Sensible Mathematics

in de context van kansrekening

Sensible Mathematics in de context van kansrekening
Onderzoek van Onderwijs - Universiteit Twente
Auteur: Bernike Rijksen
Begeleiders: Dr. Nelly C. Verhoef, Ir. T.J.M. Coenen
Datum: 30-05-2016

Sensible Mathematics

in de context van kansrekening

Bernike Rijksen - mei 2016

Binnen het wiskundeonderwijs op middelbare scholen krijgt het correct uitvoeren van wiskundige technieken steeds meer aandacht. Vanwege de focus op deze procedurele beheersing van de lesstof dreigt de conceptuele wiskundige ontwikkeling van de leerling in het gedrang te komen. Onderwijs dat zowel gericht is op het ontwikkelen van conceptuele kennis als het flexibel gebruik van procedurele kennis wordt aangeduid met de term *sensible mathematics*. In dit verslag worden resultaten beschreven van onderzoek naar kenmerken van sensible mathematics. Wat is het effect van visualisatie en waarneming van lesstof over kansrekening op de ontwikkeling van conceptueel begrip bij leerlingen? Om deze vraag te beantwoorden is op basis van een bestaand lesprogramma een lessenserie ontwikkeld waarin de waarnemingsfase centraal is gesteld. Deze lessenserie is uitgevoerd en de toets resultaten van de interventiegroep zijn vergeleken met een controlegroep van leerlingen die les kregen volgens het reguliere programma.

1. Inleiding

De Universiteit Twente doet onderzoek naar het gevoelig maken van leerlingen voor wiskundige begrippen en bewerkingen (Verhoef, 2014). Welke kenmerken moet wiskundeonderwijs hebben om bij leerlingen gevoel voor wiskundige begrippen en bewerkingen te ontwikkelen? Wiskunde onderwijs waarbij leerlingen niet alleen wiskundige technieken aanleren, maar ook gevoelig worden gemaakt voor wiskundige begrippen en bewerkingen, wordt aangeduid met de term *sensible mathematics*.

Het huidige wiskunde onderwijs richt zich in toenemende mate op de correcte uitvoering van wiskundige technieken. In deze trend past ook de invoering van de rekentoets als verplicht onderdeel van het eindexamen programma. Deze vernieuwingen beogen een verbeterde aansluiting van het voortgezet onderwijs op het hoger onderwijs. De toegenomen focus op beheersing van wiskundige technieken, gaat ten koste van wiskunde onderwijs gericht op de ontwikkeling van gevoel voor wiskundige begrippen en bewerkingen. Ontwikkeling van deze gevoeligheid bij leerlingen komt hierdoor in het gedrang (Verhoef, van Smaalen & Pieters, 2012). In het artikel *Combinatoriek meer dan trucjes* beschrijven Timmer en Verhoef (2014) dat leerlingen in de praktijk veelal goed in staat zijn om wiskundige bewerkingen uit te voeren, maar vaak moeite hebben met het bepalen van de juiste aanpak bij een gegeven opgave. Leerlingen kennen de nodige wiskundige regels en procedures en weten deze juist toe te passen. Problemen ontstaan bij opgaven waar vooraf niet direct duidelijk is welke regels en procedures van toepassing zijn; Het inzicht in het waarom achter de wiskundige regels en procedures ontbreekt bij veel leerlingen.

Al in 1976 beschrijft Richard Skemp twee vormen van wiskundig begrijpen. Hij onderscheidt instrumenteel begrip van relationeel begrip. Instrumenteel begrijpen is het begrijpen hoe een regel moet worden toegepast en wanneer,*"It is what I have in the past described as 'rules without reason' ... "*. Relationeel begrijpen is het doorgronden van wiskunde, *"... knowing both what to do and why"*. Binnen dit begrippenkader kan gesteld worden dat het huidige wiskunde onderwijs minder aandacht besteedt aan de ontwikkeling van relationeel begrip en vooral focust op het ontwikkelen van instrumenteel begrip. Ook Tall (2013) maakt een vergelijkbaar onderscheid binnen het wiskundig begrijpen. Hij spreekt over procedureel en conceptueel begrip en zegt hierover het volgende:*"When faced with lack of understanding and the fear of possible failure, students and their teachers may change their goal from conceptual understanding to that of learning procedures to pass examinations and to acquire techniques to use in applications. Procedural learning can be an alternative goal that gives pleasure in success. However, this success may be limited, enabling the student to solve routine problems but without further reflection to make sense of the relationships, it may lead to less flexible forms of mathematical thinking."* (Tall, 2013). Samenvattend kan worden gesteld dat het voor de ontwikkeling van flexibele vormen van wiskundig denken van belang dat leerlingen lesstof zowel procedureel als conceptueel leren begrijpen.

Waarom wordt binnen het huidige wiskundeonderwijs de focus dan steeds meer verschoven naar het beheersen van wiskundige regels en technieken, dus naar het procedureel leren begrijpen van de wiskunde? Rond 1985 is in Nederland het realistisch wiskundeonderwijs ontwikkeld. Gebrek aan inzicht, het niet kunnen toepassen van verworven kennis en het door elkaar halen van regeltjes waren aanleiding tot deze ontwikkeling binnen het wiskundeonderwijs (Heege, 2008). Het realistisch wiskundeonderwijs besteedt tijd aan begripsvorming; Het ontwikkelen van conceptueel begrip. In de meest ideale situatie ontdekken leerlingen zelf de rekenregels, onder begeleiding van de docent. Voorbeelden en situaties uit het dagelijks leven van leerlingen vormen startpunt van het leerproces. Realistisch wiskundeonderwijs vormt de basis van ons huidige wiskundeonderwijs. Het Freudenthal Instituut, instituut voor onderwijs in rekenen en wiskunde, is echter de afgelopen jaren steeds zwaarder onder vuur komen te liggen omdat de prestaties van leerlingen bij het uitvoeren van bewerkingen achteruit zijn gegaan. Critici zeggen: *"Leer leerlingen regels en procedures, inzicht komt later wel"* (Heege, 2008).

Samenvattend beschouwd wordt in het huidige wiskunde curriculum de nadruk gelegd op procedureel begrip waar eerder belang werd gehecht aan het ontwikkelen van conceptueel begrip. Hierbij constateer ik dat in de ontwikkeling van wiskunde onderwijs wordt gekozen voor ofwel de ontwikkeling van conceptueel begrip of de ontwikkeling van procedurele vaardigheden. De vraag is echter waarom gekozen wordt voor nadruk op de eéń of de ander omdat procedureel en conceptueel begrip elkaar niet uitsluiten maar aanvullen. Het Freudenthal Instituut heeft zich ook nooit gekeerd tegen oefenen en het ontwikkelen van procedureel begrip, maar de focus werd gericht op het ontwikkelen van conceptueel begrip (*Rekenen kunnen ze niet meer*, 2009). In dit onderzoek wordt aangesloten bij de theorie van David Tall (2013) over de ontwikkeling van wiskundig denken. In deze theorie

wordt zowel het belang van conceptuele kennis als het flexibel gebruik van procedurele kennis recht gedaan. In plaats van de focus te leggen op één van de twee vormen van wiskundig begrijpen, zou er aandacht moeten komen voor de ontwikkeling van zowel procedureel als conceptueel begrip.

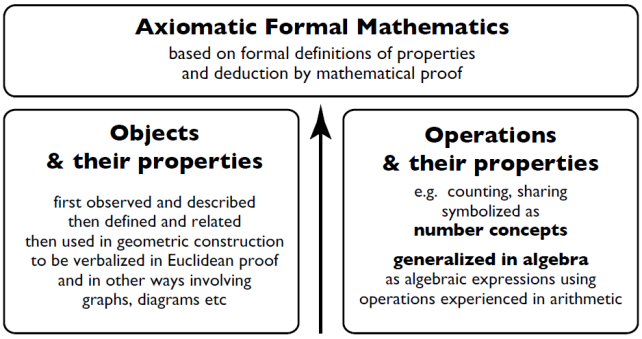
De grootste wiskunde-methode in Nederland, Getal&Ruimte, besteedt voornamelijk aandacht aan het ontwikkelen van procedureel begrip. De tekst op de website van de onderwijsmethode vat het duidelijk samen: *"Leren door te oefenen, daar staat Getal&Ruimte voor"* (*Getal en Ruimte weten wat telt.*, 2015). In de lesboeken wordt het oplossen van een wiskundig probleem systematisch voorgedaan. In een interview noemt Jan Dijkhuis, auteur van Getal&Ruimte: *"Getal&Ruimte besteedt veel aandacht aan voorbeelden, daar leren leerlingen van. Als het wordt voorgedaan kunnen leerlingen dat nadoen. Dat is voor verreweg de meeste leerlingen de meest effectieve aanpak"*(Verhoef, 2009). Op deze manier kunnen leerlingen zelfstandig de boeken doorwerken, maar krijgen de leerlingen niet de kans om zelf rekenregels te ontdekken. Daarnaast gaan de auteurs op sommige momenten ook bewust aan het ontwikkelen van conceptueel begrip voorbij. Zo verwachten de auteurs van wiskunde A leerlingen niet dat ze het wiskundige begrip limiet kunnen begrijpen, *"Dit gaat ze boven de pet"* (Verhoef, 2009). Uitleg van dit begrip wordt overgeslagen, leerlingen hoeven alleen met het begrip te kunnen werken.

Aangezien Getal&Ruimte weinig aandacht besteed aan het ontwikkelen van conceptueel begrip, ligt hier voor docenten een belangrijke taak; Voor het ontwikkelen van flexibele vormen van wiskundig denken is het van belang dat leerlingen de lesstof zowel procedureel als conceptueel leren begrijpen (Tall, 2013). Wiskundeonderwijs dat zich richt op de ontwikkeling van zowel conceptuele kennis als flexibel gebruik van procedurele kennis wordt aangeduid met de term sensible mathematics (Verhoef, 2014). Dit onderzoek richt zich op het vaststellen van kenmerken van sensible mathematics binnen het onderwerp kansrekening. Aan de hand van de theorie van David Tall (Tall, 2013), zijn voor het onderwerp kansrekening kenmerken van sensible mathematics gedefinieerd. Vervolgens is onderzocht of deze kenmerken bijdragen aan de ontwikkeling van zowel procedurele als conceptuele beheersing van wiskundige begrippen binnen de kansrekening. De onderzoeksvraag is: *Wat is het effect van het besteden van aandacht aan de waarnemingsfase in wiskundelessen op de ontwikkeling van zowel procedurele als conceptuele beheersing van wiskundige begrippen binnen het onderwerp kansrekening?*

2. Theoretisch Kader

Bij het zoeken naar kenmerken van sensible mathematics is in dit onderzoek aangesloten bij de drie door Bruner (1966) geïntroduceerde opeenvolgende stadia in de cognitieve groei. Bruner beschrijft dat leerlingen niet passief reageren op prikkels uit de omgeving, maar dat zij doelgericht informatie selecteren en deze inpassen in hun cognitieve structuur. In het onderwijs moet volgens Bruner rekening gehouden worden met de cognitieve structuur van de leerling en met de ontwikkeling hiervan. Bruner onderscheidt daarbij drie vormen van informatie en de wijze waarop deze wordt omgevormd tot bruikbare kennis. Deze drie

Figuur 2.1: *Drie vormen van wiskundige kennis*



stadia in de cognitieve groei zijn voor het wiskundig denken uitgewerkt door Pierre Van Hiele (1973), Hans Freudenthal (1984) en David Tall (2008) (Verhoef, 2014). Geen van deze theorieën is specifiek ontwikkeld voor het onderwerp kansrekening. Van Hiele richtte zich op het meetkunde onderwijs, Freudenthal op het modelleren en Tall op de Calculus en Analyse. Omdat veel onderdelen uit de theorie van David Tall goed toe te passen zijn binnen het onderwerp kansrekening is zijn theorie als kader gebruikt in dit onderzoek. Op basis van de theorie van David Tall is de onderzoeksvraag geoperationaliseerd

2.1. Een reis door drie denkwerelden

In zijn theorie omschrijft David Tall de ontwikkeling van het wiskundig denken als een reis door drie denkwerelden (Tall, 2013). Er zijn volgens Tall drie essentieel verschillende manieren waarop wiskundig denken zich ontwikkeld:

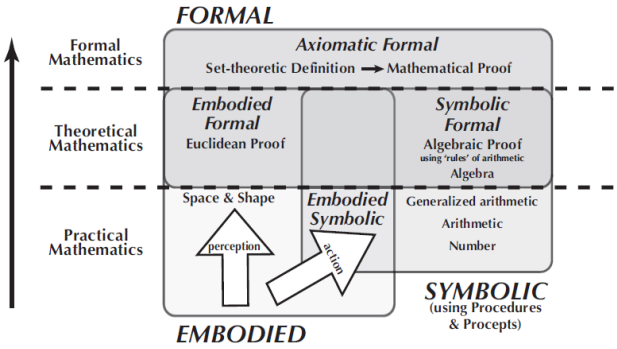
1. Conceptual embodiment: bouwt op menselijke waarnemingen en handelingen.
2. Operational symbolism: groeit uit bewerkingen met symbolen.
3. Axiomatic formalism: bouwt vanuit formele rekenregels en definities.

In figuur 2.1 zijn deze drie verschillende vormen van wiskundige kennis weergegeven. Tall betoogt dat kennis uit ieder van deze drie verschillende denkwerelden bijdraagt aan andere aspecten van het begrijpen van een wiskundig begrip. In het voortgezet onderwijs maken leerlingen kennis met de eerste twee denkwerelden. De formele wereld komt men vooral tegen binnen de formele aanpak van de pure wiskunde zoals deze op de Universiteit wordt gedoceerd (Tall, 2013).

2.2. Kenmerken van sensible mathematics

Om een krachtige manier van wiskundig denken te ontwikkelen is het volgens Tall van belang om actief met wiskundige begrippen te werken vanuit de verschillende denkwerelden (Tall, 2013). Binnen de activiteiten van leerlingen onderscheidt hij drie fasen: waarneming, bewerking en redenering. Vanuit deze theorie van David Tall kunnen we drie belangrijke

Figuur 2.2: *Praktische, theoretische en formele wiskunde*



kenmerken formuleren van wiskundeonderwijs dat zich richt op de ontwikkeling van zowel conceptuele kennis als flexibel gebruik van procedurele kennis (sensible mathematics):

1. Leerlingen nemen waar (zien).
2. Leerlingen werken met symbolen.
3. Leerlingen redeneren met symbolen.

De fase van waarneming karakteriseert Tall als praktische wiskunde (Verhoef et al., 2012). Deze waarnemingsfase wordt opgevolgd door een fase van bewerkingen met symbolen en redeneren gebruikmakend van symbolen. Tall karakteriseert deze bewerkingsfase met definities en stellingen als theoretische wiskunde (Verhoef et al., 2012). Tenslotte onderscheidt Tall naast de praktische en theoretische fase een formele fase (Tall, 2013). In figuur 2.2 toont het model van Tall (2013), waarin de drie verschillende fasen van ontwikkeling binnen de wiskunde zijn onderscheide.

2.3. Enactieve, iconische en symbolische representatie technieken

Binnen de praktische, theoretische en formele wiskunde wordt gebruik gemaakt van verschillende representatievormen. We onderscheiden binnen dit onderzoek enactieve, iconische en symbolische representatie (Bruner, 1966). Enactieve representatie is representatie door middel van handelingen. Inzicht en ruimtelijk bewustzijn worden opgebouwd door fysiek contact met de omgeving. Iconische representatie is representatie aan de hand van voorstellingen in de vorm van herkenbare plaatjes, deze worden iconen genoemd. Symbolische representatie tenslotte, is een representatievorm waarbij abstracte redeneringen en symbolen centraal staan. Enactieve en iconische representatietechnieken worden gebruikt in de fase van praktische wiskunde. Symbolische representatietechnieken spelen een rol binnen de fasen van theoretische en formele wiskunde.

