BSc Thesis Applied Mathematics

Het verdelen van de bacheloropdrachten naar voorkeuren van studenten

Mirna Morad
S1708732

Supervisor: Judith Timmer

July, 2019

Department of Applied Mathematics
Faculty of Electrical Engineering,
Mathematics and Computer Science

UNIVERSITY OF TWENTE.

Voorwoord

Ter afronding van mijn opleiding, technische wiskunde aan de Universiteit Twente te Enschede, bied ik u mijn afstudeerscriptie aan.
Ik vond mijn afstudeeropdracht interessant met name gezien het een praktische opdracht was en het betreft hoe de afstudeeropdrachten van mijn opleiding toegewezen worden. Bovendien zou ik het resultaat van dit verslag in de toekomst, als docent wiskunde, zelf kunnen gebruiken. Het leuke deel van mijn werk was vermoedens bedenken aan de hand van het uitvoeren van experimenten.
Ik wil hierbij allereerst mijn begeleidster Judith Timmer bedanken voor haar begeleiding en feedback. In het bijzonder wil ik mijn studieadviseur Lilian Spijker bedanken voor haar steun en hulp gedurende de gehele periode van mijn studie, dit heeft zij vanaf het eerste moment tot het laatste moment met veel enthousiasme gegeven. Tevens wil ik mijn familie en vrienden bedanken voor hun steun tijdens alle fases van mijn studie. Grote dank aan mijn vader omdat ik heel veel energie en inspiratie van hem heb gekregen om verder te gaan ondanks de belemmeringen die ik mee heb gemaakt tijdens mijn studie, met name de taal en het verschil in het onderwijs tussen Syrië en Nederland.
Ik wens u veel plezier met het lezen van deze scriptie.
Mirna Morad

Het verdelen van de bacheloropdrachten naar voorkeuren van studenten

Mirna Morad*

July, 2019

Abstract

Verschillende problemen binnen het onderwijsdomein kunnen beschouwd worden als een optimaliseringsprobleem onder andere roosterprobleem en toewijzingsprobleem. Het toewijzingsprobleem is een belangrijk probleem op het gebied van combinatorische optimaliseringsproblemen. In combinatorische optimaliseringsproblemen dient een beste oplossing gevonden te worden uit een eindig aantal mogelijke oplossingen. In dit verslag is er gekeken naar hoe opdrachten verdeeld kunnen worden op basis van voorkeuren van studenten met het doel dat er zoveel mogelijk opdrachten van de hoogste voorkeur toegewezen worden. De hoogste voorkeur krijgt waarde 1 en de laagste voorkeur krijgt een hogere waarde. Dit probleem wordt als een toewijzingsprobleem beschouwd waarbij de doelfunctie het minimaliseren van de voorkeuren is, gezien voorkeur 1 waarde 1 heeft, voorkeur 2 waarde 2 heeft enzovoort. Het toewijzingsprobleem kan opgelost worden met de Hongaarse methode. Bovendien wordt in dit verslag bestudeerd welke manieren efficiënt kunnen zijn voor het doorgeven van voorkeuren. Om dat te kunnen onderzoeken zijn er een paar experimenten uitgevoerd. Uit de resultaten is gebleken dat het geven van minstens 3 voorkeuren beter is dan het geven van alleen maar 3 voorkeuren. Daarnaast wordt een nieuwe manier gevonden om voorkeuren door te geven.

Keywords: Combinatorische optimalisatie, lineair programmering, OR-probleem, toewijzingsprobleem, Hongaarse methode, voorkeuren.

1 Introductie

1.1 Probleemstelling

Studenten van de Technische wiskunde opleiding op de UT kiezen in het derde jaar hun bacheloropdracht. Zij krijgen een lijst met een aantal opdrachten en zij moeten dan hun individuele voorkeuren doorgeven. Elke student moet minstens drie opdrachten aanwijzen: minstens een opdracht van voorkeur 1, hoogste voorkeur, en minstens twee opdrachten met voorkeuren 1 en 2. Voorkeur 3 is de laagste voorkeur. Hierna krijgt elke student een opdracht toegewezen. Het doel is om zoveel mogelijk opdrachten met voorkeur 1 of 2 toe te wijzen. Bij meerdere oplossingen wordt de toewijzing met de meeste opdrachten met voorkeur 1 gekozen. Aangezien het aantal studenten afgelopen jaren niet groot was, was het gelukt om handmatig een oplossing te vinden. Echter zal deze tot een probleem leiden als het aantal studenten toeneemt of als er meerdere overlappingen zijn tussen de voorkeuren van de studenten.

*Email: m.morad@student.utwente.nl

1.2 Hoofdvraag

Hoe kunnen de TW-bacheloropdrachten aan de hand van de voorkeuren van de studenten verdeeld worden met het doel dat de meeste studenten voorkeur 1 en 2 krijgen en de minste studenten voorkeur 3 krijgen?

1.3 Deelvragen

1. Is er een computerprogramma om de toewijzing van de opdrachten te bepalen?
2. In de afgelopen jaren moesten studenten alleen maar 3 voorkeuren doorgeven, dus een opdracht met voorkeur 1, een opdracht met voorkeur 2 en een opdracht met voorkeur 3, zeg dat deze manier procedure 1 is en het geven van minstens 3 voorkeuren procedure 2 is. Welke procedure is beter?
3. Kan procedure 2 beter, met andere woorden zijn er andere manieren om voorkeuren door te geven?

1.4 Inleiding

Dit verslag gaat over het verdelen van de bacheloropdrachten op basis van voorkeuren van studenten. Problemen in de literatuur die hiermee te maken hebben zijn het volgende Student-Project Allocation, het Hospitals/Residents probleem, minimum cost flow, matching probleem, lineair programmering, transportprobleem en het toewijzingsprobleem. In het probleem Student-Project Allocation hebben zowel studenten als docenten voorkeuren voor projecten, daarnaast hebben beide projecten en docenten capaciteit [7]. Het Hospitals/Residents probleem gaat om een verzameling R van n inwoner en een verzameling H van m ziekenhuizen, waarbij elke ziekenhuis een capaciteit heeft en elke inwoner een voorkeurlijst heeft. Een inwoner r vindt een ziekenhuis h acceptabel als h op zijn voorkeurlijst staat. Niet alleen inwoners hebben een voorkeurlijst, maar ook ziekenhuizen hebben een voorkeurlijst [6]. Deze problemen zijn anders dan het gegeven probleem.

Een toewijzingsprobleem ontstaat in verschillende situaties, waarbij een optimale oplossing bepaald moet worden om m objecten aan n objecten toe te wijzen [4]. Problemen met betrekking tot toewijzing komen op een aantal gebieden voor, bijvoorbeeld gezondheidszorg, transport, onderwijs en sport. Sterker nog, dit is een goed bestudeerd onderwerp in combinatorische optimalisatieproblemen bij optimalisatie of besliskunde. Daarnaast is een probleem met betrekking tot toewijzing een belangrijk onderwerp dat is gebruikt om veel problemen wereldwijd op te lossen. Het toewijzingsprobleem is een probleem dat veel voorkomt bij veel educatieve activiteiten over de hele wereld. Binnen het onderwijsdomein kan het probleem geclassificeerd worden in twee problemen namelijk roosterprobleem en toewijzingsprobleem [4]. Het gegeven probleem is te beschouwen als een toewijzingsprobleem.

In de volgende hoofdstuk wordt de theorie die met het probleem te maken heeft uitgebreid weergegeven. In paragraaf 2.1 wordt het transportprobleem uitgelegd, dit probleem is de uitgebreide versie van het toewijzingsprobleem. Vervolgens wordt het toewijzingsprobleem en het gegeneraliseerde toewijzingsprobleem in paragraaf 2.2 en 2.3, respectievelijk, weergegeven. De Hongaarse methode is een manier om het toewijzingsprobleem op te lossen, in paragraaf 2.4 wordt de Hongaarse methode aangeduid. Na het overnemen van de theorie, wordt het probleem van opdrachten verdelen in hoofdstuk 3 in wiskundige termen beschreven. Bovendien wordt er een voorbeeld gegeven van het probleem en dit voorbeeld wordt uitgewerkt om het Hongaarse algoritme te verduidelijken in paragraaf 3.1.

Gegevens van 2017 en 2018 zijn beschikbaar, namelijk de opdrachten en de voorkeuren van de studenten en de oplossing die toen handmatig gevonden is. Aan de hand van de Hongaarse methode wordt de oplossing van 2017 en 2018 opnieuw bepaald en daarna wordt deze oplossing vergeleken met de oplossing die gevonden was door de docent in paragraaf 3.2 en 3.3 respectievelijk. Er zijn in die twee jaren twee procedures gebruikt om de voorkeuren door te geven. In paragraaf 3.4 is de vergelijking van de twee procedures te vinden. Een interessant deel van de opdracht is om een andere manier te bedenken van het doorgeven van voorkeuren. In hoofdstuk 4 wordt er een andere procedure bedacht om voorkeuren door te geven. De resultaten en de discussie van mijn onderzoek zijn in hoofdstuk 5 en hoofdstuk 6 te vinden. Het verslag sluit af met een conclusie waarin ik terug kom op de probleemstelling en de resultaten.

2 Theorie

In dit hoofdstuk zal een overzicht worden gegeven van wat er al bekend is over problemen die te maken hebben met het gegeven probleem, namelijk het transportprobleem, het toewijzingsprobleem en het gegeneraliseerde toewijzingsprobleem. Tevens wordt een methode die gebruikt kan worden om het probleem op te lossen uitgelegd.

2.1 Het transportprobleem

Uit de probleemstelling is op te merken dat het probleem een optimaliseringsprobleem is. In optimaliseringsproblemen en lineaire programmeringsproblemen zijn de doelfunctie en de randvoorwaarden allen lineair. Het transportprobleem en het toewijzingsprobleem vallen onder toepassingen van lineaire programmering, waarbij de problemen vertaald kunnen worden naar een formulering van een lineair model. Een standaard lineaire programmering is van de vorm:

$$\min \quad c'x$$

onder voorwaarde

$$Ax = b$$

$$x \geq 0.$$

Het transportprobleem houdt in dat een product getransporteerd moet worden van een aantal depots of leveranciers, zeg m depots naar een aantal bestemmingen of klanten, zeg n bestemmingen, zie [1], [3] en [5]. Wat op voorraad is in ieder depot en wat iedere bestemming nodig heeft wordt gegeven. Er zijn transportkosten per eenheid verbonden aan iedere route van een depot naar een bestemming. En de vraag is welk transportschema de totale kosten minimaliseert, waarbij:
- De depots D_i heeft totale voorraad a_i voor $i = 1, ..., m$.
- De bestemming B_j vraagt b_j hoeveelheid om te wordt bezorgen van de depots, $j = 1, ..., n$.
- De kosten c_{ij} die gemaakt worden als een eenheid van depot D_i naar bestemming B_j wordt vervoerd.

In wiskundige termen, het probleem kan uitgedrukt worden als het vinden van een verzameling x_{ij} om aan vraag en aanbod vereisten te voldoen tegen minimale kosten.

Het bijbehorende lineaire model is [5]:

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

onder voorwaarde

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \qquad ; 1 \leq j \leq n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \qquad ; 1 \leq i \leq m$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad \forall\, i, j.$$

Waarbij x_{ij} de hoeveelheid is die van depot D_i naar bestemming B_j verzonden wordt.
Als de totale vraag $\sum_{j=1}^{n} b_j$ gelijk is aan de totale aanbod $\sum_{i=1}^{m} a_j$, dan wordt het transportprobleem als volgt:

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

onder voorwaarde

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad ; 1 \leq j \leq n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad ; 1 \leq i \leq m$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad \forall\, i, j.$$

Het gegeven probleem is net anders dan het transportprobleem, het gaat namelijk om dat iedere student een opdracht krijgt naar zijn voorkeur. Wij hebben studenten in plaats van depots en opdrachten in plaats van bestemmingen. Dus i staat voor een student en er zijn n studenten en j staat voor een opdracht en er zijn m opdrachten. De kosten c_{ij} zijn de voorkeuren van student i aan opdracht j. Het verschil tussen het gegeven probleem en het transportprobleem is dat de totale voorraad $a_i = 1$ dus een student kan maximaal een opdracht maken en de opdrachten kunnen door 1 of maximaal 2 studenten gemaakt worden, dus $b_j = 1$ of 2. In het geval dat $a_i = 1$ en $b_j = 1$ wordt het probleem een toewijzingsprobleem genoemd. Hieruit volgt dat het transportprobleem de basis voor het toewijzingsprobleem is. In de volgende paragraaf gaan wij het toewijzingsprobleem verder uitleggen.

2.2 Het toewijzingsprobleem

Een van de meest bekende problemen in de grafentheorie en de combinatorische optimalisering is het toewijzingsprobleem. Het toewijzingsprobleem is een speciaal geval van het transportprobleem, waarbij $n = m$ en $a_i = b_j = 1$ voor alle i en j [3], [5].
Het probleem gaat over een aantal taken en een aantal personen, aan elke taak moet een persoon worden toegewezen en een persoon kan niet meer dan een taak uitvoeren. Er horen kosten c_{ij} wanneer persoon i de taak j uitvoert. En de vraag is om een toewijzing

te bepalen waarvoor de totale kosten minimaal zijn.
De lineaire formulering die erbij hoort is het volgende [3]:

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Onder voorwaarde

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, && ; 1 \leq j \leq n \\ &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, && ; 1 \leq i \leq n \\ &x_{ij} \geq 0, && \forall\, i, j. \end{aligned}$$

De laatste voorwaarde wordt in sommige modellen vervangt door de voorwaarde $x_{ij} = 0$ of 1. De voorwaarde $x_{ij} = 0$ of 1 is equivalent met de voorwaarde $x_{ij} \geq 0$, omdat $x_{ij} \leq 1$ en als de kosten $c_{ij} \geq 0$ heeft het toewijzingsprobleem altijd een geheeltalige optimale oplossing. De voorwaarde $x_{ij} \leq 1$ zit al in de voorwaarden van het probleem. Dus $x_{ij} = 1$ als persoon i gekoppeld is aan taak j en $x_{ij} = 0$ anders [3].

