

Vectormeetkunde 4 vwo wiskunde B

Een herontwerp van bestaand lesmateriaal ter verbetering van het inzicht bij leerlingen en ter verbetering van de tevredenheid over de opbouw van de lesstof bij docenten



Figuur 1 “Geef mij een plaats om te staan en ik beweeg de aarde” Archimedes. (Mechanics Magazine, 1824)

Naam:	Ir. Annemiek Voetberg
Studentnummer:	1075845
Opleiding:	Master Educatie en Communicatie in de Bètawetenschappen track Wiskunde
Onderdeel:	Onderzoek van Onderwijs (10 EC)
Begeleider:	Dr. ir. Mark Timmer
Tweede begeleider:	Dr. Gerard Jeurnink
Datum:	12 augustus 2019

Samenvatting

In dit ontwerponderzoek is een herontwerp van bestaand lesmateriaal over vectoren (paragraaf 8-V t/m 8-3 van hoofdstuk 8-Vectoren van Moderne Wiskunde 11e editie 4vwoB) gemaakt om een tweeledig einddoel te behalen; het verbeteren van de structurele kennis van leerlingen betreffende de lesstof over geometrische en numerieke vectoren en het onderwerp zwaartepunten en evenwicht en het verbeteren van de tevredenheid over de opbouw van de betreffende lesstof op het gebied van continuïteit (verticale leerlijnen) en horizontale samenhang (samenhang tussen vakgebieden).

Voor het maken van het ontwerp is uitgebreid literatuuronderzoek gedaan, wat geresulteerd heeft in een lessenserie met een didactische leidraad voor de docent en aangepast lesmateriaal voor de leerlingen. Naast dat dit dient om beide delen van het einddoel te behalen, wordt op zichzelf al voor verbetering op het gebied van continuïteit en horizontale samenhang gezorgd. Door middel van het vergelijken van proefwerkresultaten van leerlingen en interviews van docenten en leerlingen is vervolgens gekeken of het beoogde effect van het ontwerp is behaald.

Het ontwerp heeft door de kleine steekproefgroottes, de relatief kleine verschillen en grote standaardafwijkingen niet gezorgd voor statistisch significante resultaten wat betreft de verbetering van de structurele kennis bij leerlingen over de lesstof. Het ontwerp heeft de tevredenheid bij de docent over de samenstelling van de betreffende lesstof op het gebied van continuïteit (verticale leerlijnen) en horizontale samenhang (samenhang tussen vakgebieden) wel verbeterd. Ondanks dat met het onderzoek niet aangetoond kan worden dat de kennis bij leerlingen verbeterd is levert het onderzoek docenten veel informatie op over het leren van leerlingen en de bijbehorende didactische aspecten over de betreffende lesstof. Ook biedt het samen met de resultaten allerlei aanbevelingen voor verdere aanpassingen aan het lesmateriaal en verder onderzoek naar het onderwerp vectoren, met aandacht voor het modelleren vanuit een natuurkundige context, het wenselijke bewijsniveau en de overige paragrafen binnen het behandelde hoofdstuk.

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1 – Inleiding	1
1.1 Aanleiding.....	1
1.2 Algemene onderzoeksvraag	2
1.3 Leeswijzer	3
1.4 Dankwoord	3
Hoofdstuk 2 – Grove onderzoeksopzet.....	4
Hoofdstuk 3 – Theoretisch kader.....	5
3.1 Cognitieve ontwikkeling en didactiek – opbouw raamwerk.....	5
3.2 Cognitieve ontwikkeling en didactiek – faseovergangen raamwerk	11
3.3 Continuïteit en horizontale samenhang	25
Hoofdstuk 4 – Gespecificeerde onderzoeksvraag	26
4.1 Hypothesen en verwachtingen	26
Hoofdstuk 5 – Programma van eisen	27
Hoofdstuk 6 – Methode en (ontwerp)resultaten lessenserie.....	30
6.1 Methode lessenserie	30
6.2 Ontwerpresultaat lessenserie	31
6.3 Resultaten uitvoering lessenserie	36
Hoofdstuk 7 – Methode en resultaten interviews	40
7.1 Methode interviews.....	40
7.2 Resultaten interviews	41
Hoofdstuk 8 – Methode en (ontwerp)resultaten proefwerk	46
8.1 Methode proefwerk.....	46
8.2 Ontwerpresultaat proefwerk.....	53
8.3 Resultaten proefwerk	57
8.4 Resultaten MST-methode	59
Hoofdstuk 9 – Conclusie en discussie	62
9.1 Conclusies hoofdonderzoeksvragen	62
9.2 Bespreking van het effect op de kennis van leerlingen.....	62
9.3 Bespreking van het effect en het verschil tussen beide groepen bij de MST-methode.....	63
9.4 Bespreking van het effect op de tevredenheid van de docenten.....	64
9.5 Limitaties, betrouwbaarheid en validiteit.....	65
9.6 Bespreking verdere aanpassingen van het ontwerp en aanbevelingen voor vervolgonderzoek.....	67
Referenties.....	70
Bijlage A – Voorbeeld aanstreeplijst en observatielijst (originelen).....	72
Bijlage B – Leerdoelen	74
Bijlage C – Didactische leidraad en aanvullend lesmateriaal paragrafen 8-V t/m 8-2 (werkdokument)	76
Bijlage D – Leerling-materiaal paragraaf 8-V (origineel)	84

Bijlage E – Didactische leidraad en lesmateriaal paragraaf 8-3 (werkdokument)	87
Bijlage F – Leerling-materiaal paragraaf 8-3 (origineel)	94
Bijlage G – Verzamelbestand uitvoering lessenserie.....	105
Bijlage H – Interviewleidraden (geanonimiseerd origineel)	111
Bijlage I – Verzamelbestand interviews	121
Bijlage J – Formules en inschaling effectgrootte	138
Bijlage K – Scorekaart MST-methode	140
Bijlage L – Bestaand proefwerk en correctiemodel 2016/2017 (geanonimiseerd origineel).....	141
Bijlage M – Analyse bestaand proefwerk 2016/2017.....	144
Bijlage N – Combinatiebestand proefwerk (origineel) en correctiemodel (origineel) 2017/2018.....	145
Bijlage O – Expert-kaart MST-methode	149
Bijlage P – Cijfers	150
Bijlage Q – Voorbeelduitvoer van de berekeningen en de poweranalyse in G*power	152
Bijlage R – Oplossingen in de collectieve oplossingsruimte	153
Bijlage S – Telling van de geschikte oplossingen	157
Bijlage T – Statistische resultaten van de MST-methode	158

Hoofdstuk 1 – Inleiding

1.1 Aanleiding

In het schooljaar 2017/2018 heeft voor het eerst in vwo het wiskunde-examen nieuwe stijl plaatsgevonden, met daarin voor wiskunde B het nieuwe onderwerp analytische meetkunde als vervanging van het onderwerp bewijzen in de vlakke meetkunde. In 2015/2016 is daarom in 4 vwo al gestart met nieuwe leerboeken en vectormeetkunde als eerste kennismaking met analytische meetkunde.

Het belang van meetkunde in het voortgezet onderwijs wordt in een artikel van Aad Goddijn in de Nieuwe Wiskrant getiteld “Meetkunde: waarom met én zonder algebra” (Goddijn, 2007) uitgebreid toegelicht. In deze alinea wordt hier dankbaar gebruik van gemaakt. Meetkunde heeft als onderwerp het onderzoeken van vormen, figuren en ruimte en neemt inhoudelijk en historisch gezien een heel eigen plaats in binnen de wiskunde. De klassieke synthetische meetkunde heeft als eerste de ijzersterke combinatie van abstractie en redeneren op de wiskundige kaart gezet. De moderne analytische meetkunde is mede vanwege zijn grote toepassingsgebied en mogelijkheden, bijvoorbeeld in de mechanica en kinematica en bij computer graphics en virtuele realiteit, niet meer weg te denken. Binnen de doelen van het voortgezet onderwijs is volledige axiomatisering van de meetkunde niet aan de orde, maar meetkunde biedt, naast haar intrinsieke waarde, een zeldzame gelegenheid voor het zoeken naar axiomatiek in het voortgezet onderwijs (Goddijn, 2007). Het biedt mogelijkheid tot inzicht dat de deductieve opbouw van de wiskunde een bodem heeft of moet hebben. Bovendien moet ervoor gezorgd worden dat de stap naar de axiomatische opbouw in het vervolgonderwijs niet te groot wordt. Het redeneren met behulp van eigenschappen van figuren en het deductief opbouwen van bewijs, zoals bij bewijzen in de vlakke meetkunde, is voor leerlingen in het voortgezet onderwijs lastig gebleken. Leerlingen snappen het wel, maar kunnen er niet zelf opkomen, zij missen de vaardigheden om redelijk zelfstandig vraagstukken op te lossen (Goddijn, 2007). Een oorzaak hiervan ligt mede in de aard van de synthetische meetkunde zelf. De moderne analytische meetkunde biedt een andere methode om meetkundige vraagstukken op te lossen. Aan de basis staan nog steeds de eigenschappen van figuren, maar hieraan wordt vervolgens gerekend, algebraïsch of numeriek. Het biedt leerlingen een stevige en toegankelijke methode in tegenstelling tot de synthetische methode, maar mist vaak de evidentie die de synthetische methode vaak wel biedt (Goddijn, 2007). Beide methodes hebben eigen kwaliteiten. De introductie van de analytische methode in het curriculum met zijn hogere toegankelijkheid is een logische stap, maar moet wel plaatsvinden in combinatie met de kwaliteiten uit de klassieke synthetische methode.