2.4. Een start vanuit de praktische wiskunde

Binnen het huidige wiskundeonderwijs is toenemende aandacht voor het correct kunnen uitvoeren van wiskundige technieken. Leerlingen oefenen veel met het doen van bewerkingen met symbolen en het redeneren over deze symbolen; de fase van theoretische wiskunde staat centraal. Opvallend is dat aan de fase van praktische wiskunde, de waarnemingsfase, weinig aandacht wordt besteed terwijl Tall juist deze fase beschouwt als de initiële fase in de ontwikkeling van het wiskundig denken. Tall beschrijft dit in het volgende voorbeeld ten aanzien van kansrekening: *"Probability begins by reflecting on the repetition of physical and mental experiments to think how to predict the likely outcome, then performing specific calculations to calculate the probability numerically, later formulating the principles axiomatically"*(Tall, 2013). Tall ziet dat kansrekening begint met een reactie op de herhaling van fysieke of gedachten experimenten en het nadenken over manieren om de kans op een bepaalde uitkomst te voorspellen. Hij concludeert dat waarneming en redenering het startpunt vormen van wiskundig begrip en dat bewerkingen met symbolen hierna volgen.

2.5. Kansrekening en het belang van het icoon

Ook Timmer en Verhoef (2014) onderschrijven dat het voor het ontwikkelen van conceptueel begrip van belang is om te beginnen met het vormen van een beeld van de situatie waarin een bepaalde telproblematiek zich afspeelt, voordat formules worden geboden. Waarnemingen leiden tot de behoefte aan beschrijvingen van handelingen aan de hand van visualisaties (Verhoef et al., 2012). Door te visualiseren, met behulp van enactieve en iconische representatietechnieken, ontdekken leerlingen de verschillen tussen situaties en concepten. Op deze manier ontwikkelen leerlingen inzicht in telproblemen. Het gebruik van iconen speelt hierbij een belangrijke rol; Iconen leiden tot herkenning, vergelijking en contrast (Verhoef et al., 2012).

2.6. Formulering onderzoeksvraag

Aan de hand van de theorie van David Tall, kan geconcludeerd worden dat het belangrijk is om in de wiskundeles aandacht te besteden aan de fase van praktische wiskunde. Binnen deze fase staat waarneming centraal en spelen iconische representatietechnieken een belangrijke rol. Hypothese is dat het besteden van aandacht aan deze waarnemingsfase bijdraagt aan de ontwikkeling van zowel conceptuele kennis als flexibel gebruik van procedurele kennis. Om dit te onderzoeken is een bestaande standaard lessenserie over het onderwerp kansrekening herzien aan de hand van de drie kenmerken van sensible mathematics (waarnemen, bewerken en redeneren). Nadruk ligt daarbij op de waarnemingsfase, aangezien deze initiële fase in de huidige lespraktijk weinig aandacht krijgt. De vraag die dit onderzoek wil beantwoorden is: *Wat is het effect van het besteden van aandacht aan de waarnemingsfase in wiskundelessen op de ontwikkeling van zowel procedurele als conceptuele beheersing van wiskundige begrippen binnen het onderwerp kansrekening?*

3. Methode

3.1. Deelnemers

Dit onderzoek is uitgevoerd op een middelbare school. Aan het onderzoek hebben twee parallelklassen 4 havo wiskunde A deelgenomen. De klassen hebben 4 lesuren wiskunde in de week. In beide klassen is in de vierde periode het hoofdstuk *Rekenen met Kansen* uit de lesmethode *Getal & Ruimte* behandeld. Voor één van de twee parallelklassen is de gebruikelijke lessenserie horend bij dit hoofdstuk opnieuw ontworpen aan de hand van de hiervoor beschreven kenmerken van sensible mathematics. Deze klas bestaat uit 24 leerlingen en noemen we de interventiegroep. In de parallelklas is de bestaande lessenserie gedoceerd, deze groep noemen we de controlegroep. De controlegroep bestaat uit 26 leerlingen. In de interventiegroep zijn 3 van de 4 wekelijkse lesuren door mij gegeven aan de hand van de herziende lessenserie. Het overige uur is gegeven door de vaste docente van deze klas en is gebruikt voor uitloop en herhaling van de lesstof. In de controlegroep heb ik 1 van de 4 wekelijkse uren gegeven, aan de hand van de standaard lessenserie.

3.2. Onderzoeksinstrument

Onderzocht is of de leerlingen in de interventiegroep door het volgen van de herziende lessenserie de lesstof inderdaad zowel procedureel als conceptueel beter beheersen dan de leerlingen in de controlegroep. Dit is onderzocht aan de hand van de toets die de leerlingen aan het einde van de lessenserie gemaakt hebben over de lesstof. De gemaakte toetsen van beide groepen zijn geanalyseerd met behulp van een criteriumlijst aan de hand waarvan de uitwerkingen van de toets van beide groepen kunnen worden vergeleken. Van de toets zijn per leerling de uitwerkingen per opgave ingedeeld in één van de volgende vijf categorieën: niet ingevuld, conceptuele fout, procedurele fout, slordigheidsfout en geen fout. Deze vijf verschillende categorieën zijn weergegeven in de linker kolom van figuur 3.1.
Een uitwerking valt binnen de eerste categorie, niet ingevuld, wanneer de leerling de opgave niet heeft uitgewerkt. Dit kan bijvoorbeeld zijn door een gebrek aan begrip van de lesstof of door een gebrek aan tijd. Een uitwerking valt binnen de tweede categorie, conceptuele fout, wanneer de leerling in de uitwerking van de opgave één of meer conceptuele fouten heeft gemaakt. De leerling heeft dan gekozen voor wiskundige regels of procedures die niet passen bij de situatie in de opgave. Dit wijst op een gebrek aan conceptueel begrip; De leerling heeft te weinig inzicht in het waarom achter de wiskundige regels en technieken en heeft onvoldoende een beeld gevormd van de situatie waarin de telproblematiek zich afspeelt. Een uitwerking valt binnen de derde categorie, procedurele fout, wanneer de leerling in de uitwerking géén conceptuele fouten heeft gemaakt, maar wel één of meer procedurele fouten. De leerling heeft gekozen voor de juiste wiskundige regels en technieken, maar heeft deze regels of procedures verkeerd toegepast. Een uitwerking valt binnen de vierde categorie, slordigheidsfout, wanneer er in de uitwerking géén conceptuele of procedurele fouten zijn gemaakt, maar wel één of meer slordigheidsfouten. Slordigheidsfouten zijn onder andere fouten in het afronden van het eindantwoord of het uitvoeren van een berekening. Dit zijn procedurele fouten die

Figuur 3.1: *Criteriumlijst*

CATEGORIE	Criteria
Niet ingevuld	***Is de opgave uitgewerkt*** *Is de opgave uitgewerkt?*
Conceptuele fout	***Is er gekozen voor de juiste wiskundige regels en procedures*** *Is de opgave juist geïnterpreteerd?* *Is er gekozen voor de juiste samenstelling van de kans?* *Is er juist gekozen: wel of geen combinaties?* *Is er juist gekozen: trekken met of zonder terugleggen?*
Procedurele fout	***Zijn de wiskundige regels en procedures juist toegepast*** *Is de som en/of complementregel op de juiste manier gebruikt?* *Zijn combinaties op de juiste manier gebruikt?* *Is de productregel op de juiste manier gebruikt?*
Slordigheidsfout	***Is de opgave zonder slordigheidsfouten gemaakt*** *Is de berekening op de juiste manier uitgevoerd?*
Geen fout	***Is de opgave foutloos gemaakt***

Vragen worden van boven naar onderen doorlopen. Ja: volgende vraag beoordelen.
Nee: de uitwerking valt binnen de desbetreffende categorie.

niets zeggen over de procedurele beheersing van de te toetsen lesstof uit het hoofdstuk *Rekenen met Kansen*. Ze vormen daarom in dit geval een aparte categorie. Tenslotte valt een uitwerking binnen de vijfde categorie, geen fout, wanneer er in de uitwerking geen fouten zijn gemaakt.

Om van een uitwerking van een opgave te bepalen in welke categorie deze valt, zijn criteria opgesteld. Deze criteria, in de vorm van ja/nee vragen, zijn in de rechter kolom van 3.1 weergegeven. Ter illustratie zijn in appendix A voor alle criteria voorbeelden gegeven van uitwerkingen die niet voldoen aan het criterium. Door van een uitgewerkte opgave de ja/nee vragen in figuur 3.1 van boven naar onderen te doorlopen, wordt de categorie bepaald waarbinnen deze uitwerking valt. Het kan zo zijn dat in één opgave een combinatie van conceptuele, procedurele en slordigheidsfouten wordt gemaakt. Maar om leerlingen en klassen gemakkelijk te kunnen vergelijken, plaatst dit onderzoeksinstrument iedere uitwerking van een opgave uiteindelijk echter maar in één van de vijf categorieën. Daarbij wegen conceptuele fouten zwaarder dan procedurele fouten en procedurele fouten zwaarder dan slordigheidsfouten. Van de criteria in figuur 3.1, is het interessant om toelichting te geven op de criteria die horen bij de categorieën conceptuele fout, procedurele fout en slordigheidsfout. Het is duidelijk wanneer een opgave niet is ingevuld en wanneer in een opgave geen fouten zijn gemaakt. Maar hoe zijn de criteria vastgesteld die bepalen of in een uitwerking conceptuele, procedurele of slordigheidsfouten gemaakt zijn?

Uitwerkingen van toets opgaven bestaan uit symbolen en abstracte redeneringen, er wordt gebruik gemaakt van symbolische representatietechniek. De fase van de theoretische wiskunde, het doen van bewerkingen met symbolen en het redeneren over symbolen is in deze uitwerkingen goed zichtbaar. Procedurele fouten, fouten in het gebruik van wiskundige regels en procedures, zijn daar gemakkelijk uit af te leiden. Minder direct

zichtbaar in uitwerkingen is de fase van praktische wiskunde, waarin waarneming een belangrijke rol speelt. Binnen deze fase, die volgens Tall (2013) aan de theoretische fase voorafgaat, vormen leerlingen zich een beeld van de situatie waarin de telproblematiek zich afspeelt. Deze waarnemingen worden in uitwerkingen niet omschreven. Maar of leerlingen zich een (juist) beeld hebben gevormd van de situatie, valt wel af te leiden uit hun keuze voor wiskundige regels en procedures.

Om van een toets te bepalen welke conceptuele en procedurele fouten in deze toets gemaakt kunnen worden, is het dus van belang om vast te stellen welke wiskundige regels en procedures in de lesstof voorkomen. Wanneer een fout gemaakt wordt in het*gebruik* van deze regels en procedures, spreken we van een procedurele fout; Wanneer een fout gemaakt wordt in de juiste *keuze* voor deze regels en procedures spreken we van een conceptuele fout. Slordigheidsfouten tenslotte zijn in dit geval procedurele fouten die niet direct samenhangen met de te toetsen lesstof. Bij de ontwikkeling van de criteria voor dit onderzoeksinstrument is daarom uitgegaan van de wiskundige regels en procedures die aan bod komen in het hoofdstuk *Rekenen met Kansen*. De leerstof wordt aan het begin van het hoofdstuk omschreven (Reichard et al., 2011). Onderwerpen die in dit hoofdstuk aan bod komen zijn de complementregel, het omzetten van kansexperimenten in een vaasmodel, het onderscheid tussen trekken met en trekken zonder terugleggen, kleine steekproeven uit grote populaties en het opstellen van formules bij kansen.

Figuur 3.2: *Het uitwerken van een telprobleem in vijf stappen*

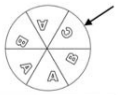
Uitwerking opgave - 5 stappen	***Regels en prodedures***	***Conceptuele en procedurele criteria***
Stap 1 kans omschrijven in woorden		**conceptueel:** juiste keuze te berekenen kans; interpreteren opgave
Stap 2 kans verder omschrijven opdelen in elkaar uitsluitende gebeurtenissen	somregel en complementregel	**conceptueel:** juiste keuze in samenstelling kans **procedureel:** juist gebruik som en/of complementregel
Stap 3 kans uitwerken in symbolen	volgordes (combinaties)	**conceptueel:** juiste keuze wel of geen verschillende volgordes **procedureel:** juist omschrijven volgordes; gebruik combinaties
Stap 4 kans verder uitwerken werken met concrete getallen en kansen	productregel	**conceptueel:** juiste keuze trekken met of zonder terugleggen **procedureel:** juist gebruik productregel
Stap 5 eindantwoord bepalen		**procedureel:** juist uitvoeren van de berekening

Figuur 3.2 geeft schematisch de ontwikkeling van de verschillende criteria weer. In de linker kolom van figuur 3.2 is het oplossen van een telprobleem in 5 stappen opgedeeld. Vervolgens zijn in de middelste kolom van figuur 3.2 alle regels en procedures die bij deze stap aan de orde komen in het schema geplaatst. De rechter kolom omschrijft tenslotte per regel of procedure welke procedurele en conceptuele criteria er binnen deze stap een rol spelen. Met de criteria-vragen kan bepaald worden of de wiskundige regels en procedures die in de lesstof aan de orde komen in een uitwerking van een opgave juist zijn *gekozen* (conceptueel) en juist worden *gebruikt* (procedureel). De criteria horen

dus steeds in paren bij elkaar. Alle criteria uit figuur 3.2 zijn terug te vinden in de criteriumlijst (figuur 3.1).

Figuur 3.3: *Uitwerking toetsopgave in vijf stappen*

Daan laat de schijf in de figuur hiernaast zes keer draaien.
Bereken de kans op hoogstens vier A's.



Stap 1: P(hoogstens vier A's)

Stap 2: P(geen A) + P(één A) + P(twee A's) + P(drie A's) + P(vier A's) = 1 – P(vijf A's) – P(zes A's)

Stap 3: $1 - \binom{6}{1} * P(AAAAA\bar{A}) - P(AAAAAA)$

Stap 4: $1 - \left(\frac{3}{6}\right)^5 * \left(\frac{3}{6}\right) * 6 - \left(\frac{3}{6}\right)^6$

Stap 5: 0,891

In figuur 3.3 is ter illustratie de opdeling in vijf stappen uitgewerkt voor één toets opgave horend bij het hoofdstuk Rekenen met Kansen. Iedere opgave begint met het interpreteren van de vraag; Welke kans moet berekend worden? (stap1). Wanneer de te berekenen kans is bepaald, wordt de kans eerst in woorden omschreven (stap2). In het geval van verschillende elkaar uitsluitende gebeurtenissen die samen de gevraagde kans opleveren, wordt daarbij gebruik gemaakt van de somregel, de complementregel of een combinatie van beide. Vaak kan een kans zowel met de somregel als met de complementregel omschreven worden, waarbij afhankelijk van de situatie één van de twee handiger is. Een verkeerde keuze tussen complement of somregel kan zich dus niet voordoen. Wel kan op conceptueel niveau gekeken worden of de leerlingen de kans juist hebben samengesteld. Zijn alle elkaar uitsluitende gebeurtenissen die deel uitmaken van de samengestelde kans meegenomen bij het berekenen van de samengestelde kans? Na het omschrijven van de kans in woorden, wordt de kans uitgewerkt in symbolen (stap3). Wanneer er sprake is van het herhalen van één kansexperiment, kan in het geval van verschillende volgordes gebruik worden gemaakt van combinaties. Vervolgens wordt de omschreven kans verder uitgewerkt (stap4); De symbolen worden omgezet in concrete getallen en kansen. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de productregel. Een belangrijke conceptuele stap daarbij is de keuze of in de situatie waarin het telprobleem zich afspeelt sprake is van trekken met of trekken zonder terugleggen. Tenslotte wordt de uitgewerkte kans uitgerekend om tot een eindantwoord te komen (stap5).

