

DE MOTIVERENDE WERKING VAN WISKUNDIG MODELLEREN

MAARTEN SCHILPZAND
S0009210
WISKUNDE

Verslag van Onderzoek van Onderwijs (10 EC variant)

INHOUDSOPGAVE

Samenvatting	4
Inleiding	5
Theoretisch kader	6
Begrippen.....	6
Wiskundig modelleren	6
Motivatie voor de wiskunde	6
Exacte wetenschap	6
Formele wetenschap.....	7
Literatuur.....	7
Motivatie voor wiskunde	7
Lessen wiskundig modelleren	7
Meten van Motivatie	8
Onderzoeksvragen	10
Methode	11
Inhoud Lessen.....	11
Lengte schaatsbaan	11
Lengte landingsbaan	12
Afstand horizon	13
Grootte waterberging	14
Questionnaire	15
Geven van de lessen	15
Lengte Schaatsbaan.....	16
Lengte landingsbaan	16
Afstand horizon	16
Grootte waterberging	16
Algemeen	17
Resultaten.....	18
Algemeen niveau	18
Gedetailleerd niveau	18
Wiskunde in het dagelijks leven.....	19
Conclusie en Discussie	20
Conclusie	20
Motivatie voor wiskunde op het vwo in de bovenbouw.....	20
Lessen wiskundig modelleren	20
Motivatie verhogende werking van wiskundig modelleren.....	20
Discussie	20
Referenties.....	22

Bijlagen	23
Les 1: Lengte Schaatsbaan	23
Inleiding	23
Gegevens	23
Uitwerking	24
Les 2: Lengte landingsbaan	25
Fast and Furious 6	25
Les 3: Afstand horizon	26
Afstand tot de horizon	26
Les 4: Grootte waterberging	27
Grootte van een waterberging	27
Questionnaire	29
Vragenlijst wiskundelessen	29
Berekeningen significantie	33
Inleiding	33
Data	33

SAMENVATTING

In dit onderzoek wordt een verband onderzocht tussen het volgen van een aantal lessen wiskundig modelleren en de motivatie voor de wiskunde in zijn algemeenheid. Voor dit onderzoek hebben twee klassen 4 vwo wiskunde B twee keer een vragenlijst ingevuld om hun motivatie voor wiskunde te meten. Eén van de klassen heeft tussendoor vier lessen wiskundig modelleren gevolgd, die specifiek voor dit onderzoek zijn ontwikkeld. Uit de antwoorden op de vragenlijst bleek dat de motivatie bij beide groepen vanaf het begin al erg hoog was. Daarnaast bleek de groep die lessen wiskundig modelleren had gevolgd, zich beter realiseerde dat wiskunde op veel plekken voorkomt, maar de motivatie was niet significant veranderd ten opzichte van de controle groep.

INLEIDING

Geregeld als ik het heb over mijn vak als wiskundedocent, krijg ik te horen dat wiskunde het moeilijkste vak was op school. Hierop doorvragend wordt vaak verteld dat de stof zo droog is, dat je alleen maar sommetjes moet maken zonder een goed idee te hebben wat je er nou precies mee kan. Dit terwijl stof beter blijft beklijven wanneer duidelijk is wat je er mee kan. Overigens blijkt dat deze mensen het ook nu nog lastig vinden om goed aan te kunnen geven waar wiskunde allemaal terug komt.

Bij interviews met collega's komt ook naar voren dat leerlingen de wiskunde droog vinden. Eén collega gaf aan dat leerlingen vaak op zoek zijn naar context. Hij had het gevoel dat leerlingen die met wiskundig modelleren in aanraking komen, makkelijker de wiskunde in een context kunnen plaatsen: "Ze krijgen een aha-erlebnis." Een andere collega vertelde dat hij vond dat leerlingen bij andere vakken (zoals natuurkunde, scheikunde of NLT) vaak wel met wiskunde in aanraking komen, maar hebben ze niet door dat ze eigenlijk wiskunde aan het doen zijn. Op het moment dat duidelijk aangegeven wordt dat ze wiskunde aan het beoefenen zijn bij de context blijft dit wellicht beter hangen.

In dit onderzoek ga ik kijken of het aanbieden van context bij leerlingen van de bovenbouw op de middelbare school effect heeft op hoe ze wiskunde ervaren. Om dit te onderzoeken geef ik 4 lessen wiskundig modelleren aan een groep 4 vwo leerlingen en meet ik de motivatie voor wiskunde vooraf en achteraf. Ook meet ik de motivatie voor- en nadat deze lessen gegeven werden van een andere 4 vwo groep om de motivatie goed te kunnen vergelijken.

Waar niet naar gekeken wordt, maar wat zeker wel het vermelden waard is: waarschijnlijk zouden de cijfers van wiskundeleerlingen ook omhoog gaan als de motivatie voor de wiskunde wordt verhoogd.

THEORETISCH KADER

BEGRIPPEN

In het verslag komen een aantal begrippen naar voren waarbij het van belang is dat duidelijk is wat er mee bedoeld wordt. Sommige van deze begrippen zijn minder bekend en verdienen daarom uitleg, andere begrippen kunnen op meerdere manieren opgevat worden en moeten daarom helder geformuleerd worden.

WISKUNDIG MODELLEREN

De definitie van wiskundig modelleren zoals die in dit onderzoek gebruikt wordt, is:

Een cyclisch proces dat beschreven wordt door de volgende stappen:

- Van een realistisch probleem wordt een conceptueel model gemaakt
- Dit model wordt omgezet naar een wiskundig model
- Bij dit wiskundige model hoort een wiskundige analyse
- Deze wiskundige analyse wordt weer terug vertaald naar het realistische probleem.

Hierbij hoort ook bij elke stap een validatie.

De hier gehanteerde definitie van wiskundig modelleren is afgeleid van de beschrijving van het visiedocument Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs. Deze commissie beschrijft modelleren als volgt (cTWO, 2007):

Modelleren is een praktisch en creatief proces waarbij realistische problemen in wiskundige vorm worden vertaald. Leerlingen worden voor een probleemsituatie geplaatst met als doel deze met wiskundige middelen op te lossen. Dit omvat het doorgronden en analyseren van het probleem, het kiezen van variabelen, het opstellen van verbanden, het bepalen van een strategie en het inzetten van wiskundige middelen.

Wat mist in deze beschrijving is de interpretatie van de wiskundige oplossing, oftewel de vertaling terug naar het realistische probleem, en de validering van de oplossing, maar ook alle tussenstappen.

MOTIVATIE VOOR DE WISKUNDE

De motivatie voor de wiskunde die in dit onderzoek gemeten wordt, gaat over de wiskunde in zijn algemeenheid en is afgeleid van de meting van motivatie voor *science learning* (Hsiao-Lin Tuan, 2005). Hierin wordt meegenomen dat je vertrouwen hebt in je eigen bekwaamheid, dat je op een actieve manier leert, dat je de waarde van de wiskunde in kan schatten, dat je weet wat voor resultaat je wilt halen met wiskunde, waar je voldoening uit haalt en wat de reden is dat je met wiskunde bezig bent. Dit is dan ook een stuk breder dan enkel de vraag of wiskunde leuk is.

EXACTE WETENSCHAP

Wetenschap die is gebaseerd op experimenten en het experimenteel toetsen van theorieën en wetten. Hier vallen de meeste beta-wetenschappen onder zoals natuurkunde, scheikunde, biologie en economie. Wiskundig modelleren zou ook onder de exacte wetenschappen geschaard kunnen worden, in tegenstelling tot (de meeste) andere onderdelen van wiskunde als analyse en logica ("Exacte wetenschap," n.d.)

FORMELE WETENSCHAP

De meeste onderdelen van wiskunde vallen onder de formele (of fundamentele) wetenschap. Deze wetenschap is gebaseerd op logica en gaat over het karakteriseren van abstracte structuren. De formele wetenschap biedt ondersteuning aan de exacte wetenschap door informatie te geven over structuren waarmee de exacte wetenschap de wereld beschrijft en wat voor gevolgen er getrokken kunnen worden uit deze structuren ("Formele wetenschap," n.d.)

LITERATUUR

MOTIVATIE VOOR WISKUNDE

Wat collega's aangeven, dat leerlingen wiskunde droog vinden, wordt ondersteund door de literatuur. Gravemeijer (1999) schrijft dat de moeilijkheid van het leren van wiskunde vaak wordt toegeschreven aan (wat wordt beschouwd als) het gat tussen het dagelijks leven en de formele wiskunde. Bonotto (2007) geeft aan dat wanneer leerlingen ondergedompeld worden in situaties die ze herkennen (waar wiskunde bij komt kijken), dat de leerlingen dan beter door krijgen wat de strekking en bruikbaarheid is van wiskunde. Daar komt nog eens bij dat deze leerlingen het makkelijker vinden om zogenaamd te mathematiseren: in een niet wiskundig probleem toch snel de wiskunde te ontdekken.

