

De impact van een leesprocedure bij het oplossen van telproblemen in 4VWO

Onderzoek van Onderwijs

Universiteit Twente



Auteur:

Gabi Maduro
Science Education and Communication
Vak Wiskunde
s1101706

Begeleiders intern:

dr. ir. T.J.M Coenen
dr. ir. M. Timmer

Begeleiders extern:

ir. A.J.P.M. Kokx
MSc. H. van de Moosdijk

Inhoud

Inleiding en probleemstelling	2
Theoretische inbedding en specifieke onderzoeksvragen	3
Problemen bij Telproblemen.....	3
Tweetaligheid	3
Lezen van wiskunde.....	4
Leesprocedure van Earp.....	4
Formulering hoofdvraag en deelvragen.....	5
Methode en instrumenten	6
Deelnemers en interventie.....	6
De lessen	6
Onderzoeksinstrumenten.....	7
Toets	7
Interviews	10
Resultaten	12
Toets.....	12
Resultaten per opgave: onderzoeksgroep en controlegroep	13
Taal	17
Interviews	18
Conclusie en Discussie.....	20
Referenties	22
Bijlagen	23
Oefentoets.....	23
Uitwerking Oefentoets	25
Interview onderzoek	26
Oplossen van een telprobleem	26
Interviews evaluatie	27

Inleiding en probleemstelling

In het middelbaar onderwijs zijn verschillende onderzoeken gedaan naar het onderwerp telproblemen. Bij verschillende onderzoeken komt naar voren dat leerlingen problemen hebben met het oplossen van telproblemen (Batanero, Navarro-Pelayo, & Godino, 1997; Timmer & Verhoef, 2014; Verhoef N. , 2015). Het onderwerp telproblemen is belangrijk en geschikt voor het middelbare onderwijscurriculum, omdat het problemen bevat voor elk niveau waarin wordt onderwezen, er zijn verschillende toepassingsgebieden en het kan gebruikt worden om verschillende concepten van opsomming, het maken van tegenstellingen, generaliseren en systematisch denken aan te leren (Kapur, 1970).

Dit onderzoek beschrijft of doceren van het leren lezen van telproblemen, in de vorm van het aanleren van een leesprocedure, kan bijdragen aan het oplossen van telproblemen bij middelbare schoolleerlingen. Het onderzoek vindt plaats in Aruba, waarbij twee parallelklassen onderzocht worden; een klas krijgt de leesprocedure die in het artikel *Procedures for teaching reading in mathematics* (Earp, 1970) staat beschreven gedoceerd, de andere klas volgt de reguliere lessen over het onderwerp telproblemen. Na de lessenseries over telproblemen is bij beide groepen een toets afgenomen. De resultaten van deze toets zijn vervolgens met elkaar vergeleken en op basis van de resultaten zijn nog enkele leerlingen geïnterviewd. De toets en de interviews zijn de instrumenten om verschillen tussen de twee groepen bij het oplossen van telproblemen te meten.

De motivatie om onderzoek te doen naar het onderwerp telproblemen is dat leerlingen op de middelbare school geen of weinig begrip tonen bij het oplossen van telproblemen (Timmer & Verhoef, 2014). In het artikel *Combinatoriek meer dan trucjes* (Timmer & Verhoef, 2014) komt naar voren dat leerlingen opmerken dat ze bij een paragraaf de opgaven kunnen oplossen met één bepaalde wiskundige bewerking. De wiskundige bewerking uitvoeren is dan over het algemeen niet het probleem, maar zodra er niet meer duidelijk is bij welke paragraaf een opgave hoort, zoals bijvoorbeeld op de toets, hebben de leerlingen geen idee welke wiskundige bewerking er toegepast moet worden. Leerlingen begrijpen dan vaak ook niet waarom ze een bepaalde wiskundige bewerking bij een telprobleem moeten kiezen.

De reden om een leesprocedure te doceren is dat Timmer en Verhoef (2014) zeggen dat leerlingen vaak geen idee hebben hoe een situatie die een opgave schetst nu eigenlijk in elkaar steekt. Er is dus naast het niet weten welke wiskundige bewerking te gebruiken, ook een probleem in interpretatie van de vraagstukken. Er is veel onderzoek gedaan naar woordproblemen bij rekenen; hierin komt naar voren dat de moeilijkheid in zinsopbouw en vocabulaire wel degelijk van invloed zijn op de resultaten van toetsen van leerlingen (Linville, 1970). Opmerkelijk is dat het doceren van leren lezen van wiskundige problemen, betere resultaten bij wiskunde kan opleveren dan bij het puur doceren van wiskunde (Call & Wiggin, 1966). Bij de leesprocedure die Earp (1970) in zijn artikel beschrijft, lezen de leerlingen het telprobleem vier keer voordat ze tot een oplossing komen. Het lezen van het telprobleem wordt steeds opgevolgd door een of twee stappen, waarbij leerlingen steeds dichterbij tot een oplossing van het telprobleem komen. In dit onderzoek is voor deze leesprocedure gekozen, omdat de eerste stap van de procedure zich focust op het visualiseren van het telprobleem. Visualisatie van een telprobleem is volgens Timmer en Verhoef (2014) de eerste stap in het oplossen van een telprobleem, voordat er wordt teruggegrepen naar de wiskundige bewerkingen.

Het voorgaande leidt tot de volgende hoofdvraag van dit onderzoek:

In welke mate draagt het aanleren van de leesprocedure van Earp bij aan het oplossen van telproblemen bij leerlingen uit 4VWO in het middelbaar onderwijs in Aruba?

Theoretische inbedding en specifieke onderzoeksvragen

In dit onderzoek staat het onderwerp telproblemen in het middelbaar onderwijs centraal. Belangrijk is dat leerlingen de telproblemen kunnen oplossen. Dat betekent dat het telprobleem eerst juist geïnterpreteerd moet worden, zodat leerlingen vervolgens de wiskundige bewerking kunnen kiezen die toegepast moet worden. Het juist interpreteren van een telprobleem is volgens Batanero et al. (1997) de factor waar de meeste fouten bij worden gemaakt door leerlingen. De leesprocedure die in het onderzoek van Earp (1970) staat beschreven is juist voor deze factor relevant en dus belangrijk voor dit onderzoek, omdat de procedure zich focust op het schetsen van de situatie van het telprobleem. Daarnaast vindt het onderzoek op Aruba plaats waar in het Nederlands gedoceerd wordt, maar waar Nederlands niet de eerste taal is bij de meerderheid van de leerlingen. Tweetaligheid speelt daarom ook een rol in dit onderzoek. Er zal tijdens het onderzoek gefocust worden op het leren lezen van telproblemen, daarmee valt dit onderzoek in het domein van het leren lezen van wiskundige problemen.

Problemen bij Telproblemen

Onderzoek naar het oplossen van telproblemen laat zien welke problemen zich voordoen bij leerlingen bij het oplossen van telproblemen en focust zich vooral op de wiskundige inhoud van telproblemen. Batanero et al. (1997) bouwt voort op de drie verschillende modellen die Dubois (1984) classificeert bij het oplossen van simpele telproblemen die op te lossen zijn met het toepassen van één wiskundige operatie. De drie verschillende modellen bestaan uit de volgende problemen:

1. Selectieproblemen
2. Verdeelproblemen
3. Partitieproblemen

Bij selectie wordt er een verzameling van m objecten uit een verzameling van n producten gekozen, bij verdeling wordt een verzameling van n objecten verdeeld over m objecten en bij partitie wordt een verzameling van n objecten opgebroken in m deelverzamelingen. In wezen zijn de verdeelproblemen en partitieproblemen aan elkaar gelijk, maar Dubois (1984) zegt dat dit niet per se vanzelfsprekend is bij leerlingen. Het gaat er hierbij vooral om hoe de vraag tekstueel geformuleerd wordt of een telprobleem in de categorie verdeelproblemen of partitieproblemen valt. Zo kan hetzelfde telprobleem bij verschillende woordkeuze in een ander model passen.

Batanero et al. (1997) splitst de drie modellen vervolgens op, door te kijken welke wiskundige bewerkingen er mogelijk zijn bij elk model. Zo definieert Batanero et al. (1997) dertien verschillende telproblemen. Bij deze verschillende problemen hoeven overigens niet per se verschillende wiskundige operaties gebruikt te worden om ze op te lossen. Op basis van deze dertien telproblemen is gekeken naar de verschillende fouten die leerlingen maken bij het oplossen van de telproblemen. Batanero et al. (1997) beschrijft welke fouten leerlingen maken bij het oplossen van de dertien telproblemen en categoriseert deze fouten in vier verschillende factoren. De belangrijkste factor volgens Batanero is: *“the complexity of the verbal statement of the problem”*. Hierbij gaat het er vooral om dat leerlingen vaak fouten maken in het interpreteren van de data van het telprobleem. Doormiddel van het doceren van de leesprocedure wordt er geprobeerd deze factor aan te pakken en de hoeveelheid fouten die hierin gemaakt worden door leerlingen te verminderen.

Tweetaligheid

In Aruba hebben we te maken met een groep leerlingen die les krijgen in een andere taal dan de moedertaal. De Nederlandse taal blijft zelfs na de diploma-uitreiking nog een uitdaging (Colegio Arubano). Bepaalde Amerikaanse onderzoeken schetsen een gelijke situatie met Spaanstaligen in de

zuidelijke Staten van Amerika. Moschkovich (2005) bespreekt twee verschillende studies om te kijken op welke manier ze relevant kunnen zijn voor tweetalige leerlingen die wiskunde leren door het gebruiken van twee talen. Er komt naar voren dat leerlingen een voorkeur hebben voor een bepaalde taal bij het doen van rekenkundige bewerkingen. Daarnaast zijn leerlingen bezig met 'code-switching', wat hier bedoeld wordt als het wisselen van talen tijdens het oplossen van een wiskundig probleem. Als leerlingen het met elkaar over de stof hebben worden vaak fouten gemaakt tijdens het wisselen van taal en kunnen bepaalde concepten totaal verschillende betekenis krijgen. Er zijn hier twee gevallen mogelijk: leerlingen weten niet wat het concept precies inhoudt in de andere taal of leerlingen weten wiskundig gezien niet precies wat het concept inhoudt. Aangezien het merendeel van de deelnemers wiskunde in een andere taal gedoceerd krijgt dan in de moedertaal, is het interessant om te kijken naar verschillen in resultaten tussen deze groep en de groep met Nederlands als moedertaal.

Lezen van wiskunde

Naar het lezen van wiskunde is veel onderzoek gedaan, maar niet specifiek naar telproblemen. Het artikel van Lewis & Aiken (1971) geeft een overzicht van onderzoek op het gebied van taalfactoren bij het leren van wiskunde. Het artikel zegt dat de meeste onderzoeken meer vragen dan antwoorden opleveren, dit laat zien hoe complex taal en wiskunde in combinatie met elkaar is. Lewis & Aiken laten in hun artikel zelfs artikelen zien die elkaar tegen spreken. Dit komt doordat er heel veel verschillende taalfactoren een rol spelen in het leren van wiskunde, terwijl de meeste onderzoeken zich op een paar van die factoren focussen. Toch is wel zeker te zeggen dat het leren van wiskunde en leesvaardigheid met elkaar te maken hebben. Zo komt duidelijk naar voren dat de moeilijkheid van een probleem te maken heeft met de zinsopbouw en vocabulaire, er wordt hier gewezen op onder andere het onderzoek van Linville (1970). Daarnaast is er ook bewijs dat het focussen op taal kan helpen bij het oplossen van wiskundige problemen (Call & Wiggin, 1966).