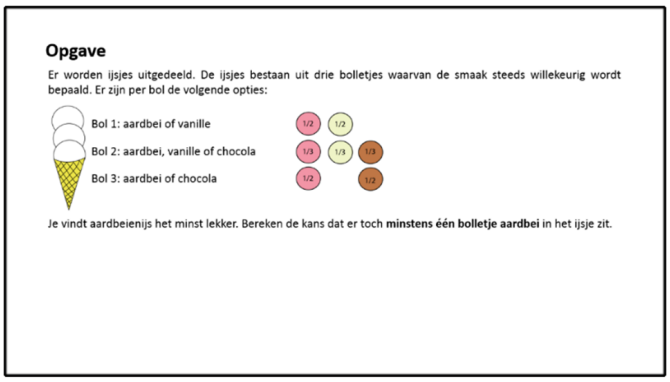
3.3. Materiaal

Voor dit onderzoek is de bestaande (standaard) lessenserie over het hoofdstuk *Rekenen met Kansen* uit het boek Getal&Ruimte opnieuw ontworpen, waarbij de nadruk in het herontwerp ligt op de waarnemingsfase, in de interventiegroep is deze her-ontworpen lessenserie gedoceerd. De nieuw ontworpen lessenserie volgt het bestaande programma uit het boek Getal&Ruimte; Leerlingen maken de opgaven uit het Getal&Ruimte boek en de

bijbehorende theorie wordt besproken. Aangepast in de her-ontworpen lessenserie is de manier waarop nieuwe theorie wordt geïntroduceerd en opgaven worden besproken. Van de leerlingen wordt steeds gevraagd eerst een beeld te vormen van de situatie waarin een bepaalde telproblematiek zich afspeelt, voordat (nieuwe) wiskundige regels en procedures worden aangeboden. Iedere nieuwe wiskundige regel of procedure wordt daarom ingeleid aan de hand van een telprobleem. Daarbij is steeds gebruik gemaakt van dezelfde context: het uitdelen of pakken van ijsjes. Leerlingen denken eerst zelf na over het telprobleem, daarna wordt het probleem klassikaal besproken. Tijdens deze bespreking wordt begonnen met het vormen van een beeld van de situatie waarin het telprobleem zich afspeelt. Het visualiseren van de situatie gebeurt met behulp van iconische representatietechniek, met het ijsje als icoon. Aan de hand van visualisaties ontstaat een idee over hoe het telprobleem opgelost kan worden. Daarna pas wordt de te berekenen kans uitgewerkt aan de hand van formules.

In figuur 3.4, 3.5 en 3.6 zijn ter illustratie de slides weergegeven van de PowerPoint presentatie horend bij de les waarin de complementregel wordt geïntroduceerd. Het introduceren van de complementregel gebeurt aan de hand van een telprobleem binnen de ijsjes-context. Gevraagd wordt om van een ijsje met drie bolletjes (zie figuur 3.4) de kans te berekenen op minstens één bolletje aardbeienijs. Leerlingen mogen eerst zelf met deze opgave aan de slag. Hierbij kan verwacht worden dat veel leerlingen de waarnemingsfase overslaan en al snel zullen grijpen naar bekende formules, in dit geval de somregel. Met behulp van de somregel kan de kans op minstens één bol aardbei berekend worden door de kans op één bol aardbei, de kans op twee bollen aardbei en de kans op drie bollen aardbei bij elkaar op te tellen. Dat blijkt bij dit telprobleem aardig wat werk te zijn.

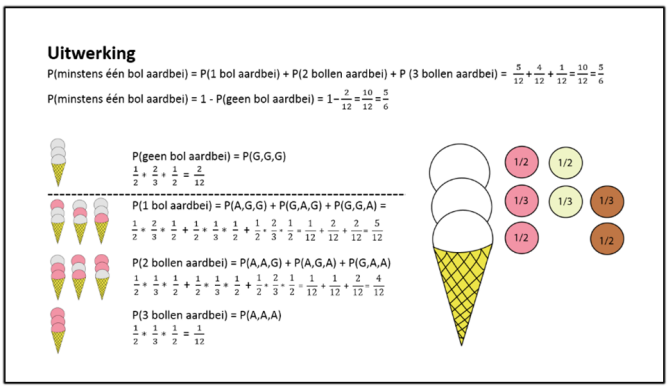
Figuur 3.4: *Les complementregel telprobleem*



Vervolgens wordt de opgave klassikaal besproken. Daarbij wordt begonnen met het vormen van een beeld van de gegeven situatie. Aan de leerlingen wordt gevraagd hoe ze de opgave hebben aangepakt. Een groot deel van de leerlingen zal gebruik hebben gemaakt van de somregel. De oplossing met behulp van de somregel wordt daarom gevisualiseerd, alle verschillende mogelijkheden op minstens één bolletje aardbeienijs

worden systematisch uitgetekend. Zo kan één bolletje aardbeienijs in deze situatie op drie verschillende manieren voorkomen; Het bovenste bolletje kan aardbeienijs zijn en de overige twee niet, het middelste bolletje kan aardbeienijs zijn en de overige twee niet of het onderste bolletje kan aardbeienijs zijn en de overige twee niet. Op dezelfde manier worden de verschillende mogelijkheden bij twee bolletjes aardbeienijs en drie bolletjes aardbeienijs systematisch uitgetekend. Wanneer alle verschillende mogelijkheden op minstens één bolletje aardbeienijs uitgetekend zijn, wordt aan de leerlingen gevraagd welke mogelijkheid er over blijft; Een ijsje met drie bolletjes kan één bolletje aardbeienijs hebben, twee bolletjes aardbeienijs, drie bolletjes aardbeienijs.. Zijn er nog meer mogelijkheden? Ook deze laatste mogelijkheid, geen bolletjes aardbeienijs, wordt gevisualiseerd.

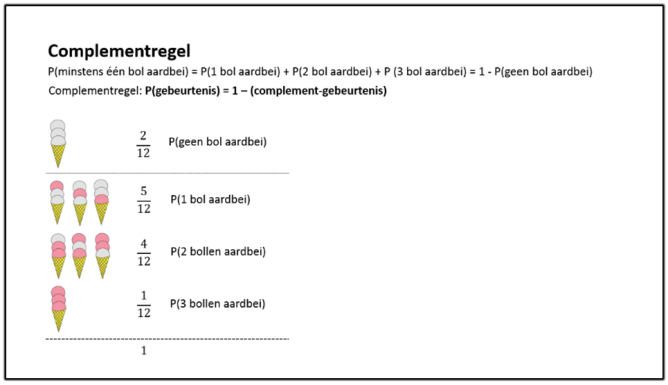
Figuur 3.5: *Les complementregel uitwerking*



Nu wordt de complementregel geïntroduceerd. Allereerst kan aan de leerlingen gevraagd worden hoe groot de kans is op alle (gevisualiseerde) mogelijkheden samen. Deze totale kans is natuurlijk 1. Vervolgens kan gevraagd worden of de leerlingen een snellere manier kunnen bedenken om de kans op minstens één bolletje aardbeienijs te berekenen. De kans op geen aardbeienijs plus de kans op minstens één bolletje aardbeienijs is samen 1; Dit betekend dat de kans op minstens één bolletje aardbeienijs berekend kan worden door 1 min de kans op geen bolletjes met aardbeienijs. Dat deze 'hypothese' juist is kan vervolgens gecontroleerd worden door de bijbehorende kansen bij alle systematisch uitgetekende mogelijkheden uit te rekenen (zie figuur 3.5 en 3.6). Visualiseren leidt dus tot een idee over hoe de gevraagde kans berekend kan worden, daarna pas wordt deze kans uitgewerkt aan de hand van formules.

Het gebruik van de iconische representatietechniek draagt bij aan herkenning, vergelijking en contrast. In dit geval leidt vergelijking tot de conclusie dat in deze situatie zowel de somregel als de complementregel bruikbaar zijn, maar dat de nieuwe methode: de complementregel, in dit geval gemakkelijker werkt. Doordat alle theorie in de lessen binnen de her-ontworpen lessenserie wordt gevisualiseerd en besproken aan de hand van dezelfde context en hetzelfde icoon, het ijsje, ontdekken leerlingen verschillen en overeenkomsten tussen situaties en concepten. Op deze manier ontwikkelen de leerlingen

Figuur 3.6: *Les complementregel theorie*



inzicht in telproblemen en worden ze meer voorbereid op opgaven waarbij het vooraf niet duidelijk is welke techniek er van toepassing is (Timmer & Verhoef, 2014).

In de voor dit onderzoek ontwikkelde lessenserie worden alle (nieuwe) regels en procedures op een vergelijkbare manier geïntroduceerd als hierboven omschreven voor de complementregel. De lesplannen en bijbehorende visualisaties van deze lessenserie zijn opgenomen in appendix D. Naast het introduceren van nieuwe theorie wordt tijdens de lessen ook aandacht besteed aan het bespreken van huiswerkopgaven. Bij het uitwerken van opgaven is steeds het eerder beschreven stappenplan (zie figuur 3.2) aangehouden. Deze structuur helpt bij het systematisch nadenken over de situatie waarin een telprobleem plaats vindt. Daarnaast is tijdens de bespreking van opgaven ook steeds de parallel getrokken met de ijsjes-context.

Samenvattend: de interventiegroep en de controlegroep hebben hetzelfde programma uit het hoofdstuk *Rekenen met Kansen* gevolgd; Leerlingen hebben dezelfde opgaven gemaakt en dezelfde theorie is besproken. Echter in de interventiegroep is, zoals hierboven omschreven, bij de bespreking van theorie en opgaven veel aandacht geweest voor de fase van waarneming. De belangrijke aandachtspunten binnen de her-ontworpen lessenserie:

1. Leerlingen aanzetten tot actief waarnemen.
2. Het oplossen van telproblemen systematisch beginnen met het visualiseren van de situatie.
3. Werken vanuit één context (ijsjes-context) en icoon (ijsje), zodat leerlingen worden aangezet tot vergelijking, herkenning en contrast.
4. Leerlingen actief verschillen tussen situaties laten benoemen.
5. Bij het uitwerken van een telprobleem, steeds dezelfde structuur aanhouden.

4. Data

4.1. Dataverzameling

Het hoofdstuk *Rekenen met Kansen* is zowel in de controlegroep als in de interventiegroep in de tweede helft van de vierde periode behandeld. In de eerste helft van deze periode is in beide klassen een deel van het hoofdstuk *Formules en Veranderingen* besproken. De afsluitende toets aan het einde van de vierde periode toetste deze twee onderwerpen. Opgave A, B en C horen bij het hoofdstuk *Formules en Veranderingen* en zijn dus niet relevant voor dit onderzoek. Opgave D, E, F, G en H gaan in op het hoofdstuk *Rekenen met Kansen* en vormen de data aan de hand waarvan de beide klassen met elkaar zijn vergeleken. Iedere opgave bestaat uit een aantal deel opgaven, die bij het analyseren steeds onafhankelijk van elkaar zijn gecategoriseerd. De toets is gemaakt op 12 juni 2015 en duurde 100 minuten. De toets opgaven en uitwerkingen zijn te vinden in appendix B. In beide klassen zijn de toetsen van de leerlingen nagekeken door de vaste docent van de klas.

4.2. Data-analyse

Aan de hand van de opgestelde criteria (figuur 3.1) zijn vervolgens de toetsen van de leerlingen geanalyseerd. Bij dit analyseren is gebruik gemaakt van een werkschema in Excel. Het werkschema zorgt ervoor dat de verschillende vragen op een logische manier worden doorlopen: de criteria zijn in het werkschema geplaatst op volgorde van het doorlopen van de omschreven vijf stappen binnen het oplossen van een telprobleem (figuur 3.2). In figuur 4.1 is ter illustratie een ingevuld werkschema weergegeven. In de linker kolom staan de verschillende criteria. Opgave D, E, F, G en H bestaan ieder uit een aantal deelopgaven (zie appendix B). Deze deelopgaven corresponderen met de getallen 7 tot en met 19 in de bovenste rij van figuur 4.1. Per deelvraag zijn de criteria-vragen beantwoord en aan de hand daarvan is iedere uitwerking van een deelvraag met behulp van de criteriumlijst in figuur 3.1 in één van de vijf categorieën geplaatst. Opgave H heeft ook een deelopgave 20, maar deze opgave is buiten het onderzoek te gelaten. Dit aangezien in opgave 20 niet gevraagd wordt om een kans op te stellen (zie appendix B), waardoor deze opgave niet te categoriseren is met behulp van de opgestelde criterialijst.

De uitwerkingen van de deelopgaven 7 tot en met 19 zijn per leerling één voor één beoordeeld aan de hand van de opgestelde criteria, waarbij de antwoorden in het werkschema zijn genoteerd. Ja correspondeert in het schema met een 1, nee correspondeert met een 0. Daarnaast wordt een x gebruikt om aan te geven dat de opgave niet is ingevuld. Tenslotte staat nvt voor niet van toepassing. Vooraf is per deelopgave vastgesteld of er criteria zijn die niet van toepassing zijn. Daarnaast is ook vooraf omschreven waar een uitwerking van een opgave aan moet voldoen willen de criteriavragen positief beantwoord worden; Vastgesteld is wat de te berekenen kans is, wat de juiste samenstelling van de kans is, hoe de som/complementregel gebruikt kan worden, op welke manier combinaties/volgordes gebruikt moeten worden, of er sprake is van trekken met of zonder terugleggen, hoe de productregel gebruikt moet worden en wat het juiste eindantwoord is (zie appendix C).

Figuur 4.1: *Werkschema*

Leerling:	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Vraag juist geïnterpreteerd?	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	x	1	1
Samenstelling van de kans juist gekozen?	1	1	nvt	1	nvt	nvt	nvt	0	nvt	1	x	nvt	nvt
Som/complementregel juist gebruikt?	1	1	nvt	1	nvt	nvt	nvt	1	nvt	1	x	nvt	nvt
Wel of geen combinaties/volgordes juist gekozen?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	x	nvt	1
Combinaties/volgordes juist gebruikt?	1	1	1	1	1	nvt	1	nvt	1	nvt	x	nvt	1
Trekken met of zonder terugleggen juist gekozen?	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	x	0	1
Productregel juist gebruikt?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	x	1	1
Berekening juist uitgevoerd?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	x	1	1

Daarbij is het zo dat in het gebruik van de regels en procedures steeds de meest gangbare methode is omschreven. Het kan voorkomen dat leerlingen een andere methode gebruiken die ook correct is. Denk bijvoorbeeld aan het gebruik van de somregel in plaats van de complementregel of het uitschrijven van alle volgordes in plaats van het gebruik van combinaties. Dit is tijdens de analyse door de beoordelaars actief in de gaten gehouden.

Om fouten in de analyse van de uitwerkingen te minimaliseren is ervoor gekozen om de toetsen door twee onafhankelijke personen te laten beoordelen. De toets uitwerkingen zijn niet alleen door mijzelf maar ook door een tweede onafhankelijke persoon geanalyseerd. We hebben beide per leerling voor iedere deelopgave de criteriavragen beantwoord. Aan de hand hiervan is met Excel bepaald in welke van de vijf categorieën de uitwerking van de deelopgave valt. Vervolgens zijn deze resultaten vergeleken. Uitwerkingen van leerlingen die in twee verschillende categorieën geplaatst waren, zijn opnieuw bekeken. In de meeste gevallen was het duidelijk dat één van de twee beoordelaars een fout had gemaakt. In een aantal situaties moest een richting gekozen worden. Zo hebben we bepaald dat het alleen overschrijven van de vraag valt onder de categorie niet ingevuld (zie appendix A). En het noteren van een breuk in plaats van een combinatie valt onder de categorie procedurele fout, ook wanneer in de rekenmachine wel gebruik is gemaakt van combinaties omdat het juiste eindantwoord is gegeven (zie appendix A). Uiteindelijk is gezamenlijk per leerling één indeling van de deelopgaven in categorieën vastgesteld.

5. Resultaten

Aan de hand van de data per leerling, is vervolgens bepaald hoe de uitwerkingen van de deelopgaven binnen de interventiegroep respectievelijk controlegroep zijn verdeeld over de vijf verschillende categorieën. Het totale resultaat is in figuur 5.1 te zien. De verdeling van alle uitwerkingen over de verschillende categorieën wordt niet gegeven in aantallen uitwerkingen maar in percentages, zodat beide groepen te vergelijken zijn. De interventiegroep bestaat immers uit 24 leerlingen en de controlegroep uit 26 leerlingen.

In de eerste kolom van figuur 5.1 zijn de vijf verschillende categorieën weergegeven. Vervolgens geven de tweede en derde kolom de verdeling van alle uitwerkingen samen (deelopgave 7 tot en met 19) van respectievelijk de interventiegroep en de controlegroep over deze vijf verschillende categorieën. De laatste kolom geeft tenslotte per categorie het verschil in percentage aan tussen de interventiegroep en de controlegroep. De resultaten tonen dat er in de interventiegroep 7% minder conceptuele fouten zijn gemaakt dan in de controlegroep. Daarnaast zijn er 4% minder procedurele- en 2% minder slordigheidsfouten gemaakt. Verder valt het op dat in de interventiegroep wel 3% meer opgaven niet zijn ingevuld. Dit is te verklaren aan de hand van het aantal niet ingevulde toetsen. In de interventiegroep zijn twee toetsen niet ingevuld, in de controlegroep is dit maar één toets. Besloten is de deze toetsen wel mee te nemen in het resultaat.

