vastgesteld, alsmede de vorm waarin geobserveerd zou worden en achteraf geanalyseerd. De deelnemers spraken af in december 2013 twee lessen te organiseren in combinatoriek aan de hand van de 13 telproblemen van Batanero. Docent 1, de docent in opleiding, zou de les verzorgen, de andere twee participanten zouden de les waarnemen, het werk van de leerlingen analyseren en aantekeningen maken. Tijdens deze eerste bijeenkomst praatte docent 1 de andere docenten bij over Lesson Study en de 13 telproblemen die het onderwerp van de lessen zouden gaan vormen. Er is eveneens afgesproken dat docenten 2 en 3 notities zouden maken tijdens de lessen zodat er gespreksstof zou komen voor tijdens de discussies naar aanleiding van de geobserveerde lessen. Aan het einde van het Lesson Study traject zou het onderzoek worden afgesloten met een kort interview, gepland in januari 2014.

De eerste les vond plaats begin december 2013 en is uitgevoerd zoals afgesproken: Docent 1 had voorafgaand aan de les de tafels in het lokaal in groepjes van 3 bij elkaar gezet en bij elk groepje tafels een envelop met de 13 telproblemen klaargelegd. Aan het begin van de les namen docent 2 en 3 plaats achter in het lokaal en binnendruppelende leerlingen werd alvast gezegd dat ze zich over de tafels moesten verdelen in groepjes van 3. Bij aanvang van de les greep docent kort terug op voorgaande lessen die gingen over handig tellen en kondigde de komende twee lessen aan. Hij vertelde de klas dat ze in groepjes van 3 een envelop met 13 telproblemen kregen waarvan ze er 3 moesten proberen op te lossen. Van de 3 geselecteerde opgaven moest er vervolgens één door het groepje kort gepresenteerd worden: de opgave, de oplossing en de uitwerking daarvan. Een meer gedetailleerde uitwerking van de les is opgenomen in Appendix A: Lesobservaties.

Een dag na de eerste les is een moment gepland waarop de drie docenten bij elkaar kwamen om de eerste les te bediscussiëren, de berekeningen van de leerlingen door te nemen en de voorlopige resultaten te analyseren. Docenten 2 en 3 toonden hun notities en er werden observaties uitgewisseld.

Na het eerste discussiemoment werd, twee dagen na de eerste les, de tweede les uitgevoerd. De tafels had docent 1 in dezelfde groepsopstelling geformeerd als de eerste les en de les is gebruikt om de telproblemen opnieuw langs te lopen maar dit keer klassikaal. Veelgemaakte fouten zijn besproken en docent 1 beantwoordde vragen waar de leerlingen na de eerste les mee waren blijven zitten.

Weer een dag later is ook de tweede les bediscussieerd zodat alles nog vers in het geheugen zou zitten. Docenten 2 en 3 hadden veel inbreng over gedane observaties en alle 3 participanten vulden een lesuur (45 minuten) met de evaluatie van beide lessen.

Vanwege de kerstvakantie, maar ook om het onderzoek enigszins te laten bezinken, is afgesproken het interview later in te plannen: januari 2014. Zodoende waren de participanten beter in staat hun eigen en elkaars ontwikkeling te beoordelen voor een vruchtbaarder interview.

In hoofdstuk 3 is de onderzoeksmethode uiteengezet. De deelnemers die het onderzoek hebben uitgevoerd zijn geïntroduceerd en als onderzoeksinstrumenten is gekozen voor de discussies van de docenten n.a.v. de lessen en observaties alsmede de interviews. In paragraaf 3.3 Materiaal is aanvullend onderzoeksmateriaal verklaard en een chronologische onderzoeksopzet is in 3.4 Procedure opgenomen. Het komende hoofdstuk, dataverzameling en –verwerking zal worden gebruikt om verder uit te diepen hoe de onderzoeksinstrumenten, discussies en interviews, tot stand zijn gekomen.

4. DATAVERZAMELING- EN VERWERKING

Dit onderzoek is gestart met de vraag of en, zo ja, welke competenties docenten ontwikkelen aan de hand van een Lesson Study traject waarbij 13 telproblemen van Batanero, Navarro-Pelayo en Godino (1997) centraal staan. In hoofdstuk 2 is dieper ingegaan op combinatoriek en de 13 telproblemen in het bijzonder, het Lesson Study concept en de diverse competenties die we onderscheiden. Daaropvolgend is de onderzoeksmethode besproken met informatie over de participanten, uitwerking van de interviews en discussies als onderzoeksinstrumenten en het resterende relevante materiaal. In de laatste paragraaf is vervolgens stapsgewijs de onderzoeksprocedure beschreven.

In hoofdstuk 4 zullen de eerder genoemde onderzoeksinstrumenten, de interviews en discussies, verder worden toegelicht. Er zal worden uiteengezet hoe de informatie verkregen is en hoe het verwerkt is.

DATAVERZAMELING

Discussies

Zoals beschreven in de onderzoeksprocedure bestond het LS-traject uit 2 lessen voorafgegaan door een oriënterende en voorbereidende bijeenkomst. Tussen de lessen door en na de tweede les zijn de lessen geëvalueerd en bediscussieerd naar aanleiding van de observaties van de participanten en de aantekeningen van de leerlingen. Tijdens de eerste les hebben de leerlingen hun ideeën en berekeningen aan de hand van de probleemopgaven opgeschreven en, samen met de geschreven observaties van de docenten zijn deze notities verwerkt tot lesobservaties, zie Appendix A.

	Inhoud	Wanneer	Waar	Wie
1^e bijeenkomst	• Introductie LS • Uitleg telproblemen en combinatoriek • Gezamenlijk lesopzet afstemmen	Okt. 2013	Bataafs Lyceum (Hengelo), lokaal 2.07	3 participanten
Les 1	• 13 telproblemen in groepjes van 3 • Docenten observeren en maken aantekeningen	Dec. 2013	BL, lok 2.07	3 participanten + 4H-klas
2^e bijeenkomst	• Vergelijken notities • Discussiëren a.h.v. observaties participanten en lln	Dec. 2013	BL, lok 2.07	3 participanten
Les 2	• Klassikaal bespreken van telproblemen	Dec. 2013	BL, lok 2.07	3 participanten + 4H-klas
3^e bijeenkomst	• Analyseren beide lessen • Diverse perspectieven/ invalshoeken bediscussiëren	Dec. 2013	BL, lok 2.07	3 participanten
Afsluitende bijeenkomst	• Afname interviews	Jan. 2014	BL, lok 2.07	3 participanten

TABEL 6: LESSON STUDY - CHRONOLOGISCH OVERZICHT

Vóór de beide lessen zaten de participanten bij elkaar om het programma en de lessen door te nemen en voor te bereiden tijdens de 1^e bijeenkomst in oktober 2013. Vervolgens zijn er twee discussiebijeenkomsten geweest, beide naar aanleiding van een les: De eerste tussen beide lessen in en tweede na de tweede les. Zowel beide lessen als beide discussies zijn in december 2013 uitgevoerd in lokaal 2.07 van het Bataafs Lyceum (Hengelo).

Interviews

Zoals aangekondigd in hoofdstuk 3 gebruiken we naast de discussies een tweede onderzoeksinstrument: interviews. Om het project bij de deelnemende docenten te laten bezinken zijn de interviews uitgevoerd in januari 2014. Participant 1 heeft de interviews afgenomen bij participanten 2 en 3 en om resultaten niet te beïnvloeden, is hijzelf niet geïnterviewd. De interviews

hebben plaatsgevonden tijdens twee lesuren: 45 minuten per interview. Er is met de interviews getracht een compleet beeld te krijgen van de opbrengsten van het LS traject en veel ruimte gelaten voor commentaar/opmerkingen/verbeteringen van de participanten.