Leesprocedure van Earp

In het artikel *Procedures for teaching reading in mathematics* geeft Earp verschillende redenen waarom het aanleren van leesprocedures belangrijk is bij het leren van rekenen. Rekenproblemen zijn problemen waarbij de informatiedichtheid hoog is, wat ook vaak het geval is bij telproblemen. Dat betekent dat er in ieder geval de volgende aanpassingen gedaan moeten worden ten opzichte van het lezen van een normale tekst:

- *Aanpassing van de snelheid* (moet lager liggen dan bij een verhalende tekst)
- *Gevarieerde oogbeweging* (vormen van regressieve oogbeweging wordt veel meer gebruikt, zoals van rechts naar links)
- *Herlezen* (zelfs de meest geavanceerde lezer moet af en toe een verklaring of een uitleg meerdere malen lezen).

De leerling moet met meerdere symbolische betekenissen binnen één context rekening houden, bijvoorbeeld getallen, grafieken en woorden. Daarnaast moet de leerling ook de conceptuele achtergrond van woorden en de taal die gebruikt wordt begrijpen.

Earp geeft daarom de volgende leesprocedure voor het oplossen van wiskundige problemen die algemeen staat voorgescreven in de literatuur:

1. *Lees het probleem om de situatie te visualiseren*, om een algemene indruk te krijgen van het probleem.
2. *Herlees het probleem om de feiten te vinden*, vestig met name de aandacht op de gegeven informatie en de vraag die het probleem stelt.
3. *Herken moeilijke vocabulaire of concepten* en verken deze met de hulp van de docent.

4. *Herlees het probleem om een oplossingsstrategie te bedenken en uit te voeren.*
5. *Herlees het probleem om de oplossingsstrategie en de oplossing te controleren.*

Deze stappen zullen uitgebreid aan de hand van voorbeelden in de lessen van de onderzoeksgroep besproken worden.

Formulering hoofdvraag en deelvragen

De interpretatie van telproblemen is een probleem voor leerlingen. Het goed leren lezen en visualiseren van het probleem zou moeten bijdragen aan het oplossen van het telprobleem. Daarom luidt de onderzoeksvraag van dit onderzoek als volgt: *In welke mate draagt het aanleren van de leesprocedure van Earp bij aan het oplossen van telproblemen bij leerlingen uit 4VWO in het middelbaar onderwijs in Aruba?*

De methode beschreven in het artikel van Earp (1970) zal dienen om de interpretatie van het telprobleem te verbeteren en daarnaast om nog eventuele slordigheidsfouten te verminderen vanwege het herlezen. Het fout interpreteren van het telprobleem wordt als conceptuele fout gezien. Daarnaast kunnen er nog fouten optreden in het kiezen of uitvoeren van de juiste procedure, procedurele fouten. Het aanleren van een leesprocedure zal op de procedurele fouten geen invloed hebben, omdat het hierbij puur gaat om het toepassen van de wiskundige kennis. Verder in dit verslag zullen de fouten dan ook opgesplitst worden in de categorieën slordigheidsfouten, conceptuele fouten en procedurele fouten. Daarnaast is de tweetaligheid iets belangrijks om mee te nemen in dit onderzoek, omdat dit onderzoek gaat over het middelbaar onderwijs in Aruba, waarbij het merendeel van de leerlingen een andere moedertaal heeft dan de taal waarin word onderwezen. De volgende deelvragen zijn geformuleerd:

1. *In hoeverre worden er minder conceptuele fouten bij het onderwerp telproblemen in Aruba gemaakt, door het aanleren van de leesprocedure van Earp?*
2. *In hoeverre worden er minder slordigheidsfouten bij het onderwerp telproblemen in Aruba gemaakt, door het aanleren van de leesprocedure van Earp?*
3. *Is er een onderscheid bij het juist oplossen van de telproblemen bij middelbare school leerlingen in Aruba bij het onderwerp telproblemen, afhankelijk of de leerling Nederlands als moedertaal heeft of niet?*
4. *In hoeverre gebruiken de leerlingen in 4VWO in Aruba de aangeleerde leesprocedure bij het oplossen van telproblemen?*

Methode en instrumenten

Deelnemers en interventie

Dit onderzoek is uitgevoerd op het Colegio Arubano in Aruba, dit is een middelbare school. Aan het onderzoek hebben twee parallelklassen van 4VWO wiskunde A deelgenomen. In beide klassen is het hoofdstuk Combinatoriek uit de lesmethode Getal en Ruimte behandeld, wat uit vijf paragrafen bestaat. Bij de eerste vier paragrafen wordt steeds nieuwe lesstof behandeld, bij de laatste paragraaf wordt de lesstof uit de eerste vier paragrafen gecombineerd, maar komt er geen nieuwe lesstof bij. Bij een van de twee klassen is de bestaande lessenserie gedoceerd door de vaste docent, dit is de controlegroep. In de controlegroep zitten 29 deelnemers. In de parallelklas is ook de bestaande lessenserie gedoceerd door de vaste docent tot de laatste paragraaf van het hoofdstuk. Vanaf dan heb ik de lessen overgenomen. In deze lessen is de leesprocedure van Earp aangeleerd aan de leerlingen. De leerlingen hebben deze procedure leren toepassen bij het oplossen van de telproblemen van de laatste paragraaf en de herhaling van het hoofdstuk, dit nam twee lessen in beslag. Deze klas is de interventiegroep en bestaat uit 17 deelnemers. Aan het eind van beide lessenseries is er een oefentoets; deze gaat over de stof behandeld in voorgaande lessenseries. Aan de hand van de resultaten zijn er uit beide klassen nog drie leerlingen geïnterviewd. Uit beide klassen is er een leerling gekozen die goed scoort, gemiddeld scoort en die laag scoort. Dit is gedaan, omdat er naar verwachting verschillende resultaten bij de verschillende niveaus gemeten zouden worden. Leerlingen die beter scoren benaderen naar alle waarschijnlijkheid een telprobleem anders benaderen dan leerlingen die slechter scoren. Om te bepalen in welke categorie een leerling valt is gekeken naar het aantal gescoorde punten op de oefentoets. Daarnaast zijn ook nog de leerlingen die Nederlands als moedertaal hebben vergeleken met de leerlingen die Nederlands niet als moedertaal hebben, deze leerlingen zitten zowel in de onderzoeksgroep als in de controlegroep. Er zijn in totaal tien leerlingen met Nederlands als moedertaal en 36 leerlingen met een andere moedertaal. Zes van deze tien leerlingen zitten in de onderzoeksgroep en vier in de controlegroep.

De lessen

De twee aangepaste lessen die in de onderzoeksgroep zijn gegeven bevatten geen nieuwe lesstof. De wiskundige operaties die uitgevoerd moesten worden om tot een juiste oplossing te komen zijn hetzelfde als die in de paragrafen ervoor. Datgeen wat wel anders is; leerlingen moeten in één opgave verschillende wiskundige bewerkingen gebruiken in plaats van steeds een bewerking om tot een juiste oplossing te komen.

In de eerste les is begonnen met een inleiding. Hierin is verteld dat er een leesprocedure aangeleerd gaat worden en waarom deze leesprocedure belangrijk is; namelijk om geen fouten te maken in de interpretatie van het telprobleem en om de eigen uitwerking te controleren om slordigheidsfouten te voorkomen.

Vervolgens zijn de stappen van de leesprocedure langsgegaan. De stappen zijn benoemd, toegelicht en samenvattend als volgt op het bord genoteerd:

1. Visualisatie, creëer een algemene indruk
2. Herlees voor feiten en de vraag
3. Moeilijke woorden
4. Herlees voor een strategie
5. Herlees om te controleren

Tijdens het doorlopen van de stappen van de leesprocedure is de leerlingen ook gevraagd om deze stappen in hun schriften te noteren. Daarna is er met een opgave uit het boek begonnen, waarbij een persoon steeds boeken uitdeelt aan anderen en gevraagd wordt op hoeveel manieren dit mogelijk is.

De opgave bestaat uit deelvragen en elke deelvraag gebruikt een andere wiskundige bewerking om tot een juist antwoord te komen. Deze opgave is klassikaal opgelost door de klas de vijf stappen van de leesprocedure toe te laten passen op elke deelvraag. Bij het maken van deze opgave werden de stappen van de leesprocedure begeleid door de docent. Zo stelde de docent bij de eerste stap hulpvragen die de leerlingen moesten beantwoorden om in te zien welke situatie het telprobleem zich nu in bevond.

De eerste deelvraag schetst de volgende situatie: Een persoon koopt zes verschillende boeken en wil er hiervan drie cadeau doen aan zijn vriend. Op hoeveel manieren kan dit?

Twee leerlingen moesten dit voor de klas naspelen waarbij de klas mogelijke situaties schetste en de verschillen tussen deze situaties opmerkten. De ene leerling deelde bijvoorbeeld drie boeken uit en schreef deze mogelijkheid vervolgens op. Daarna moest de leerling dezelfde drie boeken uitdelen, maar in een andere volgorde. De discussie ging of dit dan een andere mogelijkheid was of niet. Na dit gedaan te hebben werd de leesprocedure stap voor stap doorlopen, vervolgens werd op het bord de informatie die belangrijk was genoteerd. Uiteindelijk kwam de klas met die informatie tot een juiste oplossing.

Vervolgens kregen de leerlingen de opdracht om de leesprocedure toe te passen op drie andere opgaven. Het naspelen om de situatie te ontdekken moesten de leerlingen hierbij in hun hoofd en in hun in schrift doen, door bijvoorbeeld mogelijkheden op te schrijven en andere aantekeningen te maken. Aan het einde van de les zijn de stappen van de leesprocedure nog eens klassikaal herhaald.

De tweede les begon met het voordoen van een opgave uit de vorige les aan de hand van de stappen van de leesprocedure. De stappen waren van tevoren nog eens duidelijk op het bord gezet. Vervolgens gingen de leerlingen met vier nieuwe opgaven aan de gang, met de instructie ze op te lossen aan de hand van de stappen van de leesprocedure. Tussendoor werd steeds een opgave besproken en legde een willekeurige leerling uit hoe hij of zij de opgave had aangepakt. Hierbij kon direct feedback gegeven worden waar nodig was en de leerlingen werden nog gewezen op bepaalde valkuilen van het betreffende telprobleem.

Onderzoeksinstrumenten

Toets

Beide klassen maakten aan het eind van de lessenserie een oefentoets, deze toets en de uitwerking ervan is in de bijlagen toegevoegd. De toets representeert de opgedane kennis in het hoofdstuk telproblemen en bevat opgaven uit de drie verschillende modellen (selectie, verdeling en partitie) die in het artikel van Batanero et al. (1997) beschreven staan. De toets bestaat uit twaalf deelopgaven, waarvan er zes met één wiskundige bewerking op te lossen zijn. De andere zes zijn op te lossen door twee wiskundige bewerkingen te gebruiken. De wiskundige bewerkingen die tot een juiste oplossing kunnen leiden zijn: permutaties, combinaties, machten (bij het aantal mogelijkheden met herhalingen), vermenigvuldiging en optelling (somregel). Deze bewerkingen zorgen er niet voor dat een opgave in een van de drie modellen valt, maar de manier waarop de vraag tekstueel gesteld is. Het tijdstip van de toets is van tevoren aangekondigd bij de leerlingen. De leerlingen mogen bij de toets hun uitwerkingen en boek gebruiken. Zij hoeven dus niet extra voorbereiding te treffen, omdat ze de voorbereiding in de lessen ervoor hebben gehad en eigen uitwerkingen en het boek erbij mogen houden voor formules. In beide groepen werden deze hulpmiddelen uiteindelijk weinig tot niet gebruikt, af en toe nam een leerling een schema erbij om te zien welke wiskundige bewerking ze bij een situatie moesten gebruiken.