Figuur 5.1: *Verdeling uitwerkingen over verschillende categorieën*

	Interventiegroep	Controlegroep	Verschil
niet ingevuld	14%	11%	3%
conceptueel	43%	50%	-7%
procedureel	6%	10%	-4%
slordigheid	2%	4%	-2%
goed	35%	25%	10%

In figuur 5.2 worden voor iedere opgave (D tot en met H) de resultaten per deelopgave gegeven. In de linker kolom staan de vijf verschillende categorieën aangegeven. De getallen in de bovenste rij corresponderen met de verschillende deelopgaven. Vervolgens worden daaronder in de eerste kolom steeds de resultaten van de interventiegroep gegeven en in de tweede kolom de resultaten van de controlegroep. De derde kolom geeft tenslotte het verschil in percentage tussen de interventiegroep en de controlegroep aan.

Wanneer we kijken naar het percentage goed gemaakte uitwerkingen, kunnen we allereerst vaststellen welke opgaven relatief gemakkelijk en welke opgaven relatief moeilijk waren. Een deelopgave waarin beide groepen veel (vooral conceptuele) fouten hebben gemaakt is opgave 17. Opvallend is dat de context van deze opgave duidelijk afwijkt van de standaard contexten uit het boek *Getal & Ruimte*. Leerlingen vinden het dus moeilijker om de juiste wiskundige regels en procedures te kiezen wanneer er sprake is van een afwijkende context. Een voorbeeld van een deelopgave die juist erg goed gemaakt is, is opgave 9. In deze opgave wordt niet gevraagd naar een samengestelde kans en het is toegestaan om vanwege een kleine steekproef uit een grote populatie gebruik gemaakt worden van trekken met terugleggen. Vooral de tweede stap in het oplossen van een telprobleem (zie figuur 3.2), het omschrijven van de kans, is in dit geval hierdoor relatief gemakkelijk. Leerlingen hebben in deze opgave dan ook relatief weinig fouten gemaakt.

Wanneer we verder kijken valt het op dat het percentage goed gemaakte opgaven in de interventiegroep bij de meeste deelopgaven hoger ligt dan in de controlegroep. Uitzondering hierop zijn deelopgave 7 en deelopgave 16. Vooral in deelopgave 16 zijn er door de

interventiegroep meer conceptuele fouten gemaakt; De meeste fouten zijn daarbij gemaakt in het interpreteren van de opgave. Opgaven waarbij de interventiegroep duidelijk veel minder fouten heeft gemaakt dan de controlegroep zijn deelopgave 11, 12, 13, 14, 15 en 19. De controlegroep heeft in deze deelopgaven vooral meer moeite met het kiezen tussen trekken met of zonder terugleggen en het kiezen tussen het wel of niet gebruiken van combinaties of volgordes.

Figuur 5.2: *Verdeling uitwerkingen per opgave over verschillende categorieën*

Opgave D	**7**			**8**		
niet ingevuld	13%	8%	5%	13%	12%	1%
conceptueel	33%	31%	2%	42%	42%	0%
procedureel	13%	15%	-2%	17%	12%	5%
slordigheid	13%	12%	1%	0%	12%	-12%
goed	29%	35%	-6%	29%	23%	6%

Opgave E	**9**			**10**			**11**			**12**		
niet ingevuld	8%	8%	0%	8%	4%	4%	8%	12%	-4%	21%	12%	9%
conceptueel	25%	15%	10%	38%	42%	-4%	50%	77%	-27%	33%	54%	-21%
procedureel	0%	15%	-15%	8%	12%	-4%	0%	0%	0%	0%	4%	-4%
slordigheid	0%	0%	0%	0%	4%	-4%	0%	0%	0%	4%	8%	-4%
goed	67%	62%	5%	46%	38%	8%	42%	12%	30%	42%	23%	19%

Opgave F	**13**			**14**			**15**		
niet ingevuld	13%	8%	5%	8%	12%	-4%	17%	12%	5%
conceptueel	42%	50%	-8%	63%	65%	-2%	54%	65%	-11%
procedureel	8%	12%	-4%	0%	4%	-4%	0%	12%	-12%
slordigheid	0%	4%	-4%	0%	8%	-8%	0%	0%	0%
goed	38%	27%	11%	29%	12%	17%	29%	12%	17%

Opgave G	**16**			**17**		
niet ingevuld	17%	12%	5%	29%	23%	6%
conceptueel	38%	23%	15%	67%	65%	2%
procedureel	13%	8%	5%	0%	12%	-12%
slordigheid	0%	8%	-8%	0%	0%	0%
goed	33%	50%	-17%	4%	0%	4%

Opgave H	**18**			**19**		
niet ingevuld	13%	8%	5%	17%	19%	-2%
conceptueel	42%	46%	-4%	29%	69%	-40%
procedureel	21%	19%	2%	0%	4%	-4%
slordigheid	0%	0%	0%	4%	0%	4%
goed	25%	27%	-2%	50%	8%	42%

Tenslotte is het interessant om het gemiddelde cijfer van beide klassen over het hele jaar en over de toets horend bij het hoofdstuk *Rekenen met Kansen* (deelopgave 7 tot en met 19) te vergelijken. Deze gegevens zijn weergegeven in figuur 5.3. Het onderwerp kansrekening lijkt een lastig onderwerp te zijn. Beide klassen scoren lager dan gemiddeld op deze toets. Opvallend is verder dat de interventiegroep gemiddeld gezien hogere cijfers haalt dan de controlegroep. Het niveauverschil tussen de interventiegroep en de controlegroep maakt dit onderzoek minder betrouwbaar. In dit geval was echter geen mogelijkheid om twee groepen van gelijk niveau te vormen, aangezien we te maken hebben met twee bestaande klassen. Wel is op de toets over het hoofdstuk *Rekenen met Kansen* een groter puntverschil tussen de interventiegroep en de controlegroep dan tussen de gemiddelde jaarcijfers. De interventiegroep heeft deze toets dus meer dan gemiddeld beter gemaakt dan de controlegroep.

Figuur 5.3: *Vergelijking jaargemiddelen en toetscijfers*

	Interventiegroep	Controlegroep	Verschil
Gemiddelde cijfer dit jaar	6,1	5,3	0,8
Cijfer deelopgave 7 t/m 19	5,6	4,4	1,2

6. Conclusie en discussie

Wanneer we het totale resultaat in figuur 5.1 bekijken, kunnen we concluderen dat de interventiegroep de lesstof zowel conceptueel als procedureel beter beheerst dan de controlegroep. De interventiegroep maakt minder fouten in de categorie ën conceptueel, procedureel en slordigheid dan de controlegroep. Daarnaast kan aan de hand van de resultaten in figuur 5.2 worden vastgesteld dat leerlingen in de interventiegroep verschillende situaties binnen de telproblematiek beter van elkaar kunnen onderscheiden. De controlegroep heeft over het algemeen meer moeite met het kiezen tussen trekken met of zonder terugleggen en het kiezen tussen het wel of niet gebruiken van combinaties of volgordes.

Het besteden van aandacht aan de waarnemingsfase binnen de wiskundeles draagt dus bij aan het ontwikkelen van zowel procedurele als conceptuele beheersing van wiskundige begrippen binnen de kansrekening. Tijdens de waarnemingsfase leidt het gebruik van iconen tot vergelijking, herkenning en contrast. Doordat leerlingen zelf verschillen tussen concepten en situaties ontdekken zijn ze beter in staat om bij telproblemen te kiezen voor de juiste regels en procedures. Om deze conclusie met meer zekerheid te kunnen stellen, zou een vergelijkbaar onderzoek grootschaliger uitgevoerd moeten worden. Daarbij is het belangrijk om twee groepen met een zelfde niveau te vergelijken. Het niveauverschil tussen de interventiegroep en controlegroep (zie figuur 5.3) maakt dit onderzoek minder betrouwbaar.

Literatuur

Bruner, J.S. (1966). *Toward a theory of instruction (vol. 59).* Harvard University Press.

Getal en ruimte weten wat telt. (2015). http://www.noordhoffuitgevers.nl/. Noordhoff uitgevers Getal en Ruimte.

Heege, J. ter (2008). Wat is realistisch reken-wiskundeonderwijs? Een voordracht van Koeno Gravemeijer. *Panama-Post*, *27, 3/4*, 3–7.

Reichard, L.A., Dijkhuis, J.H., Admiraal, D.J., Vaarwerk, G.J. te , Verbeek, J.A ., Jong, G. de., ... Maarseveen, M.L.M. van. (2011). *Getal en ruimte havo a deel 2.* EPN.

Rekenen kunnen ze niet meer. (2009). http://www.volkskrant.nl/binnenland/rekenen-kunnen-ze-niet-meer. de Volkskrant.

Skemp, R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20–26.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics.* Camebridge University Press.

Timmer, M. & Verhoef, N.C. (2014). Combinatoriek: meer dan trucjes. *Euclides*, *90(3)*, 12–13.

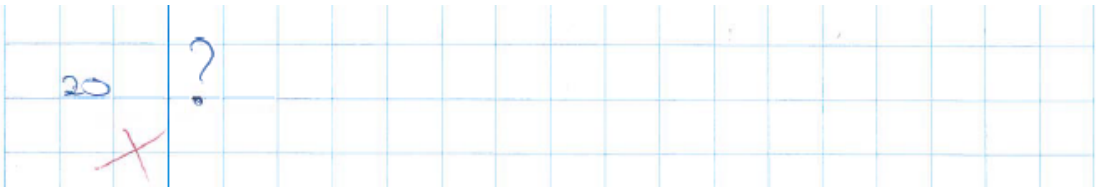
Verhoef, N.C. (2009). Interview Jan Dijkhuis en Rob Houtenbos van Getal en Ruimte. Hoe ontstaat een wiskundemethode? *NAW*, *5/10*, 132–133.

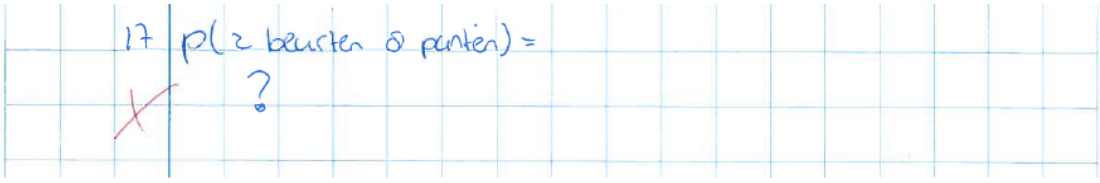
Verhoef, N.C. (2014). *onderzoeksopzet Blackboard.*

Verhoef, N.C., Smaalen, D. van & Pieters, J.M. (2012). Sensible mathematics: een zoektocht aan de hand van lesson study. In *Onderwijsresearchdagen 2012.* Wageningen.

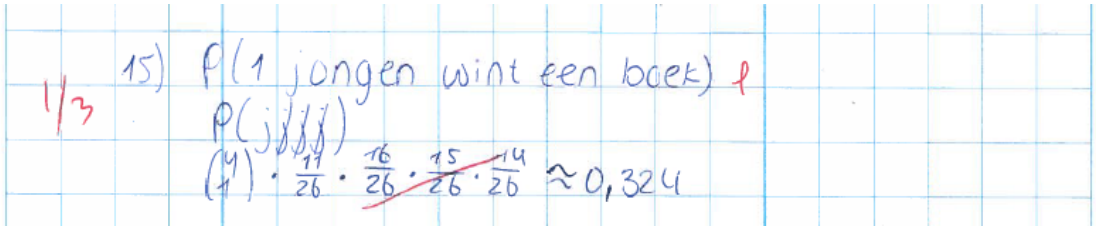
A. Leerling uitwerkingen

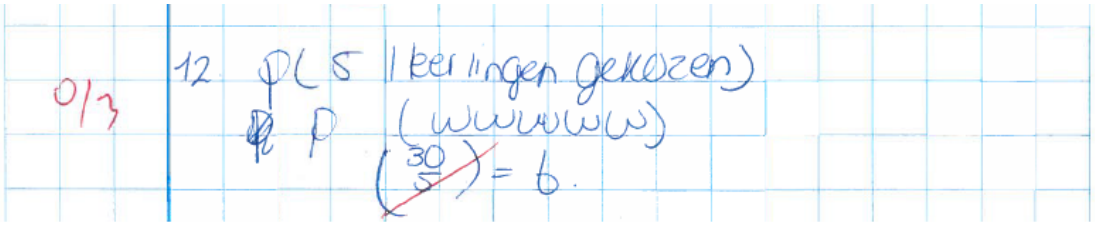
Is de opgave uitgewerkt?



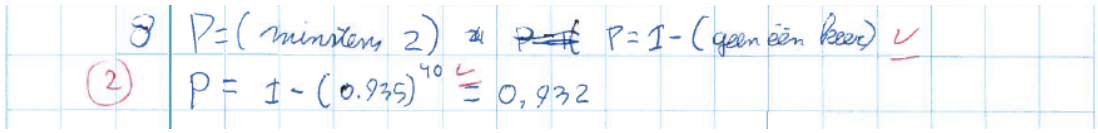


Is de opgave juist geïnterpreteerd?





Is er gekozen voor de juiste samenstelling van de kans?



Is er juist gekozen: wel of geen combinaties?

1/3

15 P(1 jongen wint boek) =
$\binom{11}{1} \cdot \binom{15}{26} \approx 0{,}141$
dus de kans dat 1 jongen een boek wint is 0,141

0/3

12 P(5 keer lungen → gekozen tot tenzen) =
P(4 4 4 4 L) = $\binom{5}{4} \cdot 0{,}83^4 \cdot 0{,}17 = 0{,}403$

Is er juist gekozen: trekken met of zonder terugleggen?

0/2

19 P(een witte en een zwarte) =
P(w z)
$\frac{w}{60} \cdot \frac{60-w}{60} = \frac{60w - w^2}{3600}$

Is de som en/of complementregel op de juiste manier gebruikt?

2/4

8 P(minstens twee op de tekst fout) = 1 - P(0) + P(1)
$= 1 - 0{,}935^{40} + 0{,}065^1 \cdot 0{,}935^{39} = 0{,}937$

Zijn combinaties op de juiste manier gebruikt?

D 7 P(er op 5 of 6 op de test link klikt) = P(5 op de test link) + P(6 op de test link)

3/4

$P = \binom{40}{5} \cdot 0{,}065^5 \cdot 0{,}935^{35} = 0{,}073$

$P = \binom{40}{6} \cdot 0{,}065^6 \cdot 0{,}935^{35} = 0{,}027$

$= 0{,}1$ kans

Is de productregel op de juiste manier gebruikt?

D 7 P (er klikken 5 of 6 bezoekers op de test link) =

P (ttttt, zijn er 35) $\binom{40}{5} \cdot 0{,}065^5 \times 0{,}935^{35} = 0{,}0726$

P (tttttt, zijn er 34) $= \binom{40}{6} \cdot 0{,}065^6 \times 0{,}935^{35} = 0{,}0273$

3/4

P (klikken 5 bezoekers op de test link) + P (er klikken 6 bezoekers op de test link) = 0,0726 + 0,0273

= 0,1001

= 0,100 = P

Kans dat iemand er op klikt = 0,065

Kans dat niemand er op klikt = 1 - 0,065 = 0,935

D 7 P(5 bezoekers) = p = 0,065 × 5 = 0,325

P(6 bezoekers) = p = 0,065 × 6 = 0,39

P (5 of 6 bezoekers)

p = 0,325 × 0,39 = 0,126675

P = 0,128

0/4

Is de berekening juist uitgevoerd?