DATAVERWERKING

De leidraad voor de discussies waren de bijgewoonde lessen en de aantekeningen/observaties van die lessen. Deze discussies zijn genotuleerd door participant 1 en verwerkt tot 'Discussies aan de hand van lesobservaties' en terug te vinden in Appendix B. Vóór gebruik zijn deze geschreven discussies ter goedkeuring voorgelegd aan participanten 2 en 3 die hier eventuele wijzigingen in konden aanbrengen. De definitieve versies die dit opleverde zijn vervolgens gebruikt in de analyse van de onderzoeksvraag. Op basis van signaalwoorden zijn zowel deze discussies als de interviews geanalyseerd. Hier wordt het volgende hoofdstuk (Analyse) dieper op ingegaan.

Direct na de interviews zijn de gesprekken gedigitaliseerd en eveneens vóór gebruik aan de participanten (de geïnterviewden) voorgelegd ter goedkeuring. De resultaten van deze interviews zijn te vinden in Appendix C: Interviews participanten. Ook de interviews zijn op basis van signaalwoorden geanalyseerd.

Na het verzamelen en verwerken van de gegevens is het zaak de onderzoeksinstrumenten op een gedegen wijze in te zetten om de onderzoeksvraag te kunnen beantwoorden. Hoofdstuk 5 zal worden gewijd aan de analyse van deze onderzoeksinstrumenten en hoe zij zijn ingezet bij de beantwoording van de onderzoeksvraag:

"Stelt een Lesson Study traject opgetrokken rond combinatoriek docenten in staat zich te ontwikkelen en, zo ja, welke competenties ontwikkelen zij daarbij?"

Belangrijk hierin is hoe eventuele ontwikkelingen aan de diverse competenties kunnen worden gekoppeld, op basis van de discussies en de interviews.

5. ANALYSE

De onderzoeksinstrumenten, de discussies en de interviews, genoemd in paragraaf 3.2 zijn in hoofdstuk 4 uitgewerkt. Voor de onderzoeksvraag moeten deze onderzoeksinstrumenten, verkregen tijdens het Lesson Study traject, worden onderzocht op docentontwikkeling en, specifieker, ingedeeld in de vier competenties: interpersoonlijk/pedagogisch, didactisch, vakinhoudelijk, organisatorisch. Deze competenties zijn uitgewerkt in paragraaf 2.1.

De ontwikkeling van de participanten is uit de discussies en interviews gehaald en ingedeeld in de docentcompetenties zoals eerder genoemd: interpersoonlijk/pedagogisch, didactisch, vakinhoudelijk en organisatorisch. Zo'n indeling vereist dat het helder is wanneer een ontwikkeling bij een zekere competentie hoort. Om zo'n indeling concreet en duidelijk te maken is een lijst opgesteld met signaalwoorden die per competentie verantwoorden op welk gebied de ontwikkeling ligt.

Interpersoonlijk/ Pedagogisch (P)	Didactisch (D)	Vakinhoudelijk (V)	Organisatorisch (O)
Emoties	Uitleg	Combinatie	Doublanten
Kind	Opstelling	Permutatie	Opstelling
Leerlingen	Digiboard	Volgorde	Orde
Namen	Context	Tellen	Stilte
Motivatie	Begeleiding	Selectie	Structuur
Samenwerking	Coach	Distributie	Sturing
Jongens/meisjes	Groepje	Partitie	Presenteren
(Denk)niveau	Niveau	Theorie	
	Theorie	Berekening	
	Sturing	Uitschrijven	
	Presenteren	Mogelijkheden/Opties	
	Vaktaal/jargon	Schatting	
	(Denk)niveau	Opgave/Opdracht	

TABEL 7: SIGNAALWOORDEN PER COMPETENTIE

Bij aanwezigheid van één van bovengenoemde signaalwoorden in één van de onderzoeksinstrumenten is specifiek gekeken naar ontwikkeling in desbetreffende competentie. De discussies en de interviews zijn dus onderzocht op basis van bovenstaande signaalwoorden. Zodra het gebruik van één van de signaalwoorden is gevonden, is gekeken of desbetreffende competentie daadwerkelijk is ontwikkeld.

6. RESULTATEN

Het doel van dit onderzoek is na te gaan of er leeropbrengsten zijn bij een Lesson Study traject gecentreerd rond enkele combinatoriek opgaven. Om die (eventuele) ontwikkelingen van docenten te categoriseren is in hoofdstuk 2 een indeling gemaakt op basis van de 7 SBL docentcompetenties. Vanwege het soort onderzoek en de kortlopende aard van Lesson Study zijn die 7 competenties teruggebracht tot Interpersoonlijk/Pedagogisch (P), Didactisch (D), Vakinhoudelijk (V) en Organisatorisch (O). Een uitwerking van deze 4 competenties is gegeven in paragraaf 2.1 en de signaalwoorden per competentie staan in tabel 7 in het voorgaande hoofdstuk. Die signaalwoorden zijn gebruikt om de discussies na de lessen en de interviews achteraf (de onderzoeksinstrumenten) te analyseren en na te gaan op competentieontwikkeling bij de participanten. In dit hoofdstuk zullen de resultaten van die analyse worden uitgewerkt.

Tijdens de discussies zijn de groepjes leerlingen door de participanten besproken en de opmerkelijke bevindingen waarbij de signaalwoorden een indicatie geven op competentieontwikkeling zijn ondergebracht in onderstaande tabel. De groepjes zijn de drietallen (en één tweetal) van leerlingen met hun presentaties en uitwerkingen van de telproblemen. Tussen haakjes staan telkens de competenties waar de resultaten naar refereren met de afkortingen P (Interpersoonlijk/Pedagogisch), D (Didactisch), V (Vakinhoudelijk) en O (organisatorisch). Het kan voorkomen dat een opmerking op meerdere competenties duidt.

Dikgedrukt zijn de signaalwoorden zoals gegeven in tabel 7 in hoofdstuk 5. Enkele van de resultaten zijn opnieuw ter sprake gekomen tijdens de interviews. Dit is per item cursief in de tabel weergegeven.

	P/D/V/O	Docent 1	Docent 2	Docent 3
Groep 1	P,P,D,O	Onderschatting speelt een grote rol bij deze theorie en deze lkn (P)	Doublanten werken liever in de schaduw. Is dat een probleem of hadden we deze lkn meer bij de les moeten dwingen?(D/O) – <i>Interview</i>	Als de motivatie in een groepje lkn laag is, is analyse moeilijk (P) - <i>Interview</i>
Groep 2	P,D,D	Om ervoor te zorgen dat lkn op een hoger niveau gaan denken, zal ik ze op de verschillen moeten gaan wijzen. Het type opgave heeft inhoudelijk niks met de		Laag denkniveau bij deze lkn, toch doen ze het goed. (P/D)

‘schil’ te maken. **(D)**

Groep 3	P,D,D,O	De kwaliteit van samenwerking hangt grotendeels af van de aanwezigheid van een leider. Als er gaan natuurlijke leider is, moet er in het vervolg één worden aangewezen. (P/D/O)	Goede samenwerking kan prestaties verbeteren. Volgend jaar ga ik meer in groepen werken. (D) - <i>Interview</i>	
Groep 4	P,D,V	Kjeld is één van de weinigen die nagaat of zijn antwoord reëel is. Het schatten/verifiëren moet ik meer proberen te stimuleren. (D/V)		De meisjes werken iha beter samen dan de jongens , is dat altijd zo? Het lijkt te komen doordat de meisjes communicatief vaardiger zijn. (P)
Groep 5	P,D,V,O	Als er te weinig samenhang in een groepje is, komt er weinig uit. Ik zou hier in het vervolg meer moeten sturen. (O)	De lIn in dit groepje hebben zeer verschillende houdingen, daardoor komt er weinig uit. (P)	De leerlingen gaven als antwoord 4 terwijl je je met simpelweg mogelijkheden uitschrijven kunt bedenken dat er veel meer opties zijn. Alvorens een berekening te maken is het goed de orde van grootte te schatten of enkele mogelijkheden uit te schrijven . (D/V) – <i>Interview</i>
Groep 6	P,O	Gaby heeft moeite de juiste termen te gebruiken terwijl ze het wel begrijpt als iemand anders ze gebruikt. Volgend jaar misschien meer de leerlingen aan het woord laten. (P/O)	Bij presenteren merk je dat leerlingen moeite hebben in jargon te spreken. (P/O) - <i>Interview</i>	

