

BACHELOR-OPDRACHT

De toepasbaarheid van de Ziegler-Nichols regels

Hessel de Haan

Xiao Ming op de Hoek

Ingrid Maas

Begeleiders:

H. Zwart

G. Meinsma

10 juni 2015

Abstract

In 1942 hebben J.G. Ziegler en N.B. Nichols regels opgesteld voor de P-, PI- en PID-regelaar. Hun doel van de instellingen was *quarter damping* van een *negative feedback* systeem [5]. Door de simpliciteit van de regels werden ze veel toegepast als hulpmiddel en de door Ziegler en Nichols bedachte methode voor het instellen van zo'n regelaar werden ook veel gebruikt [8].

Het blijkt dat de regels niet altijd werken, gek genoeg is hierover weinig expliciet gedocumenteerd. Wanneer zorgen de Ziegler-Nichols regels wel voor een uiteindelijk stabiel systeem? Anders gezegd, wanneer zijn ze wel toepasbaar en wanneer niet?

In ons onderzoek maken wij gebruik van een methode beschreven door Ziegler en Nichols in hun originele artikel uit 1942, ook wel bekend als *the frequency method*. Dit onderzoeken wij voor eerste-orde systemen, maar ook een type tweede-orde en een type derde-orde systemen.

Inleiding

In de regeltechniek wil men een gegeven systeem regelen, opdat het geregelde gedrag beter is dan het ongeregelde. Eenvoudige en veel gebruikte regelaars zijn PID-regelaars. Men kan makkelijk nagaan dat er veel over het instellen van PID-regelaars is gedocumenteerd [2, p. 10].

Al in 1942 hebben Ziegler en Nichols regels opgesteld hoe een PID-regelaar ingesteld moet worden [5] om een systeem (sneller) te stabiliseren. Dit zijn veel gebruikte en simpele regels [8, p. 196].

Nu is deze opdracht ontstaan door een (stabiel) systeem, waar de Ziegler-Nichols regels niet de verwachte uitwerking hadden. De gedachte was namelijk dat deze regels altijd zouden moeten werken, maar het gegeven systeem werd instabiel door de regelaar.

Dat de Ziegler-Nichols regels niet altijd het systeem (wederom) stabiel maken bleek bekend te zijn bij verschillende collega's van onze begeleider. Alleen in de literatuur wordt vaak gesproken over *robustness* en dat de Ziegler-Nichols regels niet echt robuust zijn ([9], [10]). Dit kan betekenen dat het fenomeen algemeen bekend is en dat er altijd van stabiliteit wordt uitgaan. Een andere interpretatie zou kunnen zijn dat slechte *robustness* impliceert dat het systeem (door een kleine verandering) instabiel kan worden door de regelaar.

Er is echter een bron die instabiliteit wel een keer noemt: ‘... *performs poorly otherwise e.g. the system may become unstable.*’ [8, p. 5]. Deze bron is misschien een aanwijzing dat we teksten die aangeven dat de Ziegler-Nichols regels niet of slecht werken ook kunnen interpreteren alsof ze het systeem instabiel maken.

Zoals eerder genoemd, wordt er vaak gesproken over hoe robuust de regels zijn, maar wij zijn uit wiskundig oogpunt vooral benieuwd – vanwege de uitzonderingen – wanneer de Ziegler-Nichols regels wel werken oftewel het systeem niet instabiel maken. Dit gaan wij na door een paar systemen in hun algemene vorm te analyseren met behulp van een methode beschreven door Ziegler en Nichols [5]. We bekijken systemen zonder vertragingen.

Inhoudsopgave

1	De PID-regelaar	5
2	Ziegler en Nichols	6
3	Bepalen K_u en T_u	7
4	Voorbeeld systeem	8
4.1	K_u en T_u door Matlab	9
4.2	K_u en T_u algebraïsch	9
4.3	Stabiliteit controle	12
5	Eerste-orde systeem	13
6	Tweede-orde systeem	13
6.1	K_u en T_u	15
6.2	Analyse van de P-regelaar	16
6.3	Ziegler-Nichols toegepast in de P-regelaar	17
6.4	Analyse van de PI-regelaar	17
6.5	Ziegler-Nichols toegepast in de PI-regelaar	18
6.5.1	Voorwaarden voor een PI-regelaar	20
6.5.2	Instabiele systemen met een PI-regelaar	20
6.6	Analyse van de PD-regelaar	21
6.7	Ziegler-Nichols toegepast in de PD-regelaar	22
6.7.1	Voorwaarden voor een PD-regelaar	23
6.7.2	Instabiele systemen met een PD-regelaar	24
6.8	Analyse van de PID-regelaar	26
6.9	Ziegler-Nichols toegepast in de PID-regelaar	28
6.9.1	Voorwaarden voor een PID-regelaar	29
6.9.2	Instabiele systemen met een PID-regelaar	30
7	Derde-orde systeem	32
7.1	K_u en T_u	35
7.2	Analyse van de P-regelaar	36
7.3	Ziegler-Nichols toegepast in de P-regelaar	37
7.4	Analyse van de PI-regelaar	37
7.4.1	Algemene voorwaarden voor de PI-regelaar	37
7.5	Ziegler-Nichols toegepast in de PI-regelaar	39
7.5.1	Voorwaarden voor een PI-regelaar	40
7.5.2	Instabiele systemen met een PI-regelaar	41

7.6	Analyse van de PID-regelaar	42
7.6.1	Algemene voorwaarden voor de PID-regelaar	42
7.7	Ziegler-Nichols toegepast in de PID-regelaar	45

1 De PID-regelaar

In de praktijk komen veel systemen voor die uit zichzelf geneigd zijn te veranderen. Om systemen op een bepaalde waarde te houden moeten dan ook aanpassingen worden gedaan aan de invoer, dit wordt gedaan met een regelaar.

We kunnen dit bijvoorbeeld zien als een persoon die besluit de zonneschermen omlaag te brengen wanneer de zon te fel in de kamer schijnt. Echter wanneer er een wolk voor de zon schuift kan hij besluiten het zonnescherm weer geheel of gedeeltelijk omhoog te brengen. De mate van lichtinval van buitenaf is dus bepalend voor de nodige hoogte van het zonnescherm. Kortom, de persoon vergelijkt de gewenste lichtinval met de daadwerkelijke lichtinval.

Zo bestaan er veel meer systemen. Vaak is het gewenst dat dit systeem ook (automatisch) geregeld wordt. Wanneer de uitgang van een overdrachtsfunctie – die het systeem beschrijft – een aanpassing behoeft, moet het systeem effectief voor een snelle aanpassing zorgen, om zodoende weer op het gewenste niveau te komen. Voor deze snelle aanpassing zijn PID-regelsystemen als uitermate geschikt bevonden. In de industrie komen ze dan dus ook veelvuldig voor [3].

Systemen worden beschreven met overdrachtsfuncties, welke van zichzelf stabiel of instabiel kunnen zijn. Ook een regelaar beschrijven we met een overdrachtsfunctie. Wanneer we de regelaar bij een van zichzelf stabiel systeem gebruiken, willen we het systeem sneller laten convergeren naar zijn stabiele waarde. Wanneer we een regelaar bij een van zichzelf instabiel systeem gebruiken, is ons doel om alsnog een stabiel systeem te genereren.

Een PID-regelaar bestaat uit drie onderdelen, de P, I en D, die respectievelijk staan voor ‘proportioneel’, ‘integrerend’ en ‘differentiërend’. Een geschikte mix van deze drie onderdelen zorgen voor een snelle stabilisatie van het systeem.

Het verschil tussen de uitgang van het (met PID-regelaar geïmplementeerde) systeem en de ingestelde waarde, is de fout. De P, I en D term voeren alle drie een bewerking uit op de gevonden fout. Zo zorgt de proportionele term voor statische versterking waarin de fout een rol speelt. De integrerende term zorgt voor een integratie over de grootte en de duur van de fout, dus hij bepaalt de oppervlakte van de fout. Dit zorgt ervoor dat de uitvoer van het systeem sneller verandert [4], als de fout groter is.

De differentiërende term kijkt naar de mate van toe- of afname van de fout en zorgt ervoor dat hoe sneller de fout daalt, des te kleiner de ingang wordt [4]. Kortom de PID-regelaar voert een bewerking uit op het gekregen

uitgangssignaal, om daarmee snel een stabiele toestand te bereiken.

De algemene vorm van de PID-regelaar die we in ons verslag zullen gebruiken is:

$$\begin{aligned} C(s) &= K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \\ &= k \left(\gamma_0 + \gamma_1 \frac{1}{Ts} + \gamma_2 Ts \right) \\ &= \frac{k (\gamma_2 (Ts)^2 + \gamma_0 (Ts) + \gamma_1)}{Ts}, \end{aligned} \quad (1)$$

waarbij $K_p = k\gamma_0$, $K_i = \frac{k\gamma_1}{T}$ en $K_d = k\gamma_2 T$. Let op dat we aannemen dat $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 > 0$ zijn.

2 Ziegler en Nichols

In de tijd van J.G. Ziegler en N.B. Nichols werden PID-regelaars veel gebruikt. Voor het instellen van een stabiliserende regelaar, hebben Ziegler en Nichols verschillende regels opgesteld [5, p. 765]. De regels die zij hebben gemaakt, zijn gebaseerd op de opstelling van een regelaar die de beweging van een pen interpreteert en corrigeert [5, p. 759]. Deze regels zijn ontworpen voor de P-, de PI- en de PID-regelaar.

P-regelaar:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{1}{2} K_u \\ &= \frac{K_u}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

PI-regelaar:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{9}{20} K_u \left(1 + \frac{6}{5T_u s} \right) \\ &= \frac{9K_u(5T_u s + 6)}{100T_u s} \end{aligned} \quad (3)$$

PID-regelaar:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{3}{5} K_u \left(1 + \frac{2}{T_u s} + \frac{T_u s}{8} \right) \\ &= \frac{3K_u ((T_u s)^2 + 8T_u s + 16)}{40T_u s} \end{aligned} \quad (4)$$

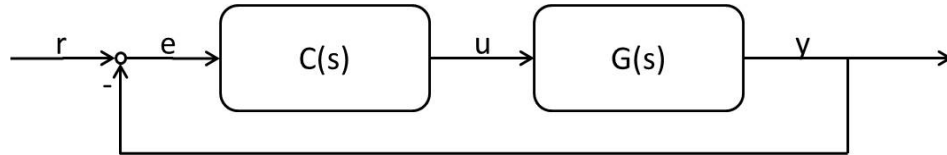
Hierbij staan de constanten K_u en T_u respectievelijk voor de Ultimate Gain en de Ultimate Period. De Ultimate Gain is die (positieve) waarde, voor een constante in een P-regelaar, waarvoor het systeem net instabiel is en oscilleert (harmonisch) [5, p. 760]. Er moet rekening mee worden gehouden worden dat niet elk systeem oscilleert, als het instabiel is. Wanneer het systeem wel oscilleert, dan wordt de periode van de oscillatie de Ultimate Period genoemd.

Merk op dat er geen regels zijn opgesteld voor de PD-regelaar. In het originele werk van J.G. Ziegler en N.B. Nichols wordt er gesproken over een vervolg artikel met de wiskundige afleiding van de regels [5, p. 759]. Na veel zoeken is ons vermoeden dat dit artikel nooit is verschenen.

In de rest van dit verslag gaan wij uit van systemen die oscillerend gedrag (kunnen) vertonen en open-lus stabiel zijn. Mocht er geen sprake zijn van dit gedrag voor een gegeven systeem, dan vermelden we dat duidelijk.

3 Bepalen K_u en T_u

Gegeven is een systeem met de overdrachtsfunctie $G(s)$. Voor het bepalen van de Ultimate Gain (K_u) en Ultimate Period (T_u) van $G(s)$, maken wij een negatief feedback systeem met een regelaar die overdrachtsfunctie $C(s)$ heeft. Het systeem komt er dan uit te zien als in Figuur 1. Houd er rekening



Figuur 1: Gesloten-lus systeem.

mee dat de overdrachtsfunctie $G(s)$ de vorm $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ heeft en de regelaar $C(s)$ eenzelfde soort vorm $C(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ heeft. De overdrachtsfunctie van het (totale) systeem met negatieve feedback is:

$$H(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow = \frac{A(s)N(s)}{B(s)D(s) + A(s)N(s)}. \quad (6)$$

Met behulp van de *Root Locus methode* [6] kunnen wij K_u waarde(n) bepalen van $H(s)$. Dit betekent dat we de polen moeten bepalen van Vergelijking (6) met de regelaar:

$$C(s) = k. \quad (7)$$

De polen van een overdrachtsfunctie kunnen worden gevonden door de noemer apart te bekijken en gelijk te stellen aan nul.

De polen die wij zoeken moeten op de imaginaire as liggen maar ongelijk zijn aan nul, want dan kan het systeem oscillerend gedrag vertonen.

Een pool in s kan dan worden geschreven als $s = \pm i\omega$, met $\omega > 0$. Om nu de waarde(n) voor ω en k te bepalen, substitueren we $s = i\omega$ in de noemer van Vergelijking (6) en stellen dat gelijk aan nul. In combinatie met Vergelijking (6) komt dit neer op:

$$0 = B(s)D(s) + A(s)N(s) \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow 0 = B(i\omega)D(i\omega) + A(i\omega)N(i\omega) \quad (9)$$

$$= D(i\omega) + kN(i\omega). \quad (10)$$

Uit Vergelijking (10), kunnen k en ω bepaald worden. Dan is $K_u = k$ en $T_u = \frac{2\pi}{\omega}$. Er geldt dus:

$$K_u = k \text{ en } T_u = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (11)$$

Met $K_u > 0$ en $T_u > 0$, mits $\omega > 0$.

4 Voorbeeld systeem

Gegeven is het systeem met de volgende overdrachtsfunctie:

$$G(s) = \frac{0,0016s^4 - 0,0168s^3 + 0,1362s^2 - 0,5375s + 1}{0,0014s^4 + 0,0767s^3 + 0,4995s^2 + 2,4068s + 1} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (12)$$

Als we gaan controleren of het systeem van zichzelf al stabiel is, dan gebruiken we een P-regelaar $C(s) = 1$. Deze regelaar geeft alleen het signaal door wat hij binnen krijgt, hij verandert er niets aan. Als we een open-lus systeem met regelaar $C(s)$ en systeem $G(s)$ maken, dan krijgt dit systeem de volgende overdrachtsfunctie [4]:

$$H(s) = C(s)G(s) = G(s)$$

Als we hiervan de polen berekenen via Matlab, krijgen we de volgende uitkomsten:

$$s \approx -0,4556 \quad \vee \quad s \approx -48,1054 \quad \vee \quad s \approx -3,1123 \pm 4,7860i$$

Omdat elke pool een negatief reëel deel heeft, is het systeem stabiel. De regels van Ziegler en Nichols zouden het systeem sneller naar een stabiele waarde moeten laten convergeren. Daarom gaan we hieronder de regels van Ziegler en Nichols toepassen voor een PID-regelaar om te kijken of het systeem met overdrachtsfunctie (12) door een Ziegler-Nichols PID-regelaar gestabiliseerd wordt.

Het bepalen van K_u en T_u kan op 2 manieren. Er kan een simulatie worden gemaakt met Matlab met het commando *rlocus*, daarbij krijg je een plot te zien met de poolbanen van de overdrachtsfunctie. Ook kunnen ze worden berekend volgens Vergelijking (7) en Vergelijking (8). Wij doen hier beide methodes. Het voordeel van Matlab is, dat vooral bij hoge graads overdrachtsfuncties, het een stuk sneller is. Het algebraïsch bepalen van K_u en T_u is nauwkeuriger.