De uitwerkingen van de leerlingen van de toets zijn opgedeeld in vijf categorieën. De uitwerking behoort tot de categorie '*Niet ingevuld*' als de opgave niet is uitgewerkt. Dit kan zijn door gebrek van tijd of door gebrek van begrip. De uitwerking behoort tot de categorie '*Conceptuele fout*' als de opgave verkeerd is geïnterpreteerd. In dit geval heeft de leerling de situatie van het telprobleem verkeerd begrepen. In de uitwerking van de opgave komt dit naar voren als er verkeerde getallen zijn gebruikt, teveel wiskundige bewerkingen worden gebruikt of er naar een te kleine oplossingsruimte wordt gekeken. De uitwerking behoort tot de categorie '*Procedurele fout*' als de verkeerde wiskundige bewerking is gekozen voor het oplossen van het probleem, maar de interpretatie van het telprobleem wel begrepen is. De uitwerking behoort tot de categorie '*Slordigheidsfout*' als er geen conceptuele of procedurele fout is gemaakt, maar de leerling is niet tot de juiste oplossing gekomen. De uitwerking is hier correct alleen het eindantwoord is fout of mist. Als de opgave helemaal goed is uitgewerkt valt de uitwerking in de categorie '*Correct*'.

Een fout zou in meerdere categorieën vallen, bijvoorbeeld als er een conceptuele fout en procedurele fout worden gemaakt in een uitwerking. Echter, voor de analyse is het wenselijk om toch aan iedere fout slechts een categorie toe te wijzen. Er is gekozen om de categorie '*Conceptuele fout*' het belangrijkste te maken, omdat het juist interpreteren van het telprobleem de eerste stap is in het oplossen van het telprobleem. Dit is juist de fout die de leesprocedure zou moeten verhelpen. Vervolgens is de '*Procedurele fout*' het belangrijkste, want na de interpretatie moet de procedure worden gekozen en als laatst komt dan de categorie '*Slordigheidsfout*'. Uiteindelijk valt iedere uitwerking in een van de vijf categorieën.

Om te bepalen in welke categorie een uitwerking van een opgave valt zijn er criteria opgesteld. De criteria zijn ja/nee vragen om te bepalen of een uitwerking in de desbetreffende categorie valt. Deze vragen worden van boven naar beneden een voor een afgewerkt in Tabel 1. Wordt een vraag met 'ja' beantwoord dan beantwoorden we de volgende vraag, is het antwoord op de vraag 'nee' dan behoort de uitwerking in de desbetreffende categorie en stoppen we met het langsgaan van de criteria. Als de laatste vraag met 'ja' wordt beantwoord is de uitwerking correct. De criteria staan in de volgende tabel:

Tabel 1: Vragen worden van boven naar beneden beantwoord; Bij 'ja' beantwoorden we de volgende vraag, bij 'nee' valt de uitwerking in de desbetreffende categorie

Categorie	Criteria
Niet ingevuld	De opgave is niet uitgewerkt <i>Is de opgave uitgewerkt?</i>
Conceptuele fout	De opgave is verkeerd geïnterpreteerd <i>Zijn het juiste aantal wiskundige bewerkingen gekozen?</i> <i>Is er naar de volledige oplossingsruimte gekeken?</i> <i>Zijn de juiste getallen in de uitwerking gebruikt?</i>
Procedurele fout	De verkeerde procedure is gekozen om tot het juiste eindantwoord te komen <i>Zijn de juiste wiskundige bewerkingen gekozen?</i>
Slordigheidsfout	Er zijn geen procedurele of conceptuele fouten gemaakt, maar de uitwerking is niet juist <i>Is de uitwerking correct?</i>
Correct	De opgave is correct gemaakt

Bij de data-analyse zijn er twee problemen die zich voordoen bij het toedelen van de categorieën. Ten eerste bevat een uitwerking op zichzelf weinig informatie. Alleen aan de uitwerking kan er niet gezien worden wat de leerling gedacht heeft bij het maken van de opgave. De uitwerking kan bijvoorbeeld correct zijn gegokt, terwijl een andere leerling dezelfde opgave correct maakt zonder te gokken. Vervolgens worden beide uitwerkingen als gelijk gezien. Dit is niet per se erg, maar er is niet te zeggen welk deel van de uitwerkingen in bijvoorbeeld de categorie 'Correct' gegokt is en welk deel niet. Ten tweede is de grens tussen de categorieën 'Conceptuele fout' en 'Procedurele fout' erg nauw. De vragen voor de criteria zijn duidelijk, maar uiteindelijk bestaan er nog twijfelgevallen waarbij er gediscussieerd kan worden of de opgave nu wel verkeerd geïnterpreteerd is of niet. Ook dit probleem heeft mede te maken met dat een uitwerking te weinig informatie geeft.

Om een beeld te scheppen van welke uitwerking in welke categorie valt en hoe deze problemen zich voordoen, is hier een voorbeeld geïllustreerd van elk mogelijk type fout bij opgave 4d van de toets. Hierbij zijn de categorieën 'Correct' en 'Niet ingevuld' buiten beschouwing gelaten.

Bij opgave 4d gaat het om 28 zitplaatsen in een bioscoop, waarbij een plaats leeg kan zijn, bezet door een vrouw of bezet door een man. Uit de vraag moeten de leerlingen halen dat ze de mogelijkheden moeten splitsen voor als er geen, een of twee vrouwen in de zaal zitten en verder zijn voor elk geval de plaatsen bezet door mannen.

De vraag bij de opgave luidt: Op hoeveel manieren kunnen er minder dan drie vrouwen in de zaal zitten als de rest van de plaatsen bezet wordt door mannen? Het uitwerkingen model geeft de volgende oplossing:

$$(1) \begin{cases} 0 \text{ vrouwen: } \binom{28}{0} = 1 \\ 1 \text{ vrouw: } \binom{28}{1} = 28 \\ 2 \text{ vrouwen: } \binom{28}{2} = 378 \end{cases}$$

Optellen van de mogelijkheden $1 + 28 + 378 = 407$ mogelijkheden (1)

In figuur 1 zien we een uitwerking die valt in de categorie 'Conceptuele fout'. Deze leerling heeft de woorden 'minder dan' in de vraagstelling niet goed geïnterpreteerd, omdat de leerling in de uitwerking ook 28 boven 3 mogelijkheden meeneemt, daarom valt de uitwerking direct in de categorie 'Conceptuele fout'. Als bij deze uitwerking de eerste vermenigvuldiging van combinaties was weggelaten, zou de uitwerking met bovengenoemde criteria ook in de categorie 'Conceptuele fout' belanden. Als dit het geval was, zou er beargumenteerd kunnen worden dat de uitwerking in de categorie 'Procedurele fout' moet vallen. De fout is dat de leerling elke combinatie nog vermenigvuldigt met een andere combinatie. Dit kan gezien worden als dat de leerling niet wist welke procedure hij of zij moest kiezen ('Procedurele fout') of dat de leerling niet heeft begrepen dat er een enkele combinatie nodig was om tot een juiste oplossing te komen en op de een of andere manier dacht dat hij of zij nog de combinaties $\binom{28}{26}$, $\binom{28}{27}$ en $\binom{28}{28}$ moest gebruiken ('Conceptuele fout').

Figuur 1 Conceptuele fout

In figuur 2 is te zien dat de leerling de gevallen van nul, een of twee vrouwen bekijkt. De leerling gebruikt hier voor het aantal mogelijkheden ook combinaties, maar gaat de fout in door ze te vermenigvuldigen in plaats van op te tellen. Uit de uitwerking is dus te zien dat de situatie goed is begrepen, maar er is een fout gemaakt in het kiezen van de wiskundige bewerking, dus een procedurele fout. Ook dit zou een conceptuele fout kunnen zijn; het wiskundige concept van de somregel is hier namelijk niet begrepen; de leerling snapt niet dat hij of zij de combinaties moet optellen. Zeer waarschijnlijk zal het hier gaan om de wiskundige kennis die ontbreekt, maar dat is dus niet met zekerheid te zeggen. Als het om de wiskundige kennis gaat die ontbreekt, dan is het wel goed dat de uitwerking in de categorie 'Procedurele fout' valt, omdat de leesprocedure geen impact heeft op de wiskundige kennis van de leerling, maar eventueel tekstueel kan helpen bij het oplossen van de telproblemen. Juist om die reden wordt er gekeken naar de impact van het aanleren van de leesprocedure bij conceptuele fouten en slordigheidsfouten.

$$d) \binom{28}{2} \cdot \binom{28}{1} \cdot \binom{28}{0} \neq \binom{28}{26} \cdot \binom{28}{27} \cdot \binom{28}{28} = 10584$$

Figuur 2 Procedurele fout

In figuur 3 is de uitwerking helemaal correct, alleen is het eindantwoord anders dan het juiste eindantwoord. Waarschijnlijk heeft de leerling vergeten 28 boven 0 in de rekenmachine erbij te typen, dit is dus een slordigheidsfout.

$$d) \binom{28}{0} \cdot 1 + \binom{28}{1} \cdot 1 + \binom{28}{2} = \binom{28}{0} + \binom{28}{1} + \binom{28}{2} = 406$$

Figuur 3 Slordigheidsfout

In de resultaten worden de uitwerkingen van de opgaven per vraag geanalyseerd. Er zal per vraag gekeken worden hoeveel procent er in elke categorie valt zowel bij de controlegroep als bij de onderzoeksgroep. Vervolgens zal het verschil van de percentages meegenomen worden voor verdere analyse. De totale puntenscores worden per leerling ook nog bekeken. Er zal gekeken worden naar het verschil tussen de onderzoeksgroep en de controlegroep, maar ook tussen de groepen waarbij leerlingen Nederlands als moedertaal hebben en leerlingen die niet Nederlands als moedertaal hebben.

Interviews

Uit beide klassen zijn drie leerlingen geïnterviewd; het volledige interview is te vinden in de bijlage. Deze leerlingen zijn gekozen aan de hand van de toets resultaten. Op de toets konden 23 punten gescoord worden. Een leerling valt in de categorie hoog met 12 punten of meer, in de categorie laag met 6 punten of minder en in de categorie gemiddeld met een score van 7 tot en met 11 punten. Deze categorieën zijn zo gekozen, omdat er een duidelijk verschil in niveau te merken is op een toets rond deze grenzen. Het interview bestaat uit twee delen. Het eerste deel zal vragen over de toets en de motivatie voor de toets betreffen, daarnaast voor de onderzoeksgroep of ze de leesprocedure hebben toegepast. Bij het tweede deel krijgt de leerling een telprobleem met vijf deelopgaven voorgeschoteld. Daarbij wordt de leerling gevraagd hardop te denken en zijn of haar keuzes voor het oplossen uit te leggen om inzicht te krijgen in hoeverre de leerling de situatie begrijpt en weet welke wiskundige bewerkingen hij of zij moet toepassen en waarom de bewerking toegepast moet worden. Bij de toets is namelijk vaak moeilijk te zien waarom de leerling een bepaalde uitwerking geeft. Na het oplossen is nog naar de manier van oplossen gevraagd, of het gebruikelijk is dat de leerling het telprobleem op die manier oplost.

