

UNIVERSITEIT TWENTE

MASTER SCIENCE EDUCATION & COMMUNICATION;
VAK WISKUNDE

VERSLAG VAN ONDERZOEK VAN ONDERWIJS
(10 EC VARIANT)

Integreren kun je leren; maar hoe leer je het begrijpen?

*Een alternatieve introductie op de onbepaalde integraal voor
middelbare scholieren met wiskunde B; is er een eenvoudig,
inzichtelijk en bruikbaar alternatief op zomaar
'anti-differentiëren' mogelijk?*

Auteur:

Thijs KNAPEN
s1008137

Begeleiders:

Nellie VERHOEF
Tom COENEN

23 mei 2017

LOVE
IS LIKE THE
FIRST FUNDAMENTAL THEOREM OF
CALCULUS:

→ **for every**  **guarantees an**
ANTIDERIVATIVE
continuous
FUNCTION

BUT NOT
that they are always easy to
FIND.

Inhoudsopgave

1	Samenvatting	3
2	Inleiding	4
3	Theoretisch kader	6
3.1	De integraal	6
3.2	Achtergrond primitieve; de bepaalde en onbepaalde integraal	9
3.3	Riemannsom en -integraal	11
3.3.1	Verschillende integraalbegrippen	11
3.3.2	De Riemann integraal	12
3.3.3	Continue reële functie? $\Rightarrow$ Riemann integraal toepasbaar	13
3.3.4	Invloed van ‘tag-keuze’ op de Riemannsom	14
3.4	De hoofdstelling van de Calculus	16
3.4.1	Deel 1 van de hoofdstelling	16
3.4.2	Oppervlaktefunctie versus primitieve functie	18
3.4.3	Deel 2 van de hoofdstelling	19
3.4.4	Belang van de continuïteitseis in deel 2 van de hoofdstelling	20
3.5	Primitiveren in formulevorm; de basics	21
3.6	Primitiveren; conceptueel lastiger dan differentiëren	22
3.7	De ‘magische’ integratieconstante	23
4	Onderzoeksvragen & Hypothesen	25
4.1	Onderzoeksvragen	25
4.2	Hypothesen en verwachtingen	25
4.2.1	Moeilijkheidsgraad integraalrekening	25
4.2.2	Procedurele kennis versus conceptuele kennis van integraalrekening	26
4.2.3	(Technische) aspecten huidige lesmateriaal	27
4.2.4	Bruikbaarheid illustratieve aspecten van het theoretisch kader	27
5	Methode	29
5.1	Respondenten	29
5.2	Procedure	31
5.3	Instrumenten	31
5.4	Analyse	32
6	Resultaten	33
7	Conclusie en discussie	39
7.1	Conclusie	39
7.2	Discussie	42
8	Interviews	44
8.1	Interview Leerlingen	44
8.1.1	Procedurele vragen	44

8.1.2	Conceptuele vragen	44
8.2	Interview Docenten	45
8.2.1	Uw leservaringen bij integraalrekening	45
8.2.2	Uw lesmateriaal bij integraalrekening	46
8.2.3	Toelichtingen bij integraalaspecten van sectie 8.2.2	47
8.2.4	Uw visie op illustratieve theorieaspecten uit sectie 3 van dit verslag	49
8.3	Invulformulier docentenvragen	50
8.4	Analyse Interviews	51
8.4.1	Leerlingen Interview; procedurele vragen	51
8.4.2	Leerlingen Interview; conceptuele vragen	53
8.4.3	Docenten interview; leservaringen bij integraalrekening	58
8.4.4	Docenten interview; lesmateriaal bij integraalrekening	60
8.4.5	Docenten interview; Bruikbaarheid illustratieve theorieaspecten uit sectie 3	61
8.5	Uitwerking Leerlingen interview	62
8.5.1	Uitwerking Procedurele vragen; procedurele aanpak	62
8.5.2	Uitwerking Procedurele vragen; alternatieve aanpak	65
8.5.3	Uitwerking Conceptuele vragen	67
9	Bijlagen	69
9.1	Integrand voor booglengten	69
9.2	Constant verschil tussen twee primitieven	70
9.3	Bewijs primitieven $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ & $\arctan(x)$	71
9.4	Oplossing onbepaalde integralen van (19)	72
10	Referenties	74

1 Samenvatting

In dit onderzoek staat het conceptuele begrip rondom het onderwerp integreren centraal. Aan bod komen bijvoorbeeld vragen als: “Wat is nu eigenlijk een integraal?” of “Wat beschrijft een primitieve functie”. Dit zijn allicht ietwat abstracte vragen, maar het stilstaan bij dit soort vragen lijkt me alleszins van belang om het kennisniveau van leerlingen naar een hoger niveau te tillen.

Het onderzoek is gemotiveerd vanuit het idee dat de conceptuele kennis van integreren onvoldoende belicht wordt in het middelbaar onderwijs van wiskunde B. Vaak is er toch een focus op het toepassen van de ‘truc’:

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a), \quad \text{waarbij} \quad F(x) \text{ voldoet aan } F'(x) = f(x).$$

Naast vele andere zaken, komt in dit onderzoek juist aan bod hoe deze ‘truc’ tot stand komt, hoe deze begrepen kan worden, en wat het toepassingsbereik ervan is.

Al dit soort conceptuele aspecten rondom het onderwerp integreren is in het eerste deel van het verslag zo illustratief mogelijk beschreven. Daarnaast is er ook stilgestaan bij de dimensie van de leerling en docent. Zo is geïnventariseerd hoe het gesteld is met de conceptuele kennis van leerlingen met betrekking tot het onderwerp integreren. Ook is docenten gevraagd om hun visie te geven over de algemene toepasbaarheid van illustratieve aspecten uit het eerste deel van het verslag.

Uit dit alles komt naar voren dat de conceptuele kennis van integreren bij leerlingen veelal erg beperkt is, en dat illustratieve aspecten uit dit verslag mogelijk van meerwaarde kunnen zijn om hier verbetering in aan te brengen.

2 Inleiding

De onderwerpen differentiëren en integreren zijn erg belangrijk geworden voor leerlingen met wiskunde B in het middelbaar onderwijs. Waar het onderwerp differentiëren meestal een uitgebreide inleiding kent met behulp van toenamediagrammen, differentiequotiënt, hellinggrafieken, etc., vermoeden we dat dit bij het onderwerp integreren onvoldoende het geval is. Wanneer we bijvoorbeeld de vraag stellen “Wat beschrijft de primitieve functie?”, dan moet de auteur bekennen dat hij daar voorafgaand aan dit onderzoek nog geen goed beeld bij had. Dit in tegenstelling tot de vraag “Wat beschrijft de afgeleide functie?”. Bij deze vraag kan namelijk gedacht worden aan de helling van een grafiek.¹

De algemene aanleiding voor dit onderzoek is het vermoeden van de auteur dat er onvoldoende cognitief begrip bestaat en gekweekt wordt binnen het huidige onderwijs van integraalrekening voor middelbare scholieren met wiskunde B. Daarbij doelen we niet op een mogelijk onkunde van leerlingen om integraalvraagstukken op te kunnen lossen. Sterker nog, we vermoeden dat het ‘algoritme’ $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ daar een erg goed handvat voor geeft. Waar we dan wel op doelen is het conceptuele begrip dat leerlingen hebben of aangeleerd krijgen bij dit onderwerp. Daarbij kan bijvoorbeeld gedacht worden aan de kennis en vertaalslagen die ten grondslag liggen van de hoofdstelling van de calculus. De hoofdvraag van dit onderzoek luidt dan ook:

“Hoe kun je integreren conceptueel leren begrijpen?”

In dit onderzoek zal niet alleen aan bod komen hoe het gesteld is met het cognitief begrip van leerlingen op het vlak van integraalrekening, maar ook hoe het lesmateriaal hierop zou kunnen ingaan. Daarin ondergebracht is in een klein gedeelte van dit onderzoek geïnventariseerd of specifieke integraalrekening-aspecten in het huidige lesmateriaal van docenten wel/niet aan bod komen. Één streven van dit onderzoek was om ook zelf tot illustratief lesmateriaal te komen, dat gebruikt kan worden om het cognitief begrip van leerlingen op het gebied van integraalrekening te verbeteren.

Om dit alles te bewerkstelligen, zou men kunnen zeggen dat chronologisch gezien (op basis van uitvoering) ruwweg drie deelonderzoeken zijn uitgevoerd:

1. Hoe is wiskundig gezien integraalrekening opgebouwd, en welke facetten komen erbij om de hoek kijken?
2. Hoe is het gesteld met het cognitief begrip van leerlingen op het gebied van integraalrekening, en hoe zit het met het huidige lesmateriaal om dit te bewerkstelligen?
3. Zijn er illustratieve aspecten naar voren gekomen in het eerste deelonderzoek, die van toegevoegde waarde kunnen zijn voor het middelbaar onderwijs op het gebied van integraalrekening?

¹Specifieker beschrijft de afgeleide functie f' voor iedere x -waarde een richtingscoëfficiënt die behoort bij de raaklijn aan de grafiek van f in het punt met die betreffende x -coördinaat.

Omdat er een sterke koppeling is tussen het eerste en het derde vraagstuk, is in het theoretisch kader van dit verslag het onderwerp integraalrekening zo illustratief mogelijk behandeld.

In het theoretisch kader van dit verslag, gegeven door sectie 3, komen verschillende aspecten van integraalrekening aan bod. In het kort wordt daarbij besproken:

1. Het begrip ‘de integraal’
Wat is het? Waar komt het vandaan? Hoe is het opgebouwd? Wat kun je ermee? Hoe zit het met de notatie?
2. Een achtergrond voor de primitieve functie
Wat is de bepaalde en onbepaalde integraal? Hoe zijn deze aan elkaar gerelateerd? Wat ‘beschrijft’ de primitieve/onbepaalde integraal als functie? Hoe is de integratieconstante hierin geborgen?
3. De Riemannsom en -integraal
Wat is (formeel) een Riemannsom? Hoe geeft dit (formeel) aanleiding tot de Riemann integraal? Wanneer is de Riemann integraal toepasbaar? Zijn er ook andere integraalbegrippen? Wat is het idee achter begrippen als linker-, rechter-, onder-, boven- of middensom? Wat heeft dit voor invloed op de Riemannsom?
4. De hoofdstelling van de calculus
Wat is (formeel) de hoofdstelling van de calculus (uit welke twee delen is hij opgebouwd)? Hoe komen de twee delen van de hoofdstelling tot stand? Hoe kunnen de twee delen worden gecombineerd voor de exacte berekening van bepaalde integralen? Hoe kan deze (procedurele) formule/algorithmegrepen worden? Wat zijn de vereisten aan het uitvoeren van deze (procedurele) berekening?
5. Primitiveren in formulevorm
Wat is het proces primitiveren? Welke primitivereregels zijn er? Kan elke functie geïntegreerd worden? Hoe gemakkelijk is het ten opzichte van differentiëren?
6. De integratieconstante
Wat is het belang van de constante bij een primitieve? Hoe kan deze constante uitgelegd worden aan de hand van de primitieve eigenschap?

Na deze uitgebreide inleiding op integraalrekening, zal in de daaropvolgende sectie 4 ingaan worden op de onderzoeksvragen voor dit onderzoek. Een centraal onderdeel daarvan is hoe we de hoofdvraag van dit onderzoek proberen te beantwoorden met behulp van verschillende deelvragen. Ook worden hypothesen en verwachtingen beschreven die grotendeels met behulp van gevonden literatuur gemotiveerd worden.

Daarna zal in sectie 5 de onderzoeksmethode in algemene zin beschreven worden. Dit onderzoek berust zich op interviews. In sectie 5 beschrijven we enkele uitgangspunten die gebruikt zijn bij deze interviews, die in sectie 8 meer gedetailleerd uitgewerkt zijn.

In sectie 6 zullen we onze bevindingen per onderzoeksvraag bespreken, waarna we tot slot in sectie 7 over gaan op de conclusie en discussie.

3 Theoretisch kader

3.1 De integraal

In de wiskunde wordt het integraalbegrip gebruikt om een getal te koppelen aan functies die concepten beschrijven die ontstaan uit het combineren van infinitesimale data. Het standaardvoorbeeld van zo'n concept is de oppervlakte. In het geval van een reële, continue, positieve functie, stelt de integraal $\int_a^b f(x) dx$ de oppervlakte voor die wordt ingesloten door de verticale lijnen $x = a$ en $x = b$, de x-as en de grafiek van $f(x)$.

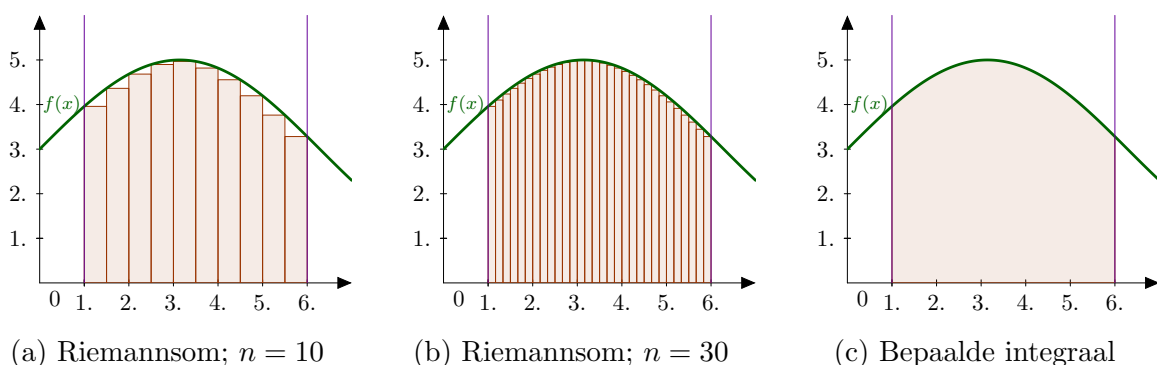
Oppervlakte is echter zeker niet het enige concept waarbij de integraal een rol speelt. Ook zaken als volume, booglengten of zelfs verwachtingswaarden kunnen met behulp van integraalrekening uitgerekend worden. Daarnaast kan het integraalbegrip ook gebruikt worden voor functies die niet reëel, en/of niet continu, en/of niet positief zijn, wat de reden is dat er naast de klassieke Riemann integraal ook andere integraaldefinities bestaan.

In het klassieke begrip kan de integraal gezien worden als een limietproces, waarbij een discrete Riemannsom 'continu wordt gemaakt' in de vorm van de bepaalde integraal.

In formulevorm:

$$\sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i \rightarrow \int_{x_0}^{x_n} f(x) \cdot dx \quad \text{als } \Delta x_i \rightarrow 0. \quad (1)$$

In een plaatje:



Figuur 1: Het limietproces van Riemannsommen naar de bepaalde integraal

Zoals misschien al te verwachten is, stelt x_i in (1) een element voor uit een reeks geordende x-waarden (i.e. $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\}$ met $x_i < x_j$ voor $i < j$). Δx_i is de intervalbreedte tussen twee van die x-waarden (i.e. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$).²

²De oplettende lezer kan opmerken dat er in de formule ook het niet gedefinieerde element x_{-1} wordt aangeroepen. Dit kan opgelost worden middels:

$$\Delta x_i = \begin{cases} 0, & \text{als } i = 0 \\ x_i - x_{i-1}, & \text{als } 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

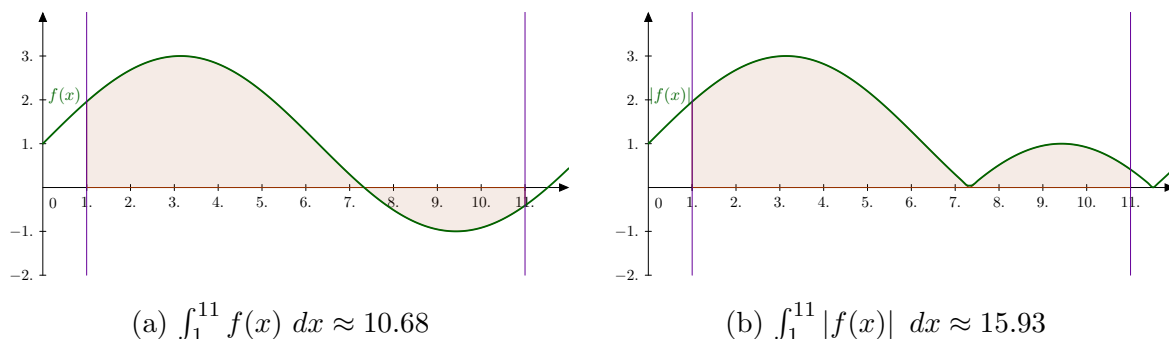
waardoor in weze een linker Riemannsom wordt verkregen. Soortgelijk wordt middels de keuze $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ voor $0 \leq i \leq n-1$, en $\Delta x_n = 0$, de rechter Riemannsom verkregen.

Het feit dat klassieke integratie gezien kan worden als een infinitesimale som, wordt ook weerspiegeld in het integraalteken ‘ $\int$ ’. Dit teken is bedacht door G.W. Leibniz (1646-1716). Van oorsprong is het een langgerekte letter ‘S’, de eerste letter van het latijnse woord ‘summa’ dat som betekent ([13])). Naar mijn idee maakt dit limietproces ook duidelijk waarom het idee van de oppervlakte een natuurlijke gedachte is achter de integraal $\int_a^b f(x) dx$.

Tegelijkertijd kunnen de tekortkomingen van deze gedachte ook geïllustreerd worden met behulp van (1). In het product $f(x_i) \cdot \Delta x_i$ kunnen zowel $f(x_i)$ als Δx_i negatief zijn. Het eerste is het geval als de grafiek van f zich onder de x-as bevindt, waar het tweede het geval is als de optelling niet ‘van links naar rechts’ maar ‘van rechts naar links’ wordt gedaan ([18]).³ Dit probleem draagt zich uiteraard ook over in het limietproces naar de uiteindelijke integraal, i.e. ook $f(x)$ en dx kunnen afzonderlijk positief of negatief zijn. Dat de volgorde van optelling wordt omgedraaid komt niet vaak voor, maar als wiskundige moet daar uiteraard wel rekening mee gehouden worden. Dit probleem kan eenvoudig opgelost worden met de volgende definitie:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx. \quad (2)$$

Het probleem dat $f(x)$ ook negatief kan zijn is een serieuzer probleem voor het gedachtegoed dat een integraal gezien kan worden als oppervlakte. Een oppervlakte is namelijk per definitie positief, terwijl bij de integraal de oppervlakte onder de x-as negatief wordt geteld.



Figuur 2: De integraal wordt negatief geteld als de functie f zich onder de x-as bevindt.

Formeel is het dus alleen correct om te stellen dat de integraal $\int_a^b |f(x)| dx$ de oppervlakte voorstelt die wordt ingesloten door de verticale lijnen $x = a$ en $x = b$, de x-as en de grafiek van $f(x)$.

³In dit geval zou dan ook de definitie van Δx_i dus precies andersom zijn, i.e. $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$. Om helemaal formeel te zijn moet ook nu natuurlijk rekening gehouden worden met de eerste danwel laatste waarde van Δx_i , zie ook de vorige voetnoot.

Tot slot is er ook nog wat naamgeving betrokken bij de integraal. De term ‘in de integraal’ wordt ook wel de integrand genoemd. De integrand is min of meer hetgeen dat wordt geïntegreerd.

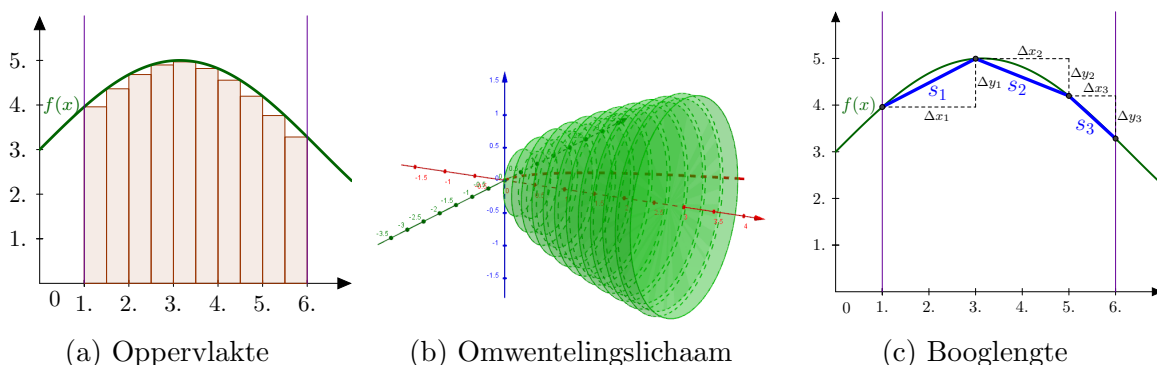
Een integraal wordt tot slot altijd afgesloten met ‘het teken dx ’ (of $d < \text{variabele} >$). Dit staat voor de differentiaal van de variabele. In de analogie van de integraal als limietproces kan dit gezien worden als een ‘infinitesimaal stukje x ’. Vergelijk dit met $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{dy}{dx}$ in het limietproces van de afgeleide. Het ‘teken dx ’ fungeert verder alleen als dummyvariabele, zoals vergelijkbaar ook het geval is met de sommatie-index.

Samenvattend is de naamgeving van de integraal dus als volgt:

$$\int_a^b \underset{\substack{\text{integraal met grenzen} \\ x=a \text{ en } x=b}}{f(x)} \underset{\substack{\text{integrand} \\ \text{differentiaal } x}}{dx}$$

In het geval van de ‘standaardintegrand’ $f(x)$ worden ‘infinitesimale rechthoeken’ $f(x) \cdot dx$ gesommeerd. Zoals hierboven beschreven kan dit goed gelinkt worden aan het begrip oppervlakte. Neem je echter $\pi(f(x))^2$ als integrand, dan worden ‘infinitesimale cilinderschijven’ $\pi(f(x))^2 \cdot dx$ gesommeerd, waardoor de betekenis ‘inhoud van een omwentellichaam’ ontstaat.

Op deze manier kun je dan allerlei ‘infinitesimale data’ combineren, waarmee we terugkomen op onze introductie van de integraal. Zo kunnen in principe ook ‘infinitesimale lijnstukjes’ $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ gesommeerd worden om tot een booglengte te komen. Bij dit laatste voorbeeld is er echter geen sprake van een sommatie van ‘infinitesimale strips’, waardoor het in de huidige vorm nog niet ‘opgepikt’ kan worden met behulp van het (klassieke) integraalbegrip. Wel kan er aangetoond worden dat een ‘infinitesimaal lijnstukje’ $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ equivalent is aan een ‘infinitesimale strip’ $\sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot |dx|$ ⁴. Dit zorgt ervoor dat booglengten ook met behulp van het (klassieke) integraalbegrip uitgerekend kunnen worden.



Figuur 3: Verschillende infinitesimale gedaantes van de integraal.

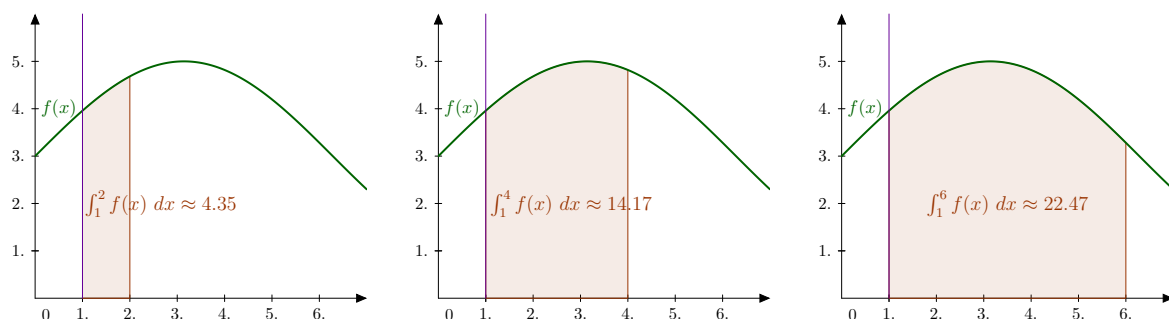
⁴Zie voor een bewijs subsectie 9.1 van de bijlage

3.2 Achtergrond primitieve; de bepaalde en onbepaalde integraal

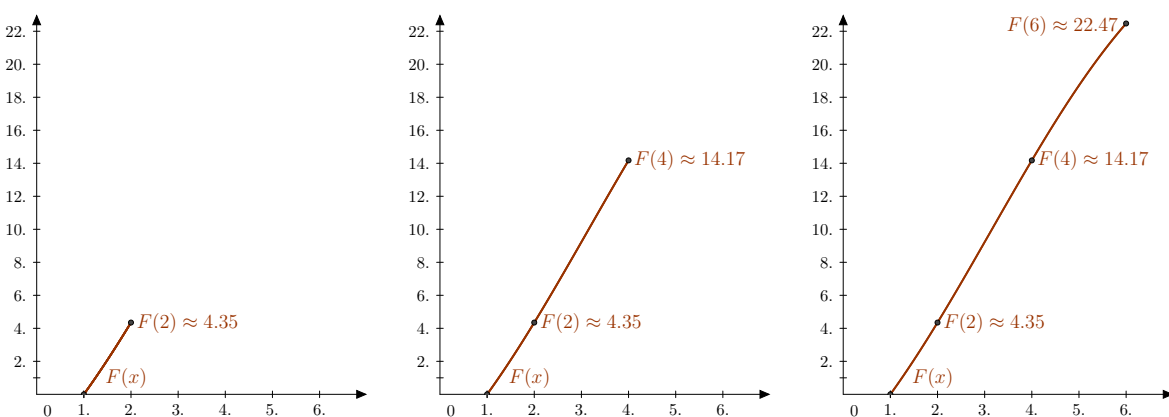
In het voorbeeld $\int_a^b f(x) dx$ zijn de grenzen $x = a$ en $x = b$ reeds bepaald, en we spreken in een dergelijk geval, over een bepaalde integraal. De uitkomst van een bepaalde integraal is simpelweg een getal.

Naast de bepaalde integraal, wordt er ook wel gesproken van de onbepaalde integraal. Dit is tevens het begrip dat centraal staat voor dit onderzoek. Naast de term ‘onbepaalde integraal’ worden ook de termen ‘primitieve functie’, enkel ‘primitieve’ of ‘stamfunctie’ gebruikt als synoniemen voor hetzelfde concept ([1]).

Bij de onbepaalde integraal zijn de integratiegrenzen (initieel) nog onbepaald, wat simpelweg ook wel weergegeven wordt met $\int f(x) dx$. De uitkomst van een onbepaalde integraal is een oppervlaktefunctie $F(x)$, waarbij de x-waarde de rol van de rechtergrens inneemt.