4.1 K_u en T_u door Matlab

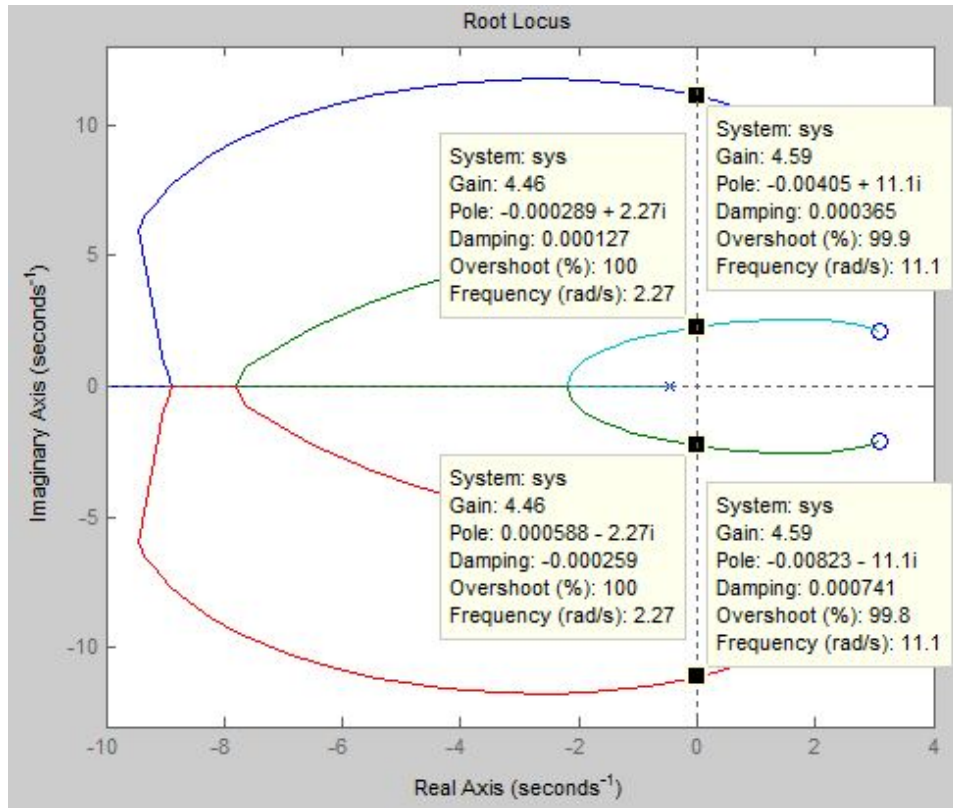
De poolbanen van Vergelijking (12), zijn te zien in Figuur 2. De poolbanen zijn symmetrisch in de reële as [7], dit is ook te zien in de plot. Er staan dus dubbele waarden in de plot, we zullen hierom alleen maar kijken naar de snijpunten met de imaginaire as die boven de reële as liggen. Als we de K_u 's en ω 's aflezen, kunnen we de k 's en de T 's bepalen:

$$\begin{aligned} k_1 = K_{u_1} &\approx 4,59 \quad \text{met} \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \approx \frac{2\pi}{11,1} \approx 0,566 \\ k_2 = K_{u_2} &\approx 4,46 \quad \text{met} \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} \approx \frac{2\pi}{2,27} \approx 2,78 \end{aligned}$$

4.2 K_u en T_u algebraïsch

Als we K_u en T_u algebraïsch willen bepalen, dan moeten we Vergelijking (10) oplossen:

$$\begin{aligned} 0 &= (0,0014(i\omega)^4 + 0,0767(i\omega)^3 + 0,4995(i\omega)^2 + 2,4068(i\omega) + 1) \\ &\quad + k(0,0016(i\omega)^4 - 0,0168(i\omega)^3 + 0,1362(i\omega)^2 - 0,5375(i\omega) + 1) \\ &= (0,0014 + 0,0016k)\omega^4 - (0,0767 - 0,0168k)i\omega^3 \\ &\quad - (0,4995 + 0,1362k)\omega^2 + (2,4068 - 0,5375k)i\omega + (1 + k) \end{aligned}$$



Figuur 2: *Root – loci* gegeven systeem

Als een vergelijking gelijk is aan nul, dan geldt dat het reële deel en het imaginaire deel beide gelijk zijn aan nul. Er volgt dus:

$$\begin{cases} (0,0014 + 0,0016k)\omega^4 - (0,4995 + 0,1362k)\omega^2 + (1 + k) = 0 \\ -(0,0767 - 0,0168k)\omega^3 + (2,4068 - 0,5375k)\omega = 0 \end{cases}$$

Uit de tweede vergelijking volgt:

$$\begin{aligned} 0 &= -(0,0767 - 0,0168k)\omega^3 + (2,4068 - 0,5375k)\omega \\ &= \omega(2,4068 - 0,5375k - (0,0767 - 0,0168k)\omega^2) \\ \omega &= 0 \quad \vee \quad \omega^2 = \frac{0,5375k - 2,4068}{0,0168k - 0,0767} \end{aligned}$$

Omdat geldt $\omega > 0$, gebruiken we het tweede resultaat voor ω . Als we deze invullen in de eerste vergelijking, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} 0 &= (0,0014 + 0,0016k)\omega^4 - (0,4995 + 0,1362k)\omega^2 + (1 + k) \\ &= (0,0014 + 0,0016k) \left(\frac{0,5375k - 2,4068}{0,0168k - 0,0767} \right)^2 \\ &\quad - (0,4995 + 0,1362k) \frac{0,5375k - 2,4068}{0,0168k - 0,0767} + (1 + k) \end{aligned}$$

Oplossen met behulp van Matlab geeft:

$$k \approx -7,8591 \quad \vee \quad k \approx 4,4610 \quad \vee \quad k \approx 4,5962$$

Omdat geldt $k > 0$, gelden alleen de laatste 2 oplossingen. We stellen:

$$k_1 = 4,4610 \quad \wedge \quad k_2 = 4,5962$$

De bijbehorende waarden voor T zijn:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{\omega_1} & T_2 &= \frac{2\pi}{\omega_2} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{0,5375k_1 - 2,4068}{0,0168k_1 - 0,0767}}} & &= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{0,5375k_2 - 2,4068}{0,0168k_2 - 0,0767}}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{0,5375 \cdot 4,46099 - 2,4068}{0,0168 \cdot 4,46099 - 0,0767}}} & &= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{0,5375 \cdot 4,59618 - 2,4068}{0,0168 \cdot 4,59618 - 0,0767}}} \\ &\approx 2,7724 & &\approx 0,5656 \end{aligned}$$

Te zien is dat de berekende k - en T -waarden niet altijd overeen komen met de waarden die wij via het *rlocus* commando hebben gevonden, omdat we bij het *rlocus* commando uit een grafiekje hebben afgelezen, gaan we er vanuit dat de berekende waarden nauwkeuriger zijn. Met deze waarden zullen we dus ook verder rekenen.

4.3 Stabiliteit controle

De Ziegler-Nichols PID-regelaar die bij het gegeven systeem hoort is gegeven in Vergelijking (4). In ons geval zijn er twee mogelijke regelaars:

$$\begin{aligned}
 C_1(s) &= \frac{3k_1((T_1s)^2 + 8T_1s + 16)}{40T_1s} \\
 &= \frac{3 \cdot 4,4610((2,7724s)^2 + 8 \cdot 2,7724s + 16)}{40 \cdot 2,7724s} \\
 &= \frac{0,9276s^2 + 2,6766s + 1,9309}{s} = \frac{A_1(s)}{B_1(s)} \\
 C_2(s) &= \frac{3k_2((T_2s)^2 + 8T_2s + 16)}{40T_2s} \\
 &= \frac{3 \cdot 4,5962((0,5656s)^2 + 8 \cdot 0,5656s + 16)}{40 \cdot 0,5656s} \\
 &= \frac{0,1950s^2 + 2,7577s + 9,7515}{s} = \frac{A_2(s)}{B_2(s)}
 \end{aligned}$$

Ziegler en Nichols vertellen ons niet, wat we moeten doen als we twee (of meer) mogelijke Ultimate Gain (K_u) waarden hebben gevonden. Wij denken dat we dan de zo klein mogelijke K_u -waarde nodig hebben. Hierbij zijn alle overige polen namelijk nog stabiel. Als we een grotere waarde nemen van K_u , dan zullen er al twee polen instabiel zijn. Om deze reden vinden wij het aannemelijker dat we de kleinste waarde van K_u moeten gebruiken. We zullen dus gaan kijken naar de eerste waarde.

De overdrachtsfunctie van het gesloten-lus systeem is gegeven in Vergelijking (6). Om te kijken of het gesloten-lus systeem stabiel is, moeten de reële delen van de polen kleiner zijn dan nul [4]. De vergelijking die we daarvoor moeten oplossen is gegeven in Vergelijking (8). De vergelijking wordt dus:

$$\begin{aligned}
 0 &= B_1(s)D(s) + A_1(s)N(s) \\
 &= s \cdot (0,0014s^4 + 0,0767s^3 + 0,4995s^2 + 2,4068s + 1) \\
 &\quad + (0,9276s^2 + 2,6766s + 1,9309) \\
 &\quad \cdot (0,0016s^4 - 0,0168s^3 + 0,1362s^2 - 0,5375s + 1) \\
 \Rightarrow s &= -0,6909 \pm 0,7595i \quad \vee \quad s = -0,6791 \pm 3,1171i \quad \vee \\
 s &= 4,7056 \pm 9,9561i
 \end{aligned}$$

De laatste twee polen hebben een positief reëel deel, dus deze overdrachtsfunctie is instabiel. Omdat we ook een andere regelaar kunnen maken, gaan

we kijken of deze zorgt voor een stabiel systeem.

$$\begin{aligned}
0 &= B_2(s)D(s) + A_2(s)N(s) \\
&= s \cdot (0,0014s^4 + 0,0767s^3 + 0,4995s^2 + 2,4068s + 1) \\
&\quad + (0,1950s^2 + 2,7577s + 9,7515) \\
&\quad \cdot (0,0016s^4 - 0,0168s^3 + 0,1362s^2 - 0,5375s + 1) \\
\Rightarrow s &= -5,4096 \pm 4,1374i \quad \vee \quad s = 0,6065 \pm 1,6846i \quad \vee \\
&\quad s = 0,7385 \pm 14,4794i
\end{aligned}$$

De laatste vier polen hebben een positief reëel deel, dus ook deze regelaar zorgt er niet voor dat het systeem stabiel wordt.

Dus de regels van Ziegler en Nichols voor een PID-regelaar werken niet bij het gegeven systeem (12). ■

5 Eerste-orde systeem

Aangezien Ziegler-Nichols regels niet altijd werken, bekijken wij verschillende systemen. Voor ons onderzoek willen we met lagere orde systemen beginnen, omdat we verwachten dat dit eenvoudiger zal zijn.

Het onderzoek met betrekking tot een eerste-orde systeem is al snel afgerond. Een eerste-orde systeem heeft namelijk geen K_u waarde. Dit komt doordat de poolbaan op de reële as ligt, als de poolbaan de imaginaire as snijdt.

Voor een eerste-orde systeem heeft de pool alleen een reëel deel en is dus $\omega = 0$, maar volgens Vergelijking (11) en wat in sectie 2 is beschreven kan dit niet.

Dus op geen enkel eerste-orde systeem kunnen de Ziegler-Nichols regels worden toegepast, omdat er geen oscillerend gedrag mogelijk is.

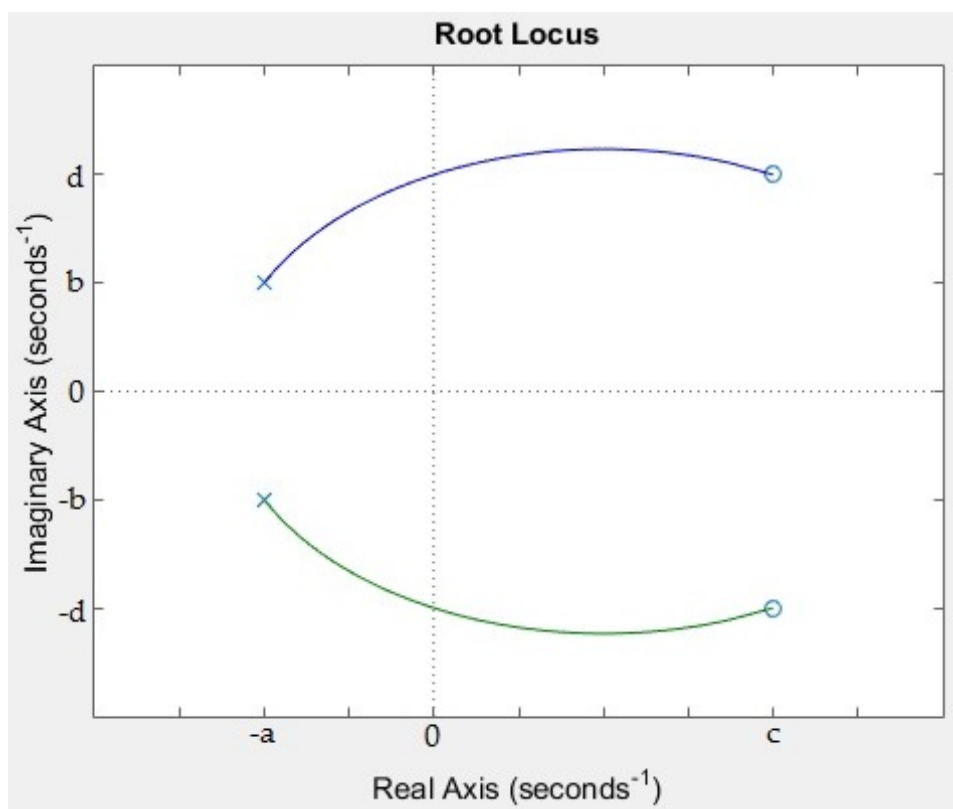
6 Tweede-orde systeem

De Ziegler-Nichols regels gaan wij ook controleren bij een algemene vorm van een tweede-orde systeem.

Met behulp van de *root-loci* methode kunnen wij achterhalen bij welke proportie het systeem gaat oscilleren (harmonisch). In het geval van oscilleren snijdt de poolbaan de imaginaire as op de *root-loci* plot en ligt daar niet op de reële as.

Zoals beschreven in sectie 2 voldoen systemen met poolbanen die de imaginaire as snijden en die niet op de reële as liggen in de *root-loci* plot aan onze eisen. Die systemen bevatten dus in ieder geval een K_u waarde.

Aangezien wij van een stabiel systeem uitgaan, moeten de polen een negatief reëel deel hebben en deze liggen dus links van de imaginaire as in de *root-loci* plot. Om de opzet te krijgen zoals eerder beschreven, moeten de nulpunten aan de rechterkant van de imaginaire as liggen in de *root-loci* plot. Een illustratief voorbeeld van zo'n *root-loci* plot is te zien in Figuur 3.



Figuur 3: *Root-loci* plot van een willekeurig tweedegraads overdrachtsfunctie, met de beschreven vorm Vergelijking (13).

De algemene vorm van de beschreven tweedegraads overdrachtsfunctie heeft

de onderstaande vorm.

$$G(s) = \frac{(s - c)^2 + d^2}{(s + a)^2 + b^2} \quad (13)$$

Deze overdrachtsfunctie, met $a, b, c, d > 0$, zullen wij verder gaan onderzoeken in deze sectie. De gegeven Figuur 3 hoort bij Vergelijking (13), want de poolbanen lopen van de polen van $G(s)$ naar de nulpunten van $G(s)$. In iedere sectie waar de Ziegler-Nichols regels niet werken, en waarbij we dus een tegenvoorbeeld vinden, zullen we aandacht schenken aan de mate waarin de regelaar zorgt voor instabiele systemen. Het doel is dus inzicht te krijgen in de regelaars die niet als gewenst functioneren. De regelaar gegeven in Vergelijking (13) bevat de vier variabelen $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ en $d > 0$. We kunnen niet oneindig veel combinaties langslopen, dus zullen we in dit onderzoek concessies moeten doen.

