

Statische & Dynamische Visualisaties bij Optimalisatieproblemen

De invloed van visualisaties op de prestaties
van wiskunde A leerlingen in 5 vwo

Luuk de Vries
M-SEC-Wi
S1003712
Onderzoek van Onderwijs (10EC)
I.s.m. Twents Carmel College
Lyceumstraat te Oldenzaal
21 oktober 2016

UNIVERSITEIT TWENTE.

Samenvatting

Op het Twents Carmel College op locatie Lyceumstraat in Oldenzaal ervaart de wiskundesectie dat leerlingen van 5 en 6 vwo bij wiskunde A op vraagstukken over optimaliseren regelmatig vastlopen. Eén van de vakdocenten denkt dat dit komt omdat leerlingen het moeilijk vinden om de opdrachtomschrijving en de visualisatie van het optimalisatieprobleem te combineren.

Uit analyse van de door leerlingen te volgen oplossingsaanpak, volgt dat er een scala aan potentiële probleempunten moet worden overwonnen. Eén van deze probleempunten sluit aan bij de ervaring van de vakdocent; bij leerlingen ontstaat een mismatch tussen wat ze zien en wat er te zien is. Goed ontworpen visualisaties en gebruik van dynamische visualisaties worden gezien als kansrijke oplossingen en vormen de hoofdingrediënten voor het ontwerpende deel van dit onderzoek.

Onderzocht is of leerlingen beter presteren met goed ontworpen visualisaties dan enkel met ongewijzigde visualisaties uit de wiskundemethode. In één klas worden de wiskundelessen en afsluitende toets met ongewijzigde visualisaties gegeven. In de andere klas wordt een les met dynamische visualisaties en dezelfde toets met verbeterde visualisaties gegeven. Het resultaat is dat leerlingen in de experimentele klas, per opgave gemiddeld meer dan een hele stap verder in het oplossingsproces komen, dan in de klas met de ongewijzigde visualisaties.

1. Inhoudsopgave

2. Inleiding.....	5
3. Methode.....	14
4. Analyse	19
5. Resultaten	21
6. Conclusie & Discussie.....	23
7. Referenties	25
8. Appendix	27

2. Inleiding

2.1 Aanleiding

Op het Twents Carmel College (TCC) locatie Lyceumstraat te Oldenzaal ervaart de sectie wiskunde dat leerlingen uit 5 en 6 vwo voor het vak Wiskunde A onsuccesvol zijn in het oplossen van optimalisatieproblemen. De leerlingen lopen vaak vast gedurende het oplossingsproces en de wiskundesectie wil graag weten hoe de leerlingen hierbij geholpen kunnen worden en of ICT hierin een rol zou kunnen spelen. Dit Onderzoek van Onderwijs (OvO) heeft als doel om de oorzaak van dit probleem te achterhalen en één of meerdere oplossingen hiervoor te vinden.

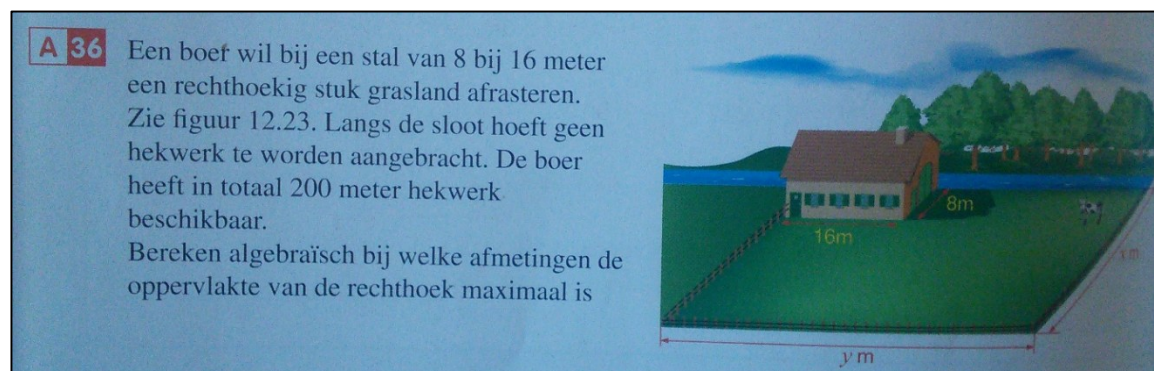
2.2 Onderzoeksvraag

Op basis van bovenstaande aanleiding is de hoofdvraag van dit onderzoek;

“Waar en waarom lopen 5 vwo wiskunde A leerlingen vast bij het oplossen van optimalisatieproblemen en hoe kunnen deze leerlingen daarbij worden geholpen?”

2.3 Een optimalisatieprobleem

Optimalisatieproblemen zijn wiskundige puzzels waarin een eigenschap van een functie onder beperkende voorwaarden moet worden geminimaliseerd of gemaximaliseerd. Figuur 1 geeft een voorbeeld van een representatief probleem uit de op het TCC gebruikte wiskundemethode; Getal & Ruimte (2007). De opdracht voor de leerling is om de oppervlakte van een rechthoekig stuk land te maximaliseren onder de voorwaarde dat de omtrek (het hekwerk) van dit stuk land op 200 meter beperkt is.



Figuur 1. Optimalisatieprobleem uit de methode (Getal & Ruimte, WiA VWO deel 3, 2007, p. 176)

De structuur van het optimalisatieprobleem in Figuur 1 wordt onderverdeeld in twee delen. Enerzijds (links in figuur 1) een opdrachtomschrijving met daarin de uit te voeren opdracht en anderzijds (rechts in figuur 1) een visualisatie welke de context visueel weergeeft. Hoewel de methode hier het begrip figuur hanteert, is het eigenlijk een schematische weergave van de context waar het begrip visualisatie uit de Engelse literatuur beter bij past (e.g. Duval, 1999; Jasute, 2014).

2.4 De vakdocent

Eén van de vakdocenten waarmee nauw is samengewerkt in dit onderzoek is Mart Hermans (in het vervolg: de vakdocent). Het is zijn ervaring dat leerlingen vooral moeite hebben om de twee eerder genoemde onderdelen (opdrachtomschrijving & visualisatie) van het probleem te combineren. Leerlingen moeten op weg naar de oplossing de gegeven context analyseren, de eigenschappen van het geometrische figuur identificeren en de benodigde verbanden en functies afleiden. De vakdocent denkt dat de oorzaak van het probleem ligt bij dat leerlingen het lastig vinden om zich in het probleem te verdiepen en het probleem zich eigen te maken. Voor de stappen verder in het oplossingsproces waarbij met behulp van differentiëren de afgeleide van de doelfunctie gelijkgesteld aan nul wordt, ziet de vakdocent geen uitdaging meer voor de leerling.

2.5 Het werkschema van Getal & Ruimte

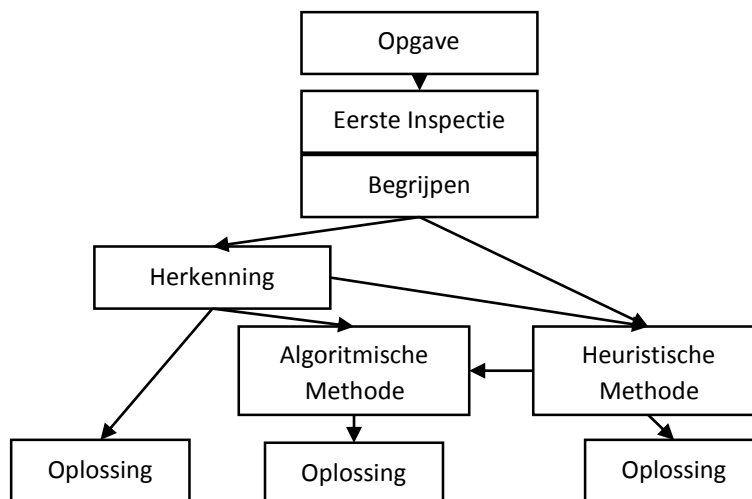
De methode Getal & Ruimte (2007) probeert de leerlingen te helpen met het oplossen van een optimalisatieprobleem door middel van een werkschema. Dit werkschema bestaat uit vijf stappen, welke een stap voor stap te volgen procedure vormen, om tot een oplossing op het optimalisatieprobleem te komen. Dit werkschema bestaat uit de volgende stappen (Getal en Ruimte, 2007, p.175);

1. *Verdiep je in de situatie en kijk welke variabelen een rol spelen;*
2. *Schrijf de te optimaliseren grootte G als functie van de variabelen gevonden in stap 1;*
3. *Zoek een verband tussen de variabelen met behulp van de gegeven informatie en druk daarmee de ene variabele uit in de andere variabele;*
4. *Schrijf G als functie van één variabele door 2 en 3 te combineren;*
5. *Gebruik de afgeleide van G om de gestelde vraag te beantwoorden.*

De ervaring van de vakdocent is dat de problemen ontstaan bij het extraheren van formules en verbanden uit de context van het optimalisatieprobleem, valt samen met de 2^e en 3^e doe-stappen uit het bovenstaande werkschema. Dit werkschema wordt in dit onderzoek als uitgangspunt genomen, omdat het verweven is in de structuur van het hoofdstuk over optimalisatie in Getal & Ruimte.

2.6 De oplossingsaanpak

Hoewel het werkschema uit Getal en Ruimte een te volgen procedure beschrijft, blijven de denkstappen welke de leerlingen moeten uitvoeren onderbelicht. Het is op dit vlak dat Van Streun (2008) het denkproces bij leerlingen bij het aanpakken van een wiskundige opgave verder analyseert. Figuur 2 geeft de oplossingsaanpak van Van Streun weer, bestaande uit diverse denkstappen. Deze oplossingsaanpak wordt in de volgende paragrafen toegepast op het optimalisatieprobleem uit figuur 1.



Figuur 2. Oplossingsaanpak van Van Streun. Bron: Van Streun (2008).

De opgave

In de eerste denkstap wordt van de leerling verwacht een 'eerste inspectie' uit te voeren. In deze context zal de leerling de opdrachtomschrijving lezen en de visualisatie in zich opnemen.

De eerste inspectie

In deze denkstap probeert de leerling de probleemsituatie te verbinden met de voorkennis. Er wordt een visualisatie van een stuk land gepresenteerd, met de opdracht de oppervlakte van het rechthoekige grasland te maximaliseren. Het gewenste resultaat van deze stap, is dat de leerling het probleem identificeert als een optimalisatieprobleem.

Begrijpen

Na de inspectie volgt de stap waarin de leerling probeert de opdrachtomschrijving te begrijpen en de probleemsituatie te koppelen met de voorkennis, waardoor de zoekrichting duidelijk wordt. Er is in de context van Figuur 1 een rechthoekig stuk land, met een omtrek van maximaal 200 meter, een stal van 8 bij 16 meter, een sloot en er wordt gevraagd om algebraïsch de oppervlakte van de rechthoek te maximaliseren. De gedachte van de leerling zou moeten zijn: “oppervlakte van een rechthoek, omtrek van de rechthoek en iets met differentiëren”. Van Streun (1989) beschrijft het als de zoekrichting die duidelijk wordt.

De herkenning

In het herkenningsproces speelt het abstraherende vermogen van een leerling een grote rol. In het cognitieve vermogen van de leerling worden aanknopingspunten voor de koppeling tussen de probleemsituatie en de voorkennis gebruikt om zich de probleemsituatie verder eigen te maken. Wiskundige begrippen, technieken en de juiste methode voor het oplossen van de opgave worden hierbij uit de voorkennis gehaald. Het resultaat van deze stap is dat de leerling een specifiekere invulling kan geven aan het stappenplan uit Getal & Ruimte (2007) om algoritmisch (via omschrijven, differentiëren en oplossen) tot de oplossing te komen.

Een algoritmische methode

Een algoritmische methode is een methode die indien precies en in de juiste volgorde uitgevoerd wordt tot een gegarandeerd juist antwoord leidt. Voor het gebruik van een algoritmische methode, stelt Van Streun (2008) vier voorwaarden. Uit de voorgaande stappen moet volgen dat het doel scherp vast ligt, dat de voorwaarden voor toepassing van de methode eenduidig zijn, dat de opgave scherp is gedefinieerd en dat het doel bij toepassing van de methode gegarandeerd wordt bereikt. In de context van het optimalisatieprobleem uit Figuur 1 geldt dat wanneer de leerling de omtrek ($O = 2x + y - 8 = 200$) en de oppervlakte ($Opp = x * y$) uit de voorgaande stappen haalt, in theorie de weg vrij ligt om met deze ingrediënten in één keer door te rekenen naar het eindantwoord.

De volgende stap is dan om y in de formule voor de oppervlakte te substitueren met het verband tussen x en y uit de vergelijking van de omtrek ($y = 208 - 2x$). Ingevuld levert dit de van één variabele (x) afhankelijke functie voor de oppervlakte: $Opp(x) = x * (208 - 2x)$. De waarden van x waarbij de oppervlakte minimaal of maximaal is, wordt berekend door de afgeleide van de functie van de oppervlakte gelijk te stellen aan 0. D.w.z. $Opp'(x) = 208 - 4x = 0$, met in dit geval één oplossing, t.w. $x = 52$. De bijbehorende y waarde van 104 volgt wanneer de vergelijking voor de omtrek wordt opgelost door $x=52$ in te vullen. Het antwoord is dus 52 bij 104 meter.

Een heuristische methode

Het ligt echter voor de hand dat de wat minder geoefende leerling niet aan de vier gestelde voorwaarden voor het gebruik van de algoritmische methode kan voldoen. Deze leerling zal voor een andere structuur van het oplossingsproces kiezen. De leerling zal grijpen naar een heuristische methode (de leerling moet zoeken); een globalere methode dan een algoritmische.

Van Streun (2008) stelt dat dit nog niet hoeft te betekenen dat de leerling de juiste heuristische methode zal hanteren. De leerling kan bijvoorbeeld het einddoel nog niet voor ogen hebben of niet de regels voor het toepassen van een methode kennen. Het (deels) niet begrijpen van de opgave of vastlopen in een aanpak, kan vervolgens ertoe leiden dat de leerling een totaal andere heuristische methode als aanpak zal overwegen. Van Streun noemt als voorbeelden; het onderzoeken van een eenvoudig geval, het maken van een plaatje, het proberen van een getallenvoorbeeld of het vertalen van de probleemsituatie naar een andere representatie. Ook het systematisch analyseren van de eigen kennis wordt door Van Streun als een mogelijke keuze van de leerling genoemd. Ondanks dat een heuristische methode geen garantie geeft voor succes is een belangrijke positieve eigenschap wel dat de ingezette zoektocht uiteindelijk alsnog ertoe kan leiden dat de juiste systematische probleemaanpak wordt herkend.