(a) Integraal; $a = 1$ tot $x = 2$ (b) Integraal; $a = 1$ tot $x = 4$ (c) Integraal; $a = 1$ tot $x = 6$



(d) Primitieve $F(x)$; $x \in [1, 2]$ (e) Primitieve $F(x)$; $x \in [1, 4]$ (f) Primitieve $F(x)$; $x \in [1, 6]$

Figuur 4: De primitieve functie als ‘oppervlakte tot dusver’ functie

Nog steeds blijft er een ‘vrijheidsgraad’ over, gezien de linkergrens (‘ a ’) nog niet vast gekozen is. De invloed van deze ‘vrije linkergrens’ is echter maar beperkt. Stel namelijk dat er twee verschillende ondergrenzen worden gebruikt; a_1 en a_2 , met $a_1 < a_2$, dan geldt:

$$F_1(x) := \int_{a_1}^x f(t) dt,$$

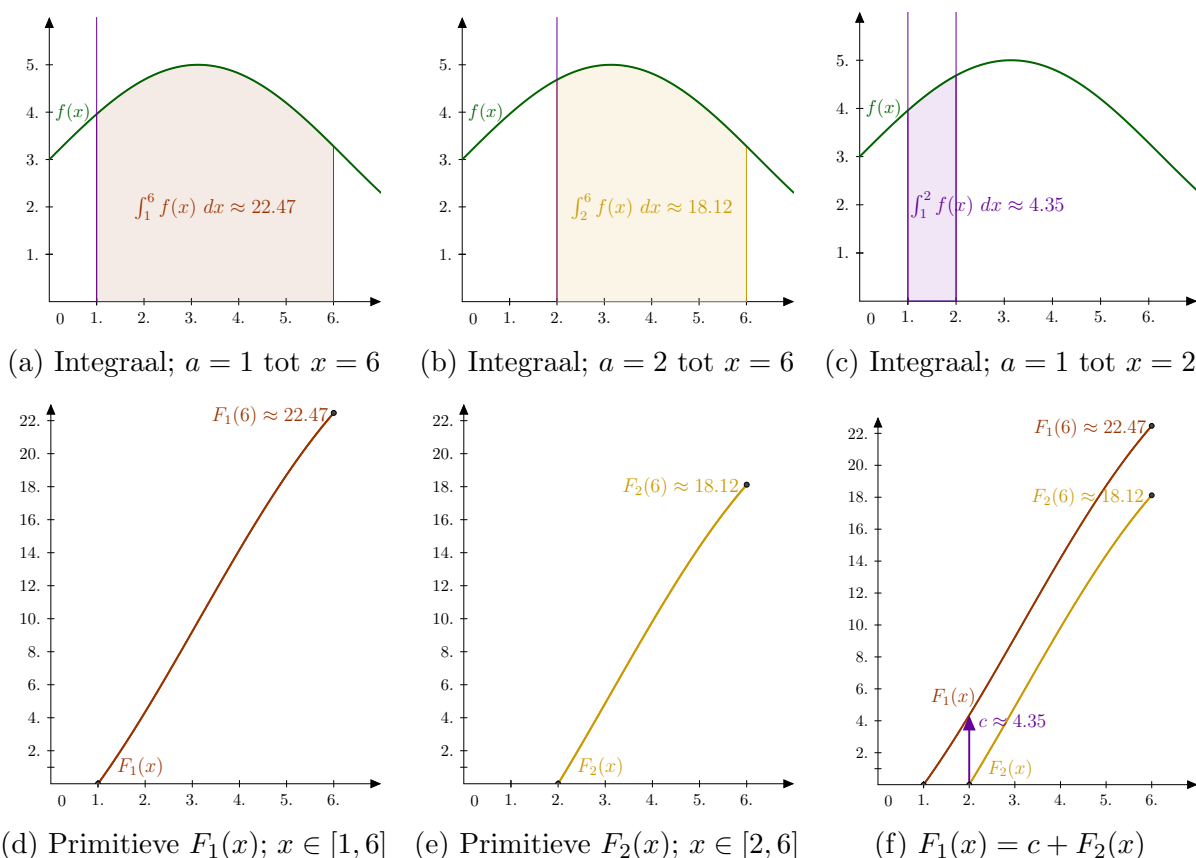
$$F_2(x) := \int_{a_2}^x f(t) dt.$$

Wanneer we de primitieve beschouwen als oppervlaktefunctie, kan ingezien worden dat:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_{a_1}^x f(t) dt \\ &= \int_{a_1}^{a_2} f(t) dt + \int_{a_2}^x f(t) dt \\ &= F_1(a_2) + F_2(x) \\ &= c + F_2(x), \end{aligned} \tag{3}$$

waarbij geldt dat $c = F_1(a_2) = \int_{a_1}^{a_2} f(t) dt$. Merk op dat uit (3) volgt dat twee verschillende oppervlaktefuncties slechts een constante van elkaar verschillen.

De conclusie van vergelijking (3) is tevens grafisch elegant weer te geven:



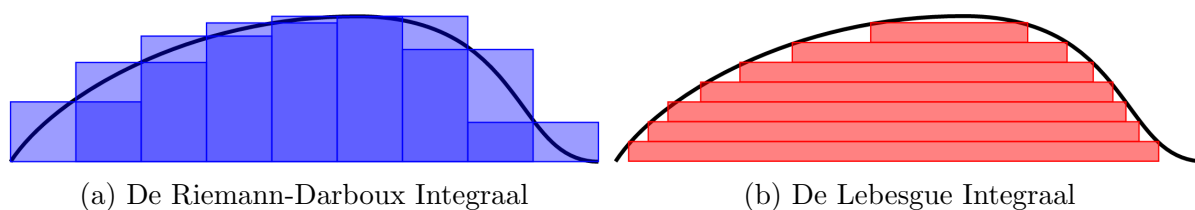
Figuur 5: De ‘vrije linkergrens’ a bepaalt de constante binnen de oppervlaktefunctie $F(x)$

3.3 Riemannsom en -integraal

In dit gedeelte van het verslag wordt er uitgebreid ingegaan op de Riemannsom en de Riemann integraal. Allereerst wordt er natuurlijk ingegaan op de (formele) betekenis van deze begrippen en wat hierbij komt kijken. Daarnaast wordt er ook toegelicht hoe de Riemannsom aan de basis staat van de Riemann integraal, en hoe dit illustratief uitgelegd kan worden.

3.3.1 Verschillende integraalbegrippen

In dit onderzoek zal er ingegaan worden op de (klassieke) Riemann integraal. In de loop der tijd zijn er echter verschillende typen integralen in het leven geroepen, om de (veelal technische) tekortkomingen in de verschillende definities op te vangen. De meest bekende ‘alternatieve’ integraal definitie is waarschijnlijk de Lebesgue integraal.⁵ Deze integraal weet de klasse integreerbare functies op elegante wijze te vergroten. In plaats van de x-as op te delen, wordt bij Lebesgue integratie de y-as opgedeeld.



Figuur 6: Verschillende integraalbegrippen

Alle Riemann integreerbare functies zijn sowieso ook Lebesgue integreerbaar. Daarnaast is de onderstaande functie wel Lebesgue integreerbaar, maar niet Riemann integreerbaar.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{als } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{als } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \quad (4)$$

Het nadeel aan Lebesgue integratie is dat er een beroep wordt gedaan op de ‘wiskunde tak’ die ‘measure theory’ heet. Verder komen ‘gecompliceerde functies’ zoals (4) in de praktijk van de middelbare school ook eigenlijk niet voor. Daar wordt er hoofdzakelijk gewerkt met reële, continue functies. Gelukkig zijn dit type functies altijd integreerbaar met behulp van de Riemann integraal (mits de functie dan ook continu is op het gehele interval $[a, b]$).⁷

⁵Naast de Riemann en Lebesgue integraaldefinities, zijn er o.a. ook nog de ‘Darboux integraal’, de ‘Riemann-Stieltjes integraal’, de ‘Lebesgue-Stieltjes integraal’, de ‘Daniell integraal’, de ‘Haar integraal’, de ‘Henstock-Kurzweil integraal’, de ‘Itô integraal’, de ‘Stratonovich integraal’, de ‘Young integraal’ en de ‘rough path integraal’ ([5]).

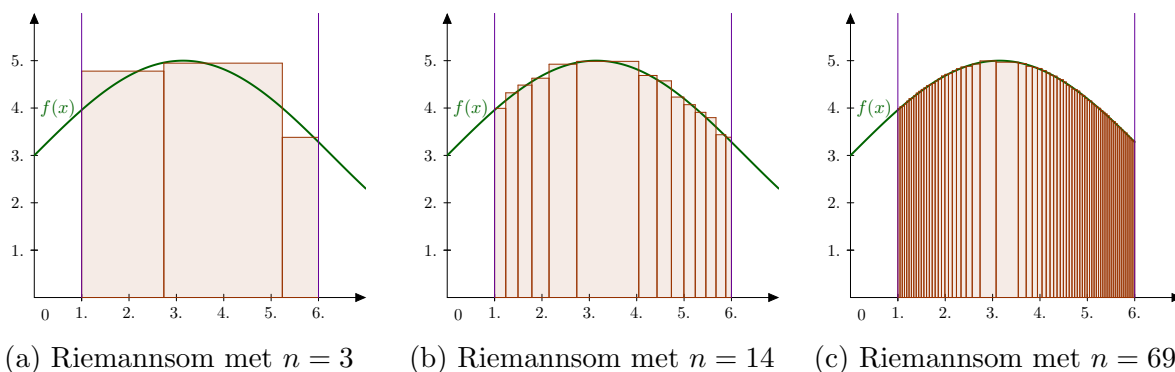
⁶Deze functie wordt ook wel de Dirichlet-functie genoemd, vernoemd naar Johann Dirichlet ([7]).

⁷Een begrensde functie op een compact interval $[a, b]$ is Riemann integreerbaar dan en slechts dan als hij bijna overal continu is (de verzameling discontinuïteits-punten moet ‘Lebesgue measure’ nul hebben ([6])).

3.3.2 De Riemann integraal

De Riemann integraal is een formele definitie van het integraalbegrip, waarbij Riemannsommen de basis vormen (zie ook vergelijking (1) en Figuur 1). In tegenstelling tot wat Figuur 1 mogelijk doet vermoeden, hoeven de intervallen Δx_i bij een Riemannsom niet aan elkaar gelijk te zijn. Daarnaast is er ook nog veel vrijheid voor welke x-waarde je kiest in elk interval Δx_i , om de hoogte $f(x)$ van elk rechthoekje vast te stellen. Deze hoogte mag je namelijk ‘vrij’ kiezen volgens $f(t_i)$ met $t_i \in \Delta x_i$. De Riemannsom is dus niet zomaar een ‘ondersom’, ‘bovensom’, ‘linkersom’ of ‘rechtersom’, maar de hoogte van elk rechthoekje kan willekeurig worden gekozen in elk interval.

In onderstaand figuur is hier een voorbeeld van gegeven, waarbij nog steeds het limietproces wordt geïllustreerd.



Figuur 7: Riemannsommen met verschillende intervalbreedtes en willekeurige ‘tags’.

Bovenstaande beschrijving van het Riemann integraalbegrip kan meer formeel gemaakt worden door te werken met een zogenaamde ‘gelabelde partitie’ van het interval $[a, b]$:

$$a = x_0 \leq t_1 \leq x_1 \leq t_2 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq t_n \leq x_n = b. \quad (5)$$

Naast het interval $[a, b]$ op te delen in intervallen Δx_i (i.e. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$), krijgt ieder interval Δx_i dus ook nog een label t_i mee, waarbij $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Het grootste interval Δx_i wordt ook wel de ‘maasgrootte’ genoemd. Er geldt dus dat: $\text{maasgrootte} = \max_{i=1}^n \Delta x_i$. Een Riemannsom van functie f kan nu worden beschreven door:

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta x_i. \quad (6)$$

De formele definitie van de Riemann integraal is dan als volgt:

De Riemann integraal van een functie f over het interval $[a, b]$ is gelijk aan S als voor alle $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat, zodanig dat voor elke ‘gelabelde partitie’ $[a, b]$ met ‘maasgrootte’ kleiner dan δ , geldt dat:

$$\left| S - \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta x_i \right| < \epsilon. \quad (7)$$

Met andere woorden; de Riemann integraal van een functie f bestaat als voor elke ‘gelabelde partitie’ (5) met voldoende kleine intervallen Δx_i , de Riemannsom (6) een willekeurig nauwkeurige waarde kan aannemen.

3.3.3 Continue reële functie? $\Rightarrow$ Riemann integraal toepasbaar

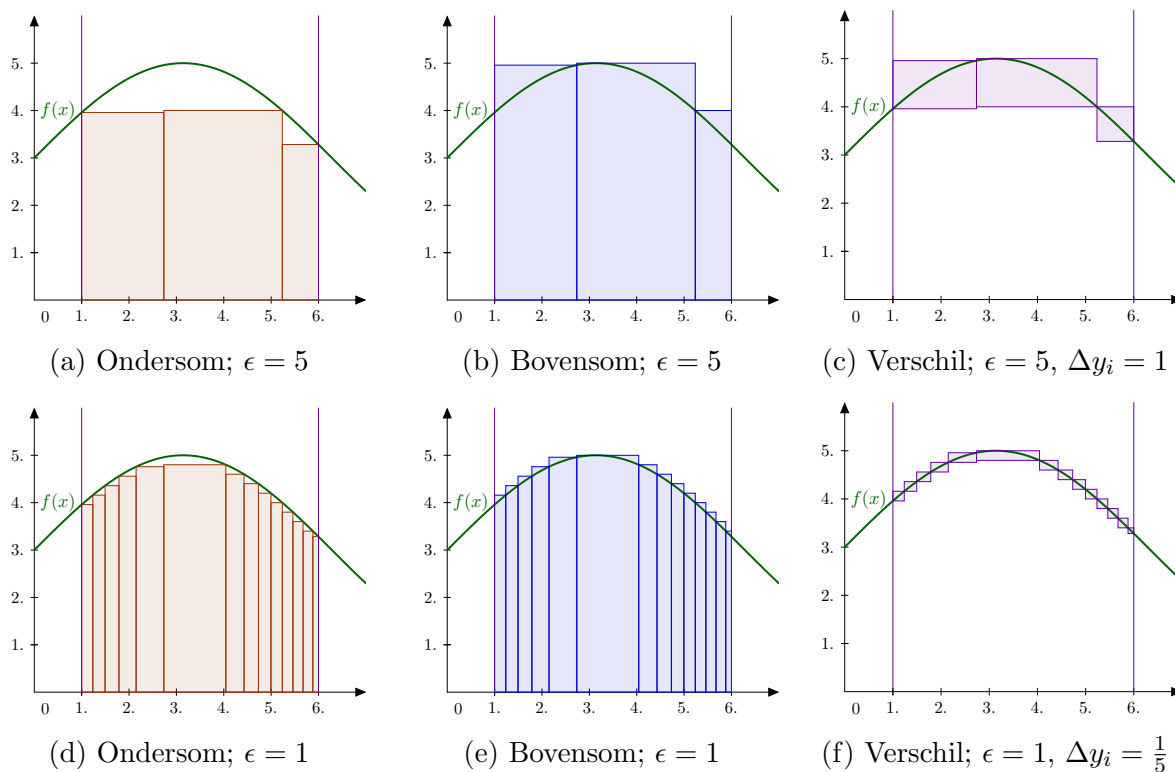
Zoals al aangegeven in sectie 3.3.1, kan de Riemann integraal in veel gevallen bepaald worden. Op voorwaarde dat er sprake is van een reële functie f , die op het interval $[a, b]$ continu is, is het bestaan van de Riemann integraal gegarandeerd.

Om na te gaan hoe deze garantie werkt, kan er gekeken worden naar de ‘onder’ en ‘bovensom’. Deze specifieke sommen ontstaan door in Riemannsom (6) de ‘labels’ t_i zo te kiezen dat zij voor elk interval Δx_i de maximum, respectievelijk de minimum functie-waarde geven.

De ‘onder’ en ‘bovensom’ kunnen gezien worden als de ‘worst case scenario’; als het verschil tussen deze sommen willekeurig klein gemaakt kan worden, dan is dat ook automatisch het geval voor elke andere ‘labeling’ t_i . Door de intervallen Δx_i zo in te delen dat, voor elk interval het verschil Δy_i tussen de ‘onder’ en ‘bovensom’ kleiner is dan $\frac{\epsilon}{b-a}$, kan dit doel worden bereikt; i.e. $\Delta y_i < \frac{\epsilon}{b-a}$. Middels deze keuze wordt het verschil tussen de ‘onder’ en ‘bovensom’ namelijk gegeven door:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Delta y_i \cdot \Delta x_i &< \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \\ &= \frac{\epsilon}{b-a} \cdot (b-a) \\ &= \epsilon. \end{aligned} \tag{8}$$

In onderstaand figuur is dit idee grafisch uitgewerkt.



Figuur 8: Een grafische verklaring voor de toepasbaarheid van de Riemann integraal

Het slim indelen van de intervallen Δx_i , zoals dat in Figuur 8 is gedaan, wordt mogelijk gemaakt door de continuïteitsaannname voor functie f . Omdat er verondersteld wordt dat de functie f continu is op het interval $[a, b]$, zal er altijd een ‘x-interval’ aangegeven kunnen worden waarvoor de functiewaarden $f(x)$ binnen een te kiezen marge kunnen fluctueren. Dat is immers basaal gesproken de definitie voor continuïteit.

In dit concrete geval betekent dit, dat startende vanaf linkergrens $x_0 = a$, de volgende intervalgrens x_i bepaald wordt door de functie

$$f_{\max \text{ verschil}}(x_i) = \max_{t \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(t)\} - \min_{t \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(t)\},$$

gelijk te stellen aan $\Delta y_i < \frac{\epsilon}{b-a}$. Omdat hier in de praktijk meerdere oplossingen uit kunnen volgen, dient de kleinste oplossing gekozen te worden voor de volgende intervalgrens x_i . Tot slot moet er natuurlijk ook rekening gehouden worden dat de nieuwe intervalgrens x_i de rechter intervalgrens b niet passeert, zodat het laatste interval ook wordt afgesloten met deze, vooraf opgegeven, rechter intervalgrens.

Dat dit technische verhaal niet tot problemen leidt, wordt hopelijk duidelijk in Figuur 8.

Tot slot dan nog de link tussen vergelijking (8) en Figuur 8. In vergelijking (8) gaat het om de arbitraire nauwkeurigheidsmarge van ϵ . Deze ‘grootheid’ kan in de subfiguren 8c en 8f ‘vertaald’ worden naar één overkoepelende verschilrechthoek met breedte $b - a$ en hoogte $\Delta y_i = \frac{\epsilon}{b-a}$. Het enige dat er is gebeurd is dat deze grote ‘verschilrechthoek’ in stukken is geknipt, zodat deze ‘bedekkend’ over de grafiek van f geschoven kan worden.

3.3.4 Invloed van ‘tag-keuze’ op de Riemannsom

Figuur 8 kan gezien worden als een ‘worst case scenario’. De ‘tags’ zijn zo gekozen dat er een zogeheten ‘ondersom’ en ‘bovensom’ ontstaat. Hierdoor zou men zich af kunnen vragen wat de invloed van de vrij te kiezen ‘tags’ is, i.e. “Levert het anders kiezen van de ‘tags’ (bij een gelijke intervalverdeling Δx_i) een veel nauwkeuriger antwoord?”

Deze vraag kan mooi beantwoord worden door de keuze van willekeurige ‘tags’ (zie ook de subfiguren van Figuur 7), te vergelijken met de ‘ondersom tag-keuze’ uit Figuur 8 (zie subfiguren 8a en 8d) en de ‘bovensom tag-keuze’ uit Figuur 8 (zie subfiguren 8b en 8e).

De oppervlaktebenadering die deze ‘tag-keuzes’ teweeg brengen voor de Riemannsom, i.e. de uitkomst van (6), is uiteengezet in Tabel 1.

n	‘tag-keuze’; Ondersom	Vershil	‘tag-keuze’; Bovensom	Vershil	‘tag-keuze’; Willekeurig	Vershil
3	19.38	3.09	24.16	1.69	23.25	0.78
14	21.90	0.57	22.89	0.42	22.55	0.08
69	22.36	0.11	22.56	0.09	22.47	0.00

Tabel 1: Invloed ‘tag-keuze’ op Riemannsom (6); Willekeurig vs. Onder- en Bovensom

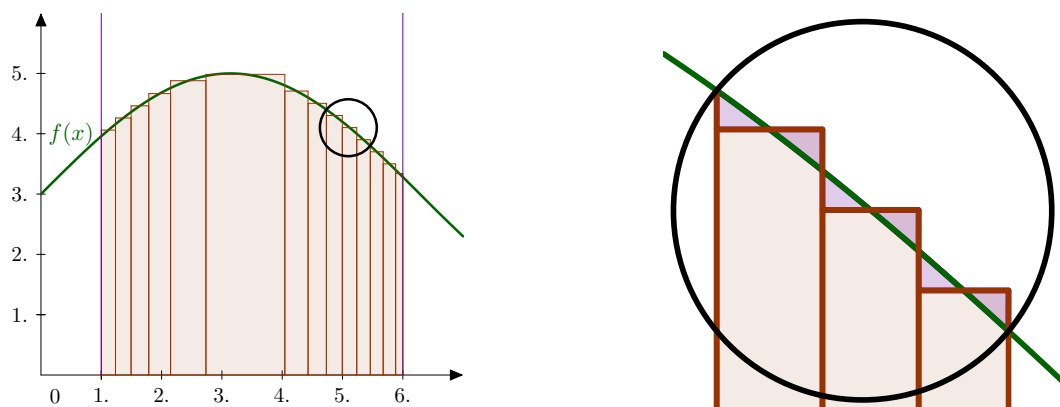
De verschillende oppervlaktebenaderingen in Tabel 1 zijn vergeleken met de daadwerkelijke oppervlakte onder de grafiek van de functie $f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 3$. De exacte waarde van deze oppervlakte, zoals die is ingesloten tussen de x-as, de grafiek van f en de grenzen $x = 1$ en $x = 6$, wordt gegeven door de integraal $\int_1^6 f(x) dx$. Met behulp van primitieve technieken, die later aan bod zullen komen in subsecties 3.4 en 3.5, kan aangetoond worden dat de exacte waarde van deze integraal wordt gegeven door:

$$\int_1^6 f(x) dx = 15 + 4 \left(\cos\left(\frac{1}{2}\right) - \cos(3) \right) \approx 22.47$$

Deze exacte waarde is gebruikt om de verschilkolommen in Tabel (1) uit te kunnen rekenen. Deze kolommen geven dus een beeld van de nauwkeurigheid van elk van de verschillende ‘typen’ Riemannsommen. Op basis van deze verschillen kan opgemerkt worden dat naar mate het aantal intervallen n toeneemt, elk van de verschillende ‘typen’ Riemannsommen een betere benadering geeft van de exacte integraal. Daarnaast is ook duidelijk zichtbaar dat de willekeurige ‘tag-keuze’ aanzienlijk betere benaderingen geeft dan de onder- of bovensom. Voor een gegeven aantal intervallen is in deze vergelijking de willekeurige ‘tag-keuze’ dus het best, echter wordt iedere benadering steeds beter naar mate het aantal intervallen n wordt verhoogd.

Tot slot is het natuurlijk ook interessant om na te denken over welke ‘tag-keuze’ optimaal is. Ongetwijfeld is er namelijk nog een betere optie dan het willekeurig kiezen van de ‘tags’. An sich kan er gesteld worden dat gegeven een specifieke Riemannsom, er altijd wel een perfecte ‘tag-keuze’ is waarin de benadering van de Riemannsom exact klopt. Hiervoor moeten de ‘tags’ dan zo gekozen worden dat de tekorten en excessen elkaar perfect in balans houden. Dit idee ontwijkt echter de ‘true spirit’ van de Riemann integraal, die stelt dat “elke gelabelde partitie” gebruikt zou kunnen worden.

Wanneer men dan toch voor een ‘algemene’ optimale keuze wil kiezen, valt te beredeneren dat de ‘middensom’ de beste middenweg is tussen de ‘onder-’ en ‘bovensom’. Bij een lineaire functie zorgt de ‘middensom’ er namelijk voor dat tekorten en excessen elkaar exact in evenwicht houden. Het mooie is dat een voldoende ‘gladde’ functie (i.e. een differentieerbare functie) ‘lokaal’ gezien kan worden als een lineaire functie.



(a) Riemannsom met ‘middentags’ (b) Middensom; tekorten en excessen in evenwicht

Figuur 9: De ‘middensom’ als optimale middenweg tussen de ‘onder-’ en ‘bovensom’.