De deelopgaven van het telprobleem uit het interview lijken steeds op elkaar in de zin dat ze gaan over hetzelfde onderwerp, alleen moet de leerling steeds een andere wiskundige operatie gebruiken om tot een juiste oplossing te komen. Om de opgaven juist op te lossen, worden de leerlingen hiermee gedwongen om het telprobleem goed te lezen. Als de leerlingen niet uit een opgave komen dan is dit geen probleem en mogen ze verder met de volgende opgave.

De interviews worden vervolgens gebruikt om verschillen tussen de oplossingsstrategieën van de verschillende categorieën leerlingen met elkaar te vergelijken en de verschillen tussen de leerlingen uit de onderzoeksgroep en de controlegroep met elkaar te vergelijken. Daarnaast is het ook bedoeld om te zien in hoeverre leerlingen gebruik maken van de aangeleerde leesstrategie bij het oplossen van de telproblemen.

Resultaten

Toets

De algemene indruk van de uitwerkingen van de toets was dat de uitwerkingen erg beknopt waren. Er stonden naast het antwoord en de gebruikte wiskundige bewerking, bijvoorbeeld een combinatie, geen aantekeningen op het blad. Ook was er op de toetsbladzjes met opgaven weinig tot niets genoteerd, heel soms waren er woorden onderstreept.

De uitwerkingen vallen per opgave in een van de eerdergenoemde vijf categorieën. In tabel 2 staan de gegevens voor alle opgaven van de toets. Dit zijn percentages aangezien het aantal leerlingen verschilt in de verschillend gekozen groepen. De kolommen geven aan om welke groep het gaat en de rijen geven aan hoeveel procent er van een bepaalde groep in de desbetreffende categorie valt. De kolom 'Verschil' is het verschil tussen de twee percentages van de groepen die worden vergeleken. Uit Tabel 2 kan bijvoorbeeld gehaald worden dat de controlegroep 25% van de opgaven correct heeft beantwoord.

Tabel 2: Algemene resultaten toets in percentages

	Onderzoeksgroep	Controlegroep	Vershil		NL moedertaal	Andere moedertaal	Vershil
Niet ingevuld	8%	10%	-2%		14%	8%	6%
Conceptuele fout	59%	57%	2%		59%	58%	1%
Procedurele fout	2%	5%	-3%		2%	4%	-2%
Slordigheidsfout	4%	3%	1%		2%	4%	-2%
Correct	27%	25%	2%		23%	26%	-3%

Leerlingen waren over het algemeen op tijd klaar met de toets, een enkeling had de tijd nodig tot het einde. Bij de meeste uitwerkingen die in de categorie 'Niet ingevuld' vallen kan dus gesteld worden dat de leerlingen bij die opgave geen idee hadden hoe ze de opgave moesten oplossen.

Wat verder opvalt in Tabel 2 is dat het grootste gedeelte van de uitwerkingen of wel in de categorie 'Correct' of in de categorie 'Conceptuele fout' vallen voor elke groep. Dit betekent dus dat als er een fout wordt gemaakt in een uitwerking, dan valt deze bijna altijd in de categorie 'Conceptuele fout'. Er werden minder procedurele fouten gemaakt, omdat zodra de interpretatie van het telprobleem goed was, er vervolgens een of twee wiskundige bewerkingen gekozen moesten worden. Deze stap was voor de leerlingen die het telprobleem goed konden interpreteren blijkbaar niet lastig. De slordigheidsfouten werden weinig gemaakt, omdat de uitwerking vaak zo beknopt was dat daar weinig fouten in gemaakt konden worden. Daarnaast zijn er ook nog slordigheidsfouten en procedurele fouten die vaak gepaard gaan met een conceptuele fout, wat betekent dat de uitwerking van de opgave in de categorie 'Conceptuele fout' valt.

Als er alleen gekeken wordt naar de categorie 'Correct' heeft de onderzoeksgroep de toets beter gemaakt dan de controlegroep en heeft de groep met een andere moedertaal dan Nederlands de toets beter gemaakt dan de groep met Nederlands als moedertaal. Als er gekeken wordt naar het totaal aantal correct gemaakte opgaven maakt de onderzoeksgroep gemiddeld 3,24 aantal opgaven goed en de controlegroep er 3. Desondanks zijn de verschillen tussen de groepen, dus onderzoeksgroep en controlegroep en de groep met Nederlands als moedertaal en een andere moedertaal, in Tabel 2 niet significant bij $\alpha = 0,05$.

$\alpha = 0,05$ wordt in het gehele verslag gebruikt als grens om significantie te bepalen. De waarde voor alpha is zo gekozen, omdat dit een gangbare en veelgebruikte waarde voor alpha is. Op de waarden in Tabel 2 is de chi-kwadraat toets toegepast. Er is hier gekeken naar het aantal uitwerkingen wat in

de desbetreffende categorie valt. De chikwadraattoets is voor de waarden in tabel 2 een goede toets, omdat de verwachte waarden per cel groter zijn dan 1 en minder dan 20% is kleiner dan 5.

Tabel 3 geeft aan hoe goed de groepen hebben gescoord op de oefentoets en in 3VWO om te bepalen of hier nog verschillen zijn tussen de groepen. Om te kijken of er in tabel 3 significante verschillen optreden is de t-toets toegepast. Om de toets uit te voeren zijn gemiddeldes en standaarddeviaties nodig. De gemiddeldes en de standaarddeviaties van het behaalde cijfer in 3VWO en het behaalde cijfer op de oefentoets zijn hiervoor gebruikt. Ten eerste laat Tabel 3 zien dat de cijfers voor de oefentoets gemiddeld 1,8 punt lager uitvallen dan het behaalde eindcijfer in 3VWO. De oefentoets is dus gemiddeld een stuk slechter gemaakt dan de gemiddelde toets in 3VWO, toch zijn deze verschillen niet significant. Hier is voor elke groep het gemiddeld behaalde cijfer uit 3VWO vergeleken met het gemiddeld behaalde cijfer op de oefentoets. Hiernaast is de onderzoeksgroep met de controlegroep vergeleken en de groep met Nederlands als moedertaal met de groep met een andere moedertaal. Zowel bij het gemiddelde cijfer in 3VWO als bij het gemiddelde cijfer op de oefentoets zijn hier geen significante verschillen.

Als we naar zowel Tabel 2 en Tabel 3 kijken lijken de cijfers voor de oefentoets elkaar tegen te spreken. In Tabel 2 wordt geconcludeerd dat de onderzoeksgroep het beter doet dan de controlegroep en bij Tabel 3 vice versa. Dit verschil komt doordat er bij de opgaven een verschillend aantal punten te verdienen is. Een leerling kan bijvoorbeeld in de categorie 'Conceptuele fout' vallen, maar toch twee van de drie punten behalen, zo kan een andere leerling in dezelfde categorie vallen maar nul van de drie punten hebben gehaald. Er kan dus geconcludeerd worden dat het verschil dusdanig klein is dat er sprake is van effect, gekeken naar de gemiddeldes van de toets.

Tabel 3 Vergelijking van de groepen met de cijfers uit 3VWO

	Onderzoeksgroep	Controlegroep	NL moedertaal	Andere moedertaal
Gemiddeld cijfer V3	5,7	6,1	6,0	6,0
Gemiddeld cijfer oefentoets	4,1	4,3	3,9	4,3

Resultaten per opgave: onderzoeksgroep en controlegroep

Naast de uitwerkingen van de oefentoets in het algemeen is er ook gekeken naar de uitwerkingen voor elke verschillende deelopgave. Voor de onderzoeksgroep en de controlegroep is deze data te vinden in de tabellen 4, 5 en 6. Waarbij opgave 2 een opgave is uit het selectiemodel en opgave 3 en 4 opgaven uit de partitie en verdeelmodellen van Dubois (1984).

Om verschillen te meten, tussen de groepen en voor elke deelopgave, is wederom de chikwadraattoets gebruikt. Soms vallen er bij beide groepen geen uitwerkingen in een bepaalde categorie. Als dit het geval is wordt de categorie niet meegenomen in de chikwadraattoets. Daarnaast is het lastig om aan de voorwaarde te voldoen dat er minder dan 20% van de cellen van de verwachte waarde kleiner is dan 5. Het probleem hierbij is dat het aantal uitwerkingen per deelopgave 46 bedraagt (17 van de onderzoeksgroep en 29 van de controlegroep) en het aantal cellen vaak 10. De chikwadraattoets is desondanks gekozen, omdat er niet een andere makkelijk toepasbare toets gevonden is. De chikwadraattoets geeft geen significante verschillen bij een enkele deelopgave.

Er is ook nog naar de verschillen per opgave gekeken en naar de verschillen tussen de makkelijkere deelopgaven die met één wiskundige bewerking zijn op te lossen en de moeilijker opgave die met twee wiskundige bewerkingen zijn op te lossen. Nu vallen er meer uitwerkingen in elke categorie en is de chikwadraattoets beter toe te passen. Ook hierbij zijn geen significante verschillen gevonden voor de gekozen alpha. Toch zijn er wel verschillen die benoemd mogen worden.

De opgaven die met één wiskundige bewerking zijn op te lossen (2a, 2c, 3a, 3b, 4a, 4b) zijn over het algemeen beter gemaakt dan gemiddeld. Het percentage uitwerkingen in de categorie 'Correct' is hier voor de onderzoeksgroep 35% en voor de controlegroep 36%, terwijl dit over de gehele toets gemiddeld 27% voor de onderzoeksgroep was en 25% voor de controlegroep. Hierbij zijn opgave 3 en opgave 4a slecht gemaakt, deze opgaven worden verder in deze paragraaf apart besproken. Het percentage uitwerkingen in de categorie 'Correct' bij de opgaven die met twee wiskundige bewerkingen op te lossen zijn voor de onderzoeksgroep 18% en voor de controlegroep 14%. De onderzoeksgroep heeft 4% procent verschil op de opgaven met twee wiskundige bewerkingen behaald, waarbij de interpretatie van het probleem iets lastiger is dan opgaven waarbij één wiskundige bewerking nodig is.

De leerlingen die in de categorie 'hoog' zitten bij beide groepen ervoor zorgen dat de meeste vragen door minimaal één persoon correct wordt beantwoord. Bij de onderzoeksgroep zitten er vijf deelnemers in de categorie 'hoog' en bij de controlegroep zes. Deze twee groepen lijken behoorlijk op elkaar, de gemiddeldes zijn 14,40 punten op de toets en 13,83 punten voor respectievelijk de onderzoeksgroep en de controlegroep. Verder zijn de standaarddeviaties 1,67 en 2,23 voor respectievelijk de onderzoeksgroep en de controlegroep, er is hier geen significant verschil tussen de groepen bij $\alpha = 0,05$. Er was dan ook niet een hele sterke leerling in een van de groepen. Opvallend is dat in de onderzoeksgroep elke opgave door minimaal één persoon correct is gemaakt terwijl dit niet het geval is bij de controlegroep, niemand had daar vraag 4f goed. Dit terwijl de onderzoeksgroep een aantal van 12 deelnemers minder heeft dan de controlegroep.