Waar vectorruimten een abstracte, coördinaatvrije manier leveren van omgaan met meetkundige en natuurkundige objecten, kan door vectoren uit te drukken in coördinaten de vectormeetkunde herleid worden tot analytische meetkunde. Vectormeetkunde in twee dimensies ($\mathbb{R}^2$) kan een goede introductie in de analytische meetkunde vormen en is eenvoudig te generaliseren naar $\mathbb{R}^3$ of (veel) meer dimensies. Het biedt de mogelijkheid coördinaten en algebra in de meetkunde te introduceren met een koppeling naar gevestigde voorkennis van leerlingen. Dit zijn onder andere de eigenschappen van relatief eenvoudige meetkundige figuren, concepten en bijbehorende berekeningen (lijnen, lijnstukken, driehoeken, parallellogrammen, lengte en hoeken), grafische voorstellingen van algebraïsche vergelijkingen (lineaire vergelijkingen) en kennis van het rekenen met en oplossen van algebraïsche vergelijkingen (rekenregels lineaire en eenvoudige goniometrische vergelijkingen).

De huidige aanpak op de onderzoeksschool, Carmel College Salland (CCS) te Raalte, lijkt niet optimaal te zijn. Er wordt gewerkt met de lesmethode Moderne Wiskunde 11e editie 4vwoB (Noordhoff Uitgevers bv, 2014a) waar in hoofdstuk 8 het onderdeel vectoren behandeld wordt. De docenten

geven aan dat leerlingen over het algemeen weinig moeite hebben met procedurele beheersing, maar dat ze betwijfelen of voldoende inzicht bereikt wordt. Bovendien beschouwen ze paragraaf 8-3 over zwaartepunten en evenwicht als een verstoring binnen de opbouw van het hoofdstuk en ook binnen de paragraaf zelf wordt de opbouw niet logisch gevonden. Algemeen gesproken was er behoefte aan meer kennis betreffende het leerproces van leerlingen en didactische handvatten ter verhoging van het inzicht bij leerlingen, met aandacht voor de opbouw van het hoofdstuk en speciaal voor paragraaf 8-3.

In dit onderzoek wordt het bestaande onderzoeksmateriaal overzichtelijk samengevoegd en verduidelijkt, wordt het didactische materiaal van de lesmethode aangevuld en waar nodig aangepast en wordt het effect hiervan op het inzicht van leerlingen en de opbouw getoetst. Dit onderzoek hoopt een didactische basis te bieden voor docenten die, over het algemeen, nog weinig ervaring in het onderwerp hebben en hoopt aanzet te geven tot meer onderzoek in analytische meetkunde en vectormeetkunde in het bijzonder, aangezien in recente jaren (2005-2015) slechts beperkt onderzoek naar de didactiek in deze onderwerpen gedaan is (Jones & Tzekaki, 2016).

1.2 Algemene onderzoeksvraag

Vanuit de aanleiding is het (nog) zeer vage tweeledige einddoel van dit onderzoek opgesteld: verbetering van het inzicht bij de leerlingen en een verbeterde tevredenheid over de opbouw van de lesstof bij de docenten. De bijbehorende algemene onderzoeksvraag luidt dan:

“Hoe kan het inzicht bij leerlingen verbeterd worden op het gebied van vectormeetkunde en hoe kan de tevredenheid over de opbouw van de lesstof bij de docenten verbeterd worden?”

Om antwoord te kunnen geven op deze algemene onderzoeksvraag zijn deelvragen opgesteld. Een ontwerponderzoek bestaat grofweg uit twee fases (van der Donk & van Lanen, 2016). In onderzoeksfase 1 vindt het (literatuur)onderzoek plaats ter specificering van de algemene onderzoeksvraag en voor het inventariseren van de ontwerpeisen. In onderzoeksfase 2 vindt het maken, testen, evalueren en aanpassen van het ontwerp plaats.

Deelvragen onderzoeksfase 1:

- Wat wordt er verstaan onder de termen “inzicht” en “opbouw van de lesstof”?
- Welke didactische maatregelen (instructie en opgaven) voor de lessenserie verbeteren (theoretisch) het inzicht bij leerlingen?
- Welke maatregelen verbeteren (theoretisch) de opbouw van de lesstof?
- Welke aanvullende eisen zijn er nog vanuit de verschillende deelnemende partijen?
- Welke bedreigingen zijn er voor de uitvoering van het ontwerp in de praktijk?

Deelvragen onderzoeksfase 2:

- Hoe ziet een mogelijk passend ontwerp van de lessenserie eruit?
- In hoeverre voldoet het ontwerp van de lessenserie aan de ontwerpeisen?
- In hoeverre voldoet de uitvoering van de lessenserie aan de ontwerpeisen?
- Op welke wijze kan het effect van de lessenserie getoetst worden?
- In hoeverre wordt het beoogde effect van de lessenserie bereikt?
- Hoe zou het ontwerp verder aangepast moeten worden?
- Wat zijn aanbevelingen voor eventueel vervolgonderzoek?

1.3 Leeswijzer

Aangezien een ontwerponderzoek een innovatiecyclus (van der Donk & van Lanen, 2016) bevat met een steeds grotere mate van verfijning, dat in dit geval zelfs gaandeweg het uitvoeren van de lessenserie nog doorgegaan is, voldoet een volledig lineaire opbouw van het verslag niet. Vanwege de leesbaarheid en bruikbaarheid zijn onderdelen voor een deel dan ook thematisch geordend en zoveel mogelijk van grof naar fijn uitgewerkt. Aanvullend materiaal dat een logisch verloop van het verslag zou verstoren is in de bijlage opgenomen. Om een (eerlijk) beeld te geven van het (ontwerp)proces zijn hier werkdocumenten ingevoegd, die tijdens het proces telkens gewijzigd en aangevuld zijn, maar wordt ook origineel materiaal ingevoegd, specifiek herkenbaar aan de omkadering.

Ter inleiding zijn in hoofdstuk 1 de aanleiding van het onderzoek en het daaruit voortkomende onderzoeksdoel, de algemene onderzoeksvraag en de deelvragen omschreven, inclusief deze leeswijzer en een dankwoord. Vervolgens wordt in hoofdstuk 2 de grove onderzoekopzet besproken. Hoofdstuk 3 bevat het literatuuronderzoek over cognitieve ontwikkeling en didactiek en over continuïteit en horizontale samenhang. In hoofdstuk 4 is op basis van de theorie de algemene onderzoeksvraag gespecificeerd en gesplitst in twee hoofdonderzoeksvragen, inclusief hypothesen en verwachtingen van het ontwerponderzoek. Hoofdstuk 5 bevat het programma van eisen voor de lessenserie op basis van het literatuuronderzoek aangevuld met eisen en wensen vanuit het CCS. Tevens worden eventuele bedreigingen in kaart gebracht. Vanwege leesbaarheid van het verslag zijn de gebruikte methoden en resultaten thematisch geordend in de onderwerpen: lessenserie, interviews en proefwerk. Hoofdstuk 6 bevat de methode en (ontwerp)resultaten op het gebied van de lessenserie, wat direct aansluit op het programma van eisen in hoofdstuk 5. Hoofdstuk 7 bevat de methode en resultaten op het gebied van de interviews, voor beantwoording van de als tweede gespecificeerde hoofdonderzoeksvraag. Hoofdstuk 8 bevat de methode en (ontwerp)resultaten op het gebied van het proefwerk, voor beantwoording van de als eerste gespecificeerde hoofdonderzoeksvraag. Hoofdstuk 9 bevat de conclusie en discussie naar aanleiding van de resultaten.