3.4 De hoofdstelling van de Calculus

Een van de belangrijkste stellingen in de calculus beschrijft een verband tussen de (onbepaalde) integraal en de afgeleide. Technisch gezien is deze stelling opgesplitst in twee delen. Echter kan in het gebruik van de hoofdstelling, i.e. bij het berekenen van bepaalde integralen, mogelijkkerwijs het onderscheid tussen de twee delen ietwat uit het zicht raken;

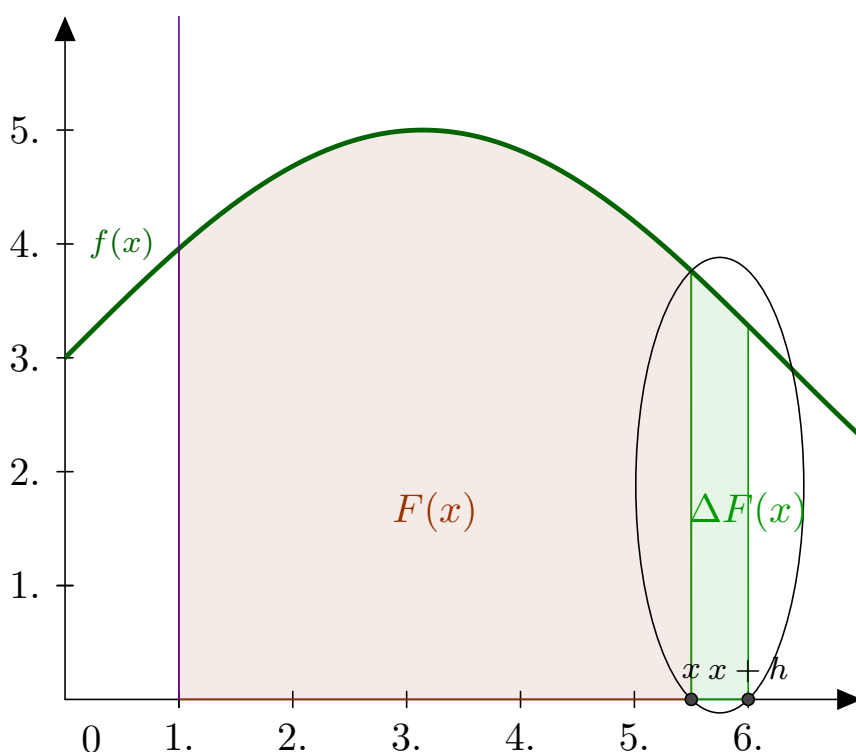
$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a), \quad \text{waarbij} \quad F(x) \text{ voldoet aan } F'(x) = f(x).$$

3.4.1 Deel 1 van de hoofdstelling

Om na te gaan hoe de hoofdstelling van de Calculus tot stand komt, nemen we als startpunt de oppervlaktefunctie. Zoals we hebben gezien in Figuur 4 uit subsectie 3.2, kan voor een reële, continue functie op het interval $[a, b]$, de oppervlaktefunctie met startpunt x_0 gedefinieerd worden als:

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad \text{waarbij } x_0 \in [a, b]. \quad (9)$$

Vervolgens kan er gekeken worden hoe deze oppervlaktefunctie $F(x)$ verandert als de rechtergrens x een klein stukje h verschuift. Er wordt dus specifiek gekeken naar de toename $\Delta F(x) = F(x+h) - F(x)$ van de oppervlaktefunctie $F(x)$. In een plaatje:

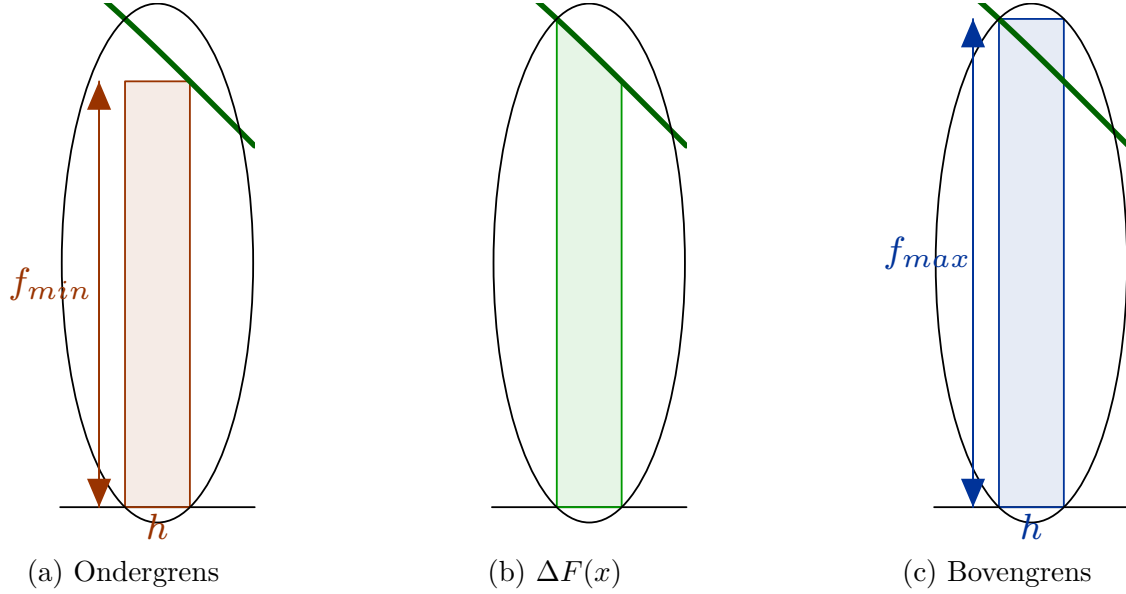


Figuur 10: Oppervlaktefunctie $F(x)$ met ‘aangroeiing’ $\Delta F(x) = F(x+h) - F(x)$

Vervolgens kunnen we een afchatting maken van de ‘aangroeiing’ $\Delta F(x)$. Als we inzoomen op het stukje $\Delta F(x)$, kunnen we een onder en bovengrens gaan bepalen van $\Delta F(x)$.

Geïnspireerd door [11] definiëren we eerst:

$$f_{\min} = \min_{t \in [x, x+h]} f(t) \quad \text{en} \quad f_{\max} = \max_{t \in [x, x+h]} f(t). \quad (10)$$



Figuur 11: Afschatting van $\Delta F(x)$; $\text{Ondergrens} \leq \Delta F(x) \leq \text{Bovengrens}$

Hiermee kan de volgende afschatting gemaakt worden van $\Delta F(x)$ (zie ook Figuur 11):

$$\begin{aligned} h \cdot f_{\min} &\leq \Delta F(x) \leq h \cdot f_{\max} \\ h \cdot f_{\min} &\leq F(x+h) - F(x) \leq h \cdot f_{\max} \\ f_{\min} &\leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f_{\max} \end{aligned} \quad (11)$$

Het bewijs is compleet door nu over te gaan op de limiet $h \rightarrow 0$. Met behulp van (10) en de afgeleide definitie ($f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$) volgt dan dat:

$$f(x) \leq F'(x) \leq f(x).$$

Middels de insluitstelling moet dus wel gelden dat:

$$F'(x) = f(x).$$

In het bovenstaande verhaal is het eerste deel van de calculus hoofdstelling bewezen:

*Gegeven een reële functie f , die continu is op het interval $[a, b]$, dan geldt voor de oppervlaktefunctie $F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt$ met startpunt $x_0 \in [a, b]$, dat:
De functie $F(x)$ is differentieerbaar (en daardoor automatisch continu) en er geldt:*

$$F'(x) = f(x) \text{ voor alle } x \in [a, b] \quad (12)$$

3.4.2 Oppervlaktefunctie versus primitieve functie

Een differentieerbare functie $F(x)$ die aan vergelijking (12) voldoet, noemen we ook wel een primitieve functie.

Er is een reden voor deze losstaande definitie; niet elke primitieve functie kan ook gezien worden als oppervlaktefunctie. Beschouw als voorbeeld de continue functie (op domein $\mathbb{R}$): $f(x) = e^x$. De functie $F(x) = e^x$ voldoet dan aan vergelijking (12), en is dus een primitieve functie voor $f(x)$. Toch kan de primitieve functie $F(x) = e^x$ niet geïnterpreteerd worden als een oppervlaktefunctie (9). Voor het startpunt x_0 zou dan moet gelden dat:

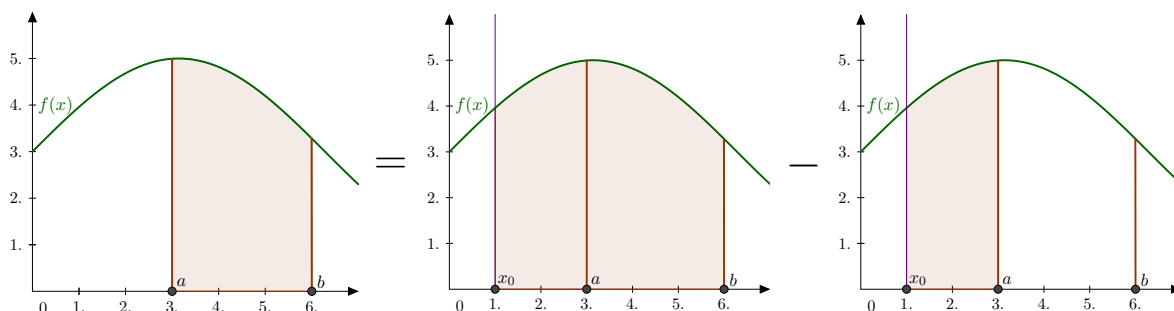
$$F(x_0) = 0,$$

terwijl dit niet kan omdat $e^x > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Primitieve functies zijn echter wel degelijk zeer waardevol voor het berekenen van bepaalde integralen. In Figuur (5) en (10) hebben we al impliciet kennis gemaakt met een handige eigenschap van oppervlaktefuncties:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^b f(x) dx - \int_{x_0}^a f(x) dx \\ &= F_{x_0}(b) - F_{x_0}(a). \end{aligned} \quad (13)$$

Wanneer we voor het gemak even veronderstellen dat $x_0 \leq a \leq b$, kunnen we deze vergelijking ook visueel goed uitleggen:⁸



Figuur 12: Illustratieve blik op vergelijking (13); $\int_a^b f(x) dx = F_{x_0}(b) - F_{x_0}(a)$.

Het visueel maken van vergelijking (13) kan overigens ook prima wanneer er geen restrictie wordt opgelegd op het startpunt x_0 . In het geval dat $x_0 > a$ en/of $x_0 > b$ kan procedureel gebruik gemaakt worden van rekenregel (2). De illustratieve verklaring is iets minder intuïtief; doordat er dan van rechts naar links wordt gesommeerd, is de infinitesimale intervalbreedte ‘ dx ’ negatief, wat resulteert in een negatieve integraal.

⁸Met dank aan [2]

3.4.3 Deel 2 van de hoofdstelling

Vergelijking (13) kan in weze opgevat worden als een ‘rekentruc’ voor het berekenen van bepaalde integralen. Het mooie aan deze truc is echter dat deze nog steeds werkt als we in plaats van een oppervlaktefunctie $F_{x_0}(x)$, gebruik maken van een primitieve functie. Voor het toepassen van (13) hoeven we ons dus niet druk te maken over het startpunt x_0 en dit is in feite waar deel 2 van de hoofdstelling van de Calculus over gaat.

Dat ‘rekentruc’ (13) ook werkt voor primitieve functies $F(x)$ heeft ermee te maken dat twee verschillende primitieve functies, die van dezelfde functie $f(x)$ afkomstig zijn, slechts een constante van elkaar verschillen. Vergelijk dit eventueel met de eigenschap van oppervlaktefuncties, zoals we dat hebben laten zien in vergelijking (3) en tevens in Figuur (5)).

Voor twee dergelijke primitieve functies $F_1(x)$ en $F_2(x)$ geldt dus dat:

$$F_2(x) = F_1(x) + c. \quad ^9$$

Dat verschillende primitieven een constante van elkaar kunnen verschillen maakt niet uit voor het gebruiken van de rekenregel (13), ze vallen immers tegen elkaar weg, i.e.:

$$\begin{aligned} F_2(b) - F_2(a) &= (F_1(b) + c) - (F_1(a) + c) \\ &= F_1(b) - F_1(a) \end{aligned}$$

Dit feit kan ook nog vanuit een ander perspectief bekeken worden. Neem bijvoorbeeld een primitieve functie $F(x)$ en de oppervlaktefunctie $F_a(x)$ (met startpunt a , i.e. $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$). Nu geldt:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F_a(b) - F_a(a) \\ &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^a f(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) dx. \end{aligned} \tag{14}$$

Samenvattend kunnen we dus concluderen dat het in vergelijking (13) niet uitmaakt van welke specifieke oppervlaktefunctie of primitieve functie er gebruik gemaakt wordt.

Hiermee is dan ook het tweede deel van de calculus hoofdstelling bewezen:

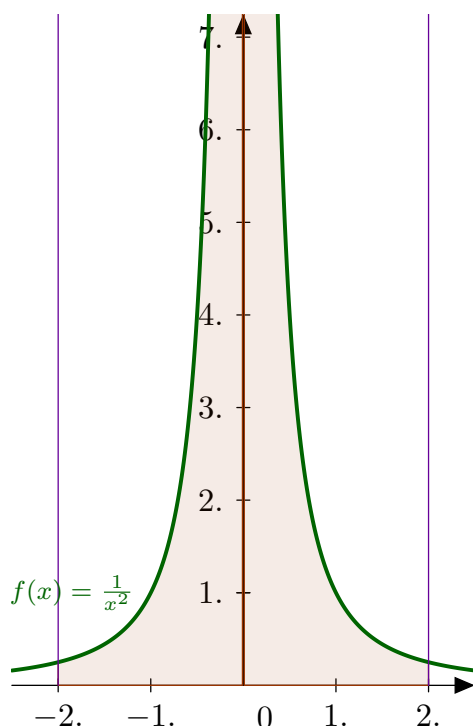
Gegeven een reële functie f , die continu is op het interval $[a, b]$, en een primitieve functie $F(x)$ heeft, dan geldt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \tag{15}$$

⁹Een bewijs hiervoor kan gevonden worden in subsectie 9.2 van de bijlage.

3.4.4 Belang van de continuïteitseis in deel 2 van de hoofdstelling

We merken tot slot op dat de eis van continuïteit in bovenstaande stelling niet vergeten dient te worden. Dit kunnen we illustreren aan de hand van de integraal $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx$. Hieronder is deze integraal grafisch weergegeven, tezamen met één foutieve en één correcte berekening.



$$\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx = F(2) - F(-2)$$

$$= \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=-2}^{x=2} \stackrel{10}{=} \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \right) = -1.$$

✗

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx &= \int_{-2}^{0^-} \frac{1}{x^2} dx + \int_{0^+}^2 \frac{1}{x^2} dx \\ &= [F(0^-) - F(-2)] + [F(2) - F(0^+)] \\ &= \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=-2}^{x=0^-} + \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=0^+}^{x=2} \stackrel{10}{=} \left(-\frac{1}{0^-} - \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} - -\frac{1}{0^+} \right) \\ &= 2 \cdot \infty - 1 \end{aligned}$$

✓

Figuur 13: Belang continuïteitseis bij (15); foutieve en correcte berekening $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx$.

De functie $f(x) = \frac{1}{x^2}$ heeft een asymptoot voor $x = 0$, waardoor de functie slechts continu is op het domein $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, zie eventueel ook bovenstaand figuur. De functie is dus niet continu op het interval $[-2, 2]$, wat de reden is dat de berekening $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx = F(2) - F(-2)$ van hierboven tot een verkeerd resultaat leidt. Om de integraal correct uit te rekenen dient het niet-continue interval $[-2, 2]$ opgedeeld te worden in de continue intervallen $[-2, 0)$ en $(0, 2]$. De bovenstaande correcte berekening laat zien dat de integraal $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx$ onbegrensd is.

¹⁰Hoe deze primitieve functie bepaald kan worden, komt nader aan bod in subsectie 3.5. Met enige differentieer-kennis kan men echter wel nagaan dat vergelijking (12) klopt voor $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $F(x) = -\frac{1}{x}$

3.5 Primitiveren in formulevorm; de basics

In de voorgaande subsectie hebben we gezien dat primitieven handig gebruikt kunnen worden om bepaalde integralen uit te rekenen. Dit brengt het probleem naar voren hoe een primitieve $F(x)$ bepaald kan worden voor een gegeven functie $f(x)$. Dit proces wordt ook wel primitiveren genoemd. Vanuit de definitie

$$F'(x) = f(x),$$

kan opgemaakt worden dat primitiveren de omgekeerde bewerking is van differentiëren. Met het gedachtegoed van ‘omgekeerd differentiëren’, gekoppeld met een beetje puzzelwerk, kan men tot een aardige lijst van ‘standaard-primitieven’ komen. In onderstaande tabel is een lijst met standaard-primitieven gegeven. Met uitzondering van de laatste 3 primitieven kunnen al deze primitieven gevonden worden door middel van ‘anti-differentiëren’, dan wel gecontroleerd worden door middel van differentiëren. Hoe de laatste 3 primitieven gevonden kunnen worden, is toegelicht in subsectie 9.3 van de bijlage.

Functie $f(x)$	Primitieve $F(x) = \int f(x) dx$
$f(x) = x^n$ met $n \neq -1$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + C$ ¹¹
$f(x) = a^x$ met $a > 0$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + C$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$ ¹²
$f(x) = {}^a\log(x)$ met $a > 0$ en $a \neq 1$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \ln(x) - x) + C$
$f(x) = \ln(x)$	$F(x) = x \ln(x) - x + C$ ¹²
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + C$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + C$
$f(x) = \tan(x)$ met $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$F(x) = -\ln(\cos(x)) + C$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$F(x) = \tan(x) + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin(x) + C$
$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arccos(x) + C$
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \arctan(x) + C$

Tabel 2: Een lijst met standaard-primitieven

¹¹De kritische lezer kan opmerken dat deze primitieve niet geheel accuraat is. Bij functies $f(x)$ waarvan het domein in verschillende deelintervallen uiteenvalt, kan formeel gezien de constante in elk domeininterval verschillend gekozen worden. Strict genomen kan de constante voor de primitieve $F(x) = \ln(|x|)$, voor $x < 0$ en $x > 0$ dus verschillend gekozen worden ([13]). Een meer formele primitieve van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ wordt hierdoor gegeven door:

$$F(x) = \begin{cases} \ln(x) + C_1, & \text{als } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2, & \text{als } x < 0 \\ \text{ongedefinieerd,} & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

¹²De kritische lezer kan opmerken dat deze primitieven slechts een speciaal geval vormen van de bovenstaande primitieve

Het zou natuurlijk ook mooi zijn als we naast de ‘basis-functies’, ook functies die samengesteld zijn uit de basisfuncties (i.e. elementaire functies ¹³) kunnen differentiëren. Gelukkig is dit inderdaad mogelijk, door gebruik te maken van een ‘afgeleide’ van enkele differentieer-regels. Twee bekende regels voor differentiëren zijn de ‘constante-regel’ (i.e. $[\alpha f(x)]' = \alpha f'(x)$) en de ‘somregel’ (i.e. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$). Deze regels zijn ook één op één te vertalen in primitiever-regels. Deze eigenschappen tezamen worden ook wel de lineariteitseigenschap genoemd. Voor primitieven luidt deze eigenschap dus als volgt:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] \, dx = \alpha \int f(x) \, dx + \beta \int g(x) \, dx \quad \text{lineariteit} \quad (16)$$

Naast bovenstaande lineariteitseigenschap bestaan er ook nog twee andere primitiever regels/technieken. Deze komen voort uit de overige differentieer-regels; i.e. de product-regel (i.e. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$) en de kettingregel (i.e. $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$). De tegenhangende primitiever-regels hiervan zijn de ‘techniek’ partieel integreren en de substitutieregels:

$$\begin{aligned} \int [f(x) \cdot g(x)] \, dx &= F(x) \cdot g(x) - \int [F(x) \cdot g'(x)] \, dx && \text{partieel integreren} \\ \int [f(g(x)) \cdot g'(x)] \, dx &= F(g(x)) && \text{substitutieregels} \end{aligned} \quad (17)$$

Ondanks dat de bovenstaande primitiever technieken/regels het mogelijk maken om een breder scala aan functies te kunnen primitiveren, wordt dit naar mijn slechts beperkt behandeld in het middelbaar onderwijs. De technieken uit (17) zijn dan ook vrij technisch van aard. In de veel gebruikte lesmethode “Getal en Ruimte” is een keuze onderwerp gewijd aan de substitutieregels en de techniek van partieel integreren.

3.6 Primitiveren; conceptueel lastiger dan differentiëren

Uit de hoofdstelling van de Calculus volgt dat primitiveren gezien kan worden als de omgekeerde bewerking van differentiëren. Hierdoor zou de illusie kunnen ontstaan dat ‘de actie’ primitiveren qua moeilijkheidsgraad soortgelijk is aan ‘de actie’ differentiëren. Helaas blijkt dit niet het geval.

Er bestaat namelijk geen algoritme voor het vinden van de primitieve van een (elementaire) functie ([17]). Er kan zelfs nog erger gesteld worden dat primitiveren in formulevorm in sommige situaties onmogelijk is ([13]). Hiermee wordt dan niet eens zozeer bedoeld dat een primitieve functie niet altijd bestaat. Sterker nog, een primitieve functie bestaat meestal juist wel, hetgeen wordt gegarandeerd door de hoofdstelling van de calculus voor elke reële, continue functie $f(x)$ op het interval $[a, b]$.

¹³In de wiskunde verstaat men onder een elementaire functie een functie die is opgebouwd uit een eindig aantal exponenten, logaritmen, constanten, één variabele en n-de machtswortels door compositie en combinaties en door alleen gebruik te maken van de vier elementaire operaties (+ − × ÷) ([4])

Wat er bedoeld wordt met de bewering dat primitiveren in formulevorm niet altijd mogelijk is, is dat zelfs als een primitieve functie bestaat, deze niet altijd te schrijven is als een elementaire functie. Enkele beruchte voorbeelden van dit soort functies zijn:

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \sin(x^2) dx, \quad \int \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad \int \frac{1}{\ln(x)} dx, \quad \int x^x dx \quad {}^{14} \quad (18)$$

Om daadwerkelijk te bewijzen dat primitiveren in formulevorm niet altijd mogelijk is, is diepgaandere wiskunde vereist. In dit verslag wordt daar echter niet op ingegaan, maar de geïnteresseerde lezer verwijs ik graag door naar de theorie van ‘Differential Galois theory’.

Tot slot vereist primitiveren veel van de regulatievaardigheden, i.e. oriënteren, plannen en controleren ([17]). Om dit te illustreren, kijken we naar de volgende integralen.

$$\int \frac{1}{x-1} dx, \quad \int \frac{1}{x^2-1} dx, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx, \quad \int \frac{x}{x^2+1} dx \quad (19)$$

Ondanks dat deze integralen globaal veel op elkaar lijken, vereisen ze een compleet verschillende oplosstrategie. De uitwerkingen van deze onbepaalde integralen kunnen gevonden worden in subsectie 9.4 van de bijlage. Met name het grote verschil in aanpak en uitkomst van de tweede, en derde onbepaalde integraal, is bijzonder te noemen. Op het eerste gezicht zouden de meeste lezers dat misschien niet verwachten wanneer het enige verschil een ‘+’ of ‘-’ teken is.

Met behulp van de onbepaalde integralen in (19), kan ook het grote verschil in conceptuele moeilijkheidsgraad tussen differentiëren en primitiveren goed geïllustreerd worden. Als we de integranden van (19) namelijk niet hoefden te primitiveren, maar gingen differentiëren, zien de oplosstrategieën er juist wel soortgelijk uit.

3.7 De ‘magische’ integratieconstante

Een ietwat ondergeschoven aspect bij primitiveren is de integratieconstante. Het valt me op dat het belang van deze bijkomstige constante niet voor iedereen altijd duidelijk is. Recent kwam me bijvoorbeeld nog ter ore dat een universitaire wiskunde docent aan pre-master studenten vertelde dat de constante van de onbepaalde integraal niet zo belangrijk is, en vergeten kan worden.

Dat vind ik toch een merkwaardige uitspraak, al kan ik me in sommige situaties wel voorstellen dat de constante van de primitieve een inferieure rol heeft. Als men bijvoorbeeld het doel heeft om een bepaalde integraal uit te rekenen middels de hoofdstelling van de calculus, valt de constante weg in het verschil $F(b) - F(a)$. In deze situatie valt er dus wel degelijk wat voor te zeggen om de integratieconstante ‘tactisch te vergeten’.

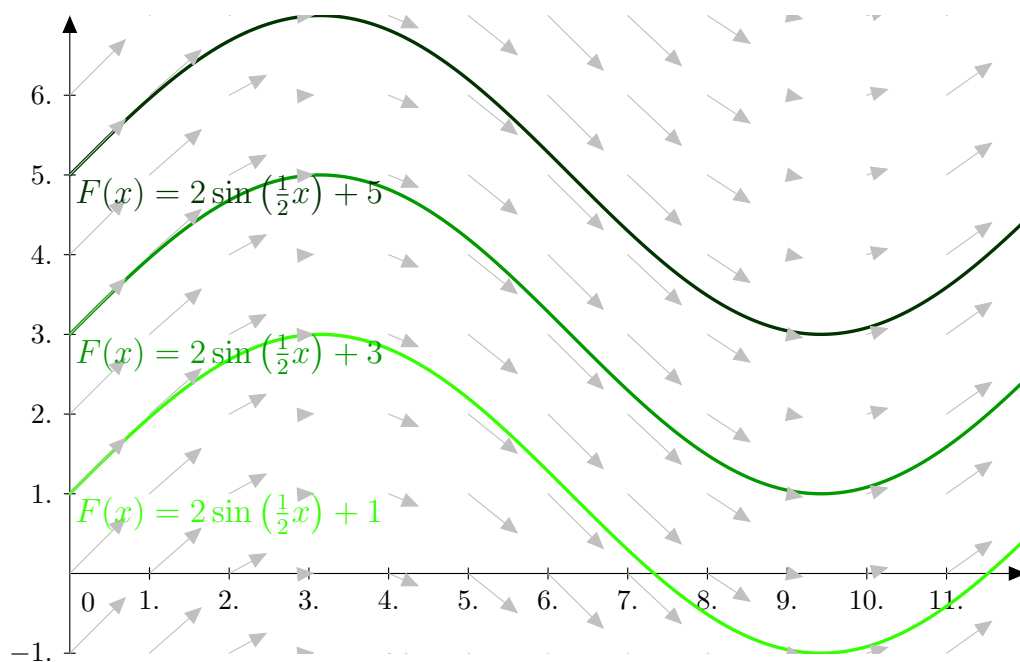
Als het echter gaat om het bepalen van een primitieve functie, is er mijns inziens wel een rol weggelegd voor de integratieconstante. In sectie 3.2 zagen we bijvoorbeeld dat de constante gerelateerd kan worden aan het ‘startpunt’ x_0 van een oppervlaktefunctie.

¹⁴Van links naar rechts staan de eerste vier functies bekend als de ‘Error functie’, de ‘Fresnel functie’, ‘de goniometrische integraal’ en de ‘logaritmische integraal functie’ ([3])

Er zit echter wel een subtiel verschil tussen een oppervlaktefunctie en een primitieve functie, waar we dieper op in zijn gegaan in sectie 3.4.2. Toch kan ook bij een ‘zuiver’ primitieve functie een betekenis gevonden worden voor de integratieconstante, deze wordt namelijk ingegeven door een ‘beginpunt’. Om daar een beter beeld van te krijgen, kan nader gekeken worden naar de definiërende eigenschap van primitieven; i.e.:

$$F'(x) = f(x).$$

Wanneer we deze vergelijking bekijken in het licht van een differentiaalvergelijking, ontstaat het idee om de vergelijking te visualiseren aan de hand van een vectorveld. Kiezen we bijvoorbeeld de functie $f(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$, dan ziet het vectorveld voor de differentiaalvergelijking $F'(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$ er als volgt uit:



Figuur 14: Vectorveld bij ‘differentiaalvergelijking’ $F'(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$

Het vinden van een primitieve voor de functie $f(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$, is equivalent aan het oplossen van de differentiaalvergelijking $F'(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$. De oplossing is in beide gevallen de ‘verzameling functies’ $F(x) = 2 \sin(\frac{1}{2}x) + C$.

Wanneer we het probleem van het vinden van een primitieve, interpreteren als het oplossen van een differentiaalvergelijking, zien we met behulp van Figuur 14 dat er vele verschillende oplossingen bestaan, die slechts een constante van elkaar verschillen. Wanneer we echter een ‘beginconditie’ opgeven, bijvoorbeeld dat de grafiek van de oplossing door het punt $(0, 1)$ moet gaan, is er nog maar een oplossing mogelijk; $F(x) = 2 \sin(\frac{1}{2}x) + 1$. In de context van differentiaalvergelijkingen wordt de integratieconstante bepaald door je ‘beginconditie’. Afhankelijk van de probleemsetting kan een ‘beginconditie’ bijvoorbeeld de ‘begin snelheid’ van een auto zijn, of de ‘begin temperatuur’ van een kopje koffie.

