

Differentiatie: Wat zijn de effecten op de leeropbrengsten in 2HV?

Wat zijn de effecten van gedifferentieerd lesgeven (m.b.t. differentiëren in instructie en in leerstof) op het begrijpen (procedureel dan wel conceptueel) van de lesstof (ontbinden in factoren) in 2hv?

Samenvatting

In dit onderzoek is gekeken naar de effecten van gedifferentieerd lesgeven op het begrijpen van de lesstof in 2hv. Differentiatie is het aanbrengen van verschillen tussen delen van een onderwijssysteem ten aanzien van bijvoorbeeld instructie, leerstof of leertijd. In dit onderzoek zijn twee 2hv-klassen (HV2A en HV2C) tijdens de wiskundelessen van twee hoofdstukken geobserveerd. Leerlingen werden in drie groepen gedeeld: groep I (instructieafhankelijk), groep II (instructiegevoelig) en groep III (instructieonafhankelijk). Het eerste hoofdstuk kregen beide klassen op gebruikelijke wijze les, tijdens het tweede hoofdstuk werd in HV2C gedifferentieerd in instructie en in leerstof. Effecten zijn gemeten met behulp van een semi-gestructureerd interview waar op procedureel en conceptueel begrip van de onderwerpen (oplossen van lineaire vergelijkingen en ontbinden in factoren) werd getoetst. Er werd één leerling geïnterviewd uit elke groep uit elke klas. Op zowel procedureel als conceptueel gebied presteerde de leerling uit groep I uit de klas waar werd gedifferentieerd beter dan zijn tegenhanger in de klas waarin niet werd gedifferentieerd. Bij de leerlingen uit groep II en III is dit positieve effect niet gevonden.

Naam:	Aranka Bloemberg
Studentnummer:	1425560
Opleiding:	Science Education and Communication
Onderdeel:	Onderzoek van Onderwijs
Begeleider:	Dr. N.C. Verhoef
Datum:	22-06-2016

Inhoudsopgave

Samenvatting	1
1. Inleiding	3
1.1 Wat is differentiatie?	3
1.2 Verschillende soorten differentiatie.....	4
1.2.1 Differentiatie in instructie	4
1.2.2 Differentiatie in leerstof.....	6
1.2.3 Differentiatie in leertijd.....	7
1.3 Tall's theorie: symbolen en procepten.....	7
2. Het onderzoek	10
2.1 Onderzoeksvraag	10
2.2 Locatie en proefpersonen.....	10
2.3 Methode	10
2.3.1 Het meten van het effect van de gedifferentieerde lessen.....	11
3. Resultaten	14
3.1 Lesobservaties	14
3.1.1 Hoofdstuk 9 Lineaire vergelijkingen	14
3.1.2 Hoofdstuk 11 Ontbinden in factoren.....	14
3.2 Cijfers	15
3.3 Interview	16
3.3.1 Groep I	16
3.3.2 Groep II.....	17
3.3.3 Groep III.....	19
4. Discussie.....	21
4.1 Groep I.....	21
4.2 Groep II.....	21
4.3 Groep III	22
4.4 Procept en differentiatie.....	22
4.5 Het onderzoek.....	23
5. Conclusie en aanbevelingen	25
6. Referenties.....	26
Bijlagen	27

1. Inleiding

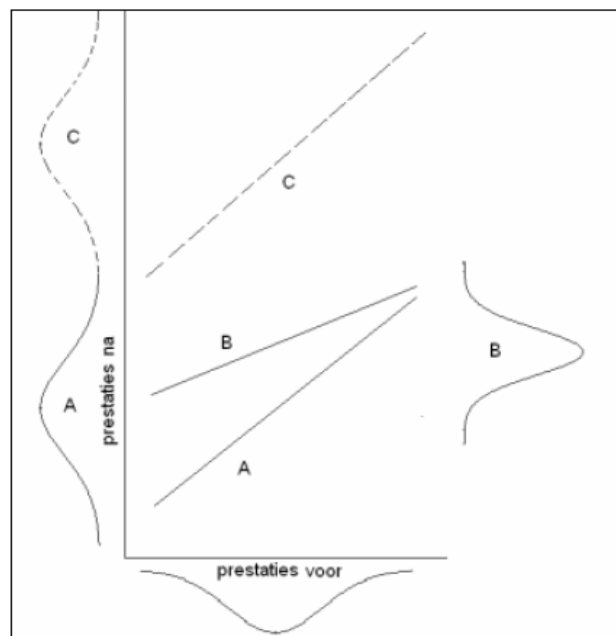
1.1 Wat is differentiatie?

Het is een ‘hot topic’ op het moment: differentiatie. Differentiatie is de onderwijskundige oplossing voor het omgaan met verschillen in het onderwijs (Bosker, 2005). Het is echter niet van nu: De Koning geeft in 1973 al een uitgebreide definitie: “Het doen ontstaan van verschillen tussen delen van een onderwijssysteem ten aanzien van één of meerdere aspecten” (De Koning, 1973). Met ‘delen van een onderwijssysteem’ kunnen bijvoorbeeld klassen, subgroepen of individuele leerlingen worden bedoeld.

Eén van de aspecten waar de Koning op doelt, is het verdelen van leerlingen over verschillende leerwegen op de middelbare school: zo gaan de leerlingen naar het vmbo (basis, kader, gemengd-theoretisch), het havo of het vwo. Deze differentiatie wordt “externe differentiatie” genoemd.

Ondanks de externe differentiatie, bestaan er nog steeds grote verschillen binnen de klassen: er zitten altijd leerlingen tussen die veel moeite hebben met een bepaald vak terwijl anderen juist met veel gemak de lesstof tot zich nemen. Interne differentiatie is ervoor bedoeld dat elke soort leerling binnen een klas aan zijn trekken komt: zwakkere leerlingen moeten tot een basisbegrip komen terwijl hoogvliegers juist gestimuleerd moeten worden om een nog hoger niveau te halen.

Verschillen tussen leerlingen kunnen betrekking hebben op indirecte kenmerken (seks, leeftijd of sociaal milieu), op algemeen psychologische kenmerken (intelligentie of persoonlijkheid), of op directe kenmerken (prestaties, leerstijl of motivatie) (Simons, 1995). Uit een (wat ouder) onderzoek is gebleken dat leerkrachten in het basisonderwijs voornamelijk differentiëren op basis van prestatieverschillen (Reezigt, 1993). Reezigt geeft in een figuur weer wat de mogelijke effecten kunnen zijn van differentiatie op prestaties.



Figuur 1. Mogelijke effecten van differentiatie modellen op prestaties van leerlingen (Bron: Reezigt, 1993, p.40).

In het figuur is af te lezen hoe leerlingen in bepaalde situaties voorgang boeken. Leerlingen in situatie A krijgen op een ‘gewone’ manier les, zij hebben een bepaalde leercurve. In situatie B krijgen leerlingen met een bepaalde leerachterstand extra aandacht, het resultaat is dat de laagscorende leerlingen hoger scoren dan hun tegenhangers in A. Doordat er veel aandacht gaat naar de laagscorende leerlingen, krijgen de hoogscorende leerlingen weinig kans tot excelleren en eindigen zij met dezelfde score als hun tegenhangers in A. Er wordt in situatie B zorg gedragen dat iedereen de minimumdoelen haalt. In de laatste situatie C wordt het onderwijs dusdanig gedifferentieerd, dat alle leerlingen in de meest ideale situatie kunnen leren. Persoonlijk vind ik dat de ‘prestaties na’ voor de laagscorende leerlingen wel érg veel boven de ‘prestaties na’ van situatie B ligt, maar het idee is duidelijk. Differentiatie zoals in situatie B noemt Reezigt (1999) *convergente differentiatie* (onderlinge verschillen worden steeds kleiner) en in situatie C *divergente differentiatie* (onderlinge verschillen worden steeds groter).

Divergente differentiatie kan op individueel niveau maar dit is financieel gezien onmogelijk: de klassen zijn te groot om iedere leerling persoonlijk te onderwijzen. Vaker worden klassen dan in twee of drie subgroepen onderverdeeld en krijgen dan gedifferentieerd les. Op veel middelbare scholen komt convergente differentiatie het meest voor.

Lou en collega's (1996) hebben een groot aantal onderzoeken geanalyseerd waarin onderzoek werd gedaan naar differentiatie met behulp van subgroepen binnen een klas. Onderwijs in subgroepen lijkt betere scores op te leveren dan klassikaal onderwijs. Gemiddeld gezien scoren de sterkere leerlingen nóg hoger als zij in een homogene groep samenwerken. Helaas is deze conclusie niet te trekken voor zwakkere leerlingen: zij hebben meer profijt bij een heterogene (subgroep) (Lou et al., 1996). Dit stelt docenten voor de keuze: in heterogene subgroepen profiteren zwakkere leerlingen terwijl in homogene subgroepen sterkere leerlingen profiteren (Reezigt, Houtveen en van de Grift, 2001).

1.2 Verschillende soorten differentiatie

Berben en van Teeseling (2014) beschrijven vier manieren om te differentiëren: 1) in instructie, 2) in leerstof, 3) in leertijd en 4) op grond van leervoorkeuren. Ik wijd niet verder uit over differentiatie op grond van leervoorkeuren. Ik heb hiervoor gekozen omdat er bij dit soort differentiatie vooral gepleit wordt voor verschillende werkvormen binnen subgroepen. Nu zal een doorsnee docent al in zijn lessen verschillende werkvormen toepassen; hierdoor komen alle leerstijlen (volgens de theorie van Kolb, 1975) vanzelf een keer aanbod.

1.2.1 Differentiatie in instructie

Met differentiatie in instructie wordt bedoeld dat iedere leerling op zijn eigen niveau instructie krijgt. Zoals hierboven al is uitgelegd, is dit in de praktijk niet mogelijk: in klassen met 30 leerlingen is het onmogelijk om elke leerling op maat instructie aan te bieden. Om toch op een divergente manier te differentiëren, kan men gebruik maken van het IGDI, oftewel het interactieve gedifferentieerde directe instructiemodel (Houtveen, e.a., 2005). Voordat dit model wordt geïntroduceerd, wordt eerst het model beschreven dat er aan vooraf ging: het (activerende) directe instructiemodel.

(activerende) directe instructie model

Een Nederlandse onderzoeker die veel over het directe instructiemodel geschreven heeft, is Simon Veenman (zie o.a. Veenman, 1992, 1998 en Veenman et al., 1997). Volgens hem bestaan vele termen die allemaal in verband worden gebracht met directe instructie: active teaching, explicit teaching, sturend onderwijs, gestructureerd onderwijs en leraar geleid onderwijs. De eerste die de term directe instructie geopperd heeft, is Rosenshine (zie Rosenshine, 1985, voor een overzicht met betrekking tot directe instructie). Hieruit wordt al deels duidelijk dat directe instructie een leraargestuurde intentie heeft. Het is de bedoeling dat

de leraar de leeractiviteiten van leerlingen ondersteunt en in de juiste richting leidt. Directe instructie is in de jaren '70 en '80 ontstaan door een analyse te maken van effectieve docenten (zie [1]).

Het (activerende) directe instructie model bestaat uit zes fasen (Leenders et al., 2002):

- Terugblik
- Aangeven van de doelen van de les: Oriëntatie
- Presentatie van nieuwe leerstof: Uitleg
- Begeleide inoefening
- Zelfstandige verwerking
- Afsluiting: Terug- en vooruitblik

In de eerste fase, de terugblik, wordt bijvoorbeeld het gemaakte huiswerk gecontroleerd en besproken. Ook wordt de voorkennis opgehaald: welke kennis is nodig voor de komende les? Vervolgens wordt het 'wat' en 'waarom' van de les besproken: hier worden de lesdoelen kenbaar gemaakt en worden ze in een context geplaatst. Op deze manieren krijgen leerlingen inzicht in hun eigen leerproces en kunnen ze het geleerde beter toepassen in andere situaties (oftewel 'transfer').

In de derde fase komt de uitleg. Effectieve leraren besteden meer aandacht aan de uitleg van nieuwe leerstof dan minder effectieve leraren (Leenders, 2002). Uitleg betekent niet alleen nieuwe lesstof uitleggen, het heeft ook een instructiemoment. Ebbens & Ettehoven (2005) hebben dit instructiemoment 'complete instructie' genoemd en het behelst: wat moet de leerling doen? Hoe moet hij het doen? Hoe lang? Welke hulp kan de leerling krijgen? Wat moet de leerling doen wanneer het werk af is? Dit zorgt ervoor dat de leerlingen geen tijd verliezen in de volgende fase: de begeleide inoefening.

In de fase van de begeleide inoefening oefenen de leerlingen de aangeboden lesstof onder begeleiding, het liefst in kleine stukjes tegelijk. In deze fase is vooral belangrijk dat leerlingen succeservaringen hebben. Leenders en collega's (2002) geven wat tips: Stel de leerlingen vragen, bijvoorbeeld: Hoe ben je aan het antwoord gekomen? Begrijpen de leerlingen de lesstof? Je kunt de leerlingen in groepjes laten werken zodat ze van elkaar leren.

De vijfde fase is de zelfstandige verwerking. Zelfstandig betekent niet per se individueel. Het betekent meer dat de leerlingen zelf op zoek moeten naar goede antwoorden zonder al te veel op de leraar te steunen. De leraar kan wel een ronde door de klas lopen om feedback te geven.

De laatste fase is het einde van de les: in de evaluatiefase wordt er gereflecteerd op de les als geheel. Er is niet alleen aandacht voor het product (de opgedane kennis) maar ook voor het proces. Tot slot is daar de terug- en vooruitblik. De les wordt samengevat en het geheel kan in een grotere context geplaatst worden. Hier kunnen ook al vragen gesteld worden die in toekomstige lessen beantwoord gaan worden.

Leenders et al. (2002) hebben het bijvoeglijk naamwoord 'activerende' toegevoegd: Hoewel de fasen van het directe instructie model nog altijd aan de basis staan, is er een grotere nadruk op het activeren van de leerlingen. Activatie gebeurt in elke fase van het onderwijs. Verder is er een grotere nadruk op het geven van feedback. Hattie & Timperley (2007) noemen feedback een van de krachtigste instrumenten die de leraar tot zijn beschikking heeft om leerlingen te laten leren. Hierbij moet men zich bedenken dat positieve feedback een veel positievere impact heeft dan negatieve feedback.

IGDI

Het IGDI-model staat voor het *interactive gedifferentieerde directe instructiemodel*. Dit model werd geïntroduceerd door Houtveen en zijn collega's (2005). Het verschil ligt vooral in de fasen Uitleg, Begeleide inoefening en Zelfstandige verwerking. Goed differentiëren in de

instructiefase is lastig: verschillende groepen hebben hun eigen bezigheid en de docent moet ervoor zorgen dat ze actief blijven, ook al is de docent met een andere groep bezig.

Figuur 2 laat een voorbeeld zien van een lesverloop waarin wordt gedifferentieerd op instructie. Na een klassikale start van de les, gaat de instructieonafhankelijke groep zelfstandig aan de slag. De overige groepen krijgen uitleg en krijgen de begeleide inoefening. Dan gaan de instructiegevoelige leerlingen zelfstandig aan de slag waarna de instructiegevoelige leerlingen nog een extra uitleg krijgen of ze samen met de docent een som gaan uitwerken. Merk op dat in dit voorbeeld, er convergent gedifferentieerd wordt.

Differentiatiemodel, drie groepen		
Terugblik		
Oriëntatie		
Uitleg		
Zelfstandige verwerking instructieonafhankelijke leerlingen	Instructie en inoefening instructiegevoelige en instructieafhankelijke leerlingen	
	Zelfstandige verwerking instructiegevoelige leerlingen	Verlengde instructie aan instructieafhankelijke leerlingen
Feedback	Zelfstandige verwerking	
	Feedback	
Evaluatie/terug- en vooruitblik		

Figuur 2. Differentiatiemodel met drie groepen (Gebaseerd op Berben en van Teeseling, 2014, p. 47)

Het model van Figuur 2 is natuurlijk maar een voorbeeld. De klas hoeft niet elke les in twee of drie groepen worden verdeeld. Ook hoeft de instructieonafhankelijke groep niet altijd de kortste uitleg te krijgen: bijvoorbeeld in havo-vwo groepen kunnen de leerlingen uit deze groep aan de slag met de vwo-pagina (zoals die bijvoorbeeld in elk havo-vwo boek van Moderne Wiskunde te vinden is) en hierover extra uitleg krijgen die de overige groepen niet hoeven bij te wonen (maar wel mogen als de interesse er is!).

Berben en van Teeseling (2014) geven een praktijkvoorbeeld waarin wordt gedifferentieerd op instructie. De docente in kwestie deelde de groepen in en gaf ze een kleur. Een lesvoorbereiding zag er als volgt uit: ‘Aan groep Roze geef ik extra uitleg, ... Groep Groen mag meeluisteren, maar van hen wordt verwacht dat zij ook zoveel mogelijk zelfstandig proberen te doen....De leerlingen in groep Blauw gaan zelfstandig en in stilte aan het werk’.

1.2.2 Differentiatie in leerstof

Wanneer de docent differentieert in leerstof, volgt hij de lesmethode minder strikt, maar stelt zichzelf de vraag: welke leeractiviteiten voor welke leerlingen doen er eigenlijk toe in deze les? (Berben en van Teeseling, 2014). Toch kan de methode een goede leidraad zijn: de docent kan die opdrachten eruit pikken die voor de ene groep nuttig is en de andere groep andere opdrachten geven. Zo hebben de sterkere wiskundeleerlingen minder inleidende opdrachten nodig om de theorie te begrijpen en hebben ze meer tijd voor verwerkende en verdiepende vragen. Zij kunnen bijvoorbeeld sneller door de ‘minimale’ lesstof heen en hebben tijd over voor de moeilijkere vragen (zoals in het voorbeeld hierboven: zij kunnen werken aan de vwo-pagina). Leerlingen die wiskunde moeilijk vinden hebben in eerste instantie weinig aan verdiepende vragen, zij moeten eerst de basis onder de knie krijgen. Voor hen is het wel belangrijk alle inleidende vragen te maken en de theorie-verwerkende vragen.

Moderne Wiskunde eindigt een hoofdstuk altijd met 'Extra Opgaven', deze zijn onderverdeeld in *Basis*, *Gemengd* en *complex*. Deze paragraaf kun je zien als een toepassing van het BHV-model (Verbeek, 1978). BHV staat voor: basis-, herhalings-, en verrijkingsstof. Ook hier kan men dus differentiëren op leerstof.

1.2.3 Differentiatie in leertijd

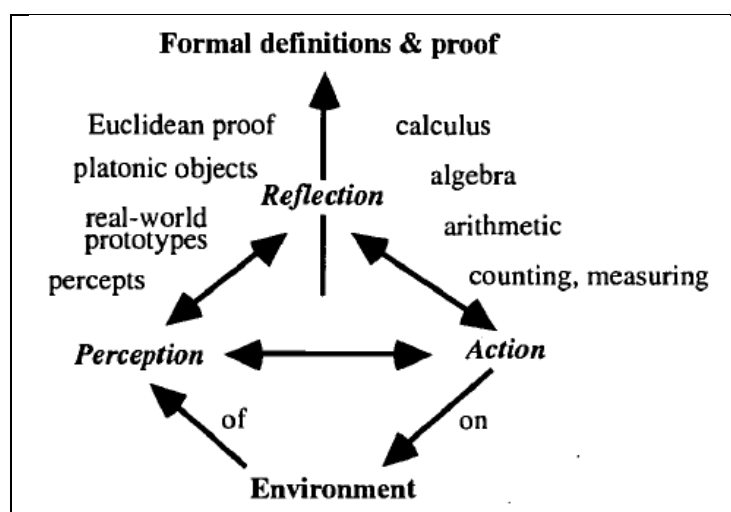
Differentiatie in leertijd heeft een sterk verband met differentiatie in instructie en in leerstof. Zo besteed je meer of minder instructietijd aan bepaalde groepen leerlingen of krijgt de ene leerling iets meer huiswerk dan de andere.

Differentiëren in leertijd kan door de leerlingen verschillend huiswerk op te geven: zo bestaat er *preteaching* en *flipping the classroom*. Bij beide krijgen de leerlingen die dat nodig hebben extra uitleg voorafgaand aan de les, door de docent of door de leerlingen een filmpje te laten kijken over de lesstof. Zo raken ze al bekend met de lesstof en kunnen ze de uitleg tijdens de les beter volgen.

1.3 Tall's theorie: symbolen en procepten

Differentiëren op instructie heeft alleen zin als de instructie is aangepast voor verschillende groepen. Om in het onderzoek de instructie te kunnen categoriseren, is daar een theoretisch kader voor nodig. Ik heb dat gevonden in Tall en zijn theorie met betrekking tot symbolen en procepten (Tall, 2001).

Tall (2001) onderscheid drie typen wiskunde: symbolische wiskunde, ruimte en vormen, en axiomatische wiskunde. Voordat leerlingen in aanraking komen met wiskunde, zijn ze op de basisschool vooral bezig met rekenen, de beginselen van aritmetica. Ze leren optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen en ze leren wat breuken zijn. Op de middelbare school gaan ze hier mee verder en wordt er vanaf de eerste klas begonnen met algebra. Ongeveer vanaf de bovenbouw gaan ze aan de slag met calculus. Tall geeft deze wiskunde aan als *action on the world* en heeft betrekking op de symbolische wiskunde. Een ander type wiskunde is de *perception on the world*, hierbij beginnen leerlingen met het herkennen van vormen zoals de driehoek en vierkant. Ook in deze tak wordt de kennis opgebouwd tot Euclidische meetkunde. Tot slot gaan studenten op de universiteit aan de slag met de axiomatische wiskunde. Aangezien de leerlingen in het onderzoek bezig gaan met algebra, bediscussieer ik verder alleen de symbolische wiskunde.



Figuur 3. Conceptuele ontwikkeling van verschillende wiskundige concepten (Bron: Tall, 2001)

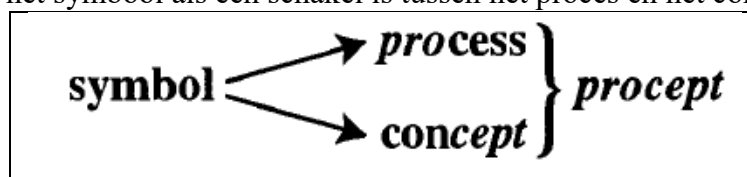
In de symbolische wiskunde wordt er vooral gewerkt met symbolen. Een symbool is een wiskundig object dat zowel een concept als een proces is. Tall (2001) geeft een illustratieve tabel met een aantal voorbeelden van symbolen die zowel een concept als een symbool zijn.

Tabel 1. Symbolen als proces en concept

Symbol	Proces	Concept
4	tellen	getal
$3 + 2$	optellen	som
-3	trek er drie af	min 3
$\frac{3}{4}$	delen	breuk
$3 + 2x$	evaluatie	expressie

Volgens Sfard (1991) komen leerlingen vaak in eerste instantie eerst het symbool tegen als proces. Zo wordt een formule geïntroduceerd als een beschrijving van een rekenprocedure, waarbij er een input is, een berekening en daarna een output. Pas later wanneer bijvoorbeeld families van functies worden bestudeerd, komt de conceptuele kant van een formule omhoog. Het duale gebruik van een symbool als proces en concept begint dus door eerst bekend te raken met het proces als een stap-voor-stap procedure en door veel te oefenen zullen die stappen onbewust komen en kan de leerling makkelijker nadenken over de conceptuele kant van het symbool.