LESSEN WISKUNDIG MODELLEREN

Het vinden van de wiskunde in een niet wiskundig probleem is lastig voor veel leerlingen. Schwarzkopf (2007) geeft aan dat leerlingen het moeilijk vinden om er achter te komen wat ze moeten doen bij modelleeropdrachten. Dit komt mede omdat wiskundig modelleren een grote mate van zelfstandig werken in zich heeft. De meest logische manier van een les hierbij geven is dat leerlingen in groepen gaan zitten en met weinig input zelf aan de gang gaan. Deze manier van werken wordt door Franssen (1978) omschreven als een open curriculum. Een open curriculum is namelijk een curriculum dat niet gesloten is, waarbij hij de definitie van gesloten als volgt geeft: *"Een gesloten curriculum is een curriculum, dat functionerend als planningsdocument binnen onderwijs-leersituaties het handelen van leerkracht en/of leerlingen volledig voorschrijft, zodat de vrijheid van het handelen van leerkracht en leerlingen, opgevat in de zin van het zelf kunnen kiezen m.b.t. doelen, inhouden, werkvormen en evaluatieprocedures, tot nul worden gereduceerd."* Het gevolg hiervan kan zijn dat leerlingen nu niet goed weten wat ze moeten doen, zoals Schwarzkopf ook al aangaf. Daarnaast kunnen de leerlingen ook één of een aantal verkeerde aannames doen over een berekening die wel of niet zou mogen. Hierdoor kunnen ze de verkeerde kant op redeneren en steeds verder van het pad afraken. Wanneer ze niet weer terug op het pad komen, kunnen deze leerlingen geheel afhaken. Het is lastig voor ze om de rest van de les mee te doen en weer aan te haken.

OPBOUW VAN WISKUNDIG MODELLEREN

Zoals (Gravemeijer, 1999) in zijn oratie aanhaalde is een wiskundig model een "beschrijving van een fenomeen in wiskundige taal." Wanneer je zo'n beschrijving hebt wil je ook graag dat het, onder andere, voorspellingen mogelijk maakt die goed blijken te kloppen. Op het moment dat je een beschrijving hebt die goed klopt, kan je hiermee rekenen om goede voorspellingen te doen. Hierdoor kan je het fenomeen beter begrijpen en er zelf voorspellingen voor doen.

Zoals aangegeven in het Handboek Wiskundendidactiek (Paul Drijvers, 2012) is het doel van wiskundig modelleren het toepassen van wiskunde: "Het is immers niet de bedoeling dat de op school geleerde wiskunde een dode letter blijft. Leerlingen moeten na hun schooltijd in hun dagelijks leven, vervolgopleiding of beroep de geleerde wiskunde kunnen gebruiken en toepassen."

Ook aangegeven in het Handboek Wiskundendidactiek (Paul Drijvers, 2012) is de modelleercyclus. In deze cyclus komen 5 fasen aan bod:

- Conceptualisering: Het vertalen van de probleemsituatie naar een conceptueel model. Hier worden aannames gedaan over de probleemsituatie. Soms kunnen zaken makkelijker gemaakt worden en sommige zaken hoeven in zijn geheel niet meegenomen te worden.
- Mathematisering: Het vertalen van het conceptuele model naar een wiskundig model. Hierbij kunnen vergelijkingen opgesteld worden die (een deel van) het model beschrijven.
- Analyse: De vergelijkingen die bij het mathematiseren opgesteld zijn, kunnen (met genoeg wiskundige kennis) geanalyseerd worden. Soms kan dit leiden tot een oplossing van een probleem, maar vaker geeft het tenminste inzicht in de structuur van een probleem.
- Interpretatie: De oplossing van het wiskundige model is alleen nog maar een wiskundig antwoord. Bij deze stap moet dit antwoord ook weer vertaald worden naar de probleemsituatie. Hier geef je echt antwoord op de vraag.
- Validatie: Het nagaan of de stap die je hebt gezet wel een goede stap was. Dit kan bij elk van de voorgaande fases, maar gebeurt met name aan het einde. Met name bij deze stap is het goed samenwerken in een groep van toegevoegde waarde. Als een deel van de groep een bepaalde vergelijking heeft bedacht, is het goed dat de andere groepsleden nog eens kritisch naar de vergelijking kijken.

Bij de paragraaf Methode wordt verder ingegaan op de inhoud van de gegeven lessen.

METEN VAN MOTIVATIE

Het meten van motivatie kan op verschillende manieren worden gedaan. Veel van de ontwikkelde methoden om motivatie te meten zijn gericht op algemene motivatie op het leren (Hsiao-Lin Tuan, 2005). In het bovenstaande onderzoek wordt specifiek ingegaan op motivatie voor het leren voor *science learning*. *Science learning* is gericht op het wetenschappelijk onderwijs in de breedte van de zin. Het gaat hier om het begrijpen van wetenschappelijke concepten, de relevantie van wetenschap zien en graag door willen gaan in de wetenschap. De questionnaire die voor dit onderzoek werd ontwikkeld meet de motivatie voor *science learning*.

In het onderzoek worden zes factoren van motivatie benoemd, die gebruikt worden bij het ontwerpen van de questionnaire. Deze zes factoren zijn:

1. Zelfeffectiviteit: het vertrouwen van een persoon in de eigen bekwaamheid om met succes invloed uit te oefenen op zijn of haar omgeving, bijvoorbeeld door een bepaalde taak te volbrengen of een probleem op te lossen.
2. Actieve leerstrategieën: strategieën die er voor zorgen dat het leren op een actieve manier gebeurt, met veel zintuigen tegelijk (lezen, horen, zien, zeggen en doen) zodat de stof beter blijft hangen.
3. Waarde van science learning: de toepasbaarheid en het nut van *science learning*.
4. Resultaatdoelstelling: wat is het doel van de leerling aan het einde van de rit, waarom worden de lessen *science learning* gevolgd.
5. Prestatiedoelstelling: waar haal je het meeste voldoening uit als je bezig bent met *science learning*.
6. Stimulatie van de leeromgeving: wat is de reden geweest dat je hebt gekozen voor *science learning*.

Bovengenoemde questionnaire richt zich specifiek op motivatie voor *science learning*, waarbij opgemerkt moet worden dat *science learning* wel echt een andere tak van sport is dan wiskunde. Waar de eerste een exacte wetenschap is, is de tweede een formele wetenschap. Bij de paragraaf

Methode wordt verder ingegaan op de consequenties van de verschillen tussen deze wetenschappen op de vragen van de questionnaire, welke vragen meer en welke vragen minder relevant zijn uit de questionnaire.

ONDERZOEKSVRAGEN

De hoofdvraag van dit onderzoek is: Op welke manier werkt wiskundig modelleren motivatie verhogend voor wiskunde op het vwo in de bovenbouw van de middelbare school?

Om deze hoofdvraag goed te kunnen beantwoorden zijn deelvragen nodig. De deelvragen die bij deze hoofdvraag horen, zijn:

- Wat is de motivatie voor wiskunde op het vwo in de bovenbouw van de middelbare school?
- Hoe zien wiskundig modelleer lessen er uit?

Met deze deelvragen kan het onderzoek in fases opgebouwd worden. Om te kijken naar de motivatie voor wiskunde op het vwo in de bovenbouw van de middelbare school moet er een questionnaire zijn die de motivatie meet. De motivatie moet zowel vooraf als achteraf gemeten worden. Hiervoor moet een questionnaire ontwikkeld worden die de motivatie voor de wiskunde meet.

Voor de fase van het onderzoek die gaat over hoe wiskundig modelleer lessen er uit zien worden vier wiskundig modelleer lessen ontwikkeld. Ook worden deze lessen gegeven zodat er onderzocht kan worden of de lessen effect hebben op de motivatie.

METHODE

Voor het onderzoek naar de verhogende werking op motivatie van wiskundig modelleren, zijn er twee zaken van belang: het meten van de motivatie en het uitwerken van de onderwerpen van wiskundig modelleren. Het meten van motivatie is gedaan bij twee groepen leerlingen uit 4 vwo die voor wiskunde B hebben gekozen. Dit zijn groepen die in hun latere loopbaan waarschijnlijk veel met wiskunde in aanraking gaan komen en voor wie wiskunde dus belangrijk is. De ene groep is de meetgroep, die daadwerkelijk de lessen wiskundig modelleren gaan volgen, met 27 leerlingen. De andere groep is de controlegroep met 23 leerlingen. Bij dit onderzoek zijn er drie stappen genomen. Eerst is een motivatietest afgenomen bij de controlegroep en de meetgroep. Vervolgens zijn er 4 lessen wiskundig modelleren gegeven aan de meetgroep. Na deze 4 lessen, verdeeld over 4 weken, is nogmaals de motivatietest afgenomen bij beide groepen.