4 Onderzoeksvragen & Hypothesen

In dit gedeelte van het verslag komen de onderzoeksvragen aan bod. Allereerst benoemen we de onderzoeksvragen die we met dit onderzoek trachten te beantwoorden.

Vervolgens bespreken we, waar mogelijk, onze hypothesen of verwachtingen bij elk van de onderzoeksvragen.

4.1 Onderzoeksvragen

In dit onderzoek werken we met een hoofdvraag, die we trachten te beantwoorden aan de hand van drie deelvragen. Inhakend op de titel van dit onderzoek, is onze hoofdvraag:

“Hoe kun je integreren conceptueel leren begrijpen?”

De drie deelvragen waarmee we deze hoofdvraag trachten te beantwoorden zijn:

1. Wat is de moeilijkheidsgraad van het onderwerp integraalrekening voor middelbare scholieren met wiskunde B?
2. Hoe verhoudt procedurele kennis zich tot conceptuele kennis bij middelbare scholieren met wiskunde B als het op het onderwerp integraalrekening aankomt?
3. Lesmateriaal voor integraalrekening
 - (a) Wat voor (technische) aspecten van de integraalrekening behandelen docenten in de les?
 - (b) Zijn er illustratieve aspecten, vanuit het theoretisch kader van dit verslag, die bruikbaar zijn als alternatief en inzichtelijk lesmateriaal?

4.2 Hypothesen en verwachtingen

Hieronder zullen we ingaan op de hypothesen/ verwachtingen die we hebben bij elk van de onderzoeksvragen. Om deze hypothesen kracht bij te zetten hebben we hierbij zoveel mogelijk geprobeerd om onze verwachtingen te koppelen aan de literatuur.

4.2.1 Moeilijkheidsgraad integraalrekening

Gelijk aan [17] verwachten we dat integraalrekening tot een van de lastigste onderdelen van de schoolwiskunde behoren.

In dit artikel wordt aangehaald dat de moeilijkheid van integraalrekening (mede) verklaard kan worden met het begrip metacognitie. Dit begrip omvat metacognitieve kennis (i.e. kennis over het eigen cognitief functioneren) alsmede regulatievaardigheden (i.e. oriënteren, plannen en controleren). De conclusie van [17] is dat vooral de regulatievaardigheden een belangrijke rol spelen bij integraalrekening; aandacht voor processen zoals oriënteren, plannen en controleren of zelftoetsen zou de kwaliteit van het onderwijs kunnen vergroten.

Daarnaast speelt ook mee dat we verwachten dat primitiveren conceptueel lastiger is dan differentiëren, zoals tevens beschreven in sectie 3.6 van het theoretisch kader.

Ten eerste kunnen leerlingen niet terugvallen op één standaard ‘algoritme’ om een elementaire functie te kunnen primitiveren, waar dat bij differentiëren wel kan. Die problematiek reikt zelfs nog verder; sommige elementaire functies kunnen helemaal niet geprimitiveerd worden (niet in ‘formulevorm’ althans ¹⁵). Ook hierin onderscheid de bewerking primitiveren zich van de bewerking differentiëren. Deze twee aspecten tezamen hintten in ieder geval in de richting dat primitiveren lastiger is dan differentiëren.

4.2.2 Procedurele kennis versus conceptuele kennis van integraalrekening

Onze hypothese is dat wiskunde B leerlingen bij het onderwerp integraalrekening vooral terugvallen op procedurele kennis.

Het vermoeden is dat er bij het onderwerp integraalrekening de leerconceptie ¹⁶ hoofdzakelijk ‘het memoriseren van algoritmische technieken’ is, zonder dat er echt wordt begrepen wat men aan het doen is en waarom ([12]). Bij het berekenen van bepaalde integralen wordt deze algoritmische techniek gegeven door de hoofdstelling van de calculus; $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, waarbij $F(x)$ voldoet aan $F'(x) = f(x)$.

Zoals bij meerdere onderwerpen in de wiskunde didactiek wel aan bod komt, is hier dan vooral sprake van een instrumentele aanpak, en te weinig van een relationele aanpak. Het gevaar hiervan vinden we terug in [12]:

“Studies suggest that students’ abilities to conduct routine standard procedures (commonly as a product of memorization) are often mistaken for conceptual understanding of the underlying concepts.”

Naast procedurele versus conceptuele kennis, of instrumentele versus relationele kennis, wordt in de literatuur ook veel gesproken over cognitieve structuur en de mentale beeldvorming bij het onderwerp integraalrekening ([12], [14], [15], [16]). De conclusie van deze onderzoeken is dat het op het vlak van begripsvorming niet altijd even goed gaat bij integraalrekening. In [12] lezen we bijvoorbeeld:

“... although students may be able to accurately carry out integration procedures, they may not have a real understanding, or properly developed concept image, of the process.”

Een goed (praktijk)voorbeeld hiervan kan bijvoorbeeld gevonden worden in de titel van het Euclides artikel [20]: “De integraal, dat is de oppervlakte toch?”

¹⁵Een onbepaalde integraal als $\int e^{-x^2} dx$ kan bijvoorbeeld wel beschreven worden met een differentieerbare oppervlaktefunctie, echter is deze functie niet te schrijven als elementaire functie.

¹⁶Het begrip leerconceptie is een deelverzameling van metacognitieve kennis, wat op zichzelf weer een deelverzameling is van metacognitie. ([17])

Lesmateriaal voor integraalrekening

Op basis van de hypothesen bij de voorgaande twee vragen, komt het vermoeden naar boven dat integraalrekening op middelbare scholen een van de lastigere onderwerpen is, en dat er hierbij een zeer sterke focus is op instrumentele vaardigheden. Dit geeft natuurlijk voldoende reden om eens kritisch na te denken over het te gebruiken lesmateriaal bij dit onderwerp.

Over een tekort aan conceptueel begrip bij wiskundige concepten beschrijft [9] dan ook:

“Such a situation may be mainly due to a learning and teaching approach that emphasizes to a large extent the procedural aspects of the calculus, and neglects a solid grounding in the understanding of the conceptual underpinnings of the calculus. Moreover, the stereotyped exercises that are a feature of several calculus texts often encourage an instrumental approach, rather than a relational understanding of calculus concepts. Taking into account the procedure-oriented nature of some calculus texts, it should not be considered as strange if a student confuses manipulative skills with a real understanding of calculus content.”

4.2.3 (Technische) aspecten huidige lesmateriaal

Allereerst kan er gekeken worden naar het huidige lesmateriaal bij integraalrekening. Omdat het onderwerp integraalrekening erg breed is, verwachten we dat docenten keuzes zullen moeten maken in wat er wel of niet behandeld wordt in de les. Er is nou eenmaal een beperkte tijd voor elk hoofdstuk. Hierdoor zou de keuze gemaakt kunnen worden om bepaalde aspecten van de integraalrekening achterwege te laten, zodat de essentiële begrippen voldoende belicht worden.

4.2.4 Bruikbaarheid illustratieve aspecten van het theoretisch kader

Opdat sommige misvattingen bij integraalrekening mogelijkwerijs een resultaat zijn van sterk instrumenteel lesmateriaal, dient natuurlijk nagedacht te worden hoe het dan wel moet. Hoe kan het gewenste cognitieve begrip bij integraalrekening dan wel gerealiseerd worden? Onze hypothese is dat illustratief lesmateriaal van het theoretisch kader daarbij zou kunnen helpen.

Dat dit wel eens het geval zou kunnen zijn vinden we terug in [8]. Dit artikel beschrijft het opzetten van een lessenserie voor de introductie van de bepaalde integraal. Hierbij is het collaboratieve Lesson Study model gebruikt. De basis van het experiment was een leertheorie genaamd ‘Variation Theory’, maar ook de theorie van Tall en Vinner over ‘concept image’ en ‘concept definition’ werden onderschreven. Het doel van het experiment was om het conceptuele begrip van integraalrekening te verbeteren, waarbij de ‘Variation Theory’ werd toegepast met behulp van de dynamische geometrische software Geogebra.

Een resultaat van dit onderzoek was dat Geogebra inderdaad goed gebruikt kon worden voor een lesopzet binnen deze context, met als reden:

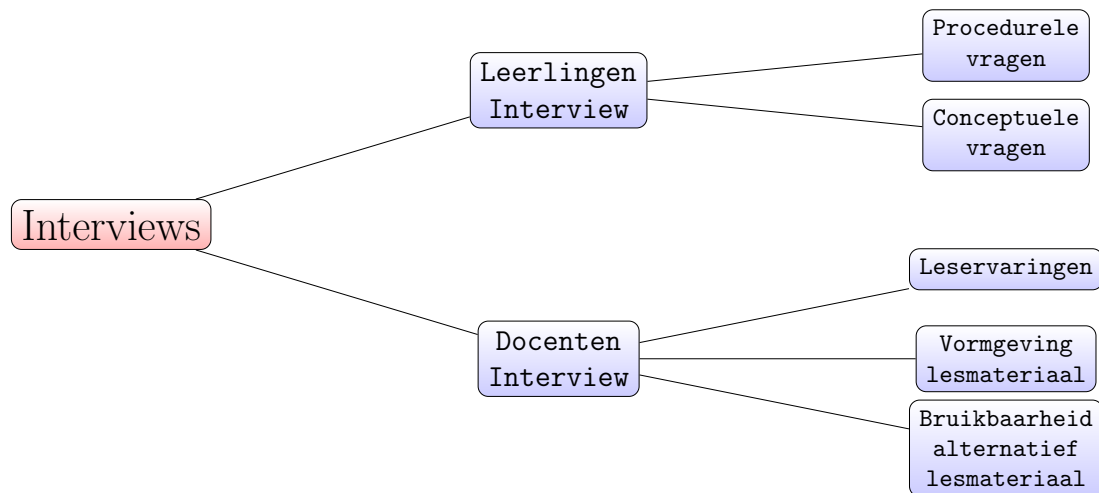
“We interpret this being mainly due to the fact that GeoGebra is an effective tool for the illustration of dynamic processes, e.g., the limiting process of Riemann sums, and it allows a learner to experience simultaneously many critical aspects, e.g., how the area and the value of the definite integral are effected when the interval is modified.”

Het moge uit dit verslag duidelijk worden dat ook de auteur de meerwaarde van GeoGebra erkent. Zodoende zijn nagenoeg alle plaatjes van het theoretisch kader in dit verslag met GeoGebra gemaakt. Zoals ook aangehaald in de quote, kan het in veel gevallen ook gebruikt worden om de dynamische processen te illustreren die schuilgaan achter de vele figuren in dit verslag. Denk daarbij bijvoorbeeld aan Figuur 4 waarin de interpretatie van de onbepaalde integraal (of primitieve functie) als ‘oppervlakte tot dusver’ functie wordt beschreven. Op deze wijze kunnen we mogelijk ook voldoen aan een van de hoofdaanbevelingen van [12]:

“These results suggest that if instructors do not focus on the definition (especially verbal) and graphical representations of definite integrals, many students may leave calculus with the ability to perform routine calculations (procedural fluency) but without a conceptual understanding of the procedures they are able to perform.”

5 Methode

In dit gedeelte van het verslag wordt de onderzoeksmethode beschreven. Hiervoor zijn 2 interviews gebruikt; een leerlingen interview en een docenteninterview. Beide interviews zijn verder opgedeeld in verschillende onderdelen. Het leerlingen interview is opgedeeld in procedurele vragen en conceptuele vragen, waar het docenten interview is opgedeeld in vragen over leservaringen, de vormgeving van het huidige lesmateriaal en de bruikbaarheid van alternatief & illustratief lesmateriaal uit het theoretisch kader. Zie ook onderstaand figuur voor een overzicht van deze indeling.



Figuur 15: Overzicht van de interviews

In onderstaande subsecties zal ingegaan worden op hoe deze interviews tot stand zijn gekomen. Welke keuzes zijn er bijvoorbeeld gemaakt, en waarom? De interviews zelf, alsmede uitwerkingen van het leerlingen interview en de verwerking van de resultaten, kan gevonden worden in sectie 8 van dit verslag.

5.1 Respondenten

Zoals al naar voren is gekomen bestaan de respondenten voor dit onderzoek uit zowel leerlingen als docenten. Hierbij was het bij de leerlingen van belang dat het onderwerp integraalrekening al voorbijgekomen was in de les, en evenzo was het voor de docenten van belang dat ze ervaring hadden in het onderwijzen van dit onderwerp.

Het onderwerp integraalrekening komt aan bod bij wiskunde B in 5 vwo. Het wisselt echter nog wel een beetje per school in welk gedeelte van het leerjaar dit behandeld wordt. Daarom heb ik ervoor gekozen om leerlingen uit 6 vwo wiskunde B te interviewen. Deze categorie leerlingen heeft het onderwerp immers sowieso gehad, maar zij staan ook nog eens dichtbij het te bereiken ‘eindexamen-niveau’.

Om een breed overzicht te hebben van verschillende leerlingen en docenten, heb ik ervoor gekozen om verschillende scholen te benaderen voor een interview. In totaal zijn er 8 docenten geïnterviewd van 6 verschillende scholen en 25 leerlingen van 5 verschillende scholen (verdeling: 3,4,5,6,7 leerlingen per school).

Het contact met deze scholen is gelegd vanuit bestaande netwerken. Zo kon ik bijvoorbeeld vrij gemakkelijk bij mijn oude stagescholen van schoolpracticum 1 & 2 terecht, maar ook op een school waar ik enkele maanden als invaldocent heb gewerkt. Tot slot heb ik mijn oude middelbare school ook bereid gevonden om mee te werken, alsmede twee UT docenten die ook als docent werkzaam zijn op middelbare scholen.

De leerlingen zijn op vrijwillige basis geselecteerd, met uitzondering van 1 school waar de docent zelf leerlingen had gevraagd mee te werken aan dit onderzoek. Bij de 4 overige scholen heb ik zelf mijn verhaal en onderzoek voorgelegd aan de leerlingen, waarbij ik mikte op ongeveer 5 vrijwilligers per school. Ondanks dat er hierbij dus niet geselecteerd is op cijfers of hoe goed iedere leerling was, gaven de meeste docenten wel aan dat de selectie leerlingen goed gevarieerd was in wiskundig niveau.

Het afnemen van de interviews liep voor het grootste deel goed. Het eerste leerlingen interview was helaas wel iets drukker, waarschijnlijk te wijten aan het feit dat dit interview op vrijdag het 7e uur was. Ondanks dat ik een paar keer wel heb aangegeven dat het de bedoeling was dat het interview individueel werd gemaakt, werd er hier en daar toch wel iets overlegd. Daarnaast hadden enkele leerlingen geen grafische rekenmachine bij zich, waar ze die wel mochten gebruiken. Met het uitlenen van mijn eigen grafische rekenmachine, of hier en daar samen te werken met een grafische rekenmachine, was dit laatste probleem echter eenvoudig opgelost.

Bij de docenten kwam het hier en daar voor dat men erg zelfstandig was in het invullen van de interviews. Voor het grootste deel was dit ook geen probleem, want de interviews waren ook volledig op papier uitgeschreven. Hier en daar bleek gaandeweg echter wel dat sommige vragen toch wel wat technisch waren, en dat niet altijd direct 100% duidelijk was wat voor antwoord er gevraagd werd. Omdat ik bij alle interviews aanwezig was, kon ik het dan nog wel kort verder toelichten.

Zoals gezegd gingen sommige docenten juist erg zelfstandig te werk, waarbij ik het idee had dat men hier en daar een wat vrijere opvatting heeft gebruikt van de vraag of het alternatieve lesmateriaal bruikbaar was. Bij een docent was dit wel erg nadrukkelijk het geval. Zo ging hij bij de vragen over het alternatieve lesmateriaal eerst alle beschrijvingen af om te bepalen of hij het wel of niet gebruikte, zonder telkens te kijken naar de expliciet verwezen figuren. Ter controle heb ik hem een aantal keer gevraagd of hij naar de figuren had gekeken en begreep wat ik bedoelde, en hierop zijn enkele vragen wel herzien. Echter kwam bij sommige vragen toch ook het licht onzekere antwoord 'ja', terwijl ik toch sterk mijn twijfels had of mijn intentie bij de lesstof ook echt over was gekomen.

Tot slot is er nog een docent weggelaten uit dit onderzoek. Deze is dus ook niet meegeteld bij de 8 docenten die zijn geïnterviewd. Toen ik langs kwam voor mijn interview stond deze docent op het punt om het onderwerp integraalrekening te behandelen, maar had dit nog niet eerder gedaan. In eerste instantie heb ik hierop gevraagd om het gedeelte over zijn leservaringen over te slaan, en het lesmateriaal te benaderen zoals hij het bedacht te behandelen. Later heb ik toch maar de afweging genomen om dit interview niet op te nemen in de resultaten. Het docenten interview is immers ook voornamelijk gericht op ervaren docenten.

5.2 Procedure

De procedure van dit interview was vrij vanzelfsprekend; het opgestelde leerlingen interview is afgenomen bij de verschillende leerlingen, en het opgestelde docenten interview is afgenomen bij de verschillende docenten.

Het leerlingen interview was voornamelijk gericht om het cognitieve begrip van integraalrekening te onderzoeken onder de leerlingen, waar respectievelijk het docenten interview voornamelijk was gericht op het lesmateriaal bij integraalrekening.

Beide interviews waren volledig uitgeschreven op papier, met hier en daar ook nog expliciet toelichtingen bij de vragen (zie bijvoorbeeld sectie 8.2.3). Om overige vragen en onduidelijkheden op te vangen ben ik zelf aanwezig geweest bij elk van de interviews.

Voor de interviews heb ik geen vaste tijd gehanteerd. Beide interviews duurden ongeveer een half uur, maar met sommige geïnteresseerde docenten heb ik soms wel iets langer om tafel gezeten.

5.3 Instrumenten

De instrumenten voor dit onderzoek zijn gegeven door het leerlingen en docenten interview.

Het leerlingen interview is grotendeels geïnspireerd op dat van [15]. De procedurele vragen hiervan zijn gericht om het cognitief begrip van leerlingen te onderzoeken, door ze specifiek gekozen bepaalde integralen te laten oplossen. Dat deze integralen net iets meer van het cognitief begrip vragen kan men nagaan in de uitgewerkte versie ervan, zie ook sectie 8.5.

Om leerlingen de mogelijkheid te geven al hun regulatievaardigheden (oriënteren, plannen en controleren) toe te passen (naar de conclusie van ([17])), is besloten het gebruik van de grafische rekenmachine toe te staan. Hiermee kan dan bijvoorbeeld gemakkelijk een (situatie)schets gemaakt worden bij de vragen, maar ook kunnen de antwoorden eenvoudig geverifieerd worden door middel van numerieke integratie.

Anders dan in [15], zijn er ook een aantal conceptuele vragen gesteld, die meer direct vragen welk begrip of kennis leerlingen hebben bij aspecten van integraalrekening. In deze vragen is een sterke focus gelegd op het begrip van de primitieve functie (of onbepaalde integraal).

Bij het docenten interview is er aandacht besteed om de grote hoeveelheid vragen toch zo beknopt mogelijk te stellen. Uit ervaring weet ik te zeggen dat het werk van een docent veel tijd vraagt. Een lange vragenlijst is dus al best veel gevraagd. Echter moeten de nodige vragen natuurlijk wel gesteld worden om goede informatie te verzamelen.

Om het geheel nog enigszins compact te houden is er een invulformulier opgesteld. Zodoende is het hopelijk mogelijk gemaakt om beknopte, doch functionele, antwoorden te vergaren. Om de bruikbaarheid van het illustratieve lesmateriaal uit het theoretisch kader te onderzoeken is bijvoorbeeld gekozen voor een vijf puntsschaal.

Tot slot is er ook nagedacht over de toelichtingen bij het tweede gedeelte van het interview. Deze zijn los bijgevoegd, zodat ze per gestelde vraag wel of niet geraadpleegd kunnen worden.

5.4 Analyse

De analyse van de interviews is gedaan in sectie 8.4. In dit gedeelte van het verslag zullen we beschrijven wat voor keuzes daarbij zijn gemaakt, i.e. hieronder beschrijven we hoe we de analyse van de interviews hebben aangepakt.

De procedurele vragen van het leerlingen interview zijn geanalyseerd door de antwoorden in te kaderen. Dit is gedaan soortgelijk aan hoe dit ook opgepakt zou worden in een correctiemodel. Op deze wijze kan niet alleen gekeken worden naar de oplossingsstrategie van verschillende leerlingen, maar ook naar de efficiëntie ervan.

De gekozen categorieën hierbij zijn:

1. Niks ingevuld / Geen beantwoording van de vraag
2. Schets gemaakt?
3. Oplosstrategie $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ gebruikt?
Ja? $\rightarrow$ Indien noodzakelijk; integraal correct opgesplitst?
 $\rightarrow$ Primitieve(n) correct bepaald?
4. Andere oplosstrategie gebruikt?
5. Correcte uitkomst (middels goede uitwerking)?

De conceptuele vragen zijn ook zoveel mogelijk ingekaderd, maar nu in termen van begrippen. Voor de betekenis van $\int_a^b f(x) dx$ kan daarbij bijvoorbeeld gedacht worden aan de categorieën:

- geen antwoord
- oppervlakte of vlakdeel
- infinitesimale sommatie

Een soortgelijke inkadering zullen we ook toepassen op de open vragen uit het eerste gedeelte van het docenteninterview. Het tweede en derde deel van dit interview zijn middels het antwoordformulier al redelijk ingekaderd.

Bij deze vragen zijn er invulcategorieën gebruikt in het kader van ‘Ja/?/Nee’ vragen, naast een vijf puntsschaal om te toetsen op bruikbaarheid (totaal onbruikbaar tot totaal bruikbaar). Om ook statistische uitspraken te kunnen doen over deze resultaten, zijn deze resultaten op de volgende wijze ‘vertaald’ naar integers:

$$\begin{array}{ll} \text{Ja/?/Nee} & \rightarrow \quad -1/0/1 \\ \text{Vijfpuntsschaal} & \rightarrow \quad -2/-1/0/1/2 \end{array}$$

Middels deze aanpak zullen we de gemiddelde $\bar{x}$ als de geschatte standaarddeviatie S bepalen. Dit stelt ons dan ook in staat om de resultaten visueel weer te geven.

6 Resultaten

In dit deel van het verslag zullen we de resultaten van ons onderzoek bespreken. Specifiek bespreken we hierbij de resultaten van de interviews, gespecificeerd per onderzoeksvraag. Daarbij zullen we ook terugblikken op onze hypothesen en verwachtingen van sectie 4.2.

1. Wat is de moeilijkheidsgraad van het onderwerp integraalrekening voor middelbare scholieren met wiskunde B?

Onze uitkomsten m.b.t. deze vraag lijken op twee gedachten te hinken. Wanneer we naar het docenten interview kijken, schat ongeveer de helft van de docenten de moeilijkheidsgraad van het onderwerp als “gemiddeld” in. Aan de andere kant ligt een docent ook juist het tegenstrijdige toe: “Het uitvoeren van de ‘regels’ is te doen. Begrip van waar ze precies mee bezig zijn is lastiger.”

Dat het begrip mogelijk een lastig punt is, is iets waar de tweede onderzoeksvraag nader op in gaat. Wel beamen we uit het leerlingen interview dat het uitvoeren van de ‘regels’ te doen lijkt te zijn. Daarin zien we dat het procedureel gebruik van de hoofdstelling (i.e. $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$) er goed in zit bij de leerlingen. Het primitiveren van basisfuncties gaat betrekkelijk goed, en ook het uitwerken van de eerste bepaalde integraal, i.e. $\int_{-2}^2 x^2 dx$, gaat nagenoeg foutloos.

Aan de andere kant komt ook naar voren dat de leerlingen grote moeite hadden met het uitwerken van de overige 5 integralen. Bij 3 van de 6 integralen kwam geen enkele leerling (op goede wijze) op het eindantwoord uit, terwijl bij de overige twee integralen minder dan de helft van de leerlingen het antwoord correct wist af te leiden.

Zoals we beschreven in de hypothese, zouden deze resultaten ook verklaard kunnen worden vanuit het begrip metacognitie. De regulatievaardigheden van oriënteren, plannen en controleren zien we dan ook nauwelijks terug in de uitwerkingen van de leerlingen. Geen enkele leerling heeft bijvoorbeeld bij het uitwerken van deze integralen een schets gemaakt van de functie (op papier althans, het zou natuurlijk kunnen dat ze de functie wel op de grafische rekenmachine geplot hebben). Ook heeft geen enkele leerling ook maar één van de integralen op een andere wijze dan via de hoofdstelling proberen op te lossen. Dit terwijl dit bij veel van de vragen toch zeker mogelijk, en misschien ook wel verstandig was. Zie daarvoor ook onze uitwerking in sectie 8.5. Tot slot hadden de leerlingen met behulp van hun grafische rekenmachine ook gemakkelijk hun antwoorden numeriek kunnen controleren. Gezien de resultaten van het interview lijkt het erop dat dit maar zeer beperkt gebeurd is.

Helaas kunnen we uit de verkregen resultaten de conclusie van [17] ook niet bekrachtigen. In dit onderzoek werd beweerd dat vooral de regulatievaardigheden een belangrijke rol spelen bij integraalrekening; aandacht voor processen zoals oriënteren, plannen en controleren of zelftoetsen zou de kwaliteit van het onderwijs kunnen vergroten. Omdat we deze processen niet goed hebben kunnen waarnemen bij de leerlingen, kunnen we ook niet stellen dat de leerlingen beter af waren geweest als deze vaardigheden wel naar voren waren gekomen. Echter heeft dat er wel alle schijn van.

Tot slot is de beantwoording van de laatste integraal ook erg interessant. Hierbij gaat het om de integraal $\int_{-2}^2 e^{-x^2} dx$. Gezien de functie $f(x) = e^{-x^2}$ niet geprimeerd kan worden (in formulevorm althans), kon deze integraal alleen numeriek met de grafische rekenmachine opgelost worden. Geen enkele leerling heeft dit echter ingezien, en 24 van de 25 leerlingen heeft deze vraag toch met de hoofdstelling geprobeerd op te lossen (de resterende leerling had helemaal niks ingevuld bij deze vraag). In een poging de functie $f(x) = e^{-x^2}$ toch te primitiveren kwamen de meest creatieve ‘oplossingen’ voorbij. Enkele voorbeelden zijn: $F(x) = e^{-x^2}$, $F(x) = \frac{1}{-2x}e^{-x^2}$, $F(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$ en $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 \cdot e^{-x^2}$.

2. Hoe verhoudt procedurele kennis zich tot conceptuele kennis bij middelbare scholieren met wiskunde B als het op het onderwerp integraalrekening aankomt?