1.4 Dankwoord

Voor het openstellen van de lessen voor observaties en het verder geheel belangeloos meewerken aan de overige onderdelen van het onderzoek wil ik de docent van de controlegroep van het CCS hartelijk danken. De docent van de testgroep van het CCS wil ik hartelijk danken voor de prettige samenwerking gedurende het gehele proces, waarbij het inhoudelijk meedenken van grote waarde is geweest.

Hoofdstuk 2 – Grove onderzoeksofzet

Dit hoofdstuk bevat de grove onderzoeksofzet met als doel een overzicht te geven; gedetailleerde omschrijvingen bevinden zich in de methode-hoofdstukken.

Dit onderzoek is een ontwerponderzoek waarbij een herontwerp van bestaand lesmateriaal (Moderne Wiskunde 11e editie 4vwoB hoofdstuk 8) is gemaakt om het tweeledige einddoel te behalen; verbetering van het inzicht bij leerlingen en een verbeterde tevredenheid over de opbouw van de lesstof bij de docenten. Ruim voor de start van de lessenserie is begonnen met oriënteren, richten en plannen en met de innovatiecyclus (van der Donk & van Lanen, 2016). Vanwege de beperkte omvang van 10 EC is besloten het onderzoek te beperken tot de paragrafen 8-V, 8-1 en 8-2, die de basis voor de lesstof in het hoofdstuk vectoren vormen, en paragraaf 8-3, zwaartepunten en evenwicht. Voor de effectbepaling zijn twee klassen 4 vwo wiskunde B van het CCS met elkaar vergeleken. Enerzijds de controlegroep, waar het bestaande lesmateriaal gevolgd werd, en anderzijds de testgroep, waar het ontwerp toegepast is.

Een ontwerp doorloopt meerdere cycli, meestal van grof naar fijn, bijvoorbeeld door toetsing aan het programma van eisen of door input van verschillende personen uit de praktijk. Dit leidt vaak weer tot aanvullend onderzoek met als gevolg aanvullende eisen. Een groot deel van dit onderzoek bestaat dan ook uit een uitgebreid literatuuronderzoek, dat niet alleen nodig was voor het programma van eisen, maar zelfs om de onderzoeksvraag specifiek te kunnen definiëren. De gehele innovatiecyclus, inclusief het testen ten behoeve van het beantwoorden van de onderzoeksvraag (lessenserie, interviews en proefwerk) kon vanwege de schoolsituatie slechts eenmalig plaatsvinden en slechts in een korte periode voor de zomervakantie, aangezien de behandeling van het onderwerp vectoren in de laatste periode van het schooljaar 2017-2018 heeft plaatsgevonden. Aangezien de gehele innovatiecyclus slechts eenmalig doorlopen is zal, ondanks dat het hier om een herontwerp van bestaand lesmateriaal gaat, in het verslag voornamelijk het woord “ontwerp” gebruikt worden.

De belangrijkste onderdelen van de innovatiecyclus van dit onderzoek zijn:

- Het theoretische onderzoek inclusief programma van eisen, dat het uitgangspunt vormt voor het ontwerp van de lessenserie.
- Het ontwerp van het lesmateriaal, inclusief de analyse van bestaand materiaal, en de uitvoering van de lessenserie ten behoeve van het verbeteren van het inzicht en de tevredenheid over de opbouw. Dit bestaat voor de testgroep uit lesmateriaal voor leerlingen en didactische instrumenten voor de docent en voor beide groepen uit observatielijsten en aanstreeplijsten voor de gegevensverzameling.
- Het ontwerp en de uitvoering van de interviews ten behoeve van het toetsen van het effect op de tevredenheid over de opbouw. Dit bestaat uit interviewleidraden en invulformulieren voor de gegevensverzameling.
- Het ontwerp van het proefwerk inclusief analyse van bestaand materiaal, de afname en beoordeling hiervan ten behoeve van het toetsen van het effect op het inzicht bij leerlingen. Dit bestaat uit het proefwerk inclusief correctiemodel, de instrumenten voor een alternatieve beoordelingsmethode (de MST-methode), en invulschema's voor de gegevensverzameling.

Vervolgens zijn de verzamelde gegevens van de uitvoering getoetst op afwijkingen van het ontwerp of programma van eisen. Hierna heeft de effectbepaling van de toegepaste maatregelen op basis van de verzamelde gegevens plaatsgevonden. Het laatste onderdeel van het onderzoek bestaat uit de conclusie en de discussie. Hierin worden conclusies verbonden aan de onderzoeksresultaten en besproken, inclusief aanbevelingen voor verbeteringen en vervolgonderzoek.

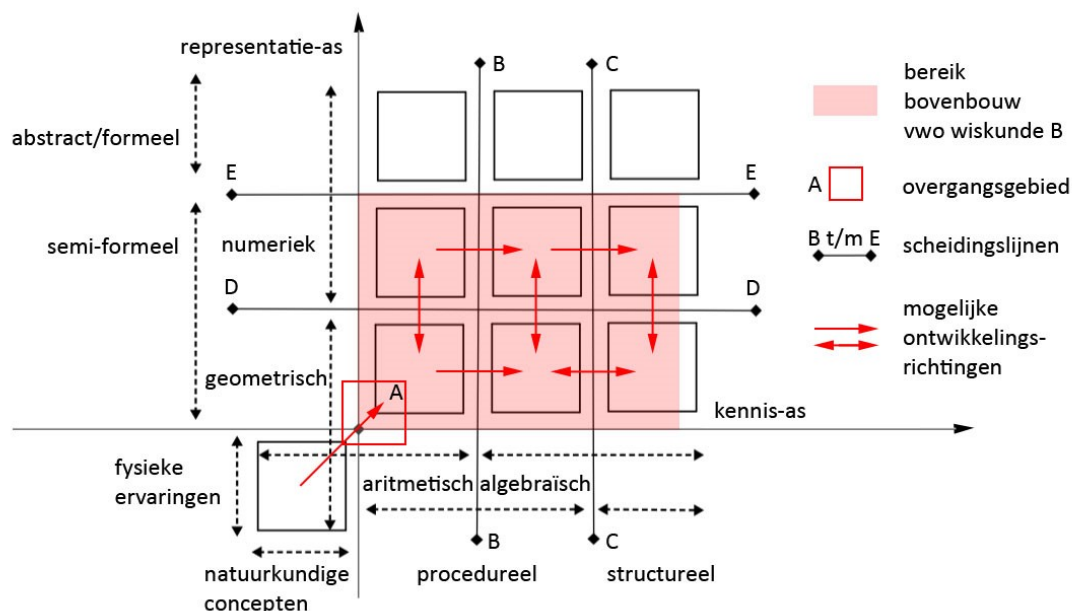
Hoofdstuk 3 – Theoretisch kader

In dit hoofdstuk bevindt zich het literatuuronderzoek waar de bestaande literatuur overzichtelijk is samengevoegd en verduidelijkt met voorbeelden. In het kader van het onderzoek diende dit literatuuronderzoek als basis voor het afbakenen en specifiekere definiëren van de onderzoeksvraag en als basis van het programma van eisen voor het ontwerp van het lesmateriaal en hierdoor ook als basis van de didactische leidraad voor de docent van de testgroep.

3.1 Cognitieve ontwikkeling en didactiek – opbouw raamwerk

Om meer grip te krijgen op de term “inzicht” is onderzoek gedaan naar de cognitieve ontwikkeling en didactiek op het gebied van vectormeetkunde. Met behulp van een raamwerk worden in deze paragraaf alle begrippen en onderlinge relaties uit de meest recente literatuur geordend en voorzien van voorbeelden.