Vandaar dat we telkens zullen voor geheeltallige waarden van a , b , c en d kiezen, in het bereik:

$$[0, 10] \quad (14)$$

Verder merken we op dat het niet mogelijk is 4-dimensionale afbeeldingen te genereren. Vandaar kiezen we er telkens voor, om voor iedere waarde van d , een aparte afbeelding te maken. Tenslotte merken we op dat we de afbeeldingen maken met Matlab, waarin de programma's dezelfde stappen uitvoeren als wij in dit verslag. De gebruikte code staat in de Appendix.

6.1 K_u en T_u

Wij passen de methode beschreven in sectie 3 toe, om onze K_u en T_u te bepalen. Hiervoor moeten wij gebruik maken van Vergelijking (7) en $G(s)$ substitueren in Vergelijking (8), met $N(s) = (s - c)^2 + d^2$ en $D(s) = (s + a)^2 + b^2$. Uiteindelijk komen wij dan uit op Vergelijking (10).

$$\begin{aligned} 0 &= D(i\omega) + kN(i\omega) \\ &= (i\omega + a)^2 + b^2 + k((i\omega - c)^2 + d^2) \\ &= (i\omega)^2 + 2ai\omega + a^2 + b^2 + k((i\omega)^2 - 2ci\omega + c^2 + d^2) \\ &= -(1 + k)\omega^2 + 2(a - kc)i\omega + (a^2 + b^2 + k(c^2 + d^2)) \end{aligned}$$

Vanwege de aanwezigheid van een imaginair deel volgt hieruit een stelsel van vergelijkingen.

$$\begin{cases} 2(a - kc)\omega &= 0 \\ -(1 + k)\omega^2 + (a^2 + b^2 + k(c^2 + d^2)) &= 0 \end{cases}$$

Uit de eerste vergelijking volgen de oplossingen $k = \frac{a}{c}$ of $\omega = 0$. Maar er moet gelden dat $\omega > 0$ is, dus $\omega = 0$ vervalt. Voor $k = \frac{a}{c}$ volgt, als we $\omega > 0$ in acht nemen, uit de tweede vergelijking het onderstaande.

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + k(c^2 + d^2)}{1 + k}} \\ &= \sqrt{\frac{c(a^2 + b^2) + a(c^2 + d^2)}{c + a}}.\end{aligned}$$

Volgens Vergelijking (11) zijn de waarden van K_u en T_u dan als volgt:

$$K_u = \frac{a}{c} \text{ en } T_u = 2\pi \sqrt{\frac{c + a}{c(a^2 + b^2) + a(c^2 + d^2)}} \quad (15)$$

Deze expressies voor K_u en T_u worden vanaf nu in de rest van de secties over de tweede-orde gebruikt. Daarnaast zal voor simpliciteit in de komende stukken gebruik worden gemaakt van de notatie $K_u = k$, $T_u = T$, $\mathbf{p} = a^2 + b^2$ en $\mathbf{n} = c^2 + d^2$.

In de volgende subsecties gaan wij de P-, PI-, PD- en PID-regelaar analyseren en vervolgens de Ziegler-Nichols regels toepassen. We gaan onderzoeken wat de gevonden waarden voor K_u en T_u betekenen voor de stabiliteit van het totale systeem met overdrachtsfunctie (6). We gebruiken voor de stabiliteitscheck de methode van *Routh-Hurwitz* [4, p. 86]. Daarbij gebruiken wij de vorm (1) voor de regelaar. Merk op dat de andere regelaars dezelfde vorm hebben als de PID-regelaar, echter zijn er dan één of meer van de γ 's gelijk aan nul.

In de komende stukken waar de regelaars geanalyseerd worden, willen we meer te weten komen over de waarden die een γ mag aannemen. De γ 's staan namelijk in direct verband met waarden die de Ziegler-Nichols regels beschrijven.

6.2 Analyse van de P-regelaar

De P-regelaar is $C(s) = \gamma_0 k$, met $A(s) = \gamma_0 k$ en $B(s) = 1$. Wij gaan de stabiliteit na door te kijken naar de polen van het totale systeem. We kijken hiervoor naar de nulpunten van Vergelijking (8).

$$\begin{aligned}0 &= B(s)D(s) + A(s)N(s), \\ &= s^2 + 2as + \mathbf{p} + \gamma_0 k (s^2 - 2cs + \mathbf{n}) \\ &= (1 + \gamma_0 k)s^2 + 2(a - \gamma_0 kc)s + (\mathbf{p} + k\mathbf{n}).\end{aligned} \quad (16)$$

Uit de Routh-Hurwitz methode voor een polynoom van de vorm $\lambda_2 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0$ volgt dat alle λ_i hetzelfde teken moeten hebben voor $i \in \{0, 1, 2\}$. Dit volgt uit Tabel 1. Omdat $\lambda_1 > 0$, geldt $\lambda_i > 0$ voor $i \in \{0, 1, 2\}$.

λ_2	λ_0
λ_1	0
λ_0	0

Tabel 1: Routh-Hurwitz tabel voor een tweedegraads polynoom.

Nu geldt voor Vergelijking (16) dat de enige term die voor instabiliteit kan zorgen $\lambda_1 = (a - \gamma_0 k)$ is. De andere termen zijn namelijk groter dan nul, wat direct te zien is. Oftewel we willen dat $\lambda_1 > 0$ is.

Hieronder substitueren wij de in Vergelijking (15) gevonden k en werken de term λ_1 verder uit.

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= a - \gamma_0 k c \\ &= a - \gamma_0 a \\ &= a(1 - \gamma_0).\end{aligned}$$

Gezien $a > 0$, moet $0 < \gamma_0 < 1$ zodat $\lambda_1 > 0$. Dan is het systeem dus stabiel, wat overigens redelijk intuïtief is. Door een systeem namelijk blijvend te laten oscilleren en vervolgens de uitgang een statische versterking mee te geven (kleiner dan één) en terug te koppelen naar de ingang en dat te herhalen, convergeert uiteindelijk het systeem.

6.3 Ziegler-Nichols toegepast in de P-regelaar

In subsectie 6.2 staat dat de P-regelaar het systeem stabiel maakt, als $0 < \gamma_0 < 1$. De Ziegler-Nichols regel voor de P-regelaar is $\gamma_0 = \frac{1}{2}$ voor (zie Vergelijking (2)) en maakt het systeem dus stabiel.

6.4 Analyse van de PI-regelaar

De PI-regelaar is $C(s) = \frac{k(\gamma_0(Ts) + \gamma_1)}{Ts} = \frac{A(s)}{B(s)}$. Wij gaan de stabiliteit na door te kijken naar de nulpunten van het polynoom gegeven in Vergelijking (8). We bepalen in deze sectie opnieuw een interval voor γ_0 , maar ook voor γ_1 . Er moet rekening mee worden gehouden, dat dit wel een andere γ_0 is met

een mogelijk ander interval dan de γ_0 die beschreven werd in subsectie 6.2.

$$\begin{aligned}
0 &= B(s)D(s) + A(s)N(s), \\
&= (Ts)(s^2 + 2as + \mathfrak{p}) + k(\gamma_0(Ts) + \gamma_1)(s^2 - 2cs + \mathfrak{n}) \\
&= (1 + \gamma_0 k)Ts^3 + (2(a - \gamma_0 kc)T + \gamma_1 k)s^2 \\
&\quad + ((\mathfrak{p} + \gamma_0 k\mathfrak{n})T - 2\gamma_1 kc)s + \gamma_1 k\mathfrak{n}.
\end{aligned} \tag{17}$$

De Routh-Hurwitz methode voor een polynoom van de vorm $\lambda_3 s^3 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0$ heeft als resultaat Tabel 2.

λ_3	λ_1
λ_2	λ_0
$\lambda_1 - \frac{\lambda_3 \lambda_0}{\lambda_2}$	0
λ_0	0

Tabel 2: Routh-Hurwitz tabel voor derdegraads polynoom.

Polynoom (17) heeft $\lambda_3 = (1 + \gamma_0 k)T > 0$, dit is triviaal. Met deze informatie volgt uit Tabel 2, dat $\lambda_i > 0$ moet gelden voor $i \in \{0, 2\}$ en dat $\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3 > 0$.

Nu moet er nog gecontroleerd worden of dit allemaal überhaupt geldt. Als deze voorwaarden gelden, dan is het systeem stabiel. De onderstaande ongelijkheden zijn de onzekerheden die geverifieerd moeten worden.

$$\lambda_2 = (2(a - \gamma_0 kc)T + \gamma_1 k) > 0 \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3 &= ((\mathfrak{p} + \gamma_0 k\mathfrak{n})T - 2\gamma_1 kc)(2(a - \gamma_0 kc)T + \gamma_1 k) \\
&\quad - \gamma_1 k\mathfrak{n}(1 + \gamma_0 k)T > 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Een interval voor γ_0 kan gevonden worden met behulp van Vergelijking (18). Hiervoor substitueren we $k = \frac{a}{c}$ in Vergelijking (18), dan blijkt de term $\lambda_2 > 0$ te zijn, mits in ieder geval $0 < \gamma_0 < 1$ geldt (dit is het kleinste mogelijke interval en onafhankelijk van γ_1). Als γ_0 zo wordt gekozen, dan maakt het bij deze vergelijking niet uit welke $\gamma_1 > 0$ er wordt gekozen en is $\lambda_2 > 0$.

Het is nu alleen nog de vraag of het interval $\gamma_1 > 0$ goed genoeg is voor de laatste ongelijkheid. We gaan Vergelijking (19) verder bekijken in subsectie 6.5.1.

6.5 Ziegler-Nichols toegepast in de PI-regelaar

We hebben het vermoeden dat de PI-regelaar tegenvoorbeelden heeft en dus dat de Ziegler-Nichols regels niet altijd kloppen. Gebruiken wij Vergelij-

king (13) met $a = b = d = 1$ en $c = 37$. Dan krijgen wij het volgende tweede-orde systeem:

$$G(s) = \frac{(s - 37)^2 + 1}{(s + 1)^2 + 1} \quad (20)$$

De K_u en T_u waarden die hierbij horen zijn volgens Vergelijking (15):

$$K_u = \frac{a}{c} = \frac{1}{37}$$

$$T_u = 2\pi \sqrt{\frac{c + a}{c(a^2 + b^2) + a(c^2 + d^2)}} = \sqrt{\frac{2}{19}}\pi$$

Gebruiken wij de verkregen waarde in Vergelijking (3) dan krijgen wij een PI-regelaar op basis van de Ziegler-Nichols regels. De regelaar krijgt dan de onderstaande vorm.

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{9K_u(5T_us + 6)}{100T_us} \\ &= \frac{9 \cdot \frac{1}{37} (5\sqrt{\frac{2}{19}}\pi s + 6)}{100\sqrt{\frac{2}{19}}\pi s} \\ &= \frac{9(3\sqrt{38} + 5\pi s)}{3700\pi s} = \frac{A(s)}{B(s)} \end{aligned} \quad (21)$$

Het systeem is stabiel als Vergelijking (8) negatieve waarden geeft voor de reële delen van de nulpunten s . Deze vergelijking vullen we in met Vergelijking (20) en Vergelijking (21).

$$\begin{aligned} 0 &= B(s)D(s) + A(s)N(s) \\ &= 3700\pi s \cdot ((s + 1)^2 + 1) + 9(3\sqrt{38} + 5\pi s) \cdot ((s - 37)^2 + 1) \end{aligned}$$

Dit geldt voor:

$$s \approx -1,11352 \quad \vee \quad s \approx 0,0063 \pm 4,1719i$$

Het reële deel van de laatste twee oplossing is positief, dus het polynoom en dus het systeem is niet stabiel. Dus de Ziegler-Nichols regels voor een PI-regelaar werken niet voor alle tweede-orde systemen. ■

Omdat de Ziegler-Nichols PI-regelaar niet voor alle tweede-orde systemen werkt, gaan we voorwaarden opstellen waaronder de regels wel werken.

6.5.1 Voorwaarden voor een PI-regelaar

In subsectie 6.4 staat beschreven dat minimaal $0 < \gamma_0 < 1$ moet gelden voor een stabiele PI-regelaar. De Ziegler-Nichols regels schrijven $\gamma_0 = \frac{9}{20}$ voor (Vergelijking (3)), aan deze eis wordt dus voldaan.

Nu moet Vergelijking (19) nog gelden. Omdat het algemene geval erg lastig is, vullen we de waarden die Ziegler en Nichols gebruiken in en gaan we dat analyseren. Ziegler en Nichols gebruiken: $\gamma_0 = \frac{9}{20}$ en $\gamma_1 = \frac{27}{50}$.

$$\begin{aligned}
& 0 < \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3 \\
& < ((p + \gamma_0 k n)T - 2\gamma_1 k c) (2(a - \gamma_0 k c)T + \gamma_1 k) - \gamma_1 k n (1 + \gamma_0 k)T \\
& < \left((p + \frac{9}{20} k n)T - 2\frac{27}{50} k c \right) \left(2(a - \frac{9}{20} k c)T + \frac{27}{50} k \right) - \gamma_1 k n (1 + \frac{9}{20} k)T \\
& < \frac{a}{5000c} (100T((55cT + 27)p - 27n) - 9a(660cT - 275nT^2 + 324)) \\
& \Leftrightarrow 0 < 100T((55cT + 27)p - 27n) - 9a(660cT - 275nT^2 + 324) \\
& 0 < 275(9an + 20cp)T^2 + 540(-11ac + 5(p - n))T - 2916a \\
& \Leftrightarrow T < \frac{54 \left(-5(p - n) + 11ac + \sqrt{(11ac - 5(p - n))^2 + 11a(20cp + 9an)} \right)}{55(20cp + 9an)}
\end{aligned}$$

Weer omgeschreven in alleen a 's, b 's, c 's en d 's, krijgen we dus een bovengrens voor T :

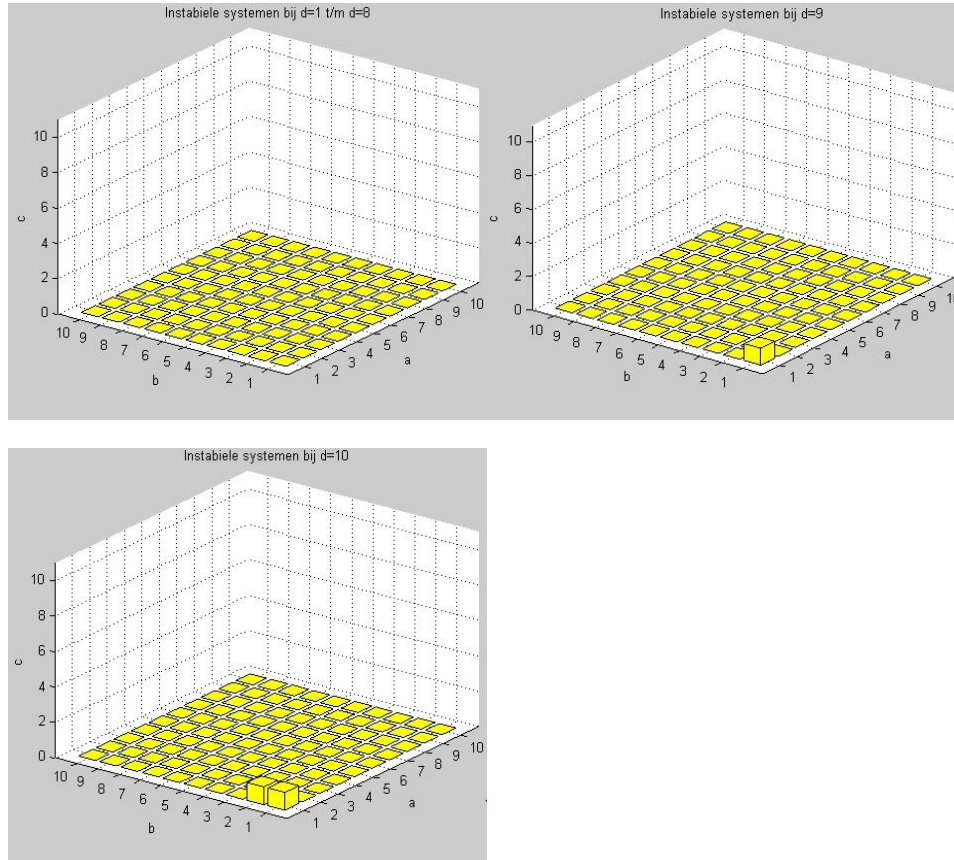
$$\begin{aligned}
T_g = & \frac{54(5(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + 11ac)}{55(20c(a^2 + b^2) + 9a(c^2 + d^2))} \\
& + \frac{54}{55(20c(a^2 + b^2) + 9a(c^2 + d^2))} \\
& \cdot \sqrt{(11ac - 5(a^2 + b^2 - c^2 - d^2))^2 + 11a(20c(a^2 + b^2) + 9a(c^2 + d^2))}
\end{aligned}$$

Er geldt dus dat de Ziegler-Nichols regel voor de PI-regelaar voldoen als $T < T_g$.