Gray en Tall (1994) noemen de combinatie van een symbool dat zowel een concept als een proces is, een *procept*, zie Figuur 4. Een procept wordt vooral gezien als een cognitief construct, waarin het symbool als een schakel is tussen het proces en het concept.



Figuur 4. Het symbool als een schakel tussen het proces en concept. Het proces en concept samen vormen een procept.
(Brom: Tall, 2001)

Het verschil tussen procedure en proces wordt duidelijk in het volgende voorbeeld: neem functie $f(x) = \frac{1+x^2}{x^2}$. Een procedure is bijvoorbeeld het differentiëren: je hebt alle regeltjes geleerd en je weet hoe je bijvoorbeeld de quotiëntregel moet toepassen. Een leerling die deze procedure kent schrijft wellicht het volgende:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{2x \cdot x^2 - 2x \cdot (1 + x^2)}{(x^2)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{x^4} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

Iemand die echter iets meer bedreven is in het differentiëren, die meerdere procedures goed kent, zal nu niet de quotiëntregel gebruiken, maar eerst de breuk omschrijven en daarna differentiëren:

$$f(x) = x^{-2} + 1, \frac{df(x)}{dx} = -\frac{2}{x^3}$$

Deze persoon heeft zich conceptueel voorbereid op de calculus procedure (Tall, 2001) waardoor de som veel makkelijker is geworden. Het is een proces geworden. Deze persoon kan dus veel flexibeler nadenken over wiskunde. Voor iemand die alle procedures tot zijn beschikking heeft en goed kan inzien welke procedure het beste is, is differentiëren een procept geworden.

Het clusteren van feiten en principes wordt door Gray en Tall (2007) *compressie* genoemd. Iemand kan een lange tijd worstelen om bijvoorbeeld ontbinden in factoren onder de knie te hebben. In een later hoofdstuk wordt dat weer gebruikt om kwadratische

vergelijkingen op te lossen. Zodra het ontbinden in factoren goed onder de knie is, kan dit concept opnieuw gebruikt worden bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen.

Tijdens een wiskunde les moet ervoor gezorgd worden dat niet alleen de procedurele kant van de wiskunde aan bod komt. Leerlingen moeten ook *begrijpen* waarom bepaalde bewerkingen mogen op een vergelijking. Ze moeten een formule niet alleen zien als wat getallen en letters bij elkaar waar je mee kunt rekenen, maar ze moeten uiteindelijk ook het verband met een grafiek of een tabel zien, enz.

2. Het onderzoek

2.1 Onderzoeksvraag

Ik ga kijken naar de effecten van differentiatie in een 2hv klas. Als er in een klas (meer) gedifferentieerd lesgegeven wordt, heeft dat dan invloed op hoe goed leerlingen de lesstof begrijpen? Zit er verschil in leeropbrengsten tussen sterke en zwakke leerlingen? Deze vragen leiden tot de volgende hoofdvraag:

Wat zijn de effecten van gedifferentieerd lesgeven (m.b.t. differentiëren in instructie en in leerstof) op het begrijpen (procedureel dan wel conceptueel) van de lesstof (ontbinden in factoren) in 2hv?

2.2 Locatie en proefpersonen

Het onderzoek wordt uitgevoerd op het Christelijk College Schaersvoorde te Aalten. Een docente wiskunde die lesgeeft aan onder andere twee 2hv klassen is bereid gevonden om mee te werken aan het onderzoek. Ze was meteen erg enthousiast aangezien het onderwerp ‘differentiatie’ erg leeft op de school. Zo werd er een werkmiddag gericht op differentiëren gehouden juist voordat ik de aanvraag deed voor het onderzoek. Op Schaersvoorde wordt er gewerkt met de methode Moderne Wiskunde.

Er is gekozen voor 2hv omdat dit vaak de meest heterogene groepen zijn op een middelbare school. De zwakkere leerlingen kunnen misschien net (niet) havo aan terwijl de sterkere leerlingen straks met gemak vwo kunnen halen. Deze leerlingen zitten in één klas en moeten aan de slag met dezelfde leerstof. Leerlingen die naar het vwo gaan in de derde klas, moeten hier goed op voorbereid worden terwijl leerlingen die naar het havo gaan, niet ontmoedigd moeten worden door sommen die misschien te moeilijk zijn omdat ze voor de toekomstige vwo-leerlingen zijn bedoeld.

Klas HV2A heeft 24 leerlingen en HV2C heeft 27 leerlingen. De klassengemiddelden zijn na acht proefwerken (en een aantal SO's en computerklassen) nagenoeg gelijk: resp. 6,7 en 6,9. Klas HV2C heeft de docente sinds de start van het schooljaar lesgegeven terwijl ze HV2A sinds drie maanden les gaf.

2.3 Methode

Om te kijken of differentiatie werkelijk effect heeft, worden twee klassen met elkaar vergeleken. Ik volg twee klassen gedurende twee hoofdstukken. Het betreft hoofdstuk 9 *Lineaire vergelijkingen* en hoofdstuk 11 *Ontbinden in factoren*.¹ De hoofdstukken sluiten erg goed op elkaar aan zodat het vergelijken van de resultaten makkelijker wordt.

Berben en van Teeseling (2014) beschrijven dat differentiatie op instructie het beste gaat als de klas opgedeeld wordt in groepen. Samen met de docente zijn er twee of drie groepen gemaakt binnen de klas. De groep ‘instructieonafhankelijk’ wordt gevormd door leerlingen die gemiddeld hoger dan een 8 staan en door leerlingen die de docente goed genoeg acht voor deze groep (hierna genoemd groep III). De groep ‘instructieafhankelijk’ wordt gevormd door de leerlingen die gemiddeld een onvoldoende hebben en door leerlingen van wie de docente denkt dat ze de extra aandacht goed kunnen gebruiken (hierna genoemd groep I). De overige leerlingen komen in de groep ‘instructiegevoelig’ (hierna genoemd groep II). Er is ervoor gekozen om zowel in groep I als groep III vijf leerlingen te plaatsen, er zijn in groep II dan 14 leerlingen uit HV2A en 17 leerlingen uit HV2C.

¹ Vanwege de tijdsdruk wordt hoofdstuk 10 *Ruimte meetkunde* overgeslagen en eventueel behandeld aan het einde van het schooljaar.

Tijdens het eerste hoofdstuk krijgen beide klassen op hun gebruikelijke manier les. Tijdens het tweede hoofdstuk krijgt één van de twee klassen meer gedifferentieerde lessen aangeboden. HV2A krijgt les zoals gebruikelijk en HV2C krijgt meer gedifferentieerd les. In HV2C krijgen de verschillende groepen instructie op hun eigen niveau. Dat zal betekenen dat sommige groepen een langere of juist een kortere uitleg krijgen. Ook de aard van de instructie zal verschillen. Zo zal de ‘instructieonafhankelijke’ groep bijvoorbeeld meer denk vragen krijgen. Ik geef een voorbeeld: In het hoofdstuk *Ontbinden in factoren* is er een paragraaf 11-3 $A \times B = 0$. Hoewel het in de rest van het hoofdstuk niet gevraagd wordt, kan deze groep aan het nadenken gezet worden door te vragen: Geldt dit ook als het niet 0 is maar een ander getal? De leerlingen krijgen dan het voorbeeld ‘los de vergelijking op: $(r - 2)(r - 8) = 6$ ’. De instructieafhankelijke groep heeft doorgaans moeite genoeg met het begrijpen van de ‘gewone’ lesstof, die wil je niet belasten met vragen die net een stukje meer vragen van de leerling.

De differentiatie in leerstof komt als volgt tot stand: in overleg met de docente zijn er twee studieplanners gemaakt; één voor de instructieonafhankelijke groep (III) in HV2C en één voor de overige groepen (II en I) in HV2C en voor HV2A. Leerlingen van groep II in HV2C krijgen de keuze om ook dit schema te volgen als ze dat willen. De studieplanner van HV2C – III heeft ongeveer even veel opdrachten als de andere planner maar gaat sneller door het hoofdstuk: wat inleidende vragen zijn weggelaten en bijvoorbeeld in plaats van drie herhalingsopdrachten zijn er twee herhalingsopdrachten en één verdiepingsopdracht. Doordat zij sneller door het hoofdstuk zullen gaan, hebben zij aan het eind tijd over om zich over de vwo-pagina te buigen. Verder hebben zij de keuze bij de Extra Oefening pagina om *Gemengd* of *Complex* te kiezen terwijl het andere schema leerlingen laat kiezen tussen *Basis* of *Gemengd*.

In overleg met de docente is gekozen voor differentiatie in instructie en in leerstof en niet in leertijd. De docente heeft geen ervaring met differentiatie en dus leek het haar verstandig om met deze twee aspecten te beginnen. Alle lessen van beide klassen worden geobserveerd zodat er ook daadwerkelijk kan worden vastgesteld dat de ene klas meer gedifferentieerd les heeft gekregen. Hierbij wordt gekeken hoe het instructiemoment eruit ziet: is deze klassikaal, welke vragen worden er gesteld, is er een verlengde uitleg voor een bepaalde groep leerlingen? Per groep wordt er gekeken of de uitleg meer een conceptuele aard of meer een procedurele aard heeft. De lessen worden geobserveerd met het formulier Lesobservatie differentiatie (zie bijlage). Dit formulier is opgesteld na het volgen van wat lessen van de docente tijdens het behandelen van hoofdstuk 8.

2.4 Meetinstrumenten: Het meten van het effect van de gedifferentieerde lessen

2.4.1 Toetscijfers

Hoewel hoofdstuk 9 en 11 goed op elkaar aansluiten (resp. oplossen van vergelijkingen en ontbinden in factoren), kan het ene hoofdstuk misschien toch lastiger ervaren worden. Om het verschil in moeilijkheid in kaart te brengen, wordt er in eerste instantie naar de toetscijfers gekeken. Er kan dan gekeken worden of bijvoorbeeld de groeps- en klassengemiddelden dicht bij elkaar liggen of niet. Als daar grote verschillen zijn, moet daarmee rekening gehouden met het meten van het effect en het vergelijken van de twee klassen.

2.4.2 Semi-gestructureerde interview

Het effect op het begrijpen van de lesstof wordt getoetst aan de hand van twee semi-gestructureerde interviews, één per hoofdstuk. Hiervoor worden uit elke klas drie leerlingen gekozen, uit elke groep (I, II en III) één. Zij krijgen vragen voorgelegd die hun procedurele

dan wel conceptuele kennis van het onderwerp toetsen. De vragen die gesteld worden over hoofdstuk 9 zijn de volgende:

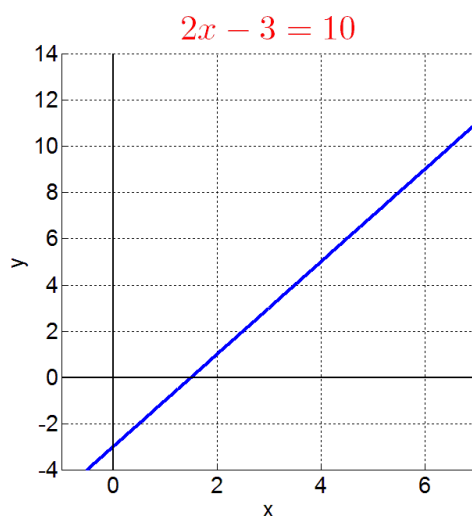
- 1) Kun je in je eigen woorden vertellen wat een lineaire vergelijking is?
- 2) Wat betekent het om een vergelijking op te lossen?
- 3) Kun je een echte situatie bedenken waarbij je een lineaire vergelijking moet oplossen?
- 4a) Los op: $13x + 3x + 14 = 3x - 5$
- 4b) Los op: $2(x + 3) = 4x$
- 5) Kun je een echte situatie bedenken waarbij je een ongelijkheid moet oplossen?

De vragen die gesteld worden over hoofdstuk 11 zijn de volgende:

- 6) Welke woorden horen bij elkaar en waarom: Factor – Term – Som – Product
- 7) Ontbind in factoren: $24a^2 - 6a$. Kan dat ook nog op een andere manier?
- 8) Ontbind in factoren: $2a^2 + 16a + 30$

Er wordt gekeken of de leerlingen een antwoord geven dat meer een procedure aanduidt of dat het antwoord van meer conceptueel inzicht getuigt.

Bij vraag 2 laat ik nog een extra grafiek zien, zie Figuur 5. Hierbij vraag ik of ze de oplossing kunnen aanwijzen in de grafiek. Dit laat een meer conceptueel begrip van ‘oplossen’ zien, snappen leerlingen dat ze naar een snijpunt zoeken tussen twee lineaire grafieken?



Figuur 5. Conceptueel begrip van ‘oplossen’

Bij de ‘los op’ / ‘ontbind in factoren’ vragen stel ik altijd een verdiepende vraag nadat de leerlingen het hebben opgelost: kun je dit nog op een andere manier oplossen, d.w.z., met een andere eerste stap? Kun je dit op nog een andere manier ontbinden in factoren?

In het bijzonder vraag 8 is bedoeld om te kijken of de leerlingen het concept ‘ontbinden in factoren’ begrijpen. Ze kunnen een drieterm ontbinden waarbij $a = 1$ (in $y = ax^2 + bx + c$). In deze vraag wordt dus getoetst of leerlingen echt snappen wat factoren zijn en wat dus ontbinden in factoren is.

Als leerlingen niet goed uit een vraag komen of ze antwoorden helemaal niet, dan geef ik ze een hulpvraag of een sturende vraag. Ik probeer op deze manier erachter te komen hoeveel kennis te daadwerkelijk beschikken.

De interviews worden geanalyseerd met behulp van een codering. In de bijlage is te vinden welke codes ik gebruikt hebt. De antwoorden van leerlingen worden hoofdzakelijk

gecodeerd met C−, C+/- , C+, P−, P+/- en P+. C staat voor conceptueel en P voor Procedureel. Zo zal bijvoorbeeld wanneer vraag 2 gevraagd wordt, en er geantwoord wordt met de weegschaalmethode en hoe die toe te passen, met een P+ gecodeerd worden terwijl een antwoord als 'het berekenen van de coördinaten van het snijpunt' met C+ wordt gecodeerd. Bij een − klopt het antwoord niet, +/- staat voor onvolledig antwoord, de leerling is op de goede weg, en + is een correct antwoord. Wanneer een leerling helemaal geen antwoord geeft, of slechts 'ik weet het niet' of 'geen idee' antwoordt, krijgt dat als code alleen een '−'.

Aan de hand van de codering kan vastgesteld worden of de leerlingen de procedurele dan wel conceptuele kant van het oplossen van vergelijkingen en het ontbinden in factoren onder de knie hebben. Er kan bijvoorbeeld gekeken worden naar hoeveel sturende vragen ik moet stellen voordat de leerling begrijpt wat het moet doen.

3. Resultaten

3.1 Lesobservaties: is er gedifferentieerd?

In de bijlage zijn de uitwerkingen van de lesobservatie formuleren te vinden.

3.1.1 Hoofdstuk 9 Lineaire vergelijkingen

Tijdens hoofdstuk 9 gaf de docente op dezelfde manier les aan beide klassen. Haar lessen hebben een vast patroon: ze begint met het bespreken van het huiswerk, dan geeft ze uitleg aan de hand van sommen uit het boek (sommen die later ook het huiswerk vormen), gevolgd door zelfstandig werken. In de observatie staan Uitleg en Begeleide inoefening altijd samen. De uitleg van de docente is namelijk vooral procedureel: ze legt uit hoe leerlingen de sommen kunnen oplossen. Alle lesfasen waren klassikaal.

Door omstandigheden (ziekte van de docent, externe toetsen en projectdagen) duurde het lang om dit hoofdstuk te behandelen en heeft klas HV2A één les meer gehad dan HV2C.

Bij beide klassen was er geen sprake van differentiatie op leerstof: alle leerlingen maakten dezelfde sommen. Ook wat betreft de Extra Oefening maakten alle leerlingen de Basis-pagina. Sommige leerlingen kregen die af tijdens de les en vroegen of ze verder mochten met de Gemengd-pagina. Dit betrof maar één of twee leerlingen uit beide klassen.

Er was ook niet of nauwelijks sprake van differentiatie op instructie: de uitleg/begeleide inoefening was altijd klassikaal, alleen soms legde ze nog één som extra uit voor degenen die dat nodig dachten te hebben. De rest van de klas begon dan al zelfstandig te werken. Vaak werkten een aantal leerlingen al zelfstandig tijdens de uitleg. Zij werden dan soms overvallen met de vraag om een som op te lossen terwijl ze niet meeluisterden. De docente kreeg daardoor het gevoel dat ze niet zitten op te letten.

3.1.2 Hoofdstuk 11 Ontbinden in factoren

Tijdens de lessen over hoofdstuk 11 is de differentiatie zichtbaar. In HV2C deelde ze de klas op: vijf leerlingen achter in de klas kregen een aparte studieplanner (de vijf leerlingen uit groep III). Zij werkten sneller door het hoofdstuk heen dan de rest zodat ze tijdens de één na laatste les voor de toets de vwo-pagina konden maken. Ook kregen zij de keuze tussen de Extra Oefening Gemengd of Complex, waar de overige leerlingen konden kiezen uit Extra Oefening Basis of Gemengd. Hierdoor kreeg elke leerling de keuze: welk niveau lesstof ga ik oefenen? In HV2A hadden de leerlingen die keuze niet: zij kregen allemaal de 'basis-studieplanner' (die de leerlingen van groep I en II in HV2C ook kregen) en zij maakten allen Extra Oefening Basis (zoals de leerlingen gewend zijn van vorige hoofdstukken).

De docente heeft duidelijk moeite gedaan om ook te differentiëren in instructie: hoewel de instructie in HV2A klassikaal bleef, verdeelde ze HV2C in groepen die ze soms apart uitleg gaf. Ze gaf er de voorkeur aan om de uitleg met groep I en II te beginnen, waarbij groep III de mogelijkheid had om mee te luisteren. Dit deden ze overigens niet vaak. Na die uitleg, gaf ze soms een extra uitleg voor groep III op het bord en soms liep ze naar het groepje toe om te vragen naar moeilijkheden en om feedback te geven. In een paar lessen gaf ze ook een verlengde uitleg aan groep I, wat inhield dat ze een extra som met hen behandelde.

Hoewel ik met voorstellen kwam om de uitleg ook wat meer conceptueel te maken, kwam dit niet altijd goed naar voren. De docente was van mening dat het niet belangrijk was of zelfs verwarrend werkte voor de leerlingen en dat het belangrijker was dat ze goed de procedure kenden.

3.2 Cijfers

Tabel 2 laat de rapportcijfers zien van de klassen na 8 hoofdstukken (inclusief SO's en computertoetsen). Daaruit is op te merken dat HV2C slecht twee tienden gemiddeld hoger scoort dan HV2A. Ook de gemiddelden per groep verschillen weinig.

Tabel 2. Rapportcijfers per klas en per subgroep

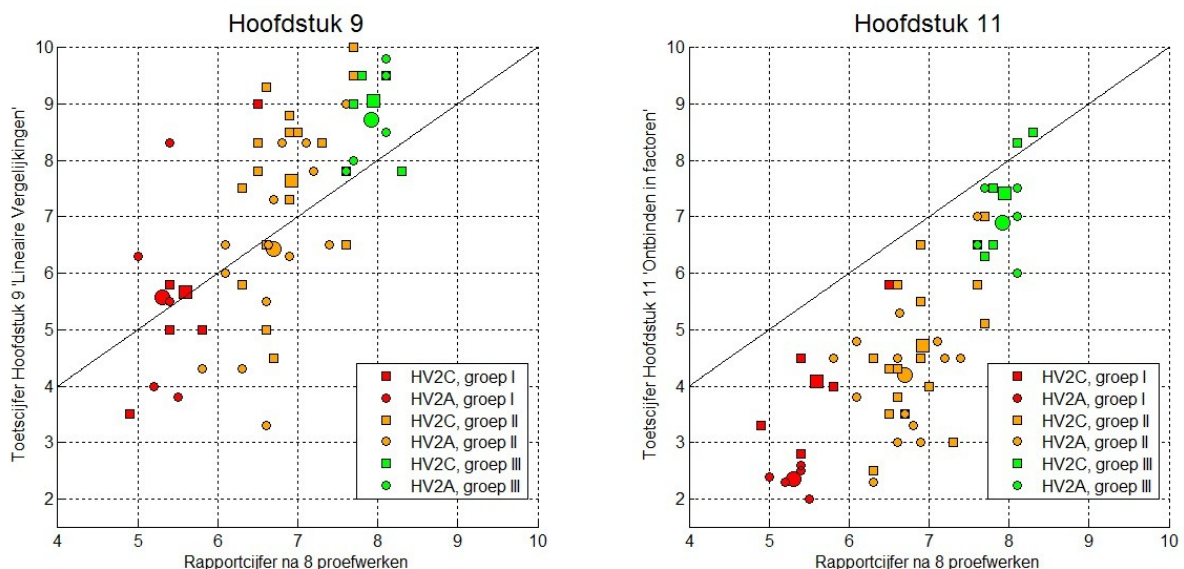
	Groep I	Groep II	Groep III	Totaal
HV2A	5,3	6,7	7,9	6,7
HV2C	5,6	6,9	7,9	6,9

Om goed vergelijkingsmateriaal te hebben, worden de resultaten van hoofdstuk 9 en 11 met elkaar vergeleken. De toets van hoofdstuk 9 toetste vooral de procedurele kennis van de leerlingen. Slechts één uit 40 punten betrof een conceptuele vraag. De toets van hoofdstuk 11 was ook vooral gericht op de procedure van het ontbinden in factoren, maar er werden wel iets meer conceptuele vragen gesteld. De resultaten van hoofdstuk 9 en 11 zijn te vinden in Tabel 3.

Tabel 3. Toetsresultaten hoofdstuk 9 en 11, gemiddelden per groep

Toets hfst 9	Groep I	Groep II	Groep III	Totaal
HV2A	5,6	6,4	8,7	6,7
HV2C	5,7	7,6	9,1	7,5

Toets hfst 11	Groep I	Groep II	Groep III	Totaal
HV2A	2,4	4,2	6,9	4,5
HV2C	4,1	4,7	7,4	5,1



Figuur 6. Toetscijfers van hoofdstuk 9 en hoofdstuk 11 uitgezet tegen de rapportcijfers van alle leerlingen. Rondjes zijn leerlingen uit klas HV2A en vierkantjes leerlingen uit klas HV2C. Rood zijn leerlingen uit groep I, oranje uit groep II en groen uit groep III. De grotere iconen geven de groepsgemiddelden aan. Alle leerlingen boven de zwarte lijn hebben bovengemiddeld gescoord op de toets, alle leerlingen onder hebben ondergemiddeld gescoord.

Figuur 6 laat de resultaten van alle leerlingen zien. De klassengemiddelden verschillen nogal van elkaar bij hoofdstuk 9, maar liefst 0,8. Dit verschil komt vooral tot stand door groep II, waar ze in HV2A veel slechter scoorden dan in HV2C. Dit verschil is duidelijk zichtbaar in

Figuur 6. De iconen voor de groepsgemiddelden van groep I en III liggen dicht bij elkaar in de buurt. Dit wil zeggen dat die groepen ongeveer hetzelfde gescoord hebben: de rapportcijfers van die groepen liggen gemiddeld in de buurt en op dit proefwerk is er door beide groepen uit beide klassen hetzelfde gescoord: ofwel bovengemiddeld (groep III, 9 uit 10 leerlingen) ofwel gemiddeld (groep I). Het grootste verschil zit in groep II. In HV2C scoren 5 uit 17 leerlingen ondergemiddeld, in HV2A 8 uit 14 leerlingen.