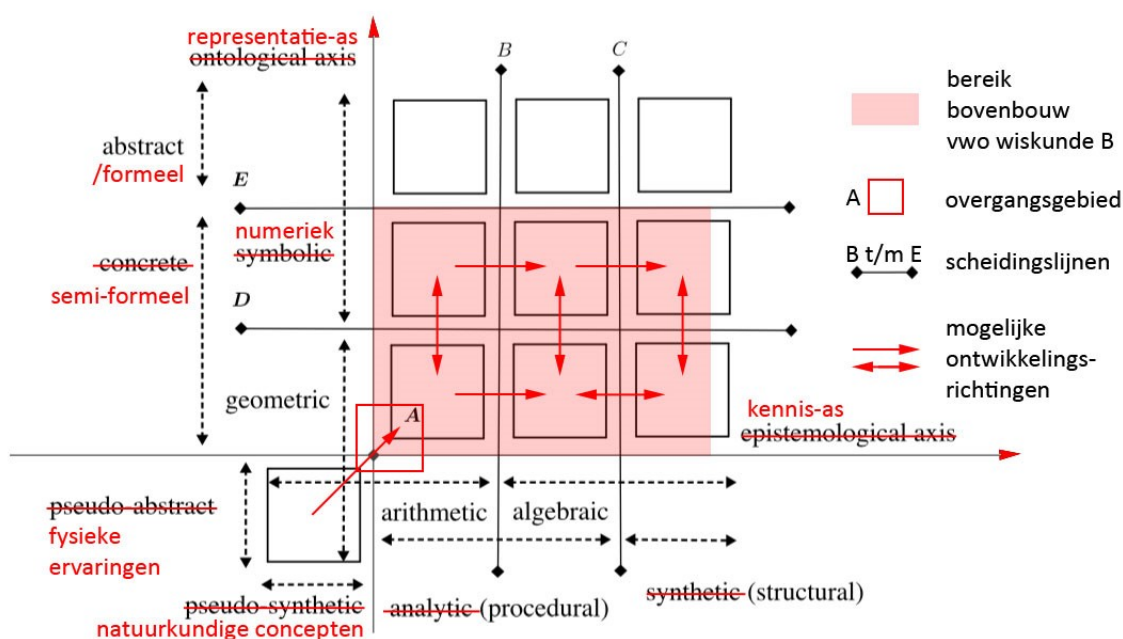
De complexiteit van de cognitieve ontwikkeling betreffende het construct (abstract, complex begrip) vector vraagt om een raamwerk dat voldoende houvast biedt, maar ook flexibel genoeg is om alle theorie in te kunnen verwerken, zie Figuur 2.



Figuur 2 Het aangepaste raamwerk ten behoeve van de ontwikkeling van het construct vector. Aangepast van Kwon (2013).

Kortweg kan het raamwerk als volgt gelezen worden. De beoogde ontwikkelingsrichting bij een lerende van het construct vector loopt van linksonder naar rechtsboven in de grafiek. Elk vierkantje stelt een fase in de ontwikkeling voor. Het middelste vierkantje, tussen de lijnen B en C en de lijnen D en E, behelst bijvoorbeeld het algebraïsch procedureel denken met kolomvectoren. De rode pijlen tussen de vierkantjes geven de meest belangrijke van de mogelijke ontwikkelingsrichtingen aan bij overgangen tussen de fases. Het rode vlak geeft het bereik weer van de vectormeetkunde voor wiskunde B in de bovenbouw van het vwo, waar dit onderzoek zich op richt. Verschillende ontwikkelingsprocessen kunnen vervolgens als verschillende “routes” in het raamwerk ingetekend worden.

Het raamwerk van Kwon (2013) staat aan de basis hiervan, maar behoefde enkele aanpassingen. Figuur 3 toont in zwart het originele raamwerk van Kwon (2013) en in rood belangrijke aanpassingen.

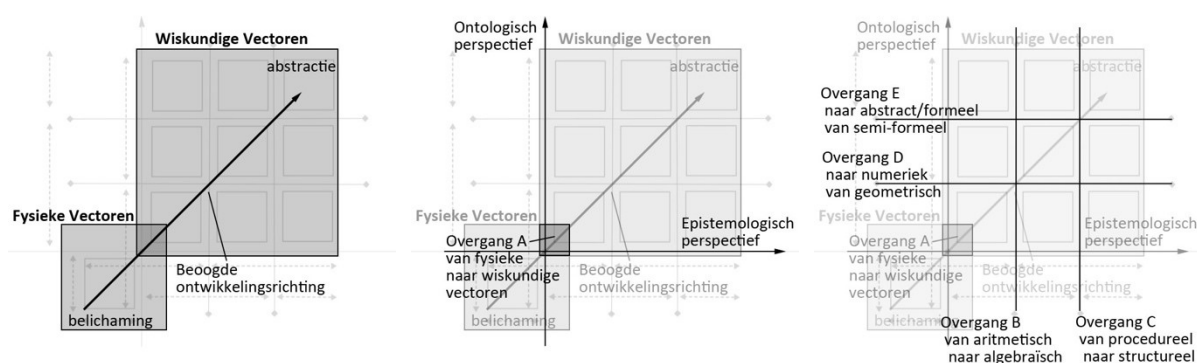


Figuur 3 Het originele raamwerk (Kwon, 2013) en belangrijke aanpassingen ten behoeve van de ontwikkeling van het construct vector.

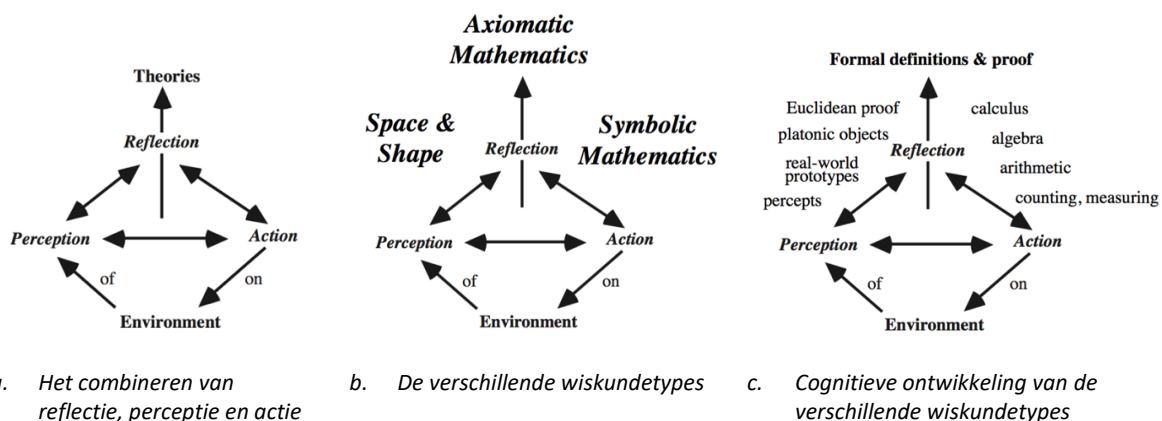
Aanleidingen hiervoor waren verwarrende terminologie en problemen met het inpassen van mogelijke ontwikkelingsroutes. In deze paragraaf wordt eerst de onderbouwing voor het raamwerk en terminologie besproken gebaseerd op Kwon's suggesties voor verbetering en door inpassing van theoretisch achtergronden uit overige literatuur van Sfard (1991), Tall et al. (2001), Watson, Spyrou & Tall (2003), Goddijn (2007) en Donevska-Todorova (2014). Vervolgens wordt dieper ingegaan op de ontwikkelingsfasen. In paragraaf 3.2 worden de faseovergangen in de ontwikkeling en bijbehorende consequenties voor de didactiek uitgebreid besproken.

3.1.1 De gelaagdheid van het raamwerk

Het raamwerk is opgebouwd uit drie lagen van oplopende verfijning, zie Figuur 4. Ter verduidelijking van deze lagen wordt gebruik gemaakt van de theorie van Tall et al (2001), zie Figuur 5.



Figuur 4 Drie lagen van oplopende verfijning. Aangepast van Kwon (2013).



Figuur 5 Opbouw van de theorie betreffende de ontwikkeling van wiskundige concepten. Herdrukt van Tall et al. (2001).

De eerste laag van het raamwerk omhelst twee overlappende gebieden, die van de fysieke en die van de wiskundige vectoren. De pijl geeft de beoogde ontwikkelingsrichting aan, dit is de gehele reis van de fysieke wereld (linksonder) naar de volledig abstracte wiskundige wereld van de vectormeetkunde (rechtsboven), zoals deze ook terug te vinden is in Figuur 5a. Van de omgeving (environment) via de perceptie van en actie hierop volgt, gecombineerd met reflectie, de ontwikkeling naar wiskundige theorieën.