Het toewijzingsprobleem is in balans als het aantal taken gelijk is aan het aantal personen, dus $n = m$ zoals in het begin van deze paragraaf is aangenomen. Maar er zijn voorbeelden waarbij het aantal taken ongelijk is aan het aantal personen en dan is het toewijzingsprobleem niet in balans. Hiervoor is een dummy element gedefinieerd, een dummy is een denkbeeldig punt, zie [9]. Dus als het toewijzingsprobleem niet in balans is, worden dummy elementen toegevoegd waarbij de toewijzingskosten van dummy-persoon of dummy-taak waarloos zijn, met andere woorden worden de kosten van dummy elementen hoog gekozen.
Dit probleem heeft een geheeltalige optimale oplossing en het kan opgelost worden door gebruik te maken van de simplex methode of de negatieve kosten cyclus (the negative cost cycle algorithm) [3]. Er zijn nog andere verschillende methodes om het toewijzingsprobleem op te lossen, onder andere Brute-Force methode en de Hongaarse methode. De simplex methode is niet efficiënt omdat het meer variabelen nodig heeft, als er n toewijzingen moeten gevonden worden dan zijn er n^2 variabelen nodig. Meer slack variabelen leidt tot meer iteratie wat de methode inefficiënt maakt. De Brute-Force methode heeft exponentiële runtijd complexiteit, terwijl de Hongaarse methode heeft polynomiaal runtijd complexiteit [5].
Het lineaire toewijzingsprobleem is nuttig zelf, maar vooral als een relaxatie voor moeilijke combinatorische optimalisatie problemen zoals de kwadratische toewijzingsprobleem en handelsreizigersprobleem. Tevens kan de theoretische ontwikkelingen van het lineaire toewijzingsprobleem gebruikt worden voor andere problemen zoals minimum-cost flow probleem.
Het toewijzingsprobleem lijkt heel veel op het gegeven probleem. Het enige verschil is dat sommige opdrachten in het gegeven probleem toegewezen kunnen worden aan twee studenten. En daarom hebben wij verder onderzocht naar het gegeneraliseerde toewijzingsprobleem. Daarnaast kunnen er meer opdrachten zijn dan studenten, dus niet alle opdrachten hoeven toegewezen te worden.

2.3 Het gegeneraliseerde toewijzingsprobleem

Dit probleem is het algemene probleem van het toewijzingsprobleem waarbij beide taken en personen een grootte oftewel capaciteit hebben. Bovendien kan de omvang van elke taak verschillen van de ene persoon tot de andere [8].
De lineaire formulering die erbij hoort is het volgende:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

Onder voorwaarde

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_{ij} \leq b_j, \qquad ;1 \leq j \leq n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad ;1 \leq i \leq m$$

$$x_{ij} = 0 \text{ of } 1, \qquad \forall\, i, j.$$

Waarbij b_j de capaciteit van de taak j is en a_{ij} de omvang van persoon i op taak j is.
Het gegeven probleem kan als een gegeneraliseerde toewijzingsprobleem beschouwd worden. Echter, moeten wij aannemen dat $a_{ij} = 1$ en b_j 1 of 2 kan zijn. Maar omdat het toewijzingsprobleem eenvoudiger en makkelijker om op te lossen is, gaan wij het gegeven probleem vereenvoudigen tot een toewijzingsprobleem, zie hoofdstuk 3.

2.4 De Hongaarse methode

De Hongaarse methode is een methode om het toewijzingsprobleem op te lossen. Zij is bedacht door Harold Kuhn in 1955 en is gebaseerd op ideeën van de Hongaarse wiskundigen Dénes König en Jenő Egerváry. Deze versie van de methode is verder verwerkt en ontwikkeld door James Munkres in 1957, het wordt ook Kuhn-Munkres algoritme genoemd [1], [5] en [9]. De Hongaarse methode is gebaseerd op de volgende stellingen [1]:

Stelling 1:
Beschouw de doelfunctie van een toewijzingsprobleem:

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

Als een oplossing x_{ij} optimaal is voor de doelfunctie z, dan is deze ook optimaal voor het probleem waarbij de doelfunctie is vervangen door z':

$$\min \quad z' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}x_{ij},$$

waarbij

$$c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j,$$

u_i en v_j zijn constante voor alle i en j.

Stelling 2:
Gegeven $c_{ij} \geq 0$ en een oplossing x_{ij} voor het toewijzingsprobleem, als

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = 0$$

geldt, dan zijn de waardes van x_{ij} optimaal voor alle i en j.

2.4.1 Het Hongaarse algoritme

De invoer van het algoritme is een niet-negatieve matrix W, en de uitkomst is een toewijzing van minimaal gewicht.
Als het aantal rijen ongelijk is aan het aantal kolommen dan is het toewijzingsprobleem niet in balans. Om de Hongaarse methode toe te passen, moeten wij het toewijzingsprobleem in balans brengen. En dat kan met behulp van dummy elementen zoals het in de vorige paragraaf uitgelegd is.
Het algoritme bestaat uit het volgende stappen [1]:
Stap 1: balanceer het toewijzingsprobleem als het niet in balans is.
Stap 2: Rij reductie: vind in elke rij i de kleinst element $u_i = \min_j c_{ij}$ en trek dit van elke element in de rij af, $c'_{ij} = c_{ij} - u_i$, voor alle i en j.
Stap 3: Kolom reductie: voor de nieuwe gereduceerde matrix, wordt een kolom reductie uitgevoerd: $c''_{ij} = c'_{ij} - v_j$, waarbij $v_j = \min_i c'_{ij}$ de kleinste element is van kolom j. De gevonden matrix is de gereduceerde matrix.
Stap 4: Kies onafhankelijke nullen. Zoek de rij of kolom met het kleinste aantal nullen. Kies een van de nullen en streep alle nullen in dezelfde rij of kolom weg. Ga verder met het kiezen van meer nullen bij degenen die niet zijn doorgestreept. Te beginnen bij de rij of kolom met het kleinste aantal nullen, totdat alle nullen zijn gekozen of doorgestreept.
- Als n onafhankelijke nullen zijn gekozen, is er een optimale oplossing beschikbaar. Stop.
- Als er minder dan n onafhankelijke nullen zijn gekozen, gaat u naar stap 5.

Stap 5: Teken het minimum aantal lijnen (horizontaal, verticaal of beide) die nodig zijn om alle nullen in de gereduceerde matrix over te dekken, de volgende stappen laten zien welke lijnen moeten getekend worden:
5.1 Markeer met een kruisje een rij waar geen van de nullen is gekozen.
5.2 Markeer met een kruisje de kolommen die overeenkomen met de doorgestreepte nullen in de rijen die zijn gemarkeerd in stap 5.1.
5.3 Markeer met een kruisje de rijen die overeenkomen met de gekozen nullen van de kolommen die in stap 5.2 zijn gemarkeerd.
Herhaal stap 5.2 en 5.3 totdat er geen rijen of kolommen zijn die aan de voorwaarde voldoen. Trek een lijn door een rij die niet is gemarkeerd en een kolom gemarkeerd, deze lijnen dekken alle nullen in de tabel over. Ga naar stap 6.
Stap 6: Maak nieuwe nullen. Zoek het kleinste niet-nul element, zij k is het kleinste niet overdekt element. Trek k af van elke element die in onbedekte rij ligt en voeg k toe aan elke element die in een afgedekte kolom ligt. Ga naar stap 4.
In de appendix 9.1 is er een algemeen voorbeeld van het toewijzingsprobleem uitgewerkt om de stappen duidelijker te maken. Bovendien zal een voorbeeld van het gegeven probleem opgelost worden door gebruik te maken van het Hongaarse algoritme in paragraaf 3.1.

3 Het verdelen van de bacheloropdrachten

Stel wij hebben n studenten en m opdrachten en wij willen de studenten toewijzen aan de opdrachten op basis van hun voorkeuren. De voorkeuren van de studenten zijn de kosten die geminimalissed moeten worden, waarbij de hoogste voorkeur de kleinste waarde heeft. De hoogste voorkeur is voorkeur 1. Wij willen zo min mogelijk opdrachten toewijzen met voorkeur 3. Elke student moet een opdracht krijgen, daarom moeten genoeg opdrachten beschikbaar zijn. Het kan dus zijn dat er meer opdrachten dan studenten zijn maar andersom is onmogelijk.
Meestal mag maar een student aan een opdracht werken. Echter kunnen sommige opdrachten capaciteit hebben, er kunnen bijvoorbeeld twee studenten aan dezelfde opdracht werken. Als er m opdrachten zijn, dan kunnen wij de opdrachten in twee verzamelingen splitsen, onder andere m_1 opdrachten zonder capaciteit en m_2 opdrachten met capaciteit 2, dus $m = m_1 + m_2$. Met geen capaciteit hebben of zonder capaciteit wordt bedoeld dat er maximaal een student aan een opdracht mag werken. Dus wanneer in dit verslag geen capaciteit of zonder capaciteit aan orde komt, betekent dat dat de capaciteit van een opdracht gelijk is aan 1.
De opdrachtgever wil deze capaciteit alleen gebruiken in het geval dat het probleem niet oplosbaar is wanneer de opdrachten geen capaciteit hebben. Ook wordt deze mogelijkheid gebruikt als de oplossing van het probleem beter is wanneer de opdrachten capaciteit hebben dan wanneer zij geen capaciteit hebben.

De lineaire formulering van het probleem is als volgt:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

Onder voorwaarde

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad ; 1 \leq i \leq n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1, \qquad ; 1 \leq j \leq m_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 2, \qquad ; m_1 + 1 \leq j \leq m$$

$$x_{ij} = 0 \text{ of } 1, \qquad \forall\, i, j.$$

Waarbij c_{ij} de waarde van de voorkeur van student i aan opdracht j is.
Bovendien geeft x_{ij} de toewijzingen aan waarbij $x_{ij} = 1$ wanneer student i toegewezen is aan opdracht j, anders $x_{ij} = 0$.
De voorkeuren van de studenten kunnen in een matrix gerepresenteerd worden. De kosten matrix oftewel de voorkeuren matrix ziet er als volgt uit:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots\ldots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots\ldots & c_{2m} \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots\ldots & c_{nm} \end{bmatrix}$$

waarbij de waarde van elk element c_{ij} in ons probleem 1 of 2 of 3 of 100 is. De waarde 100 betekent dat de student i geen voorkeur heeft voor opdracht j.
De doelfunctie minimaliseert de voorkeuren wat ervoor zorgt dat zoveel mogelijk opdrachten met voorkeur 1 en voorkeur 2 toegewezen worden. De eerste voorwaarde zorgt ervoor dat elke student aan een opdracht toegewezen wordt, de tweede voorwaarde zorgt ervoor dat elke opdracht zonder capaciteit maximaal aan een student toegewezen wordt en de derde voorwaarde zorgt ervoor dat elke opdracht met capaciteit 2 maximaal aan twee studenten toegewezen wordt.

Dit probleem kunnen wij als een gegeneraliseerde toewijzingsprobleem beschouwen, zie paragraaf 2.3. Wij nemen aan dat er geen onderscheid wordt gemaakt tussen de studenten, dus $a_{ij} = 1$ voor alle studenten en b_j geeft de capaciteit van opdracht j aan. Om dit probleem met de Hongaarse methode te kunnen oplosssen gaan wij het vereenvoudigen. Wij gaan het vereenvoudigen tot een toewijzingsprobleem. Wij kunnen het gegeneraliseerde toewijzingsprobleem van opdrachten verdelen als een lineaire toewijzingsprobleem bekijken door elke opdracht met capaciteit 2 en de voorkeuren van de studenten ernaar te kopiëren. Wij hebben nu $m' = m_1 + 2\, m_2$ opdrachten waarbij alle opdrachten capaciteit 1 hebben. Het probleem ziet er nu als volgt uit:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m'} c_{ij} x_{ij}$$

Onder voorwaarde

$$\sum_{j=1}^{m'} x_{ij} = 1, \qquad ; 1 \leq i \leq n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1, \qquad ; 1 \leq j \leq m'$$

$$x_{ij} = 0 \text{ of } 1, \qquad \forall\, i, j.$$

Om de Hongaarse methode te kunnen toepassen moeten wij het probleem balanceren. Dat kunnnen wij doen door dummy-studenten toe te voegen. Wij moeten d dummy-studenten toevoegen zodat $n' = n + d = m'$.
Het probleem ziet er nu als volgt uit:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{m'} c_{ij} x_{ij}$$

Onder voorwaarde

$$\sum_{j=1}^{m'} x_{ij} = 1, \qquad ; 1 \leq i \leq n'$$

$$\sum_{i=1}^{n'} x_{ij} = 1, \qquad ; 1 \leq j \leq m'$$

$$x_{ij} = 0 \text{ of } 1, \qquad \forall\, i, j.$$

Dus het gegeven probleem kunnen wij ook als een toewijzingsprobleem beschouwen. En op deze manier kunnen wij het probleem met behulp van de Hongaarse methode oplossen.