De klassengemiddelden lagen bij hoofdstuk 11 iets dichter bij elkaar: een verschil van 0,6. Dit keer komt het verschil vooral tot stand door groep I waar ze in HV2C gemiddeld 1,7 hoger scoorden. Het verschil in groep III is ongeveer hetzelfde als het verschil bij hoofdstuk 9.

Hoofdstuk 11 is duidelijk slechter gemaakt dan hoofdstuk 9: alle leerlingen uit beide klassen (twee leerlingen exclusief uit HV2C - III) scoorden lager dan hun gemiddelde.

3.3 Interview

In totaal zijn er 12 interviews van ongeveer 10 minuten gehouden (ik heb drie leerlingen uit elke klas geïnterviewd na elke toets. Uit elke groep I – II – III koos ik willekeurig één leerling voor de twee interviews). Transcripties van alle interviews zijn te vinden in de bijlage. Verder is een lijst met gebruikte codes te vinden in de bijlage en tevens het resultaat van het coderen van de interviews. De leerlingen worden aangeduid op de volgende wijze: HV2C – II betekent de leerling uit HV2C uit groep II.

3.3.1 Groep I

Uit de cijfers bleek dat leerlingen uit deze groep in beide klassen ongeveer hetzelfde gemiddelde hadden na driekwart van het schooljaar en op de toets van hoofdstuk 9 ongeveer gelijk scoorden, HV2C – I scoorde 5,8 en HV2A – I scoorde 5,5. Ook in het interview komen er niet veel verschillen voor.

Beide leerlingen kenden de procedure van het oplossen van vergelijkingen. Bij vraag 4a en 4b pasten ze goed de weegschaalmethode toe (al doen de net voldoende van de toets vermoeden dat het procedureel nog niet helemaal goed begrepen is).

Conceptueel begrepen ze het oplossen van vergelijkingen wat minder:

Vraag 1	HV2C – I kon wel prima uitleggen wat een lineaire vergelijking is, hier had HV2A – I één hulpvraag nodig.
Vraag 2	Beide leerlingen kunnen niet meteen uitleggen wat de betekenis is van de oplossing van een lineaire vergelijking. HV2A – I lukt het nog niet wanneer hij een grafiek ziet van een lineaire formule (zie Figuur 5). HV2C – I wijst in de grafiek wel correct het snijpunt aan, maar wanneer vraag 2 dan herhaald wordt, kan hij nog geen goed antwoord geven.
Vraag 3	HV2C – I komt met geen goed voorbeeld, ondanks de sturende vraag. Hij komt slechts tot 'uitrekenen hoe duur het is, na een aantal uur werken' en komt niet met een vergelijking. HV2A – I begint daarentegen wel met het noemen van het vergelijken van de prijzen van twee bedrijven maar kan niet duidelijk uitleggen waarin die bedrijven dan zouden moeten verschillen ondanks sturende vragen.
Vraag 4a	Na de goede start op deze vraag, kunnen beide leerlingen alternatieve eerste stappen bedenken voor het oplossen van de vergelijking. Beide leerlingen zien uiteindelijk in dat ' $-3x$ ' ook meteen gedaan kan worden.
Vraag 4b	Een andere eerste stap bedenken bleek lastig. Na een uitleg kan HV2A – I wel het getal noemen waar je beide kanten door kan delen, HV2C – I heeft daar een sturende vraag voor nodig. Beide kunnen niet de correcte expressie opschrijven nadat door 2 is gedeeld.
Vraag 5	HV2C – I komt slechts op een procedureel antwoord, hij probeert uit te leggen

	dat de ene formule groter is dan de andere. HV2A – I komt met wat sturende vragen ook op een deels procedureel antwoord, en deels komt hij op het goede antwoord: ‘Dan wordt de ene prijs hoger dan de andere’.
--	---

De antwoorden geven het idee dat de leerlingen conceptueel op hetzelfde niveau zitten. De interviews gaven niet de indruk dat het oplossen van vergelijkingen een procept is geworden, wat ze eigenlijk precies aan het doen zijn wanneer ze de procedure van de weegschaalmethode toepassen, weten ze niet.

Wat betreft het ontbinden in factoren, kennen beide leerlingen de procedure niet goed. Beide hebben op de toets een dikke onvoldoende gescoord. Toch liet HV2C – I merken dat hij het wel degelijk kon: hij kon $b = 24a^2 - 6a$ zonder hulpvraag ontbinden in factoren. Bij het oplossen van $a^2 + 8a + 15 = 0$ heeft hij wat hulpvragen nodig maar uiteindelijk, nadat de eerste stap van de procedure gegeven is (n.l. $(\quad)(\quad) = 0$ werd gegeven), schrijft hij wel de oplossing op met wat sturende vragen. HV2A – I, echter, heeft heel hulp- en sturende vragen nodig voordat hij überhaupt de expressie $b = 24a^2 - 6a$ kon ontbinden. Ook bij het oplossen van $a^2 + 8a + 15 = 0$ heeft hij erg veel uitleg nodig en veel sturende vragen. Bij elke stap van de procedure kwam hij vast te zitten.

Ook conceptueel vergaat het HV2C – I het beter dan HV2A – I:

Vraag 6	Hoewel beide de correcte lijntjes tekenen (als enigen van alle geïnterviewden), kan alleen HV2C – I ongeveer uitleggen waarom Factor – Product bij elkaar horen (‘als je een factor allemaal bij elkaar doet, krijg je een product van factoren’). HV2A – I zegt slechts ‘bij product moet je factor uitrekenen’. Beide kunnen niet uitleggen waarom Term – Som bij elkaar horen.
Vraag 7	HV2C – I kan na één hulpvraag en één sturende vraag correct een tweede mogelijke oplossing opschrijven. Hij kan er niet meer opschrijven. HV2A – I kon met twee sturende vragen geen goede alternatieve oplossing opschrijven. In wat hij uiteindelijk opschrijft, valt ook op te merken dat hij het hele concept niet begrepen heeft (‘ $b = 6a(4a)(-1)$ ’ na een aantal ‘verbeteringen’).
Vraag 8	Beide leerlingen willen starten met de Som – Product methode alsof er a^2 staat i.p.v. $2a^2$. Wanneer ze iets out-of-the-box moeten denken, komen ze ook niet op een juiste procedure (getuige dat ze nog niet handig zijn in het ontbinden in factoren). Zo noemen ze beide resp. ‘ $8a$ ’ en ‘ a ’ als er wordt gevraagd welke factor er uit $2a^2 + 16a + 30$ gehaald kan worden. Ze proberen de methode toe te passen die ze bij een tweeterm geleerd hebben maar die werkt niet hier. HV2C – I kan echter wel goed de regel $A \cdot B = 0$ toepassen in een nieuwe situatie terwijl HV2A – I daar een hulpvraag en een sturende vraag voor nodig heeft.

3.3.2 Groep II²

Hoewel de groepsgemiddelden van groep II redelijk dicht bij liggen, verschillen de gemiddelde toetscijfers wel erg: ongeveer 0,8 waarbij HV2C hoger scoorde. HV2C – II scoorde 6,5 en HV2A – II scoorde 8,3. De leerlingen werden willekeurig gekozen voordat de toetscijfers bekend werden (de interviews werden meteen de eerste les na de toets gehouden) hierdoor lijken de leerlingen nu niet bepaald representatief voor hun groep II.

HV2C – II maakte een klein foutje in vraag 4a, beiden maakten vraag 4b foutloos. Ze pasten de weegschaalmethode goed toe.

² De leerlingen van HV2C heb ik eerst geïnterviewd. Toen kwam ik in tijdsnood. HV2A – II interviewde ik als eerste uit deze klas en ik heb geprobeerd om iets sneller door het interview heen te gaan om niet weer in tijdsnood te komen. In de codering kan men zien dat ik minder heb doorgevraagd bij deze leerling.

Het verschil tussen de twee leerlingen die zo duidelijk aanwezig was in de toets is niet terug te vinden in het conceptuele begrip van het oplossen van vergelijkingen, echter, HV2C – II lijkt het zelfs iets beter te doen dan HV2A – II.

Vraag 1	HV2C – II geeft meteen een conceptueel correct antwoord. Het antwoord van HV2A – II is veel vager, ze beschrijft een lineaire formule en noemt het oplossen van formules.
Vraag 2	Beide leerlingen beschrijven de procedure van het oplossen. Beide leerlingen geef ik een sturende vraag waar ik een conceptueel antwoord wil horen dat niet komt. Beide denken noemen of beschrijven het hellingsgetal als betekenis van de oplossing van een lineaire vergelijking. Wanneer ze Figuur 5 zien, kan HV2C – II correct het snijpunt aanwijzen en benoemen, HV2A – II heeft ‘geen idee’.
Vraag 3	Beide leerlingen noemen het vergelijken van twee bedrijven. HV2C – II kan niet duidelijk een context geven terwijl HV2A – II dat wel kan, erg nauwkeurig zelfs.
Vraag 4a	HV2C – II komt met één alternatieve eerste stap voor het oplossen. Ze heeft uiteindelijk niet door dat ze meteen $-3x$ had kunnen doen. Dit komt mede omdat ze een fout maakte in haar eerste oplossing. HV2A – II kan zelf geen alternatieve eerste stap bedenken en zelfs na een sturende vraag geeft ze geen antwoord.
Vraag 4b	Beide lukt het niet om een alternatieve eerste stap te bedenken. HV2C – II lukt het ook niet om met hulp op iets zinnigs te komen. HV2A – II bedenkt na wat uitleg dat ze beide kanten door 2 kan delen maar doet dit vervolgens deels incorrect.
Vraag 5	HV2C – II heeft twee sturende vragen nodig voordat ze op een conceptueel juist antwoord komt. HV2A – II werd de vraag direct na vraag 3 gesteld maar ondanks haar correcte situatieschets daar kon ze er geen ongelijkheid-variant bij bedenken. Ze probeert met een getallenvoorbeeld te komen, maar het is niet echt duidelijk wat ze bedoelt.

Hoewel HV2C – II vraag 1, 2 beter beantwoord heeft, beantwoordde HV2A – II vraag 3 beter en vraag 4b ietsje beter.

Wat betreft ontbinden in factoren, scoorde HV2C – II 4,3 en HV2A – II scoorde 4,8. Dit is duidelijk een minder groot verschil dan bij de scores van hoofdstuk 9. Een tweeterm ontbinden beiden zonder dat ze een hulpvraag nodig hebben. HV2C – II komt niet meteen op de juiste procedure om een drieterm te ontbinden. Zo gauw ik bevestig dat ze de Som – Product methode mag gebruiken, schrijft ze perfect de oplossing op. HV2A – II komt in eerste instantie ook niet op de juiste procedure maar heeft verder maar één sturende vraag nodig en wat aansporing om de som af te maken.

Hierna volgt een analyse van het conceptuele gedeelte van de vragen.

Vraag 6	HV2C – II maakte de connectie tussen Som – Product omdat dat haar herinnerde aan de procedure voor het ontbinden van een drieterm. Ze kon echter niet uitleggen waarom Factor – Term bij elkaar zouden horen. Ze kan niet een factor aanwijzen wat aangeeft dat ze niet echt een idee is wat het is. HV2A – II kan niet uitleggen waarom ze haar lijntjes dusdanig gezet heeft. Ze kan niet vertellen wat een factor is.
Vraag 7	HV2C – II kan drie alternatieve oplossingen vlot opschrijven. Ze is de enige leerling die zonder hulpvraag of sturende vraag de expressie ontbindt met de linkerfactor een getal. De overigen moeten aangestuurd of uitgelegd worden dat niet per se een a eruit gehaald moet worden (zoals in de les is uitgelegd) maar dat factoren ook getallen mogen zijn. HV2A – II heeft een hulpvraag nodig om

	de expressie op een tweede manier te kunnen ontbinden in factoren. Voor een derde mogelijkheid heeft ze twee sturende vragen nodig.
Vraag 8	Beide leerlingen hebben de eerste drie hulpvragen die bij vraag 8 horen nodig. HV2A – II heeft een iets opmerkelijke start, wanneer ik haar help met stellen dat de gebruikelijke Som – Product methode niet meteen toegepast mag worden, past ze haar antwoord aan naar $(2a - 3)(a + 5)$. Hoewel ik niet verder heb aangestuurd om het op deze manier op te lossen getuigt dit wel van enig begrip van het ontbinden in factoren. HV2C – II lijkt niet zeker van haarzelf als ze zegt dat de gemeenschappelijke factor van $2a^2 + 16a + 30$, 2 is. Vervolgens ontbinden in factoren lukt haar wel. HV2A – II zegt iets resoluter dat 2 de gemeenschappelijke factor is, maar schrijft het vervolgens verkeerd op en heeft meerdere sturende vragen nodig om op $2 \cdot (a^2 + 8a + 15)$ uit te komen. Met één sturende vraag en aansporing past HV2A – II de regel $A \cdot B = 0$ toe terwijl HV2C – II met een hulpvraag de regel deels toepast (ze schrijft $2 = 0$ niet op).

HV2C – II lijkt minder sturende vragen nodig te hebben dan HV2A – II om de juiste (conceptuele) stappen te maken om de vragen te beantwoorden.

3.3.3 Groep III

De cijfers van de leerlingen uit groep III liggen dicht bij elkaar, HV2C – III scoorde 7,8 en HV2A – III scoorde 8,0.

Bij vraag 4a en 4b lieten beide leerlingen zien dat ze de procedure ‘lineaire vergelijking oplossen’ kenden: beide losten de opgave goed op en deden dit in een vlot tempo.

Qua conceptuele kennis doen ze ook niet voor elkaar onder:

Vraag 1	Beide leerlingen beginnen met het beschrijven van een lineaire formule. Wanneer ze daarop gewezen werden en de vraag herhaald werd, beschreven ze beide de procedure van het oplossen. HV2A – III kan meteen uitleggen wat ‘lineair’ betekent, HV2C – III heeft daar een sturende vraag bij nodig.
Vraag 2	HV2C – III komt meteen met een goed antwoord: ‘dan ga je de coördinaten berekenen van het snijpunt’. Wanneer ze die vervolgens moet aanwijzen in Figuur 5, heeft ze wat uitleg nodig voordat ze het goed doet. HV2A – III geeft eerst een meer procedureel antwoord: ze antwoordt ‘dan ga je kijken wat x is’. Ze kan niet uitleggen welke betekenis die x heeft. Als ze Figuur 5 te zien krijgt, wil ze toch eerst weer de oplosprocedure gebruiken. Ze heeft drie sturende vragen nodig voordat ze het snijpunt kan aanwijzen.
Vraag 3	HV2C – III gaf een antwoord waar ik geen touw aan kon vastknopen ³ . HV2A – III begint met een wiskundige situatie, ‘als je het snijpunt van een grafiek moet hebben.’ Wanneer ik de vraag herhaal, begint ze over het vergelijken van twee prijzen. Ze heeft wat sturende vragen nodig voordat er een geschikte situatie geschetst is.
Vraag 4a	Beide leerlingen komen zonder sturende vraag erachter dat ze meteen ook $-3x$ kunnen doen. Bij HV2A – III heb ik de verdiepende vraag herhaald en zij beschreef nog een derde alternatieve eerste stap.
Vraag 4b	Beide leerlingen vinden geen alternatieve eerste stap. Na wat uitleg en twee sturende vragen kan HV2C – III de vergelijking vereenvoudigen. HV2A – III

³ Deze leerling heb ik als laatste van HV2C geïnterviewd. De andere interviews waren uitgelopen en voor deze leerling had ik weinig tijd. Vraag 3 en 5 stelde ik als laatste toen de bel al was gegaan, ik had geen tijd om sturende vragen te stellen of wat uitleg gevolgd door een vraag.

	heeft ook wat uitleg nodig en drie sturende vragen. Beide komen uiteindelijk op de vereenvoudig ' $x + 3 = 2x$ '.
Vraag 5	HV2C – III geeft weer geen goed antwoord. HV2A – III kan eerst niks bedenken. Ik stuur haar aan om haar antwoord van vraag 3 te gebruiken. Ook dan heeft ze nog een sturende vraag te komen om in de richting van een goede situatieschets te komen.

De toets over ontbinden in factoren hebben beide dames goed gemaakt, HV2C – III scoorde 8,3 en HV2A – III scoorde 7,5.

Beide leerlingen kunnen prima een tweeterm ontbinden in factoren. HV2A – III maakt een foutje bij het oplossen van $a^2 + 8a + 15 = 0$ en heeft daarna een sturende vraag nodig om in de goede richting gezet te worden. Ze is dan nog een beetje onzeker maar schrijft dan wel het goede antwoord op. HV2C – III heeft laten zien dat ze een drieterm kan ontbinden (ze schreef $2 \cdot (a + 3)(a + 5) = 0$ op) maar omdat de vorm er nu iets anders uitzag dan gebruikelijk, zag ze niet dat ze $A \cdot B = 0$ kon gebruiken.

Conceptueel gaan ze weer gelijk op:

Vraag 6	Beide leerlingen trekken dezelfde lijnen. HV2C – III heeft echter geen goed antwoord op waarom ze de lijnen dusdanig getrokken heeft. HV2A – III maakte de connectie tussen Som - Product vanwege de Som – Product methode. Zelfs wanneer haar verteld wordt dat Term – Som en Factor – Product bij elkaar horen, kan ze niet uitleggen waarom dat zou kunnen zijn.
Vraag 7	HV2A – III schrijft met gemak nog twee alternatieve oplossingen op. Op de sturende vraag 'Moet je altijd a buiten haakjes halen', gaf ze een goed antwoord. HV2C – III begrijpt in eerste instantie niet wat ik bedoel met 'een andere manier ontbinden'. Ze schrijft het product helemaal uit en met een hulpvraag en een sturende vraag schrijft ze een verkeerde oplossing op. Wanneer ze na een sturende vraag een correcte oplossing opschrijft, schrijft ze er zo nóg twee op. Haar heb ik niet gevraagd of je altijd a buiten haakjes moet halen.
Vraag 8	Beide leerlingen willen met de Som – Product methode beginnen. HV2C – III denkt dat ze a buiten haakjes kan zetten. Met één sturende vraag haalt ze correct 2 buiten haakjes. Wat ze daarna doet, deed geen andere leerling, ze schreef het op als een product van drie factoren. Hoewel dat wel getuigt van inzicht, zag ze later niet dat ze bij het oplossen de regel $A \cdot B = 0$ gewoon kon uitbreiden en toepassen. Hierdoor kwam ze niet tot een goed eindantwoord. HV2A – III laat zien dat ze niet weet wanneer ze de regel $A \cdot B = 0$ mag toepassen aangezien ze zegt: ' $2a(a + 8) + 30 = 0$ dus $2a = 0$, $a + 8 = 0$ of $30 = 0$ '. Wanneer ze hulpvraag 6 krijgt, is ze onzeker over wat ze op de puntjes moet schrijven. Met een sturende vraag komt ze daarachter.

4. Discussie

In dit onderzoek heb ik gezocht naar een antwoord op de vraag: **Wat zijn de effecten van gedifferentieerd lesgeven (m.b.t. differentiëren in instructie en in leerstof) op het begrijpen (procedureel dan wel conceptueel) van de lesstof (ontbinden in factoren) in 2hv?** Ik heb dit gedaan door twee klassen twee hoofdstukken lang te observeren waarbij tijdens het tweede hoofdstuk, de docente in HV2C differentieerde in instructie en in leerstof terwijl ze in HV2A les gaf zoals gebruikelijk.

In de observaties kwam naar voren dat de docent inderdaad differentieerde in leerstof door de groepen leerlingen verschillende sommen aan te bieden aan de hand van verschillende studieplanners. Ook werd duidelijk dat er op instructie werd gedifferentieerd: ze gaf niet alle groepen tegelijkertijd uitleg en de uitleg was altijd op niveau van de leerlingen die geacht werden te luisteren.

De uitleg, echter, was grotendeels procedureel van aard. Dit is terug te zien in de interviews en de cijfers van de toetsen. De leerlingen van groep III scoorden goed op beide toetsen waar vooral de procedure getoetst wordt ('Los de volgende vergelijkingen op', 'Ontbind in factoren') maar conceptueel waren ze niet zo sterk als dat de toetscijfers zouden doen vermoeden.

4.1 Groep I

Het gedifferentieerd lesgeven lijkt vooral in groep I effect te hebben gehad. De resultaten van het interview na hoofdstuk 9 leek aan te geven dat de leerlingen op hetzelfde niveau zitten: ze haalden ongeveer hetzelfde cijfer en in het interview deden ze niet voor elkaar onder.

Na hoofdstuk 11 lagen de verhoudingen anders. Hoewel de toetscijfers niet echt verschilden, deed HV2C – I het veel beter in het interview. Hij had wat sturende vragen nodig om vervolgens toch met goede antwoorden te komen terwijl HV2A – I duidelijk weinig begrepen had van de lesstof (zowel procedureel als conceptueel) omdat hij zelfs na vele sturende vragen niet goede antwoorden kon geven. Dit zal ook de cijfers van de toets verklaren: daar krijg je geen sturende vragen als je het even niet weet. Maar blijkbaar met een beetje doorvragen lijkt HV2C – I wel wat opgestoken te hebben.

HV2C – I heeft ten opzichte van HV2A – I meer uitleg gehad doordat de docente af en toe groep I een verlengde uitleg gaf. De docent legde dan een extra voorbeeld uit. Verder werd groep I in HV2C bij elkaar voorin gezet waardoor ze makkelijker tijdens de les vragen konden stellen aan de docente (dit gebeurde ook geregeld tijdens het zelfstandig werken).

4.2 Groep II

Gemiddeld stond HV2A – II een volle punt hoger dan HV2C – II. Dit bleek weer uit de toets van hoofdstuk 9 (het verschil in cijfer was 1,8). Maar in het interview leek HV2C – II het conceptueel iets beter te doen. Het verschil in cijfer voor de toets van hoofdstuk 11 is een stuk minder (0,5), maar op het interview lijken ze het zowel procedureel als conceptueel even goed te begrijpen.

Kijkend naar hoe het onderzoek invulling heeft gekregen, is dit misschien niet verwonderlijk: HV2C – II heeft ondanks de differentiatie ongeveer op dezelfde manier les gehad als HV2A – II. De docente startte de gedifferentieerde les in HV2C – II als in HV2A – II: namelijk met de uitleg die voor zowel groep I als II bedoeld was. HV2C – II hoefde niet per se mee te luisteren met de verlengde uitleg voor I of de extra uitleg voor III. Ook volgde ze dezelfde studieplanner als HV2A – II, dus maakte ze dezelfde sommen (mogelijk hebben ze verschillende keuzes gemaakt ten aanzien van de paragraaf Extra Oefening, hier is niet naar gevraagd).

4.3 Groep III

Gemiddeld stonden HV2C – III en HC2A – III er hetzelfde voor: resp. 8,3 en 7,9. Ook op de toets van hoofdstuk 9 scoorden ze bijna gelijk, resp. 7,8 en 8,0. In het interview lieten ze beide zien dat ze de procedure van het oplossen van lineaire vergelijkingen onder de knie hadden. Conceptueel gezien deden ze het beide beter dan de leerlingen uit groep I en II van beide klassen. Beiden lieten op enige momenten in het interview zien dat ze conceptueel begrip hadden.

De verschillen op de toets van hoofdstuk 11 waren iets groter, HV2C – III scoorde 0,8 hoger. Dit verschil is niet terug te vinden in het interview dat volgde. Daar lijken ze weer ongeveer even goed te scoren. Beide lieten op momenten zien dat ze conceptueel begrip hadden van ontbinden in factoren maar op andere momenten maken ze ook fouten die je met conceptueel begrip niet verwacht.