2.7. De oplossingsaanpak versus het werkschema

In deze paragraaf wordt de inhoud van het werkschema uit Getal & Ruimte (2007) vergeleken de algemene oplossingsaanpak van Van Streun (2008). Allereerst wordt geobserveerd dat deze oplossingsaanpak vollediger is dan het werkschema. Wanneer de oplossingsaanpak doorlopen wordt door een leerling, dan voert deze impliciet ook de stappen uit het werkschema uit. Een eerste inspectie vraagt bijvoorbeeld om het verdiepen in de situatie. Het ontleden van de relevante variabelen vraagt de leerling om te begrijpen (stap 1 uit het werkschema). Herkenning maakt het zoeken naar verbanden mogelijk, om vervolgens de 2^e en 3^e stappen uit het werkschema uit te kunnen voeren. Het toepassen van de algoritmische methode valt vervolgens samen met stappen 4 en 5. Wanneer enkel het werkschema van Getal & Ruimte door een leerling wordt doorlopen, dan volgt niet noodzakelijkerwijs dat de leerling alle stappen uit de oplossingsaanpak heeft uitgevoerd.

Beide methodieken laten zien dat zowel een heuristische aanpak als een algoritmische aanpak toegepast moeten worden om tot de oplossing te komen. Enerzijds voert de leerling een heuristische zoektocht uit naar variabelen, verbanden en eigenschappen van figuren. Anderzijds moeten algoritmische bewerkingen worden uitgevoerd om tot het eindantwoord te komen. De oplossingsaanpak van Van Streun omvat de stappen uit het werkschema, maar andersom nodigt het werkschema niet uit tot het geforceerd volgen van alle oplossingsstappen. De oplossingsaanpak van Van Streun is vollediger, doordat de leerling expliciet wordt gevraagd om alle benodigde stappen (inspectie, begrijpen, herkenning, een heuristische methode en een algoritmische methode) toe te passen om het optimalisatieprobleem op te kunnen lossen.

2.8 Mogelijke problemen bij leerlingen

De aanleiding voor dit onderzoek is dat de leerlingen bij het oplossen van optimalisatieproblemen, ergens in het oplossingsproces vastlopen. Uit de oplossingsaanpak van Van Streun (2008) volgt dat een aantal stappen (inspectie, begrijpen, herkenning, een heuristische methode en analytische methode) juist moeten worden bewandeld. Eén mogelijke misstap hoeft echter nog niet te betekenen dat de leerling definitief vastloopt, aangezien het vinden van een andere heuristische methode de leerling weer op het juiste pad kan brengen. In iedere oplossingsstap kan een leerling echter – door uiteenlopende redenen – vastlopen. Van Streun geeft hiervoor een tweetal voorbeelden; leerlingen zouden het optimalisatieprobleem niet kunnen koppelen aan de voorkennis en/of geneigd zijn om geen tijd te verliezen. Het gevolg is dat er geen stappen meer worden gezet, fouten worden gemaakt, of enkel willekeurige oplossingsheuristieken worden toegepast om (in een zo kort mogelijke tijd) toch tot een oplossing te komen. Van Streun geeft als derde voorbeeld dat de leerling ook zou kunnen vastlopen, wanneer deze over weinig tot geen vermogen beschikt om de wiskundige essentie van een opgave te abstraheren. Het lukt de leerling dan niet om de probleemsituatie op een juiste manier eigen te maken. Blackwell (2007) beargumenteert dat er ook een scala aan externe en psychische factoren kunnen meespelen (e.g. intelligentie, leergierigheid, vertrouwen, talent) welke de houding en prestaties van de leerling verder kunnen beïnvloeden.

Het beschikken over te weinig vermogen om de wiskundige essentie uit een opgave te abstraheren is een probleem welke eerder in dit onderzoek genoemd is. De vakdocent beschrijft uit zijn eigen ervaring dat leerlingen het lastig vinden om zich te verdiepen in de gegeven situatie en context, de eigenschappen van het geometrische figuur te identificeren en vervolgens daaruit de benodigde verbanden en functies af te leiden, zodat er naar de oplossing gewerkt kan worden. Van Streun (2008) omschrijft het als het ontbreken van 'vermogen' om de probleemsituatie eigen te maken. Het probleem van gebrek aan vermogen wordt genoemd zowel in de lespraktijk als in de literatuur als potentiële oorzaak. Er wordt voor gekozen om in dit onderzoek dit geïdentificeerde probleem verder uit te werken.

2.9 Geometrisch denken

Vanwege de meetkundige context van optimalisatieproblemen, kan het hiervoor genoemde vermogen van leerlingen worden gekwantificeerd door deze te uit te drukken in het geometrisch denkniveau van leerlingen. Het raamwerk van Van Hiele (1986) wordt in de literatuur hiervoor vaak gebruikt. De vijf niveaus waarin Van Hiele het geometrisch denken in heeft onderverdeeld, is naast een handvat voor het beoordelen van het niveau van een leerling ook geschikt voor het evalueren van de structuur van een opgave en het ontwikkelen van nieuw onderwijs met een geometrische achtergrond (Pegg, 1997). Doordat de optimaliseringsopgaven het 3^e niveau van Van Hiele (1986) niet overstijgen, wordt in dit onderzoek de vijf niveaus beperkt tot drie niveaus. Fuys, Geddes, Lovett en Tischler (1988) beschrijven deze drie denkniveaus als volgt;

- Van Hiele Niveau 1: *“Visueel”. De leerling herkent, vergelijkt en voert operaties uit op meetkundige figuren op basis van hoe ze eruit zien.*
- Van Hiele Niveau 2: *“Beschrijvend”. Leerlingen begrijpen de eigenschappen van een figuur en kunnen deze gebruiken om problemen op te lossen.*
- Van Hiele Niveau 3: *“Deductief”. De figuren kunnen worden ingedeeld naar eigenschappen en informele afleidingen kunnen worden gemaakt (als, dan...), zoals op gebied van formules die de geometrische eigenschappen beschrijven.*

Opnieuw wordt de opdracht uit Figuur 1 stap voor stap geanalyseerd, ditmaal met als doel om per stap het benodigde Van Hiele niveau te beschrijven.

In de eerste stap van het werkschema wordt van leerlingen verwacht dat ze zich verdiepen in de situatie en identificeren welke variabelen van het wiskundige figuur in de visualisatie een rol spelen. De leerling moet uit de opdrachtoomschrijving en visualisatie de elementen van welke de dimensies zoals lengte, oppervlakte, inhoud, nog niet vast liggen, benoemen en identificeren. De bewerkingen zijn visueel van aard en het bijbehorende Van Hiele niveau is derhalve 1.

De tweede stap betreft het opstellen van de te optimaliseren grootte (de oppervlakte). Hiervoor is het essentieel dat de leerling de vaardigheid beheerst van het bevatten van de eigenschappen van een figuur. Om vervolgens de verbanden tussen de variabelen uit de eerste stap kan omschrijven tot een formule voor het berekenen van de oppervlakte. In de voorbeeldopgave (figuur 1) de oppervlakte welke gelijk is aan x (lengte) maal y (breedte). Hiervoor is Van Hiele niveau 2 benodigd.

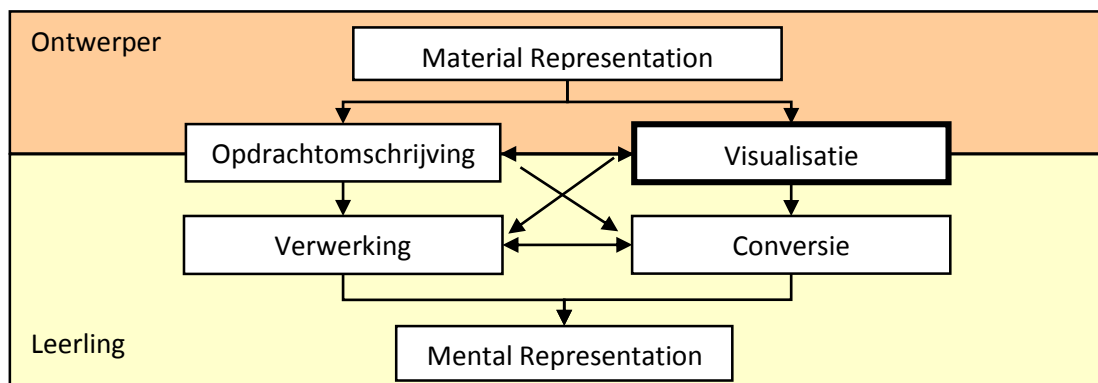
De derde stap uit het werkschema bouwt hierop voort. Naast het zoeken van een tweede verband tussen variabelen uit de eerste stap en de gegeven informatie (m.b.t. de omtrek), moet niet een formule, maar een vergelijking worden opgesteld zodanig dat de beide verbanden samengevoegd kunnen worden. In de voorbeeldopgave (Figuur 1) is de beperkende voorwaarde de omtrek van het hekwerk. Hoewel de omtrek van de rechthoek de som van tweemaal x (lengte) en tweemaal y (breedte) zou zijn, moet de leerling uit de combinatie van opdrachtoomschrijving en visualisatie de omtrek waar geen hekwerk benodigd is daar nog van afhalen. De informele afleiding is hier: “als een deel van de omtrek geen hekwerk nodig heeft, wat heeft dat voor gevolg in de vergelijking van de omtrek?”. Het resultaat van deze stap, is een van één variabele afhankelijke functie van de oppervlakte. Deze wordt gemaximaliseerd in de stappen 4 en 5 uit het werkschema. Het bijbehorende Van Hiele niveau in de derde stap van het werkschema is 3.

2.10 De rol van een visualisatie

De visualisatie is een belangrijk ingrediënt in zowel de omschrijvingen van de niveaus van Van Hiele (1986) als de stappen uit de oplossingsaanpak van van Streun (2006). Naast het hiervoor genoemde vermogen van leerlingen om binnen geometrische context te denken, spelen visualisaties bij een opgave een sleutelrol bij het vormen van een eigen beeld van de situatie (Panaoura & Gagatsis, 2009). Leerlingen lijken bij het oplossen erg afhankelijk van de visualisatie te zijn. Deze afhankelijkheid van visualisaties wordt door Panaoura toegeschreven aan de basisschool-tijd van de leerling, waar geometrische vormen enkel worden beschouwd als tastbare objecten met specifieke representaties in plaats van ideale objecten met wiskundige eigenschappen. Wanneer deze denkwijze niet of nauwelijks verandert tijdens het ouder worden, blijft de leerling diezelfde denkwijze toepassen op de middelbare school en daardoor erg afhankelijk van de gegeven of ontbrekende visualisatie. De rol van een visualisatie mag daarom niet onderschat worden.

2.11 De mentale voorstelling

Fischbein (1993) beschrijft dat doordat leerlingen moeite hebben met het mentaal bewerken van figuren, ze erg afhankelijk zijn van visualisaties. Het mentaal moeten visualiseren van een figuur zorgt ervoor dat het proces van denken bij een leerling extra cognitieve belasting oplevert. Duval (1999) brengt deze denkprocessen van leerlingen in kaart door de cognitieve processen behorende bij het oplossen van een probleem te schetsen. In Figuur 3 is een vereenvoudigde versie van deze schets gepresenteerd.



Figuur 3: De cognitieve processen bij het vormen van een beeld van de situatie (bewerkt). Origineel van Duval (1999).

Het uitgangspunt van Duval (1999) is dat de context van de opgave door de leerlingen met behulp van cognitieve processen (verwerking en conversie) wordt omgezet in een mentaal beeld. Dit beeld wordt vervolgens gebruikt voor het verdere oplossingsproces. De context wordt daarbij geschetst in de opgave zelf, bestaande uit een opdrachtschrijving en bijbehorende visualisatie.

Duval (1999) identificeert naast de opdrachtschrijving en de visualisatie, een tweetal cognitieve vaardigheden als belangrijke onderdelen van het denkproces bij de leerling. De vaardigheden van conversie en verwerking worden door Duval geïdentificeerd als de belangrijkste redenen voor afwijkingen tussen de mentale voorstelling van een leerling en de voorstelling die de ontwerper bedoelde. Deze afwijking wordt in de literatuur omschreven als de *gap between vision and visualization*.

Duval (2002) beschrijft het conversieprobleem als de eerste reden waarom leerlingen bij het interpreteren van de visualisatie vastlopen. Dit probleem ontstaat wanneer een leerling niet flexibel of onjuist omgaat met de visualisatie. Gagatsis, Elia en Andreou (2003) bevestigen het bestaan van dit probleem in de lespraktijk en voegen hieraan toe dat deze omzetting ook nog eens per leerling verschilt, doordat iedere leerling een andere voorkennis heeft en een ander mentaal beeld kan creëren. Eenzelfde visualisatie behorende bij diezelfde opgave kan door iedere leerling weer anders geïnterpreteerd kunnen worden. Gagatsis et al. concluderen dat zelfs voor leerlingen met hetzelfde geometrisch denkniveau, de ene leerling een perfecte mentale representatie kan maken en daarmee de opgave foutloos kan oplossen en de andere leerling niet. Zorgvuldig ontworpen visualisaties kunnen een grote rol spelen om dit probleem van conversie te minimaliseren (Jones, 1998).

De tweede reden wordt door Mesquita (1998) omschreven als het probleem dat ontstaat wanneer de leerling de wiskundige betekenissen en eigenschappen van een figuur verdraait totdat deze aansluit bij de eigen bekende visuele perceptie. Deze eigen perceptie wordt in de literatuur beschreven als het mentale model van een leerling (Mesquita, 1998). Wanneer de visualisatie niet overeenkomt met het mentale model van de leerling ontstaat een soortgelijk cognitief probleem zoals bij het probleem van conversie (e.g. Love, 1995; Mariott, 1995). Het gevolg van dit probleem is ook hier dat eenzelfde visualisatie, door leerlingen verschillend kan worden geïnterpreteerd en benadrukt de grote invloed die een visualisatie daarbij kan hebben.

De uitdaging voor leerlingen wordt groter wanneer de complexiteit van de context en het wiskundige figuur in de opdracht toeneemt. In de voorbeeldopgave uit figuur 1 wordt gewerkt met twee dimensies; lengte en breedte. In de vervolgopgaven uit de methode Getal & Ruimte (2007) nemen de figuren complexere vormen aan waarbij bijvoorbeeld de inhoud van het figuur een rol gaat spelen. Deze opgaven worden vergezeld door visualisaties waarin de context als 3D-figuur in het platte vlak wordt gepresenteerd, waardoor leerlingen veel meer moeite moeten doen om de opgave te conceptualiseren (Ben-Chaim, Lappan, & Houang, 1989; Gutierrez, 1992). Deze extra cognitieve belasting bij een leerling, op het gebied van begrijpen en herkennen, heeft tot gevolg dat de leerling nog eerder zou kunnen vastlopen in de opgave (Parzysz, 1988). Het gekozen perspectief in de visualisatie speelt daarbij een sleutelrol (Pittalis, 2009).