Door eerst een nulmeting te doen, is te zien wat de basismotivatie voor wiskunde van de groep is. Hierdoor kan de meting achteraf vergeleken worden met de nulmeting. Het afnemen van de motivatietest bij de tweede groep heeft als doel om te kijken in hoeverre de motivatie verandert als er geen extra wiskundig modelleerlessen gegeven worden. Op deze manier kan gekeken worden naar het effect van de modelleerlessen en hou je andere zaken buiten beschouwing.

Hieronder staat eerst beschreven waar de lessen aan moeten voldoen en hoe ze opgebouwd zijn. Vervolgens komt aan bod op welke manier de motivatie van leerlingen gemeten wordt.

INHOUD LESSEN

Met de uitleg zoals gegeven in de paragraaf: *Lessen wiskundig modelleren* in het achterhoofd zijn de volgende 4 lessen ontwikkeld:

- Lengte schaatsbaan
- Lengte landingsbaan
- Afstand horizon
- Grootte waterberging

Per les staat kort beschreven wat deze inhoudt, waar het over gaat en op welk onderdeel de nadruk van de les ligt. Dat wat uitgedeeld werd aan de leerlingen is in de bijlagen bijgevoegd.

LENGTE SCHAATSBAAN

De opzet van de vraag komt van een nieuwsitem van de NOS uit 2014. In dit filmpje kwam de vraag langs hoe ver schaatsers moeten schaatsen bij de ploegenachtervolging. Dit omdat normaal gesproken bij langebaanschaatsen de schaatsers één buitenbocht en één binnenbocht schaatsen, maar bij de ploegenachtervolging wordt er alleen de binnenbocht geschaatst. In het filmpje wordt de baan opgemeten. De vraag is nu, kan dit ook berekend worden.

CONCEPTUALISATIE

Bij deze vraag komen de aannames met name uit de vorm van de schaatsbaan. Bij de vraag zit een plaatje van de schaatsbaan met daarbij getallen. Veel mensen denken dat de bochten allebei 100 meter zijn en de rechte stukken ook. Dit idee moet eerst losgelaten worden en er moet worden gerekend met de getallen van het plaatje.

MATHEMATISERING

Samen met het valideren ligt hier de nadruk van de les. Hier moeten de leerlingen bedenken dat de baan in 4 stukken te verdelen is: de binnenbocht, schuin oversteken, de buitenbocht en het rechte stuk. Van de binnenbocht en de buitenbocht zijn genoeg gegevens om te berekenen hoe lang deze

zijn. De 4 stukken samen zijn 400 meter en omdat de buitenbocht een straal heeft die 5 meter groter is dan de binnenbocht, kan je een driehoek maken met het schuin oversteken, het rechte stuk en de 5 meter. Op deze manier heb je 2 vergelijkingen met 2 onbekenden en kan het rechte stuk uitgerekend worden. De vergelijking van de lengte bij de ploegenachtervolging is twee keer het rechte stuk en twee keer de binnenbocht.

ANALYSE

De oplossing volgt direct uit het oplossen van de laatste vergelijking, twee keer het rechte stuk en twee keer de binnenbocht.

INTERPRETATIE

De interpretatie is hier ook zeer voor de hand liggend: het getal wat gevonden is bij de oplossing is de afstand van één rondje ploegenachtervolging schaatsen.

VALIDATIE

Bij de validatie komt er meer om de hoek kijken. Nu kan het antwoord namelijk vergeleken worden met het antwoord wat de NOS heeft gevonden. Hier blijkt dat de twee antwoorden een aantal meters uit elkaar liggen. Doel is nu om met de leerlingen na te gaan waar de verschillen in kunnen ontstaan. De meest voor de hand liggende antwoorden hier zijn meetfouten bij het opmeten en verkeerde aannames bij de conceptualisatie.

LENGTE LANDINGSBAAN

Bij de film *the Fast & the Furious 6* is er een scene waarbij een achtervolging op een landingsbaan plaatsvindt. In deze scene land een vliegtuig, rijden twee auto's het vliegtuig in (terwijl het over de landingsbaan rijdt), gebeurt er van alles in en om het vliegtuig, probeert het vliegtuig op te stijgen en stort het uiteindelijk neer. De vraag is nu om een schatting te maken van de lengte van de landingsbaan.

CONCEPTUALISATIE

De nadruk in deze les ligt op de aannames die gedaan worden en wat de consequenties zijn van deze aannames. Dit omdat door goede aannames snel een schatting gemaakt kan worden van het antwoord. Veel leerlingen bedenken snel dat de lengte van de baan berekend kan worden als je weet wat de gemiddelde snelheid is van de auto's en hoe lang de scene duurt. Om alvast een idee te krijgen van het antwoord wordt de lengte van scene gegeven en de snelheid waarmee de auto's ongeveer hebben gereden. Hierna wordt de scene in delen opgesplitst en gaan de leerlingen per onderdeel bepalen wat voor gegevens ze willen hebben om de snelheid van de auto's te kunnen schatten.

MATHEMATISERING

Zoals gezegd kan de lengte van de landingsbaan uitgerekend worden met behulp van de natuurkunde, waarbij de lengte van de scene vermenigvuldigd met de gemiddelde snelheid van de auto's de lengte van de landingsbaan geeft. Later kan de scene opgesplitst worden in onderdelen, waarbij per onderdeel de snelheid en de lengte van de scene anders verschillen.

ANALYSE

Het daadwerkelijk uitrekenen van de lengte heeft weinig voeten in de aarde: de snelheid wordt vermenigvuldigd met de tijd per onderdeel van de scene. De verschillende lengtes die hiermee gevonden worden, worden vervolgens bij elkaar opgeteld. De twee oplossingen (één voor het eerste idee en één uiteindelijk antwoord) zouden wel redelijk bij elkaar in de buurt moeten liggen.

INTERPRETATIE

Bij de interpretatie is het goed om de gemiddelde lengte van een landingsbaan erbij te pakken en de lengte van de langste landingsbaan op aarde. Nu blijkt dat de landingsbaan in de film ongeveer 10 keer zo lang is als de langste landingsbaan.

VALIDATIE

Bij de validatiestap is het goed om 2 zaken met elkaar te vergelijken. Als eerste het “inschattingsantwoord” met het definitieve antwoord, om te kijken of het definitieve antwoord lijkt op het eerste antwoord. Hierbij is het ook goed om te kijken naar de betrouwbaarheid van de antwoorden. Wordt je antwoord betrouwbaarder als je specifieker gaat kijken? Ook de vergelijking tussen het berekende antwoord en de lengte van gemiddelde landingsbanen is goed. Hierbij komt het verschil met name door het feit dat de film het niet zo nauw houdt met de feiten.

AFSTAND HORIZON

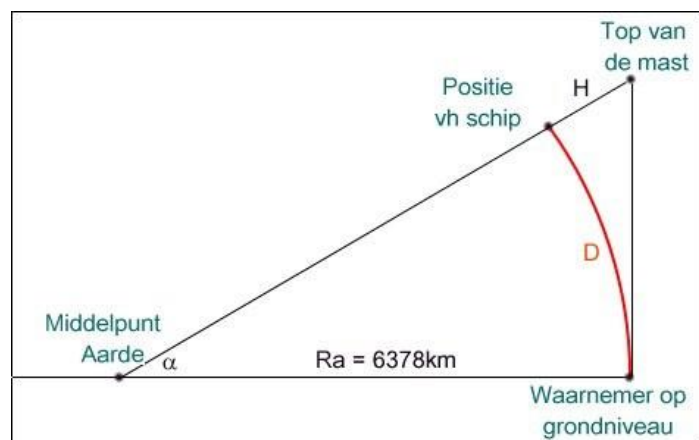
In de derde les gaat het om het berekenen van de afstand tot de horizon. Om het verhaal iets sappiger te maken en om wat verder in te gaan op aannames, gaat het over de tijd die het duurt voordat een schip niet meer zichtbaar is als je overboord bent geslagen. Dit gaan de leerlingen in twee situaties berekenen en daarna geven ze ook een algemene formule voor de berekening.

CONCEPTUALISATIE

Bij de conceptualisatie gaat het nu om de aannames die gedaan moeten worden om het een berekenbaar model te laten worden. Wat doe je bijvoorbeeld met golven? Is het dag of nacht? Staat er stroming? En meer van dit soort vragen.

MATHEMATISERING

Wanneer veel aannames zijn gedaan om “ruis” uit het model te halen (dus een vlakke zee, geen mist, overdag, een volstrekt ronde bol als aarde, etc) dan komt het mathematiseren van dit vraagstuk neer op het tekenen van een deel van de cirkel zoals aangegeven in Figuur 1. Daarnaast gaat het in dit geval niet om de afstand, maar om de tijd die het duurt voordat je het schip niet meer kan zien. Er moet dus ook rekening gehouden worden met de snelheid van het schip.



Figuur 1: mathematisering van de afstand tot het schip

ANALYSE

Wanneer de afstand berekend is door gebruik te maken van Figuur 1, kan de tijd snel berekend worden met behulp van de natuurkunde.