HV2C – III lijkt geen profijt te hebben gehad van de differentiatie: zowel na hoofdstuk 9 als na hoofdstuk 11 lijken beide leerlingen even veel begrip te hebben. HV2C – III heeft tijdens de lessen waarin gedifferentieerd werd soms een aparte uitleg gehad van de docente. Dit was echter dezelfde uitleg als dat de leerlingen van groep I en II een dag later kregen, groep III werd niet uitgedaagd om echt na te denken over de lesstof op hun eigen niveau. Ze werkten alleen verder vooruit en maakten de vwo-pagina extra. In die paragraaf maakten ze sommen die te maken hadden met kwadratische vergelijkingen in een bepaalde context, de boog van een tunnel bijvoorbeeld. Ik heb niet gecontroleerd of de leerlingen van groep III netjes hun huiswerk gemaakt hebben.

4.4 Procept en differentiatie

Terugkomend op de theorie die beschreven is in sectie 1.3, lijkt het erop dat ‘ontbinden in factoren’ voor geen van de zes geïnterviewde leerlingen een procept is geworden. Een aantal leerlingen hadden al moeite met de procedure van het ontbinden, laat staan dat ze echt conceptueel begrepen wat ze aan het doen waren. Toch was in het interview wel duidelijk dat groep II het beter deed dan groep I en groep III beter dan groep II op zowel procedureel als conceptueel niveau.

Hoewel je van leerlingen uit groep I misschien niet hoeft te verwachten dat ze conceptueel begrip krijgen van een onderwerp, zou procedureel begrip een minimale eis moeten zijn. Dit kan bewerkstelligd worden door de tijd dat ze zelfstandig werken in te korten. In dit onderzoek duurde het zelfstandig werken, zelfs voor deze groep, relatief lang (zie de observaties in de bijlage). De docent kan meer tijd besteden aan bijvoorbeeld het begeleiden in oefenen van de procedure.⁴ Hierbij kan er bijvoorbeeld gevraagd worden om voor gewone ‘los op’ of ‘ontbind in factoren’ een stappenplan te maken en dit stappenplan altijd bij de hand te hebben wanneer ze sommen maken. Wanneer de procedure onder de knie is, kan er tijd worden besteed aan conceptueel begrip van het onderwerp. Het zou interessant zijn om te onderzoeken of het andersom ook werkt: wanneer vanaf het begin van de introductie van een nieuw wiskundig object aan het conceptuele begrip gewerkt wordt, leren ze de procedure dan

⁴ Niet elke docent zal de suggestie ‘meer tijd besteden aan de begeleide inoefening ten koste van het zelfstandig werken’ kunnen of willen toepassen. De docente van het huidige onderzoek gaf aan tijdens de lessen bepaalde zaken af te handelen zoals mailtjes, proefwerken nakijken, etc. Zij gaf aan dat ze niet meer tijd aan de begeleide inoefening wilde besteden omdat ze dan minder (ander) werk gedaan krijgt. Het is natuurlijk te betwisten of dat andere werk tijdens een les moet worden gedaan. Toch zijn er de laatste tijd geluiden op gegaan dat de docenten in Nederland relatief veel lesuren draaien ten opzichte van Europese collega's. Op 7 juni 2016 steunde een kamermeerderheid het streven naar maximaal twintig lesuren voor een voltijdsdocent in het voorgezet onderwijs ([2]). Een docent heeft zo extra tijd om de lessen goed voor te bereiden en de lestijd ook 100% voor de leerlingen in te zetten.

ook beter? Voor leerlingen die sterk zijn in wiskunde lijkt dit een gegeven maar voor leerlingen die erg veel moeite hebben met wiskunde lijkt dit niet zo vanzelfsprekend.

Zoals bij groep III is bediscussieerd, lijkt conceptueel begrip niet vanzelf te komen als de docent er geen aandacht aan besteedt, ondanks dat de leerlingen gedifferentieerd les krijgen. Wanneer de docent tijdens het hoofdstuk over ontbinden in factoren de woorden ‘factor’, ‘product’ en ‘ontbinden in factoren’ bijna niet in de mond neemt, is het vanzelfsprekend dat de leerlingen het wiskundig object ‘ontbinden in factoren’ niet conceptueel gaan begrijpen. Iets als een ‘tweeterm’ of ‘drieterm’ zegt de leerlingen niks, en ‘herleiden op nul’ is ze onbekend (dit kwam niet in het interview naar voren omdat daar herleiden op nul niet nodig was, maar het was tijdens de observaties wel duidelijk). Ze kennen slechts de procedure: ‘met haakjes schrijven’, ‘buiten haakjes schrijven’. Het juist benamen van wiskundige bewerkingen, symbolen en expressies is, naar mijn mening, een belangrijke eerste stap naar conceptueel begrip.

Hoewel in dit onderzoek is getracht om divergent te differentiëren, lijkt de conclusie te zijn dat er convergent is gedifferentieerd: vooral de instructieafhankelijke leerlingen lijken te hebben geprofiteerd van de differentiatie (zie Figuur 1 en daarin lijn B).

4.5 Het onderzoek

Vanwege het geringe aantal interviews dat is gehouden (slechts één leerling uit elke groep uit elke klas) is generalisatie niet mogelijk. Hoewel in groep I de differentiatie effect lijkt te hebben gehad, kan het zijn dat het toevallig voor deze jongen heeft gewerkt, of dat hij voor dit hoofdstuk extra hard zijn best heeft gedaan. Wel heeft groep I van HV2C het als geheel beter gedaan dan groep I van HV2A op het proefwerk van hoofdstuk 11.

Verder was duidelijk dat een aantal leerlingen (voornamelijk uit groep I) het al hebben opgegeven voor dit jaar: een aantal hebben zo goed als geen huiswerk gemaakt en duidelijk niet geleerd voor het proefwerk met een ruime onvoldoende als gevolg. Hoezeer een docent dan ook zijn of haar best doet door gedifferentieerd les te geven, het is niet duidelijk of het effect heeft op het begrip op de lesstof van een dergelijke leerling.

Het observatie-instrument is niet empirisch getest. Hoewel het voldeed voor het huidige onderzoek, is het de vraag of gedifferentieerde lessen kunnen worden vastgelegd met behulp van dit instrument. Zo heb ik slechts gekeken naar verschillende instructiemomenten. Dit was het geval en gemakkelijk te observeren aangezien de docente normaal gesproken elk lesonderdeel klassikaal doet. Maar zoals ook eerder is opgemerkt, heeft de docente weinig aandacht geschonken aan de conceptuele kant van het onderwerp (of dat nu ‘oplossen van lineaire vergelijkingen’ of ‘ontbinden in factoren’ is. In dat opzicht zou men kunnen concluderen dat de differentiatie niet volgens het IGDI is verlopen.

Ik heb zo objectief mogelijk de interviews geanalyseerd. Het zou echter betrouwbaarder zijn geweest als een extern persoon ook de interviews had gecodeerd en de coderingen naast elkaar waren gelegd en verschillen waren besproken. Qua validiteit werd er voor gezorgd dat zoveel mogelijk aspecten van ‘oplossen van lineaire vergelijkingen’ en ‘ontbinden in factoren’ getoetst werden in het interview. De vragen gaven de leerlingen de mogelijkheid om blijk te geven van zowel hun procedurele als conceptuele begrip van de lesstof.

4.6 Aanbevelingen

Zoals in sectie 4.5 is aangehaald, is het observatie-instrument niet empirisch getest. Voor vervolgonderzoek zou het interessant zijn om een dergelijk instrument te ontwikkelen. Hierbij zouden vele docenten geobserveerd kunnen worden om te kijken waarin hun lessen verschillen ten aanzien van verschillende aspecten van differentiatie. Het instrument kan dan gebruikt worden om docenten voor te lichten in hoeverre ze differentiëren in hun les en hoe ze in hun lessen eventueel meer kunnen differentiëren.

Verder zou men kunnen kijken of de resultaten uit dit onderzoek herhaald kunnen worden. Hebben altijd de leerlingen die het zwakst zijn in wiskunde het meest baat bij differentiatie? Op welke manier zou divergentie differentiatie het beste naar voren kunnen komen?

5. Conclusie

In het onderzoek werd met behulp van een semi-gestructureerd interview een antwoord gezocht op de volgende vraag: **Wat zijn de effecten van gedifferentieerd lesgeven (m.b.t. differentiëren in instructie en in leerstof) op het begrijpen (procedureel dan wel conceptueel) van de lesstof (ontbinden in factoren) in 2hv?** De manier van differentiëren zoals is toegepast in dit onderzoek lijkt vooral een positief effect te hebben gehad op de instructieafhankelijke leerlingen (convergente differentiatie). Na hoofdstuk 9 (oplossen van lineaire vergelijkingen) presteerden de leerlingen per groepen relatief even goed, zowel procedureel als conceptueel. Zoals verwacht presteerden de leerlingen van groep III het beste, gevolgd door groep II en liet groep I het minste (vooral conceptuele) begrip zien. Na hoofdstuk 11 (ontbinden in factoren), waarvan de lessen in HV2C gedifferentieerd waren, presteerde de leerling van groep I uit HV2C zowel op procedureel als conceptueel gebied beter dan zijn tegenhanger uit HV2A. Bij de leerlingen uit groep II en III is dit positieve effect niet gevonden. De leerlingen uit deze groepen van HV2C leken het niet relatief beter te hebben gedaan dan hun tegenhangers uit HV2C.

6. Referenties

- Bosker, R.J. (2005). *De grenzen van gedifferentieerd onderwijs*. Groningen: Rijksuniversiteit Groningen.
- Simons, P.J.R. (1995). Leerlingenkenmerken. In J. Lowyck, & N. Verloop (Red.), *Onderwijskunde. Een kennisbasis voor professionals* (pp. 15-42). Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Reezigt, G.J. (1993). *Effecten van differentiatie op de basisschool*. Dissertatie. Groningen: RUG / GION.
- Reezigt, R.J. (1999). Differentiatie in het onderwijs. In H.P.J.M. Dekkers (Red.), *Omgaan met Verschillen. Onderwijskundig Lexicon, Editie III* (pp. 11-23). Alphen aan den Rijn: Samsom.
- Berben, M., & Van Teeseling. (2014). *Differentiëren is te leren! Omgaan met verschillen in het voortgezet onderwijs*. Amersfoort: CPS.
- Kolb, D.A., & Fry, R. (1975). 'Toward an applied theory of experimental learning'. In C. Cooper (ed.), *Theories of Group Process*, London: John Wiley.
- Houtveen, T., Koekebacker, E., Mijs, D., & Vernooij, K. (2005). *Succesvolle aanpakken van risicoleerlingen. Wat kan de school doen?* Antwerpen/Apeldoorn: Garant.
- Lou, Y., Abrami, P.C., Spence, J.C., Poulsen, C., Chambers, B., & d'Apollonia, S. (1996). *Within-class grouping: A meta-analysis*. Review of Educational Research, 66(4), pp. 423-458.
- Reezigt, G.J., Houtveen, A.A.M., & Van de Grift, W. (2001). *Vormgeving en effecten van adaptief onderwijs*. Groningen: RUG / GION.
- Veenman, S. (1992). Effectieve instructie volgens het directe instructiemodel. *Pedagogische Studiën*, 69(4), 242-269.
- Veenman, S. (1998). Leraargeleid onderwijs: directe instructie. In J.D. Vermunt & L. Verschaffel (Red.), *Onderwijzen van kennis en vaardigheden. Onderwijskundig Lexicon, Editie III* (pp. 27-47). Alphen aan den Rijn: Samsom.
- Veenman, S., Bakermans, J., Franzen, Y., & Hoof, M. van (1997). Leren lesgeven met het directe instructiemodel op de tweedegraads lerarenopleiding. *Pedagogische Studiën*, 74(5), 328-337.
- Rosenshine, B. (1985). Direct Instruction. In T. Husen, & T.N. Postlewaite (Eds.), *International Encyclopedia of Education* (pp. 1395-1400). Oxford: Pergamon Press.
- Leenders, Y., Naafs, F. & Oord, I. van den (2002). *Effectieve instructie. Leren lesgeven met het activerende directe instructiemodel*. Amersfoort: CPS.
- Ebbens, S., & Ettekoven, S. (2013). *Effectief leren*. Groningen/Houten: Noordhoff.
- Hattie, J., & Timperley, H. (2007). *The power of feedback*. Review of Educational Research, 77(1), pp. 81-112.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.

Websites:

- [1] <http://www.onderwijsmaakjesamen.nl/thema/inspirerend-onderwijs/krachtig-leren-effectief-leren/>
- [2] <https://www.nd.nl/nieuws/nederland/kamer-wil-maximaal-20-lesuren.1757177.lynkx>

Bijlagen

- Formulier – Lesobservatie differentiatie
- Lesobservaties HV2C en HV2A gedurende twee hoofdstukken
- Transcripties interviews 12 en 13 mei
- Transcripties interviews 2 en 3 juni
- Lijst met gebruikte codes
- Resultaat van de gecodeerde interviews

Formulier – Lesobservatie differentiatie

Klasgegevens:

Klas:		Boek:	
Dag:		Hoofdstuk:	
Uur:		Paragraaf:	
Docent:			

Lesdoelen:

- 1.
- 2.
- 3.

				Groepen		
	Van ...	Tot ...	Wat	I	II	III
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

Lesverloop:

		Groepen		
	Wat gebeurt er?	I	II	III
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				

Lesobservaties gedurende twee hoofdstukken

Opmerking vooraf: bij de lesstart hoort ook de tijd die de leerlingen nodig hebben om van het ene lokaal naar het andere te gaan. Onder terugblik wordt verstaan: huiswerk bespreken.

Onderwerp: Voorkennis bij lineaire vergelijkingen, par 9-V				
2016-03-29 HV2C	mins		2016-03-29 HV2A	mins
Lesstart	12		Lesstart	9
Terugblik + Oriëntatie, klassikaal			Terugblik + Oriëntatie, klassikaal	
Uitleg, klassikaal. Zowel conceptueel als procedureel	7		Uitleg, klassikaal. Zowel conceptueel als procedureel	9
Conceptuele vragen beantwoord door: I, 2x II			Conceptuele vragen beantwoord door: I, 3x II	
Procedurele vragen beantwoord door: 3x II			Procedurele vragen beantwoord door: I, 2x II	
Begeleide inoefening, klassikaal	17		Begeleide inoefening, klassikaal	13
Antwoorden gegeven van opdrachten: I, 6x II, 2x III			Antwoorden gegeven van opdrachten: I, 10x II, III	
Zelfstandig werken, klassikaal	11		Zelfstandig werken, klassikaal	16
Leseinde	3		Leseinde	3
Onderwerp: par 9-1 Met de balans				
2016-03-30 HV2C	mins		2016-03-30 HV2A	mins
Lesstart	13		Lesstart	17
Terugblik, klassikaal			Terugblik, klassikaal	
Antwoorden gegeven van opdrachten: II, 2x III			Antwoorden gegeven van opdrachten: II, III	
Uitleg/begeleide inoefening, klassikaal. Zowel conceptueel als procedureel	24		Uitleg/begeleide inoefening, klassikaal. Zowel conceptueel als procedureel	21
Antwoorden gegeven van opdrachten: 4x I, 17x II, 2x III			Antwoorden gegeven van opdrachten: 2x I, 10x II, III	
Zelfstandig werken, klassikaal	12		Zelfstandig werken, klassikaal	11
Leseinde	1		Leseinde	1
Onderwerp: par 9-2 Vergelijkingen oplossen				
2016-03-31 HV2C	mins		2016-04-01 HV2A	mins
Lesstart	21		Lesstart	23
Terugblik, klassikaal			Terugblik, klassikaal	

Antwoorden gegeven van opdrachten: 2x I, 5x II			Antwoorden gegeven van opdrachten: 2x I, 2x II	
Uitleg, klassikaal. Procedureel	1		Uitleg/begeleide inoefening, klassikaal. Procedureel	5
			Antwoorden gegeven van opdrachten: 2x II, 2x III	
Zelfstandig werken, klassikaal	23		Zelfstandig werken, klassikaal	22
Leseinde. Aankondiging SO	5		Leseinde: geen	0
Onderwerp: par 9-3 Snijdende lijnen				
2016-04-12 HV2C	mins		2016-04-08 HV2A	Mins
Lesstart	24		Lesstart	24
Terugblik + Oriëntatie, klassikaal			Terugblik + Oriëntatie, klassikaal	
Antwoorden gegeven van opdrachten: 2x I, 5x II, 3x III			Antwoorden gegeven van opdrachten: 3x II, III	
Zelfstandig werken, klassikaal	24		Zelfstandig werken, klassikaal	25
Leseinde	2		Leseinde. Aankondiging SO	1
Onderwerp: SO Vergelijkingen oplossen				
2016-04-14 HV2C	mins		2016-04-12 HV2A	mins
Lesstart	8		Lesstart	7
SO	30		SO	30
SO bespreking	7		SO bespreking	8
Leseinde	5		Leseinde	5
Onderwerp: par 9-4 Oplossing van een ongelijkheid				
2016-04-20 HV2C	mins		2016-04-13 HV2A	mins
Lesstart	15		Lesstart	6
Terugblik, klassikaal			Terugblik, klassikaal	
Antwoorden gegeven van opdrachten: I, 3x II				
Uitleg/begeleide inoefening, klassikaal. Vooral procedureel	17		Uitleg, klassikaal. Vooral procedureel	10
Procedurele vragen beantwoord: I, II			Procedurele vragen beantwoord door: II, 2x III	
Zelfstandig werken	15		Zelfstandig werken	18
Leseinde	3		Uitleg, klassikaal. Procedureel	1
			Zelfstandig werken	14

			Leseinde	1
Onderwerp: par 9-5 Het oplossen van een ongelijkheid				
2016-04-21 HV2C	mins		2016-04-15 HV2A	mins
Lesstart	17		Lesstart	13
Terugblik, klassikaal			Terugblik, klassikaal	
Antwoorden gegeven van opdrachten: I, II, III			Antwoorden gegeven van opdrachten: II, III	
Uitleg/Begeleide inoefening, klassikaal. Vooral procedureel	18		Uitleg/Begeleide inoefening, klassikaal. Zowel conceptueel als procedureel	14
Procedurele vragen beantwoord: 2x I, 4x II, III				
Zelfstandig werken, klassikaal	13		Zelfstandig werken, klassikaal	22
Leseinde	2		Leseinde	1
Onderwerp: par 9-6 Gemengde opgaven / Extra Opgaven				
2016-05-10 HV2C			2016-04-20 HV2A	mins
Lesstart	8		Lesstart	17
			Terugblik	
			Antwoorden gegeven van opdrachten: II	
Oefentoets bespreken, klassikaal	26		Uitleg, klassikaal. Procedureel	1
Antwoorden gegeven van opdrachten: I, 5x II, III				
Zelfstandig werken	14		Zelfstandig werken, klassikaal	30
Leseinde	2		Leseinde	2
Onderwerp: herhaling lesstof				
			2016-05-10 HV2A	mins
			Lesstart	7
			Oefentoets bespreken, klassikaal	19
			Antwoorden gegeven van opdrachten: I, 2x II	
			Zelfstandig werken, klassikaal	22
			Leseinde	2
Toets Hfst 9 Vergelijkingen oplossen				

2016-05-11 HV2C				2016-05-11 HV2C		
Onderwerp: Voorkennis bij ontbinden in factoren, par 11-V						
2016-05-12 HV2C		mins		2016-05-13 HV2A		Mins
Lesstart		8		Lesstart		5
Terugblik + Oriëntatie, klassikaal				Terugblik + Oriëntatie, klassikaal		
Uitleg/Begeleide inoefening, klassikaal. Vooral procedureel		7		Uitleg/Begeleide inoefening, klassikaal. Vooral procedureel		8
Procedurele vragen beantwoord: I				Procedurele vragen beantwoord: II		
Zelfstandig werken, klassikaal		27		Zelfstandig werken, klassikaal		35
Leseinde		3		Leseinde		2
Onderwerp: par 11-1 Ontbinden in factoren						
2016-05-17 HV2C		mins		2016-05-17 HV2A		mins
Lesstart		20		Lesstart		14
Toetsbespreking, klassikaal (maar voor degenen met een relatief hoog cijfer mochten verder werken)				Toetsbespreking, klassikaal		
Zelfstandig werken, klassikaal		7		Zelfstandig werken, klassikaal		34
Uitleg/Begeleide inoefening, groep I. Vooral procedureel	Zelfstandig werken, groep II, III	5		Leseinde		2
Zelfstandig werken, klassikaal						
Zelfstandig werken, groep I en II	Begeleide inoefening, groep III	3				
Zelfstandig werken, klassikaal		7				
Leseinde		1				
Onderwerp: par 11-2 Ontbinden van tweetermen						
2016-05-19 HV2C		mins		2016-05-18 HV2A		Mins
Lesstart		4		Lesstart		5
Terugblik, klassikaal				Terugblik, klassikaal		
Uitleg/Begeleide inoefening, klassikaal		11		Uitleg/Begeleide inoefening, klassikaal. Vooral		10

Antwoord gegeven van opdrachten: 4x II, III				procedureel Procedurele vragen beantwoord: 2x II, III	
Zelfstandig werken, groep I en II	Uitleg, groep III (en II, voor degenen die wilden meeluisteren). Vooral procedureel	4		Zelfstandig werken, klassikaal	33
Zelfstandig werken, klassikaal		28		Leseinde	2
Leseinde		3			
Onderwerp: par 11-3 $A \times B = 0$					
2016-05-20 HV2C		mins		2016-05-20 HV2A	mins
Lesstart		7		Lesstart	11
Terugblik				Terugblik, klassikaal	
Uitleg, klassikaal. Zowel conceptueel als procedureel Procedurele vraag beantwoord: III		6		Uitleg/Begeleide inoefening. Vooral procedureel Antwoorden gegeven van opdrachten: I	5
Uitleg/Begeleide inoefenen, groep I en II. Procedureel Antwoorden gegeven van vragen: I, 3x II	Zelfstandig werken, groep III	7		Zelfstandig werken, klassikaal	32
Zelfstandig werken, groep I en II	Uitleg/Begeleide inoefening, groep III (en II, voor degenen die wilden meeluisteren). Procedureel Procedurele vraag beantwoord: III	7		Leseinde	2
Zelfstandig werken, klassikaal		19			
Leseinde		4			
Onderwerp: par 11-4 Ontbinden van drietermen					
2016-05-24 HV2C		mins		2016-05-24 HV2A	Mins
Lesstart		10		Lesstart	13
Terugblik, klassikaal				Terugblik, klassikaal	

Antwoorden gegeven van opdrachten: II				Antwoorden gegeven van opdrachten: 2x II, III	
Uitleg/Begeleide inoefening, groep I en II. Zowel conceptueel als procedureel Procedurele vraag beantwoord: II	Zelfstandig werken, groep III	13		Uitleg/Begeleide inoefening, klassikaal. Vooral procedureel Procedurele vraag beantwoord: 2x II	5
Begeleide inoefening, groep I (paar van II). Antwoorden gegeven van opdrachten: 2x I	Zelfstandig werken, groep II en III	3		Zelfstandig werken, klassikaal	30
Zelfstandig werken, klassikaal (*groep III werkt goed samen, leggen elkaar hun lesstof uit)		22		Leseinde	2
Leseinde		2			
Onderwerp: par 11-5 Kwadratische vergelijkingen					
2016-05-25 HV2C		mins		2016-05-25 HV2A	Mins
Lesstart		7		Lesstart Terugblik, klassikaal Antwoorden gegeven van opdrachten: I, 2x II	14
Zelfstandig werken, klassikaal		24		Zelfstandig werken, klassikaal	16
Zelfstandig werken, groep I en II	Feedback, groep III	4		Uitleg/Begeleide inoefening, klassikaal. Zowel conceptueel als procedureel Procedurele vraag beantwoord: II	11
Uitleg/Begeleide inoefening, groep I en II. Zowel conceptueel als procedureel Conceptuele vragen beantwoord: 2x II Procedurele vragen beantwoord: 2x II	Zelfstandig werken, groep III	9		Zelfstandig werken, klassikaal	6
Leseinde		6		Leseinde	3
Onderwerp: par 11-6 Gemengde Opgaven					

2016-05-26 HV2C	mins		2016-05-27 HV2A	mins
Lesstart Terugblik, klassikaal* Antwoorden gegeven van opdrachten: 5x I, 11x II, III *Hoewel het een klassikaal moment is, zie ik alle leden van groep III zelfstandig werken en elkaar uitleg geven.	35		Lesstart Terugblik, klassikaal* Antwoorden gegeven van opdrachten: 2x I, 9x II, 3x III *Ook in deze groep werken er veel zelfstandig door, al werd hen af en toe ook een vraag gesteld	30
Zelfstandig werken, groep I en II		1	Zelfstandig werken, klassikaal	20
Feedback, groep III				
Zelfstandig werken, klassikaal	12		Leseinde	0
Leseinde	2			
Onderwerp: par 11 – Extra Oefening Basis / Gemengd / Complex				
2016-05-31 HV2C	mins		2016-05-31 HV2A	mins
Lesstart Terugblik, klassikaal Antwoorden gegeven van opdrachten: 3x II	18		Lesstart Terugblik, klassikaal	17
Zelfstandig werken, klassikaal	30		Zelfstandig werken	31
Leseinde	2		Leseinde	2
Toets Hfst 11 Ontbinden in factoren				
2016-06-01 HV2C			2016-06-01 HV2A	

Transcriptie Interviews 12 en 13 mei

Interview vragen:

- 1) Wat is een lineaire vergelijking?
- 2) Wat betekent het om een vergelijking op te lossen?
- 3) Kun je een echte situatie bedenken waarbij je een lineaire vergelijking moet oplossen?
- 4a) Los op: $13x + 3x + 14 = 3x - 5$
- 4b) Los op: $2(x + 3) = 4x$
- 5) Kun je een echte situatie bedenken waarbij je een ongelijkheid moet oplossen?