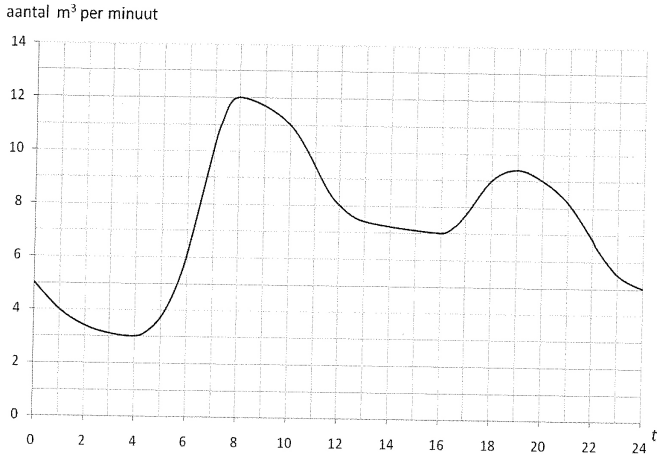
D 7. p(5 of 6 op de telstlink klikken) =
p(5 klikken) + p(6 klikken) =
3 $\binom{40}{5} \cdot 0{,}065^5 \cdot 0{,}935^{35} + \binom{40}{6} \cdot 0{,}065^6 \cdot 0{,}935^{34} =$
~~0,18~~ 0,102

10 p(van 10 minstens 9 geen) = p(9 9 geen) + p(10 geen) =
3/4 $\binom{10}{9} \cdot 0{,}83^9 \cdot 0{,}17 + 0{,}83^{10} = 0{,}472$ ×

B. Proefwerk

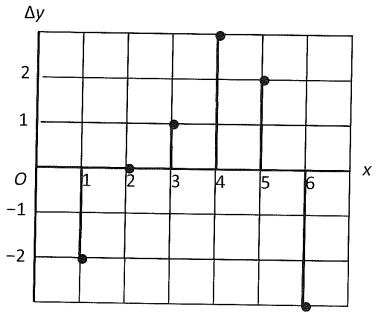
Opgave A:

4p **1** Teken het toenamediagram met $\Delta t = 4$ bij de grafiek hieronder:



Opgave B:

Gegeven is het toenamediagram hiernaast.
Bij het toenamediagram hoort een grafiek die begint in het punt (2, 3).



4p **2** Teken een mogelijke grafiek.

2p **3** Judith beweert dat de grafiek die bij het toenamediagram hoort een maximum van 9,5 heeft. Kan dat kloppen? Licht toe.

Opgave C:

Het aantal personen N dat zich op een zaterdag in winkelcentrum Oudeland bevindt is te benaderen door de formule $N = -5{,}5t^4 + 96t^3 - 546t^2 + 1150t$.
Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 9:00 uur. Het winkelcentrum sluit om 18:00 uur.

2p **4** Bereken het differentiequotiënt op [1; 4].

2p **5** Bereken $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ op [2; 2,75].

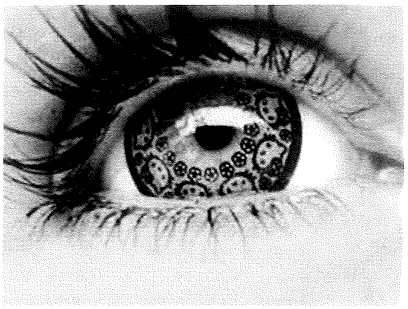
3p **6** Bereken de gemiddelde verandering van N tussen half drie en kwart voor vier.

Opgave D:

De kans dat een bezoeker van een internetsite op een uiting of tekstlink klikt heet de click-trough ratio. Bij een site is de click-through ratio van een tekstlink gelijk aan 0,065. Bereken de kans dat van 40 bezoekers op deze site

4p **7** er vijf of zes op de tekstlink klikken

4p **8** er minstens twee op de tekstlink klikken.



Opgave E:

Van de jongeren tussen 12 en 18 jaar heeft 17% contactlenzen.

Bereken de kans dat

3p **9** van vijf willekeurig gekozen jongeren tussen 12 en 18 jaar er precies één contactlenzen heeft

4p **10** van 10 willekeurig gekozen jongeren tussen 12 en 18 jaar er minstens negen *geen* contactlenzen hebben.

In een klas zitten 30 leerlingen, waarvan er vijf contactlenzen hebben.

3p **11** Uit deze klas worden willekeurig vier leerlingen gekozen.
Bereken de kans dat twee van deze vier leerlingen contactlenzen hebben.

3p **12** Uit deze klas worden willekeurig net zolang leerlingen gekozen totdat er een leerling gekozen wordt die contactlenzen draagt.
Bereken de kans dat er vijf leerlingen gekozen worden.

Opgave F:

In een klas zitten 26 leerlingen: 11 jongens en 15 meisjes.
Elk van de vakken wiskunde, natuurkunde, scheikunde en biologie verloot een boek in de klas .

3p **13** Bereken de kans dat drie boeken door meisjes en één boek door een jongen worden gewonnen.

3p **14** Bereken de kans dat hoogstens drie meisjes de boeken winnen.
De wiskunde leraar verloot drie boeken in deze klas. Elke leerling kan hoogstens één Boek winnen.

3p **15** Bereken de kans dat één jongen een boek wint.

Volgende pagina!

Opgave G:

Enkele personen spelen een kansspel. Een speler werpt bij elke beurt eerst met een dobbelsteen en daarna met een geldstuk. Per beurt worden punten toegekend volgens onderstaande regels.

- ♥ De speler krijgt evenveel punten als het aantal geworpen ogen.
- ♥ Er komen 4 punten bij als het geldstuk kop aangeeft en 2 punten als het geldstuk munt aangeeft.

Bereken de kans dat een speler:

2p **16** In één beurt precies zeven punten behaalt.

4p **17** in twee beurten in totaal precies 8 punten behaalt.

Opgave H:

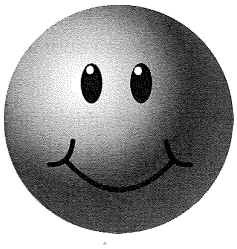
In een vaas zitten 60 knikkers, waarvan er w wit zijn. De rest is zwart.
Rick pakt twee knikkers uit de vaas.

2p **18** Stel de formule op van P(twee witte).

2p **19** Toon aan dat $P(\text{een witte en een zwarte}) = \dfrac{60w - w^2}{1770}$.

4p **20** Bereken voor welke waarden van w de kans op een witte en een zwarte knikker groter is dan 0,5.

Einde



61 punten

CSG HET NOORDIK
vmbo • havo • atheneum • gymnasium

Naam kandidaat:

Examen no.

Examenvak: correctie Havo 4A

Datum: Blok 4.4

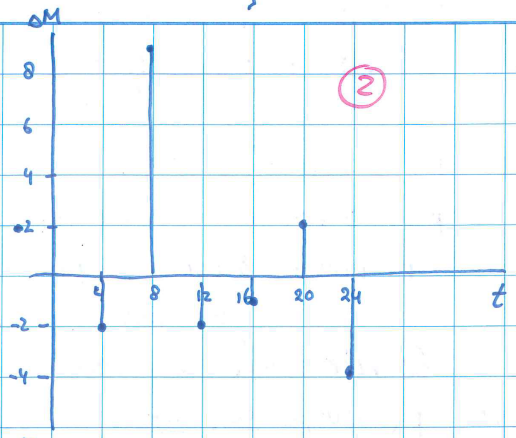
2015

A

1 (4)

$\Delta t = 4$	ΔM
[0;4]	3 − 5 = −2
[4;8]	12 − 3 = 9
[8;12]	8 − 12 = −4
[12;16]	7 − 8 = −1
[16;20]	9 − 7 = 2
[20;24]	5 − 9 = −4

(2)



(2)

B

2 (4)

x	y	
0	5	
1	3	+2
2	3	0
3	4	+1
4	7	+3
5	9	+2
6	6	−3

(2)

(2)

(2) 3 zie tekening

C

4 $Y_1 = -5{,}5x^4 + 96x^3 - 546x^2 + 1150x$ $t = 0$ 9:00 uur

(2) op interval [1;4] $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{600 - 694{,}5}{4 - 1} = -31{,}5$

$N = 694{,}5$ $t = 1$

$N = 600$ $t = 4$

(2) 5 $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{715{,}33 - 796}{2{,}75 - 2} = -322{,}68$ −107,5703

$t = 2$ $N = 796$

$t = 2{,}75$ $N = 715{,}33$

(3) 6 $t = 5\frac{1}{2}$ (14:30) $t = 6\frac{3}{4}$ (15:45) $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{992{,}197 - 747{,}656}{6\frac{3}{4} - 5\frac{1}{2}} = 195{,}63$

17

D

$p = 0{,}065$ "click-through" 40 bezoekers $p = 0{,}935$

7 $p(5 \text{ tekstlink}) + p(6 \text{ tekstlink}) = 0{,}935^{35} \cdot 0{,}065^{5} \binom{40}{5}$

4p $+ 0{,}935^{34} \cdot 0{,}065^{6} \binom{40}{6} \approx 0{,}0726 + 0{,}0294 \approx \boxed{0{,}102}$

8 $p(\text{minstens 2 op tekstlink}) = 1 - p(0) - p(1)$

4p $1 - 0{,}935^{40} - 0{,}935^{39} \cdot 0{,}065 \cdot \binom{40}{1} = \boxed{0{,}743}$

E

$p = 0{,}17$ contactlenzen $p = 0{,}83$ geen contactlenzen

3p 9 $n = 5$ $p(1 \text{ contactlens}) = 0{,}17 \cdot 0{,}83^{4} \binom{5}{1} \approx \boxed{0{,}403}$

10 ~~$p(\text{hoogstens 3 contactlenzen}) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3)$~~ $n = 10$

~~$0{,}83^{10} + 0{,}83^{9} \cdot 0{,}17 \binom{10}{1} + 0{,}83^{8} \cdot 0{,}17$~~

4p $p(\text{minstens 9 geen contactlenzen}) = p(9) + p(10)$

$0{,}83^{9} \cdot 0{,}17^{1} \binom{10}{1} + 0{,}83^{10} \approx \boxed{0{,}473}$

11 30 ll $\begin{cases} 5 \text{ lenzen} \\ 25 \text{ geen lenzen} \end{cases}$

3 $n = 4$ $p(2 \text{ lenzen}, 2 \text{ geen lenzen}) = \dfrac{\binom{5}{2}\binom{25}{2}}{\binom{30}{4}} \approx \dfrac{10 \cdot 300}{27405} \approx \boxed{0{,}109}$

binom $\binom{4}{2} \cdot \frac{5}{30} \cdot \frac{4}{29} \cdot \frac{25}{28} \cdot \frac{24}{27} = 0{,}109$

12 $p(tttt\,l) = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29} \cdot \frac{23}{28} \cdot \frac{22}{27} \cdot \frac{5}{26} = \boxed{0{,}089}$

3

F

$26 \begin{cases} 11\ j \\ 15\ m \end{cases}$ wis, nat, sch en bio

13 met teruggeleggen $p(mmmj) = \left(\frac{15}{26}\right)^{3} \cdot \left(\frac{11}{26}\right) \binom{4}{1} \approx \boxed{0{,}325}$

3

14 $p(\text{hoogstens 3 meisjes}) = 1 - p(\text{geen meisje})$

$p(4 \text{ meisjes})$

3 $1 - \left(\frac{15}{26}\right)^{4} \approx \boxed{0{,}968}$ 0,889

15 $p(\text{hoogstens een 1 jongen}) =$ ~~$p(0) + p(1)$~~

3 ~~$\frac{11}{26} \cdot \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24}$~~ $\frac{11}{26} \cdot \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} \cdot \binom{3}{1} \approx \boxed{0{,}444}$

30

G ogen is aantal punten kop

+4	k	5	6	7	8	9	10
+2	m	3	4	5	6	7	8
		1	2	3	4	5	6

(2) 16 $p(7 \text{ punten}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ (1)

(4) 17 ~~pM~~ 8 punten in 2 beurten $3+5=8$, $4+4=8$

$p(\text{precies } 8 \text{ punten}) = p(\underset{\text{en } 5,3}{\overset{4+4}{3 \text{ en } 5}}) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{2}{144} = \boxed{\frac{1}{72}}$

dus $\frac{2}{144} + \frac{2}{144} + \frac{1}{144} = \frac{5}{144} \approx 0{,}035$

H 60 knikker $\begin{cases} w \text{ wit} \\ 60-w \text{ zwart} \end{cases}$ 2 knikkers

2 18 $p(ww) = \frac{w}{60} \cdot \frac{w-1}{59} = \frac{w^2-w}{3540}$

deze vergeten 0 punten

19 2 $P(w,x) = \frac{w}{60} \cdot \frac{60-w}{59} \cdot \binom{2}{1} = \frac{60w-w^2}{3540} \cdot 2 = \frac{60w-w^2}{1770}$

20 $p(w,x) > 0{,}5$ $y_1 = (60x - x^2)/1770$

table (1)

4 calc of intersect

$x \approx 26{,}127$ $27 \le w \le 33$

$x \approx 33{,}87$ (2) (1)

deze niet (-2)

x	y
26	0,4994
27	0,503
⋮	
33	0,503
34	0,4994

61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45
			9,6				9,0					8,2	8,1		7,8	
44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28
	7,3			6,9	6,8						5,9				5,3	
27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
	4,8			4,4	4,2				3,7			3,2		3,0		

14

C. Uitwerking criteria per deelvraag

7.

Is de te berekenen kan juist gekozen?	P(vijf of zes op testlink)
Is er gekozen voor de juiste samenstelling van de kans?	P(5) + P(6)
Som/complementregel op de juiste manier gebruikt?	P() + P()
Is er juist gekozen: wel of geen combinaties/volgordes?	wel combinaties
Combinaties/volgordes op de juiste manier gebruikt?	$\ldots * \ldots * \binom{40}{5} + \ldots * \ldots * \binom{40}{6}$
Is er juist gekozen: trekken met of zonder terugleggen?	met terugleggen
Productregel op de juiste manier gebruikt?	$0{,}935^{35} * 0{,}065^{5} * (\ ) + 0{,}935^{35} * 0{,}065^{5} * (\ )$
Berekening op de juiste manier uitgevoerd? (S)	0,102

8.

Is de te berekenen kan juist gekozen?	P(minstens twee op testlink)
Is er gekozen voor de juiste samenstelling van de kans?	1 – P(0) – P(1)
Som/complementregel op de juiste manier gebruikt?	1 – P() – P()
Is er juist gekozen: wel of geen combinaties/volgordes?	wel combinaties
Combinaties/volgordes op de juiste manier gebruikt?	$1 - \ldots - \ldots * \ldots * \binom{40}{1}$
Is er juist gekozen: trekken met of zonder terugleggen?	met terugleggen
Productregel op de juiste manier gebruikt?	$1 - 0{,}935^{40} - 0{,}935^{39} * 0{,}065 * (\ )$
Berekening op de juiste manier uitgevoerd? (S)	0,743

9.

Is de te berekenen kan juist gekozen?	P(één van de vijf heeft contactlenzen)
Is er gekozen voor de juiste samenstelling van de kans?	*nvt*
Som/complementregel op de juiste manier gebruikt?	*nvt*
Is er juist gekozen: wel of geen combinaties/volgordes?	wel combinaties
Combinaties/volgordes op de juiste manier gebruikt?	$\ldots * \ldots * \binom{5}{1}$
Is er juist gekozen: trekken met of zonder terugleggen?	met terugleggen
Productregel op de juiste manier gebruikt?	$0{,}17 * 0{,}83^{4} * (\ )$
Berekening op de juiste manier uitgevoerd? (S)	0,403

10.

Is de te berekenen kan juist gekozen?	P(van de 10 minstens 9 géén contactlenzen)
Is er gekozen voor de juiste samenstelling van de kans?	P(9) + P(10)
Som/complementregel op de juiste manier gebruikt?	P() + P()
Is er juist gekozen: wel of geen combinaties/volgordes?	wel combinaties
Combinaties/volgordes op de juiste manier gebruikt?	$\ldots * \ldots * \binom{10}{1} + \ldots$
Is er juist gekozen: trekken met of zonder terugleggen?	met terugleggen
Productregel op de juiste manier gebruikt?	$0{,}17 * 0{,}83^{9} * (\ ) + 0{,}83^{10}$
Berekening op de juiste manier uitgevoerd? (S)	0,473

11.

Is de te berekenen kan juist gekozen?	P(van de 4 leerlingen hebben er 2 contactlenzen)
Is er gekozen voor de juiste samenstelling van de kans?	*nvt*
Som/complementregel op de juiste manier gebruikt?	*nvt*
Is er juist gekozen: wel of geen combinaties/volgordes?	wel combinaties
Combinaties/volgordes op de juiste manier gebruikt?	… * … * $\binom{4}{2}$
Is er juist gekozen: trekken met of zonder terugleggen?	zonder terugleggen
Productregel op de juiste manier gebruikt?	$\frac{5}{30} * \frac{4}{29} * \frac{25}{28} * \frac{24}{27} * (\ )$
Berekening op de juiste manier uitgevoerd? (S)	0,109

12.