In het verlengde van de resultaten op de vorige vraag, zien we dat ondanks het feit dat de leerlingen hoofdzakelijk wel wisten hoe ze de hoofdstelling van de calculus konden toepassen om onbepaalde integralen op te lossen, ze veel van de gevraagde integralen uit het leerlingen interview toch niet op goede wijze wisten op te lossen. Wat daarbij opvalt is dat het voornamelijk fout gaat bij de integralen die net buiten de gebaande paden treden, i.e. wat te doen met een absolute waarde? of wat te doen met een stuksgewijs gedefinieerde functie? Dit terwijl het primitiveren van basisfuncties juist betrekkelijk goed gaat, en nagenoeg alle leerlingen de eerste integraal foutloos wisten op te lossen. Dit lijkt erop te duiden dat de conceptuele kennis bij de leerlingen tamelijk beperkt is.

De docenten zijn met betrekking tot deze onderzoeksvraag tamelijk eensgezind. Nagenoeg alle docenten geven indien gevraagd aan dat leerlingen bij dit onderwerp vooral terugvallen op procedurele kennis. Of leerlingen ook voldoende cognitief begrip hebben bij dit onderwerp leidt tot meer discussie, voornamelijk met betrekking tot de interpretatie van het woord ‘voldoende’. De slotsom van deze discussie lijkt te zijn dat leerlingen voor het slagen van het eindexamen veelal voldoende cognitief begrip hebben, maar dat het cognitief begrip zelf toch wel matig is.

In het leerlingen interview is de leerlingen ook een aantal conceptuele vragen voorgelegd. Een van die vragen was bijvoorbeeld wat de betekenis is van ‘ $\int_a^b f(x) dx$ ’. De overgrote meerderheid, i.e. 18 van de 25 leerlingen, geeft daarbij een antwoord in de categorie ‘ingesloten oppervlakte (op het domein $[a, b]$)’. Uit onze tweede conceptuele vraag blijkt overigens wel dat de leerlingen overige toepassingen van de integraal, zoals met name het berekenen van een inhoud of booglengte, wel weten te benoemen.

Opmerkelijk is wel dat geen van de 25 leerlingen de ware kern van de integraal aanhaalt, i.e. ‘een infinitesimale som’. Dit terwijl er wel enkele leerlingen zijn (6 van de 25) die bij de derde conceptuele vraag wisten te beschrijven dat de (Riemann-)integraal als limietgeval geldt van de Riemannsom. Het begrip van de Riemannsom lijkt sowieso wel goed geland te zijn. Het merendeel van de leerlingen weet bijvoorbeeld wel aan te geven dat het bij de Riemannsom gaat om een opdeling in rechthoeken/staven/balkjes, die voorzien in een oppervlaktebenadering. Wel gaven sommige leerlingen de aspecten van ‘segmentatie’ en ‘oppervlaktebenadering’ niet tezamen aan.

In het laatste gedeelte van het leerlingen interview zijn ook een aantal vragen gesteld die ingaan op de conceptuele kennis van een primitieve functie $F(x)$. Daarbij lijkt het allereerst dat leerlingen het soms moeilijk vinden om hun conceptuele kennis onder woorden te brengen. Indien bijvoorbeeld gevraagd naar de definitie van een primitieve functie, of hoe het gebruikt kan worden om de integraal $\int_a^b f(x) dx$ exact uit te rekenen, zien we toch betrekkelijk veel verkeerde, onvolledige of semi-conceptuele antwoorden terug. Bij beide vragen vielen 9 van de 25 antwoorden binnen deze categorieën. Toch zien we bij het exact berekenen van de integralen dat de leerlingen wel beschikken over deze kennis. Echter wisten ze dit slechts in ruwweg de helft van de gevallen (14 respectievelijk 10 keer) ook correct te omschrijven bij deze twee vragen.

Ook is de leerlingen de vraag “Wat beschrijft een primitieve functie?” voorgelegd, waarbij we, zoals ook in de introductie beschreven, deze vraag als tegenhanger positioneren van dat de afgeleide functie een helling beschrijft. Uiteindelijk gaven slechts 5 leerlingen een antwoord dat hintte in de richting van een oppervlaktefunctie ‘op domein $[a, b]$ ’. Daarbij merken we graag op dat we dan ook nog erg soepel zijn omgesprongen met deze antwoordcategorie. Zodoende zijn de antwoorden “oppervlakte” en “de oppervlakte onder de grafiek?” bijvoorbeeld ook in deze categorie geschaard.

Tot slot is de leerlingen nog gevraagd of ze konden aangeven waarom er een constante C hoort bij een primitieve functie $F(x)$. Bij deze vraag zien we duidelijk terug dat de overgrote meerderheid van de leerlingen (20 van de 25) dit goed wist te verklaren met behulp van het gedachtegoed van ‘anti-differentiëren’. De verklaring hier zijnde dat de een constante weg valt bij differentiëren, waardoor er bij de omgekeerde route van primitiveren deze constante er wel bij hoort. Alhoewel dit een juiste beredening is, is deze wel gebaseerd op de procedurele vaardigheden, waar deze onderzoeksvraag zich juist op toespitst. Tegelijkertijd merken we ook op dat geen enkele leerling een andere, meer conceptuele, verklaring heeft gegeven voor de constante C .

3 (a) Wat voor (technische) aspecten van de integraalrekening behandelen docenten in de les?

Om deze onderzoeksvraag te beantwoorden is op specifieke aspecten geïnventariseerd of deze wel/niet aan bod kwamen in de les. Deze aspecten kan men terugvinden in sectie 8.2.2 van dit verslag. Tevens is er een toelichting geschreven bij elk van deze aspecten, welke gevonden kan worden in sectie 8.2.3 van dit verslag.

De beknopte resultaten van dit interview zijn in onderstaande tabel visueel weergegeven. De exacte aantallen kan men terugvinden in sectie 8.4.4 van dit verslag.

Opmerking; De visuele resultaten zijn gemaakt door een -1/0/1 schaalverdeling toe te passen op de antwoorden ‘nee’/‘?’/‘ja’. Met behulp hiervan is de geschatte standaarddeviatie S en het gemiddelde $\bar{x}$ uitgerekend. In bovenstaande tabel geeft de ingekleurde cirkel ‘de positie’ van $\bar{x}$ aan. De verticale lijnen geven de standaarddeviatie in de antwoorden aan. Deze zijn geplaatst op ‘de posities’ $\bar{x} \pm S$ aan, zij het niet dat deze meestal de uiterste grenzen -1/1 (i.e. ‘nee’/‘ja’) passeren.

Aspect	Behandelt u dit aspect in uw lessen? Visueel
1 (a)	$nee \bigcirc \text{-----} \bullet ja$
(b)	$nee \bigcirc + \text{-----} \bullet \text{-----} \bigcirc ja$
2 (a)	$nee \bigcirc \text{-----} + \text{-----} \bullet \text{-----} \bigcirc ja$
(b)	$nee \bigcirc \text{-----} \bullet ja$
(c)	$nee \bigcirc \text{-----} \bullet ja$
3 (a)	$nee \bigcirc + \text{-----} \bullet \text{-----} \bigcirc ja$
(b)	$nee \bigcirc + \text{-----} \bullet \text{-----} \bigcirc ja$
4 (a)	$nee \bigcirc \text{-----} \bullet ja$
(b)	$nee \bigcirc + \text{-----} \bullet \text{-----} \bigcirc ja$
(c)	$nee \bullet \text{-----} \bigcirc ja$
5 (a)	$nee \bigcirc \text{-----} + \bullet ja$
(b)	$nee \bigcirc \text{-----} + \bullet \text{-----} \bigcirc ja$
(c)	$nee \bigcirc \bullet \text{-----} + \text{-----} \bigcirc ja$
(d)	$nee \bigcirc \bullet \text{-----} + \text{-----} \bigcirc ja$
6 (a)	$nee \bigcirc \text{-----} \bullet ja$
(b)	$nee \bigcirc \text{-----} + \bullet ja$
(c)	$nee \bigcirc \text{-----} \bullet ja$

Tabel 3: Een visuele blik op de resultaten uit het tweede deel van het docenteninterview

In Tabel 3 zien we ten eerste dat de meeste gevraagde aspecten wel aan bod komen. Slechts 3 aspecten komen nauwelijks tot niet voor, namelijk degenen die horen bij de vragen 4(c), 5(c) en 5(d). Deze vragen hadden betrekking op ‘de aanwezigheid van andere integraalbegrippen naast de Riemannintegraal’, ‘het verschil tussen een oppervlaktefunctie en primitieve functie’ en ‘het belang van de continuïteitseis binnen de hoofdstelling van de calculus’.

Daarnaast zien we ook dat er toch ook een aantal aspecten zijn die sommige docenten wel en andere docenten niet oppikken in de les. In het bijzonder kan daarbij gedacht worden aan de aspecten behorende bij de vragen 1(b), 2(a), 3(a), 3(b) en 4(b). Nu riepen sommige van deze aspecten misschien ook wat twijfel op. Het geval dx negatief is bijvoorbeeld uitzonderlijk en komt misschien alleen bij wijze van rekenregel (2) aan bod in de les (n.a.v. vraag 2(a)). Evenzo twijfelden sommige docenten mogelijk in hoeverre ze de Riemannintegraal ook behandelden naar aanleiding van de formele definitie (n.a.v. vraag 4(b)).

Deze situatie was echter zeker niet het geval bij alle gevraagde aspecten. Zo waren er ook aspecten die daadwerkelijk verdeeld wel/niet aan bod leken te komen in de les. Denk daarbij bijvoorbeeld aan zaken als de historische notatie van de integraal (n.a.v. vraag 1(b)) en een achtergrond voor de primitieve functie, i.e. wat ‘beschrijft’ het? (n.a.v. vraag 3(b)).

3 (b) Zijn er illustratieve aspecten, vanuit het theoretisch kader van dit verslag, die bruikbaar zijn als alternatief en inzichtelijk lesmateriaal?

Ter beantwoording van deze onderzoeksvraag zijn verschillende aspecten uit het theoretisch kader direct aan de docenten voorgelegd. Deze aspecten zijn beschreven in sectie 8.2.4 van dit verslag.

In eerste instantie is de docenten gevraagd of deze illustratieve aspecten al zodanig in de huidige lessen voorkwamen. Dit zodat beoordeelt kan worden in hoeverre de aspecten ook als innovatief beschouwd kunnen worden. Daarnaast is gevraagd naar hun visie op de praktische bruikbaarheid van deze illustratieve theorieaspecten, waarbij gebruik gemaakt is van een vijfpuntsschaal: totaal onbruikbaar tot totaal bruikbaar. Op soortgelijke wijze als in bij de vorige onderzoeksvraag, zijn in onderstaande tabel deze resultaten visueel weergegeven. De ‘ruwe’ resultaten kunnen gevonden worden in sectie 8.4.5 van dit verslag.

Aspect	<i>Komen de beschreven illustratieve theorieaspecten uit sectie 3 van dit verslag zodanig voor in uw les?</i> Visueel	<i>Wat is in uw ogen de bruikbaarheid van de beschreven illustratieve theorieaspecten uit sectie 3 van dit verslag?</i> ¹⁷ Visueel
1	nee○+—●—○ja	‘TO’○—+—●—○‘TB’
2 (a)	nee○—●—+—○ja	‘TO’○—●—+—○‘TB’
(b)	nee○—●—+—○ja	‘TO’○—●—+—○‘TB’
(c)	nee○—●—+—○ja	‘TO’○—+—●—+—○‘TB’
3 (a)	nee○+—●—○ja	‘TO’○—+—●—+—○‘TB’
(b)	nee○—+—●—○ja	‘TO’○—+—●—○‘TB’
(c)	nee○—●—+—○ja	‘TO’○—+—●—○‘TB’
4 (a)	nee○—●—+—○ja	‘TO’○—+—●—+—○‘TB’
(b)	nee○—●—+—○ja	‘TO’○—+—●—○‘TB’
5 (a)	nee○—●—+—○ja	‘TO’○—+—●—+—○‘TB’
(b)	nee○—●—+—○ja	‘TO’○—●—+—○‘TB’

Tabel 4: Een visuele blik op de resultaten uit het derde deel van het docenteninterview

In eerste instantie kan opgemerkt worden dat beide antwoord categorieën erg verdeeld zijn. Tevens laat Tabel 4 een duidelijke correlatie zien tussen de twee categorieën. Dit is natuurlijk ook te verwachten, gezien het toepassen van lesmateriaal (hopelijk) direct gelinkt is aan hoe bruikbaar een docent dat lesmateriaal acht. Wel zijn er enkele illustratieve aspecten aan te wijzen die nog niet aan bod kwamen in de lessen van de docenten, maar die ze op de bruikbaarheidsschaal wel een stuk positiever ontvingen. Met name is dit het geval bij de aspecten uit vragen 3(c), 5(a) en 5(b), die ingaan op de continuïteitseis van de hoofdstelling van de calculus, respectievelijk twee alternatieve verklaringen aan dragen voor de integratieconstante C .

Heel voorzichtig gesproken zou gesteld kunnen worden dat de gevraagde illustratieve theorieaspecten eerder niet dan wel aan bod komen, maar dat deze aspecten wel eerder

¹⁷Op een vijfpuntsschaal; “Totaal Onbruikbaar tot Totaal Bruikbaar”.

bruikbaar dan onbruikbaar worden ingeschat. Ten opzichte van de huidige lesinvullingen, worden de aspecten dus gemiddeld positief beoordeeld op bruikbaarheid. De aspecten die het meest bruikbaar zijn beoordeeld vinden we bij vraag 1, 3(a), 3(b), 4(b).

Achtereenvolgend gaan deze vragen over ‘De introductie van een oppervlaktefunctie als concept achter de primitieve functie’, ‘Een illustratief bewijs voor (het eerste deel van) de hoofdstelling van de calculus’, ‘het gebruik van oppervlaktefuncties voor een beeldvorming bij het tweede deel van de hoofdstelling van de calculus’ en ‘globaal soortgelijke functies kunnen totaal verschillende primitieven hebben’, op de manier zoals deze in het theoretisch kader aan bod zijn gekomen. Het item dat het minst bruikbaar is beoordeeld (als onbruikbaar) is vraag 2(b). Deze vraag beschrijft dat ‘voor een continue functie de Riemannsom een willekeurig nauwkeurige waarde kan aannemen, door de intervalhoogte Δy_i slim te kiezen’.

De verdeeldheid in de resultaten is echter groot, en ook de steekproefgrootte $n = 8$ is tamelijk beperkt. Bij bovenstaande uitspraken dient men daarom een slag om de arm te nemen.

7 Conclusie en discussie

In deze slotsectie van het verslag bespreken we de conclusies en discussie van dit onderzoek. Voor de conclusie gaan we ten eerste in op onze onderzoeksvragen, maar daarnaast komt ook aan bod hoe deze conclusies zich verhouden tot de gebruikte literatuur.

In de discussie werpen we een kritische blik op onze bevindingen. Daarbij gaan we bijvoorbeeld in op het belang van dit onderzoek; is het wel nodig om meer aandacht te besteden aan het cognitief begrip bij integreren? Daarnaast gaan we in de discussie ook nader in op de beperkingen van dit onderzoek en geven we suggesties voor verder onderzoek.

7.1 Conclusie

Allereerst beamen we vanuit [17] dat integraalrekening waarschijnlijk een van de lastigste onderdelen van de schoolwiskunde is. Wel hinken onze resultaten met betrekking tot deze vraag op twee gedachten. De slotsom wordt goed samengevat door een van de docenten: “Het uitvoeren van de ‘regels’ is te doen. Begrip van waar ze precies mee bezig zijn is lastiger.” Dit zien we dan ook terug in de resultaten van het leerlingen interview. Dit is ook wat we hadden verwacht vanuit de literatuur, zoals we al reeds aanhaalden van [12]:

“... although students may be able to accurately carry out integration procedures, they may not have a real understanding, or properly developed concept image, of the process.”

Toch kan het cognitief begrip juist ook een cruciale rol spelen bij het oplossen van integraalrekening vraagstukken. Ook dat zien we terug in het procedurele deel van het leerlingen interview. Waar de vragen ietwat buiten de gebaande paden treden, merken we op dat leerlingen meestal niet meer goed lijken te weten hoe verder. Daarnaast, misschien nog wel signifikanter, leerlingen leken veelal niet in te zien wanneer hun aanpak of oplossing onjuist was.

Hierin lijkt ook de conclusie van [17] op te gaan; vooral aandacht voor processen zoals oriënteren, plannen en controleren of zelftoetsen zou de kwaliteit van het onderwijs kunnen vergroten. Wanneer leerlingen een beter beeld zouden hebben van de opgaven, zouden ze misschien ook sneller geneigd zijn om hun uitkomst numeriek te controleren met de grafische rekenmachine. Daarnaast zijn de meeste van de gevraagde integralen ook eenvoudiger op te lossen door eerst een situatieschets te maken van de opgave. Dit is door geen van de leerlingen gedaan (op papier althans), terwijl het maken van een schets met een grafische rekenmachine nauwelijks extra tijd kost. Dat een schets bij de gevraagde integralen zeker meerwaarde kan hebben, is verder uitgewerkt in sectie 8.5.

Leerlingen lijken bij het onderwerp integraalrekening dus vooral terug te vallen op hun procedurele vaardigheden. Dit wordt ook bevestigd door de docenten in het docenteninterview. Bij het oplossen van onbepaalde integralen is er bijvoorbeeld een sterke focus op het operationeel toepassen van de formule

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a), \quad \text{waarbij} \quad F(x) \text{ voldoet aan } F'(x) = f(x).$$

Ook bij de conceptuele vragen van het leerlingen interview zien we de focus op procedurele vaardigheden terugkomen. Bij de open vragen over verschillende aspecten van de primitieve functie is de meeste kennis te herleiden tot bovenstaande formule. Leerlingen weten wel hoe ze de formule kunnen gebruiken om een onbepaalde integraal op te lossen, maar vinden het al een stuk lastiger de definitie ervan te geven, laat staan te verwoorden wat de primitieve functie ‘beschrijft’. Tevens verklaren nagenoeg alle leerlingen (20 van de 25) de integratieconstante C op een procedurele wijze; gezien een constante ‘wegvalt’ bij differentiëren, moet deze bij een primitieve functie, zijnde een ‘anti-afgeleide’, wel opgenomen worden.

Een ander aspect dat naar voren komt uit het leerlingen interview is een sterke focus op de opvatting ‘integraal is oppervlakte’. Er was zelfs een leerling die bij het oplossen van de onbepaalde integralen de absolute waarde nam van al zijn uitkomsten, omdat een oppervlakte niet negatief kan zijn. De leerlingen beschrijven de integraal $\int_a^b f(x) dx$ grotendeels als ingesloten oppervlakte (18 van de 25 leerlingen), waarbij de Riemannsom een benadering geeft van die oppervlakte (15 van de 25 leerlingen) en de primitieve functie gebruikt kan worden om deze oppervlakte exact te maken (middels de hoofdstelling van de calculus).

Nu is dit ook een lastig punt; het is lastig om de oppervlakte interpretatie in zijn geheel te vermijden bij het onderwerp integreren. Zodoende is ook in dit verslag verschillende malen de verwoording ‘oppervlaktefunctie’ gebruikt als achtergrondbegrip voor de primitieve functie. Toch benadrukken we nogmaals graag dat deze interpretatie formeel gezien onjuist is. Ten eerste is een oppervlakte per definitie positief, terwijl een integraal ook negatieve waarden kan aannemen. Ten tweede doet het geen recht aan de vele andere toepassingen van de integraal zoals bijvoorbeeld een inhoud of booglengte (welke de leerlingen in ons onderzoek overigens wel wisten te benoemen).

Ook in de literatuur vinden we dit punt terug. In de discussie van [8] wordt bijvoorbeeld besproken dat dit één van de kritieke aspecten is die belangrijk lijken te zijn voor het succesvol leren van het concept ‘de onbepaalde integraal’. Specifiek wordt beschreven:

“... in spite of many efforts, it is plausible that many students’ concept images of the definite integral will be based on the area interpretation (cf. [10]) and [19]. To change this, it may require a thorough revision of mathematics textbooks in school since they seem to emphasize this aspect. It is hard for an individual teacher to resist such a tradition but as our third lecture verifies, it is possible in a technological environment.”

We hopen dat dit onderzoek een opzet kan zijn en ideeën kan geven voor zo’n revisie van het lesmateriaal. Een aspect dat daar tevens belangrijk in zou zijn, is dat de ware kern van de integraal, i.e. een infinitesimale som, nadrukkelijker naar voren komt. Geen van de leerlingen heeft dit als betekenis van de integraal benoemd in het leerlingen interview, terwijl het juist deze kerngedachte is die ervoor zorgt dat er een ‘oppervlakte’, inhoud of booglengte kan worden berekend (door respectievelijk infinitesimale rechthoeken, cilinderschijven of lijnstukken te sommeren).

Jaren terug (in 1983) is het belang hiervan ook al onderschreven in [14], wat daarna ook weer is opgepikt door [8] en [12]. In de conclusie van [14] wordt gesteld:

“... a core of four items was found difficult, even by good students. These four items, concerned with the understanding of integration as the limit of a sum, constitute the real stumbling block.”

Een eenvoudige stap ter bevordering van het begrip ‘infinitesimale sommatie’ is het benoemen van de historische achtergrond van de integraal in de les. Opmerkelijk is dat ons onderzoek uitwijst dat dit juist een van de aspecten is die slechts gematigd wordt aangehaald in de les.

In het kader van onze tweede onderzoeksvraag is gekeken welke technische aspecten werden aangehaald in de les. Hieruit blijkt dat de gevraagde onderdelen vrijwel allemaal voorkomen in de les. In vergelijking met de lespraktijk en dit verslag, leek er soms wel wat twijfel te zijn over de technische diepgang van de aspecten.

Een drietal aspecten kwam in de huidige lespraktijk echter nog niet tot nauwelijks voor, waaronder het belang van de continuïteitseis binnen de hoofdstelling van de calculus. Juist dit aspect is mogelijk juist wel relevant om op te nemen in de les. Zeker gezien we in [8] ook lezen:

“Students use procedures without considering definitions and theorems when solving problems.”

Binnen het aspect van de continuïteitseis zien we deze opmerking ook feilloos terug bij de opgave uit het leerlingeninterview waarin wordt gevraagd om de integraal $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx$ (exact) op te lossen. Alle ondervraagde leerlingen hebben dit aangepakt door direct de hoofdstelling procedureel toe te passen, zonder in acht te nemen dat de functie $f(x) = \frac{1}{x^2}$ een asymptoot heeft bij $x = 0$.

In het kader van onze laatste onderzoeksvraag; “welke illustratieve aspecten uit het theoretisch kader van dit verslag zijn mogelijk bruikbaar als alternatief en inzichtelijk lesmateriaal?”, is het aspect van de continuïteitseis opnieuw aangehaald. Ditmaal met de verwijzing naar het uitgewerkte voorbeeld van de integraal $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx$ in Figuur 13 op pagina 20. De docenten beoordelen deze uitleg toch redelijk positief, en komen gemiddeld tot het oordeel ‘neutraal’ tot ‘bruikbaar’. Dit is misschien niet een heel overtuigend oordeel, maar het is wel beduidend ‘positiever’ dan de mate waarin dit aspect tot op heden werd behandeld door de docenten. In het kader van de sterke correlatie tussen het toepassen van lesmateriaal en de beoogde bruikbaarheid ervan, lijkt er toch nog wel enige heil te zitten in deze uitleg.

Ditzelfde fenomeen deed zich voor met de twee aspecten die ingaan op een inzichtelijke verklaring voor de integratieconstante. Tot nu toe koppelen docenten dit concept nog maar zeer beperkt aan het begrip van de oppervlaktefunctie of het idee van een beginpunt bij van een differentiaalvergelijking. Toch zien ze hier nog wel enige mogelijkheid toe om dit wel op te nemen in de lessen.

Eigenlijk zijn alle illustratieve theorieaspecten uit sectie 3 van dit verslag positief ontvangen in relatie tot de mate van toepassing. Dit geldt dus in het bijzonder bij de 3 eerder genoemde aspecten. Daarnaast zijn 4 aspecten sowieso als ‘bruikbaar’ beoordeeld.

In totaal maakt dat dat 7 van de 10 aspecten ofwel erg positief zijn ontvangen ten opzichte van de huidige lesinvulligen, ofwel gemiddeld als ‘bruikbaar’ zijn beoordeeld. Dit schetst in zijn algemeenheid wel een optimistisch beeld over de toegevoegde waarde van het illustratieve lesmateriaal uit sectie 3 van dit verslag.

Tot slot kunnen we voor de eindconclusie van dit onderzoek stellen dat de conceptuele kennis van integreren bij leerlingen tamelijk beperkt lijkt te zijn, en dat illustratieve aspecten uit dit verslag mogelijk van meerwaarde kunnen zijn om hier verbetering in aan te brengen. Nader onderzoek zal echter moeten uitwijzen in welke mate deze conclusie zich ook op grotere schaal laat meten, wat ons tot de discussie van dit verslag aanbrengt.

7.2 Discussie

In dit onderzoek is gekeken of er alternatief en inzichtelijk lesmateriaal is om het conceptuele begrip van leerlingen rondom het onderwerp integreren te vergroten. De bruikbaarheid van dit lesmateriaal is enkel getoetst door docenten te vragen een oordeel te vellen over de bruikbaarheid van enkele illustratieve theorieaspecten uit sectie 3 van dit verslag. Om tot een sluitende conclusie te komen zal ook in de praktijk getoetst moeten worden of deze illustratieve theorieaspecten daadwerkelijk van meerwaarde kunnen zijn binnen het middelbaar onderwijs.

Ook kan opgemerkt worden dat de beperkte steekproefgrootte van 8 docenten en 25 leerlingen inherent enige onzekerheid met zich meebrengt over de resultaten. Ook vanuit dit perspectief is nader onderzoek nodig om uit te wijzen of de hoofdconclusie van dit onderzoek zich ook op grotere schaal laat meten.

Daarnaast zijn er ook nog enkele additionele tekortkomingen te benoemen. Allereerst is er bijvoorbeeld de (chronologische) opbouw van het onderzoek, welke toch ietwat atypisch is. Het onderzoek is namelijk gestart vanuit een onderbuikgevoel dat er begrip mist bij het onderwerp integreren, en heeft hierdoor in de start mogelijk een te open karakter gehad. In het kader van een formeel sociaal wetenschappelijk onderzoek, zou de ‘onderzoeksstructuur’ misschien sterker zijn geweest als in den beginne meer aandacht was besteed aan het vastleggen en afbakenen van de onderzoeksvragen. Tegelijkertijd heeft het ‘vrije’ karakter van dit onderzoek misschien ook wel wat charme. Het eindresultaat is namelijk wel dat de 3 dimensies ‘technische inhoud’, ‘begrip van leerlingen’ en ‘illustratief lesmateriaal’ allemaal tezamen komen rondom hetzelfde onderwerp.