I staat voor de interviewer.

Interview 1 – Nena Wevers, HV2C – II

I: Het vorige hoofdstuk heette lineaire vergelijkingen. Zou jij zo kunnen uitleggen wat een lineaire vergelijking is? Heb je daar een beeld bij?

N: Nou, twee formules die je met elkaar vergelijkt.

I: Zou je een voorbeeldje kunnen opschrijven?

N: Euh, (schrijft op) $4x + 5 = 6x - 2$

I: Ja. Lineaire vergelijking bestaat uit twee woorden. Wat maakt dat deze vergelijking lineair is?

N: Omdat ze met elkaar..., euhm, ze hebben allebei een letter en een cijfer.

I: Weet je wat lineair betekent?

N: Volgens mij op één lijn.

I: Ja. En wat zie je als je naar die twee formules kijkt?

N: Euhm.

I: Als jij hier van deze formule een grafiek zou tekenen, wat komt daar dan uit?

N: Twee lijnen. Lineaire lijnen.

I: Ja. Een rechte lijn.

N: Ja!

I: Wat maakt het dat dit (wijst op papier) een vergelijking is? Ik zie het lineaire gedeelte, ik zie twee lineaire formules. Wat maakt dat het een vergelijking is?

N: dat ze ergens een snijpunt hebben.

I: Ja, je vergelijkt ze met elkaar. Het is-gelijk-teken. En als ik vraag naar een oplossing, wat betekent dat dan? Als je een lineaire vergelijking oplost?

N: Dan komt uiteindelijk een x uit en die kun je hier (wijst naar de vergelijking) invullen.

I: Ja, en wat betekent die x ?

N: Een hellingsgetal. Dat je een hellingsgetal hebt.

I: Wat gebeurt er als je, ja, ik weet dat je deze kunt oplossen, als jij die x hebt, wat betekent dan die x voor wat jij hier (wijst naar vergelijking) hebt staan?

N: Dat kun je in een grafiek invullen en dan weet je dat de onderste x (I: ik denk dat ze lijn bedoelt) bij de x -as moet staan.

I: En die x , volgens mij heb je net al een keer gezegd dat is dan de x -waarde van.... Ja als we twee lijnen hebben...

N: Ja dan is dat de hellingsgetal en een snijpunt.

I: Oké, verder had ik hier een grafiek. Die daarbij hoort is $2x - 3$. Je ziet, hij begint bij min 3 en gaat elke keer één opzij, twee omhoog. En hier de lijn, $y = 10$. Wat betekent het als je die vergelijking zou oplossen? $2x - 3 = 10$? Waar zit je dan in de grafiek? Wat ben je dan aan het doen?

N: Euhm, dan zoek je het snijpunt van de x op (wijst naar de x -as)

I: en waar zit dat?

N: (Wijst naar het snijpunt van de twee lijnen)

I: en de oplossing zou dan zijn?

N: Euhm, 6,5 denk ik.

I: Ja.

I: Zou jij zelf een situatie kunnen bedenken waarbij je een lineaire vergelijking moet oplossen?

N: Bijvoorbeeld als je, je koopt een nieuwe vloer en je wilt twee bedrijven met elkaar vergelijken. Wat goedkoper is.

I: Zijn dat dan twee vaste prijzen?

N: Nee, dan kies je gewoon de goedkoopste met startprijs en prijs per uur...

I: En als die twee verschillen?

N: Dan krijg je uiteindelijk een ander antwoord.

I: Nu heb ik hier twee lineaire vergelijkingen staan. Zou je die allebei kunnen oplossen?

N:

Handwritten solution of a system of linear equations on grid paper:

$$\begin{aligned} 13x + 3x + 14 &= 3x - 5 \\ 10x + 14 &= -5 \\ 10x &= -19 \\ x &= -1,9 \end{aligned}$$

On the right side, the steps for solving the first equation are shown with arrows:

$$\begin{aligned} &\downarrow -3x \\ &\downarrow -14 \\ &\downarrow :10 \end{aligned}$$

I: Zou je die vergelijking ook nog op een andere manier kunnen oplossen? Zonder dat je met $-3x$ begint?

N: Ja, dan begin je denk ik met de $+5$.

I: En nog een andere? Er zijn natuurlijk heel veel verschillende manieren.

N: Hmm, deze bij elkaar optellen naar $16x$.

I: en wat gebeurt er daarna? Wat zou daarna je volgende stap zijn?

N: dan haal je er weer $3x$ af.

I: Heel goed. En de volgende:

Handwritten solution of a linear equation on grid paper:

$$\begin{aligned} 2(x + 3) &= 4x \\ 2x + 6 &= 4x \\ 6 &= 2x \\ x &= 3 \end{aligned}$$

On the right side, the steps for solving the first equation are shown with arrows:

$$\begin{aligned} &\downarrow -2x \\ &\downarrow \\ &\downarrow :2 \end{aligned}$$

I: En hier ook weer dezelfde vraag: Zou jij van deze vergelijking een andere eerste stap kunnen bedenken dan de haakjes wegwerken?

N: Euhm, misschien... $-x$? Of -2 ?

I: Wat zou er gebeuren als je -2 doet? Aan deze (wijst linkerkant aan) kant?

N: Dat kan niet.

I: Nee, dat gaat niet.

I: Wat ik hier zie, 2 keer een getal en ik zie een 4 keer x . Wat zou er gebeuren als ik beide kanten eerst zou delen door 2? Wat zou je dan aan de linkerkant overhouden?

N: 1?

I: In zijn geheel?

N: euhm, ik heb geen flauw idee.

I: Oké, dan laten we het hier bij.

I: Dan heb ik nog een laatste vraag. Ik heb net gevraagd naar een situatie waarbij je een lineaire vergelijking oplost, zou je ook een situatie kunnen bedenken waarbij je bijvoorbeeld een ongelijkheid moet oplossen?

N: ...Euhm, ...

I: en je mag best wel weer denken aan wat je net zei, met bijvoorbeeld vloer leggen. Als je twee bedrijven in dienst neemt...

N: Oja, misschien ook met de prijs. Met de uren...

I: Stel je voor als ik het voorbeeldje geef, ze hebben verschillende starttarieven, de één hoger dan de andere, maar prijs per uur is toch goedkoper. Wat voor een vraag kun je daarbij bedenken?

N: Nou welke na hoeveel uur goedkoper is, welke..., ja, zoiets, welke dan goedkoper is dan de andere.

I: Prima. Bedankt!

Interview 2 – Rens Fokkink, HV2C – I

I: We hebben het vorige hoofdstuk gehad over lineaire vergelijkingen en zou jij in je eigen woorden kunnen vertellen wat een lineaire vergelijking is?

RF: Euhm, nou, dat is gewoon als je, een grafiek en dan heb je twee formules. En die,..., nou die vergelijk je dan soort van, zeg maar.

I: Ja die vergelijk je met elkaar. En wat betekent het lineaire gedeelte van lineaire vergelijkingen?

RF: Dat is zeg maar wanneer, als je een grafiek hebt, dat het gewoon één rechte lijn is (laat het zien met zijn hand) en niet zo... (maakt kromme beweging met hand)

I: Ja. En geldt dat voor beide lijnen? Of voor ééntje?

RF: Voor beide.

I: Ja voor beide inderdaad. En vergelijking, wat is het vergelijkende deel?

RF: Euhm.. is?

I: is gelijk aan

I: Ik heb daarvoor ook even een grafiek gemaakt. Hier zie je een lineaire vergelijking met $2x - 3 = 10$. Hoe kun je zien dat $2x - 10$, dat dat deze lijn is?

(I laat zien waarom de lijn bij de formule hoort)

I: Ja. Wat betekent deze lineaire vergelijking, wat zoek je dan eigenlijk? We hebben hier die vergelijking, als je die gaat oplossen, wat krijg je dan?

RF: Euhm, ..., wat y is, of zo? Denk ik.

I: Wat betekent het als jij een vergelijking gaat oplossen?

RF: ..., euhm, dan bereken je gewoon die andere lijn en dan snijden, ofzo...

I: Ja, kun je dat bij deze aanwijzen? Waar het snijpunt ligt?

RF: Ja, hier (wijst correct het snijpunt aan).

I: En wat doe je dus eigenlijk als jij deze vergelijking gaat oplossen? Wat is het resultaat dan van de oplossing?

RF: ..., euhm, ja, dat weet ik ook niet echt.

I: En als ik zeg, dat als jij deze gaat oplossen, dat je dan een x -waarde eruit krijgt, waar ze elkaar snijden. Wat in dit geval 6,5 zal zijn.

RF: ...

I: Als we nu eens, verder. Zou jij nu zo een situatie kunnen bedenken waarbij je een lineaire vergelijking moet oplossen? Dat mag van alles zijn, wat je misschien herinnert van uit het boek?

RF: Joa, als je een, euh, zou willen uitrekenen hoe duur het is, na een aantal uren werken. Ofzo.

I: Ja? Maar dan weet je van te voren al wat de prijs is.

RF: Ja dan kun je dat zo uitrekenen.

I: En als ik bijvoorbeeld zeg, ik mocht vroeger altijd als ik naar het zwembad ging, voor het discozwemmen, kreeg ik 10 gulden mee en de entree prijs was 3,50 en ik weet dat elk snoepzakje koste 25 cent. En als ik nou zou willen weten hoeveel zakjes snoep kan ik kopen? Is dat dan een lineaire vergelijking?

RF: ... Volgens mij wel. Noh. Euh, ja, denk het wel.

I: Ja klopt, want we hebben 3,50 vaste startprijs, elk zakje kost 25 cent en ik heb 10 gulden. Ja, en als je dan wilt weten hoeveel snoepzakjes daarin passen.

I: Euhm, verder een vraag. Ik heb hier twee lineaire vergelijkingen staan. Zou jij kunnen proberen om ze allebei op te lossen?

RF:

Handwritten algebraic steps on grid paper:

$$\begin{array}{rcl} 13x + 3x + 14 & = & 3x - 5 \\ 16x + 14 & = & 3x - 5 \quad -3x \\ 13x + 14 & = & -5 \quad -14 \\ 13x & = & -19 \quad :13 \end{array}$$

I: Je bent begonnen met de... $-3x$ te doen, heb jij een idee of je ook met een andere stap had kunnen beginnen?

RF: Euhm, ja, met de -14 .

I: Ja, dat had ook gekund. Zie je nog een andere mogelijkheid?

RF: Ja, -16 ofzo (I: hij bedoelt $16x$). Of $+5$.

I: ja, maar eigenlijk zoek ik nog een andere mogelijkheid. Want wat jij hebt gedaan is die twee samen nemen (wijst aan), en daarna $-3x$. Maar zou je nog een andere zien dan eerst die twee samennemen?

RF: Ja, gelijk $3x$ eraf halen.

I: Ja heel goed.[stukje uitleg waarom je dan twee regels in één keer doet]

I: En die tweede, zou je die ook kunnen oplossen?

RF: Ja

Handwritten algebraic steps on grid paper:

$$\begin{array}{rcl} 2(x+3) & = & 4x \\ 2x + 6 & = & 4x \quad -2x \\ 6 & = & 2x \quad :2 \\ x & = & 3 \end{array}$$

I: Yep. En hier eigenlijk weer dezelfde vraag: Zou je dan ook nog weer een andere eerste stap kunnen bedenken?

RF: ...Euhm, ..., nee?

I: En als ik zeg, bij de weegschaalmethode moet je altijd link en rechts hetzelfde doen. Altijd of plus of min. Als ik zeg, dat je ook aan beide kanten mag delen, dat dat ook zomaar mag. Zou jij, als we bijvoorbeeld beide kanten gaan delen door een getal, zou dat ook kunnen?

RF: ...

I: Dan geef ik je een hint, als ik beide kanten ga delen door 2, zou dat kunnen? Wat hou je dan over?

RF: ... 3? Moet je dat bij elkaar optellen dan? 2 delen door 2 en 4...

I: Wat hou je dan over?

RF: 1 is $2x$?

[stukje onbelangrijk]

I: En dan heb ik nog één allerlaatste vraag. Als ik het heb over een ongelijkheid, zou je daarvan een voorbeeld kunnen noemen?

RF: Dat is toch als, als het pijltje van een formule en dat is dan groter dan ... de formule.

I: En een voorbeeld uit het echte leven, heb je daar een idee bij?

RF: Nee...

I: Oké, prima, dankjewel.

Interview 3 – Amber Walterbos, HV2C – III

I: Het vorige hoofdstuk ging over lineaire vergelijkingen. Zou jij in jouw eigen woorden kunnen vertellen wat een lineaire vergelijking is?

A: Nou, een lijn in een grafiek die telkens met dezelfde stappen gaan stijgen..

I: een lijn, ja, dat is dan weer een lineaire formule, dan heb je $y =$ met... ja, en een lineaire vergelijking, wat?

A: Oh dan, hoe zeg je dat, dan moet je zorgen dat je de x en de gewone getallen uit elkaar splitst. En dan uiteindelijk moet je te weten komen wat de x is, dus betekent, dan ga je kijken of

I: Mag ik je heel even afbreken? Nu ben je aan een oplosprocedure bezig en dan ben je eigenlijk al aan het oplossen. Maar echt een lineaire vergelijking, je begon net al heel mooi met een rechte lijn en wat doe je bij een vergelijking dan, dan vergelijk je twee lijnen.

A: Ja

I: En wat betekent het lineaire gedeelte uit lineaire vergelijkingen?

A: Ja als het op dat punt omhoog of naar beneden gaat, toch? Bij het snijpunt, of hij omhoog of naar beneden gaat.

I: Kan dat ook een kromme lijn zijn?

A: Nee, volgens mij niet.

I: Lineair dat wil gewoon zeggen...

A: Een rechte lijn toch? Altijd.

I: En nou heb ik hier een grafiek getekend. $2x - 3 = 10$. Hoe kun jij herkennen dat deze lineaire formule (wijst aan) dat dat die lijn is?

A: Nou, eerst kijken wat het begin getal is. Dat is -3 . En omdat ie per stapje met 2 omhooggaat.

I: Ja. Hier staat een lineaire vergelijking. Wat betekent het als je zo'n lineaire vergelijking gaat oplossen? Wat ga je dan doen?

A: Dan ga je de coördinaten berekenen van het snijpunt.

I: Zou je die hier kunnen aanwijzen?

A: Is dat hier zo? (Wijst snijpunt aan met de x -as). Oh nee, laat maar, deze, denk ik (wijst snijpunt aan mijn y -as). Één van deze. Maar hoe kun je dat weten? Want welke lijn is, laat maar zeggen, als je een snijpunt hebt...

I: We hebben hier, deze lijn hebben we er staan (wijst naar linker gedeelte van vergelijking) en die stellen we gelijk aan 10. Waar zit de lijn $y = 10$?

A: (Wijst correct de lijn aan) Hier

I: Dus wat betekent het als we deze twee aan elkaar gelijk stellen? Dan zijn we dus op zoek naar welk punt?

A: (Wijst correct snijpunt aan)

I: Ja. Dus bij oplossen ga je eigenlijk kijken, waar ze precies aan elkaar gelijk zijn. En wat betekent dus die x -waarde?

A: Dat op die x -lijn, dat hij snijdt met (wijst lijn $y = 10$) aan.

I: Oké. Dan de volgende vraag. Ik heb hier twee lineaire vergelijkingen staan. Zou je ze allebei kunnen oplossen?

A: Jawel

Handwritten solution for a system of linear equations on a grid background:

$$\begin{array}{l} 13x + 3x + 14 = 3x - 5 \\ 16x + 14 = 3x - 5 \\ 16x + 19 = 3x \quad \left. \begin{array}{l} +5 \\ -16x \end{array} \right\} \\ 19 = -13x \quad \left. \begin{array}{l} +5 \\ -16x \\ 0 - 13 \end{array} \right\} \end{array}$$

I: Had je ook met een andere stap kunnen beginnen?

A: Ja dat had ik beter kunnen doen. Ik had beter $-3x$ eraf kunnen halen.

I: Want

A: Dan kwam ik op een heel getal.

I: Je hebt inderdaad geleerd, eerst alles bij elkaar nemen, maar soms zijn andere stappen ook handiger.

A:

Handwritten solution for a linear equation on a grid background:

$$\begin{array}{l} 2(x+3) = 4x \\ 2x + 6 = 4x \\ 6 = 2x \quad \left. \begin{array}{l} -2x \\ 0 2 \end{array} \right\} \\ 2x = 3 \end{array}$$

I: En de volgende. Had je daar ook nog een andere stap eerst kunnen doen?

A: Nee...

I: Je weet, bij de weegschaalmethode, dat je dan altijd links en rechts hetzelfde moet doen en je hebt het vooral geleerd met optellen en aftrekken. En als ik nou zou zeggen dat met delen en vermenigvuldigen eigenlijk precies hetzelfde werkt. Dat als je aan beide kanten met hetzelfde getal deelt, dan blijft de vergelijking ook hetzelfde. Zou jij iets waardoor je deze aan beide kanten kunt delen waardoor de vergelijking makkelijker wordt?

A: Welk getal moet je dan delen?

I: Wat zou je denken?

A: 4 delen door $2x$?

I: Ik zie hier 2 keer een stukje formule en hier 4 keer x . Wat nou als je beide kanten deelt door 2? Wat zou je dan overhouden?

A: Hmm, gewoon, x en $2x$. Maar die 6 dan, blijft die dan ook altijd of moet je die ook delen door 2?

I: Ja.

A: Oh, dan is het $x + 6 = 2x$.

I: Je zei het net goed.

A: Oh ja, $x + 3 = 2x$.

I: En kijk eens wat je hier ook hebt staan. $x + 3$.

A: Mag je dan al gelijk delen? (doelt op de originele vergelijking)

I: Ja dat mag dan al gelijk.

A: Is het dan niet handiger om eerst haakjes weg te werken en dan pas te delen door 2?

I: Mag ook.

I: Dan heb ik nog de laatste twee vragen. Zou jij een echte situatie kunnen bedenken in de echte wereld, waarbij je een lineaire vergelijking moet oplossen?

A: Mag dat gewoon echt alles zijn?

I: Ja alles.

A: Dan zou ik, bijvoorbeeld, ja gewoon een echte lijn pakken en bijvoorbeeld $x = 6$, bijvoorbeeld, als iets helemaal lijnrecht staan, bijvoorbeeld de verwarmingbuis en je verdeelt het bijvoorbeeld in ongeveer 7 meter en het staan op ongeveer de vijfde meter. Dan zou ik er $x = 5$ van maken.

I: En een ongelijkheid, zou je daar ook een voorbeeld van kunnen geven?

A: Wat bedoel je dan als je..

I: nou, een ongelijkheid, in het boek heb je heel veel opgaven gehad waarbij je een ongelijkheid moest oplossen. Maar zou je ook een echte situatie kunnen bedenken, een context, waarin je een ongelijkheid moet oplossen?

A: Dus dan moet je gewoon, bedoel je dan gewoon dat iets gewoon elkaar kruist en dan...heb je iets met $x =$ dat en $y =$ zoveel en dan kruist ie zich vanzelf op die lijn.

I: Oké. Heel erg bedankt.

Interview 4 – Janine Leijts, HV2A – II

I: En dan heb ik een allereerste vraag: Het vorige hoofdstuk heette lineaire vergelijkingen, zou jij in eigen woorden kunnen uitleggen wat een lineaire vergelijking is?

J: Euhm, ..., ja je moet, euh, formules... je moet vooral ook de formules, zijn meestal als ze in een grafiek zijn een rechte lijn. En, euhm, ja meestal moet je de formules ook oplossen.

[kleine onderbreking]

I: Nou je begon goed, je begon over een rechte lijn in een grafiek. En wat heb je bij een lineaire vergelijking? Waar staan die woorden voor 'lineair' en 'vergelijking'?

J: Euhm, je hebt bijvoorbeeld twee formules en die moet je naast elkaar zetten en daar kun je een oplossing uit halen.

I: Maar de vergelijking dat is... het aan elkaar ..

J: Ja, zeg maar twee formules.

I: Mijn tweede vraag, wat betekent het vervolgens als je een lineaire vergelijking wilt oplossen?

J: Euhm, dan haal je de $y =$ weg en dan zet je er een $=$ tussen en dan werk je met pijltjes naar beneden en dan haal je telkens aan beide kanten evenveel eraf.

I: en waar kom je dan op uit?

J: Dan kom je uit op, euhm, $x = \dots$

I: En wat betekent die x ?

J: Het getal dat, euh, dat is het getal waarmee iets stijgt. Ofzo.

I: Op dit tekeningetje zie je een lineaire vergelijking. $2x - 3 = 10$. Ik heb die lijn hier getekend. Als we deze vergelijking zouden oplossen, waar zou je dan op uitkomen, kun je dat aanwijzen?

J: Euhm, ...ja dan zou je hier (wijst snijpunt met de x -as aan)... Geen idee

I: Euhm, volgende vraag. Zou jij een echte situatie kunnen bedenken waarbij je een lineaire vergelijking moet oplossen?

