Restoring the files

Correcting and expanding the proofs

Daniël Schut

15 maart 2017

1 Introductie

Deze opdracht is geïnspireerd op een artikel van Antoulas, Model reduction of large-scale systems by least squares [1]. Nadat ik dat artikel had gelezen, bleven er enkele vragen, rond de bewijsvoering van een aantal stellingen, over. Na dit beter onderzocht te hebben, bleken een aantal bewijzen niet te kloppen. Daarom presenteer ik in dit verslag nieuwe bewijzen voor een aantal van de stellingen die in dat artikel aan de orde komen. Een aantal van de wel kloppende stellingen en bewijzen heb ik overgenomen uit [1], zodat de lijn duidelijk blijft. In dit verslag houd ik me bezig met lineaire tijdsinvariante systemen in discrete tijd, waarvan de toestandsrepresentatie is:

$$\Sigma : \begin{cases} x_{k+1} = A\ x_k + b\ u_k \\ y_k = c\ x_k + d\ u_k \end{cases} .$$

In het vervolg zal ik het bovenstaande systeem beschrijven als een matrix:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} A & b \\ c & d \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Hierin geldt dat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c^T \in \mathbb{R}^n$ en $d \in \mathbb{R}$. Ik houd me alleen maar bezig met systemen met 1 input en 1 output (SISO). Het artikel van Antoulas heeft als doel om gegeven het bovenstaande hoge orde systeem een gereduceerde orde systeem Σ_{LS} te vinden, van orde r, waarbij geldt dat: $r \ll n$. Dit systeem Σ_{LS} moet voldoen aan de volgende 3 eigenschappen:

1. De benaderingsfout $\|y - y_{LS}\|$ is klein en er bestaat een globale afschatting voor de fout.
2. Systeemeigenschappen, zoals stabiliteit, blijven behouden.
3. De procedure is efficiënt qua rekencapaciteit.

Hiervoor construeert hij met behulp van een projectie de matrices $V \in \mathbb{R}^{n\times r}$ en $Z \in \mathbb{R}^{n\times r}$ met $Z^T V = I_r$. Dit gereduceerde systeem Σ_{LS} wordt alsvolgt gedefinieerd in de matrixvorm:

$$\Sigma_{LS} = \begin{bmatrix} A_{LS} & b_{LS} \\ c_{LS} & d_{LS} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

met

$$\begin{aligned} A_{LS} &= Z^T A V \\ b_{LS} &= Z^T b \\ c_{LS} &= cV \\ d_{LS} &= d. \end{aligned} \tag{3}$$

De afkorting 'LS' staat hier voor de 'Least Squares' benadering oftewel de kleinste kwadraten benadering. De afmetingen zijn dan dus: $A_{LS} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $b_{LS} \in \mathbb{R}^r$, $c_{LS}^T \in \mathbb{R}^r$ en $d_{LS} \in \mathbb{R}$. We zullen aannemen dat het hoge orde systeem Σ in (1) asymptotisch stabiel en minimaal is, oftewel, de paren (A, b) en (c, A) zijn respectievelijk bereikbaar en observeerbaar.

2 Constructie van Σ_{LS}

Om te bekijken hoe Antoulas het gereduceerde systeem (2) construeert, geef ik eerst wat definities. De Hankelmatrix $\mathscr{H}$ is gedefinieerd als:

$$\mathscr{H} := \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots \\ \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \cdots \\ \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{4}$$

met

$$\eta_i = cA^{i-1}b, \tag{5}$$

wat de i'de Markov parameter wordt genoemd. We definiëren $\mathscr{R}$ als de oneindige bereikbaarheidsmatrix:

$$\mathscr{R} := [b \ Ab \ \cdots \ A^{r-1}b \ \cdots]. \tag{6}$$

We definiëren de oneindige observeerbaarheidsmatrix $\mathscr{O}$ als:

$$\mathscr{O} := \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{r-1} \\ \vdots \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Vanuit de vergelijkingen (4), (6) en (7) geldt:

$$\mathscr{H} = \mathscr{O}\mathscr{R}. \tag{8}$$

De Hankelmatrix van orde r, $\mathscr{H}_r$, is als volgt gedefinieerd:

$$\mathscr{H}_r := \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_r \\ \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_r & \eta_{r+1} & \cdots & \eta_{2r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Omdat het systeem minimaal is, heeft $\mathscr{H}_r$ volle rang, voor $r \leq n$. De $(r+1)$'ste kolom uit $\mathscr{H}$ definiëren we als:

$$\mathbf{h}_{r+1} := \begin{bmatrix} \eta_{r+1} \\ \eta_{r+2} \\ \vdots \\ \eta_{2r} \\ \vdots \end{bmatrix}. \tag{10}$$