Zoals in paragraaf 2.2 wordt genoemd, heeft het toewijzingsprobleem altijd een geheeltalige oplossing met de voorwaarde dat $c_{ij} \geq 0$ en dat is het geval hier, echter kan het gegeven probleem geen oplossing hebben, bijvoorbeeld in het geval dat het aantal opdrachten gelijk is aan het aantal studenten en een opdracht door geen enkele student gekozen wordt. Bovendien kan het toewijzingsprobleem meerdere oplossingen hebben met dezelfde functiewaarde, echter is dat niet direct te weten. Dat zullen wij in de volgende paragrafen verder bekijken.

Om de vraag of het verstandig is om de capaciteit van de opdrachten te gebruiken of het onnodig is, kunnen wij het gegeven probleem twee keer oplossen, waarbij in de eerste keer wordt aangenomen dat er maximaal een student aan een opdracht mag werken en in de tweede keer wordt de capaciteit van de opdrachten wel meegenomen. Vervolgens kunnen de oplossingen hiervan vergelijkt worden en kan de opdrachtgever een beslissing nemen of hij gebruik wil maken van de capaciteit van de opdrachten of niet.
Het volgende voorbeeld verduidelijkt hoe het gegeven probleem vereenvoudigt en opgelost kan worden. Daarnaast wordt de laatste idee over de capaciteit ook verduidelijkt.

3.1 Voorbeeld

Er zijn 3 studenten en 3 opdrachten gegeven waarbij de tweede opdracht capaciteit 2 heeft. De studenten geven hun voorkeuren door. Tabel 1 geeft de voorkeuren van de studenten aan.

TABLE 1: De voorkeuren van 3 studenten aan 3 opdrachten.

studenten	opdracht 1	opdracht 2	opdracht 3
student 1	1	3	2
student 2	2	1	3
student 3	1	2	2

Omdat opdracht 2 capaciteit twee heeft gaan wij de voorkeuren matrix van het probleem als volgt representeren in tabel 2:

TABLE 2: De voorkeuren van 3 studenten waarbij opdracht 2 gekopieerd is en een dummy element toegevoegd is.

studenten	opdracht 1	opdracht 2	opdracht 2	opdracht 3
student 1	1	3	3	2
student 2	2	1	1	3
student 3	1	2	2	2
dummy	100	100	100	100

Wij hebben een dummy-student toegevoegd, waarbij deze dummy-student geen voorkeur heeft naar alle opdrachten. Bovendien hebben wij opdracht twee gekopieerd. Op deze manier hebben wij het toewijzingsprobleem gebalanceerd en kunnen wij dit probleem met de Hongaarse methode oplossen.
Wij gaan de stappen van het Hongaarse algoritme, paragraaf 2.4.1, uitwerken om een oplossing te vinden. De matrix die bij dit probleem hoort is de volgende:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 100 & 100 & 100 & 100 \end{bmatrix}$$

Stap 1: Het toewijzingsprobleem is in balans.
Stap 2: Rij reductie.
Het minimum van iedere rij is 1, 1, 1 en 100 respectievelijk. Het minimum van iedere rij aftrekken van elke element in de bijhorende rij, krijgen wij de volgende matrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Stap 3: Kolom reductie.
Het minimum van iedere kolom is 0. Dus wij kunnen naar stap 4 gaan.
Stap 4: Onafhankelijke nullen kiezen.
De eerst rij bevat maar een nul, dus deze nul, cel (1,1), kiezen wij en dan strepen wij de nullen in cel (1,3) en (1,4) door omdat het in dezelfde kolom zit. In de vierde kolom zit ook maar een nul, dus deze nul, cel (4,4), kiezen wij en strepen wij de nullen in cel (4,1), (4,2) en (4,3) door. De matrix ziet er nu als volgt uit: Nu hebben wij nog een nul in de tweede kolom en een nul in de derde kolom die niet zijn gekozen of doorgestreept. Wij kiezen de nul in de tweede kolom, cel (2,2) en strepen de nul in cel (2,3) door.

$$\begin{bmatrix} \color{red}{0} & 2 & 2 & 1 \\ 1 & \color{red}{0} & \cancel{0} & 1 \\ \cancel{0} & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \color{red}{0} \end{bmatrix}$$

Wij hebben nu maar 3 onafhankelijke nullen kunnen kiezen en omdat 3 kleiner is dan de dimense van de matrix gaan wij door naar stap 5.
Stap 5: Lijnen tekenen
Wij tekenen nu het minimumaantal lijnen om alle nullen over te dekken, dus de onafhankelijke nullen en de doorgestreepte nullen.
5.1 Wij markeren de derde rij, omdat de enige nul die erin zit niet is gekozen.
5.2 Er is een nul doorgestreept in de derde rij, wij markeren dan de bijbehorende kolom, dus de eerste kolom.
5.3 Er is een nul gekozen in de eerste kolom, op de eerste rij, wij markeren dus de eerste rij. We keren terug naar stap 5.2.
5.2 Er is geen nul doorgestreept in de eerste rij. Dus het proces voor het markeren van rijen en kolommen is voltooid.

$$\begin{bmatrix} \color{red}{0} & 2 & 2 & 1 & X \\ 1 & \color{red}{0} & \cancel{0} & 1 & \\ \cancel{0} & 1 & 1 & 1 & X \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \color{red}{0} & \\ X & & & & \end{bmatrix}$$

We tekenen een lijn door elke rij die niet gemarkeerd is en elke kolom die wel gemarkeerd is met een kruisje X.

Dus er worden drie lijnen getekend, een lijn door de tweede rij, een door de vierde rij en een door de eerste kolom.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & \cancel{0} & 1 \\ \cancel{0} & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \end{bmatrix}$$

Stap 6: Maak nieuwe nullen.
Het kleinste niet overdekt element is 1, deze wordt afgetrokken van elke element in de niet overdekt rij, dus rij 1 en 3 en wordt opgeteld bij elke element in de overdekt kolom, dus kolom 4. Wij krijgen dan de volgende matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nu gaan wij terug naar stap 4.
Stap 4: Onafhankelijke nullen kiezen.
De eerste rij en de tweede rijen bevatten twee nullen nul. Stel wij kiezen eerst de nul in cel (1,1) en strepen wij de nullen in de bijhorende kolom en rij door. Dan kiezen wij de nul in cel (2,2) en strepen wij de nullen in de bijhorende kolom en rij door. Nu hebben wij in de derde en vierde rij twee nullen over, als wij de nul in cel (3,3) kiezen en de nullen in nullen in de bijhorende kolom en rij doorstrepen, hebben wij dan nog een nul over de nul in cel (4,4) over en deze kiezen wij.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cancel{0} \\ 2 & 0 & \cancel{0} & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \end{bmatrix}$$

Er zijn vier onafhankelijke nullen gekozen, dus wij hebben een optimale oplossing. De onafhankelijke nullen geven de toewijzingen aan.
De oplossing die bij dit probleem hoort is dus het volgende:
Student 1 wordt toegewezen aan opdracht 1, student 2 wordt toegewezen aan opdracht 2, student 3 wordt ook toegewezen aan opdracht 2, dummy-student wordt toegewezen aan opdracht 3, dus opdracht 3 wordt eigenlijk niet toegewezen.

Aangezien er in stap 4 meerdere mogelijkheden zijn om de onafhankelijke nullen te kiezen, zijn er meerdere oplossingen mogelijk. Alle mogelijke oplossingen zijn met hetzelfde minimum namelijk een 4. Er zijn 2 opdrachten van voorkeur 1 toegewezen en een opdracht van voorkeur 2. De oplossingen zijn in tabel 3 af te lezen.

Table 3: Oplossingen van het verdelen van 3 studenten aan 3 opdrachten waarbij opdracht 2, capaciteit 2 heeft.

studenten	oplossing 1	oplossing 2	oplossing 3
student 1	opdracht 1	opdracht 1	opdracht 3
student 2	opdracht 2	opdracht 2	opdracht 2
student 3	opdracht 3	opdracht 2	opdracht 1

Wij kunnen oplossing 2 negeren, aangezien wij zoveel mogelijk aantal opdrachten willen

toewijzen. Opdracht 3 is in deze oplossing niet toegewezen en daarom zullen wij deze oplossing niet gebruiken. En zoals wij eerder hebben gezegd zouden wij deze oplossing alleen gebruiken als het beter is dan de andere oplossingen en dat is hier niet het geval. Verder maakt het niet uit of oplossing 1 of oplossing 3 gekozen wordt.
In dit probleem waren alle oplossingen met hetzelfde minimum en het was makkelijk om een oplossing te hanteren en oplossing 2 niet te kiezen. Echter kan het soms moeilijk zijn om te beslissen welke oplossing beter is zoals wij zullen zien in paragraaf 3.3.

Wij gaan in de volgende paragrafen een paar problemen bekijken. Aan de hand van een programma in Excel wordt naar een oplossing gezocht [2]. De matrix van voorkeuren wordt naar Excel gekopieerd en vervolgens wordt de oplossing gevonden.

3.2 De oplossing van 2017

Deze paragraaf gaat over de data van 2017, waarbij de docent handmatig een oplossing heeft gevonden. Deze oplossing is in de tabel 4 te vinden onder de kolom oplossing 1. De procedure van voorkeuren doorgeven was als volgt: elke student heeft alleen maar 3 voorkeuren doorgegeven. Een opdracht met voorkeur 1 de hoogste voorkeur, een opdracht met voorkeur 2 en een opdracht met voorkeur 3.

Het aantal opdrachten is groter dan het aantal studenten en sommige opdrachten kunnen er twee studenten aan werken. Er zijn 13 studenten en 20 opdrachten waarvan 5 opdrachten capaciteit 2 hebben. Wij hebben dus met een gegeneraliseerde toewijzingsprobleem te maken. Dit probleem kunnen wij als een toewijsingsprobleem beschouwen zoals wij in het vorige voorbeeld hebben gedaan door de opdrachten met capaciteit te kopiëren.
Wij hebben dan in totaal 25 opdrachten en er zijn maar 13 studenten, daarom moeten wij 12 dummy elementen oftewel dummy-studenten toevoegen met de aanname dat de dummy elementen geen voorkeur hebben. Wij gaan de oplossing hiervan bepalen door gebruik te maken van de Hongaarse methode. Vervolgens gaan wij dit probleem opnieuw oplossen waarbij wij aannemen dat elke opdracht aan maximaal een student toegewezen mag worden. En als laatste gaan wij de drie oplossingen analyseren en vergelijken.

In de tabel 4 zijn er 3 oplossingen te vinden, onder ander oplossing 1, oplossing 2 en oplossing 3 waarbij:
Oplossing 1 de oplossing die handmatig gevonden is door de docent.
Oplossing 2 is aan de hand van de Hongaarse methode gevonden waarbij opdracht 5, 6, 8, 9 en 10 en gekopieerd zijn.
Oplossing 3 is ook met de Hongaarse methode bepaald maar met de aanname dat aan elke opdracht maximaal een student mag werken. Dus als wij vergeten dat er 5 opdrachten zijn die capaciteit 2 hebben, hebben wij 20 opdrachten en 13 studenten en moeten wij dan 7 dummy-studenten toevoegen.

Table 4: Oplossingen van 2017 waarbij oplossing 1 handamtig door de docent is gevonden, in oplossing 2 hebben sommige opdrachten capaciteit en in oplossing 3 wordt de capaciteit van de opdrachten niet meegenomen.

studenten	oplossing 1	voorkeur	oplossing 2	voorkeur	oplossing 3	voorkeur
student1	opdracht 18	1	opdracht 18	1	opdracht 18	1
student 2	opdracht 9	2	opdracht 9	2	opdracht 9	2
student 3	opdracht 13	1	opdracht 13	1	opdracht 13	1
student4	opdracht 19	1	opdracht 20	1	opdracht 20	1
student 5	opdracht 14	1	opdracht 14	1	opdracht 14	1
student 6	opdracht 6	1	opdracht 6	1	opdracht 7	1
student7	opdracht 3	1	opdracht 17	2	opdracht 17	2
student8	opdracht 2	1	opdracht 5	1	opdracht 4	1
student 9	opdracht 15	2	opdracht 15	2	opdracht 15	2
student 10	opdracht 5	1	opdracht 5	1	opdracht 5	1
student 11	opdracht 16	1	opdracht 16	1	opdracht 16	1
student 12	opdracht 1	1	opdracht 1	1	opdracht 1	1
student 13	opdracht 9	2	opdracht 3	1	opdracht 3	1

Om de oplossingen te vergelijken wordt tabel 5 gemaakt. Tabel 5 maakt het vergelijken van de oplossingen makkelijker. Er wordt onder ander het minimum, aantal toegewezen opdrachten met voorkeur 1, 2 en 3 weergegeven. Tevens worden het aantal toegewezen opdrachten gegeven.

Table 5: Oplossingen van 2017 vergelijken waarbij het minimum de waarde van de doelfunctie is.