J: Als je bijvoorbeeld. Je wil een muur laten leggen in je huis en je twijfelt tussen twee bedrijven en je hebt zoveel vierkante meter nodig en bij het ene bedrijf heeft meer kosten om naar jouw huis te gaan, vaste kosten en is goedkoper in leggen en het andere is dan duurder per uur maar goedkopere normale kosten.

I: En als je dan aan elkaar gelijk stelt, heb je inderdaad een vergelijking. Als je die vergelijking oplost, wat vind je dan?

J: Het aantal uren waarbij ze gelijk zijn in kosten.

I: Zou jij in diezelfde situatie kunnen bedenken hoe een ongelijkheid eruit ziet?

J: Euh ja, bijvoorbeeld als je getal 10 uur is, groter dan of kleiner dan.

I: Tot slot, hier nog twee lineaire vergelijkingen. Zou jij ze kunnen oplossen.

J: Ja, dat zou kunnen.

$$\begin{aligned} 13x + 3x + 14 &= 3x - 5 \\ 16x + 14 &= 3x - 5 \quad \downarrow -3x \\ 13x + 14 &= -5 \quad \downarrow -14 \\ 13x &= -19 \quad \downarrow :13 \\ x &= -\frac{19}{13} \end{aligned}$$

J: Ik, ik kan hem ook fout maken.

I: Maakt niet uit hoor, gaat gewoon even om te kijken hoe het gaat.

I: Had je hier, denk je, ook met een andere stap kunnen beginnen?

J: ...

I: Want je bent begonnen met die $13x$ en $3x$ samen te nemen, maar zie je ook een andere eerste stap?

J: ...

$$\begin{aligned} 2(x + 3) &= 4x \\ 2x + 6 &= 4x \quad \downarrow -2x \\ 6 &= 2x \quad \downarrow :2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

I: En bij deze, zou je hier ook een andere eerste stap kunnen zien?

J: ...

I: Als je met deze één hulpmiddel geef? Je weet met de balansmethode mag je aan beide kanten evenveel erbij optellen of erbij afhalen. Hetzelfde geldt voor delen. Bij een vergelijking mag je ook aan beide kanten met hetzelfde getal en dan blijft die balans nog steeds in evenwicht. Zie jij een getal waarmee je beide kanten van de vergelijking kunt delen?

J: 2.

I: Wat zou je dan overhouden, denk je?

J: Dan moet je, deze ook delen door twee (wijst $4x$ aan) dan krijg je $1x + 4 = 2x$

I: Oké, bedankt.

Interview 5 – Remco Assink, HV2A – I

I: Ik heb een aantal vragen voor je. Probeer het maar zo goed mogelijk te beantwoorden. De eerste is, de vorige hoofdstuk, dat heette lineaire vergelijkingen. Zou jij in eigen woorden kunnen vertellen wat een lineaire vergelijking is?

RA: Euh, iets van statistieken. Euh. Ja, hoeveel iets omhooggaat of omlaag gaat.

I: Weet je wat lineair betekent, als iets lineair is?

RA: Een rechte lijn.

I: En lineaire vergelijking, wat zal dat dan zijn?

RA: Dat je twee lijnen met elkaar vergelijkt.

I: Ja, prima. Dus dan heb je twee rechte lijnen die vergelijk je met elkaar. En wat betekent het als je een lineaire vergelijking gaat oplossen?

RA: Ik weet wel hoe het moet, maar ik weet niet echt... wat dat betekent.

I: Je weet wel hoe het moet, ja, daar gaan we straks naar kijken. Euhm, ik heb dan een grafiekje, misschien dat dat helpt. Ik heb hier een lineaire vergelijking, $2x - 3 = 10$. Ik heb hier de lijn alvast getekend. En als ik nu zou zeggen, als je deze vergelijking zou moeten

oplossen, kun je dan in het plaatje aanwijzen wat dan, wat gebeurt er als je deze gaat oplossen?

RA: euh, ..., ja. Ja dat weet ik eigenlijk zo niet.

I: Oké. Maar je zei net wel heel goed dat je twee rechte lijnen vergelijkt met elkaar. Één zien we hier al, waar is de tweede rechte lijn in dit geval?

RA: Euh... hier (wijst een punt op de lijn $y = 10$ aan), bij 6.

I: Bij 6?

RA: ...

I: En als ik zeg, als je kijkt wanneer deze twee lijnen aan elkaar gelijk zijn (wijst lineaire vergelijking aan), een lijn 10, dat betekent $y = 10$. Dat is dus de lijn die precies hier door 10 loopt en dan gaan we deze twee lijnen met elkaar vergelijken. Welk punt ga je vinden als je dit gaat oplossen?

RA: -6 ? ...

I: Oké, zou jij een echte situatie kunnen opnoemen waarbij je een lineaire vergelijking zou moeten oplossen?

RA: Ik denk dat als je de prijzen van twee bedrijven met elkaar vergelijkt...

I: Ja. Wat voor soort prijzen?

RA: Hoeveel het kost om traptrreden te bekleden.

I: Ja. Bijvoorbeeld. En wat ga je dan met elkaar vergelijken?

RA: Hoeveel het kost om één traptrede te bedekken.

I: En waarin verschillen dan bijvoorbeeld twee bedrijven?

RA: De ene traptrede kost 25 euro en de andere 15 ofzo.

I: Oké. Euhm. Nou ik zou zeggen, als we dan dat voorbeeldje aanhouden, euhm. Als de ene traptrede 25 kost en de andere 15, dan zie je al meteen welke duurder is. Maar als we ook nog eens zouden zeggen dat bij beide bedrijven de kosten per uur verschillend is. Dat bij de ene die minder kost, als die per uur een hogere kosten heeft

RA: Dan de andere

I: Ja, zou je dan ook kunnen bedenken hoe een ongelijkheid eruit ziet? In die situatie?

RA: ...

I: Twee bedrijven met verschillend starttarief en verschillend ...

RA: dan, euh, kruisen ze elkaar ergens.

I: En wat betekent dat kruispunt:

RA: Dan wordt de ene prijs hoger dan de andere.

I: Ja, en op dat kruispunt zelf?

RA: Omslagpunt.

I: Ja, dan zijn ze gelijk.

I: Zou je nu deze twee lineaire vergelijkingen kunnen oplossen.

RA:

Handwritten algebraic steps on grid paper:

$$\begin{array}{rcl} 13x & + & 3x + 14 = 3x - 5 \\ 16x & = & 3x - 19 \\ -3x & & \\ \hline 13x & = & -19 \end{array}$$

I: Oké, euh, ik zie dat je hier als eerste stap eigenlijk twee dingen tegelijk hebt gedaan. Je hebt én aan beide kanten -14 gedaan, én je hebt deze twee samen genomen. Zie jij nog een andere eerste stap?

RA: 14 eraf.

I: Dat kan, dat heb je eigenlijk ook meteen al hier bij de eerste stap gedaan. Nog iets anders?

RA: Ja gewoon $13 + 3$, dan, denk ik.

I: Maar dat heb je ook gedaan, hè.

RA: Ja, dan weet ik het niet.

I: Als ik je nou zou vertellen, dat ik hier aan beide kanten $3x$ zie staan.

RA: Oh dan doe je die $3x$ gewoon weg.

I: Precies he, dus je hoeft ze niet altijd perse, het is je wel geleerd, eerst alles samennemen en dan... Soms heb je ook een andere stap die het nog wel eens wat makkelijker zou kunne maken.

I: De tweede

RA:

$$\begin{aligned} 2(x + 3) &= 4x \\ 2x + 6 &= 4x \\ 6 &= 2x \quad x = 3 \end{aligned}$$

I: Deze heb je ook goed opgelost. Zie je hier eigenlijk ook, dezelfde vraag, zie jij hier ook een andere eerste stap dan wat je nu hebt gedaan?

RA: euh..., niet eigenlijk dat ik zo snel weet.

I: En als ik je zou vertellen, je weet, de balansmethode, heb je geleerd dat je aan beide kanten evenveel moet optellen of aftrekken, maar als ik jou vertel je bij de balansmethode, als je beide kanten deelt door hetzelfde getal dat ie ook in evenwicht blijft. Zie jij een getal waar je beide door kunt delen?

RA: 2.

I: En wat denk je dat je dan zou over houden?

RA: 1 en $2x$

I: Als we deze kant (wijst linkerkant aan) door twee delen, wat krijgen we dan?

RA: 1 en $1\frac{1}{2}$.

I: En aan de rechterkant?

RA: 2.

I: Oké. Heel erg bedankt.

Interview 6 – Susanne Bussink. HV2A – III

I: Ik heb een vijftal vragen voor je. Mijn eerste vraag is dan meteen, zou jij in eigen woorden kunnen vertellen wat een lineaire vergelijking is?

S: Dan is als een lijn zo, recht, en dat het met gelijke stappen omhoog gaat. Dat er elke keer hetzelfde bij komt.

I: En dan heb je het over welke grafiek? Over een...

S: lineaire grafiek

I: Ja een rechte lijn. En wat is dan een lineaire vergelijking? Want wat je net eigenlijk beschreef was een lineaire formule. En wat is dan als je een lineaire vergelijking hebt?

S: Euhm, dat je toch aan twee kanten hetzelfde doet, dat je dan het zelf kan oplossen.

I: Dan ben je al een stapje verder. Lineaire, dat staat dus voor...

S: rechte lijnen

I: en dan vergelijk je ze met elkaar. Je gaat eigenlijk uitzoeken, wanneer zijn ze aan elkaar gelijk.

I: Als we het dan vervolgens hebben over een lineaire vergelijking en we gaan het oplossen, wat betekent het dat je een lineaire vergelijking gaat oplossen?

S: Dan ga je kijken wat x is.

I: En wat voor een x vind je dan? Wat is er zo speciaal aan die x ?

S: Euh, dan kan je van je van zo'n punt in de grafiek, kan je vinden, ofzo. Euhm, ja, hoe zeg je dat. Als je die oplost, dan, ja, dan komt er zo'n x uit. Ja, die x is dan toch zo'n punt in de grafiek?

I: Ja... Laat ik je misschien even helpen. Ik heb hier al ééntje getekend. Ik heb hier een lineaire vergelijking. $2x - 3 = 10$. Ik heb deze lijn alvast getekend. Zou je dan kunnen zeggen als je deze vergelijking zou oplossen, welk punt in de grafiek dat is?

S: Euh, even kijken, als je hem oplost, dan haal je eerst, dan doe je toch eerst $+3$, ...

I: Ja maar dan ga je het oplossen. Kun je het ook uit het plaatje halen zonder op te lossen?

S: ...

I: Waar zit de tweede rechte lijn?

S: Euh, daar? (wijst het coördinaat $(0,10)$ aan)

I: Dat is één punt, kun je ook de lijn aanwijzen?

S: Ja, die loopt toch zo naar beneden? (Van $(0,10)$ naar ongeveer $(6,0)$ wees ze aan)

I: (corrigeert). En als je zou bedenken waar het snijpunt ligt?

S: Euhm, dan is dat toch daar? (wijst correcte snijpunt aan).

I: En de x -waarde die daarbij hoort?

S: Dan is dat waarschijnlijk $x = 6,5$ of zoiets.

I: Ja. Zo zie je dat je soms niet eens hoeft op te lossen om te weten wat de oplossing is, als je het plaatje erbij hebt.

I: Euhm, dan heb ik twee open vragen. We hebben net hier gezien, met getalletjes, kun je oplossen, grafieken, zou jij een echte situatie kunnen bedenken waarbij je een lineaire vergelijking moet oplossen?

S: Als je de snijpunt van een grafiek moet hebben.

I: Maar ik bedoel echt een situatie waarbij je gewoon, he, iets dat je echt zou kunnen tegenkomen.

S: Als je bijvoorbeeld tafels moet hebben, waarbij de ene moet je dan bijvoorbeeld kosten voor het rijden betalen, bij de een is dat meer dan bij de ander. En dan kan je zo kijken welke dan, als je bijvoorbeeld 15 tafels hebt, welke dan goedkoper is.

I: en dan heb je ook nog kosten per tafel?

S: Ja.

I: Maar als je weet dat de ene goedkoper is dan de andere, ben je er meteen uit.

S: Ja maar dat je dan bijvoorbeeld een tafel kost bij de ene 5 euro en bij de ander 2. En dan met die rijkosten erbij.

I: En als we het dan even verder kijken. Jullie hebben het ook gehad over ongelijkheden, zou je dan jouw situatie kunnen uitbreiden naar een ongelijkheid?

S: Euhm, ...

I: Want bij een vergelijking, kijk je in jouw situatie bij hoeveel tafels ...

S: ...

I: wanneer ze precies aan elkaar gelijk zijn. En bij een ongelijkheid?

S: Ja, dan ga je vervolgens kijken en bijvoorbeeld bij 5 tafels is de ene goedkoper en bij 10 tafels is de andere goedkoper.

I: Prima. Euhm, dan heb ik hier nog 2 lineaire vergelijkingen en je mag ze allebei oplossen.

S:

$$\begin{array}{l}
 13x + 3x + 14 = 3x - 5 \\
 16x + 14 = 3x - 5 \quad \text{)} - 3x \\
 13x + 14 = -5 \quad \text{)} - 14 \\
 13x = -19 \quad \text{)} : 13 \\
 x = -\frac{19}{13}
 \end{array}$$

I: Je bent begonnen met het samentrekken van $13x$ en $3x$. Zie jij nog een andere eerste stap, die je ook had kunnen doen?

S: Euhm, nee? Oh jawel, je had eerst 3 eraf kunnen halen (ze wijst $3x$ aan).

I: Dat had ook gekund. Inderdaad. Nog een andere eerste stap?

S: Je kunt ook die (wijst 14 aan) eraf kunnen halen.

I: Yes, dan mag je de volgende doen.

S:

$$\begin{array}{l}
 2(x + 3) = 4x \\
 2x + 6 = 4x \quad \text{)} - 2x \\
 6 = 2x \\
 x = 3
 \end{array}$$

I: Ja. Je hebt eerst haakjes weggewerkt, daarna opgelost. Hierbij eigenlijk weer dezelfde vraag, zie jij een andere eerste stap die je ook had kunnen doen?

S: euhm... gelijk die $2x$ eraf halen?

I: Maar hier (wijst originele vergelijking aan) zie je nog niet dat dit $2x$ is. Als ik je zou vertellen: je hebt geleerd bij de balansmethode, dat je altijd aan beide kanten evenveel erbij op moet tellen of evenveel er vanaf moet halen. Als ik jou zou vertellen dat die balansmethode ook werkt als je beide kanten door hetzelfde getal deelt. Dat dan ook die vergelijking goed blijft. Door welk getal zou je die vergelijking dan kunnen delen, denk je?

S: Door 2...

I: Ja, en heb je een idee wat je dan zou overhouden?

S: Dan hou je aan de ene kant $2x$ over, en hier (wijst linkerkant aan) $1x$.

I: En wat gebeurt er met die 3?

S: ... Euhm, $1\frac{1}{2}$?

I: Als ik alvast even naar de volgende regel kijk, bij deze regel mag je ook door twee delen. Wat zou er gebeuren als je deze regel door 2 deelt?

S: Euh, $1x + 3 = 2x$.

I: Ja en dan zie je dus, $2(x + 3) = 4x$, dat als je deze vergelijking deelt door 2, haal je eigenlijk alleen maar die factor 2 hier weg, dan hou je $x + 3$ over, en die wordt $2x$.

S: ohja.

I: Nou, bedankt!

Transcriptie Interviews 2 en 3 juni

Interview vragen:

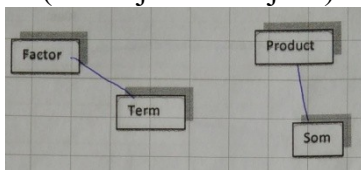
- 1) Welke woorden horen bij elkaar? Factor – Term – Som – Product
- 2) Ontbind in factoren: $b = 24a^2 - 6a$
- 3) Los op: $2a^2 + 16a + 30 = 0$

Op het werk van de leerlingen zijn alle notaties in het rood door mij er achteraf opgezet ter verduidelijking van de transcripties. In de transcriptie wordt verwezen naar deze notaties met rood.

Interview 1 – Nena Wevers, HV2C – II

I: Dan beginnen we met de eerste vraag. Je ziet daar vier woorden staan. Aan jou de vraag: Welke woorden horen bij elkaar? Dat mag je gewoon met een lijntje aangeven.

N: (Zet vrij vlot de lijnen)



I: Waarom horen deze woorden bij elkaar, denk je?

N: Nou, dit (wijst Product – Som aan) is zeg maar met een drieterm. En dan heb je een product en een som. En een factor en een term horen bij elkaar want het zijn dezelfde ..., ze horen bij dezelfde ..., euhm... dit dus (wijst $24a^2 - 6a$ aan), dan heb je een factor en een term.

I: Zou je daar dan een factor kunnen aanwijzen?

N: Nou bijvoorbeeld, dit (wijst de 30 van vraag 3 aan) is het product en dit (wijst $16a$ van vraag 3 aan) is de som. En dit is volgens mij de factor (wijst $-6a$ aan van vraag 2) en dit de term (wijst $24a^2$ aan van vraag 2), maar dit weet ik niet zeker.

$b = 24a^2 - 6a$

- ① $6a(4a-1)$
- ② $3a(8a-2)$
- ③ $2(12a^2-3a)$
- ④ $1a(24a-6)$

I: Oké. Dan kijken we nu even naar vraag 2. Ontbind in factoren, mag je zelf even proberen.

N: (Begint meteen met schrijven)

I: Yes. Zou je dit ook nog op een andere manier kunnen ontbinden?

N: Euh,

I: (meteen) Je mag zo veel mogelijk opschrijven wat je te binnen schiet.

N: (schrijft redelijk vlot 2 op)

I: Zou je er nog meer kunnen opschrijven? Ik kwam zo op 12 verschillende mogelijkheden. Zou je er nog eentje kunnen opschrijven?

N: (schrijft 3 op en na een iets langere poos 4) Ik denk dat dit ze zo zijn.

I: Ja. Prima hoor.

Los op:

$$2a^2 + 16a + 30 = 0$$

⑤ $a^2 + 8a + 30 = 0$

⑥ $a^2 + 8a + 15 = 0$

⑦ $(a+3)(a+5) = 0$

⑧ $a+3=0 \vee a+5=0$

$a = -3 \vee a = -5$

I: Dan kijken we nog even naar vraag 3. Nou eigenlijk staat de opdracht al op papier: Los die vergelijking op.

N: Ja. (schrijft op alsof ze direct de Som – Product methode wil gebruiken voor het ontbinden van een drieterm. Ze vindt – uiteraard – geen geschikte getallen)

I: Lukt het om twee getallen te vinden?

N: Nee.

I: Je hebt altijd geleerd dat ontbinden in factoren bij een drieterm alleen kan, als daar (wijst naar $2a^2$) alleen een a^2 staat. Want dan kun je die twee paar haakjes gebruiken, en dan staat er a, a . Nu staat er een tweetje voor, dus nu mag je niet zomaar die methode gebruiken. Zou jij dit (wijst drieterm aan) nu wel kunnen ontbinden in factoren zodat je die regel $A \cdot B = 0$ wel kunt gebruiken?

N: Deze naar die doen (zet een pijl van $2a^2$ naar $16a$, zie 5). Dan krijg je ... (schrijft)

I: Vraagje: mag je die twee zomaar bij elkaar optellen?

N: Nee want het is niet [onverstaanbaar]

I: Dus dat is niet een goede methode.

I: We hebben nu twee factoren nodig, (N: Ja) en daarbij geef ik je één hulpmiddel: (schrijft op: $\dots \cdot (\quad) = 0$) We hebben twee factoren nodig, waarbij we zeggen, ik heb hier wat staan en jij moet nu gaan bedenken wat je hiervoor (wijst eerste puntjes aan) neerzet. Dus deze twee vermenigvuldigd is hetzelfde als wat daar (wijst drieterm aan) staat. Zou jij kunnen bedenken wat op deze eerste paar puntjes moet komen te staan, zodat je het vervolgens wel kunt oplossen?

N: Euhm. Als je er $2a$ neerzet? ... Nee dat kan niet. Euhm. Nee ik weet het echt niet.

I: Nee? Kijk eens naar al deze drie termen. Hebben al deze termen een gemeenschappelijke factor?

N: Euhm... 2?

I: Probeer maar eens, zet die twee er maar eens voor.

N: (schrijf 2 op de puntjes)

I: En dan, wat hou je over?

N: Ik hou nog a^2 over (schrijft op, en de dan ook $+8a + 15$)

I: En dan? Zou je het nu verder kunnen oplossen?

N: ...

I: Je hebt geleerd dat $A \cdot B = 0$ De A zou je nu kunnen zien als die 2. En de B als wat hier staat (wijst aan). Dus dan moet óf dit gelijk zijn aan 0 (wijst 2 aan), maar dat kan niet. Of, dat (wijst aan) gelijk aan 0. Zou je het nu verder kunnen oplossen?

N: (schrijft meteen 6 op) En dan moet dan, $a \dots$ Dan kun je het alsnog niet uitrekenen, toch?.

I: Niet? Kijk er eens goed naar.

N: ...

I: Waar zoek je naar, nu?

N: Naar... wat je moet doen om dit nul te krijgen. Maar dat zijn er drie (termen).

I: Wat heb je hier nu over (wijst drieterm aan)? Hoe noem je dit? Dat is een ...?

N: Drieterm.

I: Ja. En als dat gelijk staat met nul, kun je niet meteen een antwoord opschrijven (N: Oh), wat moet je daarvoor eerst doen?

N: Moet je dan dit uitrekenen? (wijst haar eerdere poging aan om de Som – Product methode toe te passen)

I: Uhuh.

N: (schrijft meteen 7 op, vindt meteen de juiste getallen) En moet je hem dan nog verder oplossen?

I: Er wordt gevraagd om een oplossing...

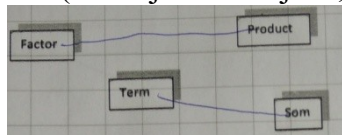
N: (schrijft 8 op)

I: Ja precies. (legt nog even wat extra dingetjes uit, wat er gebeurd is, N luistert geïnteresseerd) Nou, heel erg bedankt!

Interview 2 – Rens Fokkink, HV2C – I

I: Je ziet daar vier woorden staan. Kun jij met een lijntje aangeven welke woorden bij elkaar horen?

RF: (zet vrij vlot de lijnen, lijkt niet helemaal zeker bij het zetten)



I: De volgende vraag: Waarom horen die twee woorden bij elkaar?

RF: Euh, nou, als je, laat maar zeggen, een factor, allemaal, van bijvoorbeeld een formule, allemaal bij elkaar doet, krijg je een product van factoren, daarom horen ze bij elkaar.

I: En die tweede (paar)?

RF: Euh, nah, bij een bijvoorbeeld een som zoals dit (wijst $24a^2 - 6a$) ofzo, kun je allemaal, ja, als je een term [onverstaanbaar]

I: Wat is het verschil tussen die twee (paren)? Want het klopt, je hebt de juiste lijntjes gezet. Waarin verschillen die twee? Want je zegt, als je factoren bij elkaar neemt, krijg je een product. Als je termen bij elkaar neemt,

RF: Een product is zeg maar gewoon de, wat eruit komt.

I: Maar hoe kom je op dat product? En hoe kom je op die som? Wat doe je met die termen en die factoren?

RF: Euhm, ja, weet ik eigenlijk niet eens. Termen zijn gewoon, ... dingen zoals a

I: En wat doe je met die termen?

RF: Die zet je in een formule.

