

De invloed van een alternatieve introductie van vectoren op het vermogen tot  
abstract wiskundig redeneren bij leerlingen van 5 VWO wiskunde B

Verslag van Onderzoek van Onderwijs (10 EC)

Naam: Annelieke de Vos  
Studentnummer: s1164686  
Vak: Wiskunde

Begeleiders:  
Gerard Jeurnink & Frances Wijnen

3 december 2018

# Inhoudsopgave

|                   |                                            |           |
|-------------------|--------------------------------------------|-----------|
| 1                 | Samenvatting . . . . .                     | 2         |
| 2                 | Inleiding . . . . .                        | 2         |
| 3                 | Onderzoeksvragen . . . . .                 | 3         |
| 4                 | Theoretische kader . . . . .               | 3         |
|                   | 4.1 Abstract wiskundig redeneren . . . . . | 3         |
|                   | 4.2 De reguliere lessen . . . . .          | 4         |
| 5                 | Methode . . . . .                          | 8         |
|                   | 5.1 Respondenten . . . . .                 | 8         |
|                   | 5.2 Instrumenten . . . . .                 | 9         |
|                   | 5.3 Procedure . . . . .                    | 10        |
|                   | 5.4 Analyse . . . . .                      | 14        |
|                   | 5.5 Hypothese . . . . .                    | 14        |
| 6                 | Resultaten . . . . .                       | 15        |
| 7                 | Conclusie en discussie . . . . .           | 16        |
| <b>Appendices</b> |                                            | <b>19</b> |
| A                 | Lesplan 1 . . . . .                        | 19        |
| B                 | Lesplan 2 . . . . .                        | 20        |
| C                 | Voormeting . . . . .                       | 21        |
| D                 | Nameting . . . . .                         | 29        |

# 1 Samenvatting

Het eindexamenprogramma VWO wiskunde B bevat sinds 2015 het onderwerp vectormeetkunde. Dit heeft niet in een wiskunde eindexamenprogramma gezeten sinds de invoering van wiskunde B in 1985. Leerlingen lijken moeite te hebben met dit onderwerp, dus dit onderzoek richt zich op de invloed van een alternatieve introductie van het onderwerp vectormeetkunde op het vermogen tot abstract wiskundig redeneren. Het vermogen tot abstract wiskundig redeneren kunnen we vaststellen door het voorleggen van nieuwe variaties van problemen, waarbij leerlingen gebruik kunnen maken van al bekende problemen. De correspondenten van dit onderzoek zijn de leerlingen van de 5 VWO wiskunde B klas van het Montessori College in het schooljaar 2017 – 2018. Aan de hand van een voormeting, die het vermogen tot abstract wiskundig redeneren vaststelt, zijn twee groepen gemaakt die beide even sterk zijn. De reguliere conditie krijgt les vanuit het lesboek Getal & Ruimte waarbij kentallen direct geïntroduceerd worden. De alternatieve conditie krijgt twee introductie lessen welke zich focussen op de vrije vector. In de eerste les is er geen assenstelsel en wordt er niet gesproken over kentallen. Met behulp van het ontbinden van vectoren worden in les 2 kentallen geïntroduceerd. Na deze twee introductielessen sluiten ze zich weer aan bij de leerlingen van de regulier conditie. Aan de hand van een nameting, welke lijkt op de voormeting, wordt de invloed van de alternatieve introductie op het vermogen tot abstract wiskundig redeneren vastgesteld. Uit de t-test blijkt dat er geen significant verschil is tussen de resultaten van de reguliere conditie en de alternatieve conditie ( $t = 0.485$ ,  $p = 0.634$ ). Voor een vervolg onderzoek wordt er geadviseerd om een grotere groep correspondenten te gebruiken en de interventie te vergroten met meer lessen en bijpassend alternatief lesmateriaal.

# 2 Inleiding

Het examenprogramma wiskunde B VWO bevat sinds 2015 in het domein 'Meetkunde met coördinaten', het subdomein (E3) 'Vectoren en inproduct' (cTWO, 2012). Dit is echter niet de eerste keer dat vectormeetkunde onderdeel was van het examenprogramma op het VWO, dit kwam namelijk ook voor bij wiskunde II (Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, 1984). Wiskunde II was een keuzevak op het VWO, welke niet verplicht was voor vervolgstudies. Minder dan 5% van de leerlingen koos ervoor om dit vak te volgen (Hoogland & van Wijk, 2011). Er werden kanteekeningen geplaatst bij het onderwijzen van vectormeetkunde bij wiskunde II. Het onderdeel werd verplicht gesteld om te moderniseren, maar er was te weinig voorbereiding op het onderwerp en te weinig tijd om het te behandelen (van Wely, 1978). De introductie van het onderwerp vectormeetkunde bij wiskunde II bestaat direct uit een assenstelsel waarbij elke vector de staart in de oorsprong heeft. De kentallen worden gegeven als de  $x$  en  $y$  coördinaten van de kop van de vector. Vanuit deze basis worden de verschillende regels opgebouwd (Cohen et al., 1977). In 1985 kwam er een einde aan de verdeling wiskunde I en wiskunde II door de HEWET (Herkaveling Wiskunde I en II). In de nieuwe wiskunde programma's, wiskunde A en wiskunde B, kwam het onderwerp vectormeetkunde niet meer aan bod (Hoogland & van Wijk, 2011).

Vectormeetkunde is voor het eerst weer een onderdeel van het eindexamenprogramma VWO wiskunde B sinds 1985. Volgens vernieuwingscommissie wiskunde cTWO (2012) wordt het volgende verwacht van de leerling binnen subdomein 'Vectoren en inproduct': "De kandidaat kan met behulp van de begrippen afstand, vector en inproduct eigenschappen van figuren in het vlak afleiden en bewijzen." Dit is een verandering ten opzichte van het programma van 2007. De aandacht is verlegd van de zuivere synthetische meetkunde naar meetkunde met coördinaten en vectoren. De technieken uit de analytische en synthetische meetkunde worden gebruikt en gecombineerd als instrument. Het vak wiskunde B is bedoeld als voorbereiding op exacte universitaire vervolgstudies, zoals bètawetenschappen, technische wetenschappen en econometrie. De inhoud van het programma is hierop ingespeeld (Vernieuwingscommissie wiskunde cTWO, 2012). Dit betekent dus dat het van belang is dat leerlingen die het vak wiskunde B volgen, leren werken met vectoren met het oog op de toekomst.

Leerlingen lijken moeite te hebben met het onderwerp vectormeetkunde (Timmer & Coenen, 2017). Leerlingen kunnen wel de trucjes uitvoeren met kentallen, maar het inzicht lijkt te ontbreken. Zo ook heeft het Lesson Study Team aan de Universiteit Twente aandacht besteed aan de introductie van vectormeetkunde. Zij hebben zich vooral gericht op de introductie van het inproduct: hoe zorg je dat leerlingen het concept dat wordt gedefinieerd begrijpen en niet simpelweg het kunstje nadoen?

In dit onderzoek gaan we kijken of we door een alternatieve introductie te geven op het gebied van vectormeetkunde, het begrip van de leerlingen kunnen verbeteren.

### 3 Onderzoeksvragen

Het meetkunde onderwijs op het voortgezet onderwijs is sinds 2015 veranderd met, onder andere, de toevoeging van vectormeetkunde. Dit onderzoek zal draaien om het onderwijzen van vectormeetkunde. We ontwerpen lessen op het gebied van vectormeetkunde met daarin als hoofdzaak het begrip de vrije vector. De hoofdvraag en de bijbehorende deelvragen staan hieronder beschreven.

*In hoeverre beïnvloedt een alternatieve introductie van vectoren het vermogen tot abstract wiskundig redeneren bij leerlingen van 5 VWO wiskunde B?*

1. *Wat verstaan we onder het vermogen tot abstract wiskundig redeneren?*
2. *Hoe wordt vectormeetkunde onderwezen in 5 VWO wiskunde B met behulp van de methode Getal & Ruimte?*
3. *Hoe kunnen we bij leerlingen het begrip vrije vector eigen maken?*
4. *Wat is de impact geweest van de alternatieve introductie op de leerresultaten van leerlingen van 5 VWO wiskunde B?*

### 4 Theoretische kader

Dit onderzoek gaat over het vermogen tot abstract wiskundig redeneren. Om dit vast te kunnen stellen bij leerlingen, moet eerst worden vastgesteld wat bedoeld wordt met het vermogen tot abstract wiskundig redeneren. De te geven alternatieve introductie moet hierop inspelen. Paragraaf 4.1 behandelt wat bedoeld wordt met het vermogen tot abstract wiskundig redeneren.

Paragraaf 4.2 speelt in op de tweede deelvraag. De reguliere introductie van het onderwerp vectormeetkunde wordt gegeven vanuit het boek Getal & Ruimte (Dijkhuis et al., 2015). In deze paragraaf wordt vermeld hoe het onderwerp vectormeetkunde wordt onderwezen op het Montessori College Twente te Hengelo, waar dit onderzoek wordt uitgevoerd.

#### 4.1 Abstract wiskundig redeneren

Drijvers, van Streun en Zwaneveld (2012) omschrijven wiskundige bekwaamheid in de volgende vijf kernbegrippen:

- *Weten dat*: kennis van feiten en begrippen, reproduceren, technieken beheersen.
- *Weten hoe*: probleemaanpak, toepassen, onderzoeksvaardigheden.
- *Weten waarom*: concepten, abstracties, rijke schema's, argumenteren, overzicht.
- *Weten over weten*: reflecteren, monitoren, kennis over je eigen weten en aanpak.
- *Houding*: wiskunde leren is leuk, interessant, groei in kennis geeft voldoening, ik kan het.