We definiëren $\mathscr{R}_r$ als de bereikbaarheidsmatrix van orde r:

$$\mathscr{R}_r := [b \ Ab \ \cdots \ A^{r-1}b]. \tag{11}$$

Vanuit de vergelijkingen (8), (9) en (11) volgt:

$$\mathscr{H}_r = \mathscr{H}\begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} = \mathscr{O}\mathscr{R}\begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathscr{H}_r = \mathscr{O}\mathscr{R}_r$$

en vanuit de vergelijkingen (8) en (10) volgt:

$$\mathbf{h}_{r+1} = \mathscr{H}\vec{e}_{r+1} = \mathscr{O}\mathscr{R}\vec{e}_{r+1} \Rightarrow \mathbf{h}_{r+1} = \mathscr{O}A^r b,$$

waarbij $\vec{e}_{r+1}$ de $(r+1)$ste eenheidsvector is. Het is een bekend gegeven dat, onder de aanname dat het systeem stabiel is, in discrete tijd de observeerbaarheidsgramiaan $\mathscr{Q}$ gedefinieerd is als:

$$\mathscr{Q} = \mathscr{O}^T\mathscr{O}. \tag{12}$$

De observeerbaarheidsgrammiaan is ook de oplossing van de volgende vergelijking:

$$A^T\mathscr{Q}A + c^Tc = \mathscr{Q}. \tag{13}$$

Als we nu de kleinste kwadraten benadering van de $(r+1)$ste kolom $\mathbf{h}_{r+1}$ van $\mathscr{H}$ nemen over de voorgaande r kolommen, dus over $\mathscr{H}_r$, dan zoeken we naar de waarde van $\mathbf{x}_{LS}$ zodat $\mathscr{H}_r\mathbf{x}_{LS} - \mathbf{h}_{r+1}$ minimaal is, oftewel:

$$\min_{\mathbf{x}_{LS}} \|\mathscr{H}_r\mathbf{x}_{LS} - \mathbf{h}_{r+1}\|.$$

In het boek Linear Algebra [2] wordt in theorem 6.12 (p. 362) bewezen dat de optimale $\mathbf{x}_{LS}$ uniek gegeven wordt door:

$$\mathbf{x}_{LS} = (\mathscr{H}_r^T\mathscr{H}_r)^{-1}\mathscr{H}_r^T\mathbf{h}_{r+1}.$$

Met behulp van de vergelijkingen (9) en (10) krijgen we dan:

$$\mathbf{x}_{LS} = (\mathscr{R}_r^T\mathscr{O}^T\mathscr{O}\mathscr{R}_r)^{-1}\mathscr{R}_r^T\mathscr{O}^T\mathscr{O}A^r b,$$

hetgeen we met behulp van vergelijking (12) kunnen schrijven als:

$$\mathbf{x}_{LS} = (\mathscr{R}_r^T\mathscr{Q}\mathscr{R}_r)^{-1}\mathscr{R}_r^T\mathscr{Q}A^r b.$$

Antoulas stelt nu in vergelijking 3.5 van [1], op pagina 299 voor om het gereduceerde model Σ_{LS} (2) te maken met

$$Z^T = (\mathscr{R}_r^T\mathscr{Q}\mathscr{R}_r)^{-1}\mathscr{R}_r^T\mathscr{Q} \text{ en} \tag{14}$$

$$V = \mathscr{R}_r. \tag{15}$$

Voor deze keuze van Z^T en V hebben we:

$$Z^TV = (\mathscr{R}_r^T\mathscr{Q}\mathscr{R}_r)^{-1}\mathscr{R}_r^T\mathscr{Q}\mathscr{R}_r = I_r. \tag{16}$$

Ik zal proberen om dit intuïtief iets duidelijker te maken. Met deze keuze voor Z^T gaan we het systeem benaderen met de kleinste kwadraten benadering. Dit is gebaseerd op de Singuliere Waarden Decompositie (SVD). De keuze voor V heeft met het matchen van momenten te maken.