I: Die termen, die tel je bij elkaar op om een som te maken (wijst een voorbeeld aan), factoren die vermenigvuldig je met elkaar om een product te krijgen (wijst een voorbeeld aan)

$$b = 24a^2 - 6a$$
$$\textcircled{1} b = a(24a - 6)$$
$$\textcircled{2} b = 6(4a^2 - a)$$

I: Dan de tweede vraag. Het staat er eigenlijk al: Ontbind in factoren. Dus dat mag je doen.

RF: (schrijft op $b =$) Moet dat niet met die haakjes zo?

I: Dat moet je even zelf bedenken.

RF: (schrijft eerst $a(a \quad)$ op, en verbeterd daarna naar $a(24a - 6)$, 1, zonder interventie van mij)

I: Prima. Euh, zou je dit op nog een andere manier kunnen ontbinden in factoren?

RF: Euh, weet ik niet. Denk het wel, maar ik weet niet hoe.

I: Als ik je vertel, welke factoren zitten in deze term (wijst $24a^2$ aan) die ook in die (wijst $-6a$ aan) term zit?

RF: 6.

I: Bijvoorbeeld. Dus probeer maar eens.

RF: (schrijft 2 op)

I: Zou je het nog op een andere manier kunnen? Ik kwam zelf op 12 verschillende manieren uit. Zou je er nog eentje kunnen bedenken?

RF: Nee, ik denk het niet.

$$2a^2 + 16a + 30 = 0$$

③ $(2a+16)(30)$

④ $2 \cdot (a^2 + 8a + 15) = 0$

⑤ $2 = 0$ of $a^2 + 8a + 15 = 0$

⑥ $(a+3)(a+5) = 0$

⑦ $\rightarrow a+3=0$ of $a+5=0$
 $\rightarrow a=-3$ of $a=-5$

I: Dan gaan we naar de laatste vraag. Je ziet daar een vergelijking staan en eigenlijk staat er ook al bij, probeer maar even op te lossen.

RF: ... Euh ...

I: Probeer maar hard op te denken. Want, wat wil je gaan doen?

RF: Dan moet je eerst twee van die, dubbele haakjes. Zo. En dan ...

I: Hulpvraag? Je weet dat ontbinden in factoren, want je weet, bij een drieterm moet je eerst ontbinden in factoren. Maar nu zien we hier (wijst aan) een $2a^2$ staan terwijl je weet dat ontbinden in factoren (met de Som – Product methode) alleen mag als daar a^2 staat. Je hebt dit eigenlijk nooit gezien, $2a^2$. Kun je wat hier staat (wijst drieterm aan) ontbinden in factoren zodat je die regel $A \cdot B = 0$ wel kunt gebruiken? Zou jij dat op een manier kunnen ontbinden?

RF: Euh (schrijft 3 op), zoiets, ofzo?

I: Ik denk dat je nog een hulpvraag nodig hebt. Nou we hebben om dit op te kunnen lossen, twee factoren nodig (schrijft op: $\dots \cdot (\dots) = 0$). Hier zien we twee factoren. Kun je iets bedenken dat er op de eerste puntjes moet komen te staan zodat je dan het wel kunt oplossen?

RF: ..., a of zo?

I: Nja, kun je a uit 30 halen? Dat wordt een beetje lastig. Je kunt wel een a uit de eerste twee halen, maar uit die laatste term, daar kun je geen a uithalen.

RF: ...

I: Dan geef ik je nog een hulp. Welke factor hebben al deze drie termen?

RF: (meteen:) 2.

I: Probeer dat dan maar eens.

RF: (schrijft 4 op, zonder de a^2 +)

I: Klopt ie zo helemaal?

RF: Nee, hier moet $2a$ komen (wijst naar de lege plek)

I: kijk even, als je hier (wijst $2a^2$ aan) factor 2 uit haalt, hou je dan a over?

RF: Euh nee.

I: Schrijf maar even goed op.

RF: (schrijft 4 helemaal op)

I: Ja, heel goed.

I: Kun je het nu oplossen?

RF: (het duurt even voordat hij wat aarzelend begint te schrijven, schrijft dan 5 op). Zo?

I: Ga maar verder, zoals je denkt.

RF: ... (kort)

I: kun je uit $2 = 0$ een oplossing halen?

RF: Nee.

I: Nee, heh? Dus krijgen we naar de rechterkant.

RF: ...

I: Hoe kun je de rechterkant oplossen? (na korte stilte) Wat wil je gaan doen?

RF: weet niet

I: Hoe los je een drieterm op, gelijk aan 0? Wat moet je dan doen?

RF: ..., Nah, weet ik niet.

I: Ontbinden in factoren? Kan dat? Kun jij deze drieterm ontbinden in factoren?

RF: ...

I: Hoe ontbind je een drieterm? Wat moest je dan eerst opschrijven?

RF: ...

I: Als ik zeg, dat dat die haakjes zijn (schrijft op: $(\quad)(\quad) = 0$) Kun jij nu opschrijven wat binnen die haakjes moet?

RF: (schrijft tweemaal a op) En dan moet je toch ...

I: Ja, nu zoeken we naar twee getallen die opgeteld ...

RF: 8 zijn en vermenigvuldigd 15.

I: Welke twee getallen zijn dat?

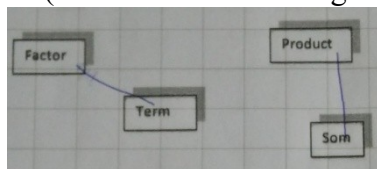
RF: Euh, ... (schrijft 6 op en werkt correct uit, 7)

I: Yep, helemaal. Bedankt!

Interview 3 – Amber Walterbos, HV2C – III

I: Dan hebben we de eerste vraag: Je ziet daar vier woorden staan. Zou jij kunnen aanstrepen welke woorden bij elkaar horen?

A: (na even na te hebben gedacht, zet ze de strepen)



I: Waarom horen die woorden bij elkaar, denk je?

A: Omdat, als je een factor hebt, heb je een letter en daar kun je ook een term voor invullen. En ik dacht gewoon, als je de som hebt, ja, dan heb je gewoon, laat maar zeggen, de hele product. Dan kun je helemaal zien wat je moet maken.

I: Oké. En als ik nou zeg: dan zie je hier (wijst $24a^2 - 6a$ aan) bijvoorbeeld twee termen. Samen maken die twee termen een som. Maar als ik nu naar dit (wijst $24a^2$ aan) product kijk, dan zie je dat die opgebouwd is uit factoren, namelijk een factor 24 en een factor a^2 .

A: Oh ja.

I: Dus eigenlijk, factor en product horen bij elkaar, factoren die vermenigvuldig je met elkaar om een product te krijgen en termen tel je bij elkaar op om een som te krijgen.

A: (tegelijk met mij) een som te krijgen.

① $b = 6a(4a-1)$ ⑤ $b = 2a(12a-3)$
② $b = 6 \cdot 4 \cdot a \cdot a - 6a$ ④ $b = a(24a-6)$
③ $b = 6a^2(4-1)$
⑥ $b = 3a(8a-2)$

I: Ja. Dan kijken we naar de tweede vraag. Eigenlijk staat het er al. Ontbind dat maar in factoren.

A: Ja oké (begint meteen te schrijven, 1)

I: Zou je dat nog op een andere manier kunnen ontbinden in factoren?

A: Euhm, alles apart opschrijven?

I: Wat bedoel je? Schrijf maar wat op.

A: Ik krijg dan wel een hele lange som, ik maak hem dan groter, niet kleiner (schrijft 2 op), nu ontbind ik niet echt...

I: Je hebt nu de termen ontbonden in factoren (A: Ja) en als ik nou bedoel, om het alleen maar als product op te schrijven, want nu staat er nog steeds een som. Zou je ook alleen als een product kunnen schrijven met dat je ontbindt in factoren? Dus dat er maar 1 term komt te staan.

A: Euhm. Kun je dat krijgen door deze eerst op te lossen en dan een som van te maken?

I: Ik bedoel meer, welke factoren zitten in deze term, die ook in deze term zit?

A: De a , bijvoorbeeld.

I: Dus dat mag je ook buiten haakjes zetten.

A: Bedoel je uit dit haakje? (wijst haakjes bij 1 aan)

I: Hier heb jij gezegd, ik haal $6a$ eruit.

A: Oh ja, ik snap hem denk ik wel (schrijft 3 op).

I: Heb je het nu goed ontbonden? Klopt dat? Als je dit (wijst 3 aan) weer zou uitwerken, kom je dan hier (wijst $24a^2 - 6a$ aan) uit?

A: Nee. Nee, volgens mij niet.

I: Nee heh? Dan krijg je $6a^2 \times 4$, dat is wel $24a^2$, maar $6a^2 \times -1$ is niet $-6a$ (A: Nee) Zou je nu wel een goede kunnen opschrijven?

A: ...

I: Welke factor zit in deze term die ook in die term zit? Jij zegt eerst $6a$, dat klopt. Kun je nog een andere factor vinden?

A: Euhm, $2a$? (klinkt wat weifelend)

I: Bijvoorbeeld!

A: (schrijft 4 op)

I: Zou je er nog één kunnen opschrijven? Ik wil eigenlijk voor drie gaan.

A: Euhm, ja, (begint te schrijven aan 5)

I: Ik kwam in totaal op 12 verschillende mogelijkheden uit.

A: Ja, zoiets dacht ik al wel. Eerst snapte ik niet zo goed wat je bedoelde maar nu wel (schrijft 6 op).

I: Prima. [uitleg dat niet perse de a eruit gehaald hoeft te worden, dat ook alleen getallen mogen]

Handwritten mathematical work on grid paper showing the factoring of the equation $2a^2 + 16a + 30 = 0$. The steps are numbered 7 to 10:

- 7. $(\quad) (\quad)$
- 8. $2 \cdot (a^2 + 8a + 15) = 0$
- 9. $2 \cdot (a + 3)(a + 5) = 0$
- 10. $(2 \cdot a + 3 = 0 \vee 2 \cdot a + 5 = 0)$

I: Dan hebben we de laatste vraag. Er staat daar een vergelijking, kun je die oplossen?

A: Euh, jawel (schrijft heeft resoluut 7 op) ...

I: Waar denk je aan?

A: Ja, ik ben even aan het kijken naar de tafels.

I: Waar ben je naar op zoek?

A: Ja iets van 6×5 , maar dat is te weinig (doelend op dat de som 16 moet zijn), euhm, 15×2 , dan zit ik op 17. 10×3 , dan zit ik op 13.

I: Maar dan ga je proberen om dit te ontbinden in factoren (wijst drieterm aan), maar je hebt geleerd bij ontbinden in factoren, dan staat hier toch echt altijd alleen maar een a^2 , en dan werkte dat. Maar in dit geval staat er $2a^2$. Zou jij deze expressie op zo'n manier kunnen ontbinden in factoren dat je wel de regel $A \cdot B = 0$ kunt gebruiken?

A: Moet je dan hier ook nog weer ...

I: Ja, dus op een andere manier ontbinden zodat je straks die regel wel kunt gebruiken. Heb je een idee?

A: Nee, ik heb eigenlijk geen idee.

I: Oké, dan geef ik je een hulpje. (schrijft op: $\dots \cdot (\quad) = 0$) Ik ben op zoek naar twee factoren, kun je iets bedenken wat op de eerste puntjes moet komen te staan zodat je het daarna wel kunt oplossen?

A: Misschien, a ?

I: Kan dat, kun je factor a eruit halen?

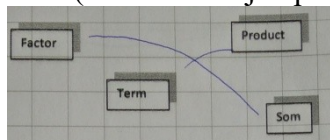
A: Nee, niet bij allemaal (zet penpunt bij 30). Moet het bij ieders eruit kunnen?

I: Dat moet je even zelf bedenken.
A: Oké, dan denk ik twee (schrijft 8 op). Zo zou ik hem dan opschrijven.
I: Kun je hem nu wel verder oplossen? (A: Ja) Schrijf maar op wat je denkt.
A: ... Maar hoe moet je dan met die 2 verder gaan?
I: Dat moet je even zelf bedenken. En probeer zoveel mogelijk hard op te denken.
A: Ik dat je nu wel kunt doen: 3×5 , dan komt er (opgeteld) 8 uit. Maar ik weet dan niet hoe ik het moet opschrijven.
I: Probeer maar eens. Wat denk je? Hoe zou je dat kunnen opschrijven?
A: (schrijft 9 op) Zo? Moet de 2 er nou nog voor? (zonder op een antwoord te wachten zet ze $2 \cdot$ ervoor)
I: Hoe los je dit verder op?
A: Moet ik nu wel een vergelijking op gaan stellen? Of moet ik nog een andere?
I: Ik wil een oplossing zien, voor welke a 's klopt dit (wijst vergelijking aan)
A: Ik zou dan zeggen: (schrijft 10 op)
I: Hoeveel factoren zie je hier (wijst 9 aan)?
A: Euhm, 2? Of...
I: Ik zie er 3 (wijst ze aan). Je hebt het regeltje geleerd $A \cdot B = 0$ dus $A = 0$ of $B = 0$. Nu heb je eigenlijk $A \cdot B \cdot C = 0$, dan is $A = 0$, $B = 0$ of $C = 0$. Zou je het dan verder goed kunnen opschrijven?
A: Hoe bedoel je dan, wat A en B is?
I: (wijst de factoren aan en benoemt ze)
A: Moet je dan ... Ik vind dit echt lastig.
I: Maakt niet uit. We hebben $2 = 0$, daar haal je dus geen oplossing uit, gaan we naar de volgende factor. Wat krijg je dan?
A: ...
I: Dan laten we het hier bij. Bedankt!

Interview 4 – Janine Leijts, HV2A – II

I: Ik heb hier vier woorden staan. Zou jij met een lijntje kunnen aangeven welke woorden bij elkaar horen, volgens jou?

J: ... (na een redelijke poos tekent ze de lijnen)



I: Waarom denk je dat die woorden bij elkaar horen?
J: Goeie vraag.... Geen idee. Ik had het niet heel goed geleerd, tenminste.
I: Je weet wat een factor is?
J: Ja, een, euh, getal, nja, niet heel erg. Ik weet wel, tenminste, ik heb wel geleerd van een factor, maar ik vond het wel lastig.
I: En als ik je zeg dat de factor in dit geval bij product hoort en een term bij een som. Termen die tel je bij elkaar op, zoals hier (wijst naar vraag 2) zie ik twee termen die tel je bij elkaar op. Die mag je niet samennemen want ze zijn niet gelijksoortig. Hier (wijst naar vraag 3) zie ik drie termen. Dat maakt samen een som. Terwijl factoren, ik zie hier bijvoorbeeld (wijst $24a^2$ aan) een factor 24 en een factor a^2 . $24 \times a^2$. Hier heb je een product (wijst $24a^2$ aan) van de factoren 24 en a^2 . Het verschilt [legt verschil uit, bij de een een optelling, bij de ander een vermenigvuldiging.] (weinig reactie van J)

$$b = 24a^2 - 6a$$

① $b = a(24a - 6)$
 ② $b = 6a(4a - 1)$
 ③ $b = 3a(8a - 2)$

I: Dan gaan we nu naar vraag 2. Het staat er eigenlijk al: Ontbind in factoren.

J: (schrijft $b =$ op)...., ja dan raak ik altijd in de war.

I: Probeer maar.

J: (schrijft 1 op)

I: Helemaal prima. Zou je dit ook op een andere manier kunnen ontbinden in factoren?

J: ... Nah, geen idee.

I: Welke factoren zitten in beide termen (wijst termen aan)?

J: Nou, 4 en 6. Of nja. Je kan deze delen door 6 (wijst $24a^2$ aan) en delen door 4.

I: Dus hoe kun je dit nog op een andere manier ontbinden?

J: $6a$...

I: Schrijf maar op wat je denkt.

J: (schrijft 2 op)

I: Prima. Kun je er nog eentje? Ik kwam in totaal op 12 verschillende uit. Zou je er nog eentje kunnen bedenken?

J: Moet je dan ook met kommagetallen werken?

I: Neu, alleen met hele getallen.

J: (schrijft iets op, krast het dan weer door: $12a(a - \quad)$)

I: Je zei net zelf al dat je 24 door een aantal getallen kon delen. (J: Ja) Welke getallen zei je?

J: 6 en 4. En 3. (begint te schrijven $b = 3a(a - 2)$)

I: Nou, klopt nog niet helemaal, die laatste. Want $3a \times a$

J: ow (verbetert correct naar 3)

I: [uitleg dat niet altijd a eruit gehaald hoeft te worden en je ook negatieve factoren kan hebben]

$$2a^2 + 16a + 30 = 0$$

④ $2(a^2 + 8a + 15) = 0$
 ⑤ $2 \cdot (a^2 + 8a + 15) = 0$
 ⑥ $2 = 0 \vee a^2 + 8a + 15 = 0$
 ⑦ $2 = 0 \vee (a+5)(a+3) = 0$
 ⑧ $\rightarrow a+5 = 0 \vee a+3 = 0$
 $2 = 0 \quad a = -5 \vee a = -3$

I: Gaan we naar de laatste vraag. Los op. Je ziet daar een vergelijking staan.

J: (begint meteen te schrijven: $(a \quad)(a \quad)$).... Ik snap alleen niet echt wat je met die twee moet doen.

I: Wat probeer je hier te doen (wijst naar wat ze heeft opgeschreven)?

J: Nou, $a \times a = a^2$

I: Je hebt geleerd inderdaad dat dat kan, ontbinden in factoren. Maar dat heb je altijd gehad als er alleen maar a^2 staat. Nu zul je toch. Kun je dit op zodanige manier ontbinden in factoren dat je toch de regel $A \cdot B = 0$ kunt gebruiken?

J: Ja, misschien hier een 2 voorzetten (schrijft 4 op)

I: Dat kan, maar dan maak je het jezelf erg moeilijk. Dan geef ik je een hulpje (schrijft op: $\dots \cdot (\quad) = 0$) Ik had het over ontbinden in factoren. Wat nou als ik zeg dat wij twee factoren zoeken zodat het zo wel op te lossen is. Wat zou er dan uitkomen?

J: [onverstaanbaar]

I: We willen dit op een bepaalde manier ontbinden in factoren, dus iets keer iets is nul, zodat we dit straks wel kunnen oplossen. Hoe zou je dat kunnen doen?

J: ...

I: Bij ontbinden in factoren kijk je altijd, welke factor hebben alledrie de termen? Welke is dat in dit geval?

J: ...Ja, 2.

I: Probeer maar eens. Schrijf maar op wat je denkt.

J: (schrijft eerst op: $2a \cdot (\quad) = 0$)

I: Als je ook de a eruit haalt, krijg je het een beetje lastig met die 30 want die heeft geen a . Dus de enige gemeenschappelijke factor is 2. Als je hier (wijst drieterm aan) de factor 2 eruit haalt, wat hou je dan over?

J: Nou, $8a$ en 15.

I: Uhuh, schrijf die eerst maar op.

J: Maar dan moet dit a^2 worden (schrijft niks op).

I: Nu hebben wij hier $8a$ (wijst naar $16a$) en de 15 (wijst naar 30), maar wat gebeurt er dan met die $2a^2$?

J: ...

I: Dit gedeelte heb je goed gedaan (wijst $16a + 30$ aan) want $2 \times 8a = 16a$ en $2 \times 15 = 30$, hoe kun je hier nog iets bijschrijven wat $2 \times$ (wijst lege plek aan) $2a^2$ wordt?

J: $+a^2$ (schrijft 5 op).

I: Ja. Kijk, nu hebben we een expressie staan. Dat zal misschien wel wat makkelijker zijn om op te lossen. Zou je het nu kunnen oplossen?

J: ... Maar nu heb je toch 3 dingen tussen haakjes staan?

I: Ja, we hebben hier inderdaad een som tussen haakjes staan en $\times 2$. Welk regeltje heb je geleerd met betrekking tot $= 0$?

J: $2 = 0$ euhm

I: Schrijf maar op.

J: (schrijft op $2 = 0$) ...

I: En wat dan nog meer?

J: Of $8a + 15 + a^2 = 0$ (schrijft op 6)

I: Zou je hem nu wel verder kunnen oplossen?

J: ...

I: Waar zoeken we nu naar?

J: Dit moet 0 zijn (wijst rechter expressie aan)

I: (Instemmend geluidje)

J: Dat hebben we nooit gehad met 3 getallen, alleen maar met 2.

I: Nou, volgens mij wel toch? Dit (wijst aan) is gewoon een drieterm, $a^2 + 8a + 15 = 0$. Welke regel gebruikte je daarbij? Wat moest je dan doen?

J: Dan moet je het weer opnieuw tussen 2 haakjes doen.

I: Ja, ontbinden in factoren heet dat. Doe maar.

J: (schrijft de haakjes en de a 'tjes op) ...

I: Dan moet het opgeteld worden? En vermenigvuldigd?

J: ... 5 en 3.

I: Ja, heel goed, schrijf maar op.

J: (schrijft op 7)

I: En nu afmaken.

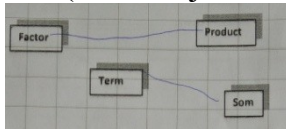
J: (schrijft op 8)

I: Prima, [uitleg wat er gebeurt is]. Netjes, dan zijn we klaar.

Interview 5 – Remco Assink, HV2A – I

I: Nou, bij vraag 1 zie je 4 woorden staan. Kun je met een lijntje aangeven welke woorden bij elkaar horen?

RA: (zet redelijk vlot de lijntjes)



I: Oké, waarom horen die woorden bij elkaar, denk je?

RA: Ja, dan krijg je [onverstaanbaar], denk ik.

I: Je hebt het wel zo gegokt. Heb je iets waarvan je denkt, dit zou het kunnen zijn?

RA: Bij product moet je factor uitrekenen, ofzo.

I: Hoe zit dat met Som en Term?

RA: Ja, weet ik niet.

I: Laat ik het zo zeggen: Het klopt wat jij hebt gedaan. Maar wat is dan het verschil met Factor – Product en Term – Som?

RA: Euh... Ja weet ik eigenlijk niet.

I: [legt uit waarom ze bij elkaar horen]

$$b = 24a^2 - 6a$$

(1) $b = a \cdot (24a - 6)$
(2) $b = 6a \cdot (4a - 1)$

I: Gaan we naar vraag 2. Ontbind in factoren. Mag je dat doen.

RA:

I: Waar hebben we hier mee te maken? Wat voor soort ... Hoe heb je dit altijd tijdens de les genoemd?

RA: euh... ik denk dat... euh, wat plus elkaar en keer elkaar.

I: Dat gebruik je in dit geval niet zo. Dit is een tweeterm en een tweeterm, dat ontbind je in factoren met een paar haakjes en je ging dan kijken: wat zit in deze term dat ook in die andere term zit? Wat zit in beide termen?

RA: De tafel van 6 dan. 6×4 en 6×1 ...

I: De tafel van 6. Want 6, dat zit ook in 24. Wat zou je dan buiten haakjes kunnen halen?

RA: a^2 ?

I: Dat lijkt me niet, want ik zie hier (wijst $-6a$ aan) geen a^2 staan. Je gaat kijken, wat dit in deze, dat ook daarin zit, en je begon net al goed, de tafel van 6. Want in beide zie je die 6 zitten. Wat betekent dat als beide een factor 6 hebben?

RA: Euh, gedeeld door, ofzo.

I: Laat ik je een hulpje geven (schrijft op $b = \dots \cdot (\quad)$) Als je moest ontbinden in factoren van een tweeterm, begon je vaak met zoiets op te schrijven. Je schrijft op de puntjes wat ze gemeenschappelijk hebben. Wat hebben ze gemeenschappelijk?