In de tweede laag van het raamwerk is een assenstelsel toegevoegd met de oorsprong in het overlappende gebied van de fysieke en de wiskundige vectoren. De ontwikkeling in dit belangrijke overgangsgebied behelst de introductie van (wiskundige) vectoren, genaamd faseovergang A. In Figuur 2 en Figuur 3 is dit aangeduid met een rood vierkant en de letter A. Op de verticale as bevinden zich de verschillende representaties van vectoren, de vorm waarin vectoren voorkomen. Kwon (2013) spreekt van het ontologische perspectief, de kijk op “het zijn”. Op de horizontale as bevindt zich de kennis-as met daarop verschillende “kennistypes”. Kwon (2013) spreekt van het epistemologische perspectief, de kijk op kennis.

De derde laag van het raamwerk voegt belangrijke overgangen tussen representaties en kennis-types op de assen toe. In het raamwerk zijn deze te vinden ter plaatse van de lijnen B, C, D en E, die het raamwerk opsplitsen in duidelijk onderscheidbare ontwikkelingsfasen in de vorm van vierkantjes. Elke zo’n fase is een combinatie van een kennistype met een representatievorm en heeft zijn eigen vorm van “bewijs”, datgene dat nodig is om iets “waar” te laten zijn. Allereerst worden kort de representatievormen en kennis-types besproken en later worden de verschillende overgangen tussen de fasen en bijbehorende vormen van bewijs uitgebreider besproken.

3.1.2 De verdeling van de assen van het raamwerk

De representaties op de verticale as

- In het gebied van de fysieke wereld zijn dit fysieke ervaringen van natuurlijke verschijnselen die in een vector vertaald kunnen worden, in Figuur 5 (Tall, et al., 2001) onderdeel van de omgeving (environment).
- In het semi-formele bereik van de wiskundige wereld zijn dit de geometrische en de numerieke representatie. De geometrische representatie hoort bij Space & Shape in Figuur 5b, met de vector als pijl. De numerieke representatie hoort bij de symbolische wiskunde in Figuur 5b, met de vector als n-tuple (eindige rij getallen waarbij de volgorde van belang is), in bijvoorbeeld de notatievorm van kolomvector.
De betekenis van de term symbolisch uit Figuur 5b van Tall et al. (2001) richt zich op symbolen zoals deze binnen de aritmetica en algebra gebruikt worden, in dit onderzoek wordt echter een ruimere betekenis aangehouden, namelijk een vector als pijl in de geometrische representatie wordt ook als symbool gezien. Er is daarom in het aangepaste raamwerk gekozen voor de term numeriek in plaats van symbolisch, aangezien getallen aan de basis van deze representatie staan.
- In het abstracte/formele bereik van de wiskundige wereld, de axiomatische wiskunde met formele definities en bewijs (Figuur 5c), wordt de vector omschreven als element van een vectorruimte. Dit valt buiten het bereik van de doelgroep (4 vwo wiskunde B) van dit onderzoek.

De kennistypes op de horizontale as

- In het gebied van de fysieke wereld zijn dit de natuurkundige concepten die horen bij de fysieke ervaringen van natuurlijke verschijnselen.
- De as is verder opgedeeld in aritmetische kennis (rekenkunde: optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met een scalar bij concrete vectoren) die zich in de fysieke en in de wiskundige wereld bevindt en in algebraïsche kennis (veralgemeniseerde rekenkunde, letterrekenen) die zich alleen in de wiskundige wereld bevindt.
Aritmetische en algebraïsche kennis hebben betrekking op verschillende representaties, waar deze in de theorie van Tall et al (2001) in Figuur 5c alleen bij de symbolische (numerieke) wiskunde voorkomen. Een voorbeeld voor aritmetische kennis is bijvoorbeeld het kunnen optellen van concrete (niet variabele) kolomvectoren (numerieke representatie), maar ook het kunnen optellen van concrete (niet variabele) vectoren als pijl (geometrische representatie). Bij de bespreking van de faseovergangen in paragraaf 3.2 wordt hier verder op ingegaan.
- In het gebied van de wiskundige wereld bevinden zich ook nog procedurele kennis (uit het hoofd geleerde procedures) en structurele kennis (object/conceptbegrip). Door deze kennistypes te gebruiken, die betrekking kunnen hebben op alle representaties, ontstaat een raamwerk waarin allerlei mogelijke cognitieve ontwikkelingen als (deel)routes integraal ingetekend en besproken kunnen worden.

Uitleg over de termen procedurele en structurele kennis en over het verwijderen van de termen synthetisch en analytisch van deze as volgt in de volgende twee paragrafen.

3.1.3 Uitleg over de termen procedurele en structurele kennis

Voordat verder gegaan wordt met de opbouw van het raamwerk volgt eerst uitleg over de termen procedurele en structurele kennis.

Tall et al. (2001) beschrijven het procedurele denken als “veiligheid zoeken in uit het hoofd geleerde procedures” en conceptueel denken als “het comprimeren van kennis in een flexibele vorm”. Zij geven

aan dat het wel of niet maken van de stap van procedureel naar conceptueel denken een splitsing veroorzaakt tussen leerlingen die wel of geen succes hebben in het leren van wiskunde. Het is daarom een belangrijke stap en impliceert dat procedureel denken een minder hoog denkniveau voorstelt en voor conceptueel denken plaatsvindt. Zij zien zogenaamde procepten als spil in de overgang tussen procedureel en conceptueel denken. Procepten zijn symbolen die gezien kunnen worden zowel als een proces om te doen alsmede als een concept (verzelfstandigd idee/object) om over na te denken. Bijvoorbeeld het symbool $\frac{3}{4}$ kan gezien worden als het proces “drie delen door 4” of als het object breuk.

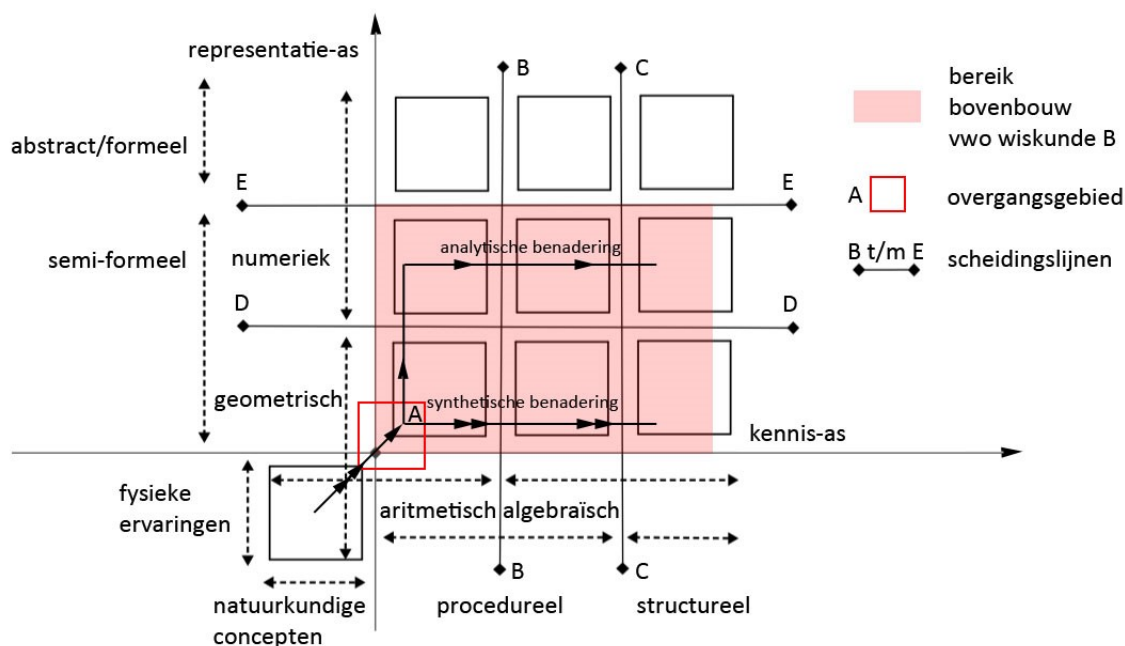
In dit onderzoek wordt echter gebruikgemaakt van de term structureel denken (Sfard, 1991) in plaats van conceptueel denken. Structureel denken omhelst het denken in concepten als unieke objecten, hoe ingewikkeld ook, en wordt door Sfard (1991) omschreven als “tijdloos, onmiddellijk en samenhangend”. Procedurele kennis wordt door Sfard (1991) operationele kennis genoemd en omschreven als “dynamisch, opeenvolgend en gedetailleerd”. Deze procedurele kennis wordt echter neutraler bekeken en er wordt nuance aangebracht in de volgorde tussen procedureel en structureel denken. Dit wordt proces-objectdualiteit genoemd: zonder vaardigheid in de processen ontstaat geen goed idee van de objecten/concepten, maar zonder objecten/concepten zijn de processen betekenisloos en daardoor moeilijk uit te voeren en te onthouden. Bestaand onderzoek over proces-objectdualiteit beperkt zich tot symbolen waarbij inderdaad proces de voorganger van object/concept is in het cognitieve ontwikkelingsproces. Het is echter belangrijk ervan bewust te zijn dat dit bij geometrische representaties minder vanzelfsprekend is (Sfard, 1991) (Kwon, 2013). Bijvoorbeeld, het concept “driehoek” komt in de cognitieve ontwikkeling vóór de procedure van het construeren hiervan.