Hoe leerlingen in de praktijk omgaan met de verhoogde complexiteit van de figuur in de visualisatie, blijkt in de literatuur verschillend over te worden gedacht. Battista (1999) en Parzysz (1988) stellen dat het ruimtelijk inzicht van de leerling een belangrijke rol speelt. Een mentale vaardigheid welke het mogelijk maakt om zich goed in te kunnen leven in een complexe ruimtelijke omgeving. Een hoger ruimtelijk inzicht resulteert in een hoger geometrisch denkniveau en vervolgens een hogere score op de opgave. Door Pittalis (2009) wordt echter het ruimtelijk voorstellingsvermogen, de vaardigheid waarmee leerlingen een eigen beeld van de situatie vormen, als belangrijkste rol genoemd. Het gaat daarbij om het samenspel tussen de visuele voorstelling van de situatie (de visualisatie) mentale voorstelling en het mentale beeld van de leerling. Pittalis, Battista en Parzysz zijn het echter wel eens dat ook hier een goed ontworpen '3D' visualisatie een positieve uitwerking kan hebben.

2.12 Statische visualisaties

Uit voorgaande paragrafen volgt dat het voor de (statische) visualisaties erg van belang is dat deze zorgvuldig ontworpen worden. Een goed ontworpen visualisatie zorgt voor een lagere cognitieve belasting bij de leerling, reduceert de problemen van conversie en verwerking en zorgt voor een verkleining van de *gap between vision and visualization*. Het zorgvuldig ontwerpen van visualisaties is daarbij aan verschillende voorwaarden onderhevig. Duval (2002) beschrijft bijvoorbeeld dat er geen verwarring mag ontstaan tussen het wiskundige object uit de context en de visualisatie die gepresenteerd wordt. Mayer (2009) stelt dat samenhang tussen opdrachtomschrijving en visualisatie zeer gewenst is. Owens & Outhred (2006) benadrukken dat

zowel de interne als externe structuur van een figuur helder moeten zijn. Schnotz & Lowe (2003) geven aan dat enige ambiguïteit in de visualisatie tot een minimum beperkt moet worden. Het zo dicht mogelijk bij de waarheid blijven wordt door diverse onderzoekers als belangrijke voorwaarde genoemd (e.g. Gutierrez, 1992; Ben-Chaim, Lappan, & Houang, 1989). De voorwaarden genoemd door al deze onderzoekers vormen samen de ontwerpeisen voor (statische) visualisatie.

Het is daarbij ook van belang om het doel van een visualisatie in ogenschouw te nemen. Duval (1999) onderscheidt voor iedere visualisatie een viertal doelen: het herkennen van het figuur in de ruimte (perceptual recognition), het herkennen hoe het figuur kan worden geconstrueerd (sequential recognition), het herkennen van de wiskundige eigenschappen (discursive recognition) of het geven van inzicht voor een aanpak om tot een oplossing te komen (operative insight). Wanneer een visualisering effectief wordt ingezet, zal deze naast herkenning ook tenminste één van de andere drie doelen moeten verwezenlijken.

2.13 Dynamische visualisaties

Naast de tot zover genoemde ontwerpeisen aan statische visualisaties, schrijft Presmeg (1986) een alternatieve oplossing voor om leerlingen te helpen een eigen beeld te vormen van de situatie. Hierbij wordt software gebruikt om statische visualisaties (op het papier/in het wiskundeboek) om te zetten in dynamische visualisaties (op het digibord/computer). Een dynamische visualisatie stelt de gebruiker in staat om zowel een 2D- als 3D-figuur hands-on te draaien of aan te passen. Dit idee is volgens Parzysz (1988) ontstaan uit de behoefte van leerlingen om écht te begrijpen wat een figuur voorstelt en hoe deze in elkaar zit. Leerlingen hadden vaak het gevoel dat ze überhaupt niet begrepen wat er nu in een visualisatie te zien was.

Ainsworth (1999) noemt daarbij drie belangrijke voordelen. De dynamische visualisatie zorgt er allereerst voor dat de leerling extra informatie krijgt. Uit deze extra informatie, kan de leerling vervolgens zelf kiezen welke informatie het beste aansluit bij zijn of haar mentale beeld met een lagere cognitieve belasting tot gevolg. Het tweede voordeel is gerelateerd aan het verkleinen van de *gap between vision and visualisation*. Een dynamische visualisatie kan worden opgevat als heel veel statische visualisaties en biedt daarom de mogelijkheid tot het reduceren van ambiguïteiten en eventuele misvattingen. Het resultaat is een vergrootte kans dat de leerling een betere aansluiting vindt bij de eigen visuele perceptie. Als laatste voordeel benoemt Ainsworth (2008) de constructieve functie van een dynamische representatie. Contextgerichte informatie kan door de leerling worden veralgemeniseerd en op andere situaties worden toegepast. Door Jasute (2014) is geëxperimenteerd met dynamische visualisaties, zowel individueel als klassikaal. Jasute concludeert in haar experiment dat wanneer de docent klassikaal dynamische visualisaties gebruikt, de prestaties van leerlingen significant verbeterden t.o.v. geen dynamische visualisaties.

Ook deze dynamische visualisaties zijn aan eisen gebonden. Jasute (2014) beschrijft drie extra eisen aan dynamische visualisaties ten opzichte van statische visualisaties. Allereerst moet de dynamische visualisatie realiseerbaar en bruikbaar zijn voor in het klaslokaal. Ten tweede moet de docent over genoeg kwaliteiten beschikken om de visualisatie kunnen begeleiden. Stoddart & Niederhauser (1994) voegen hieraan toe dat dit betekent dat de uitvoerende docent geoefend moet zijn met de dynamische visualisaties en het gebruikte softwarepakket. Als laatste eis noemt Jasute de ontwerpcriteria, afgeleid van de *“Standard of Systems and software of Quality Requirements”* (2012). Deze criteria beschrijven in detail een vijftal extra eisen aan dynamische visualisaties; onderhoudsvriendelijkheid, bruikbaarheid, betrouwbaarheid, functionaliteit en interactiviteit.

2.14 Resumé

Dit onderzoek is opgestart omdat op het TCC een aantal klassen moeite heeft met het oplossen van optimalisatieproblemen. Vanuit deze gedachte is er een zoektocht opgezet naar waarom en waar leerlingen vastlopen. De vakdocent stelt dat in de lespraktijk, leerlingen het lastig vinden om opdrachtomschrijving en visualisatie van een optimalisatieprobleem te combineren. Het combineren van beiden is onderdeel van een 5-stappen tellend werkschema welke in de methode Getal & Ruimte (2007) gebruikt wordt. Het blind volgen van het schema is echter nog geen garantie voor succes, aangezien de leerling per stap uit het schema enkele of zelfs meerdere oplossingsstappen geformuleerd door Van Streun (2008) correct moet uitvoeren. Ieder van deze oplossingsstappen is in theorie een punt waarbij de leerling mogelijk kan vastlopen. Er zijn hiervoor diverse redenen aan te wijzen, zoals bijvoorbeeld haast, een gebrek aan vermogen bij de leerling, externe factoren en psychische factoren. Eén van deze redenen valt samen met de ervaring van de vakdocent. Dit is het probleem waarbij leerlingen niet genoeg vermogen hebben om de probleemsituatie correct eigen te maken. Er is gekozen om dit probleem verder te onderzoeken.

Een andere omschrijving voor dit *vermogen*, is de vaardigheid tot geometrisch denken van de leerling. Voor het beoordelen van deze vaardigheid heeft Van Hiele (1986) vijf niveaus gedefinieerd. Hoe verder de leerling in het werkschema wil komen, hoe hoger het Van Hiele niveau van de leerling moet zijn. De complexiteit van de opgave heeft een grote invloed op het benodigde niveau. Een complexere opgave zorgt immers voor extra cognitieve belasting bij de leerling. Het vervolgens niet eigen kunnen maken van de probleemsituatie wordt binnen de literatuur omschreven als de *gap between vision and visualization*. Dit is het gat tussen wat de leerling ziet en wat de leerling zou moeten zien. De cognitieve processen van verwerking en conversie van de visualisatie naar een eigen beeld spelen hierbij een grote rol. Wanneer de wiskundige figuren in de opgaven nog complexere vormen aannemen, wordt de cognitieve belasting op een leerling verder vergroot. Het antwoord op het eerste deel van de onderzoeksvraag is dat, zowel uit de lespraktijk als uit de literatuur volgt dat 5 vwo wiskunde A leerlingen vastlopen in de 2^e en 3^e stap van het werkschema van getal en ruimte, doordat ze te weinig vermogen hebben om de probleemsituatie eigen te maken.

Als eerste oplossing wordt gesteld dat goed ontworpen visualisaties erg belangrijk zijn. Deze visualisaties zorgen voor een lagere cognitieve belasting bij de leerling, waarmee de *gap between vision and visualization* wordt verkleind. Deze goed ontworpen visualisaties moeten zowel voldoen aan de ontwerpeisen als aan één of meerdere doelen. De tweede oplossing zet in op het helpen van de leerling door de statische visualisatie om te zetten in dynamische visualisaties. Beide oplossingsrichtingen worden verder onderzocht in het ontwerpde deel van dit onderzoek om het tweede deel uit de onderzoeksvraag (hoe leerlingen geholpen kunnen worden) te beantwoorden.

2.15 Ontwerp vragen

De ontwerp vragen voor het vervolg van dit onderzoek zijn:

“Kunnen verbeteringen aan statische visualisaties leerlingen helpen om optimalisatieproblemen op te lossen?”

Hypothese: wanneer visualisaties aan de gestelde eisen en voorwaarden voldoen dan zullen leerlingen verder komen in het oplossingsproces.

“Kunnen dynamische visualisaties leerlingen helpen om optimalisatieproblemen op te lossen?”

Hypothese: wanneer dynamische visualisaties worden ontworpen conform het programma van eisen dan zullen deze zorgen voor verbeterde prestaties van leerlingen.

3. Methode

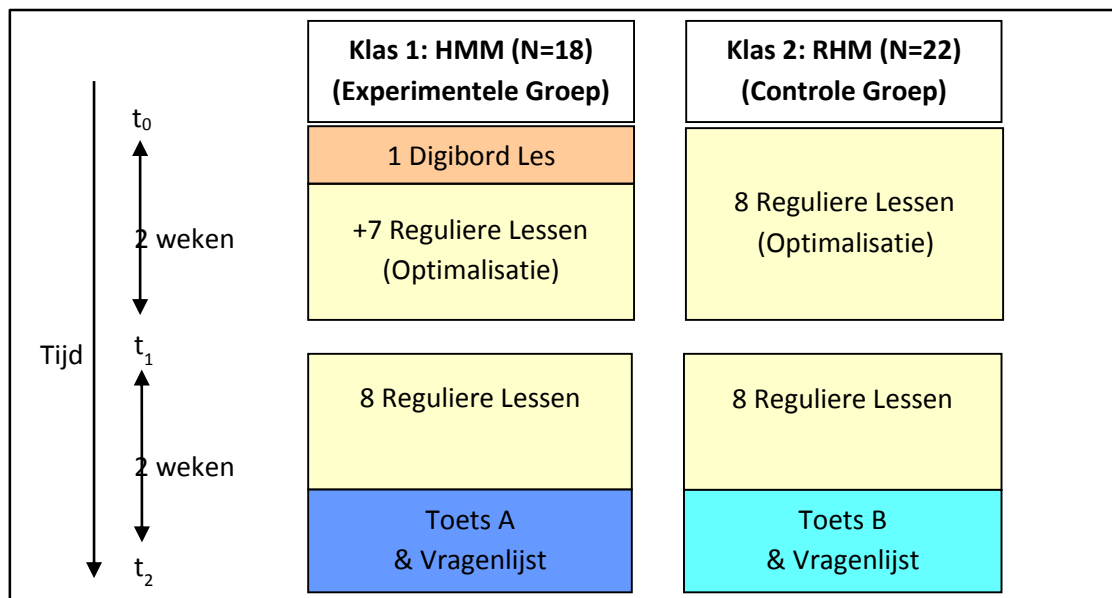
De methode van dit onderzoek is opgesplitst in drie delen; de deelnemers, de gevolgde procedure en de ontworpen materialen & onderzoeksinstrumenten. Om de materialen in de tijd te kunnen plaatsen, is ervoor gekozen de procedure vóór de gebruikte materialen te beschrijven.

3.1 Deelnemers

De deelnemers aan dit onderzoek zijn twee wiskunde A klassen uit vwo 5 van het Twents Carmel College, locatie Lyceumstraat te Oldenzaal. De eerste groep; de experimentele groep, bestaat uit 18 leerlingen, welke worden gedoceerd door Mart Hermans (de vakdocent). De tweede groep; de controlegroep, bestaat uit 22 leerlingen welke worden gedoceerd door Marieke Rorink. De gehele populatie is geselecteerd om mee te werken aan dit onderzoek. Enerzijds om het aantal respondenten hoog te houden, anderzijds omdat het opsplitsen van de groep in deelgroepen praktisch onwenselijk was. In totaal hebben 40 leerlingen meegewerkt aan dit onderzoek. De verschillen in gemiddeld wiskundecijfer tussen beide klassen voorafgaand aan dit onderzoek was niet aanwezig (<0.2). Gedurende het onderzoek hebben twee leerlingen, vanwege persoonlijke omstandigheden, enkel de toets gemaakt en niet de vragenlijst. De vragenlijst is daarom door 38 leerlingen beantwoord.

3.2 Procedure

Uitgangspunt van de te volgen procedure is om het aantal variabelen waarin gevarieerd wordt tussen beide groepen, zo veel mogelijk constant te houden (Ceteris Paribus). In overleg met beide vakdocenten is bepaald dat in de experimentele groep één les vervangen wordt door een les met dynamische visualiseringen (de Digibord Les) en in beide groepen een toets wordt afgenomen. Deze toets bevat voor de controle groep de ongewijzigde visualisaties uit de methode Getal & Ruimte (2007) en voor de experimentele groep de te ontwerpen verbeterde visualisaties. De toets wordt ingepland twee weken na de laatste reguliere les over het onderwerp optimalisatie. Na de toets wordt een vragenlijst afgenomen. De veranderlijke variabelen zijn de inhoud van de toets en de vervangen wiskundeles (naast uiteraard de verschillende docenten). De planning met betrekking tot de uitvoering is schematisch weergegeven in onderstaande figuur, waarbij een standaard lesuur 50 minuten lang is.



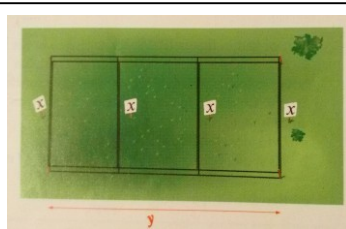
Figuur: 4. Methode/Procedure gevisualiseerd in de tijd.