TABEL 8: LEEROPBRENGSTEN DOCENTEN PER GROEPJE

In tabel 8 staan de leeropbrengsten per groepje zoals ze zijn besproken en geanalyseerd tijdens de discussies en al dan niet gereflecteerd in de interviews. Als deze resultaten worden uiteengezet per competentie dan levert dat tabel 9 op:

	Interpersoonlijk/ Pedagogisch	Didactisch	Vakinhoudelijk	Organisatorisch
Docent 1	Groepje 1 *	Groepje 2	Groepje 4	Groepje 3
	Groepje 3	Groepje 3		Groepje 5
	Groepje 6	Groepje 4		Groepje 6
Docent 2	Groepje 5	Groepje 1		Groepje 1
	Groepje 6	Groepje 3		Groepje 6
Docent 3	Groepje 1	Groepje 2	Groepje 5	
	Groepje 2	Groepje 5		
	Groepje 4			
Totaal	8	7	2	5

TABEL 9: DOCENTONTWIKKELING PER COMPETENTIE

In tabel 9 zijn de ontwikkelingen uit tabel 8 niet meer inhoudelijk weergegeven maar zodanig verwerkt dat de ontwikkelde competenties naar voren komen. Zo correspondeert het eerste resultaat uit tabel 8 (“Onderschatting speelt...”) met “groepje 1 *” aangezien het gaat om een Pedagogische (P) ontwikkeling van docent 1 bij groepje 1. Op identieke wijze zijn alle resultaten in tabel 9 verwerkt waarmee een overzicht van de ontwikkelde competenties is gecreëerd.

Naar aanleiding van de analyse die in hoofdstuk 5 is uiteengezet is in dit hoofdstuk verwerkt wat de opbrengsten van die analyse gaven. Met behulp van deze resultaten zal in hoofdstuk 7 worden teruggekeken naar de onderzoeksvraag.

7. CONCLUSIES

In dit onderzoek is gekeken naar docentontwikkeling of –professionalisering tijdens een Lesson Study traject. Met 13 telproblemen fungeerde combinatoriek als thema en in paragraaf 2.3 zijn deze telproblemen en gerelateerde theorie toegelicht. Uniek bij dit onderzoek is de wijze waarop de docentontwikkeling is gecategoriseerd; de 7 SBL docentcompetenties die veelvuldig als instrument worden gebruikt om lesgevende docenten te beoordelen zijn enigszins gereduceerd en aangepast en ingezet om de docentontwikkeling in te delen. De onderzoeksvraag geformuleerd in paragraaf 1.2 luidt:

"Stelt een Lesson Study traject opgetrokken rond combinatoriek docenten in staat zich te ontwikkelen en, zo ja, welke competenties ontwikkelen zij daarbij?"

Zoals te verwachten is het eerste deel van de vraag eenvoudig te beantwoorden. Op basis van de resultaten gepresenteerd in het vorige hoofdstuk is gebleken dat Lesson Study docenten in staat stelt zich te ontwikkelen aan de hand van de input van en de discussies met vakcollega's. Het Lesson Study traject is opgetrokken rond de 13 telproblemen van Batanero, Navarro-Pelayo en Godino (1997) waarbij docenten tijdens discussiemomenten na de gegeven lessen konden sparren over hun observaties en van elkaar konden leren uit de daaropvolgende discussies. Elkaars perspectieven bieden nieuwe invalshoeken en de gelegenheid naar een les te kijken zonder die zelf te hoeven geven stelde hen in staat belangrijke ontdekkingen te maken.

Voor het tweede deel van de vraag zijn in paragraaf 2.1 de SBL docentcompetenties aangepast zodat ze aansluiten bij dit onderzoek. Van de 4 geformuleerde competenties, Interpersoonlijk/Pedagogisch, Didactisch, Vakinhoudelijk en Organisatorisch, is in hoofdstuk 5 een lijst met signaalwoorden opgesteld per competentie waaraan de competenties herkend kunnen worden. Met behulp van de signaalwoorden zijn de discussies tussen en de interviews met de participanten geanalyseerd en in hoofdstuk 6 zijn de ontwikkelingen die daaruit volgden per competentie verwerkt in tabel 9. Deze tabel vormt een overzicht van ontwikkelingen die de docenten hebben doorgemaakt tijdens het LS traject verdeeld over de competenties.

Een aantal zaken vallen daarbij op. Het eerste opmerkelijke is de participanten zich het meeste ontwikkelden op Pedagogisch en Didactisch gebied en nauwelijks op Vakinhoud (zie tabel 9). Daar waar de Interpersoonlijke/Pedagogische en Didactische competenties respectievelijk 8 en 7 ontwikkelingen tellen, staan er bij Vakinhoud slechts 2. Zelfs met een kleine foutmarge in het achterhoofd zijn dat opvallende verschillen. In hoofdstuk 8 zal hier verder op ingegaan worden.

Van alle ontwikkelingen bij de Organisatorische competentie is een opvallend groot aandeel toe te schrijven aan docent 1. Van de 5 ontwikkelingen neemt hij met 3 meer dan de helft voor zijn rekening. De aantallen zijn klein dus het is belangrijk voorzichtig te zijn met conclusies, al valt dit vrij logisch te verklaren uit het geringe aantal jaren ervaring van docent 1: met 5 jaren ervaring kan hij op gebied waarschijnlijk meer leren dan zijn collega's met meer ervaring. Bovendien werden de lessen door docent verzorgd waardoor hij wellicht meer gefocust was op de uitvoering van de organisatie daarvan.

Een ander, opmerkelijk resultaat is het verschil waarin participanten hun competenties ontwikkelen bij hetzelfde groepje en dezelfde discussie. In tabel 8 valt bij groepje 5 te zien dat alle drie docenten bij hetzelfde groepje tot diverse leerpunten komen naar aanleiding van hun observaties en de discussie die na de les plaatsvond. Niet alleen ervaren zij alle drie een ander ontwikkelpunt, in dit geval zijn het ook nog eens alle drie andere competenties.

In hoofdstuk 8 zal gekeken worden naar de gevolgen van deze conclusies evenals mogelijke oorzaken van de opvallendste punten. Daarnaast zal in een bredere context onderzocht worden wat interessante vervolgvragen zijn voor geschikt vervolgonderzoek.

8. DISCUSSIE

De resultaten in hoofdstuk 6 zijn in hoofdstuk 7 aan de hand van de onderzoeksvraag verwerkt tot enkele conclusies. De opvallendste punten uit de ontwikkelcompetenties van docenten roepen echter nog wel vragen op.

Wellicht de belangrijkste conclusie die uit het onderzoek naar voren is gekomen is dat de Interpersoonlijke/Pedagogische en Didactische competenties sterk ontwikkeld raakten terwijl de Vakinhoudelijke competenties dat nauwelijks deed. Een oorzaak hiervoor zou kunnen zijn dat de deelnemende docenten reeds sterker Vakinhoudelijk dan Interpersoonlijk/Pedagogisch en Didactisch ontwikkeld waren en daardoor op dat gebied minder te leren hadden. Zeker aangezien de stof het 4 HAVO niveau had en de docenten alle drie academisch geschoold waren bestaat de mogelijkheid dat zij meer op Interpersoonlijk/Pedagogisch gebied uitgedaagd kunnen worden dan op Vakinhoudelijk gebied..