INTERPRETATIE

De oplossing geeft ook gelijk de interpretatie van de vraag, namelijk de tijd die het duurt voordat het schip niet meer zichtbaar is achter de horizon.

VALIDATIE

Bij de validatie van de het antwoord, moet zeer goed stilgestaan worden dat er hier dusdanig veel aannames zijn gedaan dat het antwoord met een flinke korrel zout genomen moet worden. Alleen golfslag heeft namelijk al een enorm effect op de zichtbaarheid, laat staan of het mistig is. Daar staat tegenover dat een probleem waar heel veel factoren bij komen kijken toch terug te brengen valt naar een wiskundig probleem dat opgelost kan worden.

GROOTTE WATERBERGING

De laatste les gaat over de grootte van een waterberging. In de zomer is er in Delfland een waterberging in gebruik genomen die er gelijk voor heeft gezorgd dat een deel van de bebouwing van Delft droge voeten hield. Bij deze les moet worden berekend wat de capaciteit moet zijn van de waterberging om er voor te zorgen dat ook op erg regenachtige dagen er genoeg plek is om het water op te vangen.

Bij deze laatste les komen een aantal zaken van de vorige lessen bij elkaar, wederom moeten aannames gedaan worden om berekeningen mogelijk te maken, maar er moet ook nagedacht worden over de manier van berekening, de mathematisering. Als laatste wordt stilgestaan bij de validatie: is de berekende grootte aannemelijk, of is die veel te groot of te klein.

CONCEPTUALISATIE

Deze les is zo opgebouwd dat de leerlingen extra informatie hebben gekregen waar ze niks mee hoeven te doen. Op deze manier moet worden gekeken naar wat echt relevant is en wat overbodige informatie is. Verder moeten hier ook weer aannames gedaan worden over de hoeveelheid regenwater en de hoeveelheid afvoer van water. Zo wordt er bijvoorbeeld van uitgegaan dat het continu met dezelfde snelheid regent. Dat ook de afvoer met een constante snelheid gebeurt (en dus niet afhankelijk is van de hoeveelheid die al is gevallen).

MATHEMATISERING

Een wiskundig model opstellen bij de grootte van de waterberging komt uiteindelijk alleen uit op hoeveel water komt er op een dag bij en hoeveel gaat er weer weg. In de meest eenvoudige vorm wordt er uitgegaan van een constante hoeveelheid regen die valt en een constante hoeveelheid water dat weg kan stromen.

ANALYSE

Als we naar het eenvoudige model kijken zoals hierboven beschreven, naar de hoeveelheid water dat erbij komt en dat weer weggaat, dan geeft het verschil daartussen, de hoeveelheid water die opgeslagen moet worden.

INTERPRETATIE

Uit de oplossing volgt direct ook al de interpretatie. Hier kan nog wel verder gekeken worden naar de grootte van de berging, dus hoe breed, diep en lang hij moet zijn.

VALIDATIE

Bij de validatie kan nog eens extra stil gestaan worden bij de grootte van de berging. Heeft deze een dermate grootte dat het geloofwaardig is. Is het bijvoorbeeld groter dan een gemiddelde vijver, maar kleiner dan de hele provincie Zuid-Holland.

QUESTIONNAIRE

Door het verschil in type wetenschap tussen *science learning* en wiskunde, zijn niet alle vragen van de questionnaire (Hsiao-Lin Tuan, 2005) relevant voor de meting van de motivatie voor de wiskunde. Voor dit onderzoek heb ik de test in zijn geheel vertaald naar het Nederlands om vervolgens bepaalde onderdelen niet mee te nemen bij het trekken van conclusies. De Nederlandse vertaling is bijgevoegd in de bijlagen.

De test is uit 6 onderdelen opgebouwd, elk met een aantal vragen. Hieronder staan puntsgewijs de 6 onderdelen met daarbij kort welk onderdeel van de motivatie gemeten wordt:

1. Zelfeffectiviteit: het vertrouwen van een persoon in de eigen bekwaamheid om met succes invloed uit te oefenen op zijn of haar omgeving, bijvoorbeeld door een bepaalde taak te volbrengen of een probleem op te lossen.
2. Actieve leerstrategieën: strategieën die er voor zorgen dat het leren op een actieve manier gebeurt, met veel zintuigen tegelijk (lezen, horen, zien, zeggen en doen) zodat de stof beter blijft hangen.
3. Waarde van wiskunde: de toepasbaarheid en het nut van wiskunde.
4. Resultaatdoelstelling: wat is het doel van de leerling aan het einde van de rit, waarom worden de wiskundelessen gevolgd.
5. Prestatiedoelstelling: waar haal je het meeste voldoening uit als je bezig bent met wiskunde.
6. Stimulatie van de leeromgeving: wat is de reden geweest dat je hebt gekozen voor wiskunde.

Het laatste onderdeel is niet van toepassing op bovenbouwleerlingen uit de groep die ik ondervraagd heb, omdat de keuze voor wiskunde in zijn algemeenheid en wiskunde B in het bijzonder gekoppeld is aan het profiel en geen vrije keuze. Een aantal leerlingen gaf dan ook aan dat ze deze vraag niet goed konden beantwoorden. Bij de resultaten heb ik de antwoorden van deze vraag dan ook weggelaten.

Kijkend naar het onderwerp wiskundig modelleren, dan zou dit het meeste effect moeten hebben op onderdelen 2 en 3. Bij onderdeel 2 is er een extra leerstrategie die gebruikt kan worden, namelijk het doen van wiskundig onderzoek. Bij onderdeel 3 komt het nut van wiskunde extra naar boven. Bij deze twee onderdelen zijn echter ook een aantal vragen die te veel op het experimentele karakter van de exacte wetenschap zijn gebaseerd en die ik dus niet mee zal nemen. Bij onderdeel 2 gaat dit om de vragen 9 en 10 (respectievelijk *“Bij het leren van nieuwe wiskundige concepten koppel ik ze aan eerdere ervaringen”* en *“Als ik een wiskundig concept niet begrijp, ga ik op zoek naar relevante middelen die me erbij helpen”*). Bij onderdeel 3 gaat het om de vragen 16, 18 en 19 (respectievelijk *“Ik denk dat het leren van wiskunde belangrijk is omdat ik het kan gebruiken in het dagelijks leven”*, *“Ik denk dat het belangrijk is om te leren om problemen op te lossen bij wiskunde.”* en *“Ik denk dat het belangrijk is om deel te nemen aan onderzoeksactiviteiten binnen de wiskunde”*). Vraag 16 is een vraag die de moeilijkheid van dit onderzoek onderstreept. Bij deze vraag wordt er namelijk gekeken naar het gebruik in het dagelijks leven, iets waar wiskundig modelleren natuurlijk precies op ingaat. Wanneer je echter kijkt naar wiskunde in de breedte, naar wiskunde als fundamentele wetenschap, dan hoort deze vraag niet in de lijst thuis.

In het onderdeel Resultaten ga ik hier dieper op in.

GEVEN VAN DE LESSEN

Bij het geven van de lessen ga ik er van uit dat de leerlingen het beste in groepen kunnen werken. Op deze manier kunnen ze door te overleggen bedenken wat voor aannames gedaan moeten (of

kunnen) worden, welke wiskunde er wellicht bij komt kijken en wat voor sommen er opgelost kunnen worden. Daarnaast is het heel moeilijk om je eigen werk te valideren, als je in een groep werkt wordt dit makkelijker.

Per les blik ik terug op wat er goed ging in de les en wat er beter kon. De les die ik hier zelf uit leer kan ik dan in de volgende les toepassen. Hiermee zorg ik er voor dat de leerlingen een goed lesuur hebben en goed in aanraking komen met wiskundig modelleren.

LENGTE SCHAATSBAAN

De opbouw van de les over de lengte van de schaatsbaan was gebaseerd op het idee van een open curriculum: de leerlingen moesten zelf veel bedenken en werden redelijk “los” gelaten. Tijdens de les bleek al dat het een té open les werd. Gevolg hiervan was dat een flink aantal van de groepen ófwel geen flauw idee hadden van de vraag die ze moesten beantwoorden, ófwel de aannames deden dat je vier keer een stuk van 100 meter schaatst, zowel het rechte stuk, de beide bochten als het baan wisselen. In beide gevallen kostte het moeite om de groep op de goede weg te krijgen en om ze gemotiveerd te houden tot het eind.

Wat een bijzonder grappige bijkomstigheid was, was dat de vader van één van de leerlingen degene was die de baan opmat.

LENGTE LANDINGSBAAN

Vanwege de moeite die de groepen hadden met het oplossen van de eerste opdracht, is bij de tweede, derde en vierde opdracht de vraag meer in stukken gehakt, het zijn meer gesloten lessen geworden. Waarbij juist wel nadruk kwam te liggen op vragen wat ze nou aan het doen waren en of de aannames die gedaan konden worden ook mochten.