3.3 Materiaal

3.3.1 De digibord-les

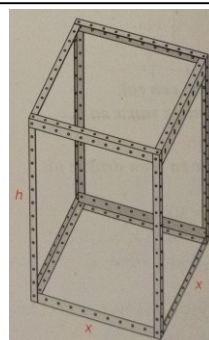
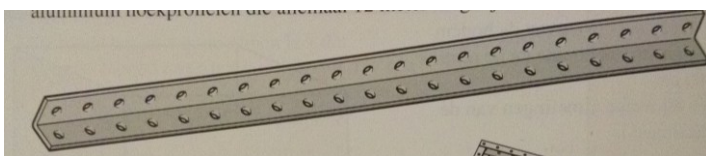
Het eerste onderdeel van het ontworpen materiaal is de digibord-les, waarin twee opgaven met bijbehorende dynamische visualisaties samen met de klas worden opgelost. In overleg met de vakdocent zijn twee representatieve opgaven uit de methode geselecteerd. De eerste opgave, genaamd “Pluimveehouder Hoenders” betreft een rechthoekig stuk land, waarbij de oppervlakte gemaximaliseerd wordt met als beperking de hoeveelheid afrastering. In Figuur 5 is deze opgave, met bijbehorende visualisatie weergegeven. De tweede opgave is getiteld “verhuiskisten”, waarbij de inhoud van een balk gemaximaliseerd wordt, gegeven een maximale lengte voor de ribben. In Figuur 6 is deze opgave met (originele) visualisaties weergegeven.

1] Pluimveehouder Hoenders wil drie rechthoekige stukken land afzetten zoals in de figuur hiernaast. Hij gaat 400 meter gaas gebruiken. Ook tussen de drie stukken land moet een afrastering komen. Bereken algebraïsch bij welke afmetingen Hoenders de grootst mogelijke oppervlakte krijgt.



Figuur 5. Opgave “Pluimveehouder Hoenders” (Getal & Ruimte, WiA VWO deel 3 (2007). p. 173).

2] De firma Verheyden maakt geraamtes voor verhuiskisten met aluminium hoekprofielen die allemaal 12 meter lang zijn. De verhuiskisten zijn van onderen en van boven vierkant. Voor één kist is 12 meter hoekprofiel precies voldoende. Zie hieronder. Bereken algebraïsch bij welke afmetingen de inhoud van zo’n kist maximaal is.



Figuur 6. Opgave “Verhuiskisten” (Getal & Ruimte, WiA VWO deel 3 (2007). p. 174).

Per opgave zijn de eerder genoemde ontwerpeisen aan software (onderhoudsvriendelijkheid, bruikbaarheid, betrouwbaarheid, functionaliteit en interactiviteit) gespecificeerd in Tabel 1 & 2. Met deze eisen worden de dynamische visualisaties in GeoGebra ontworpen. Bij het ontwerpen is daarnaast gebruik gemaakt van de gebruiksmogelijkheden van GeoGebra beschreven in de *Workshop Geogebra* (van de Veen, 2013). In bijlage F zijn screenshots van de ontworpen applets te vinden.

Tabel 1. Kenmerken applet opgave “Pluimveehouder Hoenders”.

Ontwerpeis	Kenmerken
Onderhoudsvriendelijk	Applet opbouw vanuit variabelen x , y ; Gemakkelijk te resetten
Bruikbaar	Visualisatie herleidbaar tot opgave uit het boek; Variabelen enkel positief; Lettergrootte 24 pts, schermgrootte 1024x768 px; Vaste plaats van elementen
Betrouwbaar	Getest op infrastructuur op school
Functioneel	Applet sluit aan bij het te volgen werkplan; Geen misleidende/afleidende informatie; Grafiek aan/uit te zetten welke empirisch resultaat weergeeft
Interactief	Variabele x modificeerbaar maken; Iteratieve opbouw grafiek

Tabel 2. Additionele kenmerken applet opgave “Verhuiskisten”.

Ontwerpeis	Kenmerken
Functioneel	+ Beginperspectief gelijk aan deze uit het boek
Interactief	+ 3D figuur moet roteerbaar zijn

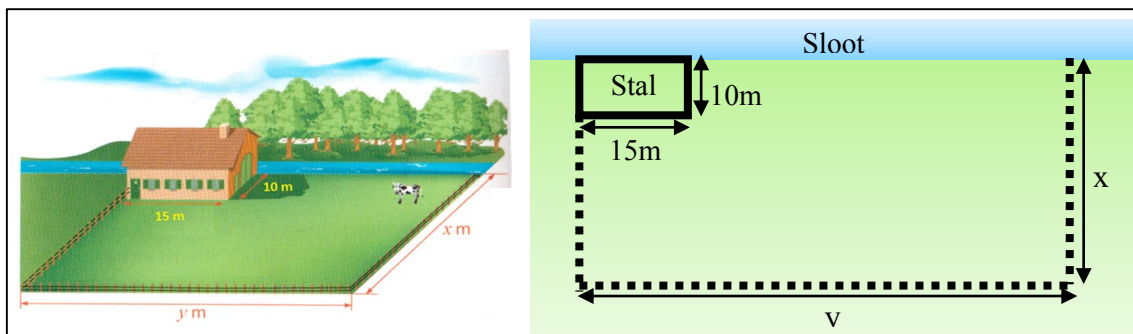
3.3.2 De toets

Het 2^e onderdeel van het ontworpen materiaal is de toets. In overleg met de vakdocent zijn uit het optimalisatie hoofdstuk in totaal vier opgaven als basis voor deze toets gekozen, welke ruim binnen de beschikbare 50 minuten gemaakt kunnen worden. Omdat alle leerlingen deze uitgekozen opgaven al een keer hebben moeten maken als onderdeel van de reguliere lessenserie, zullen de opgaven iets andere getallen kennen. Er worden twee versies van de toets ontworpen. De eerste versie zal voor de vier opgaven de visualisaties uit de methode gebruiken. Voor de tweede versie zal per opgave de originele visualisatie uit de methode Getal & Ruimte (2007) worden geanalyseerd aan de hand van de ontwerpeisen, waarbij met een aantal aanpassingen een verbeterde visualisatie wordt ontworpen. De 4^e opgave in beide toetsen betreft een opgave zonder visualisatie, welke ongewijzigd blijft. De ontworpen toetsen zijn terug te vinden in de bijlage.

Opgave #1: “Pluimveehouder”

De originele visualisatie (zie de figuur 7 links) voldoet maar aan één van de vier doelen van Duval (1999). Met enkel herkenning van de figuur (een rechthoek) in de ruimte, is er potentieel voor een extra doel in de verbeterde versie. De visualisatie is bovendien in combinatie met de tekst ambigu. Onduidelijk blijft of er links van het schuurtje nu wel of geen hekwerk moet worden geplaatst.

Het perspectief in de aangepaste visualisatie (zie de figuur 7 rechts) is allereerst vereenvoudigd naar een bovenaanzicht. Voor deze opgave speelt de derde dimensie geen rol, omdat de leerling de wiskundige eigenschappen van het grondvlak nu direct kan herkennen wordt voldaan aan het tweede doel van Duval (1999). Door het loodrecht tekenen van de lijnen volgt de formule voor de oppervlakte van de figuur direct uit deze visualisatie, waarmee ook een derde doel van de visualisatie aanwezig is. Om de cognitieve belasting te minimaliseren, is de ambiguïteit over het hek achter de stal weggenomen en zijn nutteloze elementen (koe, bomen) verwijderd.

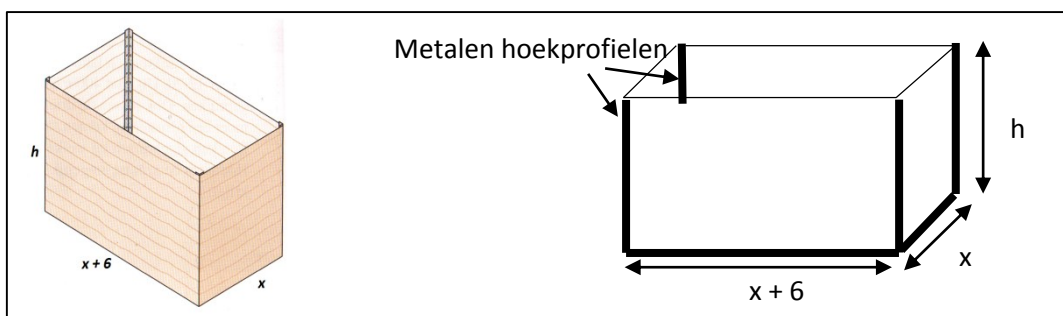


Figuur 7: Originele en verbeterde visualisatie “Pluimveehouder” (Org: Getal & Ruimte, WiA VWO deel 3 (2007). p. 173)

Opgave #2: "Verhuiskist"

De originele visualisatie (figuur 8 links) voldoet al aan twee van de doelen van Duval (1999). Enerzijds is de kist duidelijk herkenbaar, anderzijds kan de formule voor de inhoud direct worden afgeleid. Het perspectief is echter ongebruikelijk. Een isometrisch perspectief benadert het natuurlijk perspectief, maar geeft een aantal extra uitdagingen mee aan de leerling in deze context. Enerzijds kijkt de leerling schuin tegen de zijkant van het figuur aan, waardoor de zijkanten van de verhuiskist worden afgebeeld als parallellogrammen. Anderzijds maakt het de metalen profielen in de bodem onzichtbaar.

Als verbetering is ervoor gekozen om een visualisatie vanuit cavalièreperspectief te ontwerpen. Met het voorvlak als rechthoek prominent aanwezig aan de voorkant. Het voorvlak is zodanig gepresenteerd dat de kist als standaardfiguur (balk) direct herkenbaar is. Vlakken loodrecht op dit voorvlak worden schuin getekend. Parallel lopende lijnen blijven hierdoor parallel lopen. Een accent op de metalen hoekprofielen complementeert deze verbeterde visualisatie.

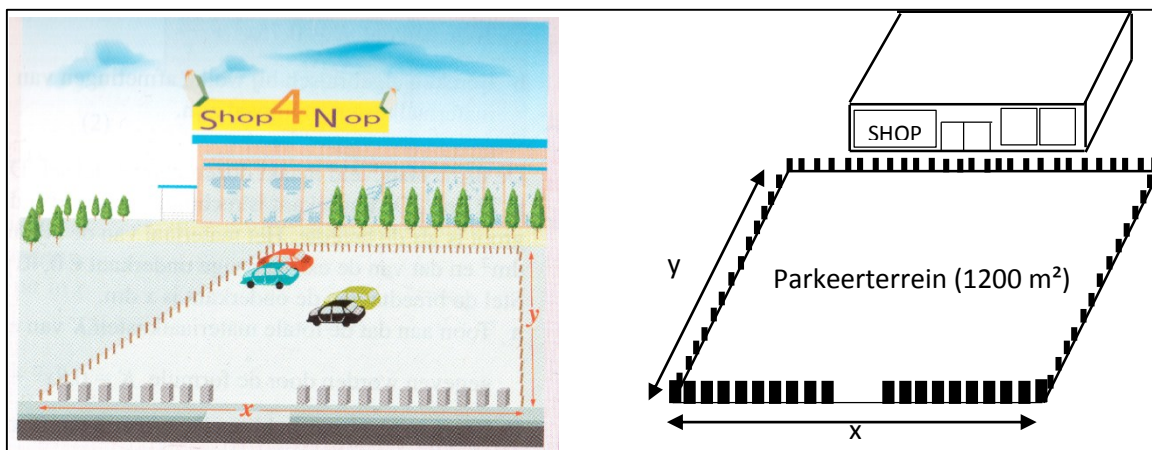


Figuur 8: Originele en verbeterde visualisatie "Verhuiskist" (Org: Getal & Ruimte, WiA VWO deel 3 (2007). p. 174)

Opgave #3: "Parkeerterrein"

De originele visualisatie (figuur 9 links) behorende bij deze opgave voldoet aan geen enkel doel gesteld door Duval (1999). De visualisatie is een mengelmoes aan aanzichten en perspectieven. parkeerplaats wordt als drie dimensionale figuur in het platte vlak gerepresenteerd, met daarbij een verdwijnpunt boven de horizon. Van de winkel wordt zelfs enkel alleen een vooraanzicht getoond. Dat de in de opgave benodigde omtrek van de parkeerplaats $2x+2y$ is, volgt niet direct uit dit figuur.

Eenzelfde redenering als in de 1^e opgave een bovenaanzicht als verbeterde visualisatie worden aangedragen. Om enige differentiatie in type perspectieven en moeilijkheidsgraad te realiseren zal de verbeterde visualisatie een projectie worden waarin zowel vooraanzicht, zij aanzicht als bovenaanzicht wordt getoond. Lijnen die parallel lopen, worden parallel geprojecteerd, maar lijnen die loodrecht lopen, zullen niet loodrecht worden geprojecteerd.



Figuur 9: Originele en verbeterde visualisatie "Shop 4 Nop" (Org: Getal & Ruimte, WiA VWO deel 3 (2007). p. 175)

3.3.3 De vragenlijst

Als tweede instrument worden de leerlingen gevraagd een vragenlijst in te vullen. Het hoofddoel van deze vragenlijst is om het doel, nut en functionaliteit van visualisaties te kunnen beoordelen. Daarnaast is het doel om de betrouwbaarheid van de prestaties van leerlingen op de toets in te schatten. Bovendien kan met deze vragenlijst de mening van leerlingen waar leerlingen nog meer verbeteringen zien, worden bepaald. De vragenlijst is opgebouwd uit stellingen met als schaal de vierpunts-schaal; 1. Zeer eens; 2. Mee eens; 3. Mee oneens; 4. Zeer oneens is gekozen. Hiermee wordt een bias voor de veilige uitweg op een stelling (neutraal) geminimaliseerd. De volledige vragenlijsten voor beide groepen zijn terug te vinden in bijlage C & D.

Voor de experimentele groep zijn vijf extra stellingen toegevoegd over de les met het digibord, zoals bijvoorbeeld;

- *Ik vond de les met het Digibord, in het algemeen erg zinvol/nuttig.*
- *De gebruikte applet (software) op het Digibord was duidelijk.*

De vragenlijst bestaat verder uit een aantal controlevragen welke in combinatie met het geleverde werk een maat van betrouwbaarheid opleveren ten opzichte van de aansluiting met de literatuur;

- *Voor mijn gevoel ging het maken van deze 4 opgaven slechter, dan de (huiswerk)-opgaven in Getal & Ruimte.*
- *Ik heb ruimtelijk inzicht.*

Een deel van de controle op betrouwbaarheid wordt geleverd door ook het geometrisch denkniveau van leerlingen te bepalen uit enkel de antwoorden op de vragenlijst. Hiervoor worden stellingen opgenomen, waarbij wordt gevraagd naar de beheersing van de vaardigheden, welke zijn gecodeerd door Lawrie, Pegg en Gutierrez (2000) om vertaald te worden naar de benodigde niveaus van Van Hiele (1986).

- *Ik kan de inhoud en oppervlakten van figuren foutloos berekenen*
- *Ik kan uitslagen van figuren herkennen en schetsen (Bijv. uitslag van een kubus)*

Daarnaast wordt de vragenlijst uitgebreid met zowel stellingen als een tweetal openvragen waarbij de leerlingen gevraagd worden naar het nut van de visualisaties bij de opgaven. Daarnaast worden ze bevraagd over het werkschema en waar ze volgens eigen mening het meest mee geholpen zouden worden.