Een andere mogelijke oorzaak is dat Lesson Study zich beter leent voor ontwikkeling van de Interpersoonlijke/Pedagogische en Didactische competentie dan voor de Vakinhoudelijke competentie. Als vakcollega's gezamenlijk een les bijwonen en achteraf bediscussiëren gaat het doorgaans meer over de leerlingen en hoe zij de stof tot zich nemen, dan inhoudelijk over de wiskunde.

Verder onderzoek naar de oorzaak van deze conclusie is aan te bevelen: zouden bij een identieke situatie maar een ander wiskundeonderwerp dezelfde competenties ontwikkelen? Met andere woorden, ontwikkelen de Interpersoonlijke/Pedagogische en Didactische competentie zich sterker dan de Vakinhoudelijke competentie als dit onderzoek herhaald zou worden gecentreerd rond een ander (wellicht uitdagender) wiskundig thema?

Mocht de conclusie overeind blijven dat Interpersoonlijke/Pedagogische en Didactische competenties meer ontwikkeld raken dan de Vakinhoudelijke competentie dan valt er veel voor te zeggen Lesson Study te hanteren bij de (door)ontwikkeling van beginnend docenten. Veel startende docenten hebben niet alleen de behoefte aan veel feedback, wat Lesson Study biedt, maar ook de competenties die ze in het begin het sterkst moeten ontwikkelen zijn precies die gebieden die, blijkens uit dit onderzoek, bij LS het meeste naar voren komen. De Vakinhoudelijke competentie, was ook de ervaring van docent 1, is veel theoretische kennis die in grotere mate aanwezig is dan benodigd. De Interpersoonlijke/Pedagogische en Didactische competenties echter zijn praktischer van aard en leer je door ervaring op te doen en, zoals bijvoorbeeld met Lesson Study, er over te sparren met collega's.

In een bredere context is Lesson Study een professionaliseringsmethode waarbij actieve participatie van de docenten gevraagd wordt en een ontwikkeling kan zijn voor iedere competentie. In tegenstelling tot het bijwonen van een cursus of congres zijn deelnemers actiever, kunnen ze ten dele zelf bekijken wat hen opvalt en waar ze denken winst te kunnen behalen. Het is een methode om van elkaar te leren waardoor je eveneens aan interpersoonlijke competenties werkt.

De reacties van de participanten aan dit project waren lovend en hebben in ieder geval voor goede impulsen gezorgd. Het is niet altijd eenvoudig voor docenten om aan hun verbreding en verdieping te werken naast de reguliere drukte rondom lessen, toetsen en vergaderingen. Maar Lesson Study biedt een laagdrempelige handreiking om toch samen naar die ontwikkelingen te kijken. Vanwege deze, en eerder geziene, positieve effecten zou Lesson Study een grotere bekendheid kunnen genieten en een prominentere rol in de ontwikkeling van docenten kunnen spelen.

Enkele andere ontwikkelmethoden voor docenten hebben raakvlak met Lesson Study. Collegiale Consultatie draait om een leervraag waar een docent aan wil werken en waar een andere, observerende docent naar gaat kijken. Na de les bespreken met de nadruk op de leervraag die aan de orde was. Bij deze workshop wordt er echter niet naar de leerlingen maar naar de docent gekeken en de les wordt niet gezamenlijk ontworpen of bediscussieerd. Hoewel dit project een prima methode is om docenten bij elkaar in de klas te laten kijken en zodoende de grenzen van de dichte klaslokalen open te zetten, worden met Lesson Study grotere ontwikkelingen doorgemaakt op verschillende gebieden. Onder andere discussies tussen sectiegenoten waarborgen vakinhoudelijke uitdaging en ontwikkeling waar Collegiale Consultatie dat niet doet. (www.coachjezelf.nl)

Belangrijke overeenkomst tussen Lesson Study en Collegiale Consultatie is de feedback van directe collega's. In 'Actieplan Leraar 2020' schetst de Overheid hoe zij de ontwikkeling van het onderwijs in Nederland voor zich ziet de komende jaren. Eén van de sleutelbegrippen uit deze plannen is peer review: het raadplegen van de mening en feedback van 'gelijken': de collega's. Uit dit document blijkt het voornemen van de regering docenten zich te laten ontwikkelen en professionaliseren aan de hand projecten en cursussen die dezelfde essentie bevatten als Lesson Study en Collegiale Consultatie: het laten vervagen van de gesloten klaslokalen en docentinterviews stimuleren.

(<http://www.rijksoverheid.nl/documenten-en-publicaties/kamerstukken/2011/05/23/actieplan-leraar-2020.html>, 2011)

Een veelgehoord voordeel van projecten en cursussen die zich rond peer review concentreren is het concrete karakter. Er wordt geconcentreerd rondom heldere praktijksituaties met doorgaans duidelijke leerdoelen. Dat maakt peer review een belangrijk middel voor schoolontwikkeling. Een belangrijke voorwaarde voor ontwikkeling a.h.v. peer review is echter dat de ontvanger van de feedback openstaat voor feedback. Zonder deze ontvankelijke houding kan peer review eerder frustratie opwekken dan ontwikkeling. Verder zijn professionaliseringsmethodes op basis van peer review vooralsnog voorbehouden aan vo-scholen en zijn geen gegevens aanwezig over primair

onderwijs, speciaal onderwijs of MBO. Een andere schoolcultuur kan tot gevolg hebben dat deze ontwikkelingsmethodes daar minder efficiënt tot uiting komen. (M. Thurlings, D. van der Veen, M. de Laat, 2012)

Niet alleen op basis van dit onderzoek, maar ook op basis van eerder onderzoek naar de effectiviteit van LS is duidelijk dat dit een fundament kan vormen van serieuze ontwikkeling voor de docent.

APPENDIX

A Lesobservaties

Het hele programma besloeg twee lessen waarvan de eerste werd besteed aan het selecteren en trachten op te lossen van de opgaven. Elk groepje kreeg een enveloppe met daarin de 13 opgaven en de opdracht drie van de opgaven uit te zoeken om uit te werken. Vervolgens moest één van de geselecteerde drie kort worden gepresenteerd voor de klas. In het laatste groepje zat een leerling die vanwege een recente knieoperatie nog in een rolstoel zat. Aangezien het presenteren voor hem daardoor lastiger werd, is hem gevraagd foto's te maken van de presentaties.

Drie docenten observeerden en maakten notities tijdens een les waarin de leerlingen in groepjes van (2 of) 3 aan de opgaven werkten. De groepsindeling lag niet vast: de leerlingen konden zelf beslissen bij wie ze gingen zitten en dus bij wie ze in het groepje zaten.

Lesobservaties

Het basismateriaal voor de dataverzameling bestaat uit de aantekeningen, uitwerkingen en notities van de leerlingen en de observanten. Deze aantekeningen zijn verwerkt tot onderstaande lesobservaties en bieden een totaalbeeld van het verloop van de lessen. De discussies naar aanleiding van de lesobservaties zijn in Appendix E terug te vinden.