Bij de opdracht over de lengte van de landingsbaan in de film *Fast & Furious 6* stond het eerste kwartier op de planning om ook daadwerkelijk het fragment te gaan bekijken. Binnen enkele minuten ging echter het brandalarm. Toen iedereen weer binnen was om verder te gaan, waren er nog maar 20 minuten over. De rest van de les zijn we toen klassikaal bezig gegaan om te bedenken wat de oplossing van de opdracht zou kunnen zijn.

AFSTAND HORIZON

Om de groepen goed bezig te houden en de les niet te vrijblijvend te laten zijn, moest elke groep van één of meerdere vragen hun antwoorden op het bord zetten. Bij de les over de afstand tot de horizon, of in dit geval de afstand tot je een schip niet meer ziet, kwam dit erg goed uit de verf bij de eerste vraag. Hier werd gevraagd welke aannames je moest doen om het model een beetje behapbaar te maken. Verschillende groepen gaven verschillende antwoorden op deze vraag, waardoor er veel goede aannames gedaan werden en de hele klas stil stond bij de kracht van goede aannames. De uiteindelijke stap naar een algemeen model was een relatief eenvoudige waar elk groepje ook wel uit kwam. Leuk om te zien was de strijd tussen de groepen om als eerste het algemene model op het bord te hebben.

GROOTTE WATERBERGING

Bij de les over de grootte van de waterberging moest elke groep van hun antwoord op het bord zetten. Bij deze les werd achteraf gezien het beste gewerkt. Dat zal te maken hebben met de manier waarop de les is opgebouwd, dat de leerlingen beter wist wat ze te wachten stond en dat ik sneller in de gaten had wanneer groepen vastliepen of er even geen zin meer in hadden. Niet elke groep had uiteindelijk een antwoord, maar wel elke groep was er flink mee bezig geweest.

ALGEMEEN

De laatste twee lessen waren dermate opgebouwd dat de leerlingen echt wel een gevoel hebben gekregen wat wiskundig modelleren inhoudt, dit ondanks de lichte strubbelingen van de eerste 2 lessen (te open vraagstelling en het brandalarm dat afging). De verschillende stappen van de cyclus zijn meerdere keren voorbij gekomen waarbij er nadruk is gelegd op de verschillende elementen bij de verschillende lessen. Op deze manier hebben de leerlingen de onderdelen van de modeleercyclus onder de knie gekregen en weten ze goed hoe een wiskundig model opgebouwd wordt, wat je er mee kan en dat je altijd goed moet valideren. Op deze manier hebben de leerlingen geleerd op welke manier wiskunde daadwerkelijk in de praktijk naar voren komt en werd het meer dan de formele wiskunde uit de les.

RESULTATEN

De resultaten van de questionnaires zijn zowel op algemeen niveau als op detailniveau te beschouwen. Als eerste kijken we op algemeen niveau: wat is de motivatie vooraf, wat is hij achteraf en wat zijn de verschillen. Vervolgens kijken we op detailniveau of er verschil zit tussen de verschillende onderdelen.

ALGEMEEN NIVEAU

In onderstaande tabel staan de algemene resultaten van de questionnaires. In deze tabel staat de motivatie bij de controlegroep en de meetgroep uitgedrukt in een schaal van 1 t/m 5 waarbij 1 staat voor ongemotiveerd en 5 voor gemotiveerd. Ook staat er het verschil bij tussen de motivatie voorafgaand aan het onderzoek en na het onderzoek bij beide groepen en het verschil tussen de twee groepen voor het onderzoek en na het onderzoek.

	Controlegroep	Meetgroep	Vershil
Vooraf	3,751	3,721	-0,030
Achteraf	3,694	3,615	-0,079
Vershil	-0,057	-0,106	-0,049

Tabel 1: Algemene resultaten

Wat opvalt is dat de waarden allemaal dicht bij elkaar liggen. Als de uitkomsten van de questionnaire van de controlegroep met de meetgroep vergeleken worden, moet er ook gekeken worden naar de populatie van de groep en naar de verdeling van de antwoorden. Het verschil in motivatie vooraf bijvoorbeeld, levert de volgende tabel:

	Controlegroep	Meetgroep
Gemiddelde	3,751	3,721
Standaarddeviatie	0,899	0,971
Grootte	23	27

Tabel 2: Statistische gegevens vergelijking

Om iets significant te kunnen zeggen over de vergelijking, wordt het betrouwbaarheidsinterval berekend met bovenstaande waarden en een significantieniveau van 95%. Het betrouwbaarheidsinterval is in dit geval 0,376. Bij een kleiner verschil kunnen er geen significante conclusies getrokken worden. Het betrouwbaarheidsinterval is bij de verschillende vergelijkingen verschillend, omdat ook de standaarddeviatie verschillend is, en lag tussen de 0,250 en 0,376.

Alle verschillen liggen ruim onder het minimum van de betrouwbaarheidsintervallen. Er kan dus geen conclusie getrokken worden over verschillen tussen de groepen vooraf en tussen de groepen achteraf. Ook kan er geen conclusie getrokken worden over verschil binnen een groep voor of na de lessen. Wat verder opvalt is dat de motivatie bij beide de groepen hoog is. Leerlingen die dit profiel wilden kiezen moesten een bepaald minimumcijfer voor wiskunde hebben gehaald in het jaar hiervoor, en hebben dus al enige mate van aanleg voor wiskunde.

GEDETAILLEERD NIVEAU

In onderstaande tabel staan de toe- of afnames per groep weergegeven met daarachter het verschil tussen de groepen. Het getal linksboven zegt dat de motivatie bij de controlegroep voor het onderzoek 0,014 punten hoger lag dan na het onderzoek. Het getal er direct rechts naast geeft aan dat de motivatie bij de meetgroep na de lessenserie 0,192 punten lager lag dan voor de lessenserie.

	Controlegroep	Meetgroep	Vershil
Zelfeffectiviteit	-0,014	-0,192	-0,178
Actieve leerstrategieën	-0,079	-0,077	0,002
Waarde van wiskunde	-0,048	0,047	0,095
Resultaatdoelstelling	0,086	-0,019	-0,105
Prestatiedoelstelling	-0,208	-0,152	0,056

Tabel 3: Verschillen bij gedetailleerde resultaten

Als we kijken naar het onderdeel *Waarde van wiskunde*, één van de onderdelen waarbij er een verschil zou moeten ontstaan tussen de groepen, zien we inderdaad een positief getal. Dit houdt in dat de meetgroep na verloop van tijd meer waarde ziet in de wiskunde dan de controlegroep. Het getal is echter nog dermate klein dat het verschil niet significant is.

WISKUNDE IN HET DAGELIJKS LEVEN

Zoals gemeld in de paragraaf over de questionnaire, is onder andere vraag 16: *“Ik denk dat het leren van wiskunde belangrijk is omdat ik het kan gebruiken in het dagelijks leven”* weggelaten. Dit omdat deze vraag stuurt naar de directe toepasbaarheid van wiskunde, wat slechts een zeer klein gebied is. Dat terwijl dit onderzoek gaat over de wiskunde in zijn algemeenheid. De resultaten van onderdeel 16 zijn wel interessant om te vermelden.

	Controlegroep	Meetgroep	Vershil
Vooraf	3,190	3,148	-0,042
Achteraf	2,619	3,423	0,804
Vershil	-0,571	0,275	0,846

Tabel 4: Verschillen bij vraag 16

Wat opvalt bij de verschillen tussen de groepen, is dat de meetgroep inderdaad doorheeft dat wiskunde ook daadwerkelijk in het dagelijks leven voorkomt. Met name echter ook dat dit besef bij de controlegroep juist veel lager is geworden. Het betrouwbaarheidsinterval bij deze vergelijking is 0,391. Hiermee ontstaat een significant verschil tussen beide groepen die het grootst is van alle verschillende vragen.

CONCLUSIE EN DISCUSSIE

CONCLUSIE

MOTIVATIE VOOR WISKUNDE OP HET VWO IN DE BOVENBOUW

De motivatie voor wiskunde van de onderzochte groep leerlingen was vanaf het begin al hoog. Het ging hier om leerlingen die allemaal voor meerdere betavakken hadden gekozen en dus al enige affiniteit met wiskunde hadden. Andere groepen leerlingen die andere profielkeuzes hadden gemaakt zijn niet bevraagd, dus dit onderzoek geeft geen inzicht in de motivatie voor wiskunde in de hele breedte op het vwo.

LESSEN WISKUNDIG MODELLEREN

De essentie van lessen wiskundig modelleren is de modeleercyclus. Bij elk onderwerp komen bepaalde fases meer of minder aan de orde, maar de cyclus komt elke les terug. Er waren genoeg onderwerpen te vinden waar een les wiskundig modelleren over gegeven kon worden. Wel is het zo dat wanneer je echt de diepte in wilt gaan, één les erg kort is. De manier van werken die hoort bij wiskundig modelleren, zorgt er voor dat tijdens de les het beste gewerkt kan worden in groepjes. Hierbij moet goed in de gaten gehouden blijven worden dat de les niet een te open karakter krijgt en dat leerlingen niet meer weten wat er van ze gevraagd en verwacht wordt.