Het vermogen tot abstract wiskundig redeneren is terug te zien in het kernbegrip 'weten waarom'. Leerlingen blijken vaak kennis fragmentarisch op te slaan, de samenhang tussen begrippen, methoden en abstracties ontbreekt. Dit zorgt voor complicaties bij het oplossen van problemen. Het versterken van het vermogen tot abstract wiskundig redeneren maakt een leerling bekwaam in het vak wiskunde.

De kernbegrippen van Drijvers, van Streun en Zwaneveld (2012) staan niet op zichzelf, ze zijn met elkaar verbonden. Zo zijn basisvaardigheden (weten dat) van belang om met standaard basiskennis nieuwe wiskundige begrippen en methoden te leren ontwikkelen. Deze basiskennis kan getoetst worden en de docent kan daardoor gemakkelijk controleren of een leerling dit component beschikt. Het belang van deze feitelijke kennis wordt ook benadrukt door Mayer (2007). Zonder feitelijke kennis, bijvoorbeeld 100 centimeter is gelijk aan 1 meter, kan een probleem niet worden vertaald door een leerling. Ook wordt het lastig voor een leerling als hij bepaalde technieken niet beheerst. Zo moet een leerling een relationele bewering begrijpen en vervolgens kunnen vertalen. Als het in de wiskundige vertaling al fout gaat, kan het probleem niet worden opgelost.

Daarnaast is een routine voor het oplossen van problemen (weten hoe) van belang voor het aanpakken van nieuwe onbekende problemen. Het component 'weten hoe' gaat om het aanleren van een systematische probleemaanpak. De leerling moet een routine opbouwen voor het oplossen van problemen. Zonder een oplossingsroutine is de toepassing van feiten en begrippen in nieuwe situaties, waarbij dus geen sprake is van reproductie, voor de leerling niet mogelijk. De leerling heeft dan een geïsoleerd brokje kennis. Dit levert complicaties op, omdat de leerling voor elke variatie in opgaven een nieuwe oplossingsprocedure moet aanleren. Het aanleren van het component 'weten hoe' ligt vooral in de handen van de leerling zelf, de docent is vooral een procesbegeleider (Drijvers, van Streun en Zwaneveld, 2012).

Het vermogen tot abstract wiskundig redeneren kan bepaald worden door leerlingen nieuwe varianten van problemen voor te leggen, waarbij gebruik gemaakt kan worden van de kennis die leerlingen op dat punt al behoren te bezitten, wat we kennen als transfer (Mayer, 2007). De leerling krijgt een nieuw probleem, de target, voorgelegd. Als eerst moet hij een verwant probleem, de base, herkennen welke hij al kan oplossen. Vervolgens moet de oplossingsmethode of het principe van de base afleiden. Als laatste moet de oplossingsmethode worden toegepast op de target. Voor leerlingen zijn er twee grote obstakels bij het oplossen van transfer problemen. Het eerste probleem is het niet kunnen afleiden van de oplossingsmethode of het principe van de base. Het tweede obstakel is herkennen dat een bekend uitgewerkt probleem te maken heeft met het nieuwe probleem. Door vast te stellen of een leerling in staat is om een nieuw probleem op te lossen met behulp van een base, kan bepaald worden of hij een netwerk van kennis heeft en dus het kernbegrip 'weten waarom' heeft bereikt. We zullen in het onderzoek vaststellen of de leerling dit kernbegrip heeft bereikt en dus wat zijn vermogen is tot abstract wiskundig redeneren.

## 4.2 De reguliere lessen

Vectormeetkunde wordt behandeld in twee verschillende perioden op het Montessori College Twente te Hengelo. De eerste helft in periode 2 (november t/m januari) en de tweede helft in periode 3 (januari t/m maart). Aan het einde van periode 2 wordt deze eerste helft getoetst, samen met een hoofdstuk over exponentiële en logaritmische functies.

Er zijn twee belangrijke onderdelen bij het onderwijs van vectormeetkunde bij 5 VWO wiskunde B. Aan de ene kant het boek dat gebruikt wordt en de opdrachten die hieruit gemaakt moeten worden, aan de andere kant hoe de stof wordt overgebracht door de docent.

Eerst zal het boek besproken worden. Hiervan komen de paragrafen aan bod die worden behandeld voor het onderwijzen van vectormeetkunde. Vervolgens bespreken we de reguliere lessen die de leerlingen met de alternatieve introductie niet zullen volgen.

## Het boek

Het boek dat gebruikt wordt voor het onderwijzen van vectormeetkunde op het Montessori College Twente te Hengelo in 5 VWO wiskunde B, is Getal & Ruimte: VWO B deel 3. Het gaat hier om hoofdstuk 10: Meetkunde met vectoren. De leerdoelen worden als volgt omschreven in het leerboek (Dijkhuis et al., 2015):

Wat leer je?

- Wat vectoren zijn.
- Een vectorvoorstelling opstellen van een lijn.
- Afstanden berekenen bij lijnen en cirkels met de afstandsformule.
- Het berekenen van hoeken met behulp van vectoren.
- Werken met rotaties bij vectoren.
- Rekenen met snelheid en versnelling bij bewegingsvergelijkingen.

Deze leerdoelen komen naar voren in de verschillende paragrafen van het 10<sup>de</sup> hoofdstuk. Dit hoofdstuk is onderverdeeld in zes paragrafen, maar start met een stuk voorkennis. De opbouw is als volgt:

|            |                                 |
|------------|---------------------------------|
| Voorkennis | Lijnen en afstanden             |
| 10.1       | Vectoren en lijnen              |
| 10.2       | Afstanden bij lijnen en cirkels |
| 10.3       | Vectoren en hoeken              |
| 10.4       | Vectoren en rotaties            |
| 10.5       | Bewegingen met Geogebra         |
| 10.6       | Snelheid en versnelling         |

Gedurende het experiment zullen de leerlingen de voorkennis, paragraaf 10.1, paragraaf 10.2 en paragraaf 10.3 behandeld. De inhoud van deze paragrafen wordt kort behandeld.

### *Voorkennis: lijnen en afstanden*

In deze paragraaf worden onderwerpen behandeld die leerlingen in voorgaande jaren al hebben behandeld en van belang zijn voor de nieuwe stof. Vectoren komen hier nog niet aan bod. De voorkennis behandelt lijnen en afstanden. Zo wordt er geoefend met de standaard vergelijking voor een lijn  $ax + by = c$ . Zo moet een leerling het snijpunt met de assen kunnen berekenen, de richtingscoëfficiënt kunnen berekenen en de standaardvergelijking kunnen opstellen. Het volgende onderdeel van de voorkennis gaat over de afstand van een punt tot een lijn.

### *Paragraaf 10.1: vectoren en lijnen*

Deze paragraaf bevat de introductie tot vectoren. De paragraaf begint met het optellen en aftrekken van vectoren. In de theorie wordt direct gewerkt vanuit een assenstelsel met vectoren, dus een vector wordt bepaald door zijn kentallen. Kentallen worden ook in het eerste stuk theorie geïntroduceerd. Er wordt benoemd dat een vector een richting en een lengte heeft en hoe je deze lengte kan berekenen met behulp van kentallen. Vervolgens worden zowel de parallellogramconstructie als de kop-staartconstructie uitgelegd voor het bepalen van de somvector en hoe zich dat vertaalt naar kentallen. Vervolgens wordt uitgelegd dat een vector met een getal vermenigvuldigd kan worden. Dit wordt zowel visueel weergegeven als met kentallen. Als laatste wordt uitgelegd hoe een vector ontbonden kan worden in componenten. De opdrachten die hierop volgen oefenen met de verschillende onderdelen van deze theorie. Het tweede stuk theorie gaat over de vectorvoorstelling van een lijn. In dit stuk theorie wordt de formule  $\vec{OP} = \vec{s} + \lambda\vec{r}$  geïntroduceerd met  $\vec{s}$  de steunvector en  $\vec{r}$  de richtingvector. Ook wordt er gegeven voor een lijn door de punten  $A$  en  $B$  dat  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$ . De opdrachten die hierop volgen bestaan uit het tekenen van de lijn behorende bij een vectorvoorstelling van een lijn en het opstellen van een vectorvoorstelling van een lijn bij gegeven punten.

### *Paragraaf 10.2: afstanden bij lijnen en cirkels*

De eerste helft van deze paragraaf gaat over de afstandsformule:  $d(P, k) = \frac{|ax_p + by_p - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . De leerlingen moeten een aantal keer de afstand berekenen tussen een gegeven punt en een gegeven lijn. Ook zijn er opdrachten waarbij de afstand tussen een punt en een lijn bekend is, maar het punt of de lijn onbekend is. Het tweede stuk theorie gaat over raaklijnen aan cirkels. Er wordt een voorbeeld gegeven hoe de raaklijn bepaald kan worden door in een bepaald punt  $A$  aan de cirkel  $c$  met behulp van de afstandsformule. De opdrachten die volgen zijn variaties op dit voorbeeld.

### *Paragraaf 10.3: vectoren en hoeken*

Deze paragraaf begint met theorie over de hoek tussen twee vectoren. Er wordt gebruik gemaakt van de cosinusregel, welke leerlingen al eerder hebben geleerd. De cosinusregel wordt gebruikt om het inproduct te introduceren. De opdrachten die volgen op de theorie gaan om het bepalen van het inproduct of de hoek tussen twee vectoren. Het tweede stuk theorie draait om de normaalvector. Er wordt aangetoond dat twee vectoren loodrecht op elkaar staan als hun inproduct 0 is. De opdrachten die volgen, draaien om het omschrijven van een vectorvoorstelling van een lijn in een vergelijking van de vorm  $ax + by = c$  of andersom, met behulp van de normaalvector.