6.5.2 Instabiele systemen met een PI-regelaar

Voor de waarden van $d = 1$ tot en met $d = 8$ vindt Matlab geen instabiele systemen. Voor de waarde van $d = 9$ vindt Matlab één tegenvoorbeeld. Voor de waarde van $d = 10$ vindt Matlab twee tegenvoorbeelden. In totaal hebben we in dit bereik dus 3 tegenvoorbeelden gevonden in 10.000 systemen. De gevonden resultaten hebben we weergegeven in een tabel en in plotjes.

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aantal tegenvoorbeelden	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2



Figuur 4: Instabiele systemen bij $d=1$ tot en met $d=10$.

De instabiele systemen lijken niet willekeurig in de plotjes te liggen. Hoe hoger de waarde van d , hoe meer instabiele systemen er zijn. Deze instabiele systemen komen dan voor bij lage waarden voor a , b en c .

6.6 Analyse van de PD-regelaar

De PD-regelaar is $C(s) = k(\gamma_0 + \gamma_2(Ts))$, met $A(s) = k(\gamma_0 + \gamma_2(Ts))$ en $B(s) = 1$. We gaan de stabiliteit na door te kijken naar de nulpunten van

het volgende polynoom (Vergelijking (8)).

$$\begin{aligned}
0 &= B(s)D(s) + A(s)N(s), \\
&= (s^2 + 2as + \mathbf{p}) + k(\gamma_0 + \gamma_2(Ts))(s^2 - 2cs + \mathbf{n}) \\
&= (\gamma_2 kT)s^3 + (1 + \gamma_0 k - 2\gamma_2 Tkc)s^2 \\
&\quad + (2(a - \gamma_0 kc) + \gamma_2 k\mathbf{n}T)s + (\mathbf{p} + \gamma_0 k\mathbf{n}).
\end{aligned} \tag{22}$$

Ook dit is een derdegraads polynoom, dus zie Tabel 2. Polynoom (17) heeft $\lambda_3 = \gamma_2 kT > 0$, dit is triviaal. Nu gelden dus dezelfde voorwaarden voor de λ 's als bij de PI-regelaar.

Nu moet er nog gecontroleerd worden of dit allemaal überhaupt geldt. Als deze voorwaarden gelden, dan is het systeem stabiel. De onderstaande ongelijkheden zijn de onzekerheden die geverifieerd moeten worden.

$$\lambda_2 = (1 + \gamma_0 k - 2\gamma_2 Tkc) > 0, \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3 &= (2(a - \gamma_0 kc) + \gamma_2 k\mathbf{n}T)(1 + \gamma_0 k - 2\gamma_2 Tkc) \\
&\quad - (\mathbf{p} + \gamma_0 k\mathbf{n})\gamma_2 kT > 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Deze ongelijkheden zo algemeen verder behandelen is monnikenwerk, daarom gaan we de regels van Ziegler en Nichols invullen. Dit doen we in de volgende subsectie.

6.7 Ziegler-Nichols toegepast in de PD-regelaar

We hebben in totaal één referentie gevonden voor Ziegler-Nichols regels voor de PD-regelaar, dit is Wikipedia [1], dus deze kan niet heel betrouwbaar zijn. Wikipedia schrijft de waarden $\gamma_0 = \frac{4}{5}$ en $\gamma_1 = \frac{1}{10}$. De PD-regelaar wordt dus:

$$C(s) = \frac{4}{5}K_u \left(1 + \frac{T_u s}{8}\right) \tag{25}$$

Vullen we in Vergelijking (13) $a = b = c = d = 1$ in. Dan krijgen we het volgende systeem:

$$G(s) = \frac{(s-1)^2 + 1}{(s+1)^2 + 1} \tag{26}$$

De K_u en T_u -waarden die hierbij horen zijn volgens Vergelijking (15):

$$\begin{aligned}
K_u &= \frac{a}{c} = 1 \\
T_u &= 2\pi \sqrt{\frac{c+a}{c(a^2+b^2)+a(c^2+d^2)}} = \sqrt{2}\pi
\end{aligned}$$

Substitueren we deze waarden in Vergelijking (25) dan krijgen we de PD-regelaar.

$$C(s) = \frac{4}{5} \left(1 + \frac{\sqrt{2\pi}s}{8} \right)$$

Een systeem is stabiel als Vergelijking (8) negatieve waarden geeft voor de reële delen van s .

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + C(s)G(s) \\ &= 1 + \frac{4}{5} \left(1 + \frac{\sqrt{2\pi}s}{8} \right) \cdot \frac{(s-1)^2 + 1}{(s+1)^2 + 1} \end{aligned}$$

Dit geeft als oplossingen:

$$s \approx -2.31247 \quad \vee \quad s \approx 0.130523 \pm 1.86734i$$

Het reële deel van de laatste oplossing is positief, dus het systeem is niet stabiel. De regel – volgens Wikipedia – van Ziegler-Nichols voor een PD-regelaar werkt niet voor alle tweede-orde systemen, met de vorm (13). ■

6.7.1 Voorwaarden voor een PD-regelaar

In subsectie 6.6 staan geen intervallen voor γ_0 en γ_2 . De waarden die worden voorgeschreven zijn uiteindelijk $\gamma_0 = \frac{4}{5}$ en $\gamma_2 = \frac{1}{10}$ [1]. We nemen Vergelijking (23). Er moet dus gelden:

$$\begin{aligned} 0 &< \lambda_2 \\ &< 1 + \gamma_0 k - 2\gamma_2 T k c \\ &< 1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{a}{c} - 2 \frac{1}{10} T \cdot \frac{a}{c} \\ \Leftrightarrow T &< \frac{4a + 5c}{ac} \end{aligned}$$

Verder geldt volgens Vergelijking (24):

$$\begin{aligned} 0 &< \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3 \\ &< (2(a - \gamma_0 k c) + \gamma_2 k n T) (1 + \gamma_0 k - 2\gamma_2 T k c) - (\mathfrak{p} + \gamma_0 k n) \gamma_2 k T \\ &< \frac{a}{50c} (anT^2 - (5(\mathfrak{p} - n) + 4ac)T + 4(4a + 5c)) \\ \Leftrightarrow 0 &< anT^2 - (5(\mathfrak{p} - n) + 4ac)T + 4(4a + 5c) \\ \Rightarrow T &< \frac{5(n - \mathfrak{p}) - 4ac + \sqrt{(5(n - \mathfrak{p}) - 4ac)^2 + 4an(16a + 20c)}}{2an} \end{aligned}$$

Uitgeschreven in a 's, b 's, c 's en d 's wordt dit:

$$T < \frac{-5(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) - 4ac}{2a(c^2 + d^2)} + \frac{\sqrt{(5(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + 4ac)^2 + 4a(c^2 + d^2)(16a + 20c)}}{2a(c^2 + d^2)}$$

Er geldt dus dat de PD-regelaar voldoet als:

$$T < \min(T_1, T_2)$$

met

$$T_1 = \frac{4a + 5c}{ac}$$

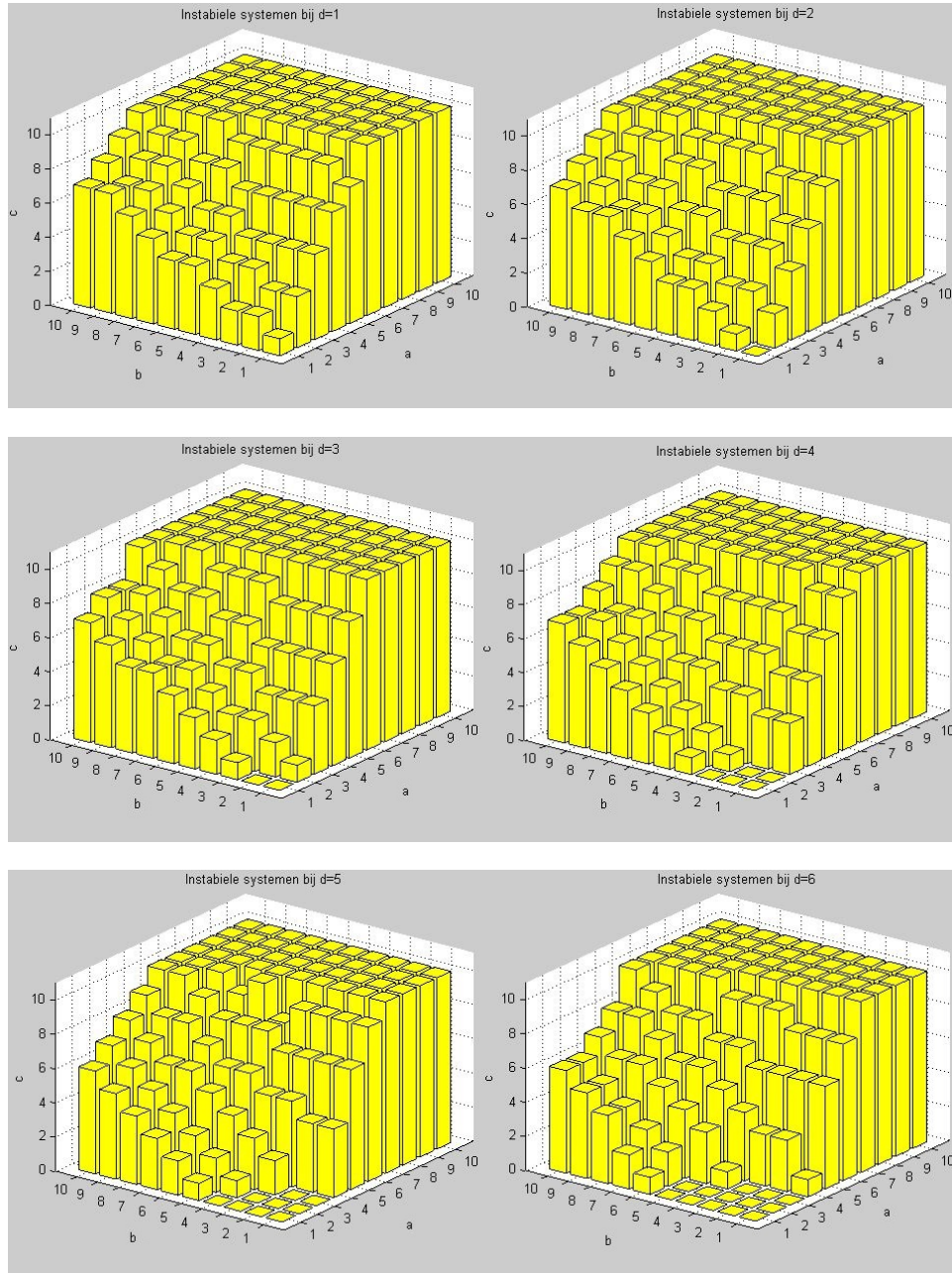
$$T_2 = \frac{-5(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) - 4ac}{2a(c^2 + d^2)} + \frac{\sqrt{(5(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + 4ac)^2 + 4a(c^2 + d^2)(16a + 20c)}}{2a(c^2 + d^2)}$$

6.7.2 Instabiele systemen met een PD-regelaar

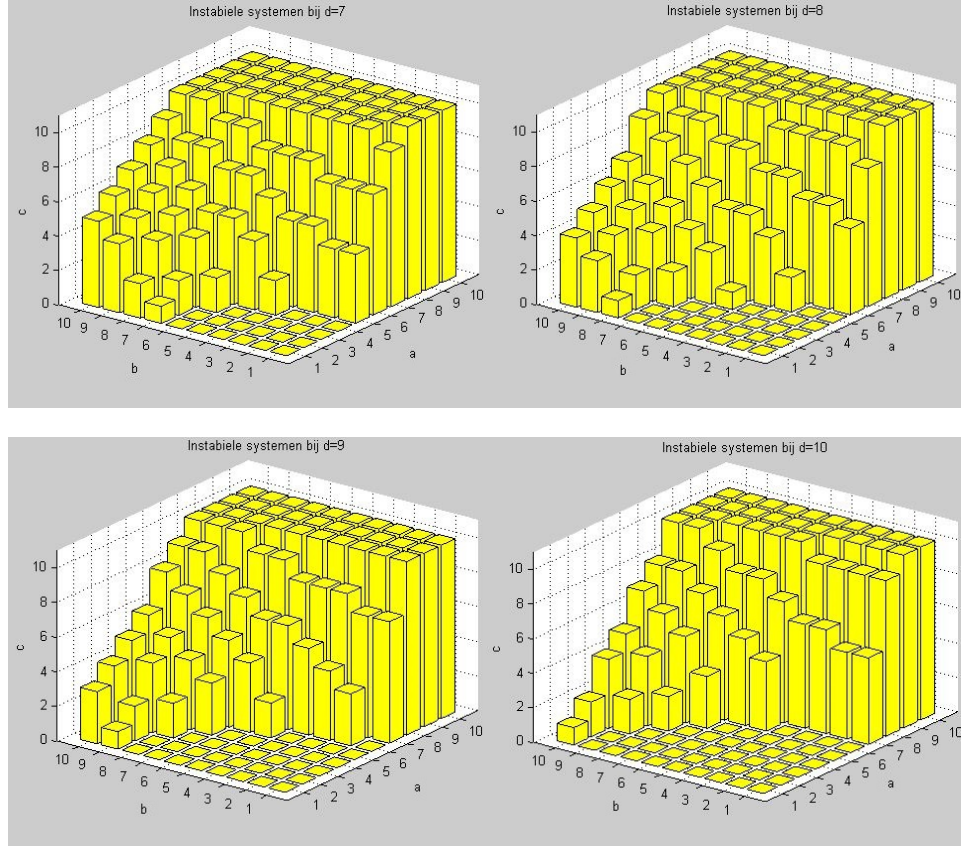
In de onderstaande tabel zien we voor iedere waarde van d het aantal gevonden tegenvoorbeelden binnen de gekozen intervallen, gegeven in Vergelijking (14). In totaal hebben we in dit bereik dus 6.769 tegenvoorbeelden gevonden in 10.000 systemen. De gevonden resultaten hebben we weergegeven in een tabel en in plotjes.

d	1	2	3	4	5
aantal tegenvoorbeelden	827	811	794	762	725
d	6	7	8	9	10
aantal tegenvoorbeelden	683	632	575	513	447

De instabiele systemen lijken niet willekeurig in de plotjes te liggen, maar het lijkt alsof er een vlak bestaat dat de stabiele systemen scheidt van de instabiele systemen. Hoe hoger d , hoe minder instabiele systemen er zijn.