- *De plaatjes bij deze 4 oefen-opgaven hielpen mij om een beeld van de opgave/situatie te vormen*
- *Ik vind het werkschema (het 5-stappenplan) handig om te gebruiken*
- *Welk stap uit het stappenplan vind je het moeilijkst?*
- *Wat zou jou helpen om optimaliseringsproblemen beter te kunnen oplossen?*

4. Analyse

In dit hoofdstuk wordt beschreven hoe de reacties en antwoorden van de leerlingen op de instrumenten worden omgezet tot resultaten. De instrumenten welke worden geanalyseerd zijn de toets en de vragenlijst. Hoewel de les met het digibord niet als instrument gebruikt is, is een onderdeel van de vragenlijst voor de experimentele groep waarin deze les is gegeven daarvoor vrijgemaakt. Daarnaast zal de feedback van de vakdocent op de les worden meegenomen in de resultaten. Het doel van deze analyse is om de gegeven antwoorden en uitwerkingen om te zetten naar bruikbare begrippen en met behulp van statistische parameters de significantie van resultaten te onderbouwen.

4.1 Nakijkschema Toets

De eerste stap van de analyse betreft het omzetten van de uitwerkingen van leerlingen naar een beoordeling voor het gemaakte werk. Hierbij vindt er een conversie plaats van het nakijkschema uit de methode Getal & Ruimte (2007) (zie bijlage G voor de uitwerkingen op de individuele opgaven), naar een antwoordmodel welke direct gelinkt is aan het werkschema. Derhalve worden alleen punten toegekend voor iedere correct uitgevoerde stap volgens het stappenplan. Een doorrekenfout, afrondingsfout of geen exact antwoord op de vraag worden de leerling niet aangerekend, omdat deze niet tot de scope van dit onderzoek behoren. Per opgave is een score tussen de nul en vijf punten te behalen, volgens het nakijkschema in Tabel 3.

Tabel 3: Conversietabel Toets.

Nakijkschema	Stap uit Werkschema (Getal & Ruimte)
(1pts) De leerling beschrijft (indirect) de variabelen welke een rol spelen.	(1) Verdiep je in de situatie en kijk welke variabelen een rol spelen;
(1pts) De leerling beschrijft de formule van de te optimaliseren grootte	(2) Schrijf de te optimaliseren grootte G als functie van de variabelen gevonden in stap 1;
(1pts) De leerling beschrijft het andere hulpverband	(3) Zoek een verband tussen de variabelen met behulp van de gegeven informatie en druk daarmee de ene variabele uit in de andere variabele;
(1pts) De leerling combineert beide verbanden tot één formule.	(4) Schrijf G als functie van één variabele door 2 en 3 te combineren;
(1pts) De leerling gebruikt de afgeleide van deze formule om antwoord te geven op de vraag.	(5) Gebruik de afgeleide van G om de gestelde vraag te beantwoorden.

De gemiddelde score tussen beide groepen kan worden berekend door de individuele scores van de leerlingen te sommeren en te delen door het aantal leerlingen in de groep. Deze maat beschrijft de algemene prestatie van de klas, zowel op de individuele opgaven als totaal. Een significant verschil wordt met de t-toets in SPSS (IBM Corp, 2013) aangetoond ($H_0: \mu_1 = \mu_2$) met $\alpha = 5\%$. Naast de gemiddelde score, wordt ook per opgave afgeleid bij welke stap de leerling is vastgelopen. Zowel geaggregeerd op groepsniveau als over de totale populatie geeft deze maat inzicht over bij welke stap van het werkschema de leerlingen daadwerkelijk vastlopen. Voor de beantwoording van de hoofdvraag van dit onderzoek, worden de gegeven antwoorden op de open vraag *“Wat zou jou helpen om optimaliseringsproblemen beter te kunnen oplossen?”* als bevindingen meegenomen.

4.2 Bepaling geometrisch denkniveau

Voor het kunnen bepalen van het geometrisch denkniveau uit de opgaven is ook een conversie noodzakelijk. Als eis wordt gesteld dat wanneer de leerling ten minste in drie van de vier opgaven tot dezelfde stap in het werkschema (of verder komt) de leerling het bijbehorende denkniveau beheerst. De bijbehorende conversietabel voor de bepaling van dit niveau is gekoppeld aan de theorie van Van Hiele (1986). Omdat stappen 4 en 5 uit het werkschema niet geometrisch van aard zijn, worden de antwoorden op die stappen niet meegenomen.

Tabel 4: Conversietabel toetsopgaven

Voorwaarde	Geometrisch Denkniveau
i) De leerling heeft bij ten minste 2 opgaven, voor stap 1 van het werkschema geen punten toegekend gekregen.	Niveau 0: "Geen"
ii) De leerling heeft bij ten minste 3 opgaven, voor stap 1 van het werkschema een juist antwoord opgeschreven.	Niveau 1: Visueel denken
iii) De leerling heeft bij ten minste 3 opgaven, voor stap 2 van het werkschema een juist antwoord opgeschreven.	Niveau 2: Beschrijvend denken
iv) De leerling heeft bij ten minste 3 opgaven, voor stap 3 van het werkschema een juist antwoord opgeschreven.	Niveau 3: Deductief denken

Het gemiddelde geometrisch denkniveau van de groepen kan ook hier worden berekend door de individuele scores van de leerlingen te aggregeren. Deze maat beschrijft de algemene prestatie van de klas. Een significant verschil tussen de klassen wordt met de t-toets in SPSS getoetst ($H_0: \mu_1 = \mu_2$) met $\alpha = 5\%$.

4.3 Probleemanalyse

Met behulp van bovenstaande resultaten kan vervolgens de stap waar leerlingen het meest vastlopen worden achterhaald. Gecombineerd met de antwoorden van leerlingen op de vraag uit de vragenlijst betreffende de stap welke ze het moeilijkst vinden wordt beoogd de verwachting van de vakdocent dat dit de stappen 2 en 3 zijn te bevestigen.

4.4 Validatie van de les met het digibord

Voor de vragenlijst betreffende het digibord is een vierpunts-schaal gebruikt, wat betekent dat leerlingen per vraag een score van 1, 2, 3 of 4 geven. Het midden van deze schaal is 2,5; welke wordt gebruikt als drempelwaarde tussen een positief (eens) antwoord en een negatief (oneens) antwoord. De gemiddelde waarden op ieder van de vragen zijn indicatoren voor de bruikbaarheid, functionaliteit en nut van de les met het digibord. De feedback van zowel de docent als de eigen ervaring bij de uitvoering van deze les wordt in deze reflectie meegenomen.

4.5 Bruikbaarheid en validatie van de toets

Het laatste deel van de analyse bestaat uit het bepalen van de bruikbaarheid en validatie van de gemaakte toets voor het gepresteerde resultaat. Hierbij is het de vraag of wellicht andere oorzaken aan te wijzen zijn voor een slechte of juist goede prestatie. Enerzijds kan de leerling bijvoorbeeld gewoon onvoldoende zijn voorbereid (bijv. huiswerk niet gemaakt). Dit wordt geanalyseerd door het antwoord op de vraag of het maken van de opgaven uit de toets slechter ging dan het maken van dezelfde opgaven uit het boek. Anderzijds wordt ook het geometrisch denkniveau uit enkel de vragenlijst afgeleid, om verschillen tussen beide groepen te bepalen. Door middel van de conversie in Tabel 5, wordt het geometrisch denkniveau uit de antwoorden van leerlingen bepaald.

Tabel 5: Conversietabel geometrisch denkniveau.

Voorwaarde	Geometrisch denkniveau
Gemiddelde score op vragen 9 & 13 > 2.5	Niveau 0: "Geen"
Gemiddelde score op vragen 9 & 13 ≤ 2.5	Niveau 1: Visueel denken
Gemiddelde score op vragen 12 & 14 ≤ 2.5	Niveau 2: Analyserend denken
Gemiddelde score op vragen 7 & 15 ≤ 2.5	Niveau 3: Ordenend denken

5. Resultaten

In deze paragraaf worden de belangrijkste resultaten per ontwerpvrage gepresenteerd. Allereerst wordt er gecontroleerd of de problemen van leerlingen daadwerkelijk plaatsvinden bij de eerste drie stappen in het werkplan van Getal & Ruimte (2007). Daarna worden de resultaten op de toets en de vragenlijst behandeld.

Bij welke stap van het werkschema lopen de leerlingen vast?

Tabel 6 laat per opgave zien welk percentage leerlingen vast is gelopen bij welke stap van het werkschema. Voor opgave 1 doen de meeste problemen zich voor bij stap 2 (43%) en stap 3 (18%). Voor opgave 2 is dat ook stap 2 (30%) en stap 3 (30%). Voor opgave 3 verandert dat naar stap 1 (23%) en stap 2 (53%). Voor opgave 4 is dat stap 1 (40%) en stap 2 (53%). De stap waar leerlingen het vaakst vastlopen over alle opgaven, is stap 2 (44%). Ook volgens de resultaten van de vragenlijst is stap 2 de stap waar de leerlingen het meeste moeite mee hebben (33%).

Tabel 6: Percentage vastlopers per stap uit het werkschema, uitgesplitst per opgave.

% Vastlopers bij stap i uit Werkschema	Opgave 1	Opgave 2	Opgave 3	Opgave 4
i=1	5%	8%	23%	40%
i=2	43%	30%	53%	53%
i=3	18%	30%	8%	0%
i=4	8%	10%	10%	3%
i=5	0%	3%	3%	3%
Niet vastgelopen	28%	20%	5%	3%

Welke score behalen de twee groepen op de opgaven in de toets?

In tabel 7 zijn de resultaten uitgesplitst per groep weergegeven. De meetschaal van deze score is rationaal verdeeld tussen 0 (geen stappen goed) en 5 punten (alle stappen goed) per opgave. Voor de vragen 1 t/m 3 geldt dat groep 1 telkens meer dan een heel punt hoger heeft gescoord dan groep 2. De verschillen op deze vragen zijn significant met $p_1=0,005$, $p_2=0,048$ en $p_3=0,018$. Het verschil in resultaat op opgave 4 is niet significant ($p=0,069$). Gesommeerd over alle opgaven is de gemiddelde score 10,50 voor groep 1 en 6,23 voor groep 2. Een significant verschil ($p=0,006$) van meer dan 4 punten.

Tabel 7: Gemiddelde groepsscore op de opgaven in de toets.

Resultaat per Groep (min=0, max=5)					
	Group	N	Mean	Std. Deviation	
Score op Opgave 1	1	18	3,50	1,724	
	2	22	2,05	1,214	
Score op Opgave 2	1	18	3,06	1,798	
	2	22	2,05	1,133	
Score op Opgave 3	1	18	2,28	1,487	
	2	22	1,23	1,066	
Score op Opgave 4	1	18	1,67	1,455	
	2	22	0,91	0,971	
Eindscore	1	18	10,50	5,261	
	2	22	6,23	3,280	

Welk geometrisch denkniveau halen de twee groepen op de vragen in de toets?

De uitkomsten na conversie zijn weergegeven in Tabel 8. De meetschaal van het Van Hiele niveau is ordinaal verdeeld tussen de 0 (niveau 0) en 3 (niveau 3). Het gemiddelde denkniveau van groep 1 is 1,94 en ligt daarmee een heel niveau hoger dan dat van groep 2 (0,95). Het verschil in geometrisch denkniveau is tussen groep 1 en 2 significant ($p=0,006$).

Tabel 8: Gemiddeld denkniveau na conversie van de uitgewerkte opgaven.

Resultaat per groep (min=0, max=3)				
	Group	N	Mean	Std. Deviation
Hielenniveau	1	18	1,94	1,211
	2	22	0,95	0,785

Hoe waarden leerlingen de functionaliteit, bruikbaarheid en het nut van de Digibord les?

De vragen over deze les zijn enkel voorgelegd aan de experimentele groep, waarbij de leerlingen op een schaal van 1 (zeer eens) t/m 4 (zeer/oneens) een antwoord hebben gegeven. De gemiddelde uitkomsten per vraag van enkel groep 1 zijn weergegeven in tabel 9, waarbij opvalt dat de scores op vragen over functionaliteit en bruikbaarheid significant positief scoren ($p_1=0,002$; $p_2=0,004$; $p_3=0,013$; $p_4=0,005$). De score op de vraag over meerwaarde van dynamische visualisaties is neutraal beantwoord. De (interactieve) dynamische visualiseringen hadden volgens de leerlingen geen meerwaarde t.o.v. de statische visualisaties in het boek bij het oplossingsproces.

Tabel 9: Gemiddelde scores op vragen over de les met het Digibord.

Resultaat per groep (min=1, max=4)				
	N	Mean	Std. Dev.	Flag
Vraag 1: Les in algemeen zinvol en nuttig	17	1,882	,6966	Eens
Vraag 2: Uitleg behulpzaam voor werkschema	17	2,000	,6124	Eens
Vraag 3: Uitleg behulpzaam in oplossingsproces	17	1,941	,8269	Eens
Vraag 4: Duidelijkheid van Applet	17	1,882	,7812	Eens
Vraag 5: Visualisaties helpvol in oplossingsproces	17	2,500	,7906	Neutraal

Hoe waardeert de vakdocent de les met het Digibord?

De vakdocent beschreef de les met het Digibord als waardevol voor de leerlingen en was tevreden over de gebruikte applet en uitvoering van de les.

Validiteit Toets

Als antwoord op de stelling of het maken van de opgaven (naar eigen inzicht van de leerling) slechter ging dan het maken van dezelfde opgaven uit het boek, geven beide groepen aan dat dat inderdaad het geval was.

Tabel 10: Gemiddelde scores op vraag 8.

Resultaat per groep (min=1, max=4) op de stelling: Voor mijn gevoel ging het maken van deze 4 opgaven slechter , dan de (huiswerk)-opgaven in Getal & Ruimte					
	Group	N	Mean	Std. Deviation	Flag
Vraag 8	1	17	1,706	,7717	Eens
	2	21	1,857	,8536	Eens

Met behulp van SPSS is een significant positieve correlatie ($r=0,161$ met $p=0,35$) gevonden tussen het aangegeven ruimtelijk inzicht in de vragenlijst en geometrisch denkniveau als resultaat van de toets. Het geometrisch denkniveau afgeleid uit de antwoorden op de stellingen in de vragenlijst is weergegeven in tabel 11. Hieruit volgt dat het verschil tussen het ingeschatte Van Hiele niveau tussen groep 1 en groep 2 niet significant is ($p=0,880$). Vergeleken met het Van Hiele niveau uit de toets, is het niveau van groep 1 niet significant verschillend, het daadwerkelijke niveau van groep 2 ligt een heel niveau lager. De correlatie tussen het ingeschatte- en het geobserveerde geometrisch denkniveau is niet significant gebleken ($r=0,455$, $p=0,004$).