## **De lessen**

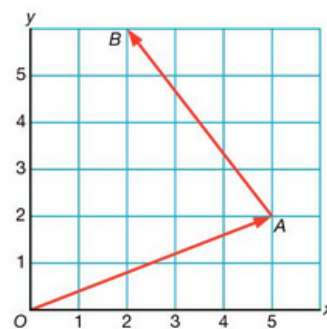
De school waar de lessen worden gegeven heeft lessen van 60 minuten. De 5 VWO wiskunde B cluster krijgt twee lessen wiskunde per week. Als er wordt gesproken over 'de docent' dan wordt hiermee de wiskunde docent van deze cluster 5 VWO wiskunde B bedoeld. Naast de lessen hebben de leerlingen de mogelijkheid zich in te schrijven voor begeleidingslessen wiskunde. Dit kan bij de verschillende bovenbouw wiskunde docenten. Bij de begeleidingslessen wordt normaliter geen klassikale uitleg gegeven en moeten leerlingen zelf om hulp vragen.

Zoals benoemd bij 'het boek' dient paragraaf 10.1 van het boek Getal & Ruimte (Dijkhuis et al., 2015) als introductie van het onderwerp vectormeetkunde. Deze paragraaf wordt in twee lessen behandeld. Aangezien deze twee lessen de introductie vormen van het onderwerp vectormeetkunde, zullen alleen deze twee lessen hier besproken worden.

### Les 1

De docent begint deze les met de oriëntatie opdracht uit het lesboek om het onderwerp vectoren te introduceren. Deze opdracht heeft hij samen met de klas behandeld. Deze oriëntatie opdracht uit Getal & Ruimte staat in Figuur 1.

- 01** Bij een wandeling in het assenstelsel hiernaast ga je eerst van  $O$  naar  $A$  en daarna van  $A$  naar  $B$ . Bereken exact de lengte van deze wandeling.



figuur 10.1

Figuur 1: Opgave 1 hoofdstuk 10 Getal & Ruimte VWO wiskunde B (Dijkhuis et al., 2015).

Vervolgens neemt de docent de theorie volgend op de oriëntatie opdracht door met de leerlingen. Zo legt de docent uit hoe een vector kan worden uitgedrukt in kentallen. Hij gebruikt hierbij als voorbeeld het figuur uit de oriëntatie opdracht. De lengte van  $\vec{OA}$  en  $\vec{AB}$  hebben de leerlingen al berekend, dus de docent hoeft alleen nog de formule te laten zien:  $\left| \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right| = \sqrt{p^2 + q^2}$ . Ook benadrukt de docent dat je te maken hebt met gelijke vectoren als ze dezelfde richting en lengte hebben.

Vervolgens laat de docent zien hoe twee vectoren kunnen worden opgeteld, zowel via het tekenen als hoe dit werkt met kentallen. De leerlingen oefenen zelf niet met het tekenen van de somvector. Ook laat de docent zowel via tekening zien hoe een vector met een scalair vermenigvuldigd kan worden als met de kentallen.

Het laatste stuk uitleg laat zien hoe een vector ontbonden kan worden in componenten bij twee gegeven rechten. De leerlingen hoeven dit zelf niet te doen.

Vervolgens kunnen de leerlingen zelf aan de slag met het huiswerk en is er mogelijkheid tot vragen stellen aan de docent.

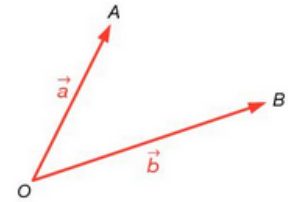
De uitleg van de docent heeft ongeveer 30 minuten geduurd en daarna hadden leerlingen dus nog ongeveer 30 minuten de tijd om zelfstandig aan opdrachten te werken.



### Les 2

Net als in les 1 begint de docent met een oriëntatie opdracht uit Getal & Ruimte welke te zien is in Figuur 2. Deze opdracht doet de docent samen met de leerlingen op het bord.

- 011 a** Teken de vectoren  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$  zoals hiernaast en teken in deze figuur  $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OE} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OF} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OG} = \vec{a} - \vec{b}$  en  $\overrightarrow{OH} = \vec{a} - 2\vec{b}$ .
- b** Wat kun je zeggen van de eindpunten van de in a getekende vectoren?



figuur 10.16

Figuur 2: Opgave 11 hoofdstuk 10 Getal & Ruimte VWO wiskunde B (Dijkhuis et al., 2015).

Met behulp van deze opdracht zullen de leerlingen zien dat alle getekende vectoren op één lijn liggen. Na deze oriëntatie opdracht legt de docent uit dat de vectorvoorstelling van een lijn gegeven wordt door  $\overrightarrow{OP} = \vec{s} + \lambda\vec{r}$ , waarbij  $\vec{s}$  de steunvector is en  $\vec{r}$  de richtingsvector. Ook laat de docent zien dat de vectorvoorstelling door de punten  $A$  en  $B$  gegeven wordt door  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$ .

Na deze uitleg hebben leerlingen de tijd om aan de slag te gaan met het huiswerk. Ook kunnen ze gedurende de rest van de les vragen stellen aan de docent.

Net als de eerste les duurde de uitleg ongeveer 30 minuten en hadden de leerlingen 30 minuten de tijd om aan het huiswerk te werken.

## 5 Methode

Zoals al kort benoemd in Paragraaf 4.2 wordt de 5 VWO wiskunde B cluster verdeeld in twee groepen. Dit zal gebeuren in de volgende twee condities:

- *Reguliere conditie:* de leerling krijgt les op de reguliere manier. Het boek Getal & Ruimte (Dijkhuis et al., 2015) zal gebruikt worden en de lessen zullen gegeven worden door de docent. De omschrijving van de inhoud van de lessen van de reguliere conditie is te vinden in Paragraaf 4.2.
- *Alternatieve conditie:* de leerling krijgt twee introductielessen volgens een alternatieve methode. Er is alternatief lesmateriaal en de lessen zullen gegeven worden door mij. De omschrijving van de inhoud van de lessen van de alternatieve conditie is te lezen in Paragraaf 5.3.

Het verschil tussen de reguliere conditie en de alternatieve conditie zijn de twee introductielessen. De rest van de stof wordt voor beide groepen op dezelfde manier behandeld door de docent.

### 5.1 Respondenten

De respondenten voor dit onderzoek zijn de 5 VWO wiskunde B cluster van het Montessori College Twente te Hengelo van het schooljaar 2017/2018. Het gaat hier om 16- en 17-jarige leerlingen. Deze cluster bestaan uit 24 leerlingen, waarvan 15 meisjes en 9 jongens.

Door afwezigheid bij één of meerdere onderdelen van het onderzoek zijn er vijf respondenten afgevallen. Resulterende in een groep van 19 leerlingen waarvan 11 in de reguliere conditie en 8 in de alternatieve conditie.

## 5.2 Instrumenten

Het experiment bestaat uit drie onderdelen, namelijk:

- Voormeting
- Lessen
- Nameting

De leerlingen van de 5 VWO wiskunde B cluster zijn onderverdeeld in de reguliere conditie en de alternatieve conditie aan de hand van de voormeting. Hoe deze verdeling heeft plaatsgevonden staat in de volgende paragraaf omschreven. Deze voormeting dient om het vermogen tot abstract wiskundig redeneren op het gebied van meetkunde te bepalen. De nameting dient om de verandering in dit vermogen te meten voor zowel de leerlingen van de reguliere conditie als voor de leerlingen van de alternatieve conditie.

### **Voormeting**

De voormeting is de start van het onderzoek. De voormeting heeft plaatsgevonden in een klassikale toets setting. De leerlingen kregen maximaal 30 minuten om de 7 vragen van de voormeting te beantwoorden. De voormeting is afgenomen tijdens de eerste helft van een wiskunde les. De vragen van de voormeting zijn allemaal op het gebied van meetkunde. Vectormmeetkunde komt niet aan bod, omdat leerlingen hier nog geen kennis van hebben. De volledige voormeting zoals de leerlingen deze hebben ontvangen is te vinden in Bijlage C.

De leerlingen zijn aan de hand van de voormeting verdeeld in twee groepen, de ene groep behorende bij de reguliere conditie en de andere bij de alternatieve conditie. Beide groepen zijn ongeveer even sterk op basis van de behaalde score in de voormeting. Dit betekent dus dat er in beide groepen zwakkere leerlingen zitten en in beide groepen sterkere leerlingen.

### **Lessen**

Tussen de voormeting en nameting volgen de leerlingen lessen over het onderwerp vectormmeetkunde. Het merendeel van de lessen zullen de leerlingen gezamenlijk volgen bij de docent. De introductie van vectormmeetkunde, behorende bij de reguliere lessen over paragraaf 10.1 van de methode Getal & Ruimte (Dijkhuis et al., 2015), zal in twee groepen behandeld worden. Deze twee lessen zullen door de leerlingen van de reguliere conditie gevolgd worden bij de docent, zoals beschreven staat in Paragraaf 4.2. De leerlingen van de alternatieve conditie zullen deze twee lessen volgen bij mij zoals beschreven staat in Paragraaf 5.3.