Is de te berekenen kan juist gekozen?	P(vijf leerlingen kiezen voor 1 met contactlenzen)
Is er gekozen voor de juiste samenstelling van de kans?	*nvt*
Som/complementregel op de juiste manier gebruikt?	*nvt*
Is er juist gekozen: wel of geen combinaties/volgordes?	geen combinaties
Combinaties/volgordes op de juiste manier gebruikt?	*nvt*
Is er juist gekozen: trekken met of zonder terugleggen?	zonder terugleggen
Productregel op de juiste manier gebruikt?	$\frac{25}{30} * \frac{24}{29} * \frac{23}{28} * \frac{22}{27} * \frac{5}{26}$
Berekening op de juiste manier uitgevoerd? (S)	0,109

13.

Is de te berekenen kan juist gekozen?	P(drie boeken door meisjes, één door een jongen)
Is er gekozen voor de juiste samenstelling van de kans?	*nvt*
Som/complementregel op de juiste manier gebruikt?	*nvt*
Is er juist gekozen: wel of geen combinaties/volgordes?	wel combinaties
Combinaties/volgordes op de juiste manier gebruikt?	… * … * $\binom{4}{1}$
Is er juist gekozen: trekken met of zonder terugleggen?	met terugleggen
Productregel op de juiste manier gebruikt?	$\left(\frac{14}{26}\right)^3 * \left(\frac{11}{26}\right) * (\ )$
Berekening op de juiste manier uitgevoerd? (S)	0,109

14.

Is de te berekenen kan juist gekozen?	P(hoogstens 3 meisjes winnen een boek)
Is er gekozen voor de juiste samenstelling van de kans?	1 – P(4 meisjes)
Som/complementregel op de juiste manier gebruikt?	1 – P(4 meisjes)
Is er juist gekozen: wel of geen combinaties/volgordes?	geen combinaties
Combinaties/volgordes op de juiste manier gebruikt?	*nvt*
Is er juist gekozen: trekken met of zonder terugleggen?	met terugleggen
Productregel op de juiste manier gebruikt?	$1 - \left(\frac{15}{26}\right)^4$
Berekening op de juiste manier uitgevoerd? (S)	0,889

15.

Is de te berekenen kan juist gekozen?	P(één jongen wint een boek)
Is er gekozen voor de juiste samenstelling van de kans?	*nvt*
Som/complementregel op de juiste manier gebruikt?	*nvt*
Is er juist gekozen: wel of geen combinaties/volgordes?	wel combinaties
Combinaties/volgordes op de juiste manier gebruikt?	… * …*…*$\binom{3}{1}$
Is er juist gekozen: trekken met of zonder terugleggen?	zonder terugleggen
Productregel op de juiste manier gebruikt?	$\frac{11}{26} * \frac{15}{25} * \frac{14}{24} * (\ )$
Berekening op de juiste manier uitgevoerd? (S)	0,444

16.

Is de te berekenen kan juist gekozen?	P(zeven punten in één beurt)
Is er gekozen voor de juiste samenstelling van de kans?	P(5 en munt) + P(3 en kop)
Som/complementregel op de juiste manier gebruikt?	P(5 en munt) + P(3 en kop)
Is er juist gekozen: wel of geen combinaties/volgordes?	geen combinaties
Combinaties/volgordes op de juiste manier gebruikt?	*nvt*
Is er juist gekozen: trekken met of zonder terugleggen?	met terugleggen
Productregel op de juiste manier gebruikt?	$\frac{1}{6} * \frac{1}{2} + \frac{1}{6} * \frac{1}{2}$
Berekening op de juiste manier uitgevoerd? (S)	$\frac{1}{6}$

17.

Is de te berekenen kan juist gekozen?	P(8 punten in twee beurten)
Is er gekozen voor de juiste samenstelling van de kans?	P(3 en 5 punt) + P(4 en 4 punt)
Som/complementregel op de juiste manier gebruikt?	P(3 en 5 punt) + P(4 en 4 punt)
Is er juist gekozen: wel of geen combinaties/volgordes?	wel combinaties
Combinaties/volgordes op de juiste manier gebruikt?	P(3 en 5 punt) + P(5 en 3 punt) + P(4 en 4 punt)
Is er juist gekozen: trekken met of zonder terugleggen?	met terugleggen
Productregel op de juiste manier gebruikt?	$\frac{1}{12} * \frac{2}{12} + \frac{1}{12} * \frac{2}{12} + \frac{1}{12} * \frac{1}{12} = \frac{2}{144} + \frac{2}{144} + \frac{1}{144}$
Berekening op de juiste manier uitgevoerd? (S)	$\frac{1}{72}$

18.

Is de te berekenen kan juist gekozen?	P(twee witte knikkers)
Is er gekozen voor de juiste samenstelling van de kans?	*nvt*
Som/complementregel op de juiste manier gebruikt?	*nvt*
Is er juist gekozen: wel of geen combinaties/volgordes?	*nvt*
Combinaties/volgordes op de juiste manier gebruikt?	*nvt*
Is er juist gekozen: trekken met of zonder terugleggen?	zonder terugleggen
Productregel op de juiste manier gebruikt?	$\frac{w}{60} * \frac{w-1}{59}$
Berekening op de juiste manier uitgevoerd? (S)	$\frac{w^2-w}{3540}$

19.

Is de te berekenen kan juist gekozen?	P(een witte en een zwarte knikker)
Is er gekozen voor de juiste samenstelling van de kans?	*nvt*
Som/complementregel op de juiste manier gebruikt?	*nvt*
Is er juist gekozen: wel of geen combinaties/volgordes?	wel combinaties
Combinaties/volgordes op de juiste manier gebruikt?	$\ldots * \ldots * \binom{2}{1}$
Is er juist gekozen: trekken met of zonder terugleggen?	zonder terugleggen
Productregel op de juiste manier gebruikt?	$\frac{w}{60} * \frac{60-w}{59} * \binom{2}{1}$
Berekening op de juiste manier uitgevoerd? (S)	$\frac{60w-w^2}{1770}$

D. Lesplannen

Les 1 – De Complementregel

maandag 20 april 2015, 6e uur

Lesdoelen
Na deze les weten/begrijpen de leerlingen:
- wat het complement van een gebeurtenis is.
Na deze les kunnen de leerlingen:
- de complementregel gebruiken.

Leerstof
Paragraaf 7.1: de complementregel.

Lesmateriaal
Getal & Ruimte, hoofdstuk 7 Rekenen met Kansen, paragraaf 7.1: de Complementregel.
PowerPointpresentatie (zie volgende pagina).

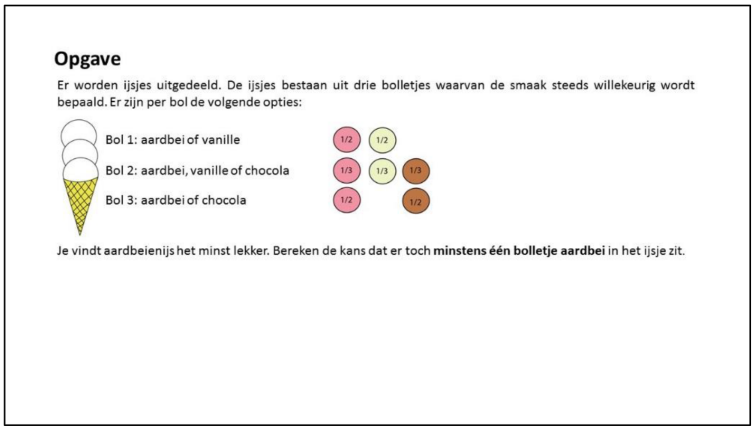
Opgaven
De leerlingen hebben opgave 2 t/m 5 van paragraaf 7.1 gemaakt.
Voor deze les staat opgave 7 t/m 12 van paragraaf 7.1 op het programma.

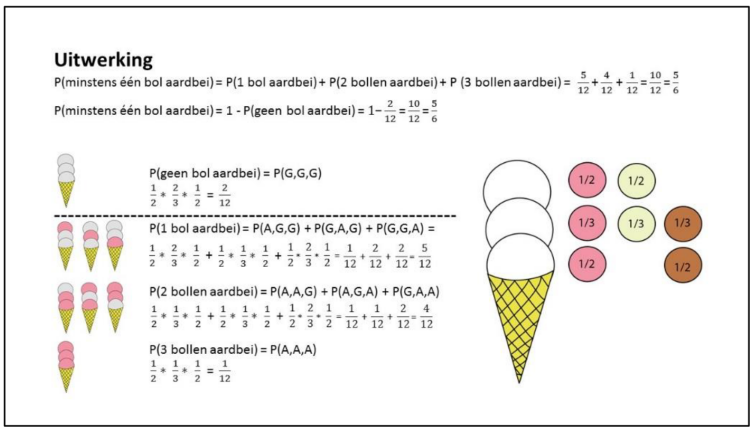
Lesplan

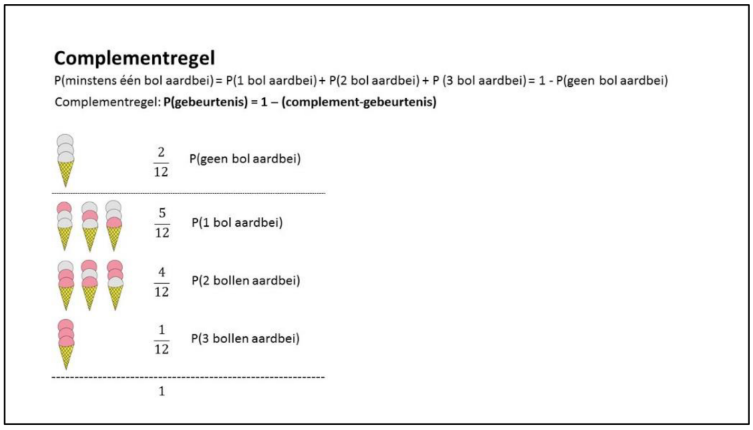
Tijd	Doel	Leerstof	Werkvorm	Activiteit Leerling	Activiteit Docent
5 min	Lesopening	-	-	-	Starten les en toelichting programma
10 min	Reflectie	Opgave 2 t/m 5	Klassikaal bespreken huiswerk (gebruik ijsjes-icoon)	Vragen stellen over gemaakte opgaven, uitwerkingen geven van gemaakte opgaven.	Uitleg geven, samen met de klas sommen uitwerken op het bord
10 min	Activeren, zelf nadenken over de opgave/situatie: waarnemen	Complementregel	Opgave op het bord (PowerPoint) individueel maken	Maken opgave op het bord.	Introduceren opgave op het bord.
10 min	Visualiseren van de opgave/situatie, bespreken waarnemingen	Complementregel	Opgave klassikaal bespreken * (PowerPoint)	Actief meedenken en antwoorden geven op vragen.	Klassikaal bespreken van de gemaakte opgave.
15 min	Oefening	Opgave 7 t/m 12	Opgaven uit het boek	Opgaven maken	Vragen beantwoorden

Vragen bij klassikaal bespreken opgave *
Uit welke elkaar uitsluitende gebeurtenissen bestaat P(minstens één bol aardbei)? Hoe kunnen we deze kans omschrijven? Waarom sluiten deze gebeurtenissen elkaar uit? Welke regel kan daarom gebruikt worden (is voorkennis)?
Zijn er verschillende situaties mogelijk waarin één bol van het ijsje aardbei is? Zijn dit ook elkaar uitsluitende gebeurtenissen? Hoe berekenen we de kans op één van deze situaties (bijvoorbeeld A, G, G)? Welke regel wordt daarbij gebruikt (is voorkennis)?
(Nadat de kans is berekend): Welke mogelijkheden bestaan er nog meer? Eén bol ijs aardbei, twee bollen ijs aardbei, drie bollen ijs aardbei… (Enige ander optie is geen bol ijs aardbei). Hoe groot is de kans op al deze mogelijkheden samen (dus 0, 1, 2, 3 bollen aardbei)? Hoe zouden we de kans op één bol aardbei sneller kunnen berekenen?
Belangrijk bij alle uitwerkingen van opgaven op het bord: eerst kans opschrijven, dan kans omschrijven in letters/codes, vervolgens concreet uitwerken en dan het antwoord berekenen.

Powerpointpresentatie les 1







Belangrijk:
Kunnen omschrijven hoe de complementregel werkt. Daarvoor: begrijpen dat alle gebeurtenissen en alle complement gebeurtenissen samen de totale kans (= 1) vormen.

Les 2 – Vervolg Complementregel

dinsdag 21 april 2015, 1e uur

Lesdoelen

Na deze les weten/begrijpen de leerlingen:

- wat het complement van een gebeurtenis is.

Na deze les kunnen de leerlingen:

- bepalen wanneer het handig is de complementregel te gebruiken.
- de complementregel gebruiken.

Lesmateriaal

Getal & Ruimte, hoofdstuk 7 Rekenen met Kansen, paragraaf 7.1: de Complementregel.
PowerPointpresentatie (zie volgende pagina).

Opgaven

De leerlingen hebben opgave 7 t/m 12 van paragraaf 7.1 gemaakt.
Voor deze les staat opgave 14 t/m 19 van paragraaf 7.1 op het programma.

Lesplan

Tijd	Doel	Leerstof	Werkvorm	Activiteit Leerling	Activiteit Docent
5 min	Lesopening	-	-	-	Starten les en toelichting programma
10 min	Reflectie	Opgave 7 t/m 12	Klassikaal bespreken huiswerk (gebruik ijsjes-icoon)	Vragen stellen over gemaakte opgaven, uitwerkingen geven van gemaakte opgaven.	Uitleg geven, samen met de klas sommen uitwerken op het bord
5 min	Activeren, zelf nadenken over de opgave/situatie: waarnemen	Complementregel	Opgave situatie 1 op het bord (PowerPoint) individueel maken.	Maken opgave op het bord.	Introduceren opgave op het bord.
5 min	Visualiseren van de opgave/situatie, bespreken waarnemingen	Complementregel	Opgave situatie 1 klassikaal bespreken (PowerPoint)	Actief meedenken en antwoorden geven op vragen.	Klassikaal bespreken van de gemaakte opgave.
5 min	Activeren, zelf nadenken over de opgave/situatie: waarnemen	Complementregel	Opgave situatie 2 op het bord (PowerPoint) individueel maken.	Maken opgave op het bord.	Introduceren opgave op het bord.
10 min	Visualiseren van de opgave/situatie, bespreken waarnemingen	Complementregel	Opgave situatie 2 klassikaal bespreken * (PowerPoint)	Actief meedenken en antwoorden geven op vragen.	Klassikaal bespreken van de gemaakte opgave.
10 min	Oefening	Complementregel	Extra oefening op het bord (samenwerken met 2)	Maken opgave op het bord.	Introduceren opgave op het bord en bespreken opgave op het bord.

Vragen bij klassikaal bespreken opgave situatie 2 *

Wat valt jullie op in deze situatie? Hoe komt het dat alle kansen even groot zijn? Wat is het verschil met de situatie hiervoor? Hoe kan de berekening in deze situatie sneller? (kansen keer 3). Hier kunnen we gemakkelijk zien dat er 3 verschillende mogelijkheden zijn. Stel ijsje met 4 bolletjes 2 aardbei hoeveel mogelijkheden zijn er dan? (gebruik combinaties). Kan er in de eerste situatie ook gebruik worden gemaakt van combinaties? Wat is de voorwaarde voor het gebruiken van combinaties (herhaling van een kansexperiment).

Belangrijk bij alle uitwerkingen van opgaven op het bord: eerst kans opschrijven, dan kans omschrijven in letters/codes, vervolgens concreet uitwerken en dan het antwoord berekenen.