3.1.4 Uitleg over de termen synthetische en analytische benadering of meetkunde

Historisch gezien is de analytische benadering gegroeid uit/gebouwd op de synthetische benadering. Goddijn (2007) spreekt over “... twee goed onderscheidbare manieren van meetkunde bedrijven: de klassiek synthetische methode...”, waarbij de oplossing van een meetkundig probleem wordt opgebouwd vanuit de gegevens en waarbij figuren en redeneringen de leiding hebben, “...en de moderne analytische manier waarbij gebruik gemaakt wordt van algebra en coördinaten.”

Naast de bestaande klassiek synthetische methode introduceerde de oud-Griekse wiskundige Pappos (ca. 290 - ca. 350 na Chr.) een nieuwe aanpak voor een (meetkundig) probleem, wat hij analyse noemt (Goddijn, 2007). Hier wordt net gedaan alsof het probleem opgelost is, waarna de eigenschappen en kenmerken van die oplossing onderzocht worden. Op een zeker moment laat deze analyse het verband met de gegevens van het probleem zien. Vervolgens wordt de oplossing ook op synthetische wijze opgebouwd. De Franse filosoof en wiskundige René Descartes (1596-1650) gaat nog een stap verder; hij algebraïseert het probleem door de benoeming van lijnstukken met letters, waarna de bij het probleem horende algebraïsche verbanden worden opgesteld en opgelost, al dan niet gebruikmakend van coördinaten. Ook Descartes had als einddoel een synthetische opbouw, dat echter in de moderne betekenis van analytische meetkunde niet meer voorkomt. Historisch gezien kan de term analytisch dus van toepassing zijn op verschillende benaderingen, wel of niet gevolgd door een synthetische opbouw.

Dit soort benaderingen kunnen als routes in het raamwerk beschouwd worden, zie Figuur 6, en de termen analytisch en synthetisch horen daarom niet thuis op de horizontale as. Onder de (moderne) analytische benadering (enkele pijl) wordt verstaan dat na de introductie van vectoren snel van de geometrische representatie naar numerieke representatie overgegaan wordt, in deze representatie volgt de kennisontwikkeling. Bij de synthetische benadering (dubbele pijl) volgt de kennisontwikkeling bij behoud van de geometrische representatie.



Figuur 6 De analytische en synthetische benadering als route in het raamwerk. Aangepast van Kwon (2013).

Uit het onderzoek van Kwon (2013) blijkt de voorkeur van leerlingen bij de moderne analytische benadering te liggen, dus kennisontwikkeling in de numerieke representatie, wat eerder als trend gezien wordt, dan als persoonlijke voorkeur. Het ontstaan van deze trend sluit aan bij Goddijn (2007) die aangeeft dat deze methode, t.o.v. de synthetische methode, leerlingen een stevige en toegankelijke methode biedt. Donevska-Todorova (2014) geeft aan dat het hoofddoel in de bovenbouw moet zijn, het ondersteunen van de herkenning, de vertaalslag en het gebruik van de verschillende benaderingen. Sawyer (1959) benoemt dit als volgt:

“We shall not confine ourselves to geometrical applications, but we shall consider anything that has the same structure as certain geometrical entities. It is, in fact, very helpful to be able to pass quickly from one particular representation to another, now using a geometrical, now a numerical, now a physical realization of a structure, so that we see the analogies between all of these but are never tied to any one of them.”

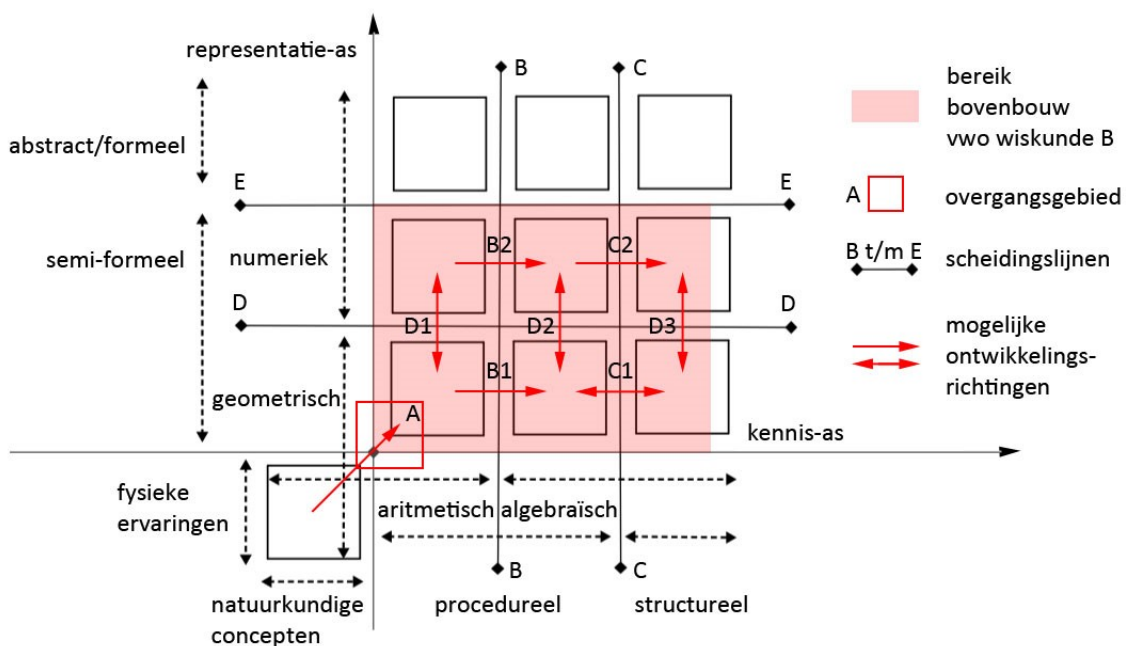
Tall (1995), Watson, Spyrou & Tall (2003), Goddijn (2007) en Donevska-Todorova (2014) onderschrijven dat verschillende representaties verschillende kwaliteiten hebben en dat beide cognitieve groei bevorderen. Hierbij vervangt nieuwe kennis de voorgaande niet, maar integreert deze door het maken van verbindingen (Donevska-Todorova, 2014). Voor het toepassen van bijvoorbeeld de analytische benadering is, naast voldoende algebraïsche vaardigheden, een basis van kennis van figuren en hun meetkundige relaties nodig. Beide zijn belangrijk om een goede keuze te kunnen maken in bijvoorbeeld oplossingsstrategieën (Goddijn, 2007). Analytische oplossingen en hun bewijzen (voorlopers van het axiomatisch bewijzen) kunnen met klassiek synthetische, meer visuele, oplossingen en bewijzen geverifieerd worden, die ook nog eens meer evidentie met zich meebrengen, iets wat (meestal) ontbreekt bij de analytische benadering (Goddijn, 2007).

3.1.5 Het abstracte/formele niveau

In de abstracte wiskunde worden nieuwe theorieën gebaseerd op formele definities (axioma's) en formeel (deductief opgebouwd) bewijs. Elke fase in de voorafgaande ontwikkeling bevat voorlopers hiervan die gebaseerd zijn op waarneming en ervaring (Watson, Spyrou, & Tall, 2003). De stap vanaf het structurele denkniveau van beide routes naar de abstracte axiomatische wiskunde vraagt om een complete verschuiving van de focus, iets waar leerlingen enorme moeite mee hebben (Tall, et al., 2001). Onderzoek (Donevska-Todorova, 2014) toont aan dat het gat in de overgang van het middelbaar onderwijs naar het vervolgonderwijs deels verkleind kan worden met behulp van DGE's (Dynamic Geometry Environments: Dynamische Meetkunde Omgevingen) zoals GeoGebra. Het is belangrijk dat het lesmateriaal dat voor deze DGE's ontwikkeld wordt de verbanden tussen geometrische en numerieke representaties ondersteunt en nog belangrijker dat dit het leren bevordert van de eigenschappen waarop de axiomatische definities gebouwd zijn. Deze eigenschappen staan tevens aan de basis van de vormen van bewijs in de voorgaande fases.