Bij de uitvoering van de interviews kunnen ook een paar tekortkomingen gevonden worden. Wat dit betreft zijn de voornaamste punten reeds aangehaald in sectie 5.1. Bij de interviews had er bijvoorbeeld gewaakt kunnen worden voor een meer ‘gecontroleerde onderzoeksomgeving’. Denk hierbij aan het feit dat leerlingen niet altijd hun grafische rekenmachine bij zich hadden of dat ze bij het oplossen van de opgaven soms toch nog wel bij elkaar om bevestiging zochten. Ter plekke is geprobeerd zo goed mogelijk met de omstandigheden om te gaan, door bijvoorbeeld grafische rekenmachines uit te lenen, of

aan te geven dat de interviews individueel uitgewerkt dienden te worden.

Bij de docenteninterviews vormde de technische aard van de vragen soms voor wat problemen. Ook zou een docent bij de vragen over invulling van het eigen lesmateriaal, het invullen van een ‘nee’ als negatief kunnen ervaren, en daardoor meer geneigd zijn om ‘ja’ als antwoord te geven. Al met al is deze problematiek hopelijk tot een minimum beperkt door verschillende scholen, docenten en klassen leerlingen bij de interviews te betrekken.

Het voornaamste discussiepunt voor dit onderzoek is waarschijnlijk de vraag in hoeverre het een probleem is dat het conceptueel begrip van leerlingen omtrent het onderwerp integreren tamelijk beperkt is. Is het wel nodig om te proberen meer begrip voor het onderwerp aan te brengen?

Aan de ene kant zou men kunnen stellen dat een leerling zijn eindexamens ook kan halen als hij goed weet hoe en wanneer hij ‘het trucje’ moet toepassen. Daarnaast is er ook een tijdsaspect; hoe meer tijd er wordt besteed aan de begripsvorming omtrent het onderwerp integreren, hoe minder tijd er overblijft om procedureel te oefenen met opgaven. Bij meerdere wiskunde onderwerpen speelt deze vraag te parten; wat is een goede balans tussen relationele en instrumentele instructie?

De reden dat er in dit onderzoek voor gekozen is om eens goed te kijken naar het conceptuele begrip van integreren, is het idee dat een belangrijk deel hiervan simpelweg mist binnen het huidige onderwijs. Een vraag als “Wat is een integraal?”, zal veelal beantwoord worden in de trant van een ‘ingesloten oppervlakte’. Zoals reeds beschreven is niet alleen het begrip ‘oppervlakte’ in deze problematisch, maar ook dat de ware crux van een ‘infinitesimale sommatie’ hierbij onvoldoende aan het licht komt. Daarnaast is het ook mijn veronderstelling dat vele technische aspecten rondom integraalrekening in de huidige lespraktijk niet goed uit de verf komen. Een daarvan is bijvoorbeeld een ‘betekenis’ achter een primitieve functie $F(x)$, of haar bijkomende integratieconstante C .

Naast deze ‘gevoelskwestie’ kan ook meer algemeen beargumenteerd worden waarom het conceptuele kennis bij welk wiskundig onderwerp dan ook van belang is. Een belangrijk punt is bijvoorbeeld dat het voorkomt dat kennis ‘in afzonderlijke eilandjes’ wordt opgeslagen. Voldoende conceptueel begrip van een onderwerp kan ervoor zorgen dat er een raamwerk ontstaat waarin nieuwe informatie opgeslagen kan worden. Bij een eindexamen, waarin alle opgedane kennis samenkomt, kan het wel eens een uitdaging zijn om alleen vanuit een uitgebreide ‘trukendoos’ te werken.

Hier komt nog eens bij dat een vooraf opgegeven algoritmische aanpak niet altijd de beste is. In veel situaties kan het raadzaam zijn om een probleem eerst eens in algemene zin te analyseren en bijvoorbeeld een situatieschets te maken. Daarin komt ook weer de conclusie van [17] terug; vooral aandacht voor processen zoals oriënteren, plannen en controleren of zelftoetsen zouden de kwaliteit van het onderwijs kunnen vergroten. Voor de onbepaalde integralen uit het leerlingen interview is dit uitgewerkt in sectie 8.5.

In de slotsom blijft echter een goede balans tussen relationele en instrumentele kennis cruciaal. Beiden zijn nodig om een wiskundig probleem niet alleen te kunnen analyseren, maar deze ook met enig tempo correct op te kunnen lossen.

8 Interviews

8.1 Interview Leerlingen

Dit interview is ingedeeld in procedurele vragen en theoretische vragen. In totaal zal dit interview vermoedelijk ongeveer 30-45 minuten in beslag nemen.

8.1.1 Procedurele vragen

Bereken, indien mogelijk exact, de volgende integralen. Gebruik van de grafische rekenmachine als hulpmiddel is toegestaan, echter wordt er gevraagd naar algebraïsche berekeningen.

1. $\int_{-2}^2 x^2 dx$
2. $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx$
3. $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx$
4. $\int_0^1 f(x) dx$, waarbij $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{als } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 2, & \text{als } x > \frac{1}{2} \end{cases}$
5. $\int_0^2 f(x) dx$, waarbij $f(x) = 1 - |x - 1|$ ¹⁸
6. $\int_{-2}^2 e^{-x^2} dx$.

8.1.2 Conceptuele vragen

De volgende vragen zijn gericht op de theorie van integraalrekening.

1. Wat is volgens jou de betekenis van $\int_a^b f(x) dx$?
2. Kun je naast het berekenen van een oppervlakte, nog twee andere voorbeelden geven van ‘type’ vragen waarbij de integraal gebruikt wordt?
3. Wat is een Riemannsom, en hoe is dit gerelateerd aan de integraal $\int_a^b f(x) dx$?
4. (a) Wat is een primitieve functie (i.e. wat is de definitie ervan)?
(b) Wat beschrijft een primitieve functie? (hoe is een primitieve functie gerelateerd aan een integraal?)¹⁹
(c) Hoe kan de primitieve functie gebruikt worden om de integraal $\int_a^b f(x) dx$ exact uit te rekenen?
(d) Waarom hoort er een constante C bij een primitieve functie $F(x)$?

¹⁸Met $|\cdot|$ wordt de absolute waarde aangeduid (die een invoer ten alle tijde positief maakt).

¹⁹Als voorbeeldantwoord voor deze vraag beantwoorden we de vraag: “Wat is een afgeleide functie?” Een afgeleide functie $f'(x)$ beschrijft voor elke x -waarde de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f (in het punt met de gegeven x -coördinaat).

8.2 Interview Docenten

Dit interview is ingedeeld in 3 delen; uw leservaringen bij integraalrekening, uw lesmateriaal bij integraalrekening, en tot slot uw visie op illustratieve theorieaspecten uit sectie 3 van dit verslag. In totaal zal dit interview vermoedelijk ongeveer 30-40 minuten in beslag nemen.

8.2.1 Uw leservaringen bij integraalrekening

Zou u de volgende vragen willen beantwoorden naar aanleiding van uw eigen leservaringen?

1. Moeilijkheidsgraad en knelpunten integraalrekening
 - (a) Kunt u aangeven hoe lastig leerlingen het onderwerp van integraalrekening vinden in vergelijking met andere hoofdstukken?
 - (b) Kunt u specifieke (knel)punten aangeven waarmee leerlingen moeite hebben als het op het onderwerp van integraalrekening aankomt?
2. Procedurele kennis versus cognitief begrip
 - (a) Denkt u dat leerlingen bij het onderwerp integraalrekening vooral terugvallen op procedurele kennis?
 - (b) Hebben leerlingen naar uw idee voldoende cognitief begrip bij het onderwerp integraalrekening?

8.2.2 Uw lesmateriaal bij integraalrekening

Zou u van de volgende aspecten van integraalrekening willen aangeven of deze bij u in de les aan bod komen? Eventueel vind u een toelichting bij deze aspecten in sectie 8.2.3.

1. De historische achtergrond van de integraal.
 - (a) Het limietproces van Riemannsom naar de bepaalde integraal.
 - (b) De oorsprong achter de notatie van de integraal.
2. Een integraal is niet zonder meer equivalent aan ‘de oppervlakte’.
 - (a) Bij de integraal $\int_a^b f(x) dx$ kunnen zowel ‘ $f(x)$ ’ als ‘ dx ’ negatief zijn.
 - (b) Een oppervlakte is per definitie positief, terwijl de integraal ook negatief kan zijn.
 - (c) Een integraal kan ook gebruikt worden om o.a. inhoud en booglengten te berekenen.
3. De primitieve als (oppervlakte)functie
 - (a) De koppeling tussen de bepaalde en onbepaalde integraal.
 - (b) Een achtergrond voor de primitieve functie, i.e. wat ‘beschrijft’ het?
4. De Riemannsom en -integraal
 - (a) De definitie of een beschrijving van de Riemannsom.
 - (b) De definitie of een beschrijving van de Riemannintegraal.
 - (c) De aanwezigheid van andere integraalbegrippen naast de Riemannintegraal.
5. De hoofdstelling van de Calculus
 - (a) De (twee delen van de) hoofdstelling van de Calculus.
 - (b) Een (illustratief) bewijs voor de (twee delen van de) hoofdstelling van de Calculus.
 - (c) Verschil tussen oppervlaktefunctie en primitieve functie.
 - (d) Het belang van de continuïteitseis binnen de hoofdstelling van de Calculus.
6. Primitiveren in formulevorm
 - (a) Een overzicht van standaard-primitieven.
 - (b) De verschillende primitieveer formules/technieken; de lineariteit eigenschap, de substitutieregel en misschien zelf wel partieel integreren
 - (c) Een verklaring voor de integratieconstante.

8.2.3 Toelichtingen bij integraalaspecten van sectie 8.2.2

1. (a) *In formulevorm: $\sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i \rightarrow \int_{x_0}^{x_n} f(x) \cdot dx$ als $\Delta x_i \rightarrow 0$. Zie eventueel ook Figuur 1 op pagina 6.*
(b) *Het integraalteken ‘ $\int$ ’ is bedacht door G.W. Leibniz (1646-1716). Van oorsprong is het een langgerekte letter ‘S’, de eerste letter van het latijnse woord ‘summa’ dat som betekent. Daarnaast is de infinitesimale strip ‘ $f(x) \cdot dx$ ’, een directe tegenhanger van de rechthoek ‘ $f(x_i) \cdot \Delta x_i$ ’.*
2. (a) *Als $f(x) < 0$ bevindt de grafiek van f zich onder de x -as. Wanneer $a > b$ zijn de integratiegrenzen omgedraaid. In dit geval wordt er dus van rechts naar links gesommeerd, waarbij de infinitesimale intervalbreedte ‘ dx ’ negatief is.*
(b) *De meest bekende situatie is ‘ $f(x) < 0$ ’, i.e. de grafiek van functie f bevindt zich onder de x -as. Minder bekend, maar nog steeds technisch mogelijk, is wanneer $a < b$. In dat geval kan rekenregel worden (2) gebruikt. Zie pagina 7.*
(c) *Zie ook Figuur 3 op pagina 8 om hier eventueel een beeld bij te krijgen.*
3. (a) *Losjes gesproken geeft de bepaalde integraal een waarde als uitkomst (bijvoorbeeld een oppervlakte), terwijl de onbepaalde integraal een functie als uitkomst heeft (bijvoorbeeld een oppervlaktefunctie)*
(b) *De afgeleide functie kan bijvoorbeeld gezien worden als een functie die de richtingscoëfficiënt aangeeft, van de raaklijn, langs elk punt van de grafiek $f(x)$. Voor de primitieve functie zou de interpretatie ‘oppervlakte tot dusver’ gebruikt kunnen worden, waarbij de constante het startpunt vastlegt.*²⁰
4. (a) *Een Riemannsom is een benadering van een integraal door middel van rechthoekjes. Door het interval $[a, b]$ op te splitsen in steeds kleinere intervallen wordt deze benadering beter. Formeel gezien hoeven de intervalbreedtes echter niet gelijk te zijn, en voor de hoogte van de rechthoekjes is er ook een vrije ‘tag’-keuze (denk hierbij aan de ‘ondersom’, ‘bovensom’, ‘linkersom’, ‘rechtersom’ of ‘middensom’).*
(b) *De Riemannintegraal is het limiet van de steeds betere benadering van Riemansommen (d.m.v. kleine intervalbreedtes). De crux van de Riemannintegraal is dat die benadering willekeurig nauwkeurig gemaakt kan worden. Zie ook de laatste alinea op pagina 12 voor een formele definitie van de Riemannintegraal.*
(c) *Het meest bekende voorbeeld hiervan is waarschijnlijk de Lebesgue integraal. Door gebruik te maken van dit integraalbegrip wordt de klasse integreerbare functies op elegante wijze vergroot. Met de Lebesgue integraal kunnen bijvoorbeeld ‘bijzondere’ functies (zoals (4) van pagina 11) ook geïntegreerd worden.*

²⁰Dit is echter niet volledig correct, aangezien voor een oppervlaktefunctie zou moeten gelden dat $F(x_0) = 0$, terwijl voor een primitieve functie zoals $F(x) = e^x$ geldt dat $F(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

5. (a) *In het gebruik van de hoofdstelling, i.e. bij het berekenen van bepaalde integralen, kan mogelijkerwijs het onderscheid tussen de twee delen wat uit het zicht raken. Men zoekt dan eerst een primitieve $F(x)$, en gebruikt vervolgens de ‘formule’: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Zie voor een specifieke beschrijving van de hoofdstelling (deel één en deel twee): definitie (12) op pagina 17 en definitie (15) op pagina 19.*
- (b) *Zie ook de eerste helft van pagina 17 voor een bewijs van het eerste deel, en vergelijking (14) op pagina 19 voor een bewijs van het tweede deel.*
- (c) *Dit is eigenlijk hetgeen dat de twee delen van de hoofdstelling van de calculus van elkaar onderscheidt. Het onderscheid tussen een oppervlaktefunctie en een primitieve functie is dat een oppervlaktefunctie noodzakelijkerwijs een nulpunt moet hebben (bij het startpunt x_0). Zie voor een verdere toelichting de eerste alinea van pagina 18*
- (d) *Het belang van de continuïteitseis kan goed geïllustreerd worden met het voorbeeld van Figuur 13 op pagina 20; ‘Blinde berekening’ van $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx$ volgens het ‘recept’ $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ geeft ‘-1’ als resultaat, terwijl in werkelijkheid er sprake is van een oneigenlijke integraal, omdat de integrand naar oneindig gaat bij $x = 0$.*
6. (a) *Zie ook Tabel 2 op pagina 21 voor een voorbeeldlijst van standaard-primitieven.*
- (b) *Zie ook vergelijking (16) en (17) op pagina 22 voor een beschrijving van deze primitieveer formules/technieken.*
- (c) *Bij elke primitieve functie hoort een integratieconstante. Bijvoorbeeld $f(x) = 2x$ heeft als primitieve $F(x) = x^2 + C$. Wordt hier in de les een verklaring voor gegeven? Een gebruikelijke uitleg hiervoor is bijvoorbeeld dat bij het differentiëren constanten wegvallen, waardoor bij het primitiveren (i.e. ‘anti-differentiëren’) zo’n constante erbij hoort.*

8.2.4 Uw visie op illustratieve theorieaspecten uit sectie 3 van dit verslag

Zou u willen aangeven in welke mate u de illustratieve uitleg van de volgende aspecten uit de theorie van sectie 3 geschikt vindt voor het onderwijzen van integraalrekening (en of deze in deze hoedanigheid al voorkomen)? Bij elke vraag vindt u een verwijzing naar het bijbehorende theoriegedeelte in dit verslag.

1. De introductie van een oppervlaktefunctie als concept achter de primitieve functie.
Zie ook Figuur 4 op pagina 9
2. De Riemannsom en -integraal.
 - (a) Formele Riemannsom; De intervalbreedtes hoeven niet gelijk te zijn, en ook de ‘tags’ mogen willekeurig zijn.
Zie ook Figuur 7 op pagina 12
 - (b) Voor een continue functie kan de Riemannsom een willekeurig nauwkeurige waarde aannemen, door de intervalhoogte Δy_i slim te kiezen.
Zie ook Figuur 8 op pagina 13.
 - (c) De ‘tag-keuze’ bij de Riemannsom en de middensom als ‘optimale’ keuze.
Zie ook Tabel 1 onderaan pagina 14 en Figuur 9 op pagina 15.
3. De hoofdstelling van de Calculus
 - (a) Illustratief bewijs voor (het eerste deel van) de hoofdstelling van de calculus.
Zie ook Figuur 11 en vergelijking (11) op pagina 17.
 - (b) Het gebruik van oppervlaktefuncties voor een beeldvorming bij het tweede deel van de hoofdstelling van de calculus.
Zie Figuur 12 op pagina 18.
 - (c) Belang van continuïteitseis binnen hoofdstelling van de calculus.
Zie het uitgewerkte voorbeeld van $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx$ in Figuur 13 op pagina 20
4. Primitiveren is conceptueel lastiger dan differentiëren.
 - (a) Niet elke functie kan geprimitiveerd worden in formulevorm.
Zie vergelijking (18) op pagina 23, voor enkele notoire voorbeelden.
 - (b) Globaal soortgelijke functies kunnen totaal verschillende primitieven hebben.
Zie bijvoorbeeld de onbepaalde integralen van (19) op pagina 23, en de bepaling van hun primitieve in subsectie 9.4 op pagina 72 van de bijlage.
5. Inzichtelijke verklaring bij de integratieconstante.
 - (a) Met behulp van de oppervlaktefunctie.
Zie vergelijking (3) in combinatie met Figuur 5 op pagina 10. Deze verklaring berust op de vrije linkergrens ‘a’ binnen een onbepaalde integraal.
 - (b) Met behulp van de differentiaalvergelijking $F'(x) = f(x)$.
Zie Figuur 14 op pagina 24; een vectorveld bij de differentiaalvergelijking $F'(x) = f(x)$ laat zien dat alle primitieven $F(x)$, op een verticale verschuiving na, identiek zijn. Het verschil in ‘hoogte’ wordt hier gegeven door de integratieconstante C .

8.3 Invulformulier docentenvragen

Onderstaand vindt u een invulformulier voor het beantwoorden van de vragen. Indien u niet goed weet hoe u iets moet beoordelen kunt u een vraagteken invullen.

Uw leservaringen bij integraalrekening

1. Moeilijkheidsgraad en knelpunten integraalrekening

(a)

(b)

2. Procedurele kennis versus cognitief begrip

(a)

(b)

Uw lesmateriaal bij integraalrekening

Aspect	Behandelt u dit aspect in uw lessen? ('ja'/'nee'/'?')
1 (a)	
(b)	
2 (a)	
(b)	
(c)	
3 (a)	
(b)	
4 (a)	
(b)	
(c)	
5 (a)	
(b)	
(c)	
(d)	
6 (a)	
(b)	
(c)	

Uw visie op illustratieve theorie-aspecten uit sectie 3 van dit verslag

Aspect	Denkt u dat deze illustratieve uitleg van meerwaarde kan zijn bij het onderwijs? (1. Uitleg komt zodanig voor: 'ja'/'nee'/'?' 2. aankruisen in vijfpuntsschaal; "totaal onbruikbaar tot totaal bruikbaar" 3. Graag een korte toelichting)		
1		○○○○○	
2 (a)		○○○○○	
(b)		○○○○○	
(c)		○○○○○	
3 (a)		○○○○○	
(b)		○○○○○	
(c)		○○○○○	
4 (a)		○○○○○	
(b)		○○○○○	
5 (a)		○○○○○	
(b)		○○○○○	

8.4 Analyse Interviews

De analyse van het leerlingen interview (zowel de procedurele als conceptuele vragen) geschied op basis van de antwoorden van 25 leerlingen. Evenzo berust de verwerking van het docenteninterview op basis van de antwoorden van 8 docenten.

8.4.1 Leerlingen Interview; procedurele vragen

Voor alle procedurele vragen is gebruik gemaakt van de volgende categorisering:

1. Niks ingevuld / Geen beantwoording van de vraag
2. Schets gemaakt?
3. Oplosstrategie $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ gebruikt?

Ja? $\rightarrow$ Indien noodzakelijk; integraal correct opgesplitst?
 $\rightarrow$ Correct geprimitiveerd?²¹
4. Andere oplosstrategie gebruikt?
5. Middels een correcte algebraïsche berekening op het goede eindantwoord gekomen?

Op deze manier zijn de volgende resultaten tot stand gekomen:

Opgave 1: $\int_{-2}^2 x^2 dx$

Categorie	1	2	3			4	5
			Ja	i	ii		
Aantal	0	0	25	NVT	25	0	21

Opmerking; er kan opgemerkt worden dat deze integraal op een paar rekenfouten na bij iedereen goed ging. Onder deze fouten is bijvoorbeeld een keer het eindantwoord $\frac{16}{3} = 8$ gegeven, wat dan wel is fout gerekend onder categorie 5.

Opgave 2: $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx$

Categorie	1	2	3			4	5
			Ja	i	ii		
Aantal	0	0	25	0	19	0	0

Opmerking; opvallend te zien is dat een subtiel verschil in de macht van een functie al tot een significante toename leidt van het aantal correct opgestelde primitieven. Het bepalen van de correcte primitieve was echter voor de meeste leerlingen alsnog niet het probleem. Wel is opvallend te zien dat geen enkele leerling het discontinuïteits-probleem door heeft gehad ($f(x) = \frac{1}{x^2}$ heeft een verticale asymptoot bij $x = 0$) bij deze opgave. Ondanks dat

²¹Hierbij meegerekend zijn situaties waarin leerlingen om wat voor reden dan ook over zijn gegaan op een alternatief te primitiveren functie. Denk hierbij bijvoorbeeld aan verkeerd overschrijven, of een incorrecte oplossingstrategie.

dit misschien niet expliciet wordt behandeld in de lesstof, zou alsnog verwacht kunnen worden dat een leerling met behulp van een schets of GR controle kon zien dat het integreren van een positieve integrand niet kan leiden tot een negatieve integraal.

Opgave 3: $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx$

Categorie	1	2	3			4	5
			Ja	i	ii		
Aantal	2	0	23	NVT	19	0	12

Opmerking; In een geval is het eindantwoord gegeven in termen van de cosinus (i.e. $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx = -\cos(2\pi) - (-\cos(0))$). Dit is fout gerekend onder categorie 5 gezien het zeer gebruikelijk is dit nog verder te vereenvoudigen.

Tevens was een veel voorkomende fout in deze opgave dat leerlingen de ‘-’ vergaten in de primitieve. Indien er vervolgens geen verdere rekenfouten worden gemaakt, wordt dan wel het goed eindantwoord verkregen. Dit is echter fout gerekend onder categorie 5, gezien deze situatie over het algemeen meer op toeval berust dan op wijsheid.

Opgave 4: $\int_0^1 f(x) dx$, waarbij $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{als } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 2, & \text{als } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

Categorie	1	2	3			4	5
			Ja	i	ii		
Aantal	2	0	23	13	22	0	9

Opmerking; er kan opgemerkt worden dat bij deze vraag het primitiveren op zichzelf redelijk goed ging, ondanks dat velen de integraal niet correct hebben opgesplitst.

Ook waren er enkele leerlingen die de integraal op hebben gelost volgens het ‘schema’ $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (f_1(x) + f_2(x)) dx = [\tilde{F}(x)]_0^1 = \tilde{F}(1) - \tilde{F}(0)$, waarbij $\tilde{F}(x) = F_1(x) + F_2(x)$. Indien er hierbij geen verdere rekenfouten worden gemaakt, wordt met dit ‘schema’ wel het goede eindantwoord verkregen. Dit is echter fout gerekend onder categorie 5, gezien deze situatie over het algemeen meer op toeval berust dan op wijsheid.

Tot slot was er een leerling die de integraal weldegelijk correct heeft opgesplitst, maar vervolgens de twee afzonderlijke delen niet bij elkaar op heeft geteld. Dit is daarom toch fout gerekend onder categorie 5.

Opgave 5: $\int_0^2 f(x) dx$, waarbij $f(x) = 1 - |x - 1|$

Categorie	1	2	3			4	5
			Ja	i	ii		
Aantal	4	0	21	3	3	0	0

Opmerking; ook in deze situatie is een aantal keer over gegaan op een verkeerde functie, welke vervolgens wel juist werd geïntegreerd. Hierbij werd bijvoorbeeld de absolute waarde eenmaal weggelaten, waardoor de functie een stuk eenvoudiger te primitiveren was. Van de drie correct geïntegreerde functies was er uiteindelijk slechts een situatie waarbij de functie correct was opgesplitst, en er twee correcte ‘sub-primitieven’ bepaald

waren. Helaas is deze uitwerking uiteindelijk alsnog mis gelopen door een simpele ‘plus-min fout’.

Tevens was het ook merkwaardig te zien dat erg veel leerlingen hebben opgeschreven dat de primitieve van de functie $f(x) = 1 - |x - 1|$ wordt gegeven door $F(x) = x - \frac{1}{2}|x - 1|^2$.

Opgave 6: $\int_{-2}^2 e^{-x^2} dx$

Categorie	1	2	3			4	5
			Ja	i	ii		
Aantal	1	0	24	NVT	NVT	0	0

Opmerking; er kan opgemerkt worden dat nagenoeg alle leerlingen (waarschijnlijk zelfs alle leerlingen) niet inzagen dat de hoofdstelling bij deze vraag niet toepasbaar is, omdat er geen elementaire primitieve te bepalen is. In de poging er toch een te vinden zijn daarbij de meest creatieve ‘oplossingen’ aangedragen. Enkele voorbeelden zijn:

$$F(x) = e^{-x^2}, F(x) = \frac{1}{-2x}e^{-x^2}, F(x) = -2x \cdot e^{-x^2} \text{ en } F(x) = -\frac{1}{3}x^3 \cdot e^{-x^2}.$$

Tot slot merken we op dat geen enkele leerling, bij geen enkele integraal een schets heeft gemaakt, noch de opgave op een alternatieve wijze heeft opgelost. In sectie 8.5 lichten we toe dat dit juist bij veel van de gevraagde integralen echt van meerwaarde had kunnen zijn.

8.4.2 Leerlingen Interview; conceptuele vragen

Voor de conceptuele vragen, zijn vraag-specifieke categorisering gekozen. Deze zijn per vraag aangeduid. Bij elke vraag is gekozen voor disjuncte categorisering (op basis van de verkregen antwoorden), behalve bij vraag 4. Daarbij is er juist wel een sterke overlap tussen het opdelen in rechthoeken en de oppervlaktebenadering.