LES 1

Groep 1: Pavel, Rowan en Merel

Het eerste groepje bestond uit twee doublanten (Rowan en Merel) en één afgestroomde vwo-er die met weinig motivatie aan de slag gingen met de opgaven (de opgaven leken te worden onderschat). Voor het presenteren van één van de opgaven was geen van drieën vooruit te branden. Uiteindelijk heeft Rowan



opgave 12 klassikaal behandeld, maar het was de minste presentatie van de vijf en uitgerekend de enige opgave die het groepje niet goed had. Tijdens het uitwerken werd er weinig tot niks overlegd. Alledrie kozen ze, naar het leek willekeurig, een opgave die ze elk individueel uitwerkten. Pavel heeft tijdens de gehele les geen woord gezegd en Rowan en Merel bevestigden elkaars uitwerkingen zonder er enige aandacht aan te schenken. Zonder kritiek werd er vanuit gegaan dat de ander de opgave op de juiste manier had uitgewerkt.

Groep 2: Romee, Britt en Iris

De drie leerlingen met de laagste gemiddelden vonden de lesvariatie erg prettig en gingen fanatiek aan de gang. De enveloppe werd geopend en de eerste minuten werd besteed aan het doorlezen van de opgaven. In plaats van willekeurig opgaven te selecteren trachtten de meisjes eerst de makkelijkste uit te zoeken. Aangezien tijdens eerdere lessen opgaven waren behandeld die sterk leken op opgave 13, kozen ze deze als eerste en werkten die uit zoals ze die geleerd hadden: voor de keuze 'voorzitter' zijn 4 mogelijkheden, vervolgens voor 'secretaris' heb je 3 mogelijkheden over en tot slot nog 2 mogelijkheden voor penningmeester. Volgorde maakt wel uit, dus: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ mogelijkheden. Het was een verstandige keuze van de groep een opgave te kiezen waarmee ze bekend waren. Overigens waren hun uitwerkingen van de andere 2 opgaven (9 en 10) eveneens correct.



Groep 3: Aaliyah, Cindy en Lonneke

De leerlingen van groep 3 gingen geconcentreerd te werk en in eerste instantie individueel. Ze lazen elk de opgaven door, selecteerden ieder een opgave (op basis van wat hen simpel leek) en gingen daar individueel mee aan de slag. Na een poosje staken ze de koppen weer bij elkaar en, in tegenstelling tot het eerste groepje, liepen ze de drie gekozen opgaven op en uitwerkingen langs. Ze bekeken elkaars uitwerkingen kritisch en gaven elkaar constructief commentaar. Helaas maakten ze de verkeerde keuze richting de presentatie: de enige opgave die ze verkeerd hadden uitgewerkt behandelden ze klassikaal. Dit keuzeproces leek aan het einde van de les door tijdnood overgeslagen te zijn. Erg jammer want het groepje werkte goed samen.



Groep 4: Kjeld, Emincan en Joshua

Kjeld had al snel de eenvoud van opgave 5 door en schreef zowel de 6 mogelijkheden uit als de correcte berekening van $3! = 6$ mogelijke volgordes voor de knikers 2, 4 en 7. Meerdere groepjes hadden deze opgave goed, maar de meeste hadden enkel de mogelijkheden uitgeschreven. Emincan en Joshua selecteerden eveneens een opgave maar Emincan maakte met opgave 12 een ongelukkige keuze (een lastige opgave die nog niet behandeld was). Joshua koos voor opgave 13 omdat hij, net als groep 2, de overeenkomst zag met eerder behandelde opgaven. De selectie van de opgave speelt dus een grote rol.



Groep 5: Ingo, Bas en Samet

Bij groep 5 moest Ingo de anderen enigszins op sleeptouw nemen. Dat lukte redelijk aangezien ze beide hun opgaven goed hadden uitgewerkt, zij het individueel. Omdat er van de drie opgaven slechts één gepresenteerd hoefde te worden, besteedden ze echter niet veel tijd aan de andere twee opgaven, jammer want de andere twee waren wel goed uitgewerkt. De jongens presenteerden opgave 4 met de uitleg dat 4 auto's over 3 meisjes verdeeld moest worden en de volgorde maakte niet uit dus het aantal combinaties van 3 uit 4. Een meisje kan echter meerdere auto's krijgen dus herhaling is mogelijk en er zijn $3^4 = 81$ mogelijkheden. Over dat laatste gedeelte keek het groepje vrij gemakkelijk heen; ze waren iets te druk met de mooie illustraties op het bord voor hun presentatie.



Groep 6: Gaby en Wendel

Bij Gaby en Wendel liep de samenwerking uitstekend. Na het lezen van de opgaven namen ze samen rustig de tijd er drie uit te zoeken die hen eenvoudig leek. Niet alleen hadden ze alledrie hun geselecteerde opgaven correct uitgewerkt, de bijkomende berekeningen en beredeneringen klopten stuk voor stuk. Jammer dat Gaby tijdens de presentatie het jargon (zoals gebruik van 'permutatie' en 'combinatie') wat door elkaar gooide maar het is altijd lastiger iets vakinhoudelijks te



presenteren dan een eenvoudig onderwerp. Bij hun uitwerkingen op papier maakten ze deze fouten niet.

LES 2

De tijd tussen de eerste en de tweede les was twee dagen waarin enkele leerlingen meerdere keren nieuwsgierig vroegen naar de resultaten van hun gepresenteerde opdrachten. De eerste les was immers geëindigd met de laatste presentatie maar welke opdrachten de leerlingen correct en welke zij verkeerd hadden uitgewerkt was nog niet aan bod gekomen. Enigszins om hun competitiegevoel en nieuwsgierigheid aan te wakkeren is besloten de behandeling van de opgaven, zowel de gepresenteerde als de op papier uitgewerkte, uit te stellen tot de volgende les.

Tijdens deze tweede les waren de tafels wederom in dezelfde groepsformatie gezet zodat de leerlingen zich weer met hun groepje verbonden voelden. Dit maakte mogelijk niet alleen de individuele maar ook de collectieve emoties te observeren op het moment dat ze te horen kregen wat ze goed en wat ze verkeerd hadden gedaan. Daarnaast lagen bij alle tafels opnieuw dezelfde enveloppen met opdrachten als de eerste les.

Voor behandeling van alle 13 opdrachten was in één lesuur te weinig tijd dus zijn alle opdrachten die de leerlingen presenteerden (1,4,5,8,12,13) en vervolgens de opdrachten die ze op papier uitwerkten (9,10) behandeld op het whiteboard voorzien van een korte bespreking en klassikale analyse van gemaakte fouten.

B Discussies aan de hand van lesobservaties

LES 1

Groep 1: Pavel, Rowan en Merel

De samenstelling van dit groepje was ongelukkig. Het gebrek aan motivatie had weinig te maken met de inhoud van de les maar eerder met de frustratie van doubleren en afstromen. De docent heeft deze les weinig moeite gedaan die motivatie te verhogen, maar het is ook de vraag of dat überhaupt zou zijn gelukt.

Groep 2: Romee, Britt en Iris

Groep 2 was enthousiast over de les en namen de opgaven serieus. De docenten waren het erover eens dat het groepje goed van de les heeft geprofiteerd met deze ijverige en geconcentreerde instelling. Drijvende kracht binnen de groep kwam zonder twijfel van Romee.

Groep 3: Aaliyah, Cindy en Lonneke

Een goed georganiseerd groepje dat uitstekend samenwerkte. Aaliyah nam het voortouw zowel in de discussie die ze hadden over hun uitwerkingen als in de presentatie. Haar natuurlijke leiderschapskwaliteiten viel de observerende docenten allemaal op. Helaas kon ze voorkomen dat ze een verkeerde keuze maakten over de te presenteren opgave.

Groep 4: Kjeld, Emincan en Joshua

De consensus is dat het grote verschil in inzicht binnen dit groepje een grotere opbrengst in de weg stond. Kjeld is een vrij intelligente jongen die weinig uitdaging vond in de opgave die hij trof Emincan en Joshua probeerden opgaven met hetzelfde gemak op te lossen maar hadden daar toch meer moeite mee. Het groepje ging wat plichtmatig met de les om.