Powerpointpresentatie les 2

Opgave

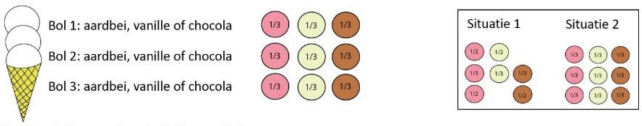
Er worden ijsjes uitgedeeld. De ijsjes bestaan uit drie bolletjes waarvan de smaak steeds willekeurig wordt bepaald. Er zijn per bol de volgende opties (met een even grote kans om geschept te worden):

Bereken de kans op twee bolletjes aardbei:

P(2 bolletjes aardbei) = P(A,A,G) + P(A,G,A) + P(G,A,A) = $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \frac{2}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{2}{12} = \frac{4}{12}$

Opgave

Er worden ijsjes uitgedeeld. De ijsjes bestaan uit drie bolletjes waarvan de smaak steeds willekeurig wordt bepaald. Er zijn per bol de volgende opties (met een even grote kans om geschept te worden):



Bereken de kans op twee bolletjes aardbei:

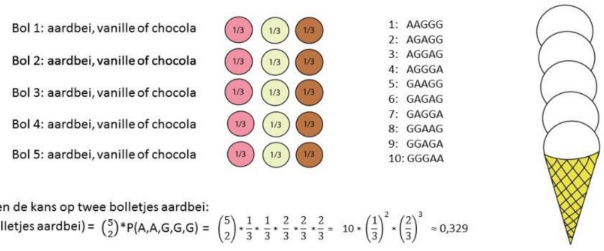
P(2 bolletjes aardbei) = P(A,A,G) + P(A,G,A) + P(G,A,A) = $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \frac{2}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{2}{12} = \frac{4}{12}$

Bereken de kans op twee bolletjes aardbei:

P(2 bolletjes aardbei) = P(A,A,G) + P(A,G,A) + P(G,A,A) = $\frac{1}{3} * \frac{1}{3} * \frac{2}{3} + \frac{1}{3} * \frac{2}{3} * \frac{1}{3} + \frac{2}{3} * \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \binom{3}{1} * \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * \frac{2}{3} = 3 * \frac{2}{27} = \frac{6}{27}$

Opgave

Er worden ijsjes uitgedeeld. De ijsjes bestaan uit vijf bolletjes waarvan de smaak steeds willekeurig wordt bepaald. Er zijn per bol de volgende opties:



Bereken de kans op twee bolletjes aardbei:

P(2 bolletjes aardbei) = $\binom{5}{2} * P(A,A,G,G,G) = \binom{5}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * \frac{2}{3} * \frac{2}{3} * \frac{2}{3} = 10 * \left(\frac{1}{3}\right)^2 * \left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 0{,}329$

Bereken de kans op minstens twee bolletjes chocola:

P(minstens 2 bolletjes chocola) = 1 − P(geen bol chocola) − P(1 bol chocola) = $1 - \binom{5}{0} * P(GGGGG) - \binom{5}{1} * P(CGGGG)$

Belangrijk:

Inzicht in het verschil tussen de twee situaties; Weten wanneer gebruik gemaakt kan worden van combinaties.

Les 3 – Het Vaasmodel

maandag 11 mei 2015, 5e uur

Lesdoelen

Na deze les weten/begrijpen de leerlingen:

- wat het vaasmodel is.

Na deze les kunnen de leerlingen:

- van een kansexperiment een vaasmodel maken.
- kansen berekenen door gebruik te maken van het vaasmodel.

Lesmateriaal

Getal & Ruimte, hoofdstuk 7 Rekenen met Kansen, paragraaf 7.2: het Vaasmodel.
PowerPointpresentatie (zie volgende pagina).

Opgaven

De leerlingen hebben opgave 14 t/m 19 van paragraaf 7.1 gemaakt.
Voor deze les staat opgave 21 t/m 27 van paragraaf 7.2 op het programma.

Lesplan

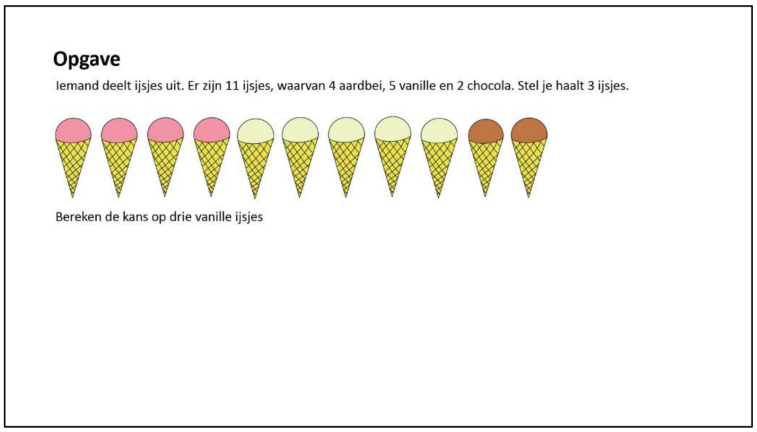
Tijd	Doel	Leerstof	Werkvorm	Activiteit Leerling	Activiteit Docent
5 min	Lesopening	-	-	-	Starten les en toelichting programma
10 min	Reflectie	Opgave 14 t/m 19	Klassikaal bespreken huiswerk (gebruik ijsjes-icoon)	Vragen stellen over gemaakte opgaven, uitwerkingen geven van gemaakte opgaven.	Uitleg geven, samen met de klas sommen uitwerken op het bord
10 min	Activeren, zelf nadenken over de opgave/situatie: waarnemen	Vaasmodel	Opgave op het bord (PowerPoint) individueel maken	Maken opgave op het bord.	Introduceren opgave op het bord.
10 min	Visualiseren van de opgave/situatie, bespreken waarnemingen	Vaasmodel	Opgave klassikaal bespreken * (PowerPoint)	Actief meedenken en antwoorden geven op vragen.	Klassikaal bespreken van de gemaakte opgave.
15 min	Oefening	Opgave 21 t/m 27	Opgaven uit het boek	Opgaven maken	Vragen beantwoorden

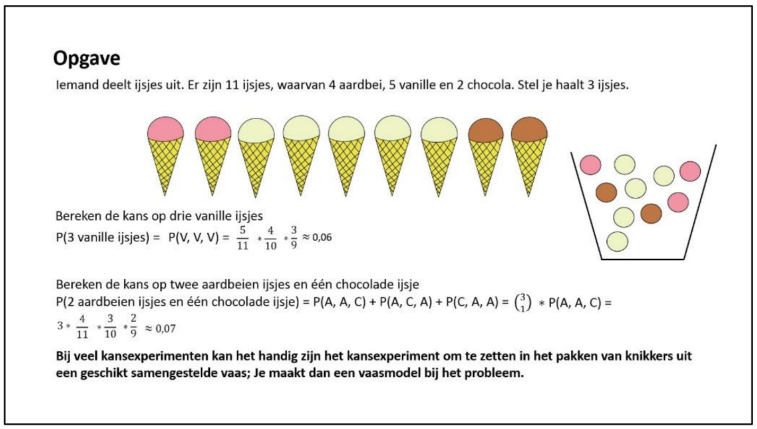
Vragen bij klassikaal bespreken opgave *

Op vraag P(drie vanille ijsjes) leerlingen antwoorden laten geven (uitwerken op bord). Zijn er verschillende antwoorden? Wanneer je één (bijvoorbeeld vanille) ijsje hebt gepakt, is de situatie daarna nog steeds hetzelfde? Er is sprake van trekken zonder terugleggen, situatie is steeds anders. Is er kloppende uitwerking? Bij berekenen P(twee aardbeien en één vanille ijsje): Zijn er verschillende mogelijkheden? Kan er gebruik gemaakt worden van combinaties (eventueel uitwerken, laten zien dat dit inderdaad kan).

Belangrijk bij alle uitwerkingen van opgaven op het bord: eerst kans opschrijven, dan kans omschrijven in letters/codes, vervolgens concreet uitwerken en dan het antwoord berekenen.

Powerpointpresentatie les 3





Belangrijk:
Begrijpen dat bij deze opgave sprake is van een veranderende situatie doordat de ijsjes niet worden teruggelegd (introductie trekken zonder terugleggen). De veranderende situatie is te visualiseren door de ijsjes te zien als knikkers in een vaas waar je er steeds eentje uit haalt, bruggetje vaasmodel (icoon knikker) naar ijsjes-icoon.

Les 4 – Herhalen tot succes

dinsdag 12 mei 2015, 1e uur

Lesdoelen

Na deze les kunnen de leerlingen:

- berekenen hoe groot de kans is op een vastgesteld aantal keer herhalen van een kansexperiment tot succes.

Lesmateriaal

Getal & Ruimte, hoofdstuk 7 Rekenen met Kansen, paragraaf 7.2: het Vaasmodel.
PowerPointpresentatie (zie volgende pagina).

Opgaven

De leerlingen hebben opgave 21 t/m 27 van paragraaf 7.2 gemaakt.
Voor deze les staat opgave 28 t/m 30 van paragraaf 7.2 op het programma.

Lesplan

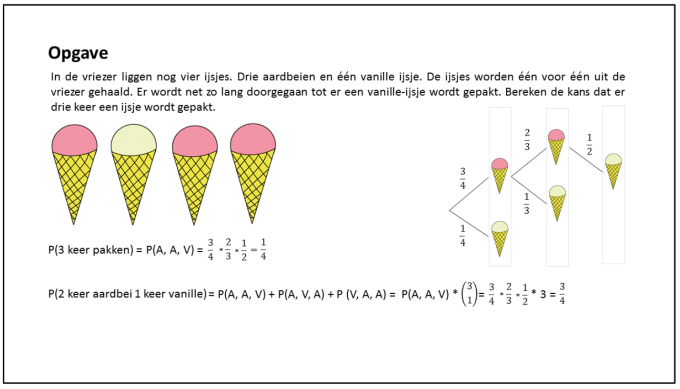
Tijd	Doel	Leerstof	Werkvorm	Activiteit Leerling	Activiteit Docent
5 min	Lesopening	-	-	-	Starten les en toelichting programma
10 min	Reflectie	Opgave 21 t/m 27	Klassikaal bespreken huiswerk (gebruik ijsjes-icoon)	Vragen stellen over gemaakte opgaven, uitwerkingen geven van gemaakte opgaven.	Uitleg geven, samen met de klas sommen uitwerken op het bord
5 min	Activeren, zelf nadenken over de opgave/situatie: waarnemen	Herhalen tot succes	Opgave op het bord (PowerPoint) individueel maken	Maken opgave op het bord.	Introduceren opgave op het bord.
5 min	Visualiseren van de opgave/situatie, bespreken waarnemingen	Herhalen tot succes	Opgave klassikaal bespreken * (PowerPoint)	Actief meedenken en antwoorden geven op vragen.	Klassikaal bespreken van de gemaakte opgave.
25 min	Oefening	Opgave 28 t/m 30	Opgaven uit het boek	Opgaven maken	Vragen beantwoorden

Vragen bij klassikaal bespreken opgave*

Is er in deze situatie sprake van verschillende mogelijkheden? Is er sprake van met of zonder terugleggen? Stel er zijn nog steeds vier ijsjes: drie aardbei en één vanille. Wat is de kans op P(2 keer aardbei en één keer vanille)? Is er in deze situatie sprake van verschillende mogelijkheden? Wat is het verschil tussen deze twee situaties? (Bij de ene is de volgorde van pakken belangrijk en bij de andere niet).

Belangrijk bij alle uitwerkingen van opgaven op het bord: eerst kans opschrijven, dan kans omschrijven in letters/codes, vervolgens concreet uitwerken en dan het antwoord berekenen.

Powerpointpresentatie les 4



Belangrijk
Leerlingen weten dat bij pakken tot succes de volgorde van pakken van belang is.

Les 5 – Vervolg, herhalen tot succes

woensdag 13 mei 2015, 4e uur

Lesdoelen
Na deze les kunnen de leerlingen:
- berekenen hoe groot de kans is op een vastgesteld aantal keer herhalen van een kansexperiment tot succes.

Lesmateriaal
Getal & Ruimte, hoofdstuk 7 Rekenen met Kansen, paragraaf 7.2: het Vaasmodel.

Opgaven
De leerlingen hebben opgave 28 t/m 30 van paragraaf 7.2 gemaakt.
Voor deze les staat opgave 31 t/m 34 van paragraaf 7.2 op het programma.

Lesplan

Tijd	Doel	Leerstof	Werkvorm	Activiteit Leerling	Activiteit Docent
5 min	Lesopening	-	-	-	Starten les en toelichting programma
20 min	Reflectie	Opgave 28 t/m 30	Klassikaal bespreken huiswerk (gebruik ijsjes-icoon)	Vragen stellen over gemaakte opgaven, uitwerkingen geven van gemaakte opgaven.	Uitleg geven, samen met de klas sommen uitwerken op het bord
25 min	Oefening	Opgave 31 t/m 34	Opgaven uit het boek	Opgaven maken	Vragen beantwoorden

Belangrijk bij alle uitwerkingen van opgaven op het bord: eerst kans opschrijven, dan kans omschrijven in letters/codes, vervolgens concreet uitwerken en dan het antwoord berekenen.

Les 6 – Trekken met of zonder terugleggen

maandag 18 mei 2015, 6e uur

Lesdoelen

Na deze les weten/begrijpen de leerlingen:

- wat het verschil is tussen trekken met terugleggen en trekken zonder terugleggen.

Na deze les kunnen de leerlingen:

- bepalen of er bij een kansexperiment sprake is van trekken met of zonder terugleggen.
- zowel voor trekken met als trekken zonder terugleggen kansen berekenen door gebruik te maken van het vaasmodel.

Lesmateriaal

Getal & Ruimte, hoofdstuk 7 Rekenen met Kansen, paragraaf 7.3: Trekken met en zonder terugleggen.

PowerPointpresentatie (zie volgende pagina).

Opgaven

De leerlingen hebben opgave 31 t/m 34 van paragraaf 7.2 gemaakt.

Voor deze les staat opgave 35, 36, 37, 39, 40 en 42 van paragraaf 7.3 op het programma.

Lesplan

Tijd	Doel	Leerstof	Werkvorm	Activiteit Leerling	Activiteit Docent
5 min	Lesopening	-	-	-	Starten les en toelichting programma
10 min	Reflectie	Opgave 31 t/m 34	Klassikaal bespreken huiswerk (gebruik ijsjes-icoon)	Vragen stellen over gemaakte opgaven, uitwerkingen geven van gemaakte opgaven.	Uitleg geven, samen met de klas sommen uitwerken op het bord
5 min	Activeren, zelf nadenken over de opgave/situatie: waarnemen	Trekken met en zonder terugleggen	Opgave op het bord (PowerPoint) individueel maken	Maken opgave op het bord.	Introduceren opgave op het bord.
5 min	Visualiseren van de opgave/situatie, bespreken waarnemingen	Trekken met en zonder terugleggen	Opgave klassikaal bespreken * (PowerPoint)	Actief meedenken en antwoorden geven op vragen.	Klassikaal bespreken van de gemaakte opgave.
5 min	Activeren, zelf nadenken over de opgave/situatie: waarnemen	Trekken met en zonder terugleggen	Situaties op het bord (PowerPoint) klassikaal bespreken **	Actief meedenken en antwoorden geven op vragen.	Klassikaal bespreken van de situaties.
20 min	Oefening	Opgave 35, 36, 37, 39, 40, 42	Opgaven uit het boek	Opgaven maken	Vragen beantwoorden

Vragen bij klassikaal bespreken opgave *

Wat is het verschil tussen de situatie met terugleggen en zonder terugleggen? -> Bij met terugleggen kan één ijsje vaker gepakt worden en bij zonder terugleggen niet.

Vragen bij klassikaal bespreken situaties **

1. Kan één jongen/meisje vaker (meer dan één keer) een tijdschrift winnen?
2. Kan één jongen/meisje vaker (meer dan één keer) aangewezen worden door de docent?
3. Kan één ijsje vanille/aardbei vaker (meer dan één keer) gepakt worden?
4. Kan één vakje rood/groen vaker (meer dan één keer) aangewezen worden?
5. Kan één van de overige gasten / iemand van Meikes groepje vaker (meer dan één keer) aangewezen worden? (Deze opgave eventueel uitwerken, is lastige opgave).

Belangrijk bij alle uitwerkingen van opgaven op het bord: eerst kans opschrijven, dan kans omschrijven in letters/codes, vervolgens concreet uitwerken en dan het antwoord berekenen.