	Oplossing 1	oplossing 2	Oplossing 3
Het minimum	16	16	16
Aantal toegewezen opdrachten met voorkeur 1	10	10	10
Aantal toegewezen opdrachten met voorkeur 2	3	3	3
Aantal toegewezen opdrachten met voorkeur 3	0	0	0
Aantal toegewezen opdrachten	12	12	13

In eerste oplossing, dus de oplossing van de docent is opdracht 9 twee keer toegewezen en in oplossing 2 is opdracht 5 twee keer toegewezen terwijl in oplossing 3 wordt elke opdracht maximaal aan een student toegewezen.
De drie oplossingen hebben hetzelfde minimum, er zijn in alle oplossingen hetzelfde aantal toegewezen opdrachten van voorkeur 1, voorkeur 2 en voorkeur 3. Met betrekking tot het doel dat wij zoveel opdrachten willen toewijzen met voorkeur 1 en 2, zijn alle drie oplossingen goed. Echter wij hebben nog een ander doel, namelijk dat wij zoveel mogelijk opdrachten willen toewijzen en dat er maximaal een student aan een opdracht toegewezen mag worden. Hiermee kunnen wij concluderen dat oplossing 3 in dit geval beter is dan oplossing 1 en oplossing 2.

3.3 De oplossing van 2018

Deze paragraaf gaat over de data van 2018. In dit jaar hebben studenten minste 3 voorkeuren doorgegeven. Zoals in 2017 is het aantal opdrachten groter dan het aantal studenten en sommige opdrachten hebben capaciteit van 2. Er zijn 23 opdrachten, waarvan 3 opdrachten capaciteit 2 hebben, namelijk opdracht 7,8 en 17 en er zijn 21 studenten. Wij gaan het proces van vorige paragraaf herhalen. Echter gaan wij hier het probleem nog een keer oplossen met een nieuwe bedachte verbetering. Wij gaan de waarden van c_{ij} verhogen voor voorkeur 3. Dus c_{ij} is 1 voor voorkeur 1, 2 voor voorkeur 2 en 9 voor voorkeur 3. Het getal 9 is willekeurig gekozen, 5 zou ook goed kunnen. De reden waarom wij dat doen is in tabel 7 te vinden.

In de tabel 6 zijn 4 oplossingen af te lezen, waarbij:
Oplossing 1 is handmatig door de docent gevonden.
Oplossing 2 is met de Hongaarse methode bepaald waarbij wij niet meenemen dat opdrachten 7, 8 en 17 capaciteit twee hebben.
Oplossing 3 is ook met de Hongaarse methode gevonden waarbij wij wel meenemen dat opdrachten 7, 8 en 17 capaciteit 2 hebben. Wij hebben dus 26 opdrachten en 21 studenten, daarom worden 5 dummy elementen toegevoegd.
Oplossing 4 is ook met de Hongaarse methode gevonden waarbij wij hier weer meenemen dat sommige opdrachten capaciteit hebben en wij de waarde van voorkeur 3 verhogen van 3 naar een groter getal, zeg 9, omdat wij zomin mogelijke opdrachten met voorkeur 3 willen toewijzen. Op deze manier voorkomen wij dat voorkeur 3 wordt veel toegewezen.
Oplossing 5 in deze oplossing wordt het probleem weer opgelost waarbij opdrachten zonder capaciteit worden meegenomen en de waarde van voorkeur 3 naar een 9 wordt verhoogd. Onder kolom voorkeur staat namelijk de voorkeuren van studenten en niet de waarden van de voorkeuren, daarom staan er geen 9.

Table 6: Oplossingen van 2018 waarbij oplossing 1 handamtig door de docent is gevonden, in oplossing 2 wordt de capaciteit van de opdrachten niet meegenomen, in oplossing 3 hebben sommige opdrachten capaciteit, oplossing 4 en 5 zijn oplossigen van het gegeneraliseerde toewijzingsprobleem en de toewijzngsprobleem, respectievelijk waarbij de waarde van voorkeur 3 is verhoogd naar 9.

studenten	oplossing 1	voorkeur	oplossing2	voorkeur	oplossing 3	voorkeur	oplossing 4	voorkeur	oplossing 5	voorkeur
student1	opdracht 21	2	opdracht 19	2	opdracht 19	2	opdracht 19	2	opdracht 19	2
student 2	opdracht 3	2	opdracht 3	2	opdracht 17	1	opdracht 17	1	opdracht 3	2
student 3	opdracht 25	1	opdracht 23	1	opdracht 23	1	opdracht 23	1	opdracht 23	1
student4	opdracht 15	1	opdracht 15	1	opdracht 15	1	opdracht 15	1	opdracht 15	1
student 5	opdracht 1	1	opdracht 1	1	opdracht 1	1	opdracht 1	1	opdracht 1	1
student 6	opdracht 8	2	opdracht 11	1	opdracht 11	1	opdracht 11	1	opdracht 11	1
student7	opdracht 17	2	opdracht 14	3	opdracht 14	3	opdracht 17	2	opdracht 14	3
student8	opdracht 17	1	opdracht 17	1	opdracht 17	1	opdracht 3	2	opdracht 17	1
student 9	opdracht 7	1	opdracht 7	1	opdracht 7	1	opdracht 7	1	opdracht 7	1
student 10	opdracht 9	2	opdracht 8	1	opdracht 8	1	opdracht 8	1	opdracht 8	1
student 11	opdracht 4	1	opdracht 4	1	opdracht 4	1	opdracht 4	1	opdracht 4	1
student 12	opdracht 7	1	opdracht 22	2	opdracht 7	1	opdracht 7	1	opdracht 22	2
student 13	opdracht 18	1	opdracht 18	1	opdracht 18	1	opdracht 18	1	opdracht 18	1
student14	opdracht 20	1	opdrcht 20	1	opdrcht 20	1	opdrcht 20	1	opdrcht 20	1
student 15	opdracht 16	1	opdracht 16	1	opdracht 16	1	opdracht 16	1	opdracht 16	1
student 16	opdracht 12	1	opdracht 12	1	opdracht 12	1	opdracht 12	1	opdracht 12	1
student 17	opdracht 6	1	opdracht 6	1	opdracht 6	1	opdracht 6	1	opdracht 6	1
student 18	opdracht 2	1	opdracht 2	1	opdracht 2	1	opdracht 2	1	opdracht 2	1
student 19	opdracht 11	1	opdracht 9	2	opdracht 9	2	opdracht 9	2	opdracht 9	2
student20	opdracht 8	2	opdracht 21	3	opdracht 8	2	opdracht 8	2	opdracht 21	3
student 21	opdracht 5	3	opdracht 5	3	opdracht 5	3	opdracht 5	3	opdracht 5	3

Table 7: Oplossingen vergelijken van 2018 waarbij het minimum de waarde van de doelfunctie is.

	oplossing 1	oplossing 2	Oplossing 3	oplossing 4	oplossing 5
Het minimum	29	31	28	28	31
Aantal toegewezen opdrachten met voorkeur 1	14	14	16	15	14
Aantal toegewezen opdrachten met voorkeur 2	6	4	3	5	4
Aantal toegewezen opdrachten met voorkeur 3	1	3	2	1	3
Aantal toegewezen opdrachten	18	21	18	18	21

In de docent oplossing is opdracht 7, 8 en 17 twee keer toegewezen en ook in oplossing 3 en 4 zijn deze opdrachten twee keer toegewezen. In dit geval hebben niet alle oplossingen hetzelfde minimum, daarom wordt het kiezen van de beste oplossing wat lastiger.
Wij gaan eerst oplossing 3 en 4 vergelijken, aangezien beide oplossingen van het gegeven gegeneraliseerde toewijzingsprobleem zijn. In tabel 7 is te zien dat beide oplossingen hetzelfde minimum hebben maar in oplossing 3 worden twee opdrachten van voorkeur 3 toegewezen, terwijl in oplossing 4 slechts een opdracht van voorkeur 3 wordt toegewezen. Wij zouden dus oplossing 4 kiezen tussen deze twee oplossingen.
Oplossing 2 en 5 zijn precies gelijk aan elkaar, het verhogen heeft er geen nut gehad.
Nu moeten wij oplossing 1, 2 en 4 vergelijken. Oplossing 4 heeft het kleinste minimum, er zijn meer studenten die een opdracht van voorkeur 1 hebben gekregen en er is alleen maar een student die een opdracht van voorkeur 3 heeft gekregen.
Kortom, oplossing 4 is in dit probleem het beste.
Wij hebben in deze twee paragrafen twee procedures bekeken van voorkeuren doorgeven, de eerste procedure is namelijk dat studenten alleen maar 3 voorkeuren moeten doorgeven en de tweede procedure is dat ze minste 3 voorkeuren doorgeven. Wij gaan in de volgende paragraaf deze procedures vergelijken.

3.4 Procedures vergelijken

In 2017 hebben studenten maar 3 voorkeuren doorgegeven en in 2018 hebben zij minstens 3 voorkeuren doorgegeven, de vraag is welke procedure beter is. Om deze vraag te kunnen beantwoorden gaan wij een voorbeeld bekijken.
Wij nemen aan dat het aantal opdrachten gelijk is aan het aantal studenten. De voorkeuren in dit voorbeeld zijn willekeurig gegeven. Wij gaan eerst naar de oplossing kijken wanneer de studenten minstens 3 voorkeuren geven, zie tabel 22 en dan gaan wij kijken wat gebeurt als zij maar 3 voorkeuren doorgeven, zie tabel 23.
In de tabel 8 zijn de twee oplossingen hiervan te vinden, oplossing 1 en oplossing 2 respectievelijk. En uit tabel 9 is te zien dat oplossing 1 een betere oplossing is dan oplossing 2 voor dit probleem, aangezien het minimum van de eerste oplossing kleiner is dan het minimum van de tweede oplossing. Daarnaast zijn er in oplossing 1 geen opdrachten van voorkeur 3 toegewezen terwijl er in oplossing 2 twee opdrachten van voorkeur 3 zijn toegewezen.
Dit resultaat is eigenlijk te verwachten omdat de tweede procedure meer mogelijkheden biedt, er zijn namelijk meer toewijzingen mogelijk dan de eerste procedure.

Table 8: Het verdelen van de opdrachten waarbij de studenten in oplossing 1 minstens 3 voorkeuren hebben gegeven en in oplossing 2 alleen maar 3 voorkeuren hebben gegeven.

studenten	oplossing 1	oplossing 2
student 1	opdracht 10	opdracht 10
student 2	opdracht 5	opdracht 1
student 3	opdracht 1	opdracht 2
student 4	opdracht 4	opdracht 4
student 5	opdracht 7	opdracht 7
student 6	opdracht 8	opdracht 8
student 7	opdracht 9	opdracht 6
student 8	opdracht 2	opdracht 5
student 9	opdracht 6	opdracht 9
student 10	opdracht 3	opdracht 3

Table 9: Oplossingen van tabel 8 vergelijken.

	oplossing 1	oplossing 2
Het minimum	14	17
Aantal toegewezen opdrachten met voorkeur 1	6	5
Aantal toegewezen opdrachten met voorkeur 2	4	3
Aantal toegewezen opdrachten met voorkeur 3	0	2

4 De andere manieren van voorkeuren doorgeven

Een interessant vraag van deze opdracht is of er andere en betere manieren zijn om voorkeuren door te geven. Zoals wij hebben geconcludeerd in de vorige paragraaf is het geven van minstens 3 voorkeuren beter dan het geven van alleen maar 3 voorkeuren. Hoe meer voorkeuren, hoe meer mogelijkheden om de opdrachten toe te wijzen mits de voorkeuren van de studenten niet in het geheel overeenkomen. Met dit resultaat ben ik aan het idee van top 5, top 6 enzovoorts gekomen. Dus voorkeuren doorgeven aan de hand van volgorde, waarbij de student begint met de opdracht van hoogste voorkeur en eindigt met de opdracht van laagste voorkeur.
Deze manier geeft niet alleen de kans op meer mogelijkheden, studenten kunnen op deze manier beter aangeven welke opdracht een hoger voorkeur heeft dan de andere. Hij/zij hoeft niet dezelfde gewicht of dezelfde voorkeur te geven aan twee opdrachten, terwijl hij zij de ene opdracht liever wil dan de andere.
Nu is de vraag welke top beter is, top 5 of top 6 of .... top 10 of maakt het eigenlijk uit? Om te bekijken of top 6 beter is dan top 5 of bijvoorbeeld top 8 beter is dan top 5, gaan wij de oplossingen van top 10 tot en met top 3 van een data vergelijken, zie tabel 24.
Wij beginnen eerst met top 10, dan 9 dan 8 enzovoorts. In top 9 maken wij van voorkeur 10 een 100 en dan bekijken wij de resultaat en zo gaan wij door tot top 3.
De oplossingen van dit experiment kunnen in tabel 10 en tabel 11 worden afgelezen.