3 Uniciteit

De volgende stelling komt uit het artikel van Antoulas [1], propositie 3.1 en heb ik overgenomen en iets uitgebreider opgeschreven, omdat ik het later weer moet gebruiken. Zijn bewijsvoering in dit stuk is kloppend.

Stelling 1. *De least squares oplossing* Σ_{LS} *die we net hebben gemaakt met* (14) *en* (15) *is uniek, oftewel: als je een andere minimale realisatie hebt van het systeem* (1)*, dan krijg je dezelfde toestandsmatrix voor het gereduceerde systeem* (2)*.*

Bewijs. Bij 2 verschillende minimale realisaties is er een toestandstransformatie, zodat je van basis kan wisselen. Daarvoor moet je dus een basistransformatie toepassen. Zij T, met $\det(T) \neq 0$, een basistransformatie van Σ en zij $\tilde{A}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ en $\tilde{d}$, de realisatie van $\widetilde{\Sigma}$, de getransformeerde basis, oftewel: $\tilde{A} = TAT^{-1}$, $\tilde{b} = Tb$, $\tilde{c} = cT^{-1}$ en $\tilde{d} = d$. Ook hiervoor kunnen we de regelbaarheidsmatrix $\widetilde{\mathscr{R}_r}$ en de observeerbaarheidsgramiaan $\widetilde{\mathscr{X}}$ nu gemakkelijk afleiden:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathscr{R}_r} &= T\mathscr{R}_r \text{ en} \\ \widetilde{\mathscr{X}} &= T^{-T}\mathscr{X}T^{-1}. \end{aligned} \tag{17}$$

Voor het systeem $\widetilde{\Sigma}$ is:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}^T &= (\widetilde{\mathscr{R}_r}^T \widetilde{\mathscr{X}}\widetilde{\mathscr{R}_r})^{-1}\widetilde{\mathscr{R}_r}^T \widetilde{\mathscr{X}} \\ &= (\mathscr{R}_r^T T^T T^{-T}\mathscr{X}T^{-1}T\mathscr{R}_r)^{-1}\mathscr{R}_r^T T^T T^{-T}\mathscr{X}T^{-1} \\ &= (\mathscr{R}_r^T \mathscr{X}\mathscr{R}_r)^{-1}\mathscr{R}_r^T \mathscr{X}T^{-1} \\ &= Z^T T^{-1} \text{ en} \\ \tilde{V} &= T\mathscr{R}_r \\ &= TV. \end{aligned}$$

Daarmee krijgen we:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}^T\tilde{A}\tilde{V} &= Z^T T^{-1}TAT^{-1}TV \\ &= Z^T AV, \\ \tilde{Z}^T\tilde{b} &= Z^T T^{-1}Tb \\ &= Z^T b, \\ \tilde{c}\tilde{V} &= cT^{-1}TV \\ &= cV \text{ en} \\ \tilde{d} &= d. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $\widetilde{\Sigma}_{LS} = \Sigma_{LS}$ en dus is de toestandsrepresentatie van Σ_{LS} hetzelfde ongeacht de minimale realisatie. □

Omdat de toestandsrepresentatie van Σ_{LS} altijd hetzelfde zal zijn, ongeacht de realisatie van Σ, kunnen we altijd de basistransformatie $T = \mathscr{X}^{\frac{1}{2}}$ toepassen, zodat $\widetilde{\mathscr{X}} = I$, zie vergelijking (17). Ik zal dit even wat verder uitwerken. Ik zal eerst laten zien dat $T^T = T$, en daarna zal ik uitwerken hoe we dan krijgen $\widetilde{\mathscr{X}} = I$. Het is hierbij belangrijk dat $\mathscr{X}$ inverteerbaar is, omdat het volle rang heeft. Het paar (c, A) is immers bereikbaar.