1. Wat is volgens jou de betekenis van $\int_a^b f(x) dx$?

Voor deze vraag is gekozen voor de categorisering:

1. Niks ingevuld / Geen beantwoording van de vraag
2. Puur en alleen een antwoord gegeven bij wijze van ‘vertaling’
i.e. ‘de integraal van f (op het domein $[a, b]$)’
3. Semi conceptueel/ verkeerd antwoord
Bijvoorbeeld: “Alle waarden onder de grafiek $F(x)$ van a tot b ” of “De formule om een oppervlakte van punt tot punt te berekenen”
4. Antwoord bestaande uit verschillende aspecten integraalrekening
Bijvoorbeeld: “Gedeelte van een lijnstuk tussen twee x -punten en het gebied dat de lijn en de x -as insluit; Oppervlakte”
5. Ingesloten Oppervlakte (op domein $[a, b]$)
6. Infinitesimale sommatie (van producten ‘ $f(x) \cdot dx$ ’ op het interval $[a, b]$)

waaruit de volgende resultaten naar voren zijn gekomen:

<i>Categorie</i>	1	2	3	4	5	6
<i>Aantal</i>	0	3	3	1	18	0

2. Kun je naast het berekenen van een oppervlakte, nog twee andere voorbeelden geven van ‘type’ vragen waarbij de integraal gebruikt wordt?

Voor deze vraag is gekozen voor de categorisering:

1. Niks ingevuld / Geen beantwoording van de vraag
2. Slechts één voorbeeld gegeven
3. Semi conceptueel / verkeerd antwoord
Bijvoorbeeld: “Primitiveren”, “Optimalisering” of “berekenen krommingen”
4. Algemene ‘Inhoud’
5. (Inhoud) Omwentelingslichaam
6. Booglengte of lengte grafiek/lijnstuk
7. Overig antwoord
Bijvoorbeeld: “Totale afstand/snelheid (bij natuurkunde)” of “Totale intensiteit”

waaruit de volgende resultaten naar voren zijn gekomen:

<i>Categorie</i>	1	2	3	4	5	6	7
<i>Aantal</i>	0	4	3	13	12	14	4

3. Wat is een Riemannsom, en hoe is dit gerelateerd aan de integraal $\int_a^b f(x) dx$?

Voor deze vraag is gekozen voor de categorisering:

1. Niks ingevuld / Geen beantwoording van de vraag
2. Semi conceptueel / verkeerd antwoord
Bijvoorbeeld: “De oppervlakte onder de grafiek op andere wijze” of “Oppervlakte berekenen is Riemannsom”
3. Specifiek type Riemannsom
Bijvoorbeeld: “Een Riemannsom is de combinatie van een onder en bovensom”
4. Segmentatie; opdeling in rechthoeken/staven/balkjes
5. Riemannsom geeft oppervlaktebenadering
6. (Riemann-)integraal als limietgeval Riemannsom
Bijvoorbeeld: “Als je de staafjes oneindig klein kiest krijg je een integraal”, “Dit doe je door kleine balkjes te nemen Δx ”

waaruit de volgende resultaten naar voren zijn gekomen:

<i>Categorie</i>	1	2	3	4	5	6
<i>Aantal</i>	5	3	2	14	15	6

Opmerking; De reden dat voor deze categorie de categoriën niet disjunct gekozen zijn, is omdat verschillende leerlingen ofwel puur ingingen op de opdeling in balkjes, ofwel puur ingingen op het karakter van de oppervlaktebenadering. Tegelijkertijd kwam de combinatie uiteraard ook veel voor, i.e. ‘Een oppervlaktebenadering aan de hand van (kleine) balkjes’.

Tot slot merken we graag op dat voor de oppervlaktebenadering categorie, i.e. categorie 5, ook impliciete verwijzingen hiernaartoe zijn meegerekend. Bijvoorbeeld: “De optelsom van allemaal staafjes met een bepaalde Δx .”

4. (a) Wat is een primitieve functie (i.e. wat is de definitie ervan)?

Voor deze vraag is gekozen voor de categorisering:

1. Niks ingevuld

2. Geen beantwoording van de vraag

Bijvoorbeeld: “een functie die geprimitiveerd is”, “De geprimitiveerde functie van een functie (alles keer x)” of zelfs “Een doordachte wiskundige methode”

3. Generiek voorbeeld

Bijvoorbeeld: “ $f(x) = x^a \rightarrow F(x) = \frac{1}{a+1}x^{a+1}$ ”

4. Een functie $F(x)$ die voldoet aan $F'(x) = f(x)$

of een omschrijving in woorden in de trant van ‘een anti-afgeleide’ van $f(x)$

waaruit de volgende resultaten naar voren zijn gekomen:

<i>Categorie</i>	1	2	3	4
<i>Aantal</i>	2	6	3	14

Opmerking; bij de woordelijke omschrijving is het discutabele antwoord “de primitieve functie is wat $F(x)$ is van $f'(x)$ ” goedgekeurd.

Wat opgemerkt kan worden is dat leerlingen het (wiskundig) benoemen van de definitie soms lastig vinden, maar deze meestal wel (operationeel) kennen. Mooi te zien was dat twee leerlingen hierbij zelfs onderstaand schema hebben opgeschreven ter beantwoording van deze vraag.

$$F(x) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{differentiëren}} \\ \xleftarrow{\text{primitiveren}} \end{array} f(x) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{differentiëren}} \\ \xleftarrow{\text{primitiveren}} \end{array} f'(x)$$

4. (b) Wat beschrijft een primitieve functie? (hoe is een primitieve functie gerelateerd aan een integraal?)

Voor deze vraag is gekozen voor de categorisering:

1. Niks ingevuld

2. Geen of retorische beantwoording van de vraag
Bijvoorbeeld: “een primitieve functie beschrijft iets”, “De primitieve functie helpt bij het bepalen van bepaalde gegevens over de grafiek” of “De primitieve functie $F(x)$ beschrijft voor elke x -waarde de primitieve waarvan dus de afgeleide $f(x)$ is”
3. Incorrect en procedureel antwoord
Bijvoorbeeld: “Het helpt om een oppervlak van $f(x)$ tot x te berekenen”, “Met de primitieve kan je een integraal algebraïsch uitrekenen”
4. Semi conceptueel / verkeerd antwoord
Bijvoorbeeld: “Een primitieve functie geeft de y -waardes aan die bij elkaar opgeteld de oppervlakte onder de grafiek vormen” of “Het omgekeerde van een afgeleide functie”
5. Oppervlaktefunctie (op domein $[a, b]$)
Bijvoorbeeld: “De primitieve functie beschrijft voor elk domein a, b de oppervlakte van de grafiek” of “De primitieve functie beschrijft voor elke waarde van x de oppervlakte onder de grafiek”, maar zelfs “oppervlakte” alleen.

waaruit de volgende resultaten naar voren zijn gekomen:

<i>Categorie</i>	1	2	3	4	5
<i>Aantal</i>	7	5	6	2	5

Opmerking; allereerst kan opgemerkt worden dat leerlingen dit een erg lastige vraag vonden. Dit maakte het ook lastig om de antwoorden eenduidig in te delen in categorieën. Indien er al een antwoord was gegeven op de vraag, was deze vaak verkeerd, retorisch of juist erg procedureel.

Daarbij willen we graag opmerken dat we erg soepel zijn omgesprongen met de categorie oppervlaktefunctie (categorie 5). Zodoende zijn de antwoord “oppervlakte” en “De oppervlakte onder de grafiek?” bijvoorbeeld ook geschaard onder deze categorie.

4. (c) Hoe kan de primitieve functie gebruikt worden om de integraal $\int_a^b f(x) dx$ exact uit te rekenen?

Voor deze vraag is gekozen voor de categorisering:

1. Niks ingevuld
2. Semi conceptueel / verkeerd antwoord
Bijvoorbeeld: “Door elke waarde te vermenigvuldigen met x en te delen door de macht”, “Voor elke x -waarde berekenen wat de oppervlakte is” of “Zo heb je de originele functie”, “Door de primitieve functie weet je wat $f(x) dx$ is”
3. Onvolledige beantwoording
Bijvoorbeeld: “Invullen”, “De integraal invullen en uitwerken geeft het oppervlakte”, “Door a en b in te vullen in de geprimitiveerde functie” of zelfs “Zie de pagina met de uitgewerkte integralen”

4. $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ of een omschrijving in woorden.
Bijvoorbeeld: “De primitieve van b minus de primitieve van a.”

waaruit de volgende resultaten naar voren zijn gekomen:

<i>Categorie</i>	1	2	3	4
<i>Aantal</i>	6	4	5	10

Opmerking; het is opmerkelijk om te zien dat sommige leerlingen geen raad wisten met deze vraag, en niks hebben ingevuld, terwijl ze zojuist daarvoor nog integralen hebben opgelost met behulp van de rekenregel $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. Dan waren er ook nog eens enkele geplaatste opmerkingen van leerlingen opmerkelijk te noemen. Zo was er een leerling met de controlestep: “Check of het positief is (een oppervlak is niet negatief)”. Een andere leerling maakte hier de opmerking: “de primitieve functie is hetzelfde als de integraal”

Tot slot was er een dubieus geval waarbij een leerling wel had aangegeven dat er twee ingevulde primitieven van elkaar afgetrokken dienden te worden, maar niet had aangegeven of het dan $F(b) - F(a)$ of $F(a) - F(b)$ moest zijn. Dit antwoord is opgevat onder de categorie onvolledige beantwoording (categorie 3). Ondanks dat er zodoende wel een aantal onvolledige antwoorden waren, wisten leerlingen de hoofdstelling meestal wel correct toe te passen bij de procedurele vragen.

4. (d) Waarom hoort er een constante C bij een primitieve functie $F(x)$?

Voor deze vraag is gekozen voor de categorisering:

1. Niks ingevuld
2. Semi conceptueel / verkeerd antwoord
Bijvoorbeeld: “Dat is de beginwaarde”, “Er is altijd een onzekerheid als je gaat primitiveren” of “Dit kan elk heel getal zijn”
3. Constante valt weg bij differentiëren (als omgekeerde route van primitiveren)
4. Andere correcte verklaring

waaruit de volgende resultaten naar voren zijn gekomen:

<i>Categorie</i>	1	2	3	4
<i>Aantal</i>	2	3	20	0

Opmerking; het is goed te zien dat de meeste leerlingen deze ‘waarom’ vraag hebben onthouden aan de hand van het begrip ‘anti-differentiëren’.

8.4.3 Docenten interview; leservaringen bij integraalrekening

Onderstaand is de verwerking van het docenteninterview gedaan. Dit berust op de beantwoording van 8 docenten die vrijwillige respondenten waren bij dit onderzoek.

Ten eerste beginnen we met de open vragen die betrekking hebben op de leservaringen van docenten bij het onderwerp integraalrekening:

1(a) Kunt u aangeven hoe lastig leerlingen het onderwerp van integraalrekening vinden in vergelijking met andere hoofdstukken?

Deze vraag heeft een beetje een dubbele beantwoording gekregen. Ongeveer de helft van de docenten (5) geeft duidelijk aan dat ze de moeilijkheidsgraad ongeveer ‘gemiddeld’ schatten, soms zelfs iets makkelijker dan gemiddeld. Een onderwerp als goniometrie wordt bijvoorbeeld moeilijker ingeschat.

Tegelijkertijd ligt een docent toe: “Het uitvoeren van de ‘regels’ is te doen. Begrip van waar ze precies mee bezig zijn is lastiger”. Ook een andere docent beaamt bij deze vraag dat het begrip lastig is (“integraal=oppervlakte”), en een derde docent schat het onderwerp ook lastiger dan gemiddeld in.

1(b) Kunt u specifieke (knel)punten aangeven waarmee leerlingen moeite hebben als het op het onderwerp van integraalrekening aankomt?

Bij deze vraag kwamen erg verschillende aspecten aan bod. Verschillende docenten (5) halen wel problemen (met beperkte voorkennis/kunde) op het gebied van differentiëren aan. Denk daarbij bijvoorbeeld aan onvoldoende kunde in het algemeen, of aan het feit dat ze sommige afgeleiden soms nog maar net behandeld zijn in de les (bijvoorbeeld a^x en $\ln(x)$, $\log_2(x)$). Ook beargumenteert een docent dat differentiëren volgens een vaste procedure kan, maar primitiveren niet. Waaruit volgt dat als je primitiveren ziet als anti-differentiëren, dat primitiveren dus hoe dan ook moeilijker is.

Ook halen drie docenten problemen aan met de kettingregel. Vermoedelijk wordt er hierbij gedoeld op de substitutieregels bij primitiveren, waarbij in het gebruik differentiëren en integreren erg dicht bij elkaar komen te liggen. Een andere docent haalt ook expliciet problemen aan met differentiëren versus integreren. Mogelijk dat de te komen vergelijking (20) kan bijdragen aan extra begrip hierbij? Vervolgens benoemen twee docenten dat het begrip (/het theoretisch kader) rondom het concept integraal niet voor iedereen altijd even duidelijk is. Het geheel berust vooral op een truc.

Tot slot worden er dan ook nog enkele specifieke knelpunten genoemd, zoals “Het opstellen van de geschikte integraal bij een wiskundig probleem”, “Wentelen om de y-as is complex”, “Booglengte blijft lastig; bekijft niet en wordt vaak fout uitgerekend” (misschien helpt de illustratieve uitleg aan het eind van sectie 9.1 hierbij?), “oppervlakte opdelen in stukken” en de “Leibniz/Newton notatie beiden kunnen gebruiken (notatie/breuk)”.²²

²²Dit expliciete punt wordt ook aangehaald in [15]

Vooraf dit laatste punt is intrigerend om nog even bij stil te staan. Met de Leibniz notatie wordt de breuk ‘ $\frac{df}{dx}$ ’ bedoelt, waar met de Newton notatie ‘ $f'(x)$ ’ wordt bedoelt. Beiden slaan op hetzelfde begrip terug, i.e. de afgeleide. Interessant is juist dat deze twee notaties tezamen heel compact de hoofdstelling van de calculus in zich dragen:

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx} &= F'(x) \\ dF &= F'(x) \, dx \\ \int dF &= \int F'(x) \, dx \\ F &= \int F'(x) \, dx\end{aligned}\tag{20}$$

Merk op dat bovenstaande vergelijking met behulp van de substitutie $F'(x) =: f(x)$ eigenlijk een erg compact ‘bewijs’ is van het eerste deel van de hoofdstelling, waarin ook direct het verband tussen de primitieve en de afgeleide aan bod komt.

2(a) Denkt u dat leerlingen bij het onderwerp integraalrekening vooral terugvallen op procedurele kennis?

Bij de beantwoording van deze vraag waren docenten vrij eensgezind. Maar liefst 6 docenten gaven op deze vraag het volmondige antwoord ‘ja’. Twee docenten specificeren dat dit op het gebied van primitiveren wel het geval is. Een docent geeft hierbij wel aan dat dit ook alleen bij primitiveren het geval is, maar verder niet.

2(b) Hebben leerlingen naar uw idee voldoende cognitief begrip bij het onderwerp integraalrekening?

De beantwoording van deze vraag vroeg hier en daar om iets meer nuance, soortgelijk aan vraag 1(a) over de moeilijkheidsgraad. Vooral het woord ‘voldoende’ was ter discussie. Ongeveer de helft van de docenten gaf bijvoorbeeld aan dat het cognitief begrip van leerlingen hebben meestal wel voldoende is voor het slagen van het eindexamen. Het feitelijke cognitief begrip bleef echter ook volgens hen vaak achter.

Ruwweg de andere helft van de docenten geeft aan dat het cognitief begrip van de leerlingen gewoon matig is. Twee docenten geven bijvoorbeeld aan dat dit bij velen niet het geval is, waarbij een docent het zelfs verder specificeert tot hooguit 5 à 10% die voldoende cognitief begrip opdoet. Een docent geeft aan dat hij dit via de Riemannsom introductie wel bereikt, en geeft tevens zijn onbegrip aan dat dit in de nieuwste versie van Getal en Ruimte nog slechts in een ‘informatief kader’ aan bod komt.

Tot slot beschrijft een docent: “Integraal is ‘limiet Riemannsom’-concept wordt niet bereikt” en “werken met plaatjes gebeurt te weinig”. Deze opmerking is zeker interessant omdat dit onderzoek juist op deze twee punten in probeert te haken.

8.4.4 Docenten interview; lesmateriaal bij integraalrekening

Het tweede deel van het docenteninterview bestaat ruwweg uit een inventarisatie van welke integraalrekening aspecten wel/niet aan bod kwamen in het huidige lesmateriaal van docenten. De beknopte resultaten zijn hieronder uiteengezet. Dit betreft de beantwoording van de vragen uit sectie 8.2.2 met ‘ja’/‘nee’/‘?’. Zie eventueel de toelichting op elk van de aspecten in sectie 8.2.3.

<i>Aspect</i>	<i>Behandelt u dit aspect in uw lessen?</i>		
	<i>‘ja’</i>	<i>‘nee’</i>	<i>‘?’</i>
1 (a)	8	0	0
(b)	5	3	0
2 (a)	5	1	2
(b)	8	0	0
(c)	8	0	0
3 (a)	5	2	1
(b)	4	1	3
4 (a)	8	0	0
(b)	6	2	0
(c)	0	8	0
5 (a)	7	0	1
(b)	6	0	2
(c)	1	5	2
(d)	1	7	0
6 (a)	8	0	0
(b)	7	0	1
(c)	8	0	0

Tabel 5: De resultaten uit het tweede deel van het docenteninterview

Opmerking; Bij vraag 6(b) was het enigszins discutabel of alle primitieve formules/technieken ook aan bod moesten komen in de les om het antwoord ‘ja’ te geven. Partieel integreren bleek een keuzeonderwerp te zijn, wat door docenten wisselend wel/niet behandeld werd. In het geval dit niet behandeld werd, maar wel de lineariteit eigenschap, en de substitutieregels aan bod kwam, is het antwoord ‘ja’ toegekend.

8.4.5 Docenten interview; Bruikbaarheid illustratieve theorieaspecten uit sectie 3

Het laatste deel van het docenteninterview toetste de bruikbaarheid van enkele illustratieve theorieaspecten uit het theoretisch kader van dit verslag. Dit is gedaan door de verschillende docenten rechtstreeks te bevragen naar hun visie over de bruikbaarheid van de aspecten uit sectie 8.2.4. Tevens is gevraagd of deze illustratieve aspecten al zodanig in de les voorkwamen, zodat ook beoordeeld kan worden in hoeverre de aspecten ook als innovatief beschouwd kunnen worden.

De resultaten van dit gedeelte van het interview zijn in onderstaande tabel uiteengezet.

<i>Aspect</i>	<i>Komen de beschreven illustratieve theorieaspecten uit sectie 3 van dit verslag zodanig voor in uw les?</i>			<i>Wat is in uw ogen de bruikbaarheid van de beschreven illustratieve theorieaspecten uit sectie 3 van dit verslag?</i> ²³				
	<i>‘ja’</i>	<i>‘nee’</i>	<i>‘?’</i>	<i>‘TO’</i>	<i>‘O’</i>	<i>‘~’</i>	<i>‘B’</i>	<i>‘TB’</i>
1	3	2	3	1	0	1	1	5
2 (a)	2	6	0	3	1	0	2	2
(b)	1	7	0	4	2	2	1	0
(c)	4	4	0	1	2	1	3	1
3 (a)	5	3	0	0	0	2	4	2
(b)	6	2	0	1	0	0	3	4
(c)	1	7	0	2	1	1	1	3
4 (a)	3	5	0	1	0	4	1	2
(b)	3	4	1	1	0	1	2	4
5 (a)	2	6	0	0	0	4	3	1
(b)	1	7	0	4	1	0	0	3

Tabel 6: De resultaten uit het tweede deel van het docenteninterview

Voor de zeer oplettende lezer merken we tot slot nog op één docent bij vraag 2b zowel het hokje ‘onbruikbaar’ (‘O’) als het middenantwoord (‘~’) had gegeven, waardoor de totalen bij deze vraag tot 9 sommeren in plaats van de gebruikelijke 8.

²³Op een vijfpuntsschaal; “Totaal Onbruikbaar tot Totaal Bruikbaar”.

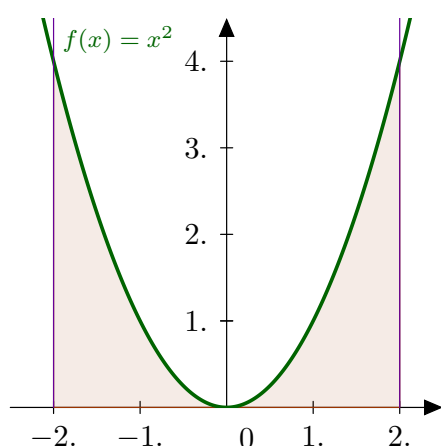
8.5 Uitwerking Leerlingen interview

In deze sectie zijn de uitwerkingen gegeven van de vragen uit het leerlingen interview. In het bijzonder is hierin aandacht besteed aan de procedurele vragen; bij de meeste van deze integralen zijn er namelijk meerdere methoden om de integraal exact op te lossen.

8.5.1 Uitwerking Procedurele vragen; procedurele aanpak

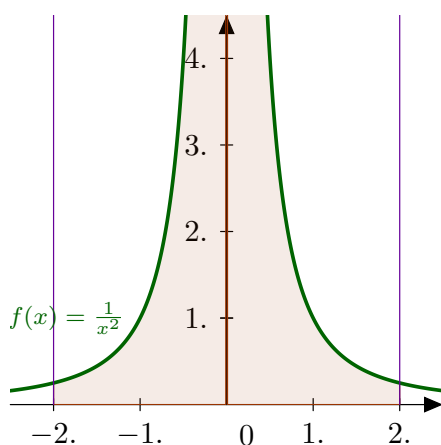
Allereerst is een procedurele aanpak beschreven voor het exact berekenen van de gevraagde bepaalde integralen. Dit is tevens de aanpak die (nagenoeg) alle deelnemende leerlingen aan het leerlingen interview gekozen hadden.

1. $\int_{-2}^2 x^2 dx$



$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 x^2 dx &= F(2) - F(-2) \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-2}^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot 8 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot -8 \right) \\ &= \frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3} \right) \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

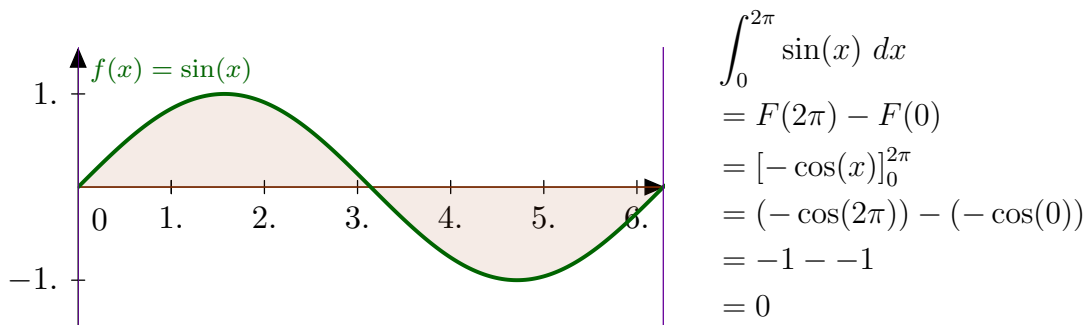
2. $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx$



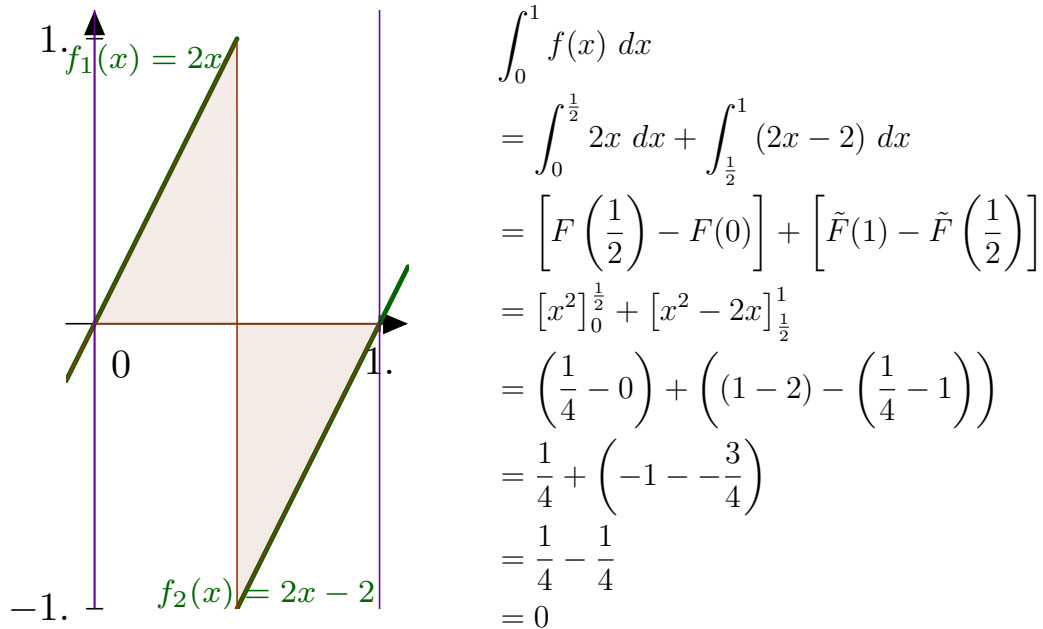
$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx &= \int_{-2}^{0^-} \frac{1}{x^2} dx + \int_{0^+}^2 \frac{1}{x^2} dx \\ &= [F(0^-) - F(-2)] + [F(2) - F(0^+)] \\ &= \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=-2}^{x=0^-} + \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=0^+}^{x=2} \\ &= \left(-\frac{1}{0^-} - \frac{1}{-2} \right) + \left(-\frac{1}{2} - -\frac{1}{0^+} \right) \\ &= 2 \cdot \infty - 1 \end{aligned}$$

Zie tevens Figuur 13 op pagina 20 voor de algemene valkuil bij deze opgave.

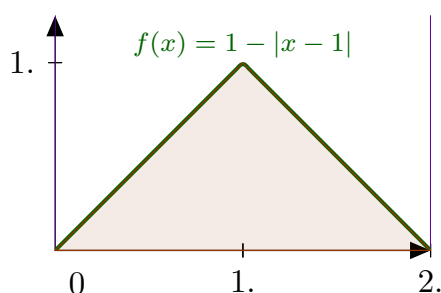
3. $\int_0^{2\pi} \sin(x) \, dx$



4. $\int_0^1 f(x) \, dx$, waarbij $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{als } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 2, & \text{als } x > \frac{1}{2} \end{cases}$



5. $\int_0^2 f(x) dx$, waarbij $f(x) = 1 - |x - 1|$

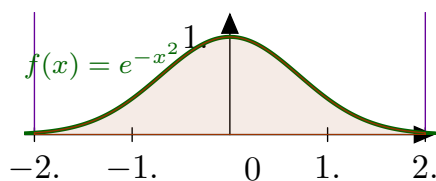


$$\begin{aligned}
 & \int_0^2 f(x) dx \\
 &= \int_0^1 (1 - -(x - 1)) dx + \int_1^2 (1 - (x - 1)) dx \\
 &= \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2 - x) dx \\
 &= [F(1) - F(0)] + [\tilde{F}(2) - \tilde{F}(1)] \\
 &= \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[2x - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 \\
 &= \left(\frac{1}{2} - 0 \right) + \left((4 - 2) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \left(2 - \frac{3}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

6. $\int_{-2}^2 e^{-x^2} dx$

Deze integraal kan niet exact opgelost worden met behulp van de (hoofd)stelling $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, omdat er geen primitieve bestaat (als elementaire functie) voor de functie $f(x) = e^{-x^2}$. Zie ook vergelijking (18) op pagina 23.