Figuur 5: Instabiele systemen bij $d=1$ tot en met $d=6$.



Figuur 6: Instabiele systemen bij d=7 tot en met d=10.

6.8 Analyse van de PID-regelaar

Wij gaan de stabiliteit na door te kijken naar de nulpunten van het volgende polynoom.

$$\begin{aligned}
 0 &= 1 + C(s)G(s) \\
 \Rightarrow 0 &= (Ts)(s^2 + 2as + p) + k(\gamma_2(Ts)^2 + \gamma_0(Ts) + \gamma_1)(s^2 - 2cs + n) \\
 &= (\gamma_2 k T^2) s^4 + ((1 + \gamma_0 k)T - 2\gamma_2 k c T^2) s^3 \\
 &\quad + (2(a - \gamma_0 k c)T + (\gamma_1 + \gamma_2 n)k T^2) s^2 \\
 &\quad + ((p + \gamma_0 k n)T - 2\gamma_1 k c) s + (\gamma_1 k n).
 \end{aligned} \tag{27}$$

Dit is een polynoom van de vorm $\lambda_4 s^4 + \lambda_3 s^3 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0$. Met de Routh-Hurwitz methode krijgen wij het volgende resultaat, Tabel 3.

λ_4	λ_2	λ_0
λ_3	λ_1	0
$\lambda_2 - \frac{\lambda_4 \lambda_1}{\lambda_3}$	λ_0	0
$\lambda_1 - \frac{\lambda_3 \lambda_0}{\lambda_2 - \frac{\lambda_4 \lambda_1}{\lambda_3}}$	0	0
λ_0	0	0

Tabel 3: Routh-Hurwitz tabel voor een vierdegraads polynoom.

Aangezien uit het polynoom (27) de term $\lambda_4 = \gamma_2 k T^2 > 0$ is, volgt uit Tabel 3 dat $\lambda_i > 0$ met $i \in \{0, 3, 4\}$ moeten gelden. Er moet ook gelden dat $\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4 > 0$ en $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > \lambda_0 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_4$ zijn voor stabiliteit. De oplettende lezer ziet snel dat er automatisch wordt voldaan aan $\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4 > 0$, als $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > \lambda_0 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_4$.

Nu moet er nog gecontroleerd worden of dit allemaal wel echt geldt voor Vergelijking (27). Als deze voorwaarden gelden, dan is het systeem stabiel. De onderstaande ongelijkheden zijn de onzekerheden die geverifieerd moeten worden.

$$\lambda_3 = ((1 + \gamma_0 k)T - 2\gamma_2 k c T^2) > 0 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4 &= (2(a - \gamma_0 k c)T + (\gamma_1 + \gamma_2 \mathbf{n})k T^2) \\ &\quad ((1 + \gamma_0 k)T - 2\gamma_2 k c T^2) \\ &\quad - ((\mathbf{p} + \gamma_0 k \mathbf{n})T - 2\gamma_1 k c) \gamma_2 k T^2 > 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Vanwege de onleesbaarheid van de uitdrukkingen, hebben wij hieronder de laatste onzekerheid apart genoemd, namelijk:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > \lambda_0 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_4. \quad (30)$$

Dit leidt tot de onderstaande bombastische uitdrukking.

$$\begin{aligned} &((\mathbf{p} + \gamma_0 k \mathbf{n})T - 2\gamma_1 k c) \\ &(2(a - \gamma_0 k c)T + (\gamma_1 + \gamma_2 \mathbf{n})k T^2) \\ &((1 + \gamma_0 k)T - 2\gamma_2 k c T^2) > \gamma_1 k \mathbf{n} ((1 + \gamma_0 k)T - 2\gamma_2 k c T^2)^2 \\ &\quad + ((\mathbf{p} + \gamma_0 k \mathbf{n})T - 2\gamma_1 k c)^2 \gamma_2 k T^2. \end{aligned}$$

We gaan deze ongelijkheden nauwkeuriger bekijken wanneer de Ziegler-Nichols regels zijn toegepast. Daar hebben we voor gekozen omdat we na veel proberen geen uitdrukkingen kregen die we met de hand verder kunnen analyseren.

6.9 Ziegler-Nichols toegepast in de PID-regelaar

We hebben het vermoeden dat de PID-regelaar tegenvoorbeelden heeft en dus dat de Ziegler-Nichols regels niet altijd toepasbaar zijn. Gebruiken wij Vergelijking (13) met $a = c = d = 1$ en $b = 4$. Dan krijgen we het volgende systeem:

$$G(s) = \frac{(s-1)^2 + 1}{(s+1)^2 + 16} \quad (31)$$

De K_u en T_u waarde die hierbij horen zijn volgens Vergelijking (15):

$$K_u = \frac{a}{c} = 1$$

$$T_u = 2\pi \sqrt{\frac{c+a}{c(a^2+b^2)+a(c^2+d^2)}} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{19}}$$

Vullen we deze waarden in Vergelijking (4) in dan krijgen we de PID-regelaar van Ziegler en Nichols.

$$C(s) = \frac{3}{5} \cdot 1 \left(1 + \frac{2}{\frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{19}}s} + \frac{\frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{19}}s}{8} \right)$$

$$= \frac{3}{5} \left(1 + \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{2}\pi s} + \frac{\sqrt{2}\pi s}{4\sqrt{19}} \right)$$

Een systeem is stabiel als Vergelijking (8) negatieve waarden geeft voor de reële delen van s . De polen van $H(s)$ bepalen wij hieronder.

$$0 = 1 + C(s)G(s)$$

$$= 1 + \frac{3}{5} \left(1 + \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{2}\pi s} + \frac{\sqrt{2}\pi s}{4\sqrt{19}} \right) \cdot \frac{(s-1)^2 + 1}{(s+1)^2 + 16}$$

Dit geeft als oplossingen:

$$s \approx -8,65835 \quad \vee \quad s \approx -0,0696186 \quad \vee \quad s \approx 0,13145 \pm 3,57176i$$

Het reële deel van de laatste twee oplossingen is positief, dus het systeem is niet stabiel. De Ziegler-Nichols regel voor de PID-regelaar werkt dus niet voor alle tweede-orde systemen. ■

6.9.1 Voorwaarden voor een PID-regelaar

In subsectie 6.8 staan geen intervallen voor γ_0 , γ_1 en γ_2 . De waarden die Ziegler en Nichols voorschrijven komen neer op: $\gamma_0 = \frac{3}{5}$, $\gamma_1 = \frac{6}{5}$ en $\gamma_2 = \frac{3}{40}$, zie Vergelijking (4).

Wij nemen nu de PID-regelaar onder de loep om te kijken of er voorwaarden bestaan, zodat de Ziegler-Nichols regels wel (altijd) voldoen. Nog steeds gebruiken wij het tweede-orde systeem gegeven in Vergelijking (13). We nemen Vergelijking (28). Er moet dus gelden dat:

$$\begin{aligned}
0 &< \lambda_3 \\
&< (1 + \gamma_0 k)T - 2\gamma_2 k c T^2 \\
&< \left(1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{a}{c}\right) T - 2 \cdot \frac{3}{40} a T^2 \\
&< \frac{T}{20c} (20c + 12a - 3acT) \\
&\Leftrightarrow 0 < 20c + 24a - 3acT \\
&\Leftrightarrow T < \frac{4(3a + 5c)}{3ac}.
\end{aligned}$$

Ook geldt Vergelijking (30):

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &> \lambda_0 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_4 \\
&\Leftrightarrow 0 < \lambda_1 \underbrace{\lambda_2 \lambda_3}_{>0} - \underbrace{\lambda_1^2 \lambda_4}_{>0} - \underbrace{\lambda_3^2 \lambda_0}_{>0}
\end{aligned}$$

Dus er moet minstens gelden dat:

$$\begin{aligned}
0 &< \lambda_1 \\
&< 8(T(5(a^2 + b^2) + 3k(c^2 + d^2)) - 12ck) \\
&< 8(T(5(a^2 + b^2) + 3\frac{a}{c}(c^2 + d^2)) - 12a) \\
&< \frac{8}{c}(T(5c(a^2 + b^2) + 3a(c^2 + d^2)) - 12ac) \\
&\Leftrightarrow T > \frac{12ac}{5c(a^2 + b^2) + 3a(c^2 + d^2)}.
\end{aligned}$$

Het uitwerken van Vergelijking (29) geeft een hele lange vergelijking. Met de hierboven gevonden restricties kan al een interval worden gevormd waar

T sowieso in moet liggen, voor een stabiliserende Ziegler-Nichols regelaar. Dit is het interval:

$$\frac{12ac}{5c(a^2 + b^2) + 3a(c^2 + d^2)} < T < \frac{4(3a + 5c)}{3ac}$$

Er kan geen afschatting voor T worden gevonden die onafhankelijk is van de variabelen a , b , c en d . Om dit te illustreren geven we het volgende getallenvoorbeeld.

- $a = b = c = d = \frac{1}{100}$ Hierbij is het interval voor T dus $[75, 1066\frac{2}{3}]$.
- $a = 10$, $b = d = \frac{1}{100}$ en $c = 1$ Hierbij is het interval voor T dus $[\frac{240000}{1060007}, 4\frac{2}{3}]$.

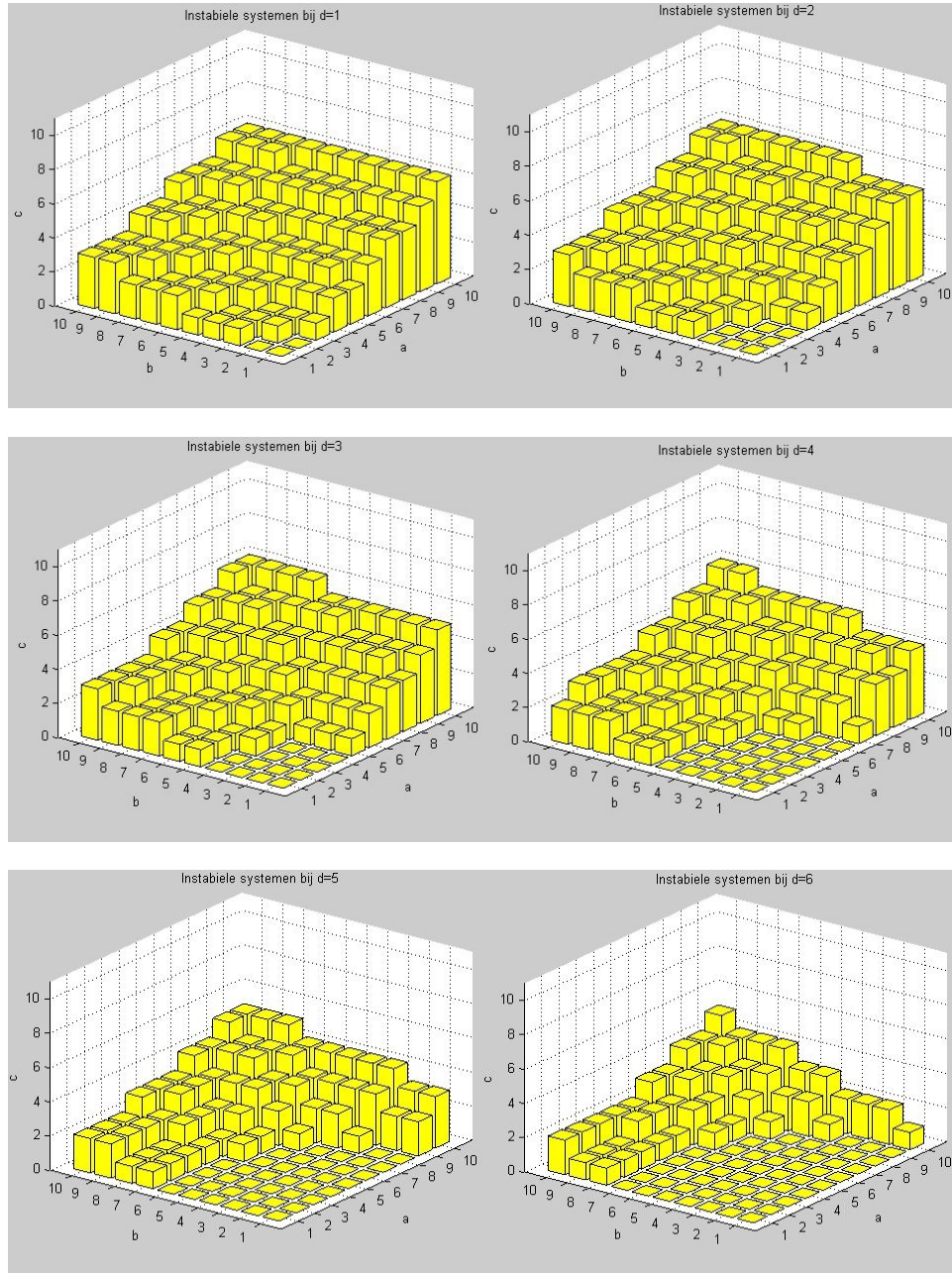
Dit zijn twee disjuncte intervallen, dit betekent dat er geen getallen afschatting kan worden gemaakt voor het interval. ■

6.9.2 Instabiele systemen met een PID-regelaar

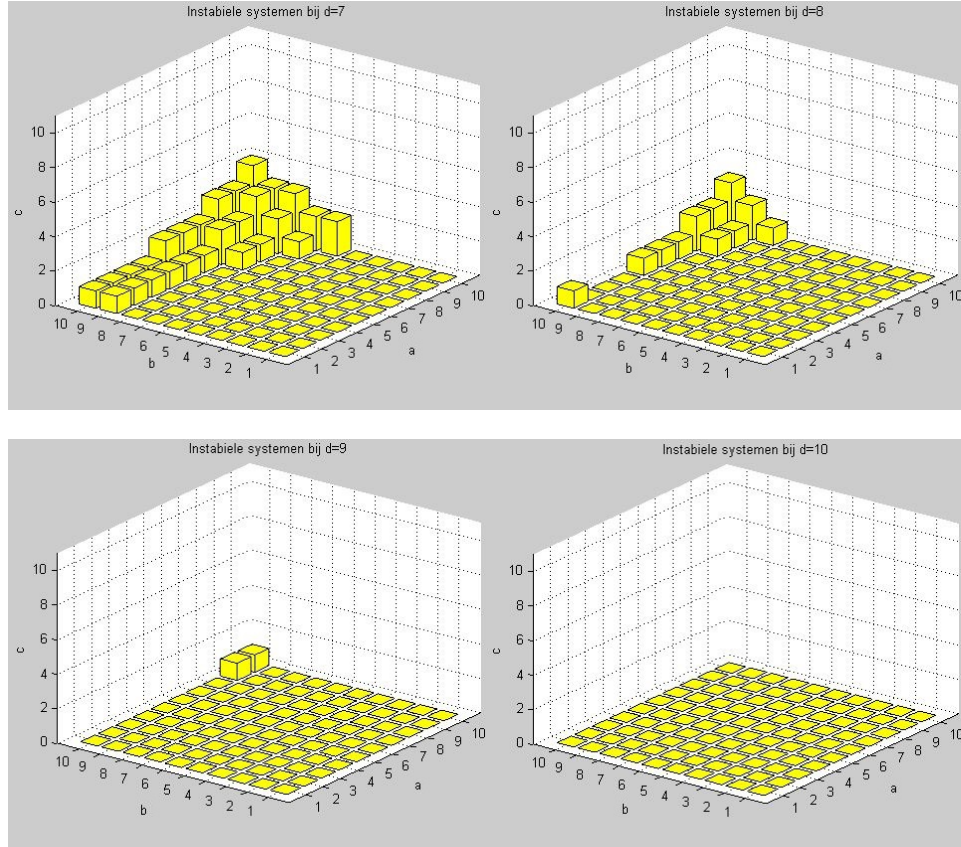
In de onderstaande tabel zien we voor iedere waarde van d het aantal gevonden tegenvoorbeelden binnen de gekozen intervallen, zie Vergelijking (14). In totaal hebben we in dit bereik dus 1.511 tegenvoorbeelden gevonden in 10.000 systemen. De gevonden resultaten hebben we weergegeven in een tabel en in plotjes.

d	1	2	3	4	5
aantal tegenvoorbeelden	352	322	283	227	160
d	6	7	8	9	10
aantal tegenvoorbeelden	101	48	16	2	0

De instabiele systemen lijken wederom niet willekeurig in de plotjes te liggen, maar het lijkt alsof er een vlak bestaat dat de stabiele systemen scheidt van de instabiele systemen. Hoe hoger d , hoe minder instabiele systemen er zijn.