Tabel 4 Uitwerkingen vraag 2 onderzoeksgroep en controlegroep

	Opgave 2a				Opgave 2b		
	Onderzoeksgroep	Controlegroep	Vershil		Onderzoeksgroep	Controlegroep	Vershil
Niet ingevuld	0%	0%	0%		6%	7%	-1%
Conceptuele fout	41%	24%	17%		82%	83%	-1%
Procedurele fout	0%	0%	0%		0%	0%	0%
Slordigheidsfout	0%	0%	0%		0%	0%	0%
Correct	59%	76%	-17%		12%	10%	2%
	Opgave 2c				Opgave 2d		
	Onderzoeksgroep	Controlegroep	Vershil		Onderzoeksgroep	Controlegroep	Vershil
Niet ingevuld	24%	4%	20%		18%	7%	11%
Conceptuele fout	29%	31%	-2%		76%	69%	7%
Procedurele fout	0%	0%	0%		0%	0%	0%
Slordigheidsfout	0%	3%	-3%		0%	0%	0%
Correct	47%	62%	-15%		6%	24%	-18%

Opvallend aan opgave 2 is, dat op opgave 2b na, de controlegroep een stuk beter scoort op dit probleem. De controlegroep presteert dus een stuk beter bij een selectieprobleem, helaas is het verschil niet significant. Bij opgave 2b scoort de onderzoeksgroep beter met 2% verschil. Bij opgave 2b vallen bij beide groepen de hoogste percentages aan uitwerkingen in de categorie 'Conceptuele fout', de opgave is dus erg slecht gemaakt. Dit ligt in de slimigheid dat de verschillende mogelijkheden opgesplitst moeten worden, er moet gekeken worden naar de situatie dat het eerste cijfer een '9' is en de situaties waarbij de eerste twee cijfers '76' of '79' zijn.

Tabel 5 Uitwerkingen vraag 3 onderzoeksgroep en controlegroep

	Opgave 3a				Opgave 3b		
	Onderzoeksgroep	Controlegroep	Vershil		Onderzoeksgroep	Controlegroep	Vershil
Niet ingevuld	0%	10%	-10%		0%	17%	-17%
Conceptuele fout	76%	83%	-7%		59%	38%	21%
Procedurele fout	0%	0%	0%		6%	14%	-8%
Slordigheidsfout	0%	0%	0%		23%	17%	6%
Correct	24%	7%	17%		12%	14%	-2%

Ondanks dat er één wiskundige bewerking nodig is om opgave 3 op te lossen, is de opgave over het algemeen minder dan gemiddeld gemaakt, dit komt door de vraagstelling bij 3a. Deze vraag kwam namelijk bij de interviews ook al een aantal keer aan bod. De leerling gaf dan aan de opgave achteraf niet moeilijk was, maar op het moment zelf de opgave niet kon oplossen door hoe de vraag gesteld was. De vraag stuurt aan om te kijken naar de mogelijkheden vanuit de kamers, dus bijvoorbeeld één kind in de kamer op de begane grond en drie kinderen op de kamer op de eerste verdieping. Het is op deze manier ook op te lossen, maar het is een stuk makkelijker om vanuit het kind te kijken, dus welke kamer kind 1 neemt, welke kamer kind 2 neemt, welke kamer kind 3 neemt en welke kamer kind 4 neemt. Bij opgave 3b staat het aantal kinderen op de kamers al vast, waardoor de deelnemer toch een andere strategie moet bedenken en moet inzien dat er 2 uit de 4 kinderen moet worden gekozen voor de ene kamer en dat de andere 2 kinderen naar de andere kamer moeten.

Bij opgave 3a scoort de onderzoeksgroep een beter, maar niet significant beter bij $\alpha = 0,05$, met een verschil van 17% van de uitwerkingen in de categorie 'Correct'. Bij opgave 3b treedt het grootste verschil in percentages op gezien over de hele toets, 21% bij de categorie 'Conceptuele fout', waarbij er 21% meer uitwerkingen van de onderzoeksgroep in die categorie vallen. Dit verschil komt waarschijnlijk doordat 17% van de controlegroep het antwoord niet ingevuld heeft en anders ook grotendeels in de categorie 'Conceptuele fout' zou vallen.

Tabel 6 Uitwerkingen opgave 4 onderzoeksgroep en controlegroep

	Opgave 4a				Opgave 4b		
	Onderzoeksgroep	Controlegroep	Vershil		Onderzoeksgroep	Controlegroep	Vershil
Niet ingevuld	0%	10%	-10%		6%	0%	6%
Conceptuele fout	76%	76%	0%		35%	35%	0%
Procedurele fout	6%	10%	-4%		0%	0%	0%
Slordigheidsfout	0%	0%	0%		6%	10%	-4%
Correct	18%	4%	14%		53%	55%	-2%
	Opgave 4c				Opgave 4d		
	Onderzoeksgroep	Controlegroep	Vershil		Onderzoeksgroep	Controlegroep	Vershil
Niet ingevuld	6%	10%	-0,04%		12%	10%	2%
Conceptuele fout	47%	52%	-0,05%		41%	52%	-11%
Procedurele fout	0%	0%	0%		6%	24%	-18%
Slordigheidsfout	6%	3%	0,03%		12%	4%	8%
Correct	41%	35%	0,06%		29%	10%	19%
	Opgave 4e				Opgave 4f		
	Onderzoeksgroep	Controlegroep	Vershil		Onderzoeksgroep	Controlegroep	Vershil
Niet ingevuld	6%	17%	-11%		18%	28%	-10%
Conceptuele fout	76%	76%	0%		70%	65%	5%
Procedurele fout	12%	3%	9%		0%	7%	-7%
Slordigheidsfout	0%	0%	0%		0%	0%	0%
Correct	6%	4%	2%		12%	0%	12%

Bij opgave 4 zijn de grootste verschillen in correcte uitwerkingen te zien bij onderdelen a, d en f. 4f is de vraag waarbij de controlegroep de meeste uitwerkingen in de categorie 'Niet ingevuld' heeft. Waarschijnlijk hadden de leerlingen bij deze opgave echt geen idee wat ze moesten doen. Verder zijn opgaven 4a, 4e en 4f erg slecht gemaakt. Dat 4a en 4e slecht zijn gemaakt komt doordat er rekening mee moet gehouden worden dat een plaats bezet kan zijn door een man of een vrouw of een plaats onbezet kan zijn. Dat een plaats dan onbezet kan zijn wordt vaak vergeten. 4e is hierbij dan een soort moeilijke variant van 4a, omdat er wiskundige bewerkingen gecombineerd moeten worden. 4f is slecht gemaakt, omdat het vraagt de structuur van de zaal te begrijpen, wat extra informatie die meegenomen moet worden in het oplossen van het probleem. 4d is een opgave waar weer de mogelijkheden moeten worden gesplitst en er goed gelezen moet worden bij het woordje 'minstens' in de opgave. Bij het splitsen van de mogelijkheden vermenigvuldigden veel leerlingen uit de controlegroep de mogelijkheden in plaats van dat ze de mogelijkheden bij elkaar optelden. Hierdoor komt er maar liefst 24% van de uitwerkingen van de controlegroep in de categorie 'Procedurele fout'.

Er is door bovenstaande alinea's te zien dat de verschillen die positief uitvallen bij de controlegroep komen doordat de controlegroep beter is in het oplossen van telproblemen uit het selectiemodel. De verschillen die positief uitvallen voor de onderzoeksgroep komen over het algemeen doordat de opgaven waarbij de vraagstelling anders en de opgaven waarbij de interpretatie lastiger is beter worden gemaakt door de onderzoeksgroep dan door de controlegroep.

Taal

Op dezelfde manier als met de onderzoeksgroep en controlegroep zijn ook de uitwerkingen geanalyseerd van de groepen waarbij de deelnemers Nederlands als moedertaal hebben en een andere moedertaal. Ook bij deze groepen zijn geen significante verschillen gemeten. De leerlingen komen uit zowel de onderzoeksgroep als de controlegroep dus de opgaven die bij bovenstaande groepen het slechtst zijn gemaakt, zullen over het algemeen bij deze groepen ook slecht gemaakt zijn. Zo vallen ook de meeste uitwerkingen in de categorieën 'Correct' of 'Conceptuele fout' vanwege dezelfde redenen. Over het algemeen treden er minder grote verschillen op bij deze twee groepen ten opzichte van de verschillen tussen de onderzoeksgroep en controlegroep. Bij vraag 4b is het verschil in percentages het grootst met 31% in de categorie 'Correct'. De groep met Nederlands als moedertaal scoort hier minder. Bij de groep met Nederlands als moedertaal had niemand vraag 2b correct gemaakt. De oorzaak dat de verschillen negatief uitvallen heeft waarschijnlijk met de omvang van de groep te maken, deze heeft 10 deelnemers. Vraag 3 is de enige opgave waarbij de groep met Nederlands als moedertaal bij elke deelvraag minder scoort dan de andere groep met respectievelijk verschillen van 9% en 22% in de categorie 'Correct'. De reden van dit verschil heeft waarschijnlijk ook met de groepsgrootte te maken. In tabellen 7,8 en 9 zijn de resultaten van beide groepen te vinden.

Tabel 7 Uitwerkingen vraag 2 NL als moedertaal of andere moedertaal

	Opgave 2a				Opgave 2b		
	NL moedertaal	Andere moedertaal	Vershil		NL moedertaal	Andere moedertaal	Vershil
Niet ingevuld	0%	0%	0%		10%	6%	4%
Conceptuele fout	30%	31%	-1%		90%	80%	10%
Procedurele fout	0%	0%	0%		0%	0%	0%
Slordigheidsfout	0%	0%	0%		0%	0%	0%
Correct	70%	69%	1%		0%	14%	-14%
	Opgave 2c				Opgave 2d		
	NL moedertaal	Andere moedertaal	Vershil		NL moedertaal	Andere moedertaal	Vershil
Niet ingevuld	20%	8%	12%		20%	8%	12%
Conceptuele fout	30%	31%	-1%		70%	72%	-2%
Procedurele fout	0%	0%	0%		0%	0%	0%
Slordigheidsfout	0%	3%	-3%		0%	0%	0%
Correct	50%	58%	-8%		10%	20%	-10%

Tabel 8 Uitwerkingen vraag 3 NL als moedertaal of andere moedertaal

	Opgave 3a				Opgave 3b		
	NL moedertaal	Andere moedertaal	Vershil		NL moedertaal	Andere moedertaal	Vershil
Niet ingevuld	20%	3%	17%		10%	11%	-1%
Conceptuele fout	60%	86%	-26%		50%	45%	5%
Procedurele fout	0%	0%	0%		10%	11%	-1%
Slordigheidsfout	0%	0%	0%		0%	25%	-25%
Correct	20%	11%	9%		30%	8%	22%