Tabel 11: Van Hiele niveau afgeleid uit de vragenlijst.

Resultaat per groep (min=0, max=3)					
	Group	N	Mean	Std. Deviation	
Inschatting van Hiele Niveau	1	17	1,82	1,286	
	2	21	1,76	1,179	

Wat zou volgens de leerlingen de leerling helpen?

De vaakst genoemde antwoorden op deze open vraag zijn; meer uitleg, meer herhaling, meer oefenen en beter huiswerk maken. Ook werd er in groep 1 meermaals notie gemaakt over de les met het Digibord; "Meer gebruik van het Digibord net als de uitleg van toen", "de les met het Digibord heeft geholpen, voor die tijd snapte ik het niet". Een overzicht van de gegeven antwoorden is opgenomen in bijlage E.

6. Conclusie & Discussie

6.1 Conclusie

Ontwerpvraag #1: Kunnen verbeteringen aan visualisaties leerlingen helpen om optimalisatieproblemen op te lossen?

Uit de beoordeling op de opgaven uit de toets waarbij groep 1 de verbeterde visualisaties heeft gekregen, blijkt dat de score van deze groep op deze opgaven gemiddeld per opgave, ruim een heel punt hoger ligt dan de score van groep 2. Wanneer visualisaties zorgvuldig ontworpen worden volgens een programma van eisen, verbetert de prestatie van leerlingen. De eerder opgestelde hypothese wordt hiermee bevestigd.

Ontwerpvraag #2: Kunnen dynamische visualisaties leerlingen helpen om optimalisatieproblemen op te lossen?

Volgens de antwoorden op de vragenlijst is een demonstratie met dynamische visualisaties, zinvol, nuttig, behulpzaam en daarmee waardevol voor leerlingen. De leerlingen hebben echter geen voorkeur voor dynamische dan wel statische visualisaties in de lespraktijk en een bijdrage in een verbeterd oplossingsproces kan niet als eerste orde effect worden aangetoond.

Hoofdvraag: “Waar en waarom lopen 5 vwo wiskunde A leerlingen vast bij het oplossen van optimalisatieproblemen en hoe kunnen deze leerlingen daarbij worden geholpen?”

De grootste problemen blijken zowel uit de ervaring van de vakdocent, de scores op de gemaakte opgaven alsmede de eigen mening van leerlingen plaats te vinden bij stap 2 en 3 uit het werkschema. In de bijbehorende denkstappen welke de leerling moet uitvoeren volgens het schema van Van Streun (2008) blijken vooral het eigen maken van de opgave, door zowel opdrachtoomschrijving als visualisatie te combineren een groot struikelblok. De onderliggende oorzaak wordt omschreven als een te hoge cognitieve belasting op de leerling, doordat de processen van verwerking en conversie veel moeite kosten. Het gevolg is een groter wordend *gap between vision and visualization* waardoor de leerling (eerder) zal vastlopen.

Een tweetal oplossingsrichtingen zijn verkend en in combinatie met elkaar effectief gebleken in het verbeteren van de prestaties van leerlingen. Enerzijds is het waardevol om instructie en demonstraties in de les te verrijken met dynamische visualisaties, vanwege de positieve reacties van leerlingen. Anderzijds is het waardevol om visualisaties in zowel de methode als bij toetsen zorgvuldig te ontwerpen, vanwege het significante verschil in prestaties tussen beide groepen.

6.2 Discussie

De resultaten van dit onderzoek bevestigen de eerdere bevindingen uit de literatuur. Zowel de algemene score op de opgaven uit de toets, als het geometrisch denkniveau ligt significant hoger in groep 1 ten opzichte van groep 2. In dit onderzoek wordt dit toegeschreven aan de verbeterde visualisaties in de toets. Immers, de verbeterde opgaven zijn allen significant beter gemaakt dan de niet verbeterde en de ongewijzigde 4^e opgave laat geen significant verschil in gemiddelde score zien tussen beide groepen. Ook de positieve correlatie tussen ruimtelijk inzicht en geometrisch denkniveau is in overeenstemming met o.a. Battista (1999) en Parzysz (1988).

De antwoorden op het deel van de vragenlijst over de dynamische visualisaties laten zien dat de leerlingen aangeven een uitleg met behulp van een dynamische visualisering functioneel en bruikbaar vinden als voorbereiding op de rest van de opgaven. Het perspectief van de vakdocent en de scores op de toets bevestigen dit. Gelijk aan de bevindingen van Jasute (2014) wordt een demonstratie met dynamische visualisaties door de leerlingen gewaardeerd, maar kan een voorkeur voor dynamische visualisaties ten opzichte van de visualisaties in het boek niet worden aangetoond, vanuit het perspectief van de leerlingen.

In dit onderzoek is beoogd enkel te variëren met twee variabelen in één van de beide groepen. Enerzijds met een digibord-les, anderzijds met een verbeterde set visualisaties. De conclusies hierboven beschreven, houden echter geen rekening met interactie (2^e orde effect) tussen beide variabelen. Een mogelijk andere interpretatie van de gepresenteerde uitkomsten kan bijvoorbeeld zijn dat maar één van de variabelen heeft bijgedragen aan het verbeterde resultaat. En daarom, hoewel tegenstrijdig met de suggesties en bevindingen uit de literatuur, zou het effect van goed ontworpen visualisaties bijvoorbeeld nihil kunnen zijn, doordat de dynamische visualisaties geheel verantwoordelijk zijn voor de verbeterde prestaties in de experimentele groep.

Daarnaast kunnen externe variabelen ook een rol spelen. Groep 1 en groep 2 hebben bijvoorbeeld wel dezelfde hoeveelheid lessen gekregen, maar de docent verschilde in beide groepen. In groep 1 is deze variabele nog verder beïnvloed, doordat ik als onderzoeker zelf een les heb overgenomen. Ook kan het resultaat zijn beïnvloed door ziekte van de docent van groep 2, waardoor de lessenserie kort is onderbroken, met als gevolg een langere doorlooptijd (maar wel gewoon hetzelfde aantal lessen). Bovendien is het resultaat van dit onderzoek afhankelijk van de steekproefgrootte populatie. In dit onderzoek heeft er geen sub selectie plaatsgevonden waardoor alle leerlingen uit 5 vwo met als vak wiskunde A hebben meegedaan in de steekproef (N = 40). De betrouwbaarheid en statistische significantie van de resultaten zijn wellicht enkel op deze populatie van toepassing en niet op de wiskunde in het algemeen.

Een mogelijk gemis in dit onderzoek is gerelateerd aan de gebruikte methode en procedure. Er is namelijk geen vooronderzoek (pre-test) uitgevoerd, waardoor de vaardigheid van de scholieren voorafgaand aan deze studie niet geëvalueerd is. Dit is echter te verdedigen door bij dit onderwerp van onderzoek te verwachten is dat leerlingen (bijna) geen punten zouden behalen bij een pre-test. Redenen hiervoor zijn o.a. de complexiteit, het voor het eerst aansnijden van dit onderwerp en de lage score van groep 2 (gemiddeld maar 31% goede antwoorden) ná de lessenserie. Als controlerende variabele kan wel worden aangedragen dat voorafgaand aan dit onderwerp het verschil in rapportcijfer voor wiskunde tussen beide groepen niet aanwezig is (<0,2).

6.3 Implicatie voor het Wiskundeonderwijs

Met dit onderzoek is een bijdrage geleverd aan het in praktijk brengen van de theorie met betrekking tot visualisaties, het geometrisch denkniveau van leerlingen en de cognitieve processen welke bij het oplossen van optimalisatieproblemen een belangrijke rol spelen. De aanbevelingen voor het TCC en collega's binnen het vakgebied zijn tweeledig.

Als eerste is de aanbeveling om zorgvuldig om te gaan met visualisaties bij opgaven in zowel de methode als in toetsen, omdat het begrijpen van visualisaties bij leerlingen voor hoge cognitieve belasting zorgt. Een verkeerd ontworpen visualisatie kan derhalve de *gap between vision and visualization* vergrootten, met als resultaat slechtere prestaties.

De tweede aanbeveling is om bij het onderwerp optimalisatieproblemen waar mogelijk, gebruik te maken van de ICT voorzieningen in het klaslokaal om met dynamische visualisaties uitleg over dit onderwerp te geven. Voor deze toepassing gelden ook belangrijke voorwaarden. De meest belangrijke is daarbij het vertrouwen van de docent om te werken met dynamische of interactieve applets op het digibord. De suggestie welke ik hier persoonlijk aan zou willen toevoegen is gericht aan alle collega wiskunde docenten; probeer het vooral uit en deel zowel de positieve als negatieve ervaringen met elkaar.

7. Referenties

- Ainsworth, S. E. (1999). *The functions of multiple representations*. Computers & Education, 33(2-3), 131-152
- Ainsworth, S. E. (2008). *The educational value of multiple representations when learning complex scientific concepts*. In J. K. Gilbert & M. Reiner & M. Nakhlel (Eds.), Visualization: Theory and Practice in Science Education (pp. 191-208). New York: Springer.
- Battista, M. (1999). *Fifth graders' enumeration of cubes in 3D arrays: Conceptual progress in an inquiry-Based Classroom*. Journal for Research in Mathematics Education, 30(4), 417-448.
- Ben-Chaim, D., Lappan, G., & Houang, R. (1989). *Adolescent's ability to communicate spatial information: analyzing and effecting students' performance*. Educational Studies in Mathematics, 20, 121-146.
- Blackwell, L., Trzesniewski, T., Dweck, C. (2007). *Implicit Theories of Intelligence Predict Achievement Across an Adolescent Transition: A Longitudinal Study and an Intervention*.
- Duval, R. (2002). *The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics*. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1(2), 1-16.
- Duval, R. (1999). *Representation, vision and visualizations: Cognitive functions in mathematical thinking*. In G. Booker, P. Cobb & T. de Mendicuti (Eds.), Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education(pp. 3-26). Mexico.
- Fischbein, E. (1993). *The theory of figural concepts*. Educational Studies in Mathematics, 24 (2), 139-162.
- Fuys, D., Geddes, D., Lovett, C. J. & Tischler, R. (1988). The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. Journal for Research in Mathematics Education [monograph number 3]. Reston, VA: NCTM.
- Galperin, P.J., in: Parreren, C.F. van, Nelissen, J.M.C. (1979). Met Oost-Europese psychologen in gesprek. Wolters-Noordhoff.
- Getal & Ruimte (2007). *WiA VWO deel 3*. Geschreven door Reichard, L.A. te Houten, Nederland.
- IBM Corp (2013). IBM SPSS Statistics for Windows, Version 22.0. Armonk, NY: IBM Corp.
- ISO/IEC (2012). 25022: Systems and software engineering. Systems and software Quality Requirements and Evaluation (SQuaRE). Measurement of quality in use.
- Janvier, C. (1978). Interpretation of Complex Cartesian Graphs. University of Nottingham.
- Jasute, E. (2014). *Research on Interactive Geometry Visualization for Secondary School*. X World Conference on Computers in Education. July 2-5, 2013; Toruń, Poland
- Jones, K., Bills, C. (1998). *Visualisation, Imagery and the Development of Geometrical Reasoning*. University of Southampton, UK.

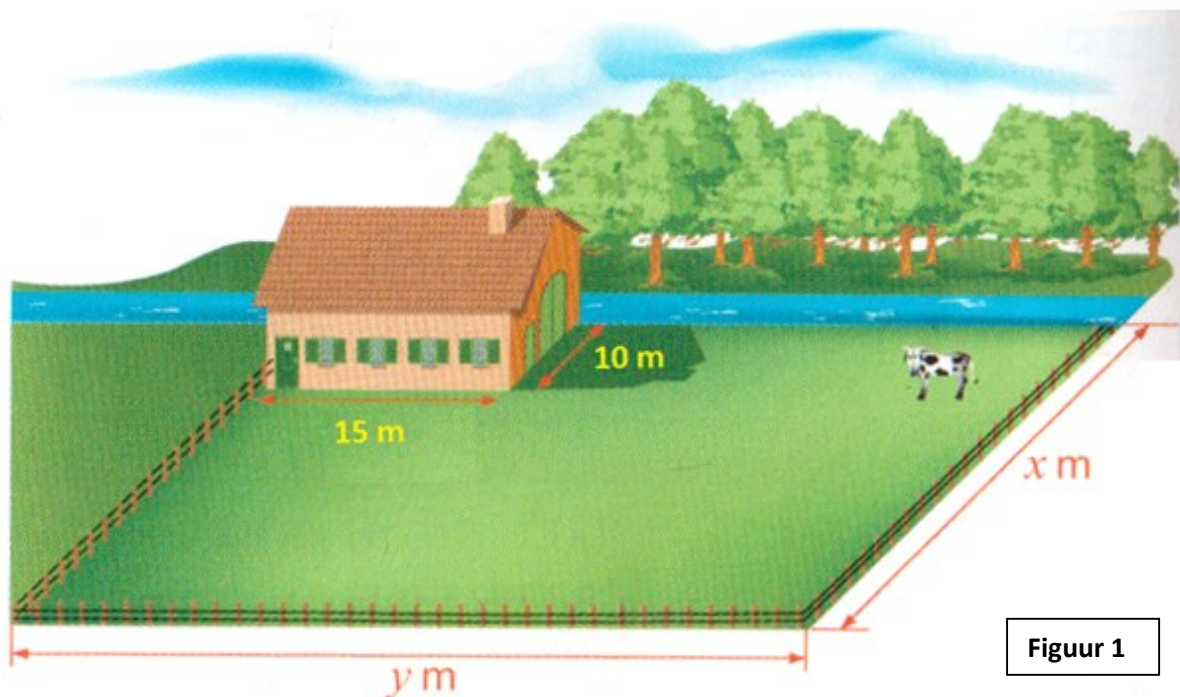
- Lawrie C., Pegg, J., & Gutierrez, A. (2000). Coding the Nature of Thinking Displayed in Responses on Nets of Solids. In T. Nakahara, & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 215-222). Hiroshima: ERIC.
- Love, E. (1995). The Functions of Visualisation in Learning Geometry. In R Sutherland and J Mason (Eds), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*. Berlin: Springer.
- Mariotti, M.A. (1995). *Images and Concepts in Geometrical Reasoning*. In R Sutherland and J Mason (Eds), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*. Berlin: Springer.
- Mayer, R. E. (2009). *Multimedia learning* (2nd ed). New York: Cambridge University Press.
- Owens, K. & Outhred, L. (2006). *The complexity of learning geometry and measurement*. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 83-116). Sense Publishers.
- Panaoura, G. & Gagatsis, A. (2009). The geometrical reasoning of primary and secondary school students. *Proceedings of CERME 6*, January 28th-February 1st 2009, Lyon France.
- Parzysz, B. (1988). *Problems of the plane representation of space geometry figures*. *Educational Studies in Mathematics*, 19(1), 79-92.
- Pegg, J. (1997). Broadening the descriptors of van Hiele's levels 2 and 3. *Proceedings of the 20th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 391- 396. Rotorua: MERGA
- Pittalis, M., Mousoulides, N. & Christou, C. (2009). *Students' 3d geometry thinking profiles*. *Proceedings of CERME 6*, January 28th - February 1st 2009, Lyon, France.
- Presmeg, N.C. (1986). Visualisation in High School. *For the Learning of Mathematics*. 6(3), 42-46.
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A.Gutierrez & P.Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205-236). Sense Publishers.
- Schnotz, W. & Kürschner, C. (2006). *External and internal representations in the acquisition and use of knowledge: visualization effects on mental model construction*. DOI 10.1007/s11251-0079029-2.
- Schnotz, W. & Lowe, R. (2003). External and internal representations in multimedia learning. *Learning and Instruction* 13 (2003) 117–123. doi:10.1016/S0959-4752(02)00015-4.
- Stoddart, T & Niederhauser, D. (1994). *Technology and educational change*. *Computers in the Schools*, 9 (4), 5-23.
- Streun, van A. (2008). *Handboek Didactiek van de wiskunde*. Katern 0, November.
- Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*. Florida: Academic Press.
- Van de Veen, P.G. (2013). *Workshop Geogebra*. November 2013.