Figuur 7: Instabiele systemen bij $d=1$ tot en met $d=6$.



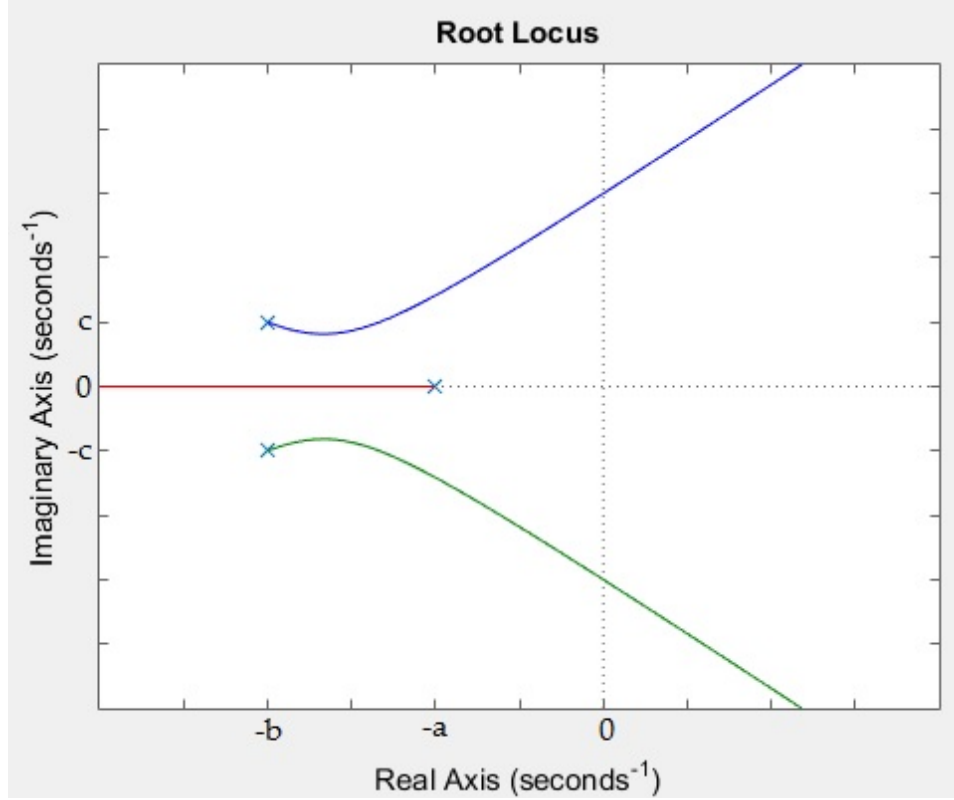
Figuur 8: Instabiele systemen bij $d=7$ tot en met $d=10$.

7 Derde-orde systeem

Tweede-orde systemen hebben niet de resultaten opgeleverd waarop wij hadden gehoopt. Onze begeleider heeft ons daarna op een ander pad geleid. De bewering die hij had gehoord was dat de Ziegler-Nichols regels bedoeld zijn voor systemen die geen instabiele nulpunten hebben. Dit wordt volgens misschien ook geïmpliceerd wel door de keuze van (test)systemen in [9].

Aangezien wij van een stabiel systeem uitgaan moeten de polen een negatief reëel deel hebben en deze liggen dus links van de imaginaire as in de *root-loci* plot. De poolbanen moeten de imaginaire as overgaan. Dit kan op twee manieren: er liggen nulpunten aan de rechterkant van de imaginaire as of de poolbanen lopen naar oneindig. Deze laatste type systemen hebben

geen of minder nulpunten dan polen in hun overdrachtsfunctie. Een illustratief voorbeeld van zo'n *root-loci* plot is te zien in Figuur 9.



Figuur 9: *Root-loci* plot van een willekeurig derdegraads overdrachtsfunctie, met de beschreven vorm Vergelijking (32).

De algemene vorm van de beschreven derdegraads overdrachtsfunctie heeft de onderstaande vorm.

$$G(s) = \frac{1}{(s + a)((s + b)^2 + c^2)} \quad (32)$$

Met $a, b, c > 0$. Deze overdrachtsfunctie zullen wij verder gaan onderzoeken in deze sectie. Duidelijk is dat deze overdrachtsfunctie stabiele polen heeft. Het is echter niet meteen duidelijk (zonder plaatje) dat dit systeem harmonisch kan oscilleren.

Dat er wel degelijk poolbanen de imaginaire as passeren in een *root-loci*

plot kan aangetoond worden. Om dit aan te tonen beginnen we met een analyse van de polen die het systeem met overdrachtsfunctie (5) bevat en maken gebruik van Vergelijking (7).

$$\begin{aligned}
0 &= 1 + C(s)G(s) \\
&= 1 + k \frac{1}{(s+a)((s+b)^2 + c^2)} \\
\Rightarrow 0 &= (s+a)((s+b)^2 + c^2) + k.
\end{aligned} \tag{33}$$

Wij zijn dus geïnteresseerd in de poolbanen van s , oftewel we moeten onderzoeken wat er gebeurt met s als k toeneemt en eventueel willekeurig groot wordt. In dit geval is dat redelijk goed te zien, s moet negatief willekeurig groot worden als k willekeurig groot wordt. Dat betekent echter dat de poolbaan van (deze pool) s niet de imaginaire as passeert.

Als s willekeurig groot wordt ($\lim_{s \rightarrow \pm\infty} s$) in een arbitrair n -polynoom $f(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s^1 + a_0s^0$, dan voegt de term met de hoogste macht meer toe dan de andere termen (met lagere machten). Hier is $n \in \mathbb{N}$ en $a_i \in \mathbb{R}$ met $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

In de limiet van s naar $\pm\infty$ is het dus veel eenvoudiger om s^n te beschouwen als een ruime schatting van ons polynoom dat we onderzoeken.

Nu passen wij deze schatting toe op Vergelijking (33) en onderzoeken deze nieuwe vergelijking verder.

$$\begin{aligned}
0 &= s^3 + k \\
&= (s + \sqrt[3]{k})(s^2 - \sqrt[3]{k}s + \sqrt[3]{k^2}) \\
&= (s + \sqrt[3]{k}) \left(s - \frac{\sqrt[3]{k}}{2} (1 - \sqrt{3}i) \right) \left(s - \frac{\sqrt[3]{k}}{2} (1 + \sqrt{3}i) \right).
\end{aligned}$$

De uiteindelijke factorisatie is verkregen door middel van staartdelen en het toepassen van de *abc*-formule. Verder moet hier duidelijk worden dat twee van de drie poolbanen van s zich aan de rechterkant van de imaginaire as in de *root-loci* plot bevinden, wanneer k dus willekeurig groot wordt.

Onze conclusie is dat (32) gedrag van harmonisch oscilleren kan hebben.

In iedere sectie waarbij we een tegenvoorbeeld vinden, zullen we aandacht schenken aan de mate waarin de regelaar zorgt voor instabiele systemen.

Het doel is dus inzicht te krijgen in de regelaars die niet als gewenst functioneren. De regelaar gegeven in Vergelijking (32), welke een derde-orde overdrachtsfunctie representeert, bevat de drie variabelen $a > 0$, $b > 0$ en $c > 0$. We kunnen niet oneindig veel combinaties langslopen, dus zullen we in dit onderzoek concessies moeten doen. Vandaar dat we telkens zullen voor geheeltallige waarden van a , b en c kiezen, in het bereik:

$$[0, 20] \quad (34)$$

We merken op dat we de afbeeldingen maken met Matlab, waarin de programma's dezelfde stappen uitvoeren als wij in dit verslag. De gebruikte code staat in de Appendix.

7.1 K_u en T_u

Wij passen de methode beschreven in sectie 3 toe, om onze K_u en T_u te bepalen. Hiervoor moeten wij onze $G(s)$ substitueren, met $N(s) = 1$ en $D(s) = (s + a)((s + b)^2 + c^2)$, in Vergelijking (8) en gebruik maken van Vergelijking (7). Uiteindelijk komen wij dan op Vergelijking (10) uit.

$$\begin{aligned} 0 &= D(i\omega) + kN(i\omega) \\ &= (i\omega + a)((i\omega + b)^2 + c^2) + k \\ &= ab^2 + 2iab\omega + ac^2 - a\omega^2 + ib^2\omega - 2b\omega^2 + ic^2\omega + k - i\omega^3 \\ &= -i\omega^3 - (a + 2b)\omega^2 + (2ab + b^2 + c^2)i\omega + (k + a(b^2 + c^2)) \end{aligned}$$

Vanwege de aanwezigheid van een imaginaire deel, volgt hieruit een stelsel van vergelijkingen.

$$\begin{cases} (2ab + b^2 + c^2 - \omega^2)\omega &= 0 \\ a(b^2 + c^2) - (a + 2b)\omega^2 + k &= 0. \end{cases}$$

Uit de eerste vergelijking volgen de oplossingen $\omega = 0$ of $\omega = \pm\sqrt{2ab + b^2 + c^2}$. Zoals gezegd in sectie 3 moet gelden $\omega > 0$. Er geldt dus: $\omega = \sqrt{2ab + b^2 + c^2}$. Hierdoor volgt uit de tweede vergelijking het onderstaande.

$$\begin{aligned} 0 &= a(b^2 + c^2) - (a + 2b)\omega^2 + k \\ \Leftrightarrow k &= (a + 2b)\omega^2 - a(b^2 + c^2) \\ &= (a + 2b)(2ab + b^2 + c^2) - a(b^2 + c^2) \\ &= 2b(2ab + a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 2b((a + b)^2 + c^2) \end{aligned}$$

Volgens Vergelijking (11) zijn de waarden van K_u en T_u dan als volgt:

$$K_u = 2b((a+b)^2 + c^2) \text{ en } T_u = \frac{2\pi}{\sqrt{2ab + b^2 + c^2}} \quad (35)$$

Deze expressies voor K_u en T_u worden vanaf nu in de rest van de secties over de derde-orde gebruikt. Daarnaast zal voor simpliciteit in de komende stukken gebruik worden gemaakt van de notatie $K_u = k$, $T_u = T$.

In de volgende subsecties gaan wij wederom de P-, PI- en PID-regelaar analyseren en vervolgens de Ziegler-Nichols regels toepassen. We gaan onderzoeken wat de gevonden waarden voor K_u en T_u betekenen voor de stabiliteit van het totale systeem met overdrachtsfunctie (6). We gebruiken voor de stabiliteitscheck *Routh-Hurwitz* [4, p. 86]. Daarbij gebruiken wij echter de vorm (1) voor de regelaar. Merk op dat de andere regelaars dezelfde vorm hebben als de PID-regelaar, echter zijn er dan één of meer van de γ 's gelijk aan nul.

In de komende stukken waar de regelaars geanalyseerd worden, willen we meer te weten komen over de waarden die een γ mag aannemen. De γ 's staan namelijk in direct verband met waarden die de Ziegler-Nichols regels beschrijven.

7.2 Analyse van de P-regelaar

De P-regelaar is $C(s) = \gamma_0 k$, met $A(s) = \gamma_0 k$ en $B(s) = 1$. Wij gaan de stabiliteit na door te kijken naar de polen van het totale systeem (5). Dit houdt in dat we kijken naar de nulpunten van Vergelijking (8).

$$\begin{aligned} 0 &= B(s)D(s) + A(s)N(s) \\ &= (s+a)((s+b)^2 + c^2) + \gamma_0 k \\ &= s^3 + (a+2b)s^2 + (2ab + b^2 + c^2)s + (\gamma_0 k + a(b^2 + c^2)) \end{aligned} \quad (36)$$

Polynoom (36) heeft als $\lambda_3 = 1 > 0$, dit is triviaal. Met deze informatie volgt uit Tabel 2, dat $\lambda_i > 0$ moet gelden voor $i \in \{0, 2\}$ en dat $\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3 > 0$. De Ultimate Gain (K_u) moet groter zijn dan nul, zoals beschreven staat in sectie 2. Dus er moet gelden $\gamma_0 > 0$. Anders gezegd, met onze aannames is

het triviaal dat $\lambda_i > 0$ met $i \in \{0, 2, 3\}$. De laatste ongelijkheid geeft:

$$\begin{aligned}
0 &< \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3 \\
&< (a + 2b)(2ab + b^2 + c^2) - \gamma_0 k - a(b^2 + c^2) \\
&< 2b(2ab + b^2 + c^2) + 2a^2 b - \gamma_0 k \\
&< k - \gamma_0 k \\
&< k(1 - \gamma_0).
\end{aligned} \tag{37}$$

Uit Vergelijking (37) volgt dat voor een stabiliserende P-regelaar moet gelden: $0 < \gamma_0 < 1$. Het is wederom net zo intuïtief als voor het geval van de tweede-orde, beschreven in subsectie 6.2.

7.3 Ziegler-Nichols toegepast in de P-regelaar

In subsectie 7.2 staat als $0 < \gamma_0 < 1$ dan maakt de P-regelaar het systeem stabiel. De Ziegler-Nichols regels schrijven $\gamma_0 = \frac{1}{2}$ voor (Vergelijking (2)) en maaken het systeem dus stabiel.

7.4 Analyse van de PI-regelaar

De PI-regelaar is van dezelfde vorm als beschreven in subsectie 6.4. Zoals al vaker gedaan gebruiken we Vergelijking (8). We bepalen in deze sectie opnieuw een interval voor γ_0 , maar ook voor γ_1 . Er moet rekening mee worden gehouden dat dit wel een andere γ_0 is met een mogelijk ander interval dan de γ_0 die beschreven werd in vorige secties.

$$\begin{aligned}
0 &= B(s)D(s) + A(s)N(s) \\
&= Ts(s + a)((a + b)^2 + c^2) + k(\gamma_0 Ts + \gamma_1) \\
&= Ts^4 + (a + 2b)Ts^3 + (2ab + b^2 + c^2)Ts^2 \\
&\quad + (a(b^2 + c^2) + \gamma_0 k)Ts + \gamma_1 k.
\end{aligned} \tag{38}$$

Dit polynoom heeft de vorm $\lambda_4 s^4 + \lambda_3 s^3 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0$, waarvan we net als vele andere keren willen weten of dit stabiel is. Aangezien $\lambda_4 > 0$ is en we de *Routh-Hurwitz* methode gebruiken volgt uit Tabel 3 dat $\lambda_i > 0$ met $i \in \{0, 3, 4\}$ en $\lambda_2 \lambda_3 > \lambda_1 \lambda_4$ en $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > \lambda_0 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_4$ moet gelden.