Groep 5: Ingo, Bas en Samet

Samet is een intelligente jongen die helaas niet echt liet zien wat hij in huis had. Ingo was een stuk gedrevener en maakte er een erg leuke les van. Hij was erg enthousiast bezig met de opgave zelf, de tekeningen op het bord en de presentatie. Jammer genoeg vond hij te weinig feedback binnen zijn groep.

Groep 6: Gaby en Wendel

Voorbeeldig groepje van serieuze leerlingen. De onderlinge communicatie was uitstekend en hun aantekeningen nauwgezet. Gaby en Wendel zijn beide geen uitblinkers maar met de juiste instelling hebben ze de opgaven goed aangepakt.

LES 2

Wat opviel was de onderschatting waarmee enkele opgaven verkeerd waren gemaakt maar ook het gemak waarmee de leerlingen daaroverheen stapten. Zonder fatsoenlijk stil te staan bij wat ze verkeerd hadden gedaan gingen ze er eigenlijk vrij snel vanuit dat ze het de volgende keer wel goed zouden doen. Iets inhoudelijker en uitvoeriger reflectie was op z'n plaats geweest maar bleef uit. Desalniettemin bleek dat de klas, ondanks gemaakte fouten, de telproblemen tijdens de bespreking uitstekend begrepen en ze waardeerden de wisseling in lesopzet. Op de vraag van de docent antwoorden de leerlingen dat bij een moeilijk vak als wiskunde A deze lesmethode, mede door een stukje competitiedrang, het lesplezier deden toenemen. Daarnaast gaven leerlingen aan dat de les (naar hun eigen gevoel) een meerwaarde was ten opzicht van de reguliere lessen.

C Interviews participanten

Als onderzoeksinstrument zijn docenten 2 en 3 ongeveer een maand na de laatste evaluatie/discussie geïnterviewd (januari 2014). Aangezien dit onderzoek is opgezet door docent 1 is hij zelf niet geïnterviewd.

Docent 2

De tweede deelnemer was erg benieuwd naar Lesson Study als professionaliseringsmethode. Als je als docent binnen een school werkzaam bent is het belangrijk jezelf bij te scholen of na te scholen. Dat kan op verschillende manieren en op diverse gebieden. Bijscholing is gebruikelijk via cursussen, studiemiddagen, congressen of conferenties over vakinhoud, pedagogiek of didactiek. Binnen deze context was Lesson Study voor docent 2 een nieuw concept.

De docente kende de klas niet en het viel haar op dat de samenhang en sfeer in de groep uitstekend was. Daarnaast merkte ze het verschil tussen de manier waarop de docenten af en toe de leerlingen vooruit hielpen die vastliepen, zowel bij zichzelf als bij de andere participanten. De ene keer werden leerlingen meer gestuurd met aanwijzingen dan de andere keer. Op de juiste momenten waren de docenten kennelijk in staat de leerlingen zelf tot de juiste oplossingsroute te laten komen maar op andere momenten, wellicht onbedoeld, werd te veel van de juiste uitwerking weggeven waardoor het meer van voorkauwen dan van helpen weg had: "Die begeleidende rol moet meer van coaching weghebben. Zodoende leren de leerlingen meer."

1. Welke verwachtingen had je van Lesson Study voordat je begon?

Weinig tot geen, want ik had nog niet eerder van Lesson Study gehoord totdat jij het noemde.

2. Wat vind je van LS als professionaliseringsmethode?

Het lijkt mij een zinvolle methode. Zowel het observeren van de leerlingen tijdens andermans les als het inhoudelijk discussiëren met collega's is een uitstekende manier om elkaar scherp te houden. Wellicht kunnen we iets van de grond krijgen om dit op school jaarlijks te doen.

3. Denk je dat je naar aanleiding van dit LS project je lessen gaat veranderen? Zo ja, hoe?

Die intentie heb ik wel maar ik moet voorzichtig zijn in beloftes. Je weet hoe afgebakend het wiskundeprogramma is dus voor sommige veranderingen zal misschien niet genoeg tijd of ruimte zijn. Daarentegen zou het kunnen dat ik volgend jaar de 4V wiskunde A klas krijg met hetzelfde onderwerp en dan zal ik kijken hoe ik het niveau van de les in het derde niveau van Van Hiele kan krijgen. Tenslotte moeten vwo-leerlingen meer theoretische stof aankunnen. Daarnaast wil ik in het algemeen meer in groepjes werken, maar over de invulling daarvan zal ik eerst nog even goed nadenken.

4. Wat zou je willen veranderen aan het project als je het opnieuw zou doen?

Aan de opzet zelf zou ik niks veranderen. Maar als ik het volgend jaar of een andere keer opnieuw zou doen dan zou ik er een nieuw onderwerp bijpakken en het met andere collega's willen oppakken. Zo blijf je denk ik meer leren. Je krijgt steeds meer en andere perspectieven.

Docent 3

Het was al weer een tijd geleden dat docent 3 het onderwerp combinatoriek had behandeld. 'De driedeling selectie, distributie en partitie maakt inzichtelijk waarom combinatoriek voor leerlingen zo lastig is. Zeker vergezeld van enkele probleemstukken. Dit is een interessanter onderwerp dan ik me kan herinneren van de laatste keer dat ik het gaf.' Hij merkt tijdens de observaties dat leerlingen nog veel meer moeite hebben de context van de opgave los te zien van de werkelijke theorie dan hij al dacht. Een probleem dat je meer bij wiskunde A tegenkomt (vanwege de verhaelvorm waarin de meeste opgaven gevraagd worden) dan bij wiskunde B.

Tijdens de discussies merkt hij op de leerlingen goed opletten tijdens uitleg en geïnteresseerd luisteren maar nauwelijks met hun eigen leerproces bezig zijn. Niet echt verbazingwekkend op hun leeftijd maar wellicht iets om, zeker in de lagere klassen, aandacht aan te besteden: hoe leer je het best? Iets wat daarin een grote rol speelt maar wat de leerlingen nauwelijks toepassen is reflectie.

1. Welke verwachtingen had je van Lesson Study voordat je begon?

Ik had er nog niet eerder van gehoord maar het klonk als een interessant project. Toen je uitlegde wat het inhield was ik vooral erg benieuwd de les van een collega te zien en nieuwsgierig naar het inhoudelijke, intercollegiale overleg. Dat moeten we vaker doen binnen de sectie.

2. Wat vind je van LS als professionaliseringsmethode?

Uitstekend. Ik vond het een erg leuk traject om samen met collega's naar een stukje wiskunde te kijken en didactiek te evalueren en het geeft weer nieuwe inzichten. Het lijkt me erg leerzaam, ook voor andere collega's.

3. Denk je dat je naar aanleiding van dit LS project je lessen gaat veranderen? Zo ja, hoe?

Heel concreet geef ik deze klas en deze theorie meestal geen les. Ik heb de afgelopen jaren geen vierde klassen gehad. De manier waarop je tegenover de leerlingen staat beviel me echter wel. Misschien kan ik daar iets mee. En het competitieve element van de les beviel me eveneens. Misschien was het niet helemaal de bedoeling in deze les maar leerlingen zijn vaak gek op wedstrijdjes en het verhoogt hopelijk de motivatie. Het viel me eveneens op dat leerlingen soms op lastige berekeningen vertrouwen, ook als ze de aantallen gewoon kunnen tellen. Soms moeten ze gewoon hun gezond verstand gebruiken, ik vraag me af of mij leerlingen dat ook doen. Het samenwerken in groepjes is nog iets wat ik zelden doe. Ik zal er eens over nadenken.

4. Wat zou je willen veranderen aan het project als je het opnieuw zou doen?

Niet zo veel eigenlijk. Als je van plan bent het volgend jaar weer te doen houd ik me warm aanbevolen.