Extra Oefenopgaven RHM 5VWO WiA

Tip: Gebruik bij het uitwerken het werkschema uit Getal & Ruimte; zie achterkant!

Opgave #1

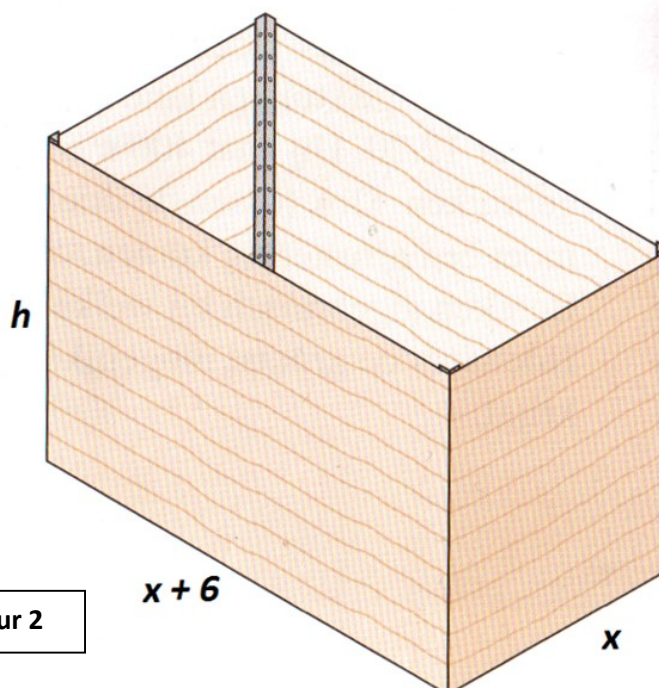
Een boer wil bij een stal van 10 bij 15 meter een rechthoekig stuk land afrasteren. Zie figuur 1. Langs de sloot hoeft geen hekwerk te worden aangebracht. De boer heeft in totaal 400 meter hekwerk beschikbaar. Bereken algebraïsch bij welke afmetingen de oppervlakte van de rechthoek maximaal is.



Figuur 1

Opgave #2

Van de kist in figuur 2 zijn de ribben in het grondvlak en de opstaande ribben verstevigd met metalen hoekprofielen. De totale lengte van deze profielen is 52 dm. De ribben in het grondvlak zijn x dm en $x+6$ dm. En de hoogte is h dm. Toon met behulp van de afgeleide aan dat de inhoud maximaal is voor $x=6$.



Figuur 2

Opgave #3

Een winkelier wil voor zijn zaak een rechthoekig parkeerterrein aanleggen met een oppervlakte van 1200 m^2 . Drie zijden zal hij laten afzetten met houten paaltjes. Voor de vierde zijde, aan de straatkant, wil hij een wat steviger afzetting hebben van betonnen paaltjes. Bovendien moet aan die kant een inrit komen.

Bij de houten paaltjes kan hij aan materiaal en arbeidsloon rekenen op 70 euro per meter. Bij de betonnen paaltjes zijn de kosten, inclusief de inrit, 140 euro per meter. Zie ook figuur 3. Bereken algebraïsch bij welke afmetingen van het terrein de kosten minimaal zijn.



Figuur 3

Opgave #4

Een rechthoekig aquarium zonder deksel, bestaat geheel uit glas. De lengte van het aquarium is $2x$ zo groot als de breedte. De inhoud van het aquarium moet 48 liter (48 dm^3) zijn. Bereken algebraïsch bij welke afmetingen de benodigde hoeveelheid glas minimaal is. Geef het antwoord in 2 decimalen nauwkeurig.

Werkschema: het algebraïsch oplossen van optimaliseringsproblemen

- 1 Verdiep je in de situatie en kijk welke variabelen een rol spelen.
- 2 Schrijf de te optimaliseren grootte G als functie van de variabelen uit 1.
- 3 Zoek een verband tussen de variabelen met behulp van de gegeven informatie en druk daarmee de ene variabele uit in de andere variabele.
- 4 Schrijf G als functie van één variabele door 2 en 3 te combineren.
- 5 Gebruik de afgeleide van G om de gestelde vraag te beantwoorden.

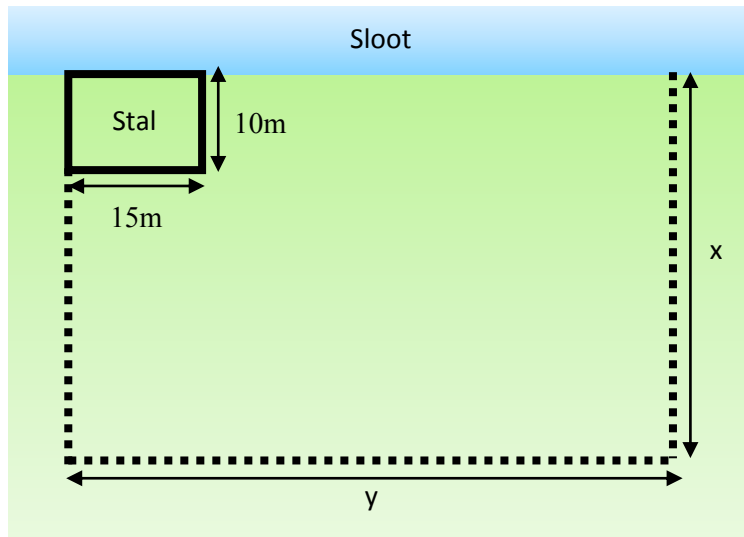
Extra Oefenopgaven HMM 5VWO WiA

B

Tip: Gebruik bij het uitwerken het werkschema uit Getal & Ruimte; zie achterkant!

Opgave #1

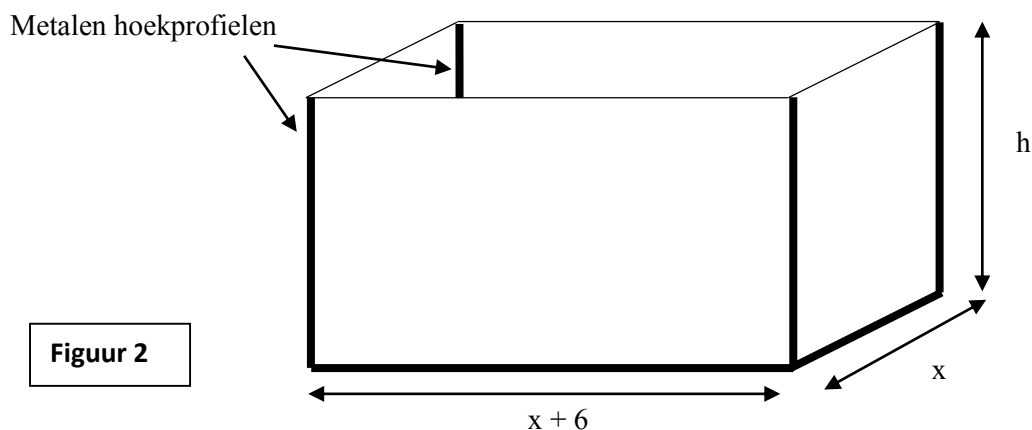
Een boer wil bij een stal van 10 bij 15 meter een rechthoekig stuk land afrasteren. Zie figuur 1. Langs de sloot hoeft geen hekwerk te worden aangebracht. De boer heeft in totaal 400 meter hekwerk beschikbaar. Bereken algebraïsch bij welke afmetingen de oppervlakte van de rechthoek maximaal is.



Figuur 1

Opgave #2

Van de kist in figuur 2 zijn de ribben in het grondvlak en de opstaande ribben verstevigd met metalen hoekprofielen. De totale lengte van deze profielen is 52 dm. De ribben in het grondvlak zijn x dm en $x+6$ dm. En de hoogte is h dm. Toon met behulp van de afgeleide aan dat *de inhoud* maximaal is voor $x=6$.

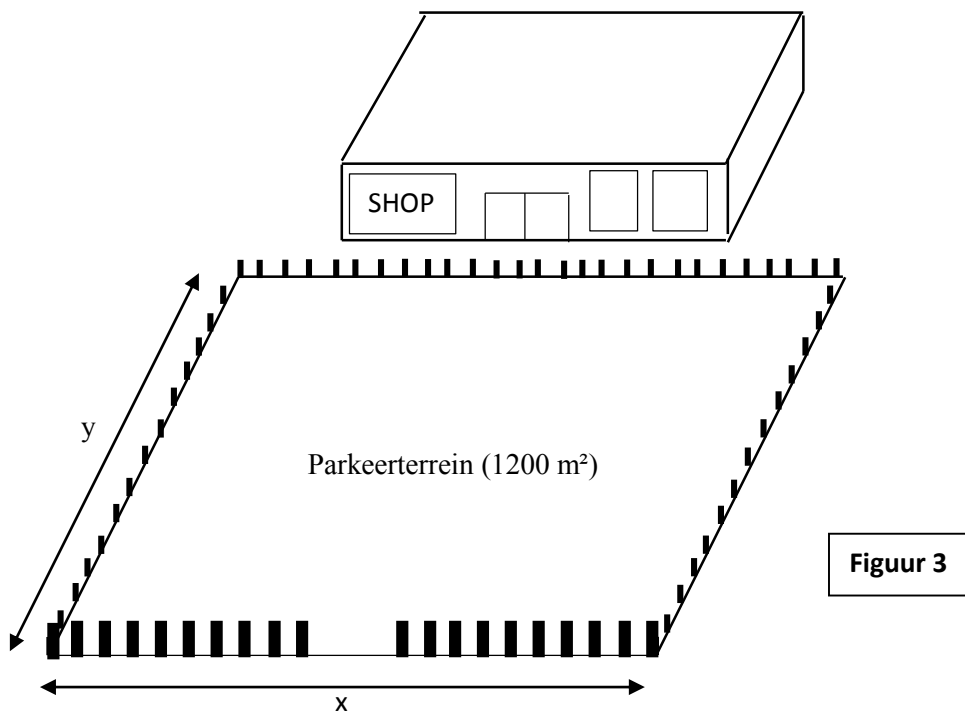


Figuur 2

Opgave #3

Een winkelier wil voor zijn zaak een rechthoekig parkeerterrein aanleggen met een oppervlakte van 1200 m^2 . Drie zijden zal hij laten afzetten met houten paaltjes. Voor de vierde zijde, aan de straatkant, wil hij een wat steviger afzetting hebben van betonnen paaltjes. Bovendien moet aan die kant een inrit komen.

Bij de houten paaltjes kan hij aan materiaal en arbeidsloon rekenen op 70 euro per meter. Bij de betonnen paaltjes zijn de kosten, inclusief de inrit, 140 euro per meter. Zie ook figuur 3. Bereken algebraïsch bij welke afmetingen van het terrein de kosten minimaal zijn.



Opgave #4

Een rechthoekig aquarium zonder deksel, bestaat geheel uit glas. De lengte van het aquarium is $2x$ zo groot als de breedte. De inhoud van het aquarium moet 48 liter (48 dm^3) zijn. Bereken algebraïsch bij welke afmetingen de benodigde hoeveelheid glas minimaal is. Geef het antwoord in 2 decimalen nauwkeurig.

Werkschema: het algebraïsch oplossen van optimaliseringsproblemen

- 1 Verdiep je in de situatie en kijk welke variabelen een rol spelen.
- 2 Schrijf de te optimaliseren grootte G als functie van de variabelen uit 1.
- 3 Zoek een verband tussen de variabelen met behulp van de gegeven informatie en druk daarmee de ene variabele uit in de andere variabele.
- 4 Schrijf G als functie van één variabele door 2 en 3 te combineren.
- 5 Gebruik de afgeleide van G om de gestelde vraag te beantwoorden.

Vragenlijst RHM 5VWO WiA

Beste Leerling,

Voor mijn onderzoek naar Visualiseringen, wil ik je vragen of je ook deze (korte) vragenlijst kunt invullen. Deze vragenlijst gaat over de opgaven die je zojuist hebt gemaakt en heeft vooral betrekking op de plaatjes die bij de opgaven staan. Je hoeft je naam nergens op te geven.

Alvast bedankt,

Luuk de Vries

(Geef eerlijke en serieuze antwoorden!)

Deel 1: Oplossen van Optimaliseringsproblemen	Ze er E ens	E ens	O ne ens	Ze er O ne ens
1. Ik heb ruimtelijk inzicht	☐	☐	☐	☐
2. Ik kan gemakkelijk de benodigde verbanden en formules uit de plaatjes bij een opgave halen (bijvoorbeeld voor het berekenen van de oppervlakte/inhoud)	☐	☐	☐	☐
3. Voor mijn gevoel ging het maken van deze 4 opgaven slechter , dan de (huiswerk)-opgaven in Getal & Ruimte	☐	☐	☐	☐
4. De plaatjes bij deze 4 oefen-opgaven hielpen mij om een beeld van de opgave/situatie te vormen	☐	☐	☐	☐
5. Ik kan <u>nu</u> beter plaatjes van (3D-)figuren begrijpen, dan dat ik dat aan het begin van dit jaar kon	☐	☐	☐	☐
6. Ik vind het werkschema (het 5-stappenplan) handig om te gebruiken	☐	☐	☐	☐
7. Ik kan uitslagen van figuren herkennen en schetsen (Bijv. uitslag van een kubus)	☐	☐	☐	☐
8. Ik kan voor mezelf, gemakkelijk een beeld vormen, van wat er in een plaatje te zien is.	☐	☐	☐	☐
9. Ik kan gemakkelijk eigenschappen van figuren benoemen als ik een plaatje zie (bijv. aantal ribben, hoeveel rechte hoeken zitten er in het figuur, hoeveel vlakken heeft het figuur)	☐	☐	☐	☐
10. Ik kan de inhoud en oppervlakten van figuren foutloos berekenen	☐	☐	☐	☐

Welk stap uit het stappenplan vind je het moeilijkst?