Table 10: Resultaat van experiment 1 voor top 10 tot en met top 7 en waarbij het minimum de waarde van de doelfunctie is.

opdrachten	top 10	voorkeur	top 9	voorkeur	top 8	voorkeur	top 7	voorkeur
opdracht 1	student 15	2	student 11	1	student 11	1	student 11	1
opdracht 2	student 6	2	student 6	2	student 6	2	student 6	2
opdracht 3	student 1	1	student 1	1	student 1	1	student 1	1
opdracht 4	student 9	2	student 9	2	student 9	2	student 9	2
opdracht 5	student 14	1	student 15	1	student 15	1	student 15	1
opdracht 6	student 8	1	student 14	4	student 14	4	student 14	4
opdracht 7	student 3	1	student 3	1	student 3	1	student 3	1
opdracht 8	student 13	4	student 13	4	student 13	4	student 13	4
opdracht 9	student 10	1	student 10	1	student 10	1	student 10	1
opdracht 10	student 5	2	student 5	2	student 5	2	student 5	2
opdracht 11	student 2	2	student 8	3	student 8	3	student 8	3
opdracht 12	student 4	2	student 4	2	student 4	2	student 4	2
opdracht 13	student 12	1	student 12	1	student 12	1	student 12	1
opdracht 14	student 7	1	student 7	1	student 7	1	student 7	1
opdracht 15	student 11	10	student 2	4	student 2	4	student 2	4
min		33		30		30		30

Table 11: Resultaat van experiment 1 voor top 6 tot en met top 3 en waarbij het minimum de waarde van de doelfunctie is.

opdrachten	top 6	voorkeur	top 5	voorkeur	top 4	voorkeur	top 3	voorkeur
opdracht 1	student 11	1	student 11	1	student 11	1	student 11	1
opdracht 2	student 6	2	student 6	2	student 6	2	student 6	2
opdracht 3	student 1	1	student 1	1	student 1	1	student 1	1
opdracht 4	student 9	2	student 9	2	student 9	2	student 9	2
opdracht 5	student 15	1	student 15	1	student 15	1	student 15	1
opdracht 6	student 14	4	student 14	4	student 14	4	student 13	3
opdracht 7	student 3	1	student 3	1	student 3	1	student 3	1
opdracht 8	student 13	4	student 13	4	student 13	4	student 5	3
opdracht 9	student 10	1	student 10	1	student 10	1	student 10	1
opdracht 10	student 5	2	student 5	2	student 5	2	student 2	1
opdracht 11	student 8	3	student 8	3	student 8	3	student 8	3
opdracht 12	student 4	2	student 4	2	student 4	2	student 4	2
opdracht 13	student 12	1	student 12	1	student 12	1	student 12	1
opdracht 14	student 7	1	student 7	1	student 7	1	student 7	1
opdracht 15	student 2	4	student 2	4	student 2	4	student 14	100
min		30		30		30		niet oplosbaar

Er zijn 3 punten opvallend in de oplossingen van dit experiment. De eerste punt is dat top 3 geen oplossing heeft. De tweede punt is dat top 9 tot en met top 4 dezelfde oplossing hebben, terwijl top 10 een andere oplossing geeft met een hoger minimum. Er is zelf een opdracht toegewezen met voorkeur 10 en dat willen wij zeker niet.
Wij gaan kijken wat er gebeurt als wij de waardes van de voorkeuren verhogen. Het gewicht van voorkeur 1 en 2 blijft dezelfde maar voorkeur 3 tot en met 10 krijgt een gewicht die het kwadraat van de voorkeur is, bijvoorbeeld voorkeur 3 wordt 9 en voorkeur 4 wordt 16 enzovoorts. Omdat de waarde van top 10 een 100 wordt, gaan wij ook 100 verhogen naar een groter waarde, zij 900. Dus bij het verhogen van de waarden, moet als eerste de waarde van de niet gekozen opdracht verhoogd worden. Tabel 12 en tabel 13 geven de oplossingen na het verhogen aan.

TABLE 12: Resultaat van experiment 1 voor top 10 tot en met top 7 na verhogen van de waarde van de voorkeuren.

opdrachten	top 10	voorkeur	top 9	voorkeur	top 8	voorkeur	top 7	voorkeur
opdracht 1	student 11	1	student 11	1	student 11	1	student 11	1
opdracht 2	student 6	2	student 6	2	student 6	2	student 6	2
opdracht 3	student 1	1	student 1	1	student 1	1	student 1	1
opdracht 4	student 9	2	student 9	2	student 9	2	student 9	2
opdracht 5	student 15	1	student 15	1	student 15	1	student 15	1
opdracht 6	student 14	4	student 14	4	student 14	4	student 14	4
opdracht 7	student 3	1	student 3	1	student 3	1	student 3	1
opdracht 8	student 13	4	student 13	4	student 13	4	student 13	4
opdracht 9	student 10	1	student 10	1	student 10	1	student 10	1
opdracht 10	student 5	2	student 5	2	student 5	2	student 5	2
opdracht 11	student 8	3	student 8	3	student 8	3	student 8	3
opdracht 12	student 4	2	student 4	2	student 4	2	student 4	2
opdracht 13	student 12	1	student 12	1	student 12	1	student 12	1
opdracht 14	student 7	1	student 7	1	student 7	1	student 7	1
opdracht 15	student 2	4	student 2	4	student 2	4	student 2	4
min		30		30		30		30

,

TABLE 13: Resultaat van experiment 1 voor top 6 tot en met top 3 na verhogen van de waarde van de voorkeuren.

opdrachten	top 6	voorkeur	top 5	voorkeur	top 4	voorkeur	top 3	voorkeur
opdracht 1	student 11	1	student 11	1	student 11	1	student 11	1
opdracht 2	student 6	2	student 6	2	student 6	2	student 6	2
opdracht 3	student 1	1	student 1	1	student 1	1	student 1	1
opdracht 4	student 9	2	student 9	2	student 9	2	student 9	2
opdracht 5	student 15	1	student 15	1	student 15	1	student 15	1
opdracht 6	student 14	4	student 14	4	student 14	4	student 13	3
opdracht 7	student 3	1	student 3	1	student 3	1	student 3	1
opdracht 8	student 13	4	student 13	4	student 13	4	student 5	3
opdracht 9	student 10	1	student 10	1	student 10	1	student 10	1
opdracht 10	student 5	2	student 5	2	student 5	2	student 2	1
opdracht 11	student 8	3	student 8	3	student 8	3	student 8	3
opdracht 12	student 4	2	student 4	2	student 4	2	student 4	2
opdracht 13	student 12	1	student 12	1	student 12	1	student 12	1
opdracht 14	student 7	1	student 7	1	student 7	1	student 7	1
opdracht 15	student 2	4	student 2	4	student 2	4	student 14	0
min		30		30		30		niet oplosbaar

Na het verhogen van de gewichten zien wij dat de oplossing van top 10 tot en met top 4 dezelfde is. Echter heeft top 3 hier ook geen oplossing.
Omdat een voorbeeld niet genoeg is om een conclusie te trekken gaan wij nog meer experimenten uitvoeren. Er wordt in elke experiment data verzonnen voor 15 studenten en 15 opdrachten. Vervolgens wordt gekeken naar de oplossing wanneer de studenten 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4 en 3 voorkeuren doorgeven, respectievelijk. Ook in de volgende experimenten gaan wij de oplossingen voor en na het verhogen van de waarden van voorkeuren vergelijken.

4.1 Experiment 2

In de tabellen 14 en 15, zie appendix, zijn de resultaten van experiment 2 af te lezen. De toewijzingen van top 10 tot en met top 6 zijn dezelfde waarbij student 3 voorkeur 6 krijgt, student 1 voorkeur 3 krijgt en de andere studenten voorkeur 1, 2 krijgen. Top 5 en top 4 hebben dezelfde toewijzingen waarbij het minimum 25 is zoals bij top 10. In top 5 en top 4 krijgt student 5 voorkeur 4. Wij zien in top 3 dat student 3 voorkeur 100 heeft wat eigenlijk betekent dat deze student geen opdracht heeft gekregen. Dus het probleem is in deze geval niet oplosbaar.
Nu gaan wij hetzelfde experiment uitvoeren maar in deze keer gaan wij de waarden van de voorkeuren 3 tot en met 10 verhogen. De waarde van elke voorkeur wordt zoals in experiment 1 aan orde kwam het kwadraat van de voorkeur. Voor de opdracht die niet gekozen is kunnen wij in plaats van 100, 900 of andere groter getal kiezen. In de tabellen 16 en 17, zie appendix, zijn de resultaten van experiment 2 na het verhogen van de waarden van de voorkeuren te vinden.
Wij zien dat top 10 tot en met top 5 dezelfde toewijzingen hebben. Tevens zijn deze toewijzingen dezelfde als de toewijzingen van top 5 en top 4 voordat wij de waarden hebben verhoogd. De waarden van voorkeuren verhogen, met andere woorden een hoger gewicht geven voor elke voorkeur zorgt ervoor dat meer opdrachten van een hogere voorkeur toegewezen worden. In dit voorbeeld hebben wij dus voorkomen dat voorkeur 6 toegewezen wordt.
Als het minimum van de oplossingen dezelfde is betekent niet dat de ene oplossing zo goed is als de andere. Dat is duidelijk te zien in tabel 15, zie appendix, van experiment 2 waarbij top 5 hetzelfde minimum heeft als top 6 maar wij vinden dat top 5 een betere oplossing heeft dan top 6, omdat in de oplossing van top 6 wordt een opdracht met voorkeur 6 toegewezen terwijl in de oplossing van top 5 de laagste toegewezen voorkeur is 4.

4.2 Experiment 3

Wij gaan dezelfde proces herhalen voor een andere data, zie tabel 26. In tabel 18, zie appendix, zijn de resultaten ervan te vinden. In deze tabel zijn alleen maar vier kolommen te vinden, de eerste twee kolommen zijn namelijk top 10 en top 3. De laatste twee kolommen zijn het resultaat van het experiment van het verhogen van de waarden van de voorkeuren. Aangezien in de oplossing van top 10 alleen opdrachten van voorkeur 1, 2, 3 en 4 toegewezen worden, kunnen wij concluderen dat de oplossing van top 10 tot en met top 4 dezelfde is. Daarom is in de tabel alleen oplossing van top 10 en top 3 gegeven.
Voor het verhogen van de waarden zijn twee opdrachten van voorkeur 4 toegewezen, twee opdrachten van voorkeur 3 en de rest van de opdrachten zijn van voorkeur 1 en 2. Na het verhogen zijn twee opdrachten van voorkeur 4 en alleen maar een opdracht van voorkeur 3 toegewezen. Dus het is weer te zien dat het verhogen van de waarden van voorkeuren voor een betere oplossing zorgt, terwijl het minimum van beide gevallen hetzelfde is.

In beide gevallen is te zien dat top 3 geen optimale oplossing heeft, voorkeur 100 betekent namelijk dat een student geen opdracht heeft gekregen.

4.3 Experiment 4

Experiment 4 leidt tot dezelfde conclusie onder andere dat de oplossing na het verhogen van de waarden van voorkeuren een betere oplossing geeft en top 10 tot en met top 4 dezelfde oplossing geeft omdat er alleen maar opdrachten van voorkeur 1, 2, 3 en 4 zijn toegewezen. Het resultaat van deze experiment is in de appendix te vinden, tabel 19.
Na het uitvoeren van deze experimenten komen wij op de volgende stelling:

Stelling 3
Zij dat de data van top $T-1$ dezelfde is als de data T waarbij voorkeur T wordt vervangen door een groot getal, bijvoorbeeld 100. Stel dat de laagste voorkeur i is in de optimale oplossing van het probleem, waarbij i een geheel getal tussen 3 en 10 is dan geldt het volgende voor top T waarbij $T = 10, 9, ..., 3$:
1- Als $T \geq i$, heeft het probleem dezelfde optimale oplossing als top T.
2- Als $T < i$ dan heeft het probleem geen oplossing.

Bewijs
De eerste punt is triviaal omdat de doelfunctie is het minimaliseren van de voorkeuren, dus de voorkeuren van een groter gewicht beïnvloeden de oplossing niet.
De tweede punt: stel i is de laagste voorkeur in de optimale oplossing. Dus stel dat student A voorkeur i had gekregen. Dat wordt nu vervangen door een 100, en dat betekent dat het probleem geen oplossing heeft. Wij kunnen het anders bewijzen, namelijk stel dat het probleem wel een oplossing zou hebben. Dat betekent dat de studenten voorkeur i hebben gekregen en dat is een tegenspraak.

4.4 Waarde van voorkeur 2 verhogen

Wij hebben tot nu toe de waarde van voorkeur 3 tot met top 10 verhoogd, echter willen wij ook testen of het verhogen van de waarde van voorkeur 2 ook een invloed heeft op de oplossing.
Wij gaan het probleem van 2018 herhalen waarbij wij de waarde van voorkeur 2 tot een 4 verhogen en de waarde van voorkeur 3 tot een 9. Bovendien nemen wij niet mee dat sommige opdrachten capaciteit 2 hebben. Dus wij gaan de oplossing ervan vergelijken met de oplossing 2 en 5 vergelijken in tabel 6. Wij vinden dat de oplossing niet veranderd wordt.
Ook als wij het probleem van 2017 opnieuw oplossen waarbij de waarde van voorkeur 2 tot een 4 wordt verhoogd en de waarde van voorkeur 3 tot een 9 wordt verhoogd en de oplossing hiervan gaan wij vergelijken met oplossing 3 in tabel 4. Wij zien dat de twee oplossingen precies gelijk zijn, met andere woorden heeft het verhogen van waarde 2 tot een 4 geen effect op de oplossing.