Het uiteindelijk vinden van stof voor wiskundig modelleren viel alleszins mee. Er zijn genoeg onderwerpen die aansluiten bij 15 jarige jongens en meiden waar veel wiskundig te modelleren valt.

MOTIVATIE VERHOGENDE WERKING VAN WISKUNDIG MODELLEREN

Bij de onderzochte groep leerlingen is geen significant verschil gevonden in toe of afname van motivatie tussen de groepen met en zonder lessen in wiskundig modelleren. Bij beide groepen nam de motivatie af en bij beide groepen was de afname ongeveer gelijk. Ook als we kijken naar de gedetailleerde resultaten dan zijn de verschillen in toe- of afname over de tijd bijna hetzelfde. Alleen op de vraag of wiskunde in het dagelijks leven bruikbaar is, was er een verschil merkbaar tussen beide groepen. Hierbij vond de groep met wiskundig modelleren in grotere mate dat wiskunde belangrijk is om te leren omdat het gebruikt wordt in het dagelijks leven dan de groep zonder wiskundig modelleren. Dit resultaat alleen is echter te weinig om iets te kunnen zeggen over de motivatie voor wiskunde in het algemeen.

Niet volledig motivatie verhogend, maar wel goed om te noemen, is dat de meetgroep veel beter doorhad dat wiskunde in het dagelijks leven voorkomt.

DISCUSSIE

Er zijn een aantal zaken waar ik tegenaan liep tijdens en na het onderzoek. Als eerste waren beide groepen nieuw gevormd. Veel van de leerlingen kenden elkaar nog niet, wat er voor zorgde dat vooral de eerste twee lessen extra rumoerig waren omdat de leerlingen elkaar nog moesten leren kennen en door moesten hebben hoe ze goed konden samenwerken. Daarnaast vertelden een aantal leerlingen dat dit 4^e uur wiskunde in de week (de lessen wiskundig modelleren werden op vrijdag aan het eind van de ochtend gegeven) wel wat veel van het goede was. Ze werden een beetje wiskunde murw.

De beide groepen waren leerlingen die voor een natuurprofiel met veel betavakken hebben gekozen en dus hoogstwaarschijnlijk al enige affiniteit hadden voor wiskunde en dus ook een behoorlijk hoge motivatie. Het zou interessant kunnen zijn om groepen te bekijken die juist een lagere motivatie

hebben, zoals een 4vwo wiskunde A klas, of een 4 havo wiskunde A klas. Bij groepen met een lagere motivatie kan het geven van de lessen voor een groter effect zorgen en kan de motivatie wellicht wel significant verbeteren. Dit heeft dan hopelijk als gevolg dat ook de resultaten van de leerlingen zullen verbeteren.

REFERENTIES

- Bonotto. (2007). How to Replace Word Problems with Activities of Realistic Mathematical Modelling *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 185-192).
- cTWO. (2007). *Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Utrecht: PAKWEG Retrieved from <http://www.fi.uu.nl/ctwo/publicaties/docs/Rijksaanbetekenisweb.pdf>.
- Exacte wetenschap. (n.d.). *Wikipedia*. Retrieved from https://nl.wikipedia.org/wiki/Exacte_wetenschap
- Formele wetenschap. (n.d.). *Wikipedia*. Retrieved from https://nl.wikipedia.org/wiki/Formele_wetenschap
- Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 155 - 177.
- Hsiao-Lin Tuan, C.-C. C. a. S.-H. S. (2005). The development of a questionnaire to measure students' motivation towards science learning. *International Journal of Science Education*, 27(6), 16.
- Paul Drijvers, A. v. S., Bert Zwaneveld. (2012). *Handboek Wiskundendidactiek* (Vol. 4). Amsterdam: Epsilon.
- Schwarzkopf, R. (2007). Elementary Modelling in Mathematics Lessons: The Interplay Between "Real-World" Knowledge and "Mathematical Structures". In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICM Study* (pp. 209-216). Boston, MA: Springer US.

BIJLAGEN

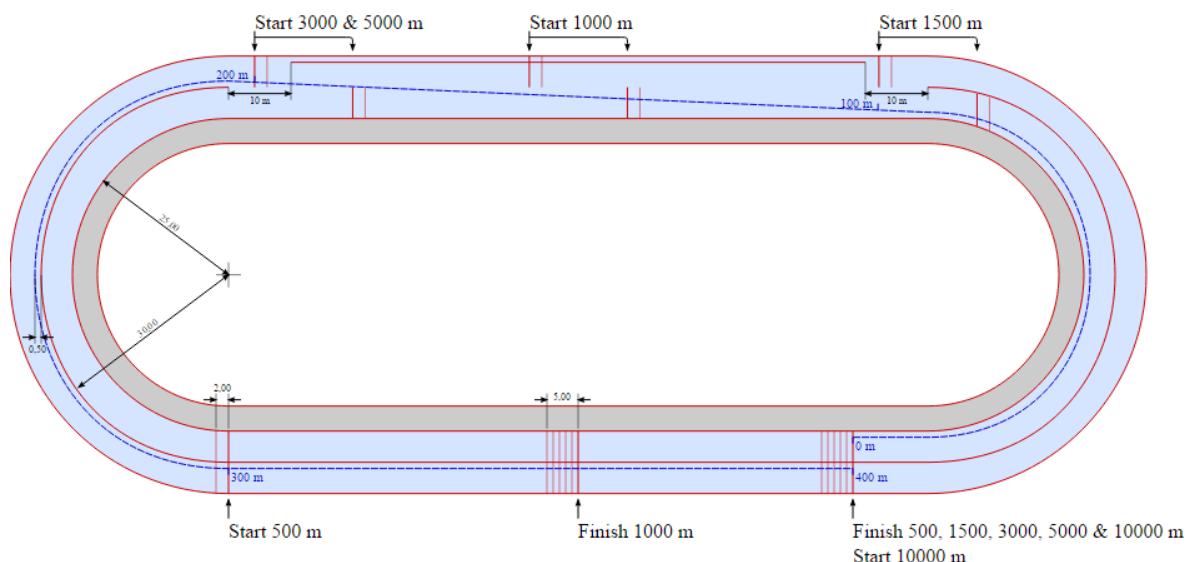
LES 1: LENGTE SCHAATSBAAN

INLEIDING

Tijdens de Olympische Winterspelen van 2014 maakte de NOS een [filmpje](#) over de ploegenachtervolging. In dit filmpje komt naar voren dat bij een relatief nieuw onderdeel van het schaatsen, de ploegenachtervolging, er een afstand geschaatst moet worden waarvan niemand precies weet hoe groot hij is. Sterker nog, de NOS heeft iemand gevonden die de baan op gaat meten. In een sport waarin tegenwoordig zelfs op duizendsten van seconden wedstrijden worden beslist en wereldrecords worden gereden, is het van groot belang dat de afstand die moet worden gereden ook nauwkeurig bepaald is. Om er achter te komen of er geen meetfouten zijn opgetreden, worden jullie gevraagd om te berekenen hoe ver er geschaatst moet worden bij één rondje ploegenachtervolging.

Ga na wat het verschil is tussen jullie berekening en de meting van de NOS. Probeer dit verschil te verklaren.

GEGEVENS



In bovenstaand plaatje zijn de maten van een 400 meter baan gegeven. Als je een “normaal” rondje schaatst, dan volg je de blauwe stippellijn. Je start dan in de binnenbaan, rijdt de binnenbocht steekt schuin over, rijdt de buitenbocht en rijdt rechtdoor tot de plek waar je ook bent begonnen, maar dan in de andere baan. Als je dit rondje rijdt, ben je een stukje na de binnenbocht op 100 meter, iets voor de volgende bocht zit je op 200 meter, na de 2^e bocht heb je 300 meter gereden en als je weer bij het beginpunt bent, heb je 400 meter gereden.

Let er bij je berekening op, dat de lijn die gebruikt wordt 50 centimeter buiten de blokjes ligt.

UITWERKING

Het is handig om de baan op te delen in 4 segmenten, elk met hun eigen lengte: l_i , l_d , l_o en l_s : lengte van respectievelijk binnenbocht (*inside bend*), diagonaal, buitenbocht (*outside bend*) en rechte (*straight*).

De 4 lengtes bij elkaar opgeteld moet 400 zijn (totale afstand van één rondje). We weten dat de binnenbocht een lengte heeft van: $l_i = \pi r_i = 25.5\pi$. Voor de buitenbocht geldt: $l_o = \pi r_o = 30.5\pi$. Dus we weten nu ook dat moet gelden: $l_s + l_d = 400 - 56\pi$. Met l_s en l_d kan een driehoek gemaakt worden, waarbij de derde zijde een lengte heeft van 5 (het verschil tussen de binnen en de buitenbocht). De stelling van Pythagoras leert ons dan: $l_s^2 + 5^2 = l_d^2$. We hebben nu 2 vergelijkingen met 2 onbekenden: $\begin{cases} l_s + l_d = 400 - 56\pi \\ l_s^2 + 5^2 = l_d^2 \end{cases}$. Dit oplossen levert: $l_s = \frac{(400-56\pi)^2-25}{2(400-56\pi)}$.