### **Nameting**

De nameting dient als einde van het onderzoek. Net als bij de voormeting heeft de nameting plaatsgevonden in een klassikale toets setting. Wederom kregen de leerlingen maximaal 30 minuten, maar dit maal om 8 vragen te beantwoorden. Waarbij vraag 1 tot en met 7 van de nameting overeen komen met vraag 1 tot en met 7 van de voormeting. In deze 7 vragen komt vectormmeetkunde niet aan bod, omdat de vragen moeten corresponderen met de vragen uit de voormeting. Vraag 8 van de nameting vraagt naar wat een vector is. De volledige nameting zoals de leerlingen deze hebben ontvangen is te vinden in Bijlage D.

Met behulp van de nameting kan de invloed van de alternatieve introductie op het vermogen tot abstract wiskundig redeneren bepaald worden.

### 5.3 Procedure

De helft van de 5 VWO wiskunde B klas volgt de alternatieve conditie, dus deze helft volgt twee alternatieve introductie lessen. Deze twee alternatieve introductie lessen zullen tegelijk plaatsvinden met de lessen van de reguliere conditie behorende bij Paragraaf 10.1 van Getal & Ruimte (Dijkhuis et al., 2015). Bij de alternatieve introductie lessen moet er rekening gehouden worden met het curriculum van 5 VWO wiskunde B. Dus ondanks dat de introductie alternatief is moet dezelfde stof behandeld worden als in de reguliere introductie. Het verschil zit hem in de vormgeving van de lessen en de leerstof.

De onderwerpen die aan bod moeten komen tijdens de twee introductielessen zijn (Dijkhuis et al., 2015):

- Wat is een vector
  - Een vector wordt weergegeven met een pijl
  - Een vector heeft een richting en een lengte
  - Kentallen
- Optellen en aftrekken van vectoren
  - Parallellogramconstructie
  - Kop-staartconstructie
  - Met behulp van kentallen
- Een vector vermenigvuldigen met een scalair
  - Visueel en met kentallen
- Een vector ontbinden in componenten
- De vectorvoorstelling van een lijn

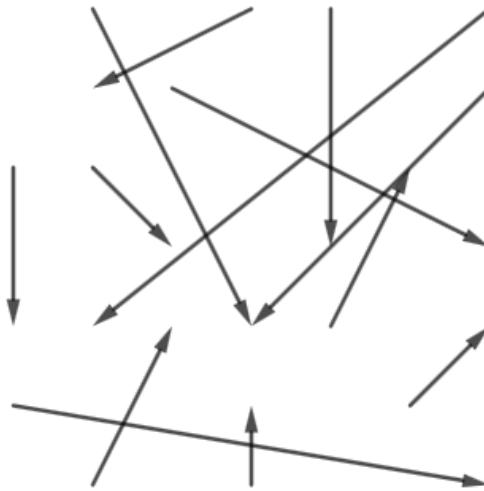
De twee lessen van de alternatieve introductie lessen zijn door mij gegeven. De inhoud van de twee lessen is hieronder beschreven.

#### Les 1

Deze eerste les draait om de kennismaking met de vrije vector. Om dit begrip echt eigen te maken wordt in deze les geen gebruik gemaakt van een assenstelsel en kentallen. Het lesplan van deze les is te vinden in Bijlage A. Zoals te zien is in het lesplan is er bijna het hele lesuur afwisseling geweest tussen klassikale uitleg en zelf werken.

De doelen van deze les worden als volgt omschreven aan de leerlingen: 'Begrijpen wat een vector is, vectoren optellen, vectoren vermenigvuldigen met een getal en een vectorvoorstelling opstellen van een lijn'.

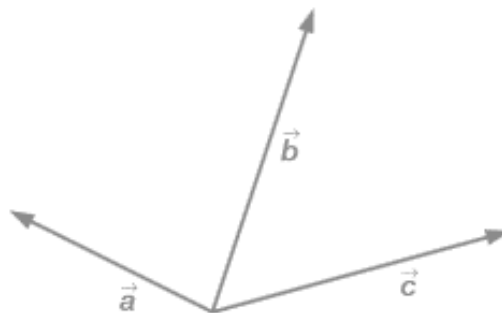
Als eerst vertel ik de leerlingen wat een vector is en dat we een vector weergeven met een pijl. Zo wordt, net als in het boek, benoemd dat een vector een lengte en een richting heeft. Net als in het lesboek van de reguliere conditie ben ik niet diep ingegaan op wat we bedoelen met lengte. Na de introductie over wat een vector is, wordt opgave 1a behandeld van de alternatieve lesstof. Figuur 3 geeft de afbeelding die de leerlingen hebben gekregen bij opgave 1a. Leerlingen moeten in deze afbeelding de vectoren zoeken die aan elkaar gelijk zijn. Met behulp van deze opgave wordt duidelijk gemaakt dat een vector geen vaste positie heeft.



Figuur 3: Afbeelding behorende bij opgave 1 van de alternatieve lesstof van les 1.

Na de uitleg van het optellen van vectoren wordt de leerlingen gevraagd opgave 3a te maken van de alternatieve lesstof. Met deze opgave kan geoefend worden met het gebruiken van de parallellogramconstructie of de kop-staartconstructie. De uitwerking wordt uiteindelijk ook op het bord gedaan, zodat leerlingen kunnen controleren of ze het echt begrijpen.

Het volgende onderwerp is het vermenigvuldigen van vectoren met een scalair. Eerst vraag ik de leerlingen hoe ze denken dat ze bepaalde vermenigvuldigingen moeten tekenen, om te kijken of ze dit al kunnen op intuïtie. Het bleek dat een aantal leerlingen dit uit zichzelf al goed deden. Opgave 5 combineert het optellen van vectoren en het vermenigvuldigen van vectoren met een scalair. Figuur 4 geeft de afbeelding die hoort bij opgave 5a: Teken de vector  $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ .



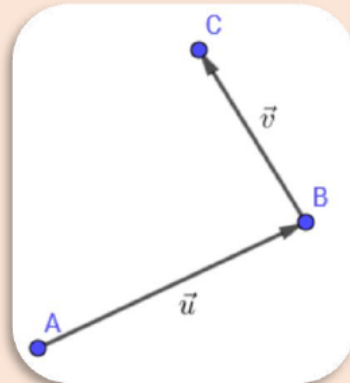
Figuur 4: Afbeelding behorende bij opgave 5 van de alternatieve lesstof van les 1.

Voor de introductie van de vectorvoorstelling van een lijn moeten leerlingen de notatie leren van een vector tussen twee punten. Daarom hebben de leerlingen het theorieblok moeten lezen uit Figuur 5. Opgave 6 in dit Figuur is om hier kort mee te oefenen.

### Punten en vectoren

In opgave 2 zagen we de vector  $\vec{u}$  getekend van punt  $A$  naar punt  $B$  en de vector  $\vec{v}$  van punt  $B$  naar punt  $C$ . Het bijbehorende plaatje zie je in Figuur 7.

De vector  $\vec{u}$  zouden we ook kunnen schrijven als  $\overrightarrow{AB}$ , omdat deze vector van punt  $A$  naar punt  $B$  gaat. Zo zouden we de vector  $\vec{v}$  ook kunnen schrijven als  $\overrightarrow{BC}$ , omdat deze vector van punt  $B$  naar punt  $C$  gaat. De somvector van  $\vec{u}$  en  $\vec{v}$  loopt van punt  $A$  naar punt  $C$ , dus  $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .



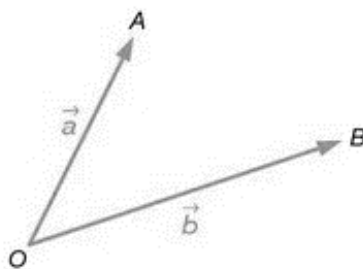
Figuur 7

### Opgave 6

- Uit de kop-staartconstructie volgt  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ . Licht dit toe met een tekening.
- Vul in  $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \dots$
- Vul in  $\overrightarrow{DE} + \dots = \overrightarrow{DF}$
- Vul in  $\dots + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL}$

Figuur 5: Theorieblok over vectoren tussen punten en opgave 6 van de alternatieve lesstof van les 1.

Direct na het maken van opgave 6 wordt van de leerlingen verwacht om opgave 7 te maken, welke draait om de vectorvoorstelling van een lijn. Figuur 6 geeft het plaatje wat leerlingen krijgen waarbij ze een aantal vectoren moeten tekenen:  $\vec{OC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ ,  $\vec{OD} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{OE} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{OF} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ ,  $\vec{OG} = \vec{a} - \vec{b}$  en  $\vec{OH} = \vec{a} - 2\vec{b}$ . Daarna wordt gevraagd wat ze opvalt aan de eindpunten van de getekende vectoren. De hoop is dat leerlingen op deze manier zelf ontdekken dat deze punten allemaal op een lijn liggen.



Figuur 6: Afbeelding behorende bij opgave 7 van de alternatieve lesstof van les 1.

Nadat de leerlingen zelf deze opgave hebben gemaakt is dit klassikaal besproken, gevolgd door een korte uitleg over de vectorvoorstelling van een lijn.

Tot slot hadden de leerlingen nog tijd om aan het huiswerk te werken en in de laatste paar minuten van de les is nog een keer kort samengevat wat er tijdens deze les is besproken.