Een numerieke benadering, bijvoorbeeld met behulp van de grafische rekenmachine, geeft als resultaat:



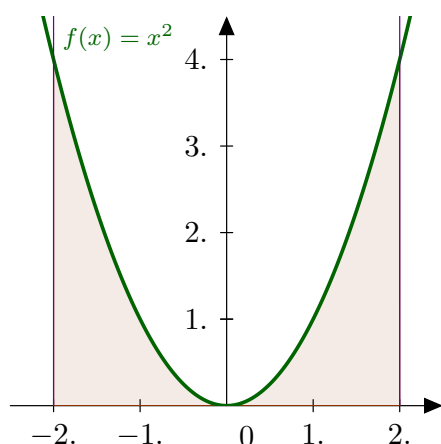
$$\int_{-2}^2 e^{-x^2} dx \approx 1.76416 \dots$$

8.5.2 Uitwerking Procedurele vragen; alternatieve aanpak

Bij deze alternatieve aanpak voor het berekenen van de bepaalde integralen, wil ik graag laten zien dat wanneer het probleem wordt benaderd aan de hand van een situatieschets, het oplossen van de bepaalde integraal veelal gemakkelijker gemaakt kan worden.

1. $\int_{-2}^2 x^2 dx$

Er kan opgemerkt worden dat het ‘linker’ ingesloten deel van de integraal, identiek is aan het ‘rechter’ ingesloten deel van de integraal. Wiskundig kunnen we stellen dat de functie $f(x) = x^2$ een ‘even functie’ is, i.e. $f(-x) = f(x)$.

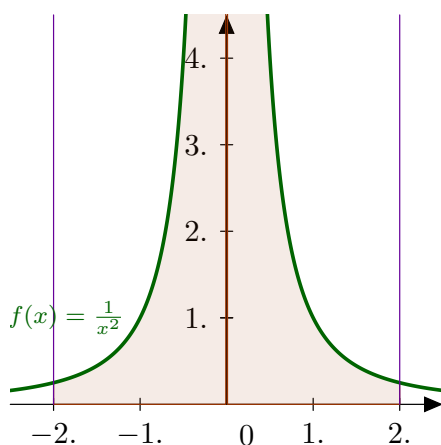


$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 x^2 dx &= 2 \int_0^2 x^2 dx \\ &= 2 (F(2) - F(0)) \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 \\ &= 2 \left(\left(\frac{1}{3} \cdot 8 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0 \right) \right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{8}{3} - 0 \right) \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Deze alternatieve oplossing is misschien niet bepaald revolutionair. Toch leidt het invullen van ‘0’ in plaats van ‘-2’ waarschijnlijk al wel tot minder rekenfouten bij leerlingen.

2. $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx$

Wederom is er hier sprake van een ‘even functie’ (i.e. $f(-x) = f(x)$), waardoor het ‘linker’ ingesloten deel van de integraal, identiek is aan het ‘rechter’ ingesloten deel van de integraal.

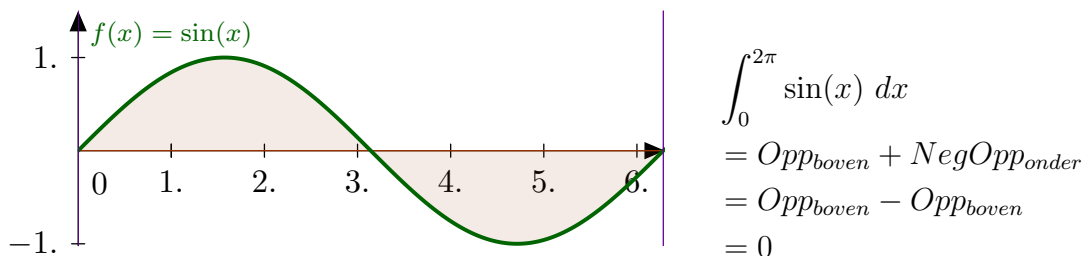


$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx &= 2 \int_{0^+}^2 \frac{1}{x^2} dx \\ &= 2 [F(2) - F(0^+)] \\ &= 2 \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=0^+}^{x=2} \\ &= 2 \left(-\frac{1}{2} - -\frac{1}{0^+} \right) \\ &= 2 \cdot \infty - 1 \end{aligned}$$

3. $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx$

Er kan opgemerkt worden dat het ‘bovenste’ (linker) ingesloten deel van de integraal, identiek is aan het ‘onderste’ (rechter) ingesloten deel van de integraal.

Wiskundig kunnen we stellen dat de functie $f(x) = \sin(x)$ een ‘oneven functie’ is rond $x = \pi$, i.e. $f(-(x - \pi)) = -f(x - \pi)$.



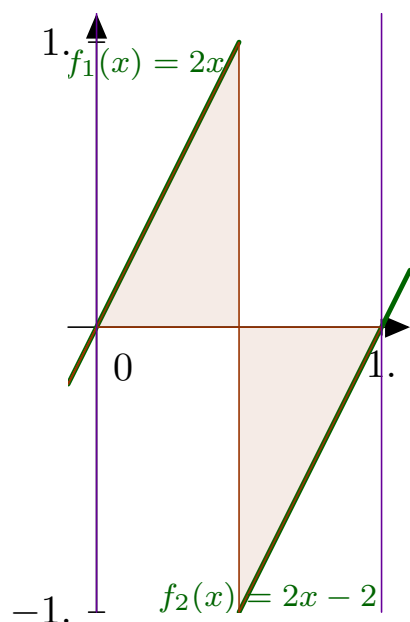
Eventueel zou bepaald kunnen worden dat het identieke vlakdeel gelijk is aan 2, i.e. $\int_0^{\pi} \sin(x) dx = 2$ en $\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) dx = -2$.

De exacte waarde doet er echter niet toe, omdat deze toch tegen elkaar wegvallen.

4. $\int_0^1 f(x) dx$, waarbij $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{als } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 2, & \text{als } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

Van de schets kan opgemerkt worden dat de integraal wordt beschreven door twee identieke (i.e. congruente) driehoeken; één boven, en één onder de x-as.²⁴

Tegelijkertijd kan ook het argument van de vorige opgave gebruikt worden. Ook hier kan wiskundig gesteld worden dat de gegeven functie $f(x)$ een ‘oneven functie’ is rond $x = \frac{1}{2}$, i.e. $f(-(x - \frac{1}{2})) = -f((x - \frac{1}{2}))$.



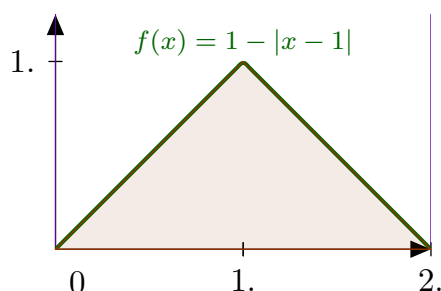
$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx \\ &= Opp\Delta_{boven} + NegOpp\Delta_{onder} \\ &= Opp\Delta - Opp\Delta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Eventueel zou nog gebruikt kunnen worden dat :

$$\begin{aligned} Opp\Delta &= \frac{1}{2} \cdot B \cdot H \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

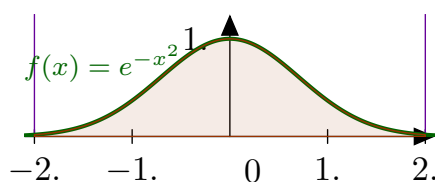
²⁴Dat het hier daadwerkelijk om congruente driehoeken gaat, kan eenvoudig aangetoond worden aan de hand van gelijke zijden, overstaande hoeken en Z-hoeken (de lijnen $f_1(x) = 2x$ en $f_2(x) = 2x - 2$ hebben dezelfde richtingscoëfficiënt en zijn dus parallel aan elkaar).

5. $\int_0^2 f(x) dx$, waarbij $f(x) = 1 - |x - 1|$
 Ook bij deze vraag kan vanuit de schets opgemaakt worden dat de bepaalde integraal een driehoekig vlakdeel beschrijft. De oppervlakte is dus eenvoudig uit te rekenen.



$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \text{Opp}\Delta \\ &= \frac{1}{2} \cdot B \cdot H \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

6. $\int_{-2}^2 e^{-x^2} dx$
 Zoals in het voorgaande deel 8.5.1 al beschreven, kan deze integraal niet exact opgelost worden. Eventueel kan nog wel gebruik gemaakt worden van het feit dat ook de functie $f(x) = e^{-x^2}$ een ‘even functie’ is, i.e. $f(-x) = f(x)$.
 Het blijft echter nog steeds noodzakelijk om de integraal numeriek op te lossen.



$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 e^{-x^2} dx &= 2 \int_0^2 e^{-x^2} dx \\ &\approx 2 \cdot 0.882081 \dots \\ &\approx 1.76416 \dots \end{aligned}$$

8.5.3 Uitwerking Conceptuele vragen

1. **Betekenis van $\int_a^b f(x) dx$?**

Dit is denk ik oprecht een lastige, doch mijn inziens terechte, vraag om te stellen. Hoe dan ook kan een antwoord in de trant van ‘een oppervlakte’ niet goed zijn, omdat een oppervlakte per definitie positief is, en een bepaalde integraal ook negatief kan zijn. Wat dat betreft is ‘een vlakdeel’ al een betere optie, echter is dit weer enigszins tegenstrijdig met de vele andere toepassingen van de integraal.

Mijn beste poging voor een antwoord zou zijn:

“Een infinitesimale sommatie van de producten $f(x) \cdot dx$, op het interval $[a, b]$.”

Dit antwoord is echter nog steeds niet perfect, gezien het zich toespitst op de klassieke Riemann-integraal. Deze interpretatie leent zich bijvoorbeeld minder goed voor alternatieve integraalbegrippen zoals de Lebesgue integraal.

2. **Toepassingen integraal naast het berekenen van een oppervlakte.**

Abstract gezien kan gedacht worden aan een inhoud of booglengte. Iets concreter zou men ook kunnen denken aan een zwaartepunt, een afstand/snelheid of een kans. Deze voorbeelden vormen echter nog steeds maar een kleine greep uit de vele toepassingsgebieden van de integraal.

3. **Wat is een Riemannsom, en hoe is dit gerelateerd aan de integraal $\int_a^b f(x) dx$?**

Een Riemannsom is een discrete benadering voor een bepaalde integraal, aan de hand van verschillende rechthoeken. De hoogte van elke rechthoek wordt hierbij bepaald door een nader te kiezen functiewaarde van f , binnen het interval Δx_i . Overigens hoeven volgens de formele definitie van de Riemannsom de intervalbreedtes van elke rechthoek niet aan elkaar gelijk te zijn.

Naar mate de intervalbreedtes steeds kleiner worden, wordt de Riemannsom benadering steeds beter. In de limiet hiervan, gaat de Riemannsom over in de bepaalde integraal. De crux van het Riemann integraalbegrip is dat de Riemannsom benadering willekeurig nauwkeurig gemaakt kan worden voor functies die continu zijn op het interval $[a, b]$.

4. (a) **Definitie primitieve functie.**

Een primitieve functie $F(x)$ is een functie die voldoet aan de (differentiaal)-vergelijking:

$$F'(x) = f(x).$$

- (b) **Wat beschrijft een primitieve functie $F(x)$?**

In het geval de primitieve functie $F(x)$ een nulpunt x_0 heeft, volstaat de interpretatie van een ‘oppervlaktefunctie’. De functie F beschrijft dan de ‘oppervlakte’ van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de functie f en de x -as, tussen de x -grenzen x_0 en x . Ingesloten vlakdelen boven de x -as tellen hierbij ‘positief’ mee, terwijl vlakdelen onder de x -as hierbij ‘negatief’ meetellen.

Indien de primitieve functie F geen nulpunt heeft, geldt nog steeds dat de primitieve F een verticale verschuiving is van een oppervlaktefunctie, i.e. oppervlaktefuncties en primitieve functies (voor dezelfde functie f) zijn op een constante na gelijk aan elkaar.

- (c) **Hoe kan de primitieve functie $F(x)$ gebruikt worden om de integraal $\int_a^b f(x) dx$ exact uit te rekenen?**

Dit kan met behulp van (het tweede deel van) de hoofdstelling van de Calculus;

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

- (d) **Waarom hoort er een constante C bij een primitieve functie $F(x)$?**

Dit kan op verschillende manieren uitgelegd worden. Een gebruikelijke uitleg hiervoor is dat bij het differentiëren constanten wegvallen, waardoor bij het primitiveren (i.e. ‘anti-differentiëren’) zo’n constante erbij hoort.

Een alternatieve, meer illustratieve, verklaring kan gevonden worden binnen oppervlaktefuncties (zie vergelijking (3) in combinatie met Figuur 5 op pagina 10), of door het tekenen van een vectorveld bij de differentiaalvergelijking $F'(x) = f(x)$ (zie Figuur 14 op pagina 24).

9 Bijlagen

9.1 Integrand voor booglengten

Om ervoor te zorgen dat booglengten berekend kunnen worden met behulp van de Riemann integraal, moet het ‘infinitesimale lijnstukje’ $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ omgeschreven worden tot een ‘infinitesimale strip’. Dit gaat als volgt:

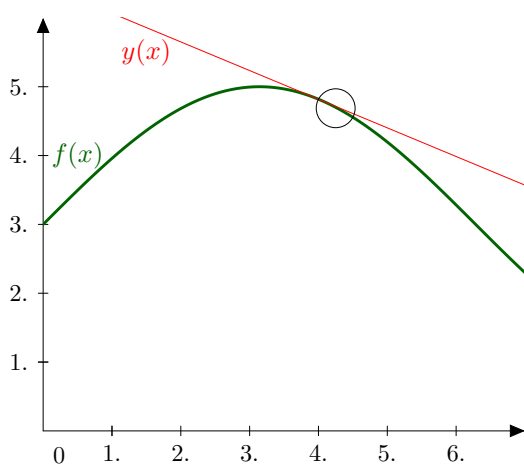
$$\begin{aligned}\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} &= \sqrt{(dx)^2 + (dx)^2 \frac{(dy)^2}{(dx)^2}} \\ &= \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) (dx)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \sqrt{(dx)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} |dx| \\ &= \sqrt{1 + (f'(x))^2} |dx|.\end{aligned}\tag{21}$$

In bovenstaande vergelijking staat nog wel een absolute waarde van ‘ dx ’, waar dit in de klassieke booglengte integraal niet het geval is. Formeel klopt deze absolute waarde ook; een lengte is namelijk per definitie positief. Wanneer we een booglengte berekenen met behulp van de integraal $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$, krijgen we een negatieve lengte als $a > b$ (als we van rechts naar links sommeren). In de praktijk komt dit echter nauwelijks voor.

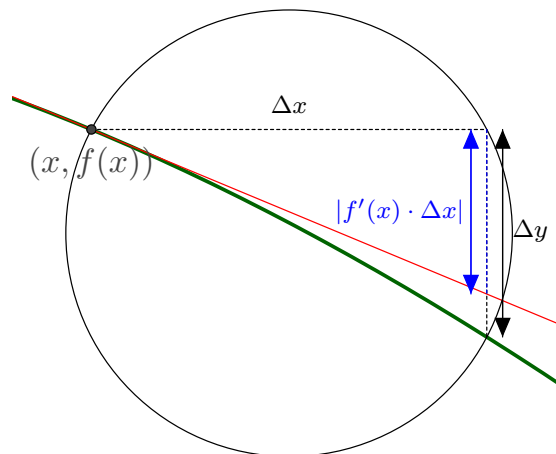
De herkomst van de booglengte integraal kan ook op een andere manier afgeleid worden. Hiervoor maken we gebruik van een basiseigenschap van differentieerbare functies. Voor een differentieerbare functie geldt dat ze lokaal gezien kunnen worden als een lineaire functie; wanneer er ingezoomd wordt op de grafiek, lijkt de functie steeds meer op een lokale raaklijn. Wanneer we een raaklijn tekenen rondom het punt $(x, f(x))$, kunnen we met behulp van Figuur 16 inzien dat de volgende benadering geldt;

$$\begin{aligned}\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} &\approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(x) \cdot \Delta x)^2} \\ &= \sqrt{(1 + (f'(x))^2) (\Delta x)^2} \\ &= \sqrt{1 + (f'(x))^2} \sqrt{(\Delta x)^2} \\ &= \sqrt{1 + (f'(x))^2} |\Delta x|\end{aligned}\tag{22}$$

In het limietproces van steeds verder inzoomen/ steeds kleinere intervallen nemen, gaan Δx en Δy over in dx en dy , waarmee de benadering van (22) exact wordt gemaakt.



(a) $f(x)$ met raaklijn $y(x)$



(b) Merk op; $\Delta y \approx |f'(x) \cdot \Delta x|$

Figuur 16: Alternatieve kijk op de totstandkoming van de booglengte integraal

9.2 Constant verschil tussen twee primitieven

Voor dit bewijs maken we gebruik van een bekende eigenschap van afgeleide functies: ²⁵

Als $F'(x) = 0$ voor iedere x in een interval I , dan is F constant op I .

Veronderstel nu dat de functies F_1 en F_2 beide primitieve functies zijn een functie f op het interval I . Dat betekent dat voor ieder getal x binnen het interval geldt:

$$\begin{aligned}
 F_2'(x) &= f(x) \\
 F_1'(x) &= f(x) \\
 &\downarrow \\
 F_2'(x) - F_1'(x) &= 0 \\
 [F_2(x) - F_1(x)]' &= 0 \\
 &\downarrow \\
 F_2(x) - F_1(x) &= c \\
 &\downarrow \\
 F_2(x) &= F_1(x) + c.
 \end{aligned}$$

Hieruit volgt dus de stelling die we wilden bewijzen:

Als F_1 en F_2 primitieve functies zijn van een op het interval I gedefinieerde functie f , dan verschillen zij een constante.

²⁵De 'credits' voor dit bewijs gaan uit naar [11]

9.3 Bewijs primitieven $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ & $\arctan(x)$

Om regel 10 uit Tabel (2) te bewijzen, halen we allereerst de volgende gelijkheid aan:

$$\begin{aligned}\sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\ \cos^2(x) &= 1 - \sin^2(x) \\ \cos(x) &= \pm\sqrt{1 - \sin^2(x)}.\end{aligned}\tag{23}$$

Vervolgens kan met behulp van de volgende 'truc' het bewijs van de eerste primitieve opgesteld worden:

$$\begin{aligned}\sin(\arcsin(x)) &= x \\ [\sin(\arcsin(x))]' &= [x]' \\ \cos(\arcsin(x)) \cdot [\arcsin(x)]' &= 1 \\ [\arcsin(x)]' &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ [\arcsin(x)]' &= \frac{1}{\pm\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} \text{ zie ook (23)} \\ [\arcsin(x)]' &= \pm\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\end{aligned}\tag{24}$$

Omdat $\arcsin(x)$ een monotoon stijgende functie is, vervalt de negatieve oplossing. Er volgt dus dat:

$$[\arcsin(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

en dus is $F(x) = \arcsin(x) + C$ de verzameling van primitieve functies voor $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Het bewijs voor de primitieve functie $F(x) = \arccos(x)$ gaat volledig analoog aan (24). Omdat $\arccos(x)$ een monotoon dalende functie is, volgt nu alleen dat:

$$[\arccos(x)]' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Het bewijs voor de primitieve functie van $\arctan(x)$, heeft een soortgelijke structuur als het bewijs in (24). In dit geval krijgen we:

$$\begin{aligned}\tan(\arctan(x)) &= x \\ [\tan(\arctan(x))]' &= [x]' \\ (1 + \tan^2(\arctan(x))) \cdot [\arctan(x)]' &= 1 \\ (1 + x^2) \cdot [\arctan(x)]' &= 1 \\ [\arctan(x)]' &= \frac{1}{1 + x^2}.\end{aligned}$$

9.4 Oplossing onbepaalde integralen van (19)

De vier onbepaalde integralen waar het om gaat zijn:

$$\int \frac{1}{x-1} dx, \quad \int \frac{1}{x^2-1} dx, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx, \quad \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

De eerste onbepaalde integraal, i.e. $\int \frac{1}{x-1} dx$, kan eenvoudig opgelost worden. Het gaat hier namelijk om een standaardprimitieve tezamen met een 'milde' substitutie. De primitieve is $F(x) = \ln(|x-1|) + C$.²⁶

De tweede onbepaalde integraal is al iets ingewikkelder. Ten eerste merken we op dat:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)}.$$

Middels dit inzicht kunnen we de onbepaalde integraal proberen op te lossen met 'breuksplitsen'. We krijgen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-1} &= \frac{1}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \\ &= \frac{A(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{B(x+1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{A(x-1) + B(x+1)}{(x+1)(x-1)}. \end{aligned} \tag{25}$$

Om te kunnen breuksplitsen zoeken we nu (constanten) A en B , zodanig dat de vergelijking (25) klopt ($\forall x \in \mathbb{R}$). De noemers in de vergelijking zijn al aan elkaar gelijk. Gelijkstellen van de tellers levert:

$$\begin{aligned} A(x-1) + B(x+1) &= 1 \\ \text{invulling van } x = 1 \text{ geeft:} & \quad 2B = 1 \\ \text{invulling van } x = -1 \text{ geeft:} & \quad -2A = 1. \end{aligned} \tag{27}$$

Er volgt dus dat (25) klopt voor constanten $A = -\frac{1}{2}$ en $B = \frac{1}{2}$. Dit stelt ons uiteindelijk

²⁶Feitelijk is dit niet volledig correct, zie ook de geplaatste voettekst bij Tabel (2)

²⁷Het valt me op dat in boeken bij het breuksplitsen vaak een andere, mijns inziens ingewikkeldere, oplosmethode gebruikt wordt om de constanten (of soms 'termen') in de teller te bepalen. Vaak worden soortgelijke termen gegroepeerd, om vervolgens vergelijkingen op te stellen voor variabelen ' A ' en ' B '. In het geval van deze vergelijking zouden de vergelijkingen $0 = A + B$ (termen met ' x ' gegroepeerd; $0 \cdot x = (A + B)x$) en $1 = -A + B$ (constante termen gegroepeerd) worden gebruikt.

in staat om de tweede onbepaalde integraal van (19) op te lossen;

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 - 1} dx &= \int \frac{1}{(x+1)(x-1)} dx \\
&= \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \right) dx \\
&= \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} \right) dx \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx \\
&= -\frac{1}{2} (\ln(|x+1|) + C_1) + \frac{1}{2} (\ln(|x-1|) + C_2) \\
&= -\frac{1}{2} \ln(|x+1|) + \frac{1}{2} \ln(|x-1|) + C. \quad ^{26}
\end{aligned}$$

De tweede en derde onbepaalde integraal van (19), i.e. $\int \frac{1}{x^2-1} dx$ & $\int \frac{1}{x^2+1} dx$, zijn het meest intrigerend. Ze lijken globaal erg veel op elkaar; het enige verschil zit hem in de verwisseling van een '+' en '-'. Toch zijn ze m.b.t. de primitieve functie volledig verschillend. De tweede onbepaalde integraal is hierboven zojuist opgelost middels breuksplitsen, wat toch nog best wat werk vereist. De derde onbepaalde integraal is een bijzondere standaardprimitieve, met als oplossing $F(x) = \arctan(x) + C$.

De laatste onbepaalde integraal van (19), i.e. $\int \frac{x}{x^2+1} dx$, vereist wat meer 'gegoochel'. Hiervoor is de substitutieregel nodig (zie (17)). Als substitutievariabele kiezen we u :

$$\begin{aligned}
u &= x^2 + 1 \\
\frac{du}{dx} &= 2x \\
dx &= \frac{1}{2x} du
\end{aligned} \tag{26}$$

Met behulp van de substitutie (26) kan de onbepaalde integraal nu opgelost worden:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2 + 1} dx &= \int \frac{x}{u} \cdot \frac{1}{2x} du \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du \\
&= \frac{1}{2} (\ln(|u|) + C_1) \\
&= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C. \quad ^{28}
\end{aligned}$$

²⁸De absolute waarde kan hier weggelaten worden omdat $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

10 Referenties

- [1] Wikipedia: Primitieve_functie, Augustus 2014.
- [2] Module h.hofstede@hogeland.nl; hoofdstelling integraalrekening, Augustus 2016.
- [3] Wikipedia: Antiderivative, November 2016.
- [4] Wikipedia: Elementaire_functie, Maart 2016.
- [5] Wikipedia: Integral, November 2016.
- [6] Wikipedia: Riemann integral, Oktober 2016.
- [7] Wikipedia: Dirichletfunctie, Maart 2017.
- [8] Iiris Attorps, Kjell Björk, Mirko Radic, and Timo Tossavainen. Varied ways to teach the definite integral concept. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 8(2-3):81–99, 2013.
- [9] Jan Bezuidenhout. Limits and continuity: Some conceptions of first-year students. *International journal of mathematical education in science and technology*, 32(4):487–500, 2001.
- [10] Werner Blum. Analysisunterricht-perspektiven für den analysisunterricht. *Mathematikunterricht*, 46(4-5):5–17, 2000.
- [11] Michiel Doorman, Dédé de Haan, André Holleman, and Martin Kindt. Differentiaal- en integraalrekening, deel 5; “integreren”. Technical report, Universiteit Utrecht, Freudenthal Instituut, September 1997. Datum laatste bewerking: 14-09-2012.
- [12] Todd A Grundmeier, Jennifer Hansen, and Emily Sousa. An exploration of definition and procedural fluency in integral calculus. *PRIMUS; Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 16(2):178–191, 2006.
- [13] Rob Bosch Jan van de Craats. *Basisboek wiskunde*. Pearson Education, 2 edition, Juni 2010.
- [14] A. Orton. Students’ understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14(1):1–18, 1983.
- [15] Shaker Rasslan and David Tall. Definitions and images for the definite integral concept. In *PME CONFERENCE*, volume 4, pages 4–089, 2002.
- [16] Bettina Rösken and Katrin Rolka. Integrating intuition: The role of concept image and concept definition for students’ learning of integral calculus. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 3:181–204, 2007.
- [17] P.R.J. Simons and E.M. Koerts. Integraalrekening en metacognitie. *Nieuwe Wiskrant*, 7:24–29, 1988.

- [18] David Tall. *How humans learn to think mathematically: exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge University Press, 2013.
- [19] David Tall and Shlomo Vinner. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2):151–169, 1981.
- [20] Nellie Verhoef. De integraal, dat is de oppervlakte toch? *Euclides*, 81(7):342–346, 2006.