4.5 De nieuwe procedure

Een van de deelvragen in dit verslag was of er een betere procedure is dan procedure 1, het geven van maar 3 voorkeuren, en procedure 2, het geven van minstens 3 voorkeuren. Het antwoord hierop is ja, deze procedures kunnen namelijk goed zijn en wij hebben gezien dat procedure 2 beter is dan procedure 1. Wij zijn tot het idee van top 10, 9 enzovoorts

gekomen. En na het uitvoeren van de vier experimenten kunnen wij zeggen dat top 10 is goed als top 9, top 8, enzovoorts, maar dat kunnen wij zeker niet garanderen. En aangezien het moeilijk voor de studenten kan zijn om top 10 te kunnen geven, zou top 5 een beter idee zijn.
Elke student moet minstens 5 opdrachten doorgeven. De 5 voorkeuren kunnen als top 5 weergegeven worden, als volgt voorkeur 1, voorkeur 2, voorkeur 3, voorkeur 4 en voorkeur 5, waarbij voorkeur 1 de hoogste voorkeur is en voorkeur 5 de laagste is.
Tevens zijn er soms studenten die bijvoorbeeld opdracht X zo goed vinden als opdracht Y als opdracht Z, dan zouden zij alle drie opdrachten dezelfde voorkeur kunnen geven. Dus studenten mogen meer dan een opdracht geven per voorkeur.
Bij het oplossen van het probleem wordt een gewicht gegeven aan elke voorkeur. Voorkeur 1 krijgt gewicht van waarde 1, voorkeur 2 krijgt waarde 4, voorkeur 3 krijgt waarde 9, voorkeur 4 krijgt waarde 16 en voorkeur 5 krijgt waarde 25.
Deze procedure geeft de studenten de mogelijkheid om hun voorkeuren zorgvuldig door te geven. Ze hoeven opdracht x en opdracht y niet dezelfde voorkeur te geven terwijl opdracht x hoger voorkeur heeft dan opdracht y. Daarnaast voor de studenten die hun niet uit maakt of ze opdracht x krijgen of opdracht y, kunnen zij alle opdrachten voorkeur 1 geven. Dat zou ook een beter oplossing leveren, gezien er meer opdrachten met voorkeur 1 zijn. De docent zou toewijzingen met voorkeur 1 en 2 goed kunnen vinden en toewijzingen met voorkeur 3 tot en met 5 willen voorkomen.

Kortom, de nieuwe procedure is als volgt:
- Elke student moet een top 5 maken van zijn voorkeuren waarbij voorkeur 1 de hoogste voorkeur is en voorkeur 5 de laagste is.
- Er mag meer dan een opdracht gegeven wordt per voorkeur, maar elke student moet minimaal 5 opdrachten doorgeven.
- Elke voorkeur moet een gewicht krijgen.
- Er moeten meer opdrachten beschikbaar zijn dan studenten.

5 Resultaten

In dit verslag zijn er aantal voorbeelden van het toewijzingsprobleem met betrekking tot het verdelen van afstudeeropdrachten behandeld. Uit de resultaten van deze voorbeelden zijn er een paar punten op te merken onder andere:
Het toewijzingsprobleem kan meerdere oplossingen hebben met hetzelfde minimum zoals wij in voorbeeld 3.1 hebben gezien. Maar aan de hand van het eerste doel van ons probleem wordt de beste oplossing ervan gekozen. Het doel van het gegeven probleem was namelijk zoveel mogelijk opdrachten van een hogere voorkeur toe te wijzingen en zo min mogelijk opdrachten van een lagere voorkeur toe te wijzen. Het tweede doel is dat wij zoveel mogelijk opdrachten willen toewijzen. En wanneer wij te maken hebben met een gegeneraliseerde toewijzingsprobleem wordt de oplossing ervan vergelijkt met de oplossing van de bijhorende toewijzingsprobleem, namelijk wanneer opdrachten geen capaciteit hebben. Als de oplossing van de bijhorende toewijzingsprobleem beter is dan de oplossing van het gegeven gegeneraliseerde toewijzingsprobleem, wordt deze oplossing gekozen. Beter betekent hier dat het minimum kleiner is en het aantal toegewezen opdrachten van voorkeur 3 minder is in de gekozen oplossing. In het probleem van voorbeeld 3.1 en het probleem van 2017 was dit het geval, in tabel 3 en 5 wordt dat weergegeven.
Echter, het gebruik van capaciteit, zoals in 2018, gaf een beter resultaat en daarom hebben wij voor de oplossing van het gegeven probleem waarbij sommige opdrachten capaciteit

hebben gekozen.

Uitgaande van het eerst doel zijn wij achter het idee gekomen dat de voorkeuren een gewicht moeten krijgen. Hiermee wordt een onderscheid gemaakt tussen de voorkeuren. Als twee opdrachten van voorkeur 2 worden toegewezen is beter dan een keer opdracht van voorkeur 3. In het probleem van 2018 is te zien dat het verhogen van de waarde van voorkeur 3 tot een beter resultaat heeft geleid. Toch is dat niet altijd waardevol om te doen, in tabel 6 is te zien dat het verhogen van de waarden geen effect op het probeem heeft geleverd, namelijk oplossing 2 en 5 zijn dezelfde.

Bij het vergelijken van de eerste procedure en de tweede procedure komen wij bij een verwachtend resultaat namelijk dat procedur 2, het geven van tenminste 3 voorkeuren, een beter resultaat zou geven dan procedure 1, het geven van maar 3 voorkeuren.

Op basis van de experimenten en de twee procedures zijn wij tot een nieuwe procedure gekomen zoals het in paragraaf 4.5 wordt weergegeven. De resultaten van de experimenten worden in hoofdstuk 4 besproken.
In dit hoofdstuk hebben wij de derde voorkeur tot en met de tiende voorkeur een gewicht gegeven $c_{ij} := c_{ij}^2$. Het gewicht van voorkeur 2 hebben wij niet veranderd aangezien wij het ook goed vinden als een student een opdracht van voorkeur 2 krijgt. Toch vroegen wij ons af of het verhogen van de waarde van voorkeur 2 een effect op de oplossing zou hebben. Wij hebben twee problemen herhaald waarbij wij de waarde van voorkeur 2 tot een 4 verhogen. De resultaten hiervan laten zien dat het verhogen van de waarde geen effect heeft geleverd.

Om te zorgen voor een optimale oplossing moet het aantal opdrachten gelijk of groter zijn aan het aantal studenten. Echter kan het zijn dat het probleem niet oplosbaar is in het geval dat het aantal gekozen opdrachten door de studenten kleiner is dan het aantal studenten. Bijvoorbeeld als het aantal studenten gelijk is aan het aantal opdrachten en er een opdracht is waarbij geen enkele student voorkeur ernaar heeft, is het probleem niet oplosbaar. Tevens is het probleem niet oplosbaar in het geval dat het aantal opdrachten groter dan het aantal studenten is, stel wij hebben 10 studenten en 15 opdrachten, maar er worden alleen maar 9 opdrachten gekozen dan is er een student van de 10 die geen opdracht naar zijn voorkeur kan krijgen. Met andere woorden stel dat het aantal opdrachten O is en het aantal gekozen opdrachten, namelijk waar studenten voorkeuren ernaar hebben gegeven, M is, dan:
Als $M < O$, heeft het probleem geen oplossing.
Als $M = O$, heeft het probleem wel een oplossing.

6 Discussie

Uit het huidig onderzoek blijkt dat het verdelen van de opdrachten aan studenten op basis van hun voorkeuren als een toewijzingsprobleem beschouwd kan worden. Een opvallende bevinding is dat het geven van een gewicht aan voorkeuren een betere oplossing levert. Echter hebben wij deze bevinding alleen op basis van experimenten weergegeven. Daarnaast hebben wij het kwadraat van de voorkeur als een gewicht gekozen voor voorkeur 3 tot en met voorkeur 10. Dat hebben wij gedaan op basis van het doel dat wij zoveel mogelijk opdrachten met voorkeur 1 en 2 willen toewijzen en zomin mogelijk opdrachten

met voorkeur 3, de laagste voorkeur. Als wij de waarde 1, 2 en 3 hanteren voor procedure 1 en 2, dan zit er telkens een veschil van 1 tussen, maar omdat wij het verschil tussen voorkeur 2 en 3 groter vinden dan het verschil tussen voorkeur 1 en 2, moet er een hoger verschil tussen zitten. Daarom hebben wij de waarde van voorkeur 3 naar een 9 verhoogd. Op basis van deze reden, hebben wij van dit idee ook gebruik gemaakt bij top 10 tot en met top 3 en ook bij de nieuwe procdure. Dus het verschil tussen de eerste en de tweede voorkeur moet kleiner zijn dan het verschil tussen de tweede en de derde voorkeur en dat moet kleiner zijn dan het verschil tussen de derde en de vierde voorkeur en dat moet weer kleiner zijn dan het verschil tussen de vierde en de vijfde voorkeur en zo gaat het door tot het verschil tussen de negende en de tiende voorkeur. In procdure 1 en 2 had het verhogen van de waarde van voorkeur 2 geen effect, dat komt gezien dat in procdure 1 en 2 alleen maar 3 voorkeuren zijn en het verschil tussen de eerste en de tweede voorkeur, dus 1 kleiner is dan het verschil tussen de tweede en de derde voorkeur, dus 7. Echter had dat wel een effect kunnen hebben in de overige procdures, namelijk top 4 tot en met top 10 en de nieuwe procdure, omdat het verschil tussen de tweede en de derde voorkeur, dus 7 gelijk is aan het verschil tussen de derde en de vierde voorkeur.
De oplossing van de docent in 2017 blijkt goed te zijn, echter met betrekking tot het doel dat er zoveel mogelijk opdrachten toewezen zouden worden is er een beter oplossing gevonden. Er is ook gebleken dat er een betere oplossing is voor het verdelen van de opdrachten in 2018. De doelfunctie waarde van deze oplossing is kleiner dan de oplossing van de docent. Niet alleen de waarde van de doelfunctie bepaalt hoe goed de oplossing is, maar het aantal toegewezen opdrachten met voorkeur 1 en het aantal toegewezen opdrachten van de laagste voorkeur. Hoe meer toegewezen opdrachten van voorkeur 1 en hoe minder toegewezen opdrachten van een lager voorkeur, hoe beter de oplossing is. Een ander resultaat is dat het geven van minstens 3 voorkeuren een betere manier is dan het geven van maar 3 voorkeuren. Dit resultaat is te verwachten gezien deze procedure meer mogelijke toewijzingen biedt. Met betrekking tot de vraag over andere manieren bedenken om voorkeuren door te geven blijkt uit dit onderzoek dat er wel een andere manier is. Verwacht is dat deze manier een betere oplossing zal geven, maar dat is nog niet bewezen. De resultaten hangen sterk af van de voorkeuren van de studenten. Wanneer de voorkeuren van de studenten heel erg verschillen, zou de oplossing van het probleem goed zijn. In het geval dat de voorkeuren van de studenten overeenkomen, zou de oplossing van het probleem niet echt goed zijn, het kan zelf zijn dat er geen oplossing voor het probleem is.
Gezien dat het probleem praktisch is, kunnen wij de resultaten van dit onderzoek niet echt vergelijken met eerdere onderzoeken. Zoals in de inleiding aan orde is gekomen, is er in de literatuur wel problemen te vinden die hierop lijken maar zij zijn net anders dan het probleem van opdrachten verdelen op basis van voorkeuren.
De resultaten in dit verslag zijn op basis van experimenten en willekeurige data gevonden. Zij lijken logisch te zijn echter zijn zij wiskundig niet bewezen.

7 Conclusies

In dit verslag is gezocht naar een antwoord op de vraag: Hoe kunnen de TW-bacheloropdrachten aan de hand van de voorkeuren van de studenten verdeeld worden met het doel dat de meeste studenten voorkeur 1 en 2 krijgen en de minste studenten voorkeur 3 krijgen? Het probleem kan vertaald worden naar een toewijzingsprobleem die opgelost kan worden met de Hongaarse methode.
Op basis van een paar voorbeelden zijn wij op het idee gekomen dat elke voorkeur een

gewicht moet krijgen, wat voor een betere oplossing zorgt en de doelen worden bereikt, namelijk dat de meeste studenten voorkeur 1 en 2 krijgen en de minste studenten voorkeur 3.
Uit de resultaten van een experiment met betrekking tot procedures vergelijken is gebleken dat procedure 2 beter is dan procedure 1. Op basis van dit resultaat is de andere vraag van dit onderzoek beantwoordt, namelijk of er andere manieren zijn om voorkeuren door te geven. Het antwoord is ja, de ander manier is om een top 5 door te geven waarbij voorkeur 1 de hoogste is en top 5 de laagste is. Bovendien mag een student meer dan een opdracht geven per voorkeur, echter moet elke student tenminste 5 opdrachten doorgeven.
Het algemene toewijzingsprobleem heeft altijd een oplossing onder de voorwaarde dat het aantal taken gelijk of groter is aan het aantal personen, echter kan het probleem van dit verslag niet oplosbaar zijn als een student geen opdracht kan krijgen van zijn voorkeuren. Er moet rekening gehouden worden dat er meer opdrachten zijn dan studenten om te voorkomen dat het probleem geen oplossing heeft.
Kortom, het verdelen van de Bacheloropdrachten naar voorkeuren van studenten is een minimalisatie toewijzingsprobleem waarbij de voorkeuren van de studenten de kosten matrix van het probleem zijn.

8 Aanbevelingen

De resultaten en conclusie in dit verslag zijn op basis van experimenten en willekeurige data gevonden. In verder onderzoek kan geprobeerd worden om deze resultaten wiskundig te bewijzen. Er kan zelf geprobeerde worden om een groep studenten zijn voorkeuren op 3 verschillenden manieren te laten doorgeven, namelijk procedure 1, procedure 2 en de nieuwe procedure en vervolgens het probleem 3 keer oplossen en de drie oplossingen ervan vergelijken. Bovendien zal in de vervolgonderzoek gekeken kunnen worden naar het effect van het verhogen van waarde 2 tot 4 in experiment 1, 2, 3 en 4.
In dit onderzoek worden de oplossingen aan de hand van de Hongaarse methode die geinteerpeerd is in Excel file. Echter, geeft dit alleen maar een oplossing terwijl er problemen zijn die meerder oplossingen hebben met hetzelfde minimum of met andere woorden meerdere oplossingen die even goed zouden zijn. Toekomstig onderzoek zou er zich op kunnen richten om een computerprogramma te bouwen dat alle mogelijke oplossingen van een probleem weergeeft.
De doelfunctie in dit verslag is het minimaliseren van de kosten oftewel de voorkeuren. Tevens kan de doelfunctie het maximaliseren van de kosten oftewel de voorkeuren zijn, in dit geval moeten wij andere waarde geven aan de voorkeuren bijvoorbeeld in het geval het doorgeven van drie voorkeuren was voorkeur 1 het hoogst en 3 het laagste, wanneer het over maximaliseren gaat wordt dit andersom, dus voorkeur met waarde 1 wordt het laagste en voorkeur met waarde 3 wordt het hoogste.
Het probleem in dit verslag is gerepresenteerd als een lineaire programmering probleem, teven kan dit probleem in een bipartiete graaf gerepresenteerd worden waarbij studenten de ene partitie vormen en de opdrachten de andere partitie.
Het advies voor vervolgonderzoek is om de bevindingen van dit verslag te testen en te bewijzen.