## Les 2

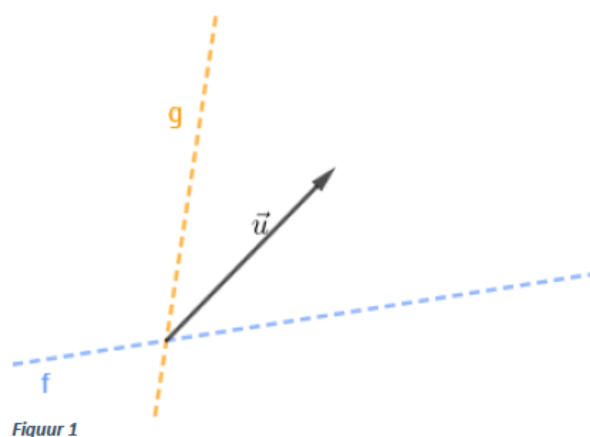
Deze tweede les leren leerlingen gebruik te maken van kentallen en wat dat betekent voor de onderwerpen die in les 1 zijn behandeld. Het lesplan van deze les is te vinden in Bijlage B. Zoals te zien is in het lesplan, is er bijna het hele lesuur afwisseling geweest tussen klassikale uitleg en een stukje zelf werken.

De doelen van deze les worden als volgt omschreven aan de leerlingen: 'Vectoren kunnen ontbinden en werken met kentallen'.

Na de opening moeten de leerlingen individueel opgave 1 maken van de lesstof, welke te zien is in Figuur 7. Met deze opgave leren de leerlingen vectoren te ontbinden, waarbij ze inzien dat dit verband houdt met het optellen van vectoren. De opdracht wordt vervolgens klassikaal besproken, zodat leerlingen kunnen checken of het ontbinden goed is gegaan.

### Opgave 1

- Wat zijn de twee methodes om de somvector te tekenen van twee gegeven vectoren? Geef een korte omschrijving hoe deze methodes werken.
- Gegeven de vector  $\vec{u}$  en twee rechten  $f$  en  $g$ . Teken een parallellogram met één zijde op  $f$  en één zijde op  $g$  en met  $\vec{u}$  als diagonaal in Figuur 1.



- Gegeven  $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ . De vector  $\vec{a}$  ligt op  $f$  en de vector  $\vec{b}$  ligt op  $g$ , teken  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$  in Figuur 1.

Figuur 7: Opgave 1 van de alternatieve lesstof van les 2.

Het leren ontbinden van vectoren is van belang voor de introductie van kentallen. Door het maken van opgave 3 maken leerlingen kennis met kentallen. In deze opgave moet een vector ontbonden worden op de  $x$ -as ( $\vec{x}$ ) en de  $y$ -as ( $\vec{y}$ ), waarbij het  $x$  coördinaat van de vector  $\vec{x}$  gegeven moet worden en het  $y$  coördinaat van de vector  $\vec{y}$  gegeven moet worden. Aan de hand van de resultaten van deze opgaven leg ik het begrip kentallen uit aan de leerlingen. Daarna laat ik ook zie hoe de lengte van een vector berekend kan worden.

De leerlingen moeten vervolgens zelf aan opgaves 4 en 5 werken. Opgave 4 is om te laten zien dat de positie binnen het assenstelsel geen verschil maakt in de kentallen behorende bij een vector. In opgave 5 leren de leerlingen hoe optelling van vectoren en vermenigvuldiging met een scalair werken met kentallen. De leerlingen kwamen hier allemaal uit, dus extra uitleg was niet nodig.

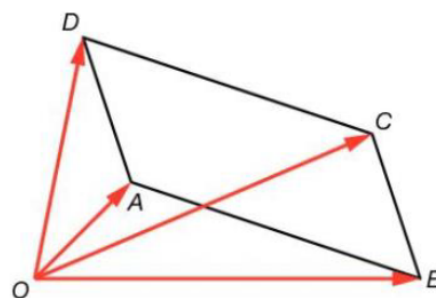
Opgave 8 wordt gezamenlijk gemaakt. In deze opgaven moeten een aantal vectorvoorstellingen worden opgesteld. Één van de opdrachten is: 'Stel de vectorvoorstelling op van de lijn  $m$  door de punten  $E(0, 3)$  en  $F(-4, 0)$ '.

Na deze opgave wordt er door leerlingen gevraagd om opgave 10 van les 1 gezamenlijk te maken. Deze opgave is te vinden in Figuur 8.

#### Opgave 10

Gegeven zijn de vectoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  en  $\vec{d}$  die vanuit  $O$  de hoekpunten van het parallellogram  $ABCD$  aanwijzen.

- Licht toe dat  $\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + \lambda(\vec{c} - \vec{d})$  een vectorvoorstelling is van de lijn door de middens van de zijden  $AD$  en  $BC$ .
- Stel een vectorvoorstelling op van de lijn
  - $k$  door  $A$ , die evenwijdig is met  $BD$
  - $l$  door  $B$  en het midden van de zijde  $CD$
  - $m$  door het snijpunt van de diagonalen, die evenwijdig is met  $BC$ .
- Welke lijn heeft als vectorvoorstelling
  - $\vec{e} = \vec{b} + \lambda(\vec{c} - \vec{a})$
  - $\vec{f} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \lambda(\vec{b} - \vec{d})$
  - $\vec{g} = \vec{a} + \lambda(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a})$



Figuur 8: Opgave 10 van de alternatieve lesstof van les 1.

In de afsluiting wordt kort samengevat wat de afgelopen twee lessen is behandeld.

## 5.4 Analyse

Om de impact van de alternatieve introductie op de leerresultaten van leerlingen van 5 VWO wiskunde B te bepalen, moet de nameting ten opzichte van de voormeting geanalyseerd worden. Deze analyse is gedaan met behulp van het programma SPSS. Er moet bepaald worden of er een significant verschil is in de resultaten van deze reguliere conditie en de alternatieve conditie. Om dit te bepalen zal er eerst een normality check gedaan worden. Als de voormeting en de nameting normaal verdeeld zijn, zal er een t-test gedaan worden. Als deze metingen niet normaal verdeeld zijn zal er een Mann-Whitney test gedaan worden (A. Field, 2009).

## 5.5 Hypothese

De alternatieve introductie op het gebied van vectoren zal draaien om het begrip vrije vector eigen te maken bij leerlingen. De verwachting is dat leerlingen die de alternatieve introductie volgen, ten opzichte van de leerlingen die de reguliere introductie volgen volgens de methode Getal & Ruimte (Dijkhuis et al., 2015), een beter vermogen tot abstract wiskundig redeneren hebben.

## 6 Resultaten

De resultaten op de verschillende deelvragen van de onderzoeksvraag uit Paragraaf 3 zullen hier gegeven worden.

De eerste deelvraag vraagt naar wat we verstaan onder het vermogen tot abstract wiskundig redeneren. Een leerling die een sterk vermogen heeft tot abstract wiskundig redeneren, heeft een netwerk van kennis en ziet de verbanden tussen verschillende wiskundige onderwerpen. Dit kan getoetst worden door leerlingen nieuwe problemen voor te leggen, waarbij gebruik gemaakt kan worden van alle kennis die tot dat punt is opgebouwd.

Met de tweede deelvraag wordt vastgesteld hoe vectormeetkunde onderwezen wordt in 5 VWO wiskunde B. Het boek *Getal & Ruimte* (Dijkhuis et al., 2015) wordt op het Montessori College Twente te Hengelo gebruikt als leidraad. De indeling van het boek wordt gevolgd door de docent. De theorie in het boek wordt klassikaal uitgelegd en dit wordt geïntroduceerd door de oriëntatie opdrachten uit het lesboek.

Deelvraag drie vraagt hoe het begrip vrije vector eigen gemaakt kan worden. Dit wordt gedaan door het gebruik van een assenstelsel en kentallen uit te stellen. De eerste les van de alternatieve conditie wordt er door middel van tekeningen duidelijk gemaakt dat de positie van de vector niet vaststaat, maar wel zijn richting en lengte. Ook de verschillende bewerkingen (optellen van vectoren, vector vermenigvuldigen met een scalair, opstellen van de vectorvoorstelling van een lijn) worden behandeld zonder gebruik van een assenstelsel. De kentallen worden geïntroduceerd door zelf de oorsprong van het assenstelsel te kiezen en een vector te ontbinden. Leerlingen zien hiermee dat we er zelf voor kunnen kiezen om de staart van een vector in de oorsprong van het assenstelsel te zetten.

Voor de vierde deelvraag moeten de leerresultaten geanalyseerd worden zoals beschreven staat in Paragraaf 5.4. Uit de normality check (Shapiro-Wilk) blijkt dat de voormeting ( $p = 0.232$ ,  $w = 0.937$ ) en de nameting ( $p = 0.565$ ,  $w = 0.960$ ) beiden normaal verdeeld zijn. Hieruit volgt dat een t-test gedaan moet worden om te bepalen of er een significant verschil is tussen de reguliere conditie en de alternatieve conditie. De Levene's test is niet significant ( $\alpha = 0.840$ ), dus kunnen we aannemen dat de variantie van beide condities gelijk is. Uit de t-test kunnen we nu concluderen dat er geen significant verschil is tussen de resultaten van de reguliere conditie en de alternatieve conditie ( $t = 0.485$ ,  $p = 0.634$ ). Tabel 1 laat de gemiddelde scores zien van de voor- en nameting van zowel de alternatieve conditie als de reguliere conditie. Uit de nameting is één vraag geschrapt, ter waarde van drie punten, omdat er een fout in de vraag zat.

|                                         |       |                                       |       |
|-----------------------------------------|-------|---------------------------------------|-------|
| Gemiddelde Score Voormeting Alternatief | 17,88 | Gemiddelde Score Nameting Alternatief | 16,25 |
| Gemiddelde Score Voormeting Regulier    | 19,27 | Gemiddelde Score Nameting Regulier    | 16,36 |

Tabel 1: Gemiddelde scores van de voor- en nameting van de alternatieve conditie en de reguliere conditie.