De totale af te leggen afstand is nu: $2l_s + 2l_i = \frac{(400-56\pi)^2-25}{(400-56\pi)} + 51\pi \approx 384,18m$.

Dit scheelt ruim 3 meter met de meting van de NOS. Een verschil zou kunnen zijn dat de ijsbaan toch net iets andere maten hanteert dan wat er aangegeven staat op Wikipedia. Ook kan een deel verklaart worden door meetfouten die ontstaan door niet helemaal rechtdoor te lopen maar een beetje te zigzaggen.

LES 2: LENGTE LANDINGSBAAN

FAST AND FURIOUS 6

In de film *Fast & Furious 6* is een fragment te zien van een vliegtuig die een landing maakt op een landingsbaan. In deze les wiskundig modelleren gaan we een schatting maken over de lengte van deze landingsbaan. Hieronder staan een aantal vragen waarmee de schatting onderbouwd kan worden. Op het bord komen steeds meer gegevens te staan waarmee de lengte steeds precies berekend kan worden en de vragen beter beantwoord kunnen worden.

1. Met welke natuurkundige formule zou je de lengte kunnen berekenen in deze scene?
2. Welke gegevens zou je willen hebben?
3. Maak een inschatting van de lengte van de landingsbaan met de eerste gegevens op het bord.

Nu we een eerste schatting hebben van de lengte van de landingsbaan, gaan we kijken of de schatting exacter en beter onderbouwd kan worden. Hiervoor delen we de scene op in stukken waarbij elk onderdeel van de scene wat extra informatie krijgt. Deze informatie kan je weer zien op het bord.

4. Bedenk per onderdeel van de scene:
 - a. Hoe hard reden ze?
 - b. Hoeveel overlap is er tussen shots?
5. Bereken per onderdeel de afgelegde afstand.
6. Bereken de totale lengte van de landingsbaan.

Nu we de schatting hebben verfijnd, kunnen we deze vergelijken met “echte” gegevens.

7. Hoe ver woont iedereen in je groep van school?
8. Hoe lang zouden de landingsbanen bij Schiphol zijn?
9. Hoe geloofwaardig is de film...?

LES 3: AFSTAND HORIZON

AFSTAND TOT DE HORIZON

Stel je voor: je zat midden op een mooie cruise op de Queen Mary II, als je opeens overboord slaat (gelukkig wel met reddingsvest) en het schip vaart door. Hoeveel tijd heb je om het schip te waarschuwen, voordat het schip uit zicht is?

1. Waar is deze tijd allemaal van afhankelijk? Bedenk met je groepje tenminste 5 zaken die van belang zijn om te bepalen hoeveel tijd je hebt.

Een aantal zaken die meespelen kan je meenemen in de berekening, voor een aantal andere zaken is het handig om een aanname te doen. Twee aannames die we doen zijn: De zee is spiegelglad en de aarde is perfect rond.

Met deze eerste twee aannames kan je een tekening maken die je helpt bij het opstellen van een berekening.

2. Maak een schets (vooral niet op schaal!) waarin je het middelpunt van de aarde, jezelf en het schip op de aarde tekent als je het schip nog net kan zien.

Gebruik in verder in de vraag voor de straal van de aarde: 6365 km, de hoogte van het schip: 72 meter en de gemiddelde snelheid van het schip 56 km/h.

3. Wat is de afstand tussen jou en het schip als je haar net niet meer ziet? Welke berekening heb je hiervoor gebruikt?
4. Hoe lang duurde het voordat het schip deze afstand had afgelegd?

Gelukkig draait de Queen Mary II zich op tijd om en vist je weer uit het water. Een jaar later zit je weer op zee, maar nu een veel kleiner schip. Deze heeft een hoogte van 40 meter en een snelheid van 66 km/h. Opnieuw val je overboord.

5. Hoe lang duurt het nu voordat je het schip niet meer ziet?

Terwijl je in zee ligt, heb je rustig de tijd om na te denken over een functie die afhangt van de hoogte en de snelheid van het schip en die de tijd geeft voordat het schip niet meer zichtbaar is.

6. Geef deze functie.

LES 4: GROOTTE WATERBERGING

GROOTTE VAN EEN WATERBERGING

Delen van Nederland liggen onder zeeniveau en deze gebieden moeten constant droog gehouden worden door het water dat naar deze gebieden stroomt weg te pompen. De gemalen die hier voor moeten zorgen hebben capaciteit genoeg om het water weg te pompen naar een kanaal of rivier. Wanneer het droog is, of niet al te hard heeft geregend kunnen deze kanalen en rivieren het overvloedige water prima afvoeren. Als er veel regen binnen korte tijd valt, zitten de waterwegen al zo vol dat er niet veel extra water afgevoerd kan worden. Met de opwarming van de aarde lijken er meer dagen aan te komen waarbij er binnen één dag heel veel regen valt. Om er toch voor te zorgen dat ook op deze dagen geen volledige woonwijken blank komen te staan, zijn er gebieden aangewezen waar tijdelijk water naar toe gepompt kan worden deze gebieden noemt men waterbergingen. Dit water kan dan op een later moment naar de waterwegen afgevoerd worden.

De gemeente Delft wil een waterberging aan laten leggen zodat ook bij de dagen dat er veel regen valt, kelders niet vollopen. Hiervoor gebruiken ze de meteorologische gegevens van de maand juni. Het kanaal waar al het water door afgevoerd moet worden is de Deltse Schie. Er zijn gegevens opgevraagd over de hoeveelheid water die de Delftse Schie afvoert (het zogenaamde debiet). Hierbij zijn gegevens bekend over zowel de standaard doorvoer, als hoeveel er maximaal afgevoerd kan worden.

Er zijn ook gegevens opgevraagd over de snelheid waarmee water de grond in kan lopen (de zogenaamde infiltratie). Deze gegevens bevatten zowel informatie over de infiltratiesnelheid, als over de maximum infiltratie.

In de tabellen hieronder staan de opgevraagde gegevens bij elkaar.

Bereken wat de capaciteit van de waterberging moet zijn zodat ook bij dagen dat veel regen valt de kelders niet vollopen.

GEGEVENS

Oppervlakte Delft	24,08 km ²
Debiet Delftse Schie	8,5 m ³ /s
Maximum debiet	15 m ³ /s
Infiltratie snelheid	3 mm/h
Maximum infiltratie	15 mm

In juni zijn de volgende meteorologische gegevens bekend voor Delft:

Datum	Tmax	Tmin	Neerslag	Max Windstoot
2016-06-30	19.0 °C	14.3 °C	13.0 mm	33.8 km/u
2016-06-29	20.3 °C	13.6 °C	1.4 mm	38.9 km/u
2016-06-28	22.2 °C	12.0 °C	4.0 mm	29.6 km/u
2016-06-27	18.1 °C	14.0 °C	4.0 mm	32.2 km/u
2016-06-26	18.6 °C	13.1 °C	0.0 mm	25.9 km/u
2016-06-25	19.9 °C	13.1 °C	0.0 mm	19.3 km/u
2016-06-24	21.3 °C	15.6 °C	0.0 mm	22.5 km/u
2016-06-23	27.4 °C	18.0 °C	40.0 mm	42.6 km/u
2016-06-22	27.7 °C	13.1 °C	0.2 mm	22.5 km/u

2016-06-21	19.6 °C	14.2 °C	1.6 mm	22.5 km/u
2016-06-20	16.8 °C	14.5 °C	19.8 mm	38.6 km/u
2016-06-19	20.8 °C	11.7 °C	0.0 mm	24.1 km/u
2016-06-18	15.4 °C	12.1 °C	3.4 mm	38.9 km/u
2016-06-17	19.0 °C	13.1 °C	7.2 mm	18.5 km/u
2016-06-16	20.2 °C	11.8 °C	10.2 mm	19.3 km/u
2016-06-15	19.2 °C	12.0 °C	0.2 mm	22.5 km/u
2016-06-14	18.6 °C	13.8 °C	12.2 mm	35.4 km/u
2016-06-13	16.6 °C	14.9 °C	3.0 mm	27.8 km/u
2016-06-12	20.7 °C	14.9 °C	4.2 mm	24.1 km/u
2016-06-11	20.3 °C	12.9 °C	5.2 mm	16.7 km/u
2016-06-10	21.0 °C	10.6 °C	0.0 mm	19.3 km/u
2016-06-09	17.6 °C	12.6 °C	0.0 mm	25.9 km/u
2016-06-08	19.8 °C	13.3 °C	0.0 mm	32.2 km/u
2016-06-07	26.2 °C	16.5 °C	0.0 mm	25.9 km/u
2016-06-06	24.6 °C	12.2 °C	0.0 mm	19.3 km/u
2016-06-05	24.3 °C	14.6 °C	0.0 mm	27.8 km/u
2016-06-04	25.5 °C	12.8 °C	13.2 mm	33.8 km/u
2016-06-03	18.3 °C	12.1 °C	0.2 mm	24.1 km/u
2016-06-02	14.0 °C	8.3 °C	0.0 mm	51.8 km/u
2016-06-01	***	***	***	***

QUESTIONNAIRE

VRAGENLIJST WISKUNDELESSEN

Deze vragenlijst bevat uitspraken over wat jij vindt van wiskundelessen. Je zal worden gevraagd om aan te geven in hoeverre je het eens bent met een aantal uitspraken. Er zijn geen goede of foute antwoorden. Het gaat om je mening. Ga na in hoeverre elke uitspraak overeen komt met jouw mening over wiskundelessen.