9 Appendix

9.1 Hongaarse methode

Dit voorbeeld gaat over hoe de Hongaarse methode uitgewerkt kan worden. Vier bouwbedrijven hebben hun projecten voorgesteld aan een wedstrijd die wordt gehouden om gebouwen A, B, C en D te bouwen. De volgende matrix geeft de tijd aan die elk bouwbedrijf nodig heeft om elk gebouw te bouwen. De rijen representeren de gebouwen A, B, C en D respectievelijk en de kolommen representeren de bouwbedrijven oftewel de bouwers. Het doel is om aan elk bouwbedrijf een gebouw toe te wijzen, zodat de totale bouwtijd wordt geminimaliseerd [1].

$$\begin{bmatrix} 58 & 58 & 60 & 54 \\ 66 & 70 & 70 & 78 \\ 106 & 104 & 100 & 95 \\ 52 & 54 & 64 & 54 \end{bmatrix}$$

Stap 1: Het toewijzingsprobleem is in balans.
Stap 2: Rij reductie.
Het minimum van iedere rij is 54, 66, 95 en 52 respectievelijk. Het minimum van idere rij aftrekken van elke element in de bijhorende rij, krijgen wij de volgende matrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 12 \\ 11 & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

Stap 3: Kolom reductie.
Het minimum van iedere kolom is 0, 2, 4 en 0 respectievelijk. Het minimum van iedere kolom aftrekken van elke element in de bijhorende kolom, dan komen wij op het volgende matrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 12 \\ 11 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Stap 4: Onafhankelijke nullen kiezen.
De eerst rij bevat maar een nul, dus deze nul, cel (4,1), kiezen wij en dan kruisen wij de nul in cel (3,4) weg omdat het in dezelfde kolom zit. In de tweede kolom zit ook maar een nul, dus deze nul, cel (4,2), kiezen wij en strepen wij de nul in cel (4,1) door. Hetzelfde geldt voor de derde kolom, wij kiezen de nul in cel (2,3) en strepen wij de nul in cel (2,1) door. De matrix zit nu als volgt uit:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & \color{red}{0} \\ \cancel{0} & 2 & \color{red}{0} & 12 \\ 11 & 7 & 1 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \color{red}{0} & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Wij hebben nu maar 3 onafhankelijke nullen kunnen kiezen en omdat 3 kleiner is dan de dimense van de matrix gaan wij door naar stap 5.
Stap 5: Lijnen tekenen

Wij tekenen nu het minimumaantal lijnen om alle nullen over te dekken, dus de onafhankelijke nullen en de doorgestreepte nullen.
5.1 Wij markeren de derde rij, omdat de enige nul die erin zit is niet gekozen.
5.2 Er is een nul doorgestreept in de derde rij, wij markeren dan de bijbehorende kolom, dus de vierde.
5.3 Er is een nul gekozen in de vierde kolom, op de eerste rij dus wij markeren de eerste rij. We keren terug naar stap 5.2.
5.2 Er is geen nul doorgestreept in de eerste rij. Dus het proces voor het markeren van rijen en kolommen is voltooid.

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & 2 & 0 & 12 \\ 11 & 7 & 1 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 0 & 8 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} X \\ \\ X \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} & & & X \end{array} & \end{array}$$

We tekenen een lijn door elke rij die niet gemarkeerd is en elke kolom die wel gemarkeerd is met een kruisje X.
Dus er worden drie lijnen getekend, een lijn door de tweede rij, een door de vierde rij en een door de vierde kolom.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & 2 & 0 & 12 \\ 11 & 7 & 1 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 0 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Stap 6: Maak nieuwe nullen.
Het kleinste niet overdekt element is 1, deze wordt afgetrokken van elke element in de niet overdekt rij, dus rij 1 en 3 en wordt opgeteld bij elke element in de overdekt kolom, dus kolom 4. Wij krijgen dan de volgende matrix

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 13 \\ 10 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Nu gaan wij terug naar stap 4.
Stap 4: Onafhankelijke nullen kiezen.
Eerste rij bevat maar een nul dus deze kiezen wij, en kruisen wij de nul in de bijhorende kolom weg. Tweede kolom bevat maar een nul dus deze kiezen wij, en kruisen wij de nul in de bijhorende rij weg. Nu hebben wij in de eerste kolom een nul over, dus deze kiezen wij en kruisen wij de overige nul in de bijhorende rij weg. Wij hebben nog een nul over in de derde kolom, dus deze kiezen wij.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & \cancel{0} & 13 \\ 10 & 6 & 0 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Er zijn vier onafhankelijke nullen gekozen, dus wij hebben een optimale oplossing. De onafhankelijke nullen geven de toewijzingen aan.
De oplossing die bij dit probleem hoort is dus het volgende:
gebouw A wordt toegewezen aan bouwer 4,

gebouw B wordt toegewezen aan bouwer 1,
gebouw C wordt toegewezen aan bouwer 3,
gebouw D wordt toegewezen aan bouwer 2.
De totale bouwtijd is $54 + 66 + 100 + 54 = 274$.

9.2 Resultaat van experiment 2

TABLE 14: Resultaat van experiment 2 voor top 10 tot en met top 7 en waarbij het minimum de waarde van de doelfunctie is.

opdrachten	top 10	voorkeur	top 9	voorkeur	top 8	voorkeur	top 7	voorkeur
opdracht 1	student 6	1	student 6	1	student 6	1	student 6	1
opdracht 2	student 7	1	student 7	1	student 7	1	student 7	1
opdracht 3	student 10	1	student 10	1	student 10	1	student 10	1
opdracht 4	student 9	2	student 9	2	student 9	2	student 9	2
opdracht 5	student 12	2	student 12	2	student 12	2	student 12	2
opdracht 6	student 8	1	student 8	1	student 8	1	student 8	1
opdracht 7	student 2	1	student 2	1	student 2	1	student 2	1
opdracht 8	student 14	1	student 14	1	student 14	1	student 14	1
opdracht 9	student 13	1	student 13	1	student 13	1	student 13	1
opdracht 10	student 11	1	student 11	1	student 11	1	student 11	1
opdracht 11	student 15	1	student 15	1	student 15	1	student 15	1
opdracht 12	student 5	1	student 5	1	student 5	1	student 5	1
opdracht 13	student 4	2	student 4	2	student 4	2	student 4	2
opdracht 14	student 3	6	student 3	6	student 3	6	student 3	6
opdracht 15	student 1	3	student 1	3	student 1	3	student 1	3
min		25		25		25		25

TABLE 15: Resultaat van experiment 2 voor top 6 tot en met top 3 en waarbij het minimum de waarde van de doelfunctie is.

opdrachten	top 6	voorkeur	top 5	voorkeur	top 4	voorkeur	top 3	voorkeur
opdracht 1	student 6	1	student 6	1	student 6	1	student 6	1
opdracht 2	student 7	1	student 7	1	student 7	1	student 7	1
opdracht 3	student 10	1	student 10	1	student 10	1	student 10	1
opdracht 4	student 9	2	student 9	2	student 9	2	student 9	2
opdracht 5	student 12	2	student 12	2	student 12	2	student 12	2
opdracht 6	student 8	1	student 8	1	student 8	1	student 8	1
opdracht 7	student 2	1	student 2	1	student 2	1	student 2	1
opdracht 8	student 14	1	student 14	1	student 14	1	student 14	1
opdracht 9	student 13	1	student 3	1	student 3	1	student 13	1
opdracht 10	student 11	1	student 13	2	student 13	2	student 11	1
opdracht 11	student 15	1	student 15	1	student 15	1	student 15	1
opdracht 12	student 5	1	student 11	2	student 11	2	student 5	1
opdracht 13	student 4	2	student 4	2	student 4	2	student 4	2
opdracht 14	student 3	6	student 5	4	student 5	4	student 3	100
opdracht 15	student 1	3	student 1	3	student 1	3	student 1	3
min		25		25		25		

Table 16: Resultaat van experiment 2 voor top 10 tot en met top 7 na het verhogen van de waarde van de voorkeuren.

opdrachten	top 10	voorkeur	top 9	voorkeur	top 8	voorkeur	top 7	voorkeur
opdracht 1	student 6	1	student 6	1	student 6	1	student 6	1
opdracht 2	student 7	1	student 7	1	student 7	1	student 7	1
opdracht 3	student 10	1	student 10	1	student 10	1	student 10	1
opdracht 4	student 9	2	student 9	2	student 9	2	student 9	2
opdracht 5	student 12	2	student 12	2	student 12	2	student 12	2
opdracht 6	student 8	1	student 8	1	student 8	1	student 8	1
opdracht 7	student 2	1	student 2	1	student 2	1	student 2	1
opdracht 8	student 14	1	student 14	1	student 14	1	student 14	1
opdracht 9	student 3	1	student 3	1	student 3	1	student 3	1
opdracht 10	student 13	2	student 13	2	student 13	2	student 13	2
opdracht 11	student 15	1	student 15	1	student 15	1	student 15	1
opdracht 12	student 11	2	student 11	2	student 11	2	student 11	2
opdracht 13	student 4	2	student 4	2	student 4	2	student 4	2
opdracht 14	student 5	4	student 5	4	student 5	4	student 5	4
opdracht 15	student 1	3	student 1	3	student 1	3	student 1	3
min		25		25		25		25

Table 17: Resultaat van experiment 2 voor top 6 tot en met top 3 na het verhogen van de waarde van de voorkeuren.

opdrachten	top 6	voorkeur	top 5	voorkeur	top 4	voorkeur	top 3	voorkeur
opdracht 1	student 6	1	student 6	1	student 6	1	student 6	1
opdracht 2	student 7	1	student 7	1	student 7	1	student 7	1
opdracht 3	student 10	1	student 10	1	student 10	1	student 10	1
opdracht 4	student 9	2	student 9	2	student 9	2	student 9	2
opdracht 5	student 12	2	student 12	2	student 12	2	student 12	2
opdracht 6	student 8	1	student 8	1	student 8	1	student 8	1
opdracht 7	student 2	1	student 2	1	student 2	1	student 2	1
opdracht 8	student 14	1	student 14	1	student 14	1	student 14	1
opdracht 9	student 3	1	student 3	1	student 3	1	student 13	1
opdracht 10	student 13	2	student 13	2	student 13	2	student 11	1
opdracht 11	student 15	1	student 15	1	student 15	1	student 15	1
opdracht 12	student 11	2	student 11	2	student 11	2	student 5	1
opdracht 13	student 4	2	student 4	2	student 4	2	student 4	2
opdracht 14	student 5	4	student 5	4	student 5	4	student 3	100
opdracht 15	student 1	3	student 1	3	student 1	3	student 1	3
min		25		25		25		

9.3 Resultaat van experiment 3

Table 18: Resultaat van experiment 3 waarbij het minimum de waarde van de doelfunctie is.

	top 10	voorkeur	top 3	voorkeur	top 10 waarbij de waarde zijn verhogd	voorkeur	top 3 waarbij de waarde zijn verhogd	voorkeur
opdracht 1	student 12	2	student 12	2	student 12	2	student 12	2
opdracht 2	student 7	1	student 7	1	student 7	1	student 7	1
opdracht 3	student 15	1	student 15	1	student 15	1	student 15	1
opdracht 4	student 10	2	student 10	2	student 10	2	student 10	2
opdracht 5	student 2	3	student 9	3	student 8	2	student 8	2
opdracht 6	student 8	1	student 8	1	student 2	2	student 2	2
opdracht 7	student 6	1	student 6	1	student 6	1	student 9	1
opdracht 8	student 14	1	student 14	1	student 14	1	student 14	1
opdracht 9	student 13	1	student 13	1	student 13	1	student 13	1
opdracht 10	student 11	1	student 11	1	student 11	1	student 11	1
opdracht 11	student 9	4	student 3	100	student 9	4	student 6	100
opdracht 12	student 3	2	student 5	1	student 3	2	student 5	1
opdracht 13	student 4	2	student 4	2	student 4	2	student 4	2
opdracht 14	student 5	4	student 2	100	student 5	4	student 3	100
opdracht 15	student 1	3	student 1	3	student 1	3	student 1	3
het minimum		29				29		

9.4 Resultaat van experiment 4

Table 19: Resultaat van experiment 4 waarbij het minimum de waarde van de doelfunctie is.