Tabel 9 Uitwerkingen vraag 4 NL als moedertaal of ander moedertaal

	Opgave 4a				Opgave 4b		
	NL moedertaal	Andere moedertaal	Vershil		NL moedertaal	Andere moedertaal	Vershil
Niet ingevuld	10%	6%	4%		0%	3%	-3%
Conceptuele fout	80%	75%	5%		50%	31%	19%
Procedurele fout	0%	11%	-11%		0%	0%	0%
Slordigheidsfout	0%	0%	0%		20%	5%	15%
Correct	10%	8%	2%		30%	61%	-31%
	Opgave 4c				Opgave 4d		
	NL moedertaal	Andere moedertaal	Vershil		NL moedertaal	Andere moedertaal	Vershil
Niet ingevuld	0%	11%	-11%		20%	8%	12%
Conceptuele fout	70%	44%	26%		50%	47%	3%
Procedurele fout	0%	0%	0%		10%	20%	-10%
Slordigheidsfout	0%	6%	-6%		0%	8%	-8%
Correct	30%	39%	-9%		20%	17%	3%
	Opgave 4e				Opgave 4f		
	NL moedertaal	Andere moedertaal	Vershil		NL moedertaal	Andere moedertaal	Vershil
Niet ingevuld	20%	11%	9%		40%	19%	21%
Conceptuele fout	70%	78%	-8%		60%	69%	-9%
Procedurele fout	10%	6%	4%		0%	6%	-6%
Slordigheidsfout	0%	0%	0%		0%	0%	0%
Correct	0%	5%	-5%		0%	6%	-6%

Interviews

Er zijn uit zowel de onderzoeksgroep als uit de controlegroep drie mensen geïnterviewd aan de hand van de scores op de oefentoets. Hiervan zijn er drie deelnemers die Nederlands als moedertaal hebben. De samenvattingen van de interviews staan in de bijlagen, op de samenvattingen zijn de resultaten in dit hoofdstuk gebaseerd.

Als we kijken naar de deelnemers uit de onderzoeksgroep zien we dat de leerlingen de leesprocedure weinig tot niet gebruiken. De twee deelnemers uit de categorie 'laag' en 'gemiddeld' geven wel aan de leesprocedure te gebruiken als ze echt niet weten wat ze moeten doen, zoals bij vraag 3 op de oefentoets, maar verder dus niet. De leerling uit de categorie 'laag' geeft aan het lastig te vinden om de procedure te gebruiken, omdat ze de stappen niet begrijpt en de leerling uit de categorie 'hoog' geeft aan een eigen aanpak ontwikkeld te hebben. Er is daarom weinig verschil tussen hoe de leerlingen te werk gaan. Wat daarbij ook uit de toets kwam is dat alle deelnemers uit het interview eigenlijk weinig tot niets opschrijven om de situatie beter te begrijpen. De enige die dit echt doet is de deelnemer uit de categorie 'hoog' van de controlegroep. Niemand is in staat de laatste opgave goed te doen, omdat dit een opgave is die ze niet verwachten en eigenlijk alleen kunnen oplossen als ze de mogelijkheden uitschrijven. De deelnemer uit de categorie 'hoog' van de controlegroep komt het verst, omdat hij zaken noteert en daarmee een klein beetje grip krijgt op de situatie waarin het probleem zich afspeelt. De deelnemers uit de onderzoeksgroep vonden allemaal de oefentoets makkelijker dan het hoofdstuk over telproblemen, waar bij de controlegroep twee van de drie

mensen de oefentoets juist relatief moeilijker vonden. Het is apart dat leerlingen de oefentoets makkelijker vonden, omdat de oefentoets slecht gemaakt is.

Tussen de verschillende niveaus zijn duidelijke verschillen te zien. De twee deelnemers die laag hebben gescoord proberen de oplossingen te redeneren en niet te gokken. Daarbij kijken ze niet of nauwelijks naar de context van het probleem en komen ze vaak niet tot een juiste oplossing, omdat ze geen idee hebben wat ze moeten doen. Beiden vinden ze wiskunde over het algemeen moeilijk.

De deelnemers die gemiddeld scoren, geven aan af en toe te gokken als ze het niet weten. Ze proberen hierbij de juiste situatie te ontdekken en met deze getallen een voor hun logische keuze te maken.

De deelnemers die hoog scoren, waren totaal verschillend. Bij de deelnemer uit de controlegroep was veruit het meeste begrip te merken, hij wist waar hij mee bezig was en noteerde belangrijke info om de situatie voor hem duidelijk te krijgen. De deelnemer die in de onderzoeksgroep zat, had eigenlijk weinig begrip en blufte zich heel erg door de toets. Toch zien we bij de andere leerling uit de controlegroep dat hij ook strategieën gebruikt om een toets te maken. Hij geeft bijvoorbeeld aan dat als iets veel tijd kost dat hij snel door gaat. Daarnaast geven deze beide leerlingen aan zelfverzekerd te zijn in het vak en dat ze bovengemiddeld goed zijn in wiskunde.

Bij de leerlingen uit de categorie gemiddeld en hoog met Nederlands als moedertaal was te merken dat zij eigenlijk relatief weinig van de stof begrepen, voor de score die ze hadden gehaald op de oefentoets. In het interview gaven ze ook beiden aan dat ze vaak gewoon een bepaalde wiskundige bewerking gokten op wat zij dachten dat logisch was. Zo vergeleek de leerling in de categorie 'gemiddeld' als ze wist dat ze een permutatie of combinatie moest gebruiken de numerieke antwoorden en koos dan het meest logische antwoord. De leerling uit de categorie 'hoog' keek heel erg naar de structuur van de opgaven. Ze keek naar hoeveel punten een vraag waard was en bijvoorbeeld naar wat voor wiskundige bewerkingen ze al had gebruikt, ze verzamelde informatie uit de vragen die niets met de opgaven zelf te maken hebben. Daarnaast kende de deelnemer uit de categorie 'laag' van de controlegroep het woord spelsysteem niet en ze nam niet de moeite om het uit de context te halen, maar liet de vraag eigenlijk voorbijgaan.

Conclusie en Discussie

Vanuit de resultaten en de statistische analyse moeten er nu antwoorden op de deelvragen duidelijk worden, zodat er een conclusie getrokken kan worden op de hoofdvraag van dit onderzoek. De eerste twee vragen gaan over of de leesprocedure impact heeft gehad op de conceptuele fouten en de slordigheidsfouten. Uit de resultaten komt naar voren dat deze bij de onderzoeksgroep beiden meer voorkomen dan bij de controlegroep. De verschillen in percentage daarbij zijn erg klein, namelijk respectievelijk 2% en 1%, dat er weinig over een eventuele bijdrage is hard te maken. Daarbij komt dan ook nog kijken dat de groepen erg klein zijn en een behoorlijk verschil in aantal deelnemers telt. Uit de gegevens en statistische analyse komt dan uiteindelijk ook dat de leesprocedure geen bijdrage heeft gehad aan het verminderen van de conceptuele fouten en slordigheidsfouten.

Wat mogelijk nog invloed op de fouten heeft kunnen hebben is dat de leerlingen het boek en de uitwerkingen bij de toets mochten gebruiken. De leerlingen konden bijvoorbeeld vergelijkbare opgaven hebben opgezocht om de opgaven op te lossen. Toch is dit niet de verwachting, omdat er duidelijk is geïnstrueerd dat het een oefentoets was en er geen cijfer voor wordt gegeven. De impact hiervan had kunnen zijn dat de leerlingen de toets minder serieus namen. Toch moesten ze met alleen de voorbereiding van de lessen de toets kunnen maken, in de interviews kwam naar voren dat de getroffen voorbereiding verschillend was. De toets wordt wel nagekeken en is dus een goede meting van hoever de leerling is voor zichzelf. Het zou dan niet handig zijn voor de leerling om meer dan alleen de formules te gebruiken die in het boek staan. Daarnaast is dit tijdens de toets ook niet opgevallen.

Als er dan gekeken wordt naar de vraag in hoeverre de leesprocedure gebruikt is, kan eigenlijk gesteld worden dat deze niet of nauwelijks gebruikt wordt bij het oplossen van de telproblemen door de leerlingen. Bij beide groepen is geconstateerd dat ze weinig tot niets opschrijven en dat de leerlingen die slim gokken hoger scoren als ze niet weten wat ze moeten doen bij een opgave. In de interviews werden verschillende redenen gegeven om de leesprocedure niet te gebruiken. Zo werd de leesprocedure een aantal keer als onnodig gezien, daarnaast gaf een leerling aan dat ze de procedure niet begreep.

De laatste nog onbeantwoorde vraag is of er een onderscheid is bij het oplossen van telproblemen tussen de deelnemers met Nederlands als moedertaal en niet Nederlands als moedertaal. Bij de toets zijn de verschillen niet significant, maar in de interviews komt duidelijk een verschil terug. Twee van de drie leerlingen met Nederlands als moedertaal gaven aan dat ze veel punten op de oefentoets hadden gesprokkeld door niet te redeneren, maar door bijvoorbeeld een logische gok te maken van wat de oplossing zou kunnen zijn. Daarbij keken ze naar allerlei contextinformatie in plaats van echt naar het telprobleem zelf. Er is dus tussen deze twee groepen een zichtbaar verschil.

Met de antwoorden op de deelvragen kan de hoofdvraag beantwoord worden: *In welke mate draagt het aanleren van de leesprocedure van Earp bij aan het oplossen van telproblemen bij leerlingen uit 4VWO in het middelbaar onderwijs in Aruba?*

Als er naar de antwoorden op de deelvragen gekeken wordt kan er eigenlijk niet gezegd worden dat in dit onderzoek het aanleren van de leesprocedure bij heeft bijgedragen aan het oplossen van de telproblemen in 4VWO in het middelbaar onderwijs in Aruba. Dit is vooral omdat de leesprocedure zo weinig gebruikt is en er zijn geen significante verschillen tussen de groepen gemeten waarbij dat was verwacht.

Toch zijn er een aantal indicatoren die gevoel geven voor een positieve invloed. Bij de onderzoeksgroep heeft altijd tenminste één persoon een opgave correct opgelost. Dat is niet het geval bij de controlegroep en dit terwijl de controlegroep 26 personen telt en de onderzoeksgroep

17. Dit komt niet doordat er één persoon of meerdere personen in de onderzoeksgroep extreem goed scoren ten opzichte van de controlegroep, dit zou daar ook nog een reden voor kunnen zijn. Uiteindelijk verschilt het aantal deelnemers in de categorie 'hoog' met één deelnemer dus het kan toeval zijn geweest. De deelnemers uit de controlegroep scoren, ondanks dit niet significant is, beter op de opgaven waarbij twee bewerkingen nodig zijn om de opgave op te lossen. Daarnaast zitten er in de onderzoeksgroep een aantal lage uitschieters die de data negatief beïnvloeden. In de categorie 'laag' zijn de gemiddeldes bij de onderzoeksgroep en controlegroep respectievelijk 3,29 punten en 4,64 punten, de bijbehorende standaarddeviaties zijn respectievelijk 2,14 en 1,15. Met een lager gemiddelde en hogere uitschieters naar beneden zijn er een aantal leerlingen die letterlijk niets goed hadden in de onderzoeksgroep. Tenslotte kwam er uit de toetsresultaten dat de doublanten veruit het hoogste scoren van alle groepen, waarschijnlijk omdat zij de stof al een keer hebben gezien en gehad. De doublanten halen op de oefentoets gemiddeld een 5,8, terwijl de andere groepen net boven of onder het cijfer 4 zitten. In de onderzoeksgroep is er 17,6% van de deelnemers doublant en bij de controlegroep 30,7%. Ondanks deze punten kan er niet gezegd worden dat dit door het aanleren van de leesprocedure komt en kan er dus niet gezegd worden dat het aanleren van de leesprocedure een duidelijke bijdrage heeft gehad.