Powerpointpresentatie les 6

Les trekken met & zonder terugleggen

6 aardbeien en 5 vanille ijsjes

TREKKEN MET TERUGLEGGEN
Pak 4 ijsjes met terugleggen
P(één vanille ijsje) = $\binom{4}{1} * P(VAAA) = \binom{4}{1} * \frac{5}{11} * \left(\frac{6}{11}\right)^3 \approx 0{,}295$

TREKKEN ZONDER TERUGLEGGEN
P(één vanille ijsje) = $\binom{4}{1} * P(VAAA) = \binom{4}{1} * \frac{5}{11} * \frac{6}{10} * \frac{5}{9} * \frac{4}{8} \approx 0{,}303$

Opgave

Trekken met of zonder terugleggen?

- (1) In een klas zitten 27 leerlingen, waarvan 10 jongens. De docent heeft 3 tijdschriften om te verloten. Bereken de kans dat alle drie de tijdschriften door een jongen worden gewonnen.
- (2) In een klas zitten 30 leerlingen, waarvan 5 meisjes. Er worden drie leerlingen aangewezen om de docent te helpen bij de open dag. Bereken de kans dat dit twee jongens en één meisje zijn.
- (3) In een doos zitten 10 ijsjes, 5 daarvan zijn vanille smaak en 5 zijn aardbeien smaak. Je pakt 4 ijsjes. Bereken de kans dat alle vier de ijsjes vanille smaak hebben.
- (4) Een schijf heeft 9 rode vakjes en één groene (allemaal even groot; even veel kans om te draaien). Je laat de schrijf 2 keer draaien. Bereken de kans dat de pijl beide keren groen aanwijst.
- (5) In een hotel is plaats voor 50 personen, door overboeking verschijnen er 55 personen, waaronder Maaike met twee vriendinnen. Vijf personen worden overgeplaatst naar een vakantiehuisje in de buurt. Bereken de kans dat Maaike en haar vriendinnen allemaal in het hotel kunnen verblijven.

Belangrijk:
Leerlingen kunnen van een situatie bepalen of er sprake is van trekken met of trekken zonder terugleggen.

Les 7 – Kleine steekproef uit grote populatie

dinsdag 19 mei 2015, 1e uur

Lesdoelen

Na deze les weten/begrijpen de leerlingen:

- waarom je bij een kleine steekproef uit grote populatie trekken zonder terugleggen op mag vatten als trekken met terugleggen.

Na deze les kunnen de leerlingen:

- bepalen of er sprake is van een kleine steekproef uit een grote populatie.
- kansen berekenen waarbij sprake is van een kleine steekproef uit een grote populatie.

Lesmateriaal

Getal & Ruimte, hoofdstuk 7 Rekenen met Kansen, paragraaf 7.3: Trekken met en zonder terugleggen.

PowerPointpresentatie (zie volgende pagina).

Opgaven

De leerlingen hebben opgave 35, 36, 37, 39, 40 en 42 van paragraaf 7.3 gemaakt.

Voor deze les staat opgave 43 t/m 46 van paragraaf 7.3 op het programma.

Lesplan

Tijd	Doel	Leerstof	Werkvorm	Activiteit Leerling	Activiteit Docent
5 min	Lesopening	-	-	-	Starten les en toelichting programma
10 min	Reflectie	Opgave 35, 36, 37, 39, 40 en 42	Klassikaal bespreken huiswerk (gebruik ijsjes-icoon)	Vragen stellen over gemaakte opgaven, uitwerkingen geven van gemaakte opgaven.	Uitleg geven, samen met de klas sommen uitwerken op het bord
10 min	Activeren, zelf nadenken over de opgave/situatie: waarnemen	Kleine steekproef uit grote populatie	Opgave op het bord (PowerPoint) individueel maken	Maken opgave op het bord.	Introduceren opgave op het bord.
5 min	Visualiseren van de opgave/situatie, bespreken waarnemingen	Kleine steekproef uit grote populatie	Opgave klassikaal bespreken * (PowerPoint)	Actief meedenken en antwoorden geven op vragen.	Klassikaal bespreken van de gemaakte opgave.
20 min	Oefening	Opgave 43 t/m 46	Opgaven uit het boek	Opgaven maken	Vragen beantwoorden

Vragen bij klassikaal bespreken opgave *

Is er bij een hoeveelheid van 10 ijsjes een groot verschil in deze kans wanneer we trekken met en trekken zonder terugleggen vergelijken? Hoe zit dat bij een hoeveelheid van 100000 ijsjes? Waarom is er bij deze grote hoeveelheid bijna geen verschil tussen trekken met en trekken zonder terugleggen? Zou er ook bijna geen verschil zijn wanneer we 50000 ijsjes pakken en de kans berekenen dat die allemaal aardbei zijn? -> Voorwaarde is dus grote hoeveelheid (groep, populatie) en kleine steekproef (klein deel, kleine steekproef, uit de populatie kiezen).

Belangrijk bij alle uitwerkingen van opgaven op het bord: eerst kans opschrijven, dan kans omschrijven in letters/codes, vervolgens concreet uitwerken en dan het antwoord berekenen.

Powerpointpresentatie les 7

Opgave

Van 10 ijsjes is 40% aardbeien smaak. Er worden 3 ijsjes gepakt.
Bereken de kans op 3 aardbeien ijsjes.

P(3 aardbeien ijsjes) = P(A, A, A) = $\frac{4}{10} * \frac{3}{9} * \frac{2}{8} \approx 0{,}03$ *Trekken zonder terugleggen*

P(3 aardbeien ijsjes) = P(A, A, A) = $\frac{4}{10} * \frac{4}{10} * \frac{4}{10} \approx 0{,}064$ *Trekken met terugleggen*

Van 100 000 ijsjes is 40% aardbeien smaak. Er worden 3 ijsjes gepakt.
Bereken de kans op 3 aardbeien ijsjes.

P(3 aardbeien ijsjes) = P(A, A, A) = $\frac{40000}{100000} * \frac{39999}{99999} * \frac{39998}{99998} \approx 0{,}064$ *Trekken zonder terugleggen*

P(3 aardbeien ijsjes) = P(A, A, A) = $\frac{40000}{100000} * \frac{40000}{100000} * \frac{40000}{100000} = 0{,}064$ *Trekken met terugleggen*

Bij een kleine steekproef uit een grote populatie mag je trekken zonder terugleggen opvatten als trekken met terugleggen.

Belangrijk

Leerlingen begrijpen wat een kleine steekproef en een grote populatie is en zien in waarom trekken zonder terugleggen in het geval van een kleine steekproef uit een grote populatie

Les 8 – Vervolg, Kleine steekproef uit grote populatie

woensdag 20 mei 2015, 4e uur

Lesdoelen

Na deze les weten/begrijpen de leerlingen:

- waarom je bij een kleine steekproef uit grote populatie trekken zonder terugleggen op mag vatten als trekken met terugleggen.

Na deze les kunnen de leerlingen:

- bepalen of er sprake is van een kleine steekproef uit een grote populatie.
- kansen berekenen waarbij sprake is van een kleine steekproef uit een grote populatie.

Lesmateriaal

Getal & Ruimte, hoofdstuk 7 Rekenen met Kansen, paragraaf 7.3: Trekken met en zonder terugleggen.

Opgaven

De leerlingen hebben opgave 43 t/m 46 van paragraaf 7.3 gemaakt.
Voor deze les staan opgave van paragraaf 47 t/m 51 van paragraaf 7.3 op het programma.

Lesplan

Tijd	Doel	Leerstof	Werkvorm	Activiteit Leerling	Activiteit Docent
5 min	Lesopening	-	-	-	Starten les en toelichting programma
20 min	Reflectie	Opgave 43 t/m 46	Klassikaal bespreken huiswerk (gebruik ijsjes-icoon)	Vragen stellen over gemaakte opgaven, uitwerkingen geven van gemaakte opgaven.	Uitleg geven, samen met de klas sommen uitwerken op het bord
25 min	Oefening	Opgave 47 t/m 51	Opgaven uit het boek	Opgaven maken	Vragen beantwoorden

Belangrijk bij alle uitwerkingen van opgaven op het bord: eerst kans opschrijven, dan kans omschrijven in letters/codes, vervolgens concreet uitwerken en dan het antwoord berekenen.

Les 9 – Formules opstellen met terugleggen

dinsdag 26 mei 2015, 1e uur

Lesdoelen

Na deze les kunnen de leerlingen:

- de formule van een kans opstellen bij trekken met terugleggen

Lesmateriaal

Getal & Ruimte, hoofdstuk 7 Rekenen met Kansen, paragraaf 7.4: Kansen en formules.

Opgaven

De leerlingen hebben opgave 47 t/m 51 van paragraaf 7.3 gemaakt.
Voor deze les staat opgave 53 t/m 55 van paragraaf 7.4 op het programma.

Lesplan

Tijd	Doel	Leerstof	Werkvorm	Activiteit Leerling	Activiteit Docent
5 min	Lesopening	-	-	-	Starten les en toelichting programma
10 min	Reflectie	Opgave 47 t/m 51	Klassikaal bespreken huiswerk (gebruik ijsjes-icoon)	Vragen stellen over gemaakte opgaven, uitwerkingen geven van gemaakte opgaven.	Uitleg geven, samen met de klas sommen uitwerken op het bord
10 min	Activeren, zelf nadenken over de opgave/situatie: waarnemen	Formules opstellen met terugleggen	Opgave op het bord (PowerPoint) individueel maken	Maken opgave op het bord.	Introduceren opgave op het bord.
5 min	Visualiseren van de opgave/situatie, bespreken waarnemingen	Formules opstellen met terugleggen	Opgave klassikaal bespreken * (PowerPoint)	Actief meedenken en antwoorden geven op vragen.	Klassikaal bespreken van de gemaakte opgave.
20 min	Oefening	Opgave 53 t/m 55	Opgaven uit het boek	Opgaven maken	Vragen beantwoorden

Vragen bij klassikaal bespreken opgave *

Hoeveel chocolade ijsjes zitten er in de eerste doos? Hoe groot kan x worden? Hoeveel vanille-ijsjes zitten er in de eerste doos? Hoe komen we aan (6-x)? Zelfde vragen voor tweede doos. Hoe kunnen we de gevraagde kans omschrijven? Hoe kunnen we deze verder uitwerken? Wat zegt de formule waar we op uit komen ons? (Stel x = 1 wat weten we dan? Stel x = 2 wat weten we dan?)

Belangrijk bij alle uitwerkingen van opgaven op het bord: eerst kans opschrijven, dan kans omschrijven in letters/codes, vervolgens concreet uitwerken en dan het antwoord berekenen.

Powerpointpresentatie les 9

Opgave

Er zijn twee dozen met ijsjes. In de eerste doos zitten 6 ijsjes: x chocolade ijsjes, de rest vanille-ijsjes. In de tweede doos zitten 4 ijsjes: ook hier weer x chocolade ijsjes, de rest vanille-ijsjes.

6 ijsjes
x chocolade
(6-x) vanille

4 ijsjes
x chocolade
(4-x) vanille

Uit elke doos wordt één ijsje gepakt. Bereken de kans op een chocolade-ijsje uit de eerste doos en een vanille ijsje uit de tweede doos.

P(chocolade-ijsje uit 1, vanille ijsje uit 2) = P(C, V) = $\frac{x}{6} * \frac{4-x}{4} = \frac{x(4-x)}{24} = \frac{4x-x^2}{24}$

Bij welke aantallen chocolade en vanille ijsjes in doos één en twee is deze kans maximaal?

Invoeren van de formule in de GR bij y_1 geeft $y_1 = \frac{4x-x^2}{24}$. Optie maximum geeft: y≈0,167 en x=2.

Dus de kans is maximaal bij 2 chocolade en 4 vanille ijsjes in doos 1, en 2 chocolade en 2 vanille ijsjes in doos 2.

Belangrijk

Leerlingen begrijpen hoe je een formule op kunt stellen bij een gegeven opgave en kunnen uitleggen welke informatie de formule ons geeft (stel x=1 dan geeft deze formule…).

Les 10 – Formules opstellen zonder terugleggen

woensdag 27 mei 2015, 4e uur

Lesdoelen

Na deze les kunnen de leerlingen:

- bepalen of er sprake is van trekken met of trekken zonder terugleggen
- de formule van een kans opstellen bij zowel trekken met terugleggen als trekken zonder terugleggen

Lesmateriaal

Getal & Ruimte, hoofdstuk 7 Rekenen met Kansen, paragraaf 7.4: Kansen en formules.

Opgaven

De leerlingen hebben opgave 53 t/m 55 van paragraaf 7.4 gemaakt.
Voor deze les staat opgave 56 t/m 58 van paragraaf 7.4 op het programma.

Lesplan

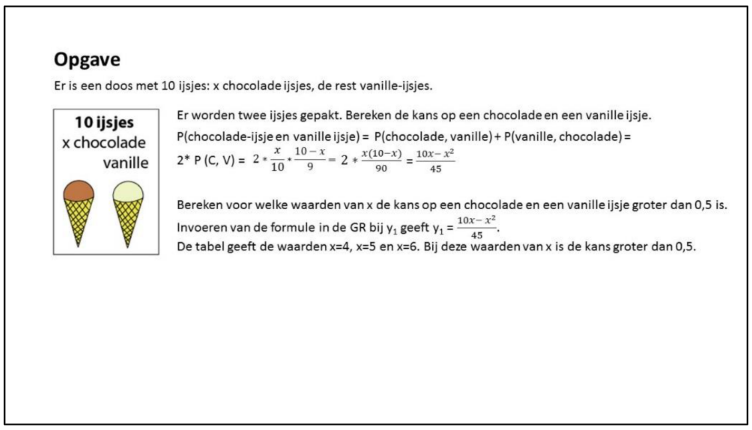
Tijd	Doel	Leerstof	Werkvorm	Activiteit Leerling	Activiteit Docent
5 min	Lesopening	-	-	-	Starten les en toelichting programma
10 min	Reflectie	Opgave 53 t/m 55	Klassikaal bespreken huiswerk (gebruik ijsjes-icoon)	Vragen stellen over gemaakte opgaven, uitwerkingen geven van gemaakte opgaven.	Uitleg geven, samen met de klas sommen uitwerken op het bord
10 min	Activeren, zelf nadenken over de opgave/situatie: waarnemen	Formules opstellen met terugleggen	Opgave op het bord (PowerPoint) individueel maken	Maken opgave op het bord.	Introduceren opgave op het bord.
5 min	Visualiseren van de opgave/situatie, bespreken waarnemingen	Formules opstellen met terugleggen	Opgave klassikaal bespreken * (PowerPoint)	Actief meedenken en antwoorden geven op vragen.	Klassikaal bespreken van de gemaakte opgave.
20 min	Oefening	Opgave 56 t/m 58	Opgaven uit het boek	Opgaven maken	Vragen beantwoorden

Vragen bij klassikaal bespreken opgave *

Hoeveel chocolade ijsjes zitten er in de doos? Hoe groot kan x worden? Hoeveel vanille-ijsjes zitten er in de doos? Hoe komen we aan (10-x)? Is er sprake van met of zonder terugleggen? Hoe kunnen we de gevraagde kans omschrijven? Hoe kunnen we deze verder uitwerken? (Eventueel aantal getallen voorbeelden) Wat zegt de formule waar we op uit komen ons? (Stel x = 1 wat weten we dan? Stel x = 2 wat weten we dan?)

Belangrijk bij alle uitwerkingen van opgaven op het bord: eerst kans opschrijven, dan kans omschrijven in letters/codes, vervolgens concreet uitwerken en dan het antwoord berekenen.

Powerpointpresentatie les 10



Belangrijk
Leerlingen begrijpen hoe je een formule op kunt stellen bij een gegeven opgave en kunnen uitleggen welke informatie de formule ons geeft (stel x=1 dan geeft deze formule…). Daarbij opnieuw van belang: onderscheid tussen trekken met en trekken zonder terugleggen kunnen maken.

Les 11 – Herhaling

maandag 1 juni 2015, 6e uur
Lesmateriaal
Getal & Ruimte, hoofdstuk 7 Rekenen met Kansen, Diagnostische Toets

Les 12 – Herhaling

dinsdag 2 juni 2015, 1e uur
Lesmateriaal
Getal & Ruimte, hoofdstuk 7 Rekenen met Kansen, Diagnostische Toets