7.4.1 Algemene voorwaarden voor de PI-regelaar

Aan de voorwaarden $\lambda_i > 0$ met $i \in \{0, 3, 4\}$ wordt sowieso voldaan, dit volgt direct uit het polynoom. Daarom gaan we kijken naar de andere

ongelijkheden. We beginnen met de eerste ongelijkheid.

$$\begin{aligned}
& \lambda_2 \lambda_3 > \lambda_1 \lambda_4 \\
& \Leftrightarrow 0 < \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4 \\
& < T^2(a + 2b)(2ab + b^2 + c^2) - T^2(a(b^2 + c^2) + \gamma_0 k) \\
& < T^2(2b((a + b)^2 + c^2) - \gamma_0 k) \\
& < T^2(k - \gamma_0 k) \\
& < kT^2(1 - \gamma_0).
\end{aligned} \tag{39}$$

Dit is met behulp van Vergelijking (35) uitgewerkt. Er volgt direct uit dat $0 < \gamma_0 < 1$. Nu gaan we verder met het uitwerken van de andere ongelijkheid waaraan voldaan moet worden.

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > \lambda_0 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_4 \\
& \Leftrightarrow 0 < \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_3^2 - \lambda_1^2 \lambda_4 \\
& < \lambda_1(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4) - \lambda_0 \lambda_3^2 \\
& < \lambda_1(kT^2(1 - \gamma_0)) - \gamma_1 k(a + 2b)^2 T^2 \\
& < kT^2(\lambda_1(1 - \gamma_0) - \gamma_1(a + 2b)^2)
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
& < kT^2 \left(\frac{\lambda_1}{T}(1 - \gamma_0)T - \gamma_1(a + 2b)^2 \right) \\
& < \frac{kT^2}{\omega} ((a(b^2 + c^2) + \gamma_0 k) 2\pi(1 - \gamma_0) - \gamma_1(a + 2b)^2 \omega) \\
& \Rightarrow 0 < (a(b^2 + c^2) + \gamma_0 k) 2\pi(1 - \gamma_0) - \gamma_1(a + 2b)^2 \omega.
\end{aligned} \tag{41}$$

We gaan nu proberen een ruwe afchatting te maken die of op zijn minst kleiner of gelijk is aan Vergelijking (41), want op dit punt kunnen we niet veel meer. Hiervoor definiëren we eerst $\min(a, b, c) := m$, $\max(a, b, c) := M$ en dus geldt $0 < m \leq M$.

Nu gaan we verder met het bewerken van Vergelijking (41). Uit Vergelijking (39) volgde $0 < \gamma_0 < 1$ en dus is de factor $(1 - \gamma_0) > 0$. Met behulp

van elementaire functie analyse komen we op wat hieronder staat.

$$\begin{aligned}
& (a(b^2 + c^2) + \gamma_0 k) 2\pi(1 - \gamma_0) \\
& - \gamma_1(a + 2b)^2 \omega = 2\pi(1 - \gamma_0) \\
& \quad - \gamma_1(a + 2b)^2 \sqrt{2ab + b^2 + c^2} \\
& \geq 2\pi(1 - \gamma_0)(2m^3 + 10\gamma_0 m^3) \\
& \quad - \gamma_1(3M)^2 2M \\
& \geq 4\pi(1 - \gamma_0)(1 + 5\gamma_0)m^3 - 18\gamma_1 M^3. \quad (42)
\end{aligned}$$

Uit Vergelijking (42) kan $0 < \gamma_1 < \frac{2\pi}{9}(1 - \gamma_0)(1 + 5\gamma_0) \left(\frac{m}{M}\right)^3$ worden afgeleid. Nu volgt dus het volgende voorschrift, afhankelijk van het gegeven systeem (ratio tussen minimum en maximum van de parameters).

$$0 < \gamma_0 < 1, \quad (43)$$

$$0 < \gamma_1 < \frac{2\pi}{9}(1 - \gamma_0)(1 + 5\gamma_0) \left(\frac{m}{M}\right)^3 \quad (44)$$

Het moge duidelijk zijn dat er een aanzienlijke invloed is van het systeem of het stabiel is met de PI-regelaar of niet (zie de ratio). Het voordeel is wel dat met deze uitdrukking en bekende γ_0 en γ_1 eventueel een makkelijke formule te achterhalen is, zodat stabiliteit eenvoudig geverifieerd kan worden. Let wel op dat er mogelijk betere (en fijnere) afschattingen mogelijk zijn.

7.5 Ziegler-Nichols toegepast in de PI-regelaar

We hebben het vermoeden dat de PI-regelaar tegenvoorbeelden heeft en dus dat de Ziegler-Nichols regels niet altijd kloppen. Dit vermoeden komt voort uit Vergelijking (42) en het feit dat we dit niet veel mooier konden maken. Gebruiken wij nu Vergelijking (32) met $a = 16$ en $b = c = 1$. Dan krijgen wij het volgende derde-orde systeem:

$$G(s) = \frac{1}{(s + 16)((s + 1)^2 + 1)} \quad (45)$$

De K_u en T_u waarden die hierbij horen zijn volgens Vergelijking (35):

$$\begin{aligned}
K_u &= 2b((a + b)^2 + c^2) = 580 \\
T_u &= \frac{2\pi}{\sqrt{2ab + b^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{2}{17}}\pi
\end{aligned}$$

Gebruiken wij de verkregen waarde in Vergelijking (3) dan krijgen wij een PI-regelaar op basis van de Ziegler-Nichols regels. De regelaar krijgt dan de onderstaande vorm.

$$\begin{aligned}
C(s) &= \frac{9K_u(5T_us + 6)}{100T_us} \\
&= \frac{9 \cdot 580(5\sqrt{\frac{2}{17}}\pi s + 6)}{100\sqrt{\frac{2}{17}}\pi s} \\
&= \frac{261(3\sqrt{34} + 5\pi s)}{5\pi s} = \frac{A(s)}{B(s)} \tag{46}
\end{aligned}$$

Een systeem is stabiel als Vergelijking (6) negatieve waarden geeft voor de reële delen van s . Deze vergelijking vullen we in met Vergelijking (45) en Vergelijking (46).

$$\begin{aligned}
0 &= B(s)D(s) + A(s)N(s) \\
&= 5\pi s \cdot (s + 16)((s + 1)^2 + 1) + 261(3\sqrt{34} + 5\pi s)
\end{aligned}$$

Dit geldt voor:

$$s \approx -16,9543 \quad \vee \quad s \approx -1,0532 \quad \vee \quad s \approx 0,0037 \pm 4,0347i$$

Het reële deel van de laatste twee oplossingen is positief, dus het polynoom en dus het systeem is niet stabiel. Dus de Ziegler-Nichols regels voor een PI-regelaar werken niet voor alle derde-orde systemen. ■

Omdat de Ziegler-Nichols PI-regelaar niet voor alle derde-orde systemen geldt, gaan we voorwaarden opstellen waaronder de regels wel werken.

7.5.1 Voorwaarden voor een PI-regelaar

In subsubsectie 7.4.1 staan intervallen voor voor γ_0 en γ_1 . De waarden die worden voorgeschreven voor γ_0 en γ_2 zijn volgens de Ziegler-Nichols regels: $\gamma_0 = \frac{9}{20}$ en $\gamma_1 = \frac{27}{50}$, zie Vergelijking (3).

Het interval voor γ_0 is beschreven in Vergelijking (43), hier staat dat moet gelden $0 < \gamma_0 < 1$. Aangezien Ziegler-Nichols $\gamma_0 = \frac{9}{20}$ hebben, ligt γ_0 in dit interval.

Het interval voor γ_1 is beschreven in Vergelijking (44). Sowieso moet gelden $0 < \gamma_1$. Aangezien Ziegler en Nichols $\gamma_1 = \frac{27}{50}$ hebben voorgeschreven, is ook hieraan voldaan. De andere voorwaarde beschreven in Vergelijking (44)

werken we hieronder verder uit:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &< \frac{2\pi}{9}(1 - \gamma_0)(1 + 5\gamma_0) \left(\frac{m}{M}\right)^3 \\
\frac{27}{50} &< \frac{2\pi}{9}\left(1 - \frac{9}{20}\right)\left(1 + 5 \cdot \frac{9}{20}\right) \left(\frac{m}{M}\right)^3 \\
&< \frac{143\pi}{360} \cdot \left(\frac{m}{M}\right)^3 \\
\Leftrightarrow \left(\frac{m}{M}\right)^3 &> \frac{972}{715\pi}
\end{aligned} \tag{47}$$

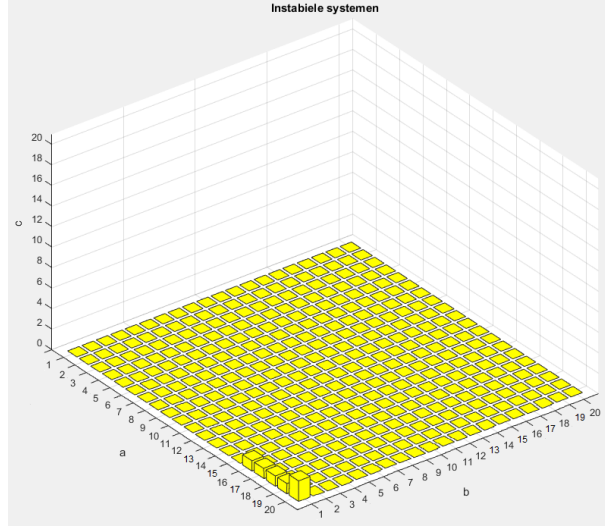
Deze ongelijkheid moet sowieso gelden, maar het kan ook preciezer. Hiervoor kijken we niet naar m en M , maar we gaan kijken naar Vergelijking (40):

$$\begin{aligned}
0 &< kT^2 (\lambda_1(1 - \gamma_0) - \gamma_1(a + 2b)^2) \\
\Rightarrow 0 &< \lambda_1(1 - \gamma_0) - \gamma_1(a + 2b)^2 \\
0 &< \left(a(b^2 + c^2) + \frac{9}{20}k\right) T \left(1 - \frac{9}{20}\right) - \frac{27}{50}(a + 2b)^2 \\
&< \frac{1}{400}(11T(20a(b^2 + c^2) + 9k) - 216(a + 2b)^2) \\
&< \frac{1}{200}(11T(9b(a^2 + b^2 + c^2) + 2a(14b^2 + 5c^2)) - 108(a + 2b)^2) \\
\Rightarrow 0 &< 11T(9b(a^2 + b^2 + c^2) + 2a(14b^2 + 5c^2)) - 108(a + 2b)^2 \\
\Rightarrow T &> \frac{108(a + 2b)^2}{11(9b(a^2 + b^2 + c^2) + 2a(14b^2 + 5c^2))}
\end{aligned} \tag{48}$$

Als er dus een systeem is, dan moet minimaal Vergelijking (47) gelden, hierbij is $m = \min(a, b, c)$ en $M = \max(a, b, c)$. Als dit geldt, hoeft er verder niets meer gecheckt te worden. Mocht Vergelijking (47) niet gelden, dan moet Vergelijking (48) gecontroleerd worden. Als deze wel geldt, dan zorgt de Ziegler-Nichols PI-regelaar voor een stabiel systeem. Als deze niet geldt, dan wordt het systeem instabiel gemaakt door de Ziegler-Nichols PI-regelaar.

7.5.2 Instabiele systemen met een PI-regelaar

Met a , b en c binnen de gekozen intervallen, zie Vergelijking (34), hebben we in totaal 6, van een totaal van 8.000, systemen gevonden waarbij de Ziegler-Nichols regels voor een PI-regelaar niet werken. Deze systemen hebben een hoge waarde voor a en een lage waarde voor b en c . Dit is ook te zien in Figuur 10.



Figuur 10: Instabiele systemen bij een PI regelaar.

7.6 Analyse van de PID-regelaar

De overdrachtsfunctie van de PID-regelaar is van de vorm (1). Wij gaan de stabiliteit na door te kijken naar de nulpunten van het volgende polynoom (Vergelijking (8)):

$$\begin{aligned}
 0 &= B(s)D(s) + A(s)N(s) \\
 &= Ts(s+a)((s+b^2)^2 + c^2) + k(\gamma_2(Ts)^2 + \gamma_0Ts + \gamma_1) \\
 &= Ts^4 + (a+2b)Ts^3 + ((2ab+b^2+c^2) + \gamma_2kT)Ts^2 \\
 &\quad + (a(b^2+c^2) + \gamma_0k)Ts + \gamma_1k.
 \end{aligned} \tag{49}$$

Dit is een polynoom van de vorm $\lambda_4s^4 + \lambda_3s^3 + \lambda_2s^2 + \lambda_1s + \lambda_0$. Wederom maken wij gebruik van de Routh-Hurwitz methode. Het resultaat is al bekend bij ons en is te zien de Tabel 3.

Ook hier is $\lambda_4 = T > 0$ en dus volgt dat $\lambda_i > 0$ met $i \in \{0, 3, 4\}$ en $\lambda_2\lambda_3 > \lambda_1\lambda_4$ en $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 > \lambda_0\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_4$ moeten gelden, zodat het systeem met overdrachtsfunctie (5) stabiel is.

7.6.1 Algemene voorwaarden voor de PID-regelaar

In tegenstelling tot het tweede-orde systeem hebben wij nu meer vertrouwen in het vinden van mogelijke intervallen voor onze γ 's. Daarom behandelen

we de ongelijkheden apart en niet zoals in sectie 6. Let op dat de γ 's die in deze sectie worden behandeld apart staan van de γ 's in andere secties.

$$\begin{aligned}
& \lambda_2 \lambda_3 > \lambda_1 \lambda_4 \\
& \Leftrightarrow 0 < \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4 \\
& < T^2(a+2b) \left((2ab + b^2 + c^2) + \gamma_2 k T \right) - T^2(a(b^2 + c^2) + \gamma_0 k) \\
& < T^2(2b((a+b)^2 + c^2) + (a+2b)\gamma_2 k T - \gamma_0 k) \\
& < T^2(k + (a+2b)\gamma_2 k T - \gamma_0 k) \\
& < k T^2(1 - \gamma_0 + (a+2b)\gamma_2 T). \tag{50}
\end{aligned}$$

Het moge duidelijk zijn dat $0 < \gamma_0 < 1 + (a+2b)\gamma_2 T$ moet gelden wil deze ongelijkheid gelden. Merk verder op dat er gebruik is gemaakt van Vergelijking (35). Het vervelende aan dit interval voor γ_0 is dat het afhankelijk is van het gegeven systeem. Toch kan er afgeleid worden dat deze ongelijkheid wel altijd opgaat, wanneer er geldt $0 < \gamma_0 < 1$.

We maken weer gebruik van een (ruwe) afchatting, met $\min(a, b, c) := m$ en $\max(a, b, c) := M$. Verder gebruiken we de uitdrukking voor T die gevonden is in Vergelijking (35) om de afchatting te maken.

$$\begin{aligned}
1 + (a+2b)\gamma_2 T & \geq 1 + 3m\gamma_2 \frac{2\pi}{2M} \\
& = 1 + 3\pi\gamma_2 \left(\frac{m}{M} \right). \tag{51}
\end{aligned}$$

Hieruit volgt een ander, afgeschat, interval voor γ_0 : $0 < \gamma_0 < 1 + 3\pi\gamma_2 \left(\frac{m}{M} \right)$. Nu kan er dus ook een $\gamma_0 > 1$ voorkomen, dat geval is vooral later van belang. Merk op dat de restterm $3\pi\gamma_2 \left(\frac{m}{M} \right)$ naar nul gaat als het verschil tussen m en M willekeurig groot wordt.