Een ander punt wat tot discussie moet komen is de keuze van de categorieën. Zo waren zeer waarschijnlijk de meeste uitwerkingen uit de categorie 'Niet ingevuld' conceptuele fouten, omdat bijna niemand in tijdnood zat. Daarnaast vielen bijna alle fouten in de categorie 'Conceptuele fout'. Dit kwam doordat als een leerling de situatie juist had geïnterpreteerd, maar een of twee wiskundige bewerkingen moest kiezen, terwijl de leerling er aantekeningen enz. bij had. Verder was er ook weinig procedure bij het maken van de opgaven. Met het alleen noteren van een combinatie kon de leerling het volledig aantal punten bij een vraag halen. Misschien is het voor vervolgonderzoek beter om te kijken naar wat een leerling denkt in de rol van interviews of dat deelnemers op een toets de uitwerkingen moeten uitleggen in woorden. De categorie

Wat verder nog opgemerkt moet worden is dat de controlegroep beter heeft gescoord op de selectieproblemen dan de onderzoeksgroep. Dit zou te maken kunnen hebben gehad met de focus van de lessen van beide docenten. Beide docenten zijn ervaren docenten en de klassen scoren vaak ongeveer even goed, de ene klas heeft misschien net iets meer geoefend met de selectieproblemen. Voor vervolgonderzoek zou het handig zijn als beide groepen dezelfde docent hebben om verschillen in lessen te voorkomen.

Om verder echt een duidelijke bijdrage te kunnen constateren had de leesprocedure meer door de leerlingen toegepast moeten worden. Een reden dat de leesprocedure niet veel is toegepast heeft waarschijnlijk te maken met dat de procedure te uitgebreid is voor de meeste opgaven. Daarnaast gaven leerlingen aan dat ze het lastig vonden de procedure te gebruiken. Voor de echt lastige opgaven was de procedure goed, maar voor makkelijkere opgaven is het overbodig om het probleem drie keer te herlezen bijvoorbeeld. Daarnaast kan deze procedure voor elk wiskundig woordprobleem gebruikt worden dus was de procedure misschien te algemeen voor de telproblemen in 4VWO. Een leesprocedure voor vervolgonderzoek zou dus meer op maat gemaakt moeten worden naar de behoeften van de leerling. Aangezien de procedure uitgebreid werd gevonden en af en toe lastig, moeten er misschien een aantal stappen worden samengevoegd van de leesprocedure die in dit onderzoek is gebruikt. Dan wordt de bruikbaarheid voor de leerlingen van de procedure zowel makkelijker gezien als effectiever. In toekomstig onderzoek zou deze procedure al vanaf het begin van het hoofdstuk aangeleerd kunnen worden en door de gehele lessenserie op gehamerd worden zodat leerlingen het echt gebruiken. Er is namelijk aangetoond dat het visualiseren van het telprobleem echt helpt bij het oplossen van telproblemen en daarom is mijn overtuiging dat het aanleren van een leesprocedure ook echt kan helpen bij het oplossen van telproblemen.

Referenties

- Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 181-199.
- Call, R. J., & Wiggin, N. A. (1966). Reading and mathematics. *The Mathematics Teacher*, 59(2), 149-157.
- Colegio Arubano. (sd). *Nederlands*. <http://colegio.ca-ict.net/wordpress/?course=nederlands>.
- Dubois, J. G. (1984). Une systematique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics*, 15 (1), 37-57.
- Kapur, J. N. (1970). Combinatorial Analysis in School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 3(1), 111-127.
- Lewis, R., & Aiken, J. (1971). Verbal factors and mathematics learning: A review of research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 304-313.
- Linville, W. J. (1970). The Effects of Syntax and Vocabulary upon the Difficulty of Verbal Arithmetic Problems with Fourth Grade Students.
- Moschkovich, J. (2005). Using two languages when learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 64: 121–144 .
- Timmer, M., & Verhoef, N. C. (2014). Combinatoriek: meer dan trucjes. *Euclides* 90(3), 12-13.
- Verhoef, N. (2015). Lesson Study als professionaliseringsstrategie in de context van telproblemen .

Oefentoets, V4 wiskunde A

Opgave 1 Is Nederlands je eerste taal? Ja / Nee

Opgave 2 De Vaas (9 punten)

In een vaas zitten zes ballen genummerd met de cijfers 2, 4, 5, 6, 7 en 9. We maken door het trekken van de ballen getallen van 4 cijfers. Je krijgt bijv. het getal 7249 door eerst de bal met de 7, vervolgens de bal met de 2, daarna de bal met de 4 en ten slotte de bal met de 9 te trekken.

- 1p a) Hoeveel verschillende getallen kunnen we krijgen als we na het trekken van een bal, de bal niet terug stoppen in de vaas?
- 3p b) Hoeveel verschillende getallen boven de 7600 kunnen we krijgen als we na het trekken van een bal, de bal niet terug stoppen in de vaas?
- 2p c) Hoeveel verschillende getallen onder de 3000 kunnen we krijgen als we na het trekken van een bal, de bal wel terug stoppen in de vaas?
- 3p d) Hoeveel verschillende getallen kunnen we krijgen als we om en om ballen met even en oneven cijfers trekken en de bal steeds niet terug stoppen in de vaas na het trekken?

Opgave 3 Logeren bij oma (3 punten)

Vier kinderen: Alberto, Bryan, Ciara en Demi gaan een nachtje bij hun oma logeren. Oma heeft twee verschillende kamers voor de kinderen, één kamer is op de begane grond en één kamer is op de eerste verdieping. In beide kamers is genoeg plaats om alle kinderen te laten slapen.

- 1p a) Op hoeveel manieren kan oma de kinderen over de kamers verdelen? Ze kan er bijvoorbeeld voor kiezen om alle kinderen in de kamer op de begane grond te plaatsen.
- 2p b) Op hoeveel manieren kan oma de kinderen over de kamers verdelen als ze in beide kamers twee kleinkinderen wil laten slapen? Licht je antwoord toe.

Opgave 4 Bioscoop (11 punten)

In figuur 1 zijn de zitplaatsen van een bioscoopzaal weergegeven tijdens de film Storks. De zaal bestaat uit een linkerzijde, een middengedeelte en een rechterzijde. Elke rij bevat zeven stoelen en er zijn vier rijen. Tijdens een film kan een zitplaats bezet zijn door een man(M), een vrouw(V) of de plek kan onbezet(leeg) zijn. Zo zitten tijdens deze film een man en een vrouw op de achterste rij in de linkerzijde, twee vrouwen op de 4^{de} en 5^{de} stoel in de 3^{de} rij en drie mannen naast elkaar op de voorste rij van het middengedeelte, alle andere plaatsen zijn onbezet.

1p a) Op hoeveel manieren kan de zaal gevuld zijn?

Op hoeveel manieren kunnen er

1p b) vijf vrouwen en 23 mannen in de zaal zitten?

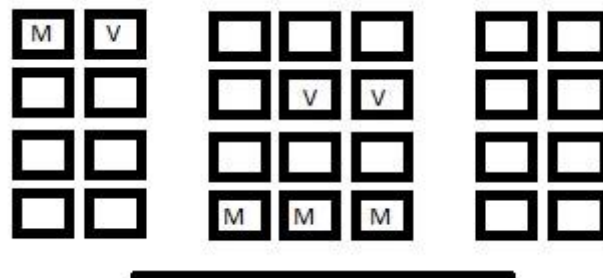
2p c) vijf vrouwen en vijf mannen in de zaal zitten?

2p d) minder dan drie vrouwen in de zaal zitten als de rest van de plaatsen bezet wordt door mannen?

2p e) vijftien plekken onbezet zijn?

Vanavond komen er twaalf mannen naar de film kijken.

3p f) Op hoeveel manieren kan de zaal gevuld worden zodat er twee rijen leeg blijven?



Figuur 4

Uitwerking Oefentoets

Uitwerkmodel Oefentoets, V4 wiskunde A

Opgave 2 De Vaas (9 punten)

- a) $6nPr4 = 6 * 5 * 4 * 3 = 360$ mogelijkheden (1)
b) Dus eerste cijfer moet 9 zijn OF de eerste twee cijfers moeten 7 en 6 zijn of 7 en 9

$$(2) \begin{cases} \text{Eerste cijfer 9: } 1 * 5 * 4 * 3 = 60 \\ \text{Eerste twee cijfers '76' en '79': } 1 * 1 * 4 * 3 = 24 \end{cases}$$

Optellen van de mogelijkheden $60 + 24 = 84$ mogelijkheden (1)

- c) Eerste cijfer moet een 2 zijn daarna is drie keer alles mogelijk (1)

$$1 * 6 * 6 * 6 = 6^3 = 216 \text{ mogelijkheden (1)}$$

- d) $2 * \left(\binom{3}{2} * 2 * \binom{3}{2} * 2 \right) = 2 * 3 * 2 * 3 * 2 = 72$ mogelijkheden

factor 2 aan het begin voor oeoe of eoeo (1)

$$(1) \begin{cases} \text{kieszen van 2 even cijfers uit 3: } \binom{3}{2} \\ \text{kieszen van 2 oneven cijfers uit 3: } \binom{3}{2} \end{cases}$$

Vermenigvuldigen met 2 voor de 2 verschillende volgordes voor oneven en even (1)

Opgave 3 Logeren bij oma (3 punten)

- a) $2^4 = 16$ mogelijkheden (1)
b) $\binom{4}{2} = 6$ mogelijkheden (1), want oma moet voor twee kleinkinderen kiezen uit vier voor één van de twee kamers de andere twee gaan automatisch in de de andere kamer (1).

Opgave 4 Bioscoop (11 punten)

- a) $3^{28} = 22876792454961$ mogelijkheden (1)
b) geen lege plaatsen dus vijf van de 28 plekken zijn voor vrouwen

$$\binom{28}{5} = 98280 \text{ mogelijkheden (1)}$$

- c) $\binom{28}{5} * \binom{23}{5} = 98280 * 33649 = 3307023720$ mogelijkheden

(1) voor de juiste combinaties, (1) voor de vermenigvuldiging

$$d) (1) \begin{cases} 0 \text{ vrouwen: } \binom{28}{0} = 1 \\ 1 \text{ vrouw: } \binom{28}{1} = 28 \\ 2 \text{ vrouwen: } \binom{28}{2} = 378 \end{cases}$$

Optellen van de mogelijkheden $1 + 28 + 378 = 407$ mogelijkheden (1)

- e) $\binom{28}{15} * 2^{13} = 3.067261747 * 10^{11}$

(1) Voor de combinatie, (1) voor de keuze tussen man en vrouw voor de andere 13 plaatsen.