	top 10	voorkeur	top 3	voorkeur	top 10 van verhogen	voorkeur	top 3 na verhogen	voorkeur
opdracht 1	student 11	2	student 7	1	student 11	2	student 7	1
opdracht 2	student 14	1	student 14	1	student 14	1	student 14	1
opdracht 3	student 4	1	student 4	1	student 4	1	student 4	1
opdracht 4	student 7	2	student 9	1	student 7	2	student 9	1
opdracht 5	student 10	1	student 11	1	student 10	1	student 11	1
opdracht 6	student 6	3	student 6	3	student 6	3	student 6	3
opdracht 7	student 13	1	student 13	1	student 13	1	student 13	1
opdracht 8	student 9	4	student 10	100	student 9	4	student 10	100
opdracht 9	student 12	1	student 1	1	student 1	1	student 1	1
opdracht 10	student 15	2	student 5	2	student 5	2	student 5	2
opdracht 11	student 1	4	student 15	3	student 15	3	student 15	3
opdracht 12	student 5	1	student 3	2	student 3	2	student 3	2
opdracht 13	student 2	2	student 2	2	student 2	2	student 2	2
opdracht 14	student 8	2	student 8	2	student 8	2	student 8	2
opdracht 15	student 3	3	student 12	3	student 12	3	student 12	3
het minimum		30				30		

9.5 Data

Table 20: Data van 2017.

	student1	student 2	student 3	student4	student 5	student 6	student7	student8	student 9	student 10	student 11	student 12	student 13	**capaciteit**
opdracht 1	0	1	0	0	0	3	0	0	0	0	3	1	0	1
opdracht 2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	3	1
opdracht 3	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1
opdracht 4	0	0	0	0	0	2	0	1	3	0	0	0	0	1
opdracht 5	0	0	0	0	2	0	0	1	0	1	2	0	2	2
opdracht 6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	2
opdracht 7	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	1
opdracht 8	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	2
opdracht 9	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2
opdracht 10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
opdracht 11	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
opdracht 12	3	0	3	3	3	0	0	0	0	0	2	0	3	1
opdracht 13	2	0	1	2	2	0	0	0	0	3	2	0	0	1
opdracht 14	0	0	0	0	1	2	3	0	0	0	1	0	0	1
opdracht 15	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	1
opdracht 16	0	0	0	0	0	3	0	2	3	2	1	0	0	1
opdracht 17	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	1
opdracht 18	1	0	2	0	3	0	0	0	0	0	1	2	3	1
opdracht 19	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	3	0	0	1
opdracht 20	0	0	0	1	3	0	0	0	0	0	0	3	0	1

Table 21: Data van 2018.

	student 1	student 2	student 3	student 4	student 5	student 6	student 7	student 8	student 9	student 10	student 11	student 12	student 13	student 14	student 15	student 16	student 17	student 18	student 19	student 20	student 21	**capaciteit**
opdracht 1	0	0	0	0	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
opdracht 2	0	0	0	0	1	0	1	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
opdracht 3	0	2	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
opdracht 4	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	1	2	2	3	0	0	3	0	0	3	0	1
opdracht 5	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	3	1
opdracht 6	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	2	0	3	0	2	3	1	0	0	0	0	1
opdracht 7	2	0	3	0	0	0	0	0	1	0	3	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	2
opdrcaht 8	0	0	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	3	0	0	0	0	2	3	2	0	2
opdracht 9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	3	2	0	0	1
opdracht 10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1
oprdracht 11	0	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	3	2	0	2	0	0	1	0	0	1
opdracht 12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
opdracht 13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
opdracht 14	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1
opdracht 15	3	3	1	1	0	0	0	0	3	3	0	3	0	0	0	1	2	0	0	1	2	1
opdracht 16	0	3	1	2	0	0	0	0	0	3	0	3	0	0	1	1	3	0	0	2	1	1
opdracht 17	0	1	2	0	2	0	2	1	0	0	0	0	2	2	3	0	0	0	0	0	0	2
opdracht 18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	1
opdracht 19	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	3	0	1
opdracht 20	0	0	0	0	0	3	0	0	3	0	0	0	1	1	0	3	0	0	0	2	0	1
opdracht 21	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2	3	0	0	0	0	0	3	0	1
opdracht 22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	3	0	0	0	0	0	0	0	1
opdracht 23	1	0	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Table 22: Data van procedures vergelijken waarbij elke student minste 3 voorkeuren doorgeeft.

	opdracht 1	opdracht 2	opdracht 3	opdracht 4	opdracht 5	opdracht 6	opdracht 7	opdracht 8	opdracht 9	opdracht 10
student 1	1	100	9	2	100	100	9	2	100	1
student 2	9	100	2	100	1	100	2	100	100	1
student 3	1	1	100	2	100	100	9	2	100	100
student 4	100	9	9	2	100	100	1	2	100	1
student 5	100	100	2	100	2	9	1	9	100	100
student 6	1	1	2	9	100	100	100	2	100	100
student 7	100	100	1	2	100	9	100	100	2	100
student 8	100	1	9	100	1	100	2	100	100	100
student 9	9	100	1	9	100	2	100	100	2	1
student 10	100	100	1	100	2	100	1	9	100	2

TABLE 23: Data van procedures vergelijken waarbij elke student alleen maar 3 voorkeuren doorgeeft.

	opdracht 1	opdracht 2	opdracht 3	opdracht 4	opdracht 5	opdracht 6	opdracht 7	opdracht 8	opdracht 9	opdracht 10
student 1	100	100	100	2	100	100	9	100	100	1
student 2	9	100	2	100	100	100	100	100	100	1
student 3	100	1	100	2	100	100	9	100	100	100
student 4	100	100	9	2	100	100	100	100	100	1
student 5	100	100	100	100	2	9	1	100	100	100
student 6	1	100	100	9	100	100	100	2	100	100
student 7	100	100	1	2	100	9	100	100	100	100
student 8	100	100	9	100	1	100	2	100	100	100
student 9	9	100	100	100	100	100	100	100	2	1
student 10	100	100	1	100	2	100	100	9	100	100

TABLE 24: Data van experiment 1, voorkeuren van 15 studenten aan 15 opdrachten.

	opdracht 1	opdracht 2	opdracht 3	opdracht 4	opdracht 5	opdracht 6	opdracht 7	opdracht 8	opdracht 9	opdracht 10	opdracht 11	opdracht 12	opdracht 13	opdracht 14	opdracht 15
student 1	100	4	1	3	9	6	100	5	2	100	7	100	8	100	10
student 2	9	6	100	100	7	8	100	3	10	1	2	5	100	100	4
student 3	8	100	9	100	100	7	1	2	3	6	100	5	10	4	100
student 4	4	3	8	9	10	100	100	100	1	5	6	2	100	7	100
student 5	8	100	100	1	100	10	5	3	4	2	100	100	7	6	9
student 6	10	2	3	1	7	5	4	8	6	100	100	100	100	100	9
student 7	100	100	4	100	2	3	100	6	8	100	10	7	5	1	9
student 8	6	8	10	2	5	1	100	100	4	100	3	9	100	7	100
student 9	6	100	100	2	1	100	7	100	5	4	9	3	10	8	100
student 10	100	100	9	8	2	3	100	100	1	4	5	6	100	7	100
student 11	1	100	3	2	4	100	5	6	7	9	8	100	100	100	10
student 12	100	100	4	100	5	6	100	7	3	9	100	8	1	2	10
student 13	100	6	100	1	100	3	9	4	10	5	7	8	2	100	100
student 14	2	9	8	3	1	4	100	100	100	5	10	100	6	7	100
student 15	2	9	8	3	1	4	100	100	100	5	100	100	6	7	100

TABLE 25: Data van experiment 2, voorkeuren van 15 studenten aan 15 opdrachten.

	opdracht 1	opdracht 2	opdracht 3	opdracht 4	opdracht 5	opdracht 6	opdracht 7	opdracht 8	opdracht 9	opdracht 10	opdracht 11	opdracht 12	opdracht 13	opdracht 14	opdracht 15
student 1	9	100	8	5	100	4	1	7	100	10	100	2	6	100	3
student 2	10	100	100	5	3	2	1	100	100	9	100	7	8	6	4
student 3	2	10	3	7	9	100	100	100	1	100	4	100	8	6	5
student 4	5	8	1	100	100	100	100	7	8	100	10	6	2	9	3
student 5	7	6	1	8	100	5	10	100	100	2	100	1	100	4	9
student 6	1	6	100	100	10	4	2	5	9	8	100	3	100	7	100
student 7	2	1	100	8	5	9	6	100	1	7	100	100	100	4	3
student 8	6	9	4	7	2	1	5	3	4	100	10	100	100	100	100
student 9	100	100	100	2	3	5	1	10	7	100	4	9	8	6	100
student 10	10	7	1	2	3	100	4	100	9	5	6	8	100	100	100
student 11	100	100	4	5	7	3	100	9	6	1	8	2	100	10	100
student 12	100	100	1	100	2	100	100	6	5	3	4	7	8	9	10
student 13	10	100	9	100	100	8	7	100	1	2	3	100	4	6	5
student 14	100	7	8	100	3	4	100	1	100	2	5	6	100	9	10
student 15	100	100	9	8	100	7	4	100	2	3	1	100	5	6	10

TABLE 26: Data van experiment 3, voorkeuren van 15 studenten aan 15 opdrachten.

	opdracht 1	opdracht 2	opdracht 3	opdracht 4	opdracht 5	opdracht 6	opdracht 7	opdracht 8	opdracht 9	opdracht 10	opdracht 11	opdracht 12	opdracht 13	opdracht 14	opdracht 15
student 1	9	100	8	5	100	4	1	7	100	10	100	2	6	100	3
student 2	10	100	100	5	3	2	1	100	100	9	100	7	8	6	4
student 3	9	100	8	5	100	4	1	7	100	10	100	2	6	100	3
student 4	5	8	1	100	100	100	100	7	8	100	10	6	2	9	3
student 5	7	6	1	8	100	5	10	100	100	2	100	1	100	4	9
student 6	9	100	8	5	100	4	1	7	100	10	100	2	6	100	3
student 7	2	1	100	8	5	9	6	100	1	7	100	100	100	4	3
student 8	6	9	4	7	2	1	5	3	4	100	10	100	100	100	100
student 9	100	100	100	2	3	5	1	10	7	100	4	9	8	6	100
student 10	10	7	1	2	3	100	4	100	9	5	6	8	100	100	100
student 11	100	100	4	5	7	3	100	9	6	1	8	2	100	10	100
student 12	2	1	100	8	5	9	6	100	1	7	100	100	100	4	3
student 13	10	100	9	100	100	8	7	100	1	2	3	100	4	6	5
student 14	100	7	8	100	3	4	100	1	100	2	5	6	100	9	10
student 15	10	7	1	2	3	100	4	100	9	5	6	8	100	100	100

TABLE 27: Data van experiment 4, voorkeuren van 15 studenten aan 15 opdrachten.

	opdracht 1	opdracht 2	opdracht 3	opdracht 4	opdracht 5	opdracht 6	opdracht 7	opdracht 8	opdracht 9	opdracht 10	opdracht 11	opdracht 12	opdracht 13	opdracht 14	opdracht 15
student 1	2	10	3	7	9	100	100	100	1	100	4	100	8	6	5
student 2	5	8	1	100	100	100	100	7	8	100	10	6	2	9	3
student 3	9	100	8	5	100	4	1	7	100	10	100	2	6	100	3
student 4	5	8	1	100	100	100	100	7	8	100	10	6	2	9	3
student 5	7	6	1	8	100	5	10	100	100	2	100	1	100	4	9
student 6	100	100	9	8	2	3	100	100	1	4	5	6	100	7	100
student 7	1	100	3	2	4	100	5	6	7	9	8	100	100	100	10
student 8	100	100	4	100	5	6	100	7	3	9	100	8	1	2	10
student 9	100	6	100	1	100	3	9	4	10	5	7	8	2	100	100
student 10	2	9	8	3	1	4	100	100	100	5	10	100	6	7	100
student 11	2	9	8	3	1	4	100	100	100	5	100	100	6	7	100
student 12	2	1	100	8	5	9	6	100	1	7	100	100	100	4	3
student 13	9	100	8	5	100	4	1	7	100	10	100	2	6	100	3
student 14	2	1	100	8	5	9	6	100	1	7	100	100	100	4	3
student 15	10	100	9	100	100	8	7	100	1	2	3	100	4	6	5

References

[1] *Chapter 5, The transportation problem and the assignment problem, OpenCourseWare, UPV/EHU, https://ocw.ehu.eus/mod/resource/view.php?id=5780.*

[2] *www.win.tue.nl/wiskunded/files/public/Beslissen/Hongaars%20Algoritme.xls.*

[3] Dimitris Bertsimas and John N Tsitsiklis. *Introduction to linear optimization.* Athena Scientific Belmont, MA, 1997.

[4] Syakinah Faudzi, Syariza Abdul-Rahman, and Rosshairy Abd Rahman. An assignment problem and its application in education domain: A review and potential path. *Advances in Operations Research*, 2018.

[5] Lodewijk CM Kallenberg. Operations research technieken. *Collegediktaat Universiteit Leiden, Voorjaar 2003.*

[6] David F Manlove. Hospitals/residents problem: 1962; gale, shapley. *Encyclopedia of Algorithms*, pages 390–394, 2008.

[7] David F Manlove and Gregg O'Malley. Student-project allocation with preferences over projects. *Journal of Discrete Algorithms*, 6(4):553–560, 2008.

[8] David B Shmoys and Éva Tardos. An approximation algorithm for the generalized assignment problem. *Mathematical programming*, 62(1-3):461–474, 1993.

[9] Wayne L Winston and Jeffrey B Goldberg. *Operations research: applications and algorithms.* Thomson/Brooks/Cole, 2004.