Let op dat dit interval wederom afhankelijk is van het gegeven systeem, echter is het afhankelijk van de minimum en maximum waarden voor a, b, c . Dat zorgt voor een veel transparantere uitdrukking, dan de afhankelijkheid die er hiervoor was.

Nu gaan we verder met de andere ongelijkheid en zullen hiervoor probe-

ren een interval, dan wel voorwaarden te vinden.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &> \lambda_0 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_4 \\
\Leftrightarrow 0 &< \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_3^2 - \lambda_1^2 \lambda_4 \\
&< \lambda_1 (\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4) - \lambda_0 \lambda_3^2 \\
&< \lambda_1 (kT^2(1 - \gamma_0 + (a + 2b)\gamma_2 T)) - \gamma_1 k(a + 2b)^2 T^2 \\
&< kT^2 (\lambda_1(1 - \gamma_0 + (a + 2b)\gamma_2 T) - \gamma_1(a + 2b)^2) \\
&< kT^2 \left(\frac{\lambda_1}{T}(a + 2b)\gamma_2 T^2 + \frac{\lambda_1}{T}(1 - \gamma_0)T - \gamma_1(a + 2b)^2 \right) \\
&< \frac{kT^2}{\omega^2} \left(\frac{\lambda_1}{T}4\pi^2\gamma_2(a + 2b) + \frac{\lambda_1}{T}2\pi(1 - \gamma_0)\omega - \gamma_1(a + 2b)^2\omega^2 \right) \\
\Leftrightarrow 0 &< \frac{\lambda_1}{T}4\pi^2\gamma_2(a + 2b) + \frac{\lambda_1}{T}2\pi(1 - \gamma_0)\omega - \gamma_1(a + 2b)^2\omega^2 \quad (52)
\end{aligned}$$

Er zijn in deze bewerking verschillende aannames en voorgaande resultaten gebruikt. Zoals Vergelijkingen (35) en (50) en de uitdrukking voor λ_1 (zie het polynoom van deze sectie). We gaan nu verder met de gevonden uitdrukking (52). In tegenstelling tot Vergelijking (41) kunnen we met Vergelijking (52) nog verder gaan met uitwerken.

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{\lambda_1}{T}4\pi^2\gamma_2(a + 2b) + \frac{\lambda_1}{T}2\pi(1 - \gamma_0)\omega - \gamma_1(a + 2b)^2\omega^2 \\
&< 4\pi^2 (a(b^2 + c^2) + \gamma_0 k) (a + 2b) + 2\pi (a(b^2 + c^2) + \gamma_0 k) (1 - \gamma_0)\omega \\
&\quad - \gamma_1(a + 2b)^2\omega^2 \\
&< (a + 2b) (4\pi^2\gamma_2 (a(b^2 + c^2) + \gamma_0 k) - \gamma_1(a + 2b)^2(2ab + b^2 + c^2)) \\
&\quad + 2\pi (a(b^2 + c^2) + \gamma_0 k) (1 - \gamma_0)\omega \\
&< (a + 2b) (a(b^2 + c^2)(4\pi^2\gamma_2 - \gamma_1) + k(4\pi^2\gamma_0\gamma_2 - \gamma_1)) \\
&\quad + 2\pi (a(b^2 + c^2) + \gamma_0 k) (1 - \gamma_0)\omega. \quad (53)
\end{aligned}$$

Het verder uitwerken geeft precies waar we al bang voor waren, de ratio afhankelijk van het gegeven systeem. Het probleem kwam naar voren bij het uitwerken van Vergelijking (41) en Vergelijking (52) en dat is de term $\lambda_0 \lambda_3^2$. Daar komt namelijk γ_1 in voor.

De makkelijkste conclusie die uit Vergelijking (53) gehaald kan worden zijn de volgende voorwaarden.

$$0 < \gamma_0 \leq 1, \quad (54)$$

$$0 < \gamma_1 < 4\pi^2\gamma_2, \quad (55)$$

$$0 < \gamma_1 < 4\pi^2\gamma_0\gamma_2. \quad (56)$$

Dit stukje verdient wel een beetje uitleg. Zo is Vergelijking (56) een iets scherpere voorwaarde dan Vergelijking (55). In het geval dat $\gamma_0 = 1$, dan zijn de twee eerder genoemde voorwaarden hetzelfde.

De oplettende lezer vraagt zich vast af wat er gebeurt als $\gamma_0 > 1$, want dat is mogelijk volgens Vergelijking (39). We hebben geprobeerd op een brute-force wijze dit af te schatten, maar ons werd meteen duidelijk dat die afchatting veel te ruw is. Tot op heden hebben we nog geen elegante afchatting kunnen maken.

7.7 Ziegler-Nichols toegepast in de PID-regelaar

De γ -waarden die Ziegler en Nichols voorschrijven zijn: $\gamma_0 = \frac{3}{5}$, $\gamma_1 = \frac{6}{5}$ en $\gamma_2 = \frac{3}{40}$, zie Vergelijking (4). We hebben er vertrouwen in dat de regels van Ziegler en Nichols werken voor de PID-regelaar, dus we gaan de vergelijkingen uit de vorige sectie verder analyseren. Vergelijking (54) geldt sowieso.

Omdat $\gamma_0 < 1$, hoeven we alleen Vergelijking (56) te controleren omdat dit dan een kleinere bovengrens is dan Vergelijking (??):

$$0 < \gamma_1 = \frac{6}{5} < \frac{9\pi^2}{50} = 4\pi^2\gamma_0\gamma_2$$

Aan deze vergelijking wordt dus voldaan, dus zorgt de PID-regelaar van Ziegler-Nichols voor een stabiel derde-orde systeem. ■

Conclusie

De regels die J.G. Ziegler en N.B. Nichols hadden bedacht, werken niet altijd. Het probleem van de regels is dat ze niet afhankelijk zijn van het systeem waarin ze zijn ingebouwd. Bij verschillende systemen zullen de regels daardoor niet zorgen voor een gestabiliseerd systeem. Er wordt in de literatuur echter niets concreet gezegd over wanneer de regels van Ziegler en Nichols gebruikt kunnen worden om een systeem te laten stabiliseren. Ook vinden we nergens informatie over het bestaan van typen systemen die wél in iedere situatie werken onder hun regels.

Het is zelfs zo dat in verschillende handboeken over de PID-regelaar de regels worden gepresenteerd, maar dat er niet in wordt vermeld dat de regels soms niet werken, hiermee bedoelen we dus stabiliseren ([8] is hier een uitzondering op).

In ons onderzoek hebben we gekeken naar de mogelijkheid tot het doen van concrete uitspraken over de hierboven genoemde feiten. Daarin hebben we de regels van Ziegler en Nichols als een leidraad door ons verslag laten lopen. Ons onderzoek zou echter uitgebreid kunnen worden naar meer algemene vormen.

Op eerste-orde systemen zijn de regels van Ziegler en Nichols niet toe te passen.

Ook is tegen onze verwachting in gebleken, dat het tweede-orde systeem (13) niet altijd stabiel zal zijn onder de Ziegler-Nichols regels. De P-regelaar zal wel altijd werken (zie subsectie 6.2), maar de PI- en PID-regelaar werken niet altijd (zie subsectie 6.5 en subsectie 6.9). Voor de laatste twee genoemde regelaars hebben we wel voorwaarden kunnen vinden wanneer ze zullen werken. Deze zijn echter dusdanig complex dat er geen sprake is van gebruiksgemak.

Vervolgens hebben we een algemeen derde-orde systeem bekeken (32) en daar hebben we interessante resultaten bij gevonden. Voor dit systeem werken twee van de drie Ziegler-Nichols regels altijd. De P- en PID-regelaar zorgen er namelijk allebei voor dat het systeem (wederom) stabiliseert. Alleen de PI-regelaar hoeft niet altijd te werken. In tegenstelling tot het tweede-orde systeem hebben we voor alle drie de regelaars, minder complexe, algemene voorwaarden gevonden (zie subsectie 7.2, subsubsectie 7.4.1 en subsubsectie 7.6.1). In twee gevallen voldoen de regels van Ziegler en Nichols daar dus aan. In het geval van de PI-regelaar spreken we wel van een ruwe afschatting.

Discussie

In ons onderzoek hebben we speciale gevallen van de tweede-orde en derde-orde systemen onder de loep genomen. Voor beide systemen is naar voren gekomen dat de P-regelaar volgens de regels van Ziegler en Nichols werkt (in de zin van stabiliseren). Ook hebben wij de reden van dit werken uitgelegd en dat het redelijk goed te begrijpen valt. Ons vermoeden is dat de P-regelaar voor alle systemen zal zorgen voor stabiliteit, wanneer de regels van Ziegler en Nichols worden toegepast zoals wij dat hebben gedaan. Wij zijn echter niet meer in staat geweest om hier een goed bewijs voor te leveren. Wel verwachten we dat dit niet heel lastig moet zijn.

Naast de systemen die wij hebben bekeken, zouden we ook kunnen kijken naar systemen met een hogere orde. In de regeltechniek komen verschillende soorten systemen voor. Het is ons echter onduidelijk of systemen met hogere orde veelvuldig voorkomen. Dit vinden wij wel belangrijk te weten, wanneer we er verder onderzoek naar zouden doen.

Wij denken dat er nog beter onderzoek gedaan kan worden naar systemen met poolbanen die naar oneindig lopen, in de *root-loci* plot. Zelf hadden we misschien dus ook meer typen systemen moeten bekijken. In ieder geval zou het interessant zijn, om systemen die geen nulpunten hebben verder te onderzoeken. Ook kan worden gekeken naar systemen die minder nulpunten dan polen bevatten. Het vermoeden dat de regels van Ziegler en Nichols bij dit soort systemen werken, is namelijk uitgesproken door personen die al langer in de regeltechniek zitten dan wij. Helaas zullen de systemen dan wel ad hoc bekeken moeten worden.

Naar ons inzicht, lijkt het erop dat het zeer lastig zal zijn om algemene, maar concrete, voorwaarden te vinden die de toepasbaarheid van een PI- of PID-regelaar garanderen. Wij hebben dit vermoeden doordat verschillende systemen, verschillende verbanden vertonen tussen de Ultimate Gain en Ultimate Period.

Referenties

- [1] Ziegler-nichols method. http://en.wikipedia.org/wiki/Ziegler%E2%80%93Nichols_method. last modified: 10 December 2014.
- [2] I. Boiko. *Non-Parametric Tuning of PID Controllers*. Springer, 2013. DOI: 10.1007/978-1-4471-4465-6.
- [3] L. Desborough and R. Miller. Increasing customer value of industrial control performance monitoring honeywells experience. *AIChE Symposium Series*, 98(326), 2002. Sixth International Conference on Chemical Process Control.
- [4] G. Meinsma en A. van der Schaft. Inleiding wiskundige systeemtheorie, April 2014.
- [5] J.G. Ziegler en N.B. Nichols. Optimum settings for automatic controllers. *ASME Transactions*, 64:759–768, 1942.
- [6] H. Kwakernaak en R. Sivan. *Linear Optimal Control Systems*. 1972.
- [7] F.M. Reza. Some mathematical properties of root loci for control system design. *American Institute of Electrical Engineers, Part I: Communication and Electronics*, ..., 75:103–108, 1956.
- [8] K.J. Åström en T. Hägglund. *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*. Instrument Society of America, 2 edition, 1995.
- [9] K.J. Åström en T. Hägglund. Revisiting the ziegler-nichols tuning rules for pi control part ii the frequency response method. *Asian Journal of Control*, 6:469–482, 2004.
- [10] K.J. Åström en T. Hägglund. Revisiting the ziegler-nichols step response method for pid control. *Journal of Process Control*, 16:635–650, 2004.

Appendix

beginSettings

```
1 % maakt van s een variabele
2 s = sym('s');
```

make2ndOrdeFunction

```
1 function P = make2ndOrdeFunction(a,b,c,d)
2     beginSettings;
3     P = ((s-c)^2 + d^2)/((s+a)^2 + b^2);
4 end
```

make3rdOrdeFunction

```
1 function P = make3rdOrdeFunction(a,b,c)
2     beginSettings;
3     P = (1/((s+a)*((s+b)^2+c^2)));
4 end
```

getTransferFunction

```
1 function H = getTransferFunction(P,K,system)
2     if strcmp(system, 'geslotenlus')
3         % Geeft de transferfunction voor een geslotenlus-
4         % systeem in de vorm:
5         %
6         %   r      e +-----+   +-----+   y
7         %   ->--o---+ K +---+ P +---+--->
8         %   -|   +-----+   +-----+   |
9         %   |   +-----+   +-----+   |
10        %   +-----+
11        H = simplify((P*K)/(1+P*K));
12    elseif strcmp(system, 'open')
13        % Geeft de transferfunction voor een geslotenlus-
14        % systeem in de vorm:
15        %
16        %   r      +-----+   +-----+   y
17        %   ->---+ K +---+ P +----->
18        %   +-----+   +-----+
19        H = simplify(P*K);
20    else
21        disp('no such system available');
22    end
23 end
```

isStable

```

1 function answer = isStable(P,K,system)
2     beginSettings;
3     % format long
4     % Bepaalt de transferfunctie (H) van het systeem P en
      regelaar K.
5     H = getTransferFunction(P,K,system);
6     % Bepaalt de polen van H
7     impoles = poles(H,s);
8     realpoles = real(poles(H,s));
9     % Zet een boolean op true en gaat alle polen langs. Zodra
      er een reëel
10    % deel van een pool groter of gelijk is aan nul, is het
      systeem niet stabiel en
11    % maakt de boolean false.
12    bool = true;
13    for i = 1:size(realpoles)
14        if realpoles(i)>=0
15            bool = false;
16            break;
17        end
18    end
19    answer = bool;
20 end

```

plothistogram

```

1 function plothistogram(type,n,dwaarde, graad)
2 clear figure
3 beginSettings;
4 view(3); % plot in 3d
5 m=zeros(n);
6 count=0;
7 for a=1:n;
8     for b=1:n;
9         for c=1:n;
10            if graad ==2
11                P=make2ndOrdeFunction(a,b,c,dwaarde);
12                Ku=a/c;
13                Tu=(2*pi*sqrt(a+c))/(sqrt(c*(a^2+b^2)+a*(c^2+
      dwaarde^2)));
14            elseif graad==3
15                P=make3rdOrdeFunction(a,b,c);
16                Ku=2*b*((a+b)^2+c^2);
17                Tu=(2*pi)/(sqrt(2*a*b+b^2+c^2));
18            else
19                exit('0');
20            end
21            K=ZNController(Ku,Tu,type);

```

```

22         stable=isStable(P,K,'geslotenlus');
23         if stable==0;
24             disp(['-bij a=',num2str(a),' b=',num2str(b),' c
25 =',num2str(c)]);
26             count=count+1;
27             m(a,b)=c;
28         end
29         end
30         disp(['einde c (a=', num2str(a), ', b=', num2str
31 (b), ')']);
32     end
33     disp(['einde b (a=', num2str(a), ')']);
34 end
35 count
36 waarden=[1:n];
37
38 figure;
39 bar3(m,'y');
40 axis([0 n+1 0 n+1 0 n+1]);
41
42 str=sprintf('Instabiele systemen');
43 if graad==2
44     str=strcat(str,sprintf('bij d=%d',dwaarde));
45 end
46
47 title(str); % titel plot
48 xlabel('b');
49 ylabel('a');
50 zlabel('c');
51
52 set(gca, 'XTickLabel', waarden);
53 set(gca, 'YTickLabel', waarden);

```