## 7 Conclusie en discussie

Uit de resultaten blijkt dat er geen significant verschil gevonden is in de leerresultaten van de reguliere conditie en de alternatieve conditie. Er is geen significante verbetering in de leerresultaten, waardoor we niet kunnen stellen dat de alternatieve introductie voor verbetering heeft gezorgd. De interventie van dit onderzoek was slechts twee lessen. Het kan zijn dat alternatief lesmateriaal over het hele hoofdstuk wel invloed kan hebben op het vermogen tot abstract wiskundig redeneren. Hierbij kan het gebruik van een assenstelsel en kentallen ook een aantal lessen worden uitgesteld, zodat er nog meer nadruk kan komen op het beeld van de vrije vector.

Tabel 2 geeft de gemiddelde scores weer van de voormeting en de nameting van zowel de alternatieve conditie als de reguliere conditie, maar ook van alle correspondenten samen. Als we de voormeting en de nameting met elkaar vergelijken zien we dat 9 van de 19 leerlingen achteruit zijn gegaan op vraag 1 en slechts 4 leerlingen hebben 1 punt meer gehaald op deze vraag. Dit resulteert in een lager gemiddelde op de nameting voor vraag 1. In de voormeting wordt gevraagd om aan te geven of bepaalde figuren congruent zijn. In de nameting wordt gevraagd om aan te geven of bepaalde figuren gelijkvormig zijn. In beide gevallen wordt er een voorbeeld gegeven met driehoeken. Gelijkvormigheid hebben leerlingen veel gehad met driehoeken, terwijl congruentie nauwelijks aan bod is gekomen in het verleden. Het zou kunnen dat leerlingen het moeilijk vinden om gelijkvormigheid te vertalen naar andere figuren, omdat ze dit sterk verbinden met driehoeken.

|                                                   | Vraag 1 | Vraag 2 | Vraag 3 | Vraag 4 | Vraag 5 | Vraag 6 | Vraag 7 |
|---------------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Gemiddelde score voormeting alternatieve conditie | 6,38    | 1,00    | 2,63    | 2,13    | 2,50    | 0,75    | 2,50    |
| Gemiddelde score nameting alternatieve conditie   | 5,50    | 0,88    | 3,00    | 2,88    | X       | 1,25    | 2,75    |
| Gemiddelde score voormeting reguliere conditie    | 6,55    | 0,64    | 2,82    | 1,45    | 2,73    | 2,55    | 2,55    |
| Gemiddelde score nameting reguliere conditie      | 6,00    | 0,82    | 2,82    | 1,73    | X       | 2,18    | 2,82    |
| Gemiddelde score voormeting alle correspondenten  | 6,47    | 0,79    | 2,74    | 1,74    | 2,63    | 1,79    | 2,53    |
| Gemiddelde score nameting alle correspondenten    | 5,79    | 0,84    | 2,89    | 2,21    | X       | 1,79    | 2,79    |

Tabel 2: Gemiddelde scores van de voor- en nameting van de alternatieve conditie, de reguliere conditie en alle correspondenten samen per vraag.

Suggesties voor verbetering van dit onderzoek stel ik voor dat er de volgende keer:

1. een grotere groep respondenten wordt betrokken. In totaal waren er voor dit onderzoek 19 correspondenten. Dit is een zeer kleine populatie en niet representatief voor alle VWO leerlingen met wiskunde B. Het onderzoek moet dus op grotere schaal worden uitgevoerd.
2. meer lessen te vervangen. Het alternatief lesmateriaal kan uitgebreid worden voor meer lessen, met voorkeur alle lessen. Hierdoor is er meer vrijheid om het lesmateriaal optimaal in te delen en zal de interventie mogelijk meer effect hebben.

# Bibliografie

- [1] Cohen, K.H., Van Dop, A., Groeneveld, B., Van der Horst, L.W., Jonkman, W., Kok, M.E., . . . Walters, N.B. (1977). *Sigma 45h: Vectormeetkunde en Statistiek*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- [2] Dijkhuis, J. H., Admiraal, C. J., Verbeek, J. A., De Jong, G., Houwing, H. J., Kuis, J. D., . . . Cornelisse, I. (2015). *Getal & Ruimte: VWO B deel 3*. Groningen: Noordhoff.
- [3] Drijvers, P., Van Streun, A. & Zwaneveld, B. (2012). *Handboek wiskundendidactiek*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.
- [4] Hoeksema, R. & Koolenbrander, R. (2015). *Lessen “vectoren” – bijstelling maart 2015*.
- [5] Hoogland, K. & Van Wijk, P. (2011, 1 juli). *Wiskunde in de bovenbouw van havo en vwo*. Geraadpleegd van <https://www.onderwijsraad.nl/upload/documents/publicaties/volledig/apsnotitie-wiskunde-bovenbouw-hv.pdf>
- [6] Field, A. (2009). *Discovering Statistics using SPSS*. Londen: Sage Publications.
- [7] Mayer, R.E. (2007). *Learning and Instruction*. New York: Pearson Education.
- [8] Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (1984). *Euclides: Maandblad voor de didactiek van de wiskunde*, 60(1).
- [9] Timmer, M. & Coenen, T. (2017, mei). *Introductie van het inproduct*. Geraadpleegd van [https://ris.utwente.nl/ws/files/12168778/Mark\\_Timmer\\_Tom\\_Coenen\\_v2.pdf](https://ris.utwente.nl/ws/files/12168778/Mark_Timmer_Tom_Coenen_v2.pdf)
- [10] Vernieuwingscommissie wiskunde cTWO (2012). *Denken & doen: wiskunde op havo en vwo per 2015*. Utrecht: commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs.
- [11] Van Wely, H.A. (1978). *Vectormeetkunde of meetkunde met vectoren*. Euclides: Maandblad voor de didactiek van de wiskunde, 53(3).

# Bijlages

## A Lesplan 1

| Wat?                            | Omschrijving                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Tijd   |
|---------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Opening                         | Leerlingen komen de klas binnen. Ik vertel de leerlingen wat we gaan doen deze les en wat het doel van de les is (powerpoint: overzicht). Vervolgens deel ik de lesstof uit: Vectoren en lijnen (les 1).                                                                                                                                                                                                                                              | 7 min  |
| Vectoren                        | Ik geef de leerlingen een introductie over wat een vector is. Hierbij is het belangrijk om te benoemen dat een vector een richting en een lengte heeft, maar geen vaste positie (laten zien met vector die zich verplaatst). Vervolgens benoemen dat een vector dus met een pijl wordt weergegeven en dat met een pijltje boven de letter een vector wordt aangeduid.                                                                                 | 5 min  |
| Opgave 1                        | Ik vraag de leerlingen om van de lesstof 1a erbij te pakken en deze opgave te maken. Hand opsteken als je de gelijke vectoren hebt gevonden. Als ongeveer de helft van de klas hand heeft opgestoken een leerling vragen om de vectoren op het bord aan te wijzen.                                                                                                                                                                                    | 4 min  |
| Vectoren optellen               | Ik geef de leerlingen uitleg over de twee methodes voor het optellen van vectoren (parallelogramconstructie en kopstaartconstructie).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 6 min  |
| Opgave 3                        | Ik vraag de leerlingen eerst zelf opgave 3a te maken (3 min). Als ze klaar zijn moeten ze hun oplossing vergelijken met een klasgenoot (2 min). Daarna zal ik de opdracht snel uitwerken op het bord.                                                                                                                                                                                                                                                 | 7 min  |
| Vectoren vermenigvuldigen       | Op het bord wordt een vector $\vec{a}$ afgebeeld. Ik vraag de leerlingen eerst hoe ze denken dat ze $2\vec{a}$ moeten tekenen (leerling op bord laten tekenen). Daarna vraag ik hoe ze denken dat $-\vec{a}$ getekend zou moeten worden (leerling op het bord laten tekenen).                                                                                                                                                                         | 8 min  |
| Opgave 5                        | Ik ga opgave 5 samen met de leerlingen op het bord doen. Hierbij vraag ik vooral hoe de leerlingen dit zouden aanpakken. Wat ga je als eerst doen?                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 7 min  |
| Opgave 6 en 7                   | Leerlingen moeten zelf het kader 'punten & vectoren' lezen en vervolgens aan de slag met opgave 6 en 7. Hier krijgen ze ongeveer 8 minuten voor. Ik neem vervolgens opgave 6 met de leerlingen door. Daarna laat ik de slide zien waar de verschillende vectoren zijn getekend (slide 2 van opgave 6 + 7). En vraag ik ze wat er opvalt aan de eindpunten van deze vectoren. Op deze manier ontdekken ze zelf dat deze eindpunten op één lijn liggen. | 10 min |
| Vectorvoorstelling van een lijn | Ik geef nog even kort weer wat de steunvector is, wat de richtingsvector is en hoe we de vectorvoorstelling van een lijn opschrijven.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 3 min  |
| Huiswerk                        | Ik benoem het huiswerk wat de leerlingen af moeten hebben voor vrijdag 12 januari.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 1 min  |
| Afsluiting les                  | Ik benoem kort wat we deze les hebben behandeld en wat we de volgende les gaan behandelen. Leerlingen zullen daar al zien dat er overlappende thema's zijn.                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 2 min  |