D Cijferuitdraaien

Om een beeld te krijgen van het effect van de lessen zijn hieronder de resultaten weergegeven van de kennistoets (KT) van respectievelijk dit jaar en vorig jaar:

Schooljaar 2013-2014		
<i>Naam</i>	<i>Klas</i>	
Boensma, Joshua	b4HA	5,4
Cantineau, Lonneke	b4HA	8,2
Dobbe, Rowan	b4HA	7,8
Grob, Kjeld	b4HA	8,9
Hezel, Ingo van	b4HA	6,0
Hul, Iris van 't	b4HA	8,2
Meenink, Aaliyah	b4HA	4,5
Murat, Samet	b4HA	8,9
Oude Egberink, Wendel	b4HA	4,8
Palyanov, Pavel	b4HA	8,1
Schröer, Cindy	b4HA	5,9
Sieverink, Britt	b4HA	5,9
Sterken, Gaby	b4HA	8,1
Tanriverdi, Merel	b4HA	6,7
Tielkes, Romee	b4HA	7,3
Tuscher, Bas ten	b4HA	4,3
Ulu, Emincan	b4HA	5,4
<i>Gemiddelde</i>		6,7

Schooljaar 2012-2013		
<i>Naam</i>	<i>Klas</i>	
Bastin, Max	b4HA	8,3
Hogenberk, Femke	b4HA	7,3
Kaya, Alize	b4HA	3,5
Masselink, Pleun	b4HA	7,2
Meijer, Koen	b4HA	5,9
Nieuwenweg, Bram	b4HA	9,4
Nijland, Esmee	b4HA	7,0
Rondon Beltran, Vanessa	b4HA	5,9
Snijder, Luuk	b4HA	7,2
Sterken, Gaby	b4HA	4,9
Tanriverdi, Merel	b4HA	5,6
Teunissen, Kaymon	b4HA	4,7
Tuscher, Bas ten	b4HA	6,1
<i>Gemiddelde</i>		<i>6,4</i>

Met de toetsresultaten van de afgelopen jaren onder elkaar zien we een toename van het klassengemiddelde van 6,4 naar 6,7 waarbij de toetsstof enkel uit het hoofdstuk over 'handig tellen' (combinatoriek) ging. Met redelijke voorzichtigheid kan worden gesteld dat de lesvariatie met 13 telproblemen een positief effect heeft gehad op het inzicht van de leerlingen in de combinatorische materie en als gevolg daarvan de cijfers van hun kennistoets. Natuurlijk dient daarbij opgemerkt dat de groep niet alleen qua grootte beperkt is voor harde conclusies, meerdere factoren wegen mee bij het tot stand komen van een lijst toetsresultaten. Desalniettemin waren de leerlingen aselekt, de omstandigheden gelijk en de toets van dezelfde inhoud en moeilijkheidsgraad.

Als de resultaten gedetailleerder worden geanalyseerd, valt op dat verbeterslag gemaakt is bij de middenmoot. Het zijn de leerlingen die normaliter tussen de 6 en de 7 scoren voor hun wiskundecijfers (Lonneke, Iris, Gaby, Romee) die significante vooruitgang boeken vergeleken met hun voorgangers (Femke, Pleun, Esmee). Wellicht is het effect bij deze leerlingen groter omdat het enige bevestiging geeft in hoe zij denken opgaven te moeten aanpakken en feedback over verkeerde berekeningen en redematies. Saillant detail is de vooruitgang die Merel (5,6->6,7) en Gaby (4,9->8,1) boekten en de achteruitgang van Bas (6,1->4,3), allen als doublant.

Op belevingsvlak gaven de meeste leerlingen eveneens positieve feedback. Niet alleen inhoudelijk waardeerden ze de lessen als welkome aanvulling op het reguliere lesprogramma, er kwam ook een stukje enthousiasme los door het doorbreken van het dagelijkse schoolritme. De klas erkende de meerwaarde van de 13 opgaven en het groepswork ook al waren enkele leerlingen in eerste instantie, tijdens de eerste les, nog niet erg enthousiast.

Gecombineerd zijn zowel de prima resultaten als het leerlingenthousiasme meer dan voldoende reden voor herhaling van de lessen en zal het volgend jaar weer in het programma worden opgenomen. Een kleine wijziging echter zal de les wellicht verbeteren: het aantal opgaven dat de leerlingen moeten selecteren (momenteel 3) kan beter niet gelijk zijn aan het aantal groepsleden (eveneens 3). Een vervelend gevolg hiervan was dat enkele groepjes de logische verdeling maakten elk een opgave uit te zoeken waarmee de samenwerking enigszins ondersneeuwt.

E 13 telproblemen

Probleem 1

Vier jongens moeten zich melden bij de afdelingsleider omdat ze gespiekt hebben. Ze moeten zich opstellen in een rij voor zijn kamer omdat ze één voor één naar binnen worden geroepen om straf te krijgen. Niemand wil natuurlijk de eerste zijn! Stel de jongens heten Arie, Bernard, Chris en Dirk. We willen alle mogelijke volgordes opschrijven waarop ze zich kunnen opstellen in die rij. Bijvoorbeeld: Arie eerst, Bernard als tweede, Chris als derde en Dirk als laatste. Hoeveel volgordes zijn er in totaal?

Probleem 2

In een doos zitten vier gekleurde knikkers: twee blauwe, een witte en een rode. We nemen een willekeurige knikker uit de doos en schrijven de kleur ervan op een blaadje. We

nemen daarna weer een willekeurige knikker uit de doos zonder de eerste knikker terug te leggen en noteren ook deze kleur. We gaan daarmee door tot we alle knikkers uit de doos gepakt hebben. Op hoeveel verschillende manieren kunnen we de knikkers uit de doos genomen hebben? Een volgorde zou bijvoorbeeld kunnen zijn: wit, blauw, rood en blauw.

Probleem 3

We hebben drie dezelfde brieven en vier verschillend gekleurde enveloppen: een gele, een blauwe, een rode en een groene. We doen niet meer dan één brief in een enveloppe. Op hoeveel manieren kunnen we de drie identieke brieven in de vier verschillende enveloppen doen? Eén van de mogelijkheden is bijvoorbeeld: één brief in de gele enveloppe, één brief in de blauwe enveloppe, en de resterende brief in de groene enveloppe.

Probleem 4

Een jongen heeft vier speelgoedauto's die verschillend van kleur zijn (zwart, oranje, wit en grijs). Hij besluit deze auto's weg te geven aan zijn vriendinnen: Petra, Joke en Linda. Op hoeveel manieren kan hij dat doen? Hij zou bijvoorbeeld alle vier de auto's aan Linda kunnen geven.

Probleem 5

In een vaas zijn drie knikkers die voorzien zijn met de cijfers 2, 4 en 7. We trekken willekeurig een knikker uit de vaas en noteren het cijfer dat erop staat. Zonder de knikker

terug te stoppen, pakken we nog een knikker en noteren ook dat cijfer. Tenslotte trekken we de laatste knikker uit de vaas. Hoeveel 3-cijferige getallen kunnen we op deze

manier krijgen? We kunnen bijvoorbeeld het getal 724 krijgen.

Probleem 6

Vier kinderen, Alice, Bert, Caroline en Diana mogen samen een nachtje logeren bij hun grootmoeder. Ze heeft twee slaapkamers (één op zolder en één beneden) met elk vier

bedden, zodat alle kinderen in één kamer kunnen slapen. Maar dat hoeft niet, ze mogen er ook voor kiezen beide kamers te gebruiken. Op hoeveel verschillende manieren

kunnen de vier kinderen zich over de slaapkamers verdelen? Bijvoorbeeld kunnen alle kinderen op één kamer, of (nog een voorbeeld) kunnen Alice, Bert en Caroline beneden slapen en Diana boven op zolder.