Omcirkel

1. als je het volledig oneens bent met de uitspraak
2. als je het oneens bent met de uitspraak
3. als je geen mening hebt over de uitspraak
4. als je het eens bent met de uitspraak
5. als je het volledig eens bent met de uitspraak

Zorg ervoor dat je een antwoord geeft op elke vraag. Als je van gedachten verandert over een antwoord, streep het door en omcirkel een ander antwoord. Sommige uitspraken in deze vragenlijst zijn redelijk vergelijkbaar met andere uitspraken. Maak je hier geen zorgen over. Geef gewoon je mening over alle uitspraken.

Naam:

A. ZELFEFFECTIVITEIT	VOLLEDIG ONEENS	ONEENS	GEEN MENING	EENS	VOLLEDIG EENS
1. Ongeacht of de wiskunde makkelijk of moeilijk is ga ik er van uit dat ik het ga begrijpen.	1	2	3	4	5
2. Ik voel me onzeker over het begrijpen van moeilijke wiskundige concepten.	1	2	3	4	5
3. Ik ga er van uit dat ik de wiskunde toetsen goed ga maken.	1	2	3	4	5
4. Ongeacht hoeveel moeite ik ervoor doe, ik zal de wiskunde niet gaan begrijpen.	1	2	3	4	5
5. Als wiskundesommen te moeilijk zijn geef ik op of maak ik alleen de makkelijke onderdelen.	1	2	3	4	5
6. Bij wiskundesommen vraag ik liever anderen om het antwoord dan zelf het antwoord te bedenken.	1	2	3	4	5
7. Als ik de wiskundestof moeilijk vind, ga ik geen moeite doen om het te leren.	1	2	3	4	5

B.	ACTIEVE LEER STRATEGIËN	VOLLEDIG ONEENS	ONEENS	GEEN MENING	EENS	VOLLEDIG EENS
8.	Bij het leren van nieuwe wiskundige concepten, probeer ik ze te begrijpen.	1	2	3	4	5
9.	Bij het leren van nieuwe wiskundige concepten koppel ik ze aan eerdere ervaringen.	1	2	3	4	5
10.	Als ik een wiskundig concept niet begrijp, ga ik op zoek naar relevante middelen die me erbij helpen.	1	2	3	4	5
11.	Als ik een wiskundig concept niet begrijp, bespreek ik het met de leraar of met mede leerlingen om het concept te verhelderen.	1	2	3	4	5
12.	Tijdens het leren, probeer ik verbanden te leggen tussen de verschillende wiskundige concepten.	1	2	3	4	5
13.	Als ik een fout maak, probeer ik te achterhalen hoe dat komt.	1	2	3	4	5
14.	Als ik wiskundige concepten tegenkom die ik niet begrijp, probeer ik toch te leren.	1	2	3	4	5
15.	Als nieuwe wiskundige concepten conflicteren met mijn bestaande begrip, probeer ik te achterhalen hoe dat komt.	1	2	3	4	5

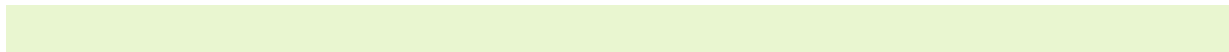
C.	WAARDE VAN WISKUNDE	VOLLEDIG ONEENS	ONEENS	GEEN MENING	EENS	VOLLEDIG EENS
16.	Ik denk dat het leren van wiskunde belangrijk is omdat ik het kan gebruiken in het dagelijks leven	1	2	3	4	5
17.	Ik denk dat het leren van wiskunde belangrijk is omdat het mijn denken stimuleert.	1	2	3	4	5
18.	Ik denk dat het belangrijk is om te leren om problemen op te lossen bij wiskunde.	1	2	3	4	5
19.	Ik denk dat het belangrijk is om deel te nemen aan onderzoeksactiviteiten binnen de wiskunde	1	2	3	4	5

20.	Het is belangrijk dat ik de kans krijg om mijn eigen nieuwsgierigheid te bevredigen bij het leren van wiskunde	1	2	3	4	5
-----	--	---	---	---	---	---

D.	RESULTAAT DOELSTELLING	VOLLEDIG ONEENS	ONEENS	GEEN MENING	EENS	VOLLEDIG EENS
21.	Ik volg wiskundelessen om een goed cijfer te krijgen.	1	2	3	4	5
22.	Ik volg wiskundelessen om beter te zijn dan mede leerlingen.	1	2	3	4	5
23.	Ik volg wiskundelessen zodat mede leerlingen denken dat ik slim ben.	1	2	3	4	5
24.	Ik volg wiskundelessen zodat de docent aandacht aan mij besteedt.	1	2	3	4	5

E.	PRESTATIE DOELSTELLING	VOLLEDIG ONEENS	ONEENS	GEEN MENING	EENS	VOLLEDIG EENS
25.	Bij het vak wiskunde voel ik me het meest voldaan als ik een goede score bij een toets haal.	1	2	3	4	5
26.	Ik voel me het meest voldaan als ik vertrouwen heb in een specifiek onderdeel van de wiskunde.	1	2	3	4	5
27.	Bij het vak wiskunde voel ik me het meest voldaan als ik in staat ben om een moeilijk probleem op te lossen.	1	2	3	4	5
28.	Bij het vak wiskunde voel ik met het meest voldaan als de leraar mijn ideeën erkend.	1	2	3	4	5
29.	Bij het vak wiskunde voel ik met het meest voldaan als mede leerlingen mijn ideeën erkennen.	1	2	3	4	5

F.	STIMULATIE VAN DE LEEROMGEVING	VOLLEDIG ONEENS	ONEENS	GEEN MENING	EENS	VOLLEDIG EENS
30.	Ik heb wiskunde gekozen omdat het vak boeiend en veranderlijk is.	1	2	3	4	5
31.	Ik heb wiskunde gekozen omdat de leraar gebruik maakt van een verscheidenheid aan werkvormen.	1	2	3	4	5
32.	Ik heb wiskunde gekozen omdat de leraar niet veel druk op me zet.	1	2	3	4	5
33.	Ik heb wiskunde gekozen omdat de leraar aandacht aan mij besteedt.	1	2	3	4	5
34.	Ik heb wiskunde gekozen omdat het een uitdaging is.	1	2	3	4	5
35.	Ik heb wiskunde gekozen omdat leerlingen betrokken zijn bij discussies.	1	2	3	4	5



BEREKENINGEN SIGNIFICANTIE

INLEIDING

Dit document bespreekt op welke manier gekeken is in hoeverre de verschillen tussen de groepen statistisch significant waren. Hiervoor wordt de data gebruikt die te vinden is in het Excel bestand *Uitkomsten questionnaire.xlsx*.

DATA

Als eerste wordt gekeken naar de verschillen in motivatie voorafgaand aan het onderzoek tussen de twee groepen. Hierbij wordt gekeken naar het gemiddelde en naar de standaarddeviatie. De waarden hiervan staan in de volgende tabel.

	Controlegroep	Meetgroep
Gemiddelde	3,751	3,721
Standaarddeviatie	0,899	0,971
Grootte	23	27

Voor de vergelijking wordt gebruik gemaakt van de optie binnen Excel om het betrouwbaarheidsinterval van een gemiddelde waarde voor de elementen van een populatie met de Student T-verdeling te berekenen (de optie *Vertrouwelijkheid.T*). Bij een standaarddeviatie van $1,323 \left(\sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_M^2} \right)$, een significantieniveau van 95%, en een steekproefgrootte van 50 (23 en 27 respondenten) kwam er een betrouwbaarheidsinterval uit van 0,376. Bij een kleiner verschil kunnen er geen significante conclusies getrokken worden. Aangezien het verschil slechts 0,030 is, kan hier geen conclusie getrokken worden. Ook bij het vergelijken van de gedetailleerde resultaten is het betrouwbaarheidsinterval uitgerekend en de verschillen waren telkens kleiner dan het betrouwbaarheidsinterval.