$$\begin{aligned}
T^T &= (\mathscr{X}^{\frac{1}{2}})^T \\
&= \big((\mathscr{O}^T\mathscr{O})^{\frac{1}{2}}\big)^T \\
&= \big((\mathscr{O}^T\mathscr{O})^T\big)^{\frac{1}{2}} \\
&= (\mathscr{O}^T\mathscr{O})^{\frac{1}{2}} \\
&= \mathscr{X}^{\frac{1}{2}} \\
&= T.
\end{aligned}$$

Dit betekent dat:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathscr{X}} &= T^{-T}\mathscr{X}T^{-1} \\
&= T^{-1}\mathscr{X}T^{-1} \\
&= \mathscr{X}^{-\frac{1}{2}}\mathscr{X}\mathscr{X}^{-\frac{1}{2}} \\
&= I.
\end{aligned}$$

Vanaf nu zullen we uitgaan van deze basistransformatie, waardoor dus de vergelijkingen (13) en (14) veranderen in:

$$\begin{aligned}
A^T\mathscr{X}A + c^Tc = \mathscr{X} \Rightarrow& \\
A^TA + c^Tc = I \text{ en}& \qquad (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z^T &= (\mathscr{R}_r^T\mathscr{X}\mathscr{R}_r)^{-1}\mathscr{R}_r^T\mathscr{X} \\
&= (\mathscr{R}_r^T\mathscr{R}_r)^{-1}\mathscr{R}_r^T.
\end{aligned} \qquad (19)$$

Vanaf nu zullen we dus uitgaan van deze nieuwe definitie van Z^T. Met deze nieuwe vergelijking (19) kunnen we nu ook kijken naar VZ^T, en kunnen we bewijzen dat het een orthogonale projectie is. Een projectie heeft als karakteriserende eigenschap dat er geldt: $Px = x$ als $x \in \text{range}(P)$. Als P een orthogonale projectie is, dan gelden per definitie de volgende 2 dingen:

$$\begin{aligned}
P^2 &= P \text{ en} \\
P^T &= P.
\end{aligned} \qquad (20)$$

Lemma 1. *De matrix VZ^T is een orthogonale projectie.*

Bewijs. Zij $P = VZ^T$. Dan geldt er vanwege (20):

$$\begin{aligned}
P^2 &= (VZ^T)^2 \\
&= \mathscr{R}_r(\mathscr{R}_r^T\mathscr{R}_r)^{-1}\mathscr{R}_r^T\mathscr{R}_r(\mathscr{R}_r^T\mathscr{R}_r)^{-1}\mathscr{R}_r^T \\
&= \mathscr{R}_r(\mathscr{R}_r^T\mathscr{R}_r)^{-1}\mathscr{R}_r^T \\
&= VZ^T \\
&= P
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} P^T &= ((VZ^T))^T \\ &= \left(\mathscr{R}_r(\mathscr{R}_r^T\mathscr{R}_r)^{-1}\mathscr{R}_r^T\right)^T \\ &= \mathscr{R}_r(\mathscr{R}_r^T\mathscr{R}_r)^{-1}\mathscr{R}_r^T \\ &= VZ^T \\ &= P. \end{aligned}$$

Hiermee is bewezen dat VZ^T een orthogonale projectie is. □

4 Het matchen van de eerste r Markov parameters van Σ en Σ_{LS}

De volgende 3 secties zijn een uitwerking van Stelling 3.1 op pagina 300 en 301 van het artikel van Antoulas [1]. In de bewijsvoering van deze stelling zaten een aantal fouten, dus heb ik dit stuk zo uitgebreid mogelijk behandeld. In deze stelling gaat het Antoulas om het matchen van de Markov parameters en om de vraag of de systeemeigenschap van stabiliteit behouden blijft. Rondom het matchen van de eerste r momenten, gebruikt Antoulas een algemene stelling. Ik zal een stelling bewijzen voor het speciale geval dat $\sigma = \infty$. In dat punt zijn de momenten gelijk aan de Markov parameters, zie vergelijking (5).
Stelling 2. *Als we systeem* (2) *maken met de keuzes voor* Z^T *en* V*, zoals in vergelijkingen* (19) *en* (15) *dan benadert dat het originele systeem* (1)*, waarbij geldt dat de Markov parameters gelijk zijn, oftewel:* $\eta_i = \eta_{LS_i}$.