RA: a ?

I: Bijvoorbeeld. Dus dan mag je daar ...

RA: (schrijft a op)

I: en dan mag je daar (wijst binnen de haakjes), dan moest je bedenken, wat hou ik hier over? Iets keer a moet deze term worden (wijst $24a^2$ aan).

RA: 4 dan.

I: 4?

RA: 24.

I: Ja en wat nog meer? Niet alleen 24 toch?

RA: En 6?

I: Schrijf maar op wat je denkt.

RA: (schrijft nog niks op)

I: We zien hier een $\times$ staan. Dus als we $a \times$ iets doen, moet $24a^2$ zijn.

RA: (schrijft a achter 24)

I: $a \times$ iets....

RA: -6 (schrijft **1** volledig op)

I: Oké. Nu heb je het goed ontbonden in factoren. Zou je dit nog op een andere manier kunnen ontbinden in factoren?

RA: Euh, ja vast wel maar ik weet even niet meer hoe dat moet.

I: Nou, je zei bijvoorbeeld net al dat 6 ook in beide termen zit. Wat nou als je $6a$ buiten haakjes haalt? Zou je dat kunnen opschrijven? Dus dat je opschrijft: $b = 6a...$ Wat moet er dan tussen haakjes?

RA: (schrijft eerst op $b = 6a(6a - 4a)$) Zo denk ik. Want $6 \times 4 = 24$. (verbetert iets)

I: En $6a \times$ iets is $-6a$.

RA: (schrijft **2** op)

$2a^2 + 16a + 30 = 0$

③ $2 \cdot (a^2 + 8a + 15) = 0$

④ $a^2 + 8a + 15 = 0$

⑤ $a^2 = -8a - 15$

⑥ $(a+3)(a+5) = 0$

⑦ $a+3=0 \vee a+5=0$
 $a=-3 \quad a=-5$

I: Oké, dan gaan we naar de laatste vraag. Los op deze vergelijking.

RA: ...

I: Waar denk je aan?

RA: $18 +$, euh, $16 + 2$, maar dat is kwadraat.

I: Ja, dus dat mag je niet bij elkaar optellen (RA: Nee). Wat heb je geleerd bij een drieterm? Als je dat moest oplossen?

RA: Dan met haakjes.

I: Maar mag dat, in dit geval? Kan dat zomaar?

RA: Want het is $= 0$.

I: Dan heb je een drieterm, maar normaal gesproken staat hier altijd alleen maar een a^2 . Dan kun je inderdaad die (dubbele) haakjes gebruiken. En dan moest je kijken met die Som – Product methode. Maar in dit geval staat er $2a^2$. Zou je het op een dusdanige manier kunnen ontbinden in factoren dat je daarna dat regeltje wel kunt gebruiken?

RA: Nee, ik weet echt niet.

I: Dan geef ik je nog een hulpje (schrijft op: $... \cdot (\quad) = 0$). Ik ben op zoek naar iets dat als ik het op deze manier ontbind in factoren, dan kan ik het wel oplossen. Kun je bedenken wat op deze eerste puntjes moet komen te staan?

RA: $8a$

I: Als je dat als factor neemt, dan moet $8a$ uit deze term gehaald kunnen worden, uit deze term en uit deze term. Nou, bij 30 lijkt me dat lastig.

RA: Ja. 2 ofzo?

I: Waarom 2?

RA: Want 2 zit in die, die en die.

I: Prima, probeer maar.

RA: (schrijft **3** op)

I: Netjes. Zou je het nu wel kunnen oplossen?

RA: ... Nee.

I: Welke regel heb jij geleerd als je iets ontbonden hebt in factoren = 0? Daar heb je een regeltje bij geleerd.

RA: ...

I: $A \cdot B = 0$ Wat betekent dat in dit geval?

RA: (Haalt schouder op) Dat, euh, B nul is.

I: En wat is B in dit geval?

RA: ...

I: Dat betekent, we zien hier $2 \times$ iets is gelijk aan nul. Dat betekent dat dit iets (wijst rechterfactor aan) gelijk moet zijn aan nul. Zou je dat wel kunnen oplossen?

RA: Neu, ik weet het eigenlijk niet echt meer.

I: Waar je dan op uitkomt is (schrijft op: $a^2 + 8a + 15 = 0$, 4), een drieterm, en nu mag je die Som – Product methode gebruiken. Zou je dat nog kunnen?

RA: Euh, ...

I: Bij een drieterm gebruikte je altijd dubbele haakjes, he, begin daar maar mee.

RA: (schrijft 5 op)

I: Zal ik je even op weg helpen: (schrijft op: $(a \quad \quad)(a \quad \quad) = 0$) Nu gebruiken we de Som – Product methode. Welke twee getallen zijn vermenigvuldigd ...

RA: (Haalt schouders op)

I: 15. En opgeteld 8?

RA: Dat is een kommagetal, toch?

I: Nee. Twee getallen vermenigvuldigd 15. Hoe kun je vermenigvuldigd 15 krijgen?

RA: $7,5 \times 2$

I: Joa, maar dat is opgeteld niet 8. Welke getallen nog meer?

RA: Euh, ...

I: Als ik je daarmee help: 3 en 5?

RA: oh [wordt een beetje ongemakkelijk]

I: Maakt niet uit hoor. Schrijf maar hoe het dan verder gaat.

RA: (schrijft $(a = 3)(a = 5) = 0$) Zo iets.

I: $a = 3$ of $a + 3$, he?

RA: (verbetert naar 6)

I: En de laatste stap dan bij het oplossen.

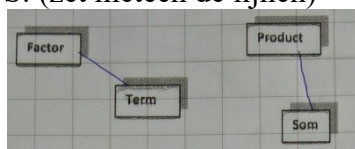
RA: Euh... (schrijft 7 op)

I: Oké, netjes. Nou heel erg bedankt.

Interview 6 – Susanne Bussink, HV2A – III

I: Dan gaan we naar de eerste vraag. Je ziet daar vier woorden staan. Zou je met een lijntje kunnen aangeven welke woorden bij elkaar horen?

S: (zet meteen de lijnen)



I: Waarom horen die bij elkaar?

S: De product en de som die kan je dan met haakjes, en dan horen die bij elkaar. En ja, hoe zeg je dat, dan moest je een product hebben en een som en dan kon je hem dus ontbinden.

I: Hoe bedoel je dat?

S: Je moest dan bijvoorbeeld uit, ja bijvoorbeeld uit zo'n formule (wijst naar de vergelijking van vraag 3) moet je dan de product en de som zoeken en dan kon je hem ontbinden.

I: En waarom zouden factor en term dan bij elkaar horen?

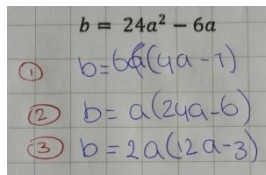
S: Hmm. Dat weet ik niet.

I: Als ik jou vertel dat wat ik in gedachten had dat een term bij een som hoort en een factor bij een product. Wat zou daar de reden achter zijn?

S: ...

I: Ik zie hier (wijst naar vergelijking van vraag 3) drie termen, drie termen samen maken een som door het bij elkaar op te tellen. En factoren, als je die vermenigvuldigt, maakt het een product, zoals hier (wijst naar $24a^2$). Ja, dus termen tel je op om een som te krijgen en factoren vermenigvuldig je om een product te krijgen.

S: Ja



$b = 24a^2 - 6a$

① $b = 6a(4a - 1)$

② $b = a(24a - 6)$

③ $b = 2a(2a - 3)$

I: Kijk even naar vraag 2. Ontbind in factoren.

S: (schrijft meteen 1 op)

I: Ja netjes. Zou je dat op nog een andere manier kunnen ontbinden in factoren?

S: Ja, door hier alleen a ...

I: Schrijf maar op wat je denkt.

S: (schrijft 2 op)

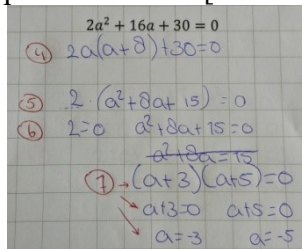
I: Zou je het op nog een andere manier kunnen? Ik kwam uiteindelijk uit op twaalf verschillende manieren.

S: (schrijft 3 op). Hmm

I: Je hoeft ze niet alle twaalf op te schrijven. Moet je die a buiten haakjes halen?

S: Euhm, nee, dat zal niet perse hoeven.

I: Precies, ontbinden in factoren betekent niks anders dan dat je met factoren een bepaald product maakt. [wat meer uitleg] Prima.



$2a^2 + 16a + 30 = 0$

④ $2a(a+8) + 30 = 0$

⑤ $2(a^2 + 8a + 15) = 0$

⑥ $2 = 0 \quad a^2 + 8a + 15 = 0$

$a^2 + 8a = -15$

⑦ $(a+3)(a+5) = 0$

$a+3=0 \quad a+5=0$

$a=-3 \quad a=-5$

I: Gaan we naar de laatste vraag. Los op. Los die vergelijking maar op.

S: ...

I: Probeer maar hard op te denken, waar denk je aan?

S: Iets moet keer elkaar 30 en opgeteld 16.

I: Wat ben je dan aan het doen, als je dat probeert?

S: Ja, gewoon 1×30 , maar dat klopt niet, want dan komt het niet op 16. Dan kan je 2×15 , maar dan kom je op 17 uit. 6×5 , dat is bij elkaar opgeteld 11.

I: Wat je aan het doen bent, is de Som – Product methode toepassen. En wat je daarmee eigenlijk wil gaan doen is ontbinden in factoren. Maar we hebben ook geleerd dat ontbinden in factoren kan alleen als hier een a^2 staat, oj, maar nu staat er een tweetje voor. Zou je het op een andere manier kunnen ontbinden dat je die regel wel kunt toepassen.

S: Dan zou je toch eerst dit moeten toepassen (wijst naar wat ze bij vraag 2 heeft gedaan)

I: Schrijf maar op wat je denkt.

S: (schrijft 4 op) Zo.

I: Hoe zou je het dan nu verder oplossen?

S: Dan krijg je denk ik $2a = 0$, $8 + a = 0$ en $30 = 0$

I: $30 = 0$? Ik zou eerder zeggen dat dit gedeelte dan gelijk moet zijn aan -30 en dan maak je het jezelf nog lastiger.

I: Je zat wel in de buurt met dat je zei dat je iets buiten haakjes moet halen. Maar ik bedoel toch nog op een andere manier ontbinden in factoren.

S: Hmm... Ik denk sowieso dat iets van die 30 in haakjes moet. Want anders dan kun je het niet ontbinden.

I: Waar je heen wil gaan, is dat je iets hebt met alleen die a^2 . Dus als ik jou een hint geef (schrijft op ... $\cdot (\quad) = 0$). Twee factoren, kun jij het op een bepaalde manier ontbinden in factoren zodat je het dan wel kunt oplossen? Wat zou dan op die eerste puntjes moeten komen staan?

S: ... Euhm, 2. Ja... nee. Dat kan je denk ik doen. Eén?

I: Eén kan altijd, dan help je het niet zoveel. Dan zet je er één neer en dat (wijst naar drieterm) blijft dan gewoon hetzelfde.

S: Hmm, iets dat je, ja, keer elkaar dit allemaal...

I: Waarom zou 2 niet kunnen?

S: Ja wel, 2 kan wel.

I: Probeer maar eens.

S: (schrijft op 5) Zo. En verder, dat zou betekenen dat $2 = 0$

I: Schrijf maar op wat je denkt.

S: (schrijft op 6 en vervolgens $a^2 + 8a = 15$)

I: Wat doe je van die stap naar die (wijst van $a^2 + 8a + 15 = 0$ naar $a^2 + 8a = 15$)

S: Die 15 eraf halen zodat je uiteindelijk naar de a kan. Maar nu kan je niet verder want je hebt die a^2 nog.

I: Hoe wordt dit (wijst drieterm aan) gedeelte genoemd?

S: Euhm, weet ik niet.

I: Hoeveel termen zijn dit?

S: Drie.

I: Een drieterm.

S: Kan je hem dan misschien wel oplossen, dat je keer elkaar 15 en bij elkaar 8?

I: Kan dat?

S: Euhm, ...

I: Waar zoek je nu naar?

S: Wat vermenigvuldigd 15 kan, en bij elkaar 8. 3×5 .

I: Schrijf maar op wat je denkt.

S: (schrijft op 7)

I: [geeft wat uitleg over wat er gedaan is] Wat betekent $2 = 0$, kun je daar wat betekenis uit halen?

S: Euhm, nee, ja dan...

I: Nee he? [geeft wat uitleg] Heel netjes, dankjewel.

Lijst met gebruikte codes

	Hoofdvragen
CV1	Vraag 1: Kun je (in eigen woorden) uitleggen wat een lineaire vergelijking is? Verwacht: antwoord dat getuigt van conceptuele kennis.
CV2	Vraag 2: Wat betekent het om een (lineaire) vergelijking op te lossen? Verwacht: antwoord dat getuigt van conceptuele kennis.
CV3	Vraag 3: Kun je een echte situatie bedenken waarbij je een lineaire vergelijking moet oplossen? Verwacht: antwoord dat getuigt van conceptuele kennis.
PV4a	Vraag 4a: Los op ' $13x + 3x + 14 = 3x - 5$ ' Verwacht: antwoord dat getuigt van zowel procedurele als conceptuele kennis.
PV4b	Vraag 4b: Los op ' $2(x + 3) = 4x$ ' Verwacht: antwoord dat getuigt van zowel procedurele als conceptuele kennis.
CV5	Vraag 5: Kun je een echte situatie bedenken waarbij je een ongelijkheid moet oplossen? Verwacht: antwoord dat getuigt van conceptuele kennis.
CV6	Vraag 6: Welke woorden horen bij elkaar? Factor – Term – Som – Product
PV7	Vraag 7: Ontbind in factoren: $b = 24a^2 - 6a$
PV8	Vraag 8: Los op: $2a^2 + 16a + 30 = 0$
	Hulpvragen bij het doorvragen wanneer geen volledig antwoord gegeven is
H	Vraag om hard op te denken
HV1	Kun je een voorbeeld geven?
HV2	Wat betekent 'lineair'?
HV3	Wat betekent 'vergelijking'?
HV4a	Grafiek; Wat betekent het om een vergelijking op te lossen? Waar zit je in de grafiek? Met uitleg over de lijnen, aanwijzen wat wat is.
HV4b	Grafiek; Wat betekent het om een vergelijking op te lossen? Waar zit je in de grafiek? Met de vraag: hoe kun je zien dat $2x - 3$ die getekende lijn is?
HV4c	Grafiek; Wat betekent het om een vergelijking op te lossen? Waar zit je in de grafiek? Geen uitleg / vraag met betrekking tot de formules
HV5	Ontbinden in factoren kan alleen met een drieterm als er a^2 staat, zoals je geleerd hebt. Nu staat er $2a^2$. Kun je het zó ontbinden in factoren dat je wel de regel $A \cdot B = 0$ kunt gebruiken?
HV6	(Schrijf op) $\dots \cdot (\quad) = 0$. Kun je bedenken wat er op de eerste puntjes moet komen te staan, zodat je het daarna wel kunt oplossen?
HV7	Welke factor hebben alle termen? / Wat is de grootste gemeenschappelijke factor?
HV8	Laat zien dat de rechterfactor ook gelijk moet zijn aan nul (bij $2 \cdot (a^2 + 8a + 15) = 0$). Kun je het dan oplossen?
S	Schrijf op wat je denkt / Probeer maar (vaak wanneer mondeling al juist antwoord is gegeven)
SV	Sturende vraag. De leerling heeft geen volledig en/of goed antwoord gegeven en er wordt aangestuurd richting een goed antwoord.
SV*	Sturende vraag waar bijna geen fout antwoord op te geven valt.
SV (V...)	Herhaling van CV.../PV....Kan hij/zij het nu wel goed uitleggen?
U	Ik geef wat uitleg, niet gevolgd door een vraag
UV	Eerst geef ik wat uitleg, daarna stel ik dezelfde vraag als vóór de uitleg, of ik geef

	een aanvullende vraag
UV*	UV, maar de vraag stuurt al heel erg in de goede richting
VV ₁	Verdiepende vraag (bij PV4: ‘Kun je de vergelijking ook nog op een andere manier oplossen / zie je een andere eerste stap bij het oplossen?’)
VV ₂	Verdiepende vraag (bij CV6: ‘Waarom horen die woorden bij elkaar?’)
VV ₃	Verdiepende vraag (bij CV6: ‘Waarom horen ... en ... bij elkaar?’)
VV ₄	Verdiepende vraag (bij PV7: ‘Kun je het op nog een andere manier ontbinden in factoren?’)
ZB	‘Dat moet je zelf bedenken’, wanneer de leerling een wedervraag stelt
	Antwoorden van leerlingen
–	Geen antwoord op vraag / schrijf niks op als wordt gevraagd iets op te schrijven / ‘geen idee / weet ik niet’, bij CV6: Term en Product gekoppeld en Factor en Som.
+ / –	Bij CV6: Factor en Term gekoppeld en Product en Som gekoppeld.
+	Bij CV6: Factor en Product gekoppeld en Term en Som gekoppeld
C+	Goed conceptueel antwoord
C+ / –	Nog geen goed conceptueel antwoord, zit wel op de goede weg
C–	Fout conceptueel antwoord
P+	Goed procedureel antwoord
P+ / –	Nog geen goed procedureel antwoord, wel op de goede weg
P–	Fout procedureel antwoord
P/C+?	Goed P/C antwoord, maar klinkt onzeker. Het is niet duidelijk of hij/zij het echt begrepen heeft.
VT	Geeft een vraag terug.

Resultaat van de gecodeerde interviews

Interview 12 en 13 mei

Int.	HV2C II		Int.	HV2A II		Int.	HV2 C I		Int.	HV2A I		Int.	HV2 C III		Int.	HV2A III	
CV1	C+		CV1	C+/-, P+/-		CV1	C+		CV1	C-		CV1	C+/- -		CV1	C+/-	
HV1	P+		HV2/HV3	P+/-		HV2	C+		HV2	C+		SV(CV1)	P+		SV(CV1)	P+	
HV2	P+/-			SV*		C+	SV(CV1)		C+	U, HV2		C-	HV2		C+		
SV(HV2)	C+			HV3		P+/-				SV		C+					
SV	-			HV4b		P+				SV(HV2)		C+					
SV	C+			SV		-				HV4b		C+					
HV3	C+/-			SV		C+											
				SV*		P+											
				SV		C+/- -											
CV2	P+	CV2	P+	CV2	P-	CV2	P+/-,-	CV2	C+	CV2	P+						
SV	C-	SV	P+	SV	C-	HV4c	-	SV	C-, VT	SV	C-						
SV	P+	SV	C-	SV	C+	SV	P+/-	UV	C+	HV4c	P+						
HV4a	C+	HV4c	C-	SV (CV2)	-	SV	-	SV	C+	SV	-						
SV	C+			UV	-	UV(CV2)	C-	SV	C+	SV	C+/-						
												SV	C-				

										SV		C+
										SV		P+
CV3	C+/-	CV3	C+/-	CV3	P-	CV3	C+/-	CV3	C-	CV3	P+	
SV	C-	SV	C+	SV	P-	SV	C+/-	SV	C-	SV(CV3)	C+/-	
				UV*	C+?			SV	C-	SV	C+	
								SV	C-	SV	C+/-	
PV4a	P+/-	PV4a	P+	PV4a	P+	PV4a	P+	PV4a	P+	PV4a	P+	
VV ₁	C+	VV ₁	-	VV ₁	C+	VV ₁	C+	VV ₁	C+	VV ₁	C+	
VV ₁	C-	SV	-	VV ₁	C+	VV ₁	-	VV ₁	-	VV ₁	C+	
				VV ₁	C+			SV	C+			
PV4b	P+	PV4b	P+	PV4b	P+	PV4b	P+	PV4b	P+	PV4b	P+	
VV ₁	P-	VV ₁	-	VV ₁	-	VV ₁	-	VV ₁	-	VV ₁	C-	
SV	P-	UV	P+	UV	-	UV	P+	UV	-	UV	P+	
		SV	P+/-	SV	P-	SV	C+/-	SV	P-	SV	C+/-	
								SV	P-	SV	P-	
CV5	-	CV5	P+/-	CV5	P+/-	CV5	-	CV5	-	CV5	-	
SV	C+/-			SV (CV5)	-	SV	P+/-	SV	P+/-	SV	-	
SV*	C+					SV	C+/-	SV	C+/-	SV	C+/-	
						SV	P+					

Interview 2 en 3 juni

Int.	HV2C II		Int.	HV2A II		Int.	HV2 C I		Int.	HV2A I		Int.	HV2 C III		Int.	HV2A III
CV6	+/-		CV6	-		CV6	+		CV6	+		CV6	+/-		CV6	+/-
VV ₂	P+/-, C-		VV ₂	-		VV ₂	C+/ -		VV ₂	C-		VV ₂	C-		VV ₂	P+/-
SV	C-		SV	C-		VV ₃	C+/ -		SV	C-		U, U			SV	P+/-
			U			SV	C-		VV ₃	-					VV ₃	-
						SV	C-		SV	-					SV	-
						SV	C-								U	
PV7	P+		PV7	-		PV7	VT		PV7	-		PV7	P+		PV7	P+
VV ₄	C+		S	P+		ZB	P+		SV	-, P-		VV ₄	VT		VV ₄ , S	C+
SV(VV ₄)	C+		VV ₄	-		VV ₄	-		HV7	C+		S	C+/ -		VV ₄	C+
			HV7	C+/-		HV7	C+		SV	C-		UV	VT		SV	C+
			SV(VV ₄)	C+/-		S	C+		SV	P+/-		HV7	C+			
			S	C+		VV ₄	-		UV	C+?		SV	P-			
			SV(VV ₄)	VT					SV	C-		SV	P+			
			SV	P+/-					SV	C+		SV(VV ₄)	-			
			SV	C+					SV	C+/-		HV7	C+			
									S	-		VV ₄	C+, C+			
									SV	P+						
									SV	P-						
									VV ₄	-						
									SV	C-						

				SV	C–				
PV8	P–	PV8	P–	PV8	–	PV8	P–	PV8	–
HV5	C–	SV	C–	H	P–	H	P–	H	P–
SV	P+	HV5	C+/-	HV5	C–	SV	P+/-	H	P–
HV6	C–, –	HV6	–	HV6	C–	SV	P–	HV5	–
HV7	C+?	HV7	C+	U	–	HV5	–	HV6	C–
S, SV	C+	S	P–	HV7	C+	HV6	C–	SV	C+, VT
SV	–	SV	P+	S	C+/-	SV	C+?	ZB	C+
HV8	C+, P–	S	P+	SV	P–	SV	C+	SV, S	VT
SV	–	SV	–	SV	P+	S	C+	ZB, H	P+
SV	P–	SV	C+	S	C+	SV	–	S, SV	C+
SV	C+	SV	VT	SV	C+?	SV	–	SV	VT
SV	VT	SV	C+	S	–	SV	P+/-	SV	C+/-
S	P+, VT	S, SV	C+	SV	C+	SV	–	SV	C–
SV	P+	SV	–	SV	–	HV8	–	UV	VT
		SV	P+, C–	SV	–	SV	–	SV	–
		SV	P+	SV ¹	–	UV	C–		
		S	P+/-	SV ¹	–	UV	P–		
		SV	P+	SV ¹	–	SV	VT		
		S	P+	SV	P+/-	SV	P+/-		
				SV	P+	SV	–		
				SV	P+	U, S	P–		
						SV	P+/-		
						SV	P+		