- f) $\binom{14}{12} * \binom{4}{2} = 546$ (2) 1 punt voor het kiezen van de rijen en 1 punt voor de plaatsing van de mannen

Interview onderzoek

1. Kun je aangeven met een cijfer van 1 tot 10 hoe lastig je het hoofdstuk over telproblemen vindt, waarbij een 1 extreem makkelijk is en een 10 extreem moeilijk?
2. Kun je aangeven met een cijfer van 1 tot 10 hoe lastig je de toets vond, waarbij een 1 extreem makkelijk is en een 10 extreem moeilijk?
3. Kun je aangeven met een cijfer van 1 tot 10 hoe lastig je wiskunde in het algemeen vindt, waarbij een 1 extreem makkelijk is en een 10 extreem moeilijk?
4. Had je voldoende tijd voor de toets?
5. Welke voorbereiding heb je voor de toets getroffen?
6. Denk je dat je de toets beter had kunnen maken? En waarom wel of niet?
7. Heb je het gevoel dat je begrijpt wat je aan het doen bent of maak je gebruik van trucs?
8. (Onderzoeksgroep) Vond je de leesprocedure die in de lessen behandeld was nuttig? Waarom wel of niet?
9. (Onderzoeksgroep) Heb je deze leesprocedure toegepast bij het maken van de toets? Waarom wel of niet?
10. (Onderzoeksgroep) Heb je iets aan de laatste lessen gehad? Zo ja, wat?

Oplossen van een telprobleem

Je krijgt nu een telprobleem voor je. Vertel me hoe je het probleem benadert en welke denkstappen je neemt op tot een oplossing te komen.

Een voetbalcoach heeft een lastige taak, hij moet bepalen welk spelsysteem hij wil spelen en welke spelers hij wil opstellen. Zo bestaat de selectie van FC Barcelona uit 22 spelers waarvan drie keepers, acht verdedigers, zeven middenvelders en vier spitsen.

- a) Er is gevraagd voor een lijstje met de 5 beste spelers op volgorde in de ogen van de coach. Hoeveel verschillende lijstjes kan de coach inleveren?

De coach wil beginnen met het spelsysteem 1-4-3-3, dat betekent dat hij 1 keeper, 4 verdedigers, 3 middenvelders en 3 spitsen als basisspelers opstelt.

- b) Op hoeveel manieren kan de coach zijn 11 basisspelers kiezen?

Het spelsysteem 1-4-3-3 is niet bevallen. Barcelona heeft namelijk met 3-2 verloren.

- c) Op hoeveel manieren kan het scoreverloop zijn gegaan?
- d) En als de wedstrijd was geëindigd met 9-6?

De coach wil nu met 1 keeper, minimaal 6 verdedigers en maximaal 2 spitsen spelen.

- e) Uit hoeveel spelsystemen kan hij kiezen?

11. Hoe benader je normaal een telprobleem? (Visualisatie, schetsen, oplossingen bedenken enz.)
12. Heb je dit probleem op dezelfde manier benadert?

Interviews evaluatie

Deelnemer categorie 'laag' onderzoeksgroep:

Heeft Nederlands als moedertaal.

De deelnemer vindt zowel wiskunde als het hoofdstuk combinatoriek lastig. Zij vond de oefentoets relatief makkelijk en had voldoende tijd. De deelnemer heeft de theorie doorgenomen als voorbereiding, maar bij de lessen veel opgaven niet gemaakt. Met een betere voorbereiding was de toets beter gegaan volgens haar. Zij heeft de leesprocedure geprobeerd toe te passen bij opgave 3 van de oefentoets. De deelnemer vond de leesprocedure niet nuttig omdat ze niet goed wist hoe ze hem kon toepassen. Verder weet zij niet goed wanneer zij permutaties of combinaties moet gebruiken. De deelnemer probeert de opgave logisch te benaderen en niet te gokken naar het antwoorden.

De opgave:

A: Snapt de situatie, snapt verschil tussen permutaties en combinaties niet. Onderstreept info in de vraag.

B: Niet gelezen over de spelformatie. Interpreteert de vraag incorrect.

C: Begint een scoreverloop op te schrijven, komt er dan achter dat het veel is. Met een beetje hulp snapt ze hoe het werkt.

D: Nog meer mogelijkheden volgen, dan heeft ze geen idee. Als er wordt gehint naar een rooster begint er wel een belletje te rinkelen en komt er ook het juiste antwoord uit.

E: schrijft weer klakkeloos combinaties op.

Tijdens het oplossen maakt deze deelnemer verder geen aantekeningen.

Deelnemer categorie 'gemiddeld' onderzoeksgroep:

De deelnemer vindt zowel wiskunde als het hoofdstuk combinatoriek redelijk moeilijk. Hij vond de oefentoets relatief makkelijk en had voldoende tijd. De deelnemer heeft de youtube filmpjes bekeken als voorbereiding en de opgaven in de lessen gemaakt. Met een betere voorbereiding was de toets niet heel veel beter gegaan volgens hem. Hij heeft de leesprocedure geprobeerd toe te passen bij opgave 3 van de oefentoets. De leerling vond de leesprocedure nuttig en gebruikte hem vooral als hij niet wist wat hij moest doen bij een bepaalde opgave. Verder gokte de leerling ook af en toe wat hij moest doen bij een opgave.

A: situatie begrepen, weet niet of hij combinaties of permutaties moet gebruiken snapt wel wat beide bewerkingen inhouden.

B: situatie niet begrepen, houdt geen rekening met de verschillende posities.

C en D: wel door dat het een rooster probleem is, niet goed uitgevoerd.

E: situatie niet begrepen, gaat analoog aan vraag B oplossen.

De deelnemer schrijft niets op en onderstreept niets tijdens het oplossen.

Deelnemer categorie 'hoog' onderzoeksgroep

Heeft Nederlands als moedertaal.

De deelnemer vond zowel de toets, als het hoofdstuk, als wiskunde in het algemeen makkelijk. Zij is niet aan 4f toegekomen. Ze loopt achter, ze was verbaasd over haar score. Weinig opgaven gedaan als voorbereiding, verwacht met meer voorbereiding beter te doen. Vond de leesprocedure niet

nuttig. Ze heeft de leesprocedure niet toegepast, omdat ze een eigen manier van het probleem benaderen had ontwikkeld.

A: Onderstreept zaken, telt op of het aantal spelers klopt. Bij het vraagstuk loopt ze vast, maar neemt een gok.

B: Snapst niet dat ze uit de verschillende posities spelers moet pakken, maar wel dat ze met 1-4-3-3 moet. Kies wel verkeerde combinaties. Kijkt heel erg naar wat ze moet en denkt te gebruiken. Heeft niet door dat ze de info uit A nodig heeft.

C: Schrijft een scoreverloop uit. Komt na veel tijd te gebruiken wel goed uit.

D: Ziet de link tussen roosters niet.

E: Begint gelijk combinaties op te schrijven. Heeft geen idee wat ze doet.

De deelnemer noteert geen aantekeningen. Daarnaast toont ze vrij weinig begrip, maar gebruikt alle context buiten het probleem heel goed om tot een logische gok te komen. Zo kijkt ze naar het aantal punten wat behaald kan worden en filtert ze heel goed welke informatie ze nodig heeft.

Deelnemer categorie 'laag' controlegroep

De deelnemer vindt zowel wiskunde als het hoofdstuk combinatoriek lastig. Zij vond de oefentoets relatief moeilijk en had voldoende tijd. Heeft zich voor de toets voorbereid door gewoon opgaven uit het boek te maken tijdens de lessen. Ze denkt dat ze de toets beter had kunnen maken met meer voorbereiding. Geeft aan dat ze het lezen van de vraag lastig vindt, omdat ze het in eerste instantie oppervlakkig leest. Vervolgens nog eens leest en het antwoord verandert en twijfelt over wat ze moet doen. Ze probeert altijd logisch na te denken, niet zomaar wat te doen.

A: Snapst het verschil tussen combinaties en permutaties duidelijk.

B: Volgorde is waarschijnlijk niet van belang. Doet het wel goed. Heeft de situatie begrepen.

C & D: Ziet wel de overeenkomst tussen de twee problemen. Geen idee hoe ze het op moet lossen.

E: Schrijft combinaties op, maakt een gok en weet niet wat ze moet doen. Het woord systeem snapst ze niet. Merkt wel op dat ze ook iets met de middenvelders moet doen.

De deelnemer onderstreept niets en schrijft niets op.

Deelnemer categorie 'gemiddeld' controlegroep

Heeft Nederlands als moedertaal.

Vond de toets makkelijker dan het hoofdstuk en vindt wiskunde erg moeilijk, maar dit hoofdstuk niet. Ze had voldoende tijd om de toets te maken. Heeft een aantal opgaven gemaakt en de lessen gevolgd. Had de toets beter kunnen maken met een betere voorbereiding. Als ze het niet weet gokt ze wat ze moet gebruiken.

A: Ze gokt op $22nPr5$. Ze weet wel dat bij permutaties de volgorde uitmaakt. Normaal controleert ze met haar rekenmachine zowel combinaties als permutaties en het meest logische antwoord noteert ze.

B: Begint gelijk dingen op te schrijven. Ze kiest steeds het juiste aantal spelers uit de verschillende groepen. Er komen verschillende combinaties op papier te staan en telt ze op. Ze gokt op combinaties. Als ik vraag waarom ze optelt zegt ze dat ze misschien moet vermenigvuldigen, toch blijft ze bij optellen, ze kan niet uitleggen waarom.

C & D: Ze ziet meteen de link met het rooster en schrijft een rooster op. Vervolgens weet ze niet wat ze moet doen.

E: Ze bedenkt zich wat ze moet gebruiken: Permutaties, Combinaties, machten of iets anders wat ze niet kan uitleggen, maar weet eigenlijk niet wat ze moet kiezen.

Ze maakt geen aantekeningen bij het maken van de opgave.

Deelnemer categorie 'hoog' controlegroep

De deelnemer vindt wiskunde in het algemeen en het hoofdstuk combinatoriek relatief makkelijk. De toets vond hij wel pittig, hij had voldoende tijd. Hij heeft zijn huiswerk gemaakt als voorbereiding. Denkt dat hij de toets beter had kunnen maken met meer voorbereiding. Hij zegt dat hij weet wat hij doet bij het aanpakken van problemen en gokt niet. Geeft aan dat hij opdracht 3 achteraf makkelijk vond, maar door de vraagstelling niet wist wat hij moest doen.

A: Schrijft eerst de informatie op: aantal keepers, verdedigers, etc. Heeft volgens hem niets te doen met de rangschikking van de spelers dus 22 boven 5.

B: Begrijpt de situatie dat hij verschillende spelers moet kiezen uit de verschillende posities, ziet alleen niet dat de volgorde niet van belang is. Merkt wel op dat herhaling niet is toegestaan. Bedenkt zich wel dat het misschien combinaties hadden kunnen zijn, maar kijkt niet meer naar de vraag.

C & D: Hij refereert gelijk naar het rooster, maar weet niet meer precies hoe het zit. Zou alle mogelijkheden opschrijven. Bij een echt proefwerk zou hij de opgave overslaan om geen tijd te verliezen. Hij tekent vervolgens wel een rooster realiserend dat het anders veel werk is om de opgave op te lossen. Komt op het juiste antwoord en legt het correct uit.

E: Minimaal zes betekent zes, zeven of 8 er is een of dus optellen. Aantal spitsen is 0, 1 of 2. Gebruikt dezelfde aanpak als opdracht B. Gaat vervolgens weer over op dat hij 1 uit de 3 keepers moet kiezen en zegt niets over de middenvelders dus situatie niet helemaal begrepen.