Bewijs. In vergelijking (5) zijn de Markov parameters als volgt gedefinieerd: $\eta_i = cA^{i-1}b$. Dus het is voldoende om te bewijzen: $cA^{i-1}b = c_{LS}A_{LS}^{i-1}b_{LS}$. Ik zal hiervoor vergelijking (3) gebruiken. We kunnen het rechterlid schrijven als:

$$\begin{aligned} c_{LS}A_{LS}^{i-1}b_{LS} &= cV(Z^TAV)^{i-1}Z^Tb \\ &= cVZ^TAVZ^TAVZ^T\cdots AvZ^Tb \\ &= c(VZ^T)A(VZ^T)A(VZ^T)\cdots A(VZ^T)b. \end{aligned} \tag{21}$$

De term (VZ^T) is een orthogonale projectie, zoals bewezen in Lemma 1. De projectie VZ^T projecteert op $\mathscr{R}_r$. Oftwel: $VZ^Tx = x$ als $x \in \text{range}(VZ^T)$. Dat betekent dat het einde van vergelijking (21), "$(VZ^T)b$" gelijk wordt aan b, want (VZ^T) projecteert op de range van $\mathscr{R}_r$ en $b \in \mathscr{R}_r$. Dat betekent dat het laatste gedeelte wordt: '$(VZ^T)Ab$'. Ook hier wordt dit gelijk aan Ab, want $Ab \in \mathscr{R}_r$. Zo pellen we het steeds verder af, tot alle termen VZ^T weggehaald zijn, en daarmee wordt vergelijking (21) vereenvoudigt tot:

$$c_{LS}A_{LS}^{i-1}b_{LS} = cA^{i-1}b.$$

Hiermee hebben we bewezen dat de Markov parameters van het originele systeem (1) en het kleinere systeem (2) gelijk zijn. □

5 De eerste stap naar asymptotische stabiliteit

In deze sectie zal ik de eerste stap naar asymptotische stabiliteit behandelen. Eerst zal ik bewijzen dat alle eigenwaarden van A_{LS} kleiner dan of gelijk zijn aan 1. Voor asymptotische stabiliteit van het systeem (2) is nodig dat de absolute waarde van alle eigenwaarden van A_{LS} strikt kleiner zijn dan 1. Vanuit vergelijking (18) weten we dat $A^TA + c^Tc = I$. Verder is c^Tc een positieve semidefinite matrix, dus $c^Tc \geq 0$. Dan volgt uit (18) dus:

$$A^TA \leq I. \tag{22}$$

Ook A^TA is positief semidefiniet. Nu kunnen we vergelijking (22) links en rechts vermenigvuldigen met respectievelijk V^T en V. Waaruit volgt:

$$\begin{aligned} A^TA &\leq I \Rightarrow \\ V^TA^TAV &\leq V^TIV \Leftrightarrow \\ V^TA^TAV &\leq V^TV \Leftrightarrow \\ V^TA^TAV - V^TV &\leq 0 \end{aligned}$$

Omdat V^TV een positief semidefinite matrix is, kan je daarvan de wortel nemen. Omdat V volgens onze aanname ook volle rang heeft, kan je ook de inverse nemen van (V^TV). Nu gaan we bovenstaande ongelijkheid voor- en navermenigvuldigen met $(V^TV)^{-1/2}$. Dan krijgen we:

$$\begin{gathered} V^TA^TAV - V^TV \leq 0 \Leftrightarrow \\ (V^TV)^{-1/2}V^TA^TAV(V^TV)^{-1/2} - (V^TV)^{-1/2}V^TV(V^TV)^{-1/2} \leq 0 \Leftrightarrow \\ (V^TV)^{-1/2}V^TA^TAV(V^TV)^{-1/2} - \left[(V^TV)^{-1/2}(V^TV)^{1/2}\right]\left[(V^TV)^{1/2}(V^TV)^{-1/2}\right] \leq 0 \Leftrightarrow \\ (V^TV)^{-1/2}V^TA^TAV(V^TV)^{-1/2} - I \leq 0 \Leftrightarrow \\ (V^TV)^{-1/2}V^TA^TAV(V^TV)^{-1/2} \leq I. \end{gathered} \tag{23}$$