3.2 Cognitieve ontwikkeling en didactiek – faseovergangen raamwerk

De rode pijlen tussen de vierkantjes in het raamwerk geven de meest belangrijke van de mogelijke ontwikkelingsrichtingen aan bij overgangen tussen de fases. Deze faseovergangen inclusief de bijbehorende vormen van bewijs en de didactische consequenties worden in deze paragraaf verder besproken. Zie Figuur 7 en daaronder de omschrijving van de faseovergangen.



Figuur 7 Faseovergangen

- Faseovergang A: de overgang van de fysieke wereld naar de geometrisch-aritmetisch/procedurele fase van de wiskundige wereld. Dit behelst de introductie van (wiskundige) vectoren.
- Faseovergangen D1 t/m D3: de wisselingen tussen de geometrische en numerieke representatie op aritmetisch/procedureel kennisniveau, respectievelijk algebraïsch/procedureel en algebraïsch/structureel kennisniveau.
- Faseovergangen B1 en B2: de overgang van aritmetisch/procedureel naar algebraïsch/procedureel in de geometrische respectievelijk de numerieke representatie.

- Faseovergangen C1 en C2: de overgang van algebraïsch/procedurele kennis naar algebraïsch/structurele kennis in de geometrische respectievelijk de numerieke representatie.

We beginnen bij faseovergang A, de introductie van vectoren, en blijven vervolgens in de geometrische representatie met de bespreking van faseovergang B1. Hierna wordt de stap naar de numerieke representatie gemaakt met faseovergang D1 en vervolgens faseovergang B2. In faseovergang B2 wordt gebruik gemaakt van koppelingen met de parallelle faseovergang B1, waardoor faseovergang D2 niet los besproken hoeft te worden. Faseovergangen C1 en C2 worden naast elkaar in de laatste paragraaf besproken, waardoor faseovergang D3 ook niet los besproken hoeft te worden.

3.2.1 Faseovergang A: de introductie van vectoren

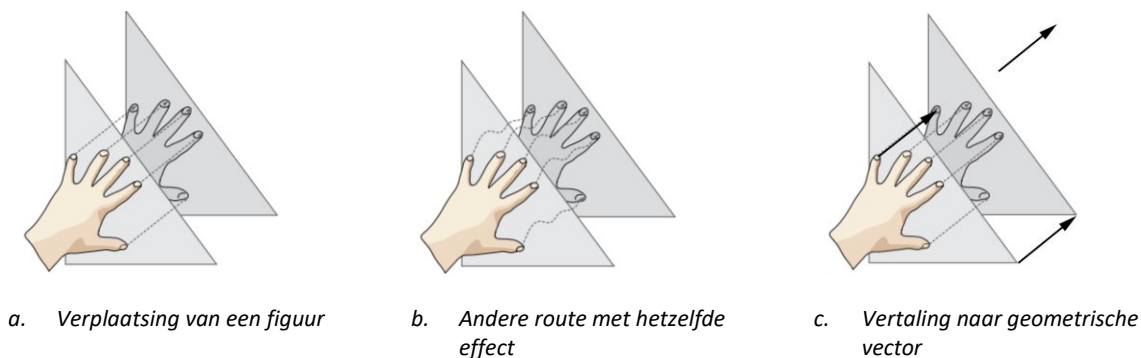
De introductie van vectoren vindt (meestal) plaats vanuit een natuurkundige invalshoek. In de fysieke wereld ontstaat kennis van natuurkundige concepten uit fysieke ervaringen van natuurlijke verschijnselen inclusief acties hierop, bijvoorbeeld door te experimenteren. Natuurlijke verschijnselen en natuurkundige concepten die betrekking hebben op vectoren zijn bijvoorbeeld verplaatsing, snelheid, versnelling, kracht en impuls, alle natuurkundige grootheden met grootte en richting (Watson, Spyrou, & Tall, 2003). De eerste stap in de wiskundige wereld is de weergave van een bepaalde grootte met een bepaalde richting als pijl in de geometrisch-aritmetische fase, een concrete vector. Zo'n geometrische vector is een procept in de zin van Tall et al. (2001). Het doel is deze pijl als concept te zien, als een object waarmee gemanipuleerd kan worden, los van de originele context. De begrippen equivalentie en vrije vector spelen een belangrijke rol hierin. Donevska-Todorova (2014) spreekt van een fase waarin vectoren gezien worden als categorieën van parallelle, identiek gerichte en even lange pijlen.

Het is belangrijk te realiseren dat het gebruik van verschillende natuurlijke verschijnselen met bijbehorende fysieke ervaringen voor- en nadelen voor conceptvorming oplevert, mede afhankelijk van het verschijnsel. Met behulp van twee contexten, verplaatsing en kracht, wordt dit geïllustreerd. Om leerlingen deze verschillende contexten te laten begrijpen en met elkaar te verbinden raden Watson, Spyrou & Tall (2003) reflectiemomenten aan, bijvoorbeeld door klassengesprekken, en zoals hierna wordt toegelicht, hierbij te focussen op het effect van acties en niet de acties zelf.

Het weergeven van verplaatsing en kracht in de pijl-vorm lijkt vanwege de eigenschappen grootte en richting een vrij kleine stap, maar niettemin behoeft dit aandacht.

Verplaatsing

Figuur 8 geeft de actie van de verplaatsing van een driehoek weer.

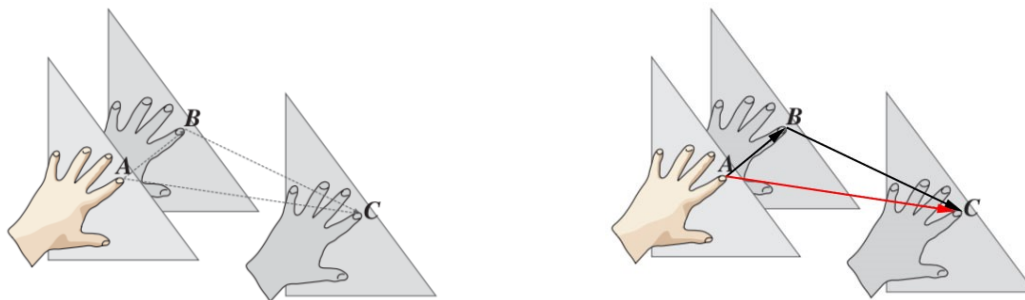


Figuur 8 Benadrukken van het effect bij vectoren als verplaatsing. Aangepast van Watson, Spyrou & Tall (2003).

In Figuur 8a wordt de driehoek in een rechte lijn verplaatst en lijkt de stap naar het intekenen van een geometrische vector klein. In Figuur 8b is het effect van de verplaatsing gelijk, echter geeft de

kronkelige weg een heel ander “gevoel” bij de verplaatsing (Watson, Spyrou, & Tall, 2003). Door de focus op het effect van de verplaatsing te leggen zijn beide verplaatsingen met een vector met gelijke richting en grootte weer te geven. In eerste instantie ligt het vast tekenen van de vector aan de driehoek misschien het meest voor de hand, alsof er een aangrijpingspunt is, een gebonden vector. Als we puur focussen op richting en grootte is zo’n verplaatsing weer te geven met een vector zonder aangrijpingspunt op de driehoek, een vrije vector, zie Figuur 8c. Gevolg is dat vrije vectoren gelijk (equivalent) zijn als richting en grootte gelijk zijn, echter gebonden vectoren zijn pas gelijk als ook het aangrijpingspunt gelijk is. Vanuit natuurkundige context worden vectoren vaak als gebonden opgevat. Dit idee van gebondenheid, het “vastzitten” van vectoren zoals later ook bij krachten zal blijken, kan de ontwikkeling van het concept vector in de wiskundige wereld wat in de weg staan.

Ook bij het uitvoeren van meerdere acties is het verstandig te focussen op het effect. Figuur 9 geeft twee routes voor de verplaatsing van een figuur weer.



a. Het effect van twee verplaatsingen. Herdrukt van (Watson, Spyrou, & Tall, 2003).

b. De som van twee vectoren. Aangepast van (Watson, Spyrou, & Tall, 2003).