## B Lesplan 2

| <b>Wat?</b>                        | <b>Omschrijving</b>                                                                                                                                                                                      | <b>Tijd</b> |
|------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| Opening                            | Leerlingen komen de klas binnen. Ik vertel de leerlingen wat we gaan doen deze les en wat het doel van de les is (powerpoint: overzicht). Vervolgens deel ik de lesstof uit: Vectoren en lijnen (les 2). | 7 min       |
| Opgave 1                           | Ik laat leerlingen aan de eerste opgave werken, hier geef ik ze ongeveer 5 minuten voor. Daarna bespreek ik de opdracht klassikaal.                                                                      | 8 min       |
| Vectoren ontbinden                 | Ik geef nog even kort weer wat de stappen zijn voor het ontbinden van vectoren.                                                                                                                          | 3 min       |
| Opgave 3                           | Ik laat de leerlingen opgave 3 in ongeveer 5 minuten maken.                                                                                                                                              | 5 min       |
| Kentallen                          | Ik laat de uitwerking van opgave 3 zien op het bord. Met behulp van deze opgave ga ik toewerken naar kentallen. Ook leg ik uit hoe je de lengte van een vector kan berekenen.                            | 8 min       |
| Opgave 4 en 5                      | De leerlingen gaan deze opgaven zelf maken. Als er vragen zijn zal ik uitleg geven. Ondertussen kijk ik het gemaakte huiswerk van de les ervoor door van de leerlingen.                                  | 15 min      |
| De vectorvoorstelling van een lijn | Ik herhaal kort wat we de vorige les hebben geleerd over de vectorvoorstelling van een lijn. Hierbij laat ik zien hoe de vectorvoorstelling van een lijn eruit ziet met kentallen.                       | 5 min       |
| Opgave 8                           | Ik ga deze opgave samen met de leerlingen maken.                                                                                                                                                         | 6 min       |
| Huiswerk                           | Ik vertel de leerlingen dat ze de opgaven die we nog niet hebben gedaan uit het boekje als huiswerk hebben.                                                                                              | 1 min       |
| Afsluiting                         | Ik herhaal wat we hebben geleerd de afgelopen twee lessen.                                                                                                                                               | 2 min       |

## **C   Voormeting**

De volgende pagina's geven de voormeting weer zoals de correspondenten deze hebben gekregen.

## Toets 5 VWO wiskunde B

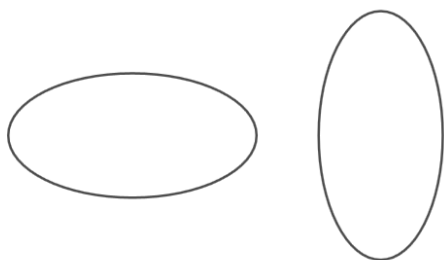
Naam: \_\_\_\_\_

### Vraag 1

Zijn de volgende figuren congruent? Omcirkel het juiste antwoord.

*Congruentie betekent bijvoorbeeld bij twee driehoeken dat overeenkomstige zijden gelijk zijn.*

- |                                                      |          |
|------------------------------------------------------|----------|
| a) Twee cirkels met dezelfde straal.                 | Ja / Nee |
| b) Twee rechthoeken met dezelfde oppervlakte.        | Ja / Nee |
| c) Twee gelijkbenige driehoeken met dezelfde omtrek. | Ja / Nee |
| d) Twee lijnstukken van dezelfde lengte.             | Ja / Nee |
| e)                                                   | Ja / Nee |



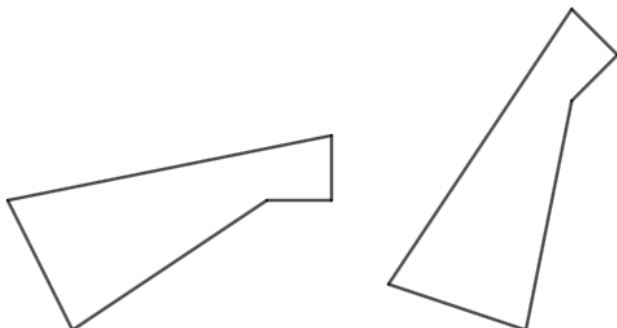
- |    |          |
|----|----------|
| f) | Ja / Nee |
|----|----------|



- |    |          |
|----|----------|
| g) | Ja / Nee |
|----|----------|



- |    |          |
|----|----------|
| h) | Ja / Nee |
|----|----------|



**Vraag 2**

Gegeven is driehoek ABC.

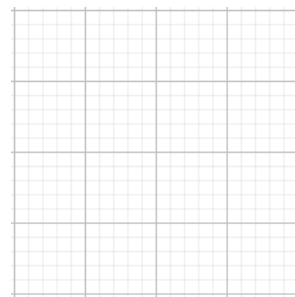
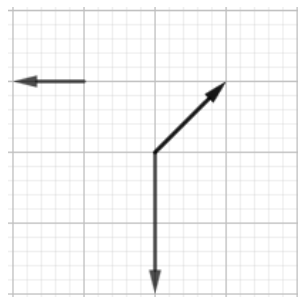
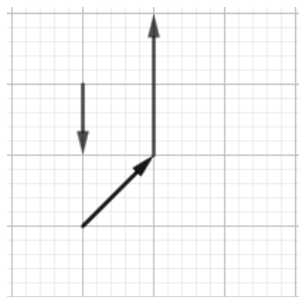
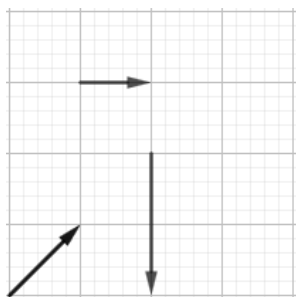
Punt M ligt op AC, zo dat  $|AM| = 3 \cdot |MC|$  en punt N ligt op BC, zo dat  $|BN| = 3 \cdot |NC|$ .

Is dan MN altijd evenwijdig aan AB? Geef aan hoe je tot je antwoord bent gekomen.



**Vraag 3**

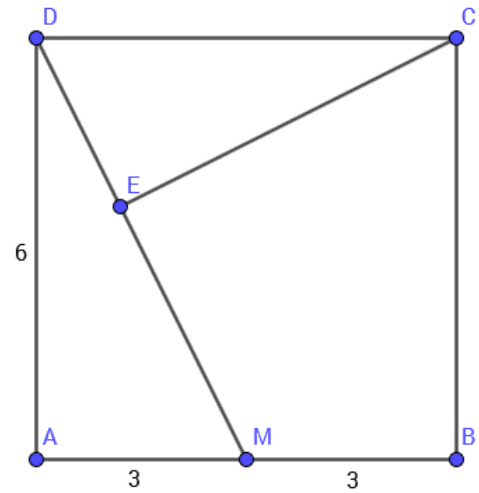
Teken de volgende in de reeks.



**Vraag 4**

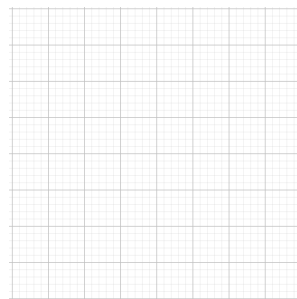
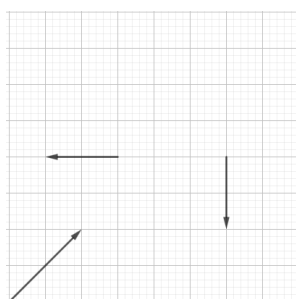
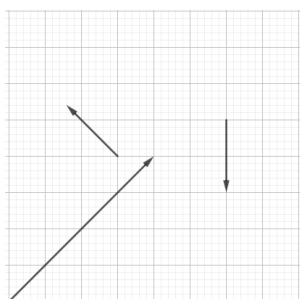
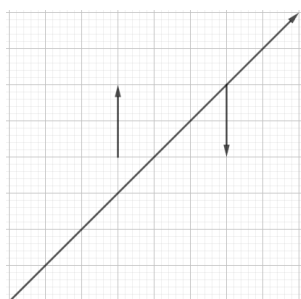
In het vierkant ABCD met zijde 6 is punt M het midden van de zijde AB. Punt E is zo gekozen dat  $\angle DEC = 90^\circ$ .

Welke hoeken zijn gelijk aan elkaar? Wees zo compleet mogelijk en geef aan hoe je tot je antwoord bent gekomen.



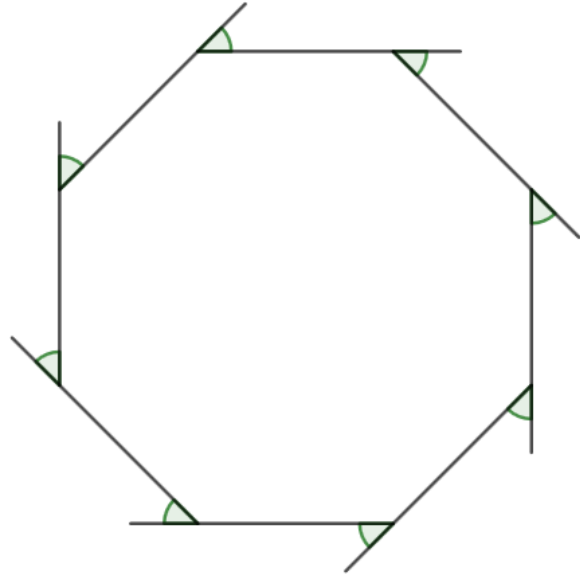
**Vraag 5**

Teken de volgende in de reeks.