Het eerste gedeelte van het linkerlid van vergelijking (23): '$(V^TV)^{-1/2}V^TA^T$' is de getransponeerde van het tweede gedeelte van het linkerlid. Dus we kunnen vergelijking (23) schrijven als $Q^TQ \leq I$ met $Q = AV(V^TV)^{-1/2}$. Het is een bekend gegeven dat er dan volgt: $QQ^T \leq I$. Daarmee krijgen we:

$$AV(V^TV)^{-1}V^TA^T \leq I.$$

Als we dit voorvermenigvuldigen met Z^T en navermenigvuldigen met Z, dan krijgen we:

$$Z^TAV(V^TV)^{-1}V^TA^TZ \leq Z^TZ.$$

Vanuit vergelijking (2) weten we dat: $A_{LS} = Z^TAV$, daarmee wordt de bovenstaande vergelijking dus:

$$A_{LS}(V^TV)^{-1}A_{LS}^T \leq Z^TZ. \tag{24}$$

We kunnen de term 'Z^TZ' als volgt herschrijven, met behulp van de vergelijkingen (18) en (19):

$$Z^TZ = (\mathscr{R}_r^T\mathscr{R}_r)^{-1}\mathscr{R}_r^T\mathscr{R}_r(\mathscr{R}_r^T\mathscr{R}_r)^{-1} = (\mathscr{R}_r^T\mathscr{R}_r)^{-1}. \tag{25}$$

Vanuit vergelijking (15) weten we dat $V = \mathscr{R}_r$, dus als we vergelijking (25) invullen in vergelijking (24) dan krijgen we:

$$A_{LS}(V^TV)^{-1}A_{LS}^T \leq (V^TV)^{-1}. \tag{26}$$

We gaan nu eerst laten zien dat voor λ, de grootste eigenwaarde van A_{LS}, geldt dat $|\lambda| \leq 1$. De bijbehorende eigenvector is $\tilde{v}$. De notatie $\tilde{v}^*$ duidt de complex getransponeerde aan. Dus $A_{LS}^T\tilde{v} = \lambda\tilde{v}$. Als we vergelijking (26) voorvermenigvuldigen met $\tilde{v}^*$ en navermenigvuldigen met $\tilde{v}$, dan krijgen we:

$$\tilde{v}^*A_{LS}(V^TV)^{-1}A_{LS}^T\tilde{v} \leq \tilde{v}^*(V^TV)^{-1}\tilde{v} \Leftrightarrow$$
$$|\lambda|^2\tilde{v}^*(V^TV)^{-1}\tilde{v} \leq \tilde{v}^*(V^TV)^{-1}\tilde{v}.$$

Hieruit blijkt dat $|\lambda|^2 \leq 1$, wat ook betekent dat $|\lambda| \leq 1$ en daarmee zijn dus alle eigenwaarden van het systeem (2) kleiner dan of gelijk aan 1. In de volgende sectie zullen we behandelen dat de eigenwaarden strikt kleiner zijn dan 1, en dus dat het systeem asymptotisch stabiel is.

6 De tweede stap naar asymptotische stabiliteit

In deze sectie gaan we kijken naar de tweede stap naar de asymptotische stabiliteit van het systeem (2). Vanuit sectie 5 weten weten we dat $|\lambda| \leq 1$, oftewel, alle eigenwaarden zijn kleiner dan of gelijk aan 1. Als het asymptotisch stabiel is, dan mag A_{LS} geen pool op de eenheidscirkel hebben, dus moet er gelden: $|\lambda| < 1$. We zullen bewijzen dat als A_{LS} een pool heeft op de eenheidscirkel, oftewel een eigenwaarde λ met $|\lambda| = 1$, dat er dan een tegenspraak volgt met het feit dat het paar (c, A) waarneembaar is. Vanaf nu zullen we de matrix VZ^T schrijven als de projectie P, oftewel $P = VZ^T$. Uit Lemma 1 weten we dat $P^2 = P$ en $P^T = P$. Vanaf nu zal $\tilde{\lambda}$ een eigenwaarde van A_{LS} zijn, met $|\tilde{\lambda}| = 1$ en we zullen $\tilde{v}$ zo kiezen dat $\tilde{v}$ de bijbehorende eigenvector is. We zullen kijken naar de belangrijke gelijkheid

$$PAV\tilde{v} = VZ^TAV\tilde{v} = VA_{LS}\tilde{v} = V(\tilde{\lambda}\tilde{v}) = \tilde{\lambda}V\tilde{v}. \tag{27}$$