Wat zou jou helpen om optimaliseringsproblemen beter te kunnen oplossen?

Vragenlijst Oefenopgaven HMM 5VWO WiA

Beste Leerling,

Voor mijn onderzoek naar Visualisering, wil ik je vragen of je ook deze (korte) vragenlijst kunt invullen. Het 1^e deel gaat over de les van een aantal weken geleden, waarbij met behulp van het Digibord een uitleg is gegeven over hoe Optimaliseringsproblemen op te lossen. Zie ook de plaatjes op de volgende pagina. Het 2^e deel van deze vragenlijst gaat over de opgaven die je zojuist hebt gemaakt. Je hoeft je naam nergens op te geven.

Alvast bedankt,
Luuk de Vries

(Geef eerlijke en serieuze antwoorden!)

Deel 1: Plaatjes & Digibord (zie ook de applet op de volgende pagina als herinnering!)	Ze er E ens	E ens	O ne ens	Ze er O ne ens
1. Ik vond de les met het Digibord, in het algemeen erg zinvol/nuttig	☐	☐	☐	☐
2. De uitleg heeft mij geholpen het <i>werkschema (5-stappenplan)</i> te begrijpen	☐	☐	☐	☐
3. Door de uitleg kon ik makkelijker een beeld vormen bij de opgaven in de rest van de paragraaf.	☐	☐	☐	☐
4. De gebruikte applet (software) op het Digibord was duidelijk	☐	☐	☐	☐
5. De plaatjes op het Digibord maakte het voor mij makkelijker om de juiste formules en verbanden uit de figuur te halen, dan de plaatjes in het boek.	☐	☐	☐	☐
Deel 2: Oplossen van Optimaliseringsproblemen				
6. Ik heb ruimtelijk inzicht	☐	☐	☐	☐
7. Ik kan gemakkelijk de benodigde verbanden en formules uit de plaatjes bij een opgave halen (bijvoorbeeld voor het berekenen van de oppervlakte/inhoud)	☐	☐	☐	☐
8. Voor mijn gevoel ging het maken van deze 4 opgaven slchter , dan de (huiswerk)-opgaven in Getal & Ruimte	☐	☐	☐	☐
9. De plaatjes bij deze 4 oefen-opgaven hielpen mij om een beeld van de opgave/situatie te vormen	☐	☐	☐	☐
10. Ik kan <u>nu</u> beter plaatjes van (3D-)figuren begrijpen, dan dat ik dat aan het begin van dit jaar kon	☐	☐	☐	☐
11. Ik vind het werkschema (het 5-stappenplan) handig om te gebruiken	☐	☐	☐	☐
12. Ik kan uitslagen van figuren herkennen en schetsen (Bijv. uitslag van een kubus)	☐	☐	☐	☐
13. Ik kan voor mezelf, gemakkelijk een beeld vormen, van wat er in een plaatje te zien is.	☐	☐	☐	☐
14. Ik kan gemakkelijk eigenschappen van figuren benoemen als ik een plaatje zie (bijv. aantal ribben, hoeveel rechte hoeken zitten er in het figuur, hoeveel vlakken heeft het figuur)	☐	☐	☐	☐
15. Ik kan de inhoud en oppervlakten van figuren foutloos berekenen	☐	☐	☐	☐

Welk stap uit het werkschema vind je het moeilijkst?

Wat zou jou helpen om optimaliseringsproblemen beter te kunnen oplossen?

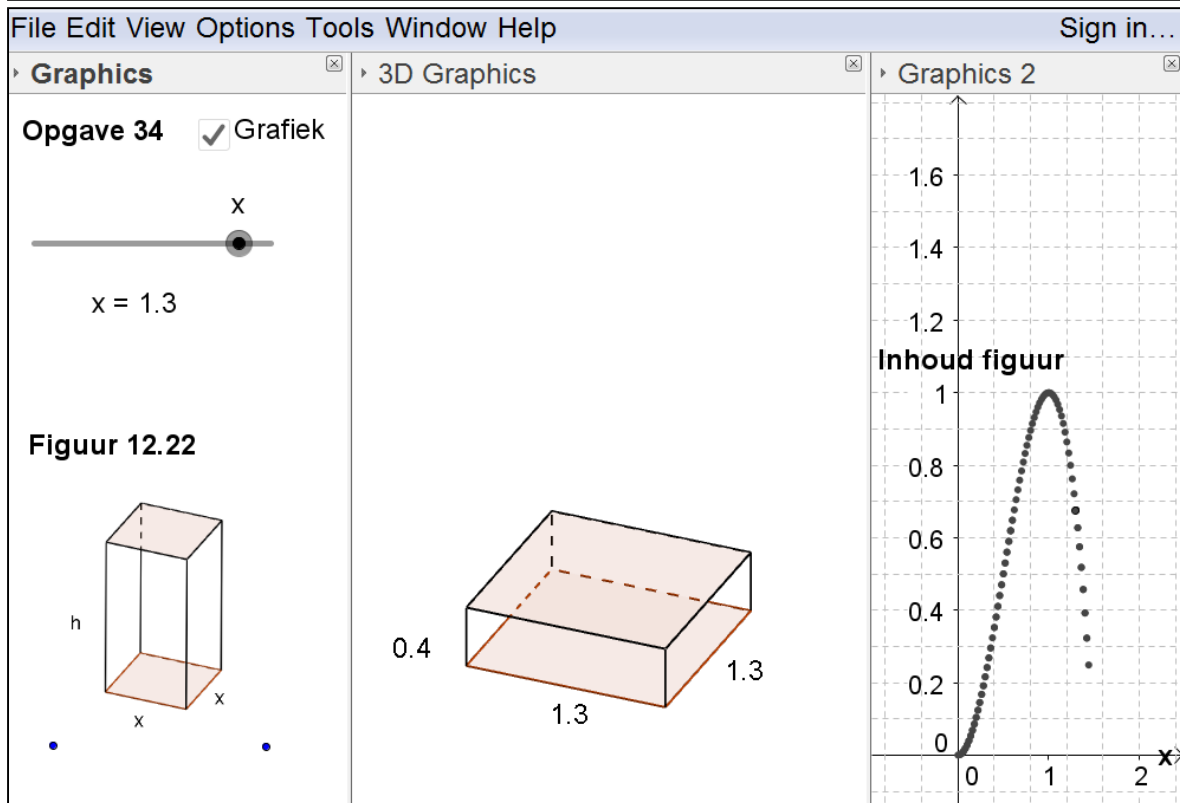
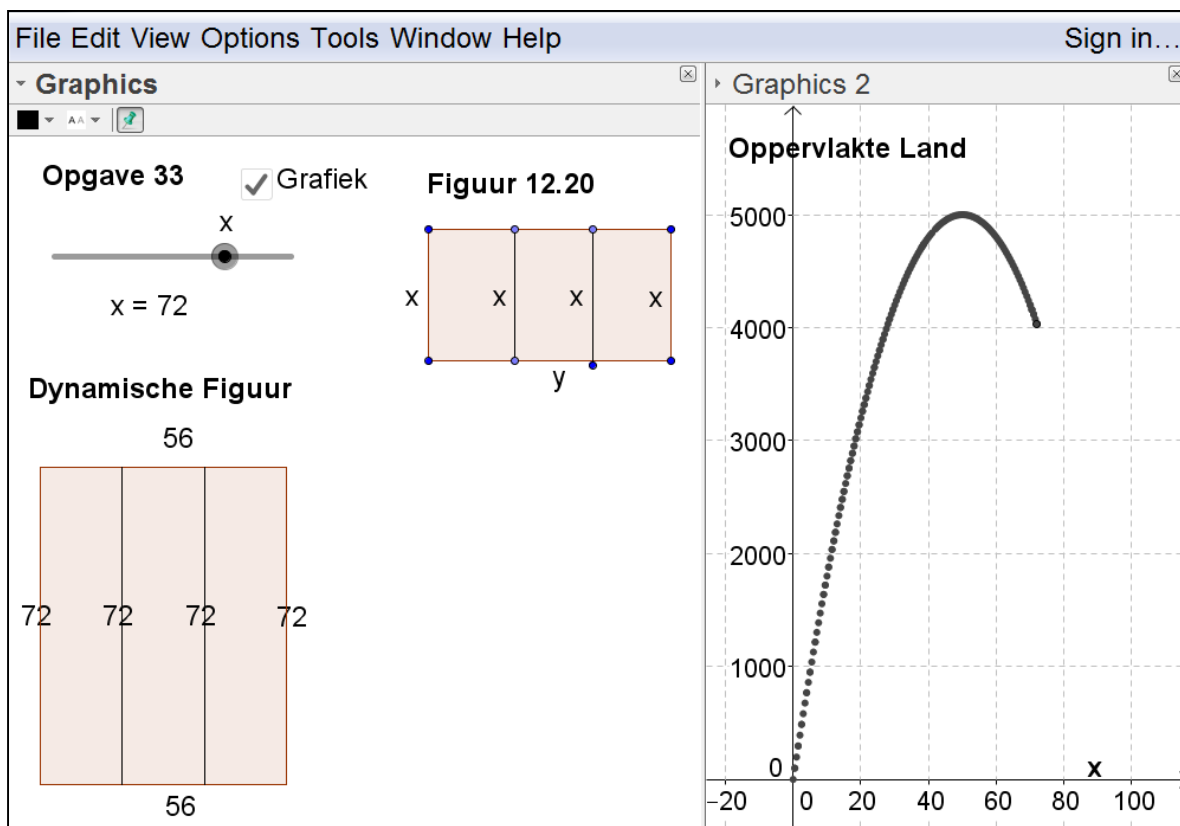
(Selectie van) Reacties van Groep 1 op de vraag: “Wat zou jou helpen?”



(Selectie van) Reacties van Groep 2 op de vraag: “Wat zou jou helpen?”



Screenshots van de ontworpen applets voor het Digibord



Uitwerkingen Toetsen

Opgave 1

- 1. Verdiep je in de situatie en kijk welke variabelen een rol spelen**

Variabelen: x (lengte) y (breedte)

- 2. Schrijf de te optimaliseren grootheid G als functie van de variabelen gevonden in stap 1.**

Oppervlakte: $Opp = x * y$

- 3. Zoek een verband tussen de variabelen met behulp van de gegeven informatie en druk daarmee de ene variabele uit in de andere variabele**

Omtrek: $O = x + x + y = 10$

$y(x) = 410 - 2x$ (*y als functie van x*) (*)

- 4. Schrijf G als functie van één variabele door 2 en 3 te combineren.**

$Opp(x,y) = x * y$

$Opp(x) = x * (410 - 2x)$

$Opp(x) = 410x - 2x^2$

- 5. Gebruik de afgeleide van G om de gestelde vraag te beantwoorden**

$$\frac{dOpp}{dx} = 410 - 4x$$

$$410 - 4x = 0$$

$$x = 102,5$$

vul in $x = 102,5$ (*)

$$y = 410 - 205 = 205$$

Opgave 2

- 1. Verdiep je in de situatie en kijk welke variabelen een rol spelen**

Variabelen: x (lengte & breedte) h (hoogte)

- 2. Schrijf de te optimaliseren grootheid G als functie van de variabelen gevonden in stap 1.**

Inhoud: $Inh = x * (x+6) * h$

- 3. Zoek een verband tussen de variabelen met behulp van de gegeven informatie en druk daarmee de ene variabele uit in de andere variabele**

Som Ribben: $R = 4h + 2x + 2(x+6) = 52$

$4h = 40 - 4x$ (*h als functie van x*) (*)

- 4. Schrijf G als functie van één variabele door 2 en 3 te combineren.**

$Inh(x,h) = x * (x+6) * h$

$Inh(x) = x * (x+6) * (10 - x)$

$Inh(x) = (x^2 + 6x) * (10 - x)$

$Inh(x) = -x^3 + 4x^2 + 60x$

- 5. Gebruik de afgeleide van G om de gestelde vraag te beantwoorden**

$$\frac{dI}{dx} = -3x^2 + 8x + 60 \quad \rightarrow \text{Vul } x=6 \text{ in om te zien dat afgeleide} = 0.$$

abc-formule ($a=-3$, $b=8$, $c=60$)

$x = 6 \rightarrow$ afgeleide 0 ($Inh = 288 \text{ dm}^3$)

Opgave 3

1. Verdiep je in de situatie en kijk welke variabelen een rol spelen

Variabelen: x (lengte) y (breedte)

2. Schrijf de te optimaliseren grootheid G als functie van de variabelen gevonden in stap 1.

$$\text{Kosten} = (2y+x) * 70 + x * 140 = 140y + 210x$$

3. Zoek een verband tussen de variabelen met behulp van de gegeven informatie en druk daarmee de ene variabele uit in de andere variabele

$$\text{Oppervlakte} = x * y = 1200$$

$$y = 1200 / x \quad (y \text{ als functie van } x) \quad (*)$$

4. Schrijf G als functie van één variabele door 2 en 3 te combineren.

$$\text{Kosten}(x,y) = 140y + 210x$$

$$\text{Kosten}(x) = 140 * 1200 * x^{-1} + 210x$$

$$\text{Kosten}(x) = 168000 * x^{-1} + 210x$$

5. Gebruik de afgeleide van G om de gestelde vraag te beantwoorden

$$\frac{dK}{dx} = -168000 * x^{-2} + 210$$

$$-168000 * x^{-2} + 210 = 0$$

$$x^2 = 800, \quad x = 28,28$$

$$\text{vul in } x = 28,28 \quad (*)$$

$$y = 1200 / 28,28 = 42,43$$

Opgave 4

1. Verdiep je in de situatie en kijk welke variabelen een rol spelen

Variabelen: x (lengte, breedte) h (hoogte)

2. Schrijf de te optimaliseren grootheid G als functie van de variabelen gevonden in stap 1.

$$\text{Oppervlakte Glas} = OG = 2xh + 2x^2 + 4xh$$

3. Zoek een verband tussen de variabelen met behulp van de gegeven informatie en druk daarmee de ene variabele uit in de andere variabele

$$\text{Inhoud} = 2x^2 * h = 48$$

$$h = 24 / x^2 \quad (y \text{ als functie van } x) \quad (*)$$

4. Schrijf G als functie van één variabele door 2 en 3 te combineren.

$$OG(x,h) = 2xh + 2x^2 + 4xh$$

$$OG(x) = 2x * 24 * x^{-2} + 2x^2 + 4x * 24 * x^{-2}$$

$$OG(x) = 2x^2 + 144x^{-2}$$

5. Gebruik de afgeleide van G om de gestelde vraag te beantwoorden

$$\frac{dOG}{dx} = 4x - 288x^{-3}$$

$$4x - 288x^{-3} = 0$$

$$4x = 288 / x^3 \quad x^4 = 288 / 4$$

$$x = 2,91 \quad 2x = 5,82 \quad h = 2,83$$