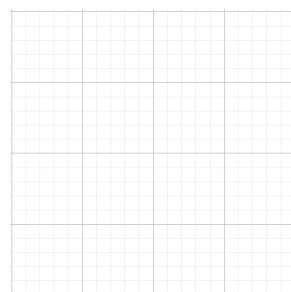
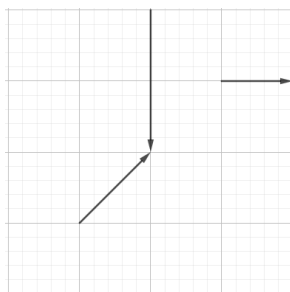
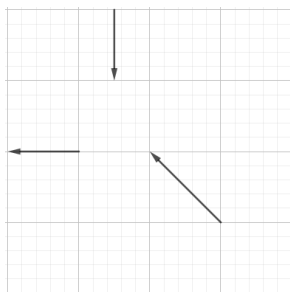
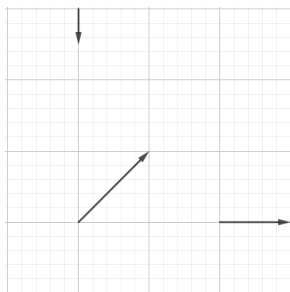
**Vraag 6**

Gegeven een regelmatige achthoek. Hoeveel is de som van alle buitenhoeken (groen)?  
Geef aan hoe je tot je antwoord bent gekomen.



**Vraag 7**

Teken de volgende in de reeks.



## D Nameting

De volgende pagina's geven de nameting weer zoals de correspondenten deze hebben gekregen.

Tijdens de nameting is de correspondenten verteld dat bij de vragen 3, 5 en 7 de volgende in de reeks wordt gevraagd.

Vraag 5 is geschrapt uit de nameting, omdat er in het tweede figuur een fout zit.

## Toets 5 VWO wiskunde B

Naam: \_\_\_\_\_

### Vraag 1

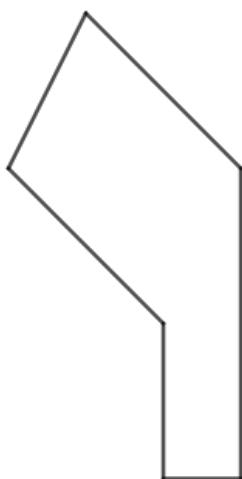
Zijn de volgende figuren gelijkvormig? Omcirkel het juiste antwoord.

*Gelijkvormig betekent bijvoorbeeld bij twee driehoeken dat de overeenkomstige hoeken gelijk zijn.*

- a) Twee rechthoeken met dezelfde oppervlakte. Ja/Nee
- b) Twee cirkels met verschillende straal. Ja/Nee
- c) Twee lijnstukken Ja/Nee
- d) Twee gelijkbenige driehoeken waarvan de omtrek van driehoek 1 2 keer zo groot is als de omtrek van driehoek 2 Ja/Nee
- e) Ja/Nee



f)



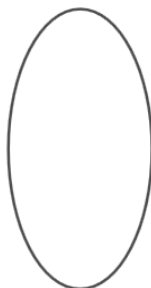
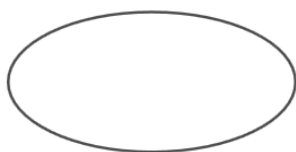
Ja/Nee

g)



Ja/Nee

h)



Ja/Nee

**Vraag 2**

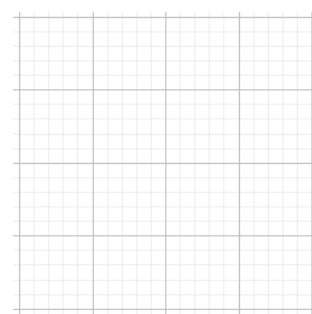
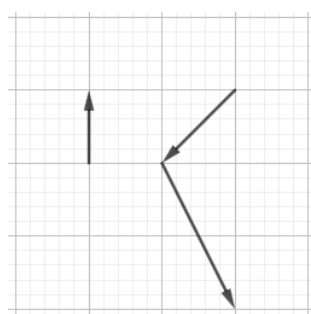
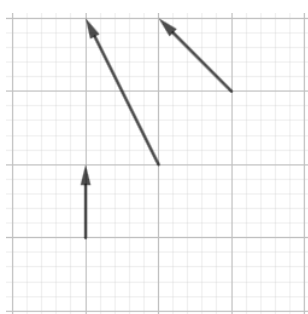
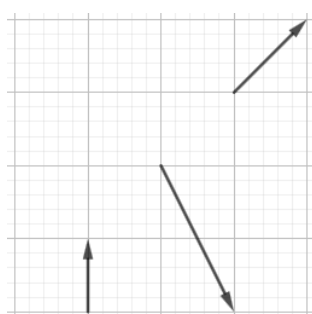
Gegeven is driehoek ABC.

Punt M ligt op AC, zo dat  $|AM| = \frac{1}{4}|MC|$  en punt N ligt op BC, zo dat  $|BN| = \frac{1}{4}|NC|$ .

Is dan MN altijd evenwijdig aan AB? Geef aan hoe je tot je antwoorde bent gekomen.



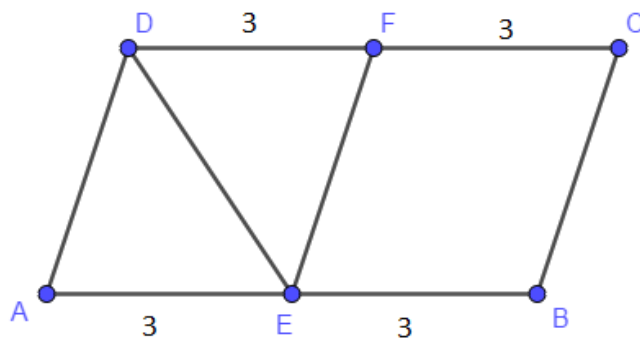
**Vraag 3**



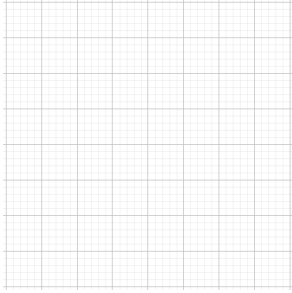
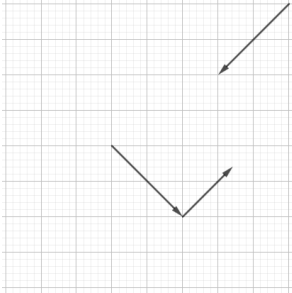
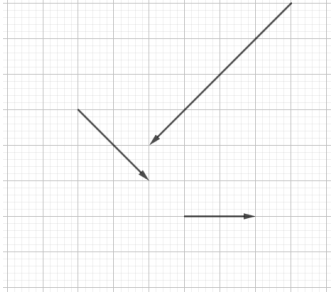
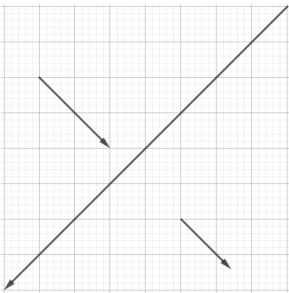
**Vraag 4**

Gegeven het parallellogram ABCD met  $|AB| = |CD| = 6$ . Punt E is het midden van zijde AB en punt F is het midden van zijde CD. Ook zijn er twee lijnstukken: DE en EF. Zie het figuur.

Welke hoeken zijn gelijk aan elkaar? Wees zo compleet mogelijk en geef aan hoe je tot je antwoord bent gekomen.

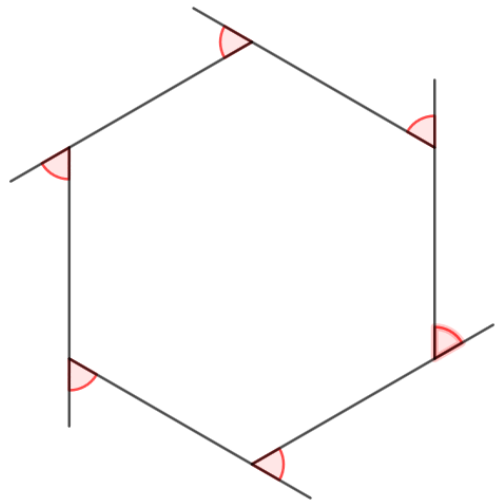


**Vraag 5**

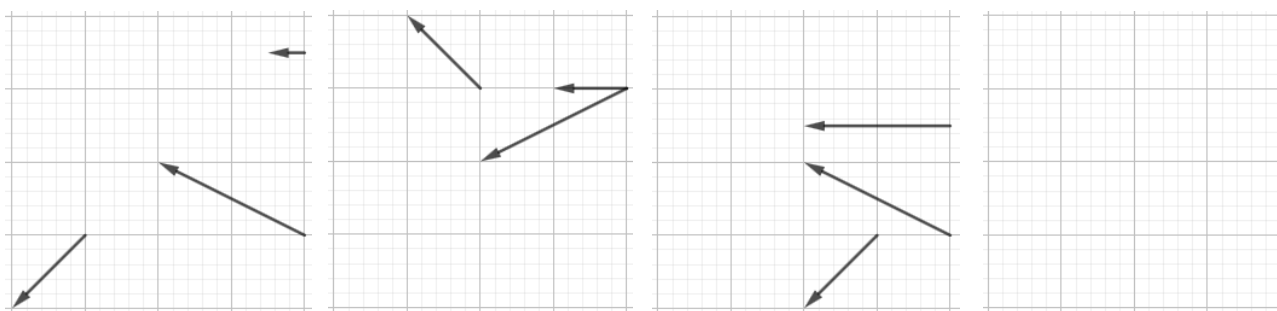


**Vraag 6**

Gegeven een regelmatige zeshoek. Hoeveel is de som van alle buitenhoeken (rood)? Geef aan hoe je tot je antwoord bent gekomen.



**Vraag 7**



**Vraag 8**

Wat is een vector?