Omdat P een orthogonale projectie is, geldt er dat:

$$\|PAV\tilde{v}\|^2 + \|(I-P)AV\tilde{v}\|^2 = \|AV\tilde{v}\|^2. \tag{28}$$

Vanuit vergelijking (27) krijgen we dan:

$$\|PAV\tilde{v}\|^2 = \|\tilde{\lambda}V\tilde{v}\|^2 = \|V\tilde{v}\|^2. \tag{29}$$

We kunnen vergelijking (18) herschrijven als: $A^TA - I = -c^Tc$. Als we dit voorvermenigvuldigen met $\tilde{v}^*V^T$ en navermenigvuldigen met $V\tilde{v}$, dan krijgen we:

$$\tilde{v}^*V^TA^TAV\tilde{v} - \tilde{v}^*V^TV\tilde{v} = -\tilde{v}^*V^Tc^TcV\tilde{v},$$

wat we in de normnotatie kunnen schrijven als:

$$\|AV\tilde{v}\|^2 - \|V\tilde{v}\|^2 = -\|cV\tilde{v}\|^2.$$

Als we hierin vergelijking (28) invullen, dan krijgen we:

$$\|PAV\tilde{v}\|^2 + \|(I-P)AV\tilde{v}\|^2 - \|V\tilde{v}\|^2 = -\|cV\tilde{v}\|^2.$$

Met behulp van vergelijking (29) wordt dat:

$$\|V\tilde{v}\|^2 + \|(I-P)AV\tilde{v}\|^2 - \|V\tilde{v}\|^2 = -\|cV\tilde{v}\|^2.$$

Dat wordt dan:

$$\|(I-P)AV\tilde{v}\|^2 = -\|cV\tilde{v}\|^2.$$

Als we een norm kwadrateren, dan is dat zeker positief, dus hieruit volgt dat: $\|(I-P)AV\tilde{v}\|^2 = 0$ en $\|cV\tilde{v}\|^2 = 0$. Dat betekent weer dat $PAV\tilde{v} = AV\tilde{v}$. We weten dat $\tilde{v}$ een eigenvector is van A_{LS}. Nu weten we vanuit vergelijking (27) dat $V\tilde{v}$ een eigenvector is van A. Vanuit $cV\tilde{v} = 0$ krijgen we dus dat $V\tilde{v} = 0$. Vanwege het feit dat V volle rang heeft, weten we dat $\tilde{v} = 0$. Maar dat is in tegenspraak met de aanname dat het paar (c, A) waarneembaar is.

7 Conclusie

Hiermee komen we bij het eind van dit verslag. Allereerst wil ik benadrukken dat Antoulas en zijn medegenoten zeer goed werk hebben verricht en dat hun ontdekkingen belangrijk zijn. Ik heb het als een eer ervaren om wat bij te mogen dragen aan de bewijsvoering van enkele stellingen. Laat het ons leren dat iedereen fouten maakt, dat we daarvan mogen leren en dat we altijd kritisch naar ons eigen werk moeten kijken om te zien of alles klopt.

Ik wil mijn dank uitspreken naar Hans Zwart, mijn begeleider, want zonder zijn helpende uitleg en duidelijke afbakening van het probleem, had ik dit nooit gered.

Bibliografie

[1] Serkan Gugercin and Anthanasios C. Antoulas. *Model reduction of large-scale systems by least squares.* Elsevier, Linear Algebra and its Applications 415 (2006) 290-321.

[2] S. Friedberg, A. Insel, L. Spence *Linear Algebra, Fourth Edition* Pearson, 2014

[3] E.J. Grimme. *Krylov Projection Methods for Model Reduction.* Ph.D. Thesis, ECE Dept., University of Illinois, Urbana-Champaign, 1997.