Probleem 7

Vier vriendinnen: Anne, Beatrice, Cathy en Demi moeten nog twee praktische opdrachten afronden, één voor wiskunde en één voor Nederlands. Ze besluiten zich te verdelen over deze twee vakken in groepjes van twee, zodat elk groepje zich maar hoeft te verdiepen in één opdracht. Op hoeveel manieren kunnen deze vier leerlingen zich verdelen in twee groepjes van twee voor de beide vakken? Bijvoorbeeld zouden Anne en Cathy samen de wiskundeopdracht kunnen afmaken en Beatrice en Demi de opdracht voor Nederlands.

Probleem 8

Vijf leerlingen (Angela, Bernadette, Claudia, Dirk en Ezra) hebben zich opgegeven om een docent Frans te helpen met het klaarzetten van glazen en dergelijke voor een wijn-

proeverij (in een bovenbouwklas ter gelegenheid van de 87e verjaardag van de school). Hij heeft er maar drie nodig. Op hoeveel manieren kan hij drie leerlingen kiezen uit deze vijf? Hij kan bijvoorbeeld Bernadette, Claudia en Dirk kiezen.

Probleem 9

De parkeergarage onder het appartement van Klaas heeft vijf genummerde plaatsen: 1 2 3 4 5. Omdat het gebouw nog heel nieuw is, zijn niet alle appartementen verhuurd. Alleen Klaas, Leonard en Maurice wonen er op dit moment en kunnen daar hun eigen auto parkeren. Bijvoorbeeld kan Klaas zijn auto op plaats nummer 1 zetten, Leonard op nummer 2 en Maurice op nummer 4. Op hoeveel verschillende manieren kunnen Klaas, Leonard en Maurice hun auto parkeren?

Probleem 10

Marije en Nico hebben vier postzegels, genummerd van 1 t/m 4. Ze gaan de zegels verdelen, elk twee. Op hoeveel manieren kunnen ze dat doen? Bijvoorbeeld kan Marije de zegels 1 en 2 nemen en Nico de zegels 3 en 4.

Probleem 11

In een doos zitten vier genummerde knikkers met de getallen 2, 4, 7 en 9. We nemen een willekeurige knikker en noteren het nummer dat erop staat. Daarna doen we de knikker terug in de doos. We herhalen deze handeling drie keer, zodat we een getal gekregen hebben van drie cijfers. Hoeveel verschillende getallen van drie cijfers kunnen we

zo krijgen? Bijvoorbeeld hadden we het getal 222 kunnen krijgen.

Probleem 12

Op elk van de kaarten staat een letter: A, B, C, C en C. Op hoeveel verschillende manieren kan ik de kaarten op tafel leggen en zo een rij letters maken? Ik kan het in bijvoorbeeld deze volgorde doen: ACBCC.

Probleem 13

Een bestuur van een studentenvereniging moet bestaan uit drie personen (een voorzitter, secretaris en een penningmeester). Om dit bestuur te vormen zijn er vier kandidaten: Arthur, Ben, Carla en David. Hoeveel verschillende besturen zouden kunnen gevormd kunnen worden? Een mogelijkheid is dat Carla voorzitter wordt, David penningmeester en Ben tenslotte secretaris.

LITERATUUR

Academie voor Ontwikkelingsgericht onderwijs (OGO). <http://www.ogo-academie.nl/>

Actieplan Leraar 2020 (2011). <http://www.rijksoverheid.nl/documenten-en-publicaties/kamerstukken/2011/05/23/actieplan-leraar-2020.html>

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. D (1997) *Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils*

Coenen, T. (2014). *Professionele ontwikkeling van docenten in een Lesson Study team: de aanpak van telproblemen*

Collegiale Consultatie. <http://www.coachjezelf.nl/site2012/cursussen/collegiale-consultatie/inleiding.php>

Dubois, J.G. (1984). *A Systematic Study of Simple Combinatorial Configurations*

Dudley, P. (2013). *Teacher learning in Lesson Study: What interaction-level discourse analysis revealed about how teachers utilised imagination, tacit knowledge of teaching and fresh evidence of pupils learning, to develop practice knowledge and so enhance their pupils' learning.*

English, L.D. (2005). *Combinatorics and the Development of Children's Combinatorial Reasoning*

Fernandez, C., Cannon, J. & Chokshi, S. (2002). *A US–Japan lesson study collaboration reveals critical lenses for examining practice*

Godino, J.D.& Batanero, C. (1998). *Clarifying the Meaning of Mathematical Objects as a Priority Area for Research in Mathematics Education*

Godino, J.D., Batanero, C. & Roa, R. (2005). *An Onto-Semiotic Analysis of Combinatorial Problems and the solving processes by University Students*

Godino, J.D., Batanero, C. & Font, V. (2007). *The onto-semiotic approach to research in mathematics education*

Isoda, M. (2010). *Lesson Study: Problem solving approaches in mathematics education in Japanese experience.*

Kuno, H. (2010). *The current situation of national curriculum reform and lesson study in Japan.*

Leermiddelenvo.nl <http://www.leermiddelenvo.nl/>

Lewis, C., Perry, R. & Hurd, J. (2004). *A deeper look at lesson study*

Lewis, C., Perry, R. & Murata, A. (2006). *How Should Research Contribute to Instructional Improvement? The Case of Lesson Study*

Lewis, C. (2009). *What is the nature of knowledge development in lesson study?*

Lewis, C. (2011). *Schools where teachers learn from each other.*

Noordhoff Uitgevers (2011). *Getal en Ruimte, HAVO A deel 2*

Oers, van, B. (2003). *Signatuur van ontwikkelingsgericht onderwijs.*

Puchner, L.D. & Taylor, A.N. (2006). *Lesson study, collaboration and teacher efficacy: Stories from two school-based math lesson study groups*

Sato, M. (2008). *Japanese lesson studies: looking back and looking forward.*

- Skemp, R. (1976). *Relational understanding and instrumental understanding*
- Sowder, J. T. (2007). *The mathematical education and development of teachers*
- Sprunken, T. (2013). *Introductie van de afgeleide in de vierde klas van het VWO*
- Stepanek, J.L., Appel, G., Mitchell, M., Leong, M., and Mangan, M.T. (2007). *Leading Lesson Study: a practical guide for teachers and facilitators.*
- Tall, D. & Isoda, M. (2007). *Long-term Development of Mathematical Thinking and Lesson Study*
- Tall, D.(2008). *The transition to formal thinking*
- Tall, D. (2008). *Using Japanese Lesson Study in teaching Mathematics*
- Tall, D. (2012). *Setting Lesson Study Within a long-term Framework for learning*
- Thurlings, M., Van der Veen, D., De Laat, M. (2012). *Professionaliseren van docenten: Het belang van Peers*
- Verhoef, N. & Tall, D. (2011). *Lesson study: the effect on teachers' professional development*
- Verhoef, N. (2011). *De kunst van het lesgeven: Lesson Study*
- Verhoef, N. (2011). *Lesson Study – deel 1*
- Verhoef, N. (2012). *Lesson Study – deel 2*

Verhoef, N., Timmer, M. (2013). *Lesson Study – deel 3. Ervaringen bij de introductie van periodieke bewegingen.*

Verhoef, N., van Smaalen, D. & Coenders, F. (2013). *Sensible mathematics: searching for characteristics using lesson study*

Vescio, V., Ross, D. & Adams, A. (2007). *A review of research on the impact of professional learning communities on teaching practice and student learning*

Watanabe, T. (2002). *Learning from Japanese lesson study.*

Wet BIO (2006). http://wetten.overheid.nl/BWBR0016944/geldigheidsdatum_30-08-2014