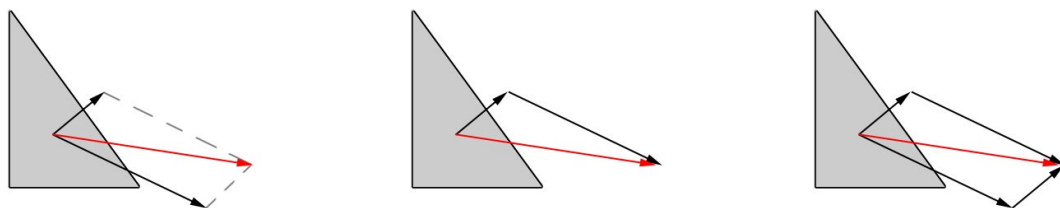
Figuur 9 Benadrukken van het effect bij optelling

De rechtstreekse route van A naar C in Figuur 9 geeft echter een heel ander gevoel dan de route van A naar C via B, echter het effect is hetzelfde. Het uitvoeren van de actie van het verplaatsen van A naar B en daarna van B naar C kan gezien worden als een optelling van beide verplaatsingen (som van de vectoren), zie Figuur 9b. En vanwege hetzelfde effect is dit dan gelijk aan de (directe) verplaatsing van A naar C (de vector van A naar C). Met behulp van verplaatsing en de focus op het effect ontstaat zo op heel vanzelfsprekende wijze de kop-staart-methode voor de somvector.

Krachten

Waar een verplaatsing iets ruimtelijks is en goed past in een geometrische weergave waar de afstand van de verplaatsing ook overeenkomt met de lengte van de pijl, ligt dit voor krachten iets anders. Krachten hebben ook een richting, echter geen afstand maar een grootte. Veelal zullen leerlingen deze weergave hiervan met pijlen met aangrijpingspunt zich bij natuurkunde al eigen gemaakt hebben. En is er een parallel te leggen naar de verplaatsing van een figuur; voor een bepaalde verplaatsing in een bepaalde richting is immers een bepaalde kracht nodig in dezelfde richting. Desalniettemin is het goed om te beseffen dat een kracht een heel ander “gevoel” geeft dan een verplaatsing, terwijl dit met hetzelfde symbool weergegeven wordt (Watson, Spyrou, & Tall, 2003).

Bij natuurkunde wordt het bepalen van het effect van twee vectoren, de resultante, (vaak) aangeleerd met de parallellogram-methode. Zie Figuur 10a als voorbeeld met twee gelijktijdig werkende krachten op een object in een aangrijpingspunt.



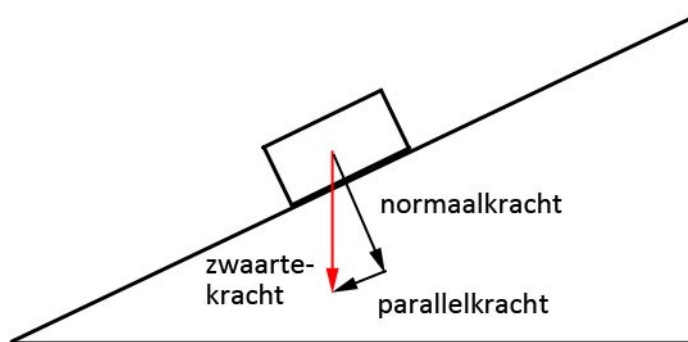
a. Parallellogram-methode bij krachten

b. Kop-staart-methode bij krachten

c. Commutativiteit kop-staart-methode via parallellogram

Figuur 10 Parallellogram- en kop-staart-methode bij krachten

Vanuit Figuur 10a lijkt de kop-staart-methode vrij makkelijk te koppelen aan krachten, zie Figuur 10b, het effect is namelijk hetzelfde. Hier moet echter een verschuiving van opvatting plaatsvinden, de tweede kracht heeft nu namelijk geen aangrijpingspunt meer op het object. De gebonden vector wordt met behulp van deze methode behandeld als vrije vector. De natuurkundige context inclusief aangrijpingspunt moet als het ware losgelaten worden. Ook hier kan de focus op het effect de juistheid van beide methodes helpen inzien. Omgekeerd moet soms ook juist teruggegaan worden naar de context, zoals bijvoorbeeld bij het ontbinden van de vector van de zwaartekracht in Figuur 11.



Figuur 11 Zwaartekracht op een blokje. Aangepast van (Watson, Spyrou, & Tall, 2003)

De methode voor het tekenen (en later berekenen) zorgt ervoor dat de kracht parallel aan de helling ver van het blokje af komt te liggen. Er moet gerealiseerd worden dat deze kracht op het blokje werkt, ondanks dat deze niet in het aangrijpingspunt aangrijpt.

De kop-staart-methode in Figuur 10b kan ook het “gevoel” wekken dat de krachten na elkaar werken in plaats van tegelijkertijd. Met behulp van de eigenschappen van een parallellogram is goed aan te tonen dat de volgorde niet van invloed is op het effect, de commutatieve eigenschap, zie Figuur 10c. Dit aantonen op basis van bekende geometrische eigenschappen (in dit geval van een parallellogram) fungeert in deze fase als bewijs.

Ook vanuit de context van verplaatsing kan de commutatieve eigenschap op deze manier getoond worden, zie Figuur 13 in het volgende onderdeel, waar het belang van het begrip vrije vector voor de conceptvorming verder verduidelijkt wordt.

3.2.2 Faseovergang B1: de overgang van aritmetisch/procedureel naar algebraïsch/procedureel in de geometrische representatie.

In plaats van eenvoudige bewerkingen met concrete geometrische vectoren (pijlen met een bepaalde richting en lengte) wordt in deze fase gewerkt met variabele geometrische vectoren. Hierbij wordt gebruikgemaakt van algemene benamingen (tevens symbolen) voor vectoren en voor de bewerkingen

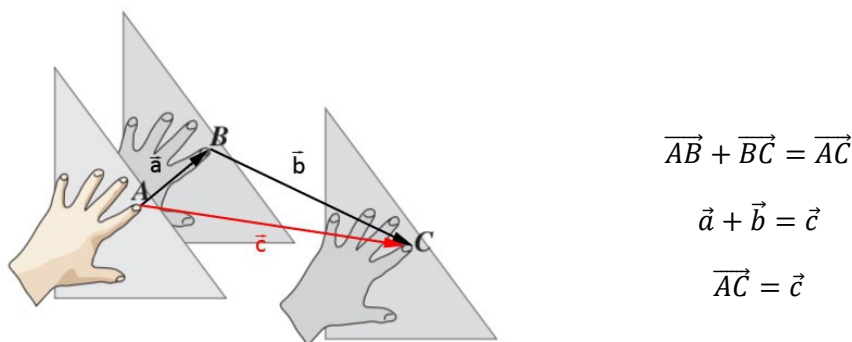
zoals optellen, bijvoorbeeld $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. De overgang vindt plaats door eerst concrete vectoren en bewerkingen algebraïsche symbolen te geven, waarna veralgemenisering moet zorgen voor algemeen geldende (reken)regels, waarmee makkelijk te werken is en die makkelijk uit te breiden zijn.

Een voordeel van algebraïsche omschrijvingen is dat ze makkelijk geverbaliseerd worden: “vector a plus vector b is vector c”, hierdoor zal het benoemen van vectoren vaak al in de aritmetische fase, met concrete vectoren, plaatsvinden. Deze verbale omschrijving is vaak nodig om in de geometrische representaties de procedure te begrijpen. Sfard (1991) geeft hierover aan dat geometrische representaties vaak alleen een overzichtsbeeld geven en in het algemeen helpen structureel over ideeën na te denken, terwijl verbale uitleg vaak procedureel denken oplevert. De vertaling van de verbale uitleg in een algebraïsche omschrijving ondersteunt dus het begrip van de procedure in de geometrische representatie, maar maakt ook de stap mogelijk naar veralgemenisering en uitbreiding van rekenregels. Waar eerst namelijk met concrete vectoren gewerkt wordt, een vector heeft dan een vaste lengte en richting, wordt het makkelijker deze te zien als variabele vector. Hierbij zijn vectoren met hetzelfde symbool equivalent, net zoals bij gewone algebra gelijke symbolen gelijke waarden voorstellen.

Symbolen zoals $\vec{a}$, maar ook combinaties van symbolen zoals $\vec{a} + \vec{b}$, zijn procepten en fungeren dus als spil tussen procedureel en structureel denken, maar zoals later zal blijken fungeren ze ook als spil tussen de geometrische en numerieke weergave. In deze paragraaf wordt eerst aandacht besteed aan het belang van een afgewogen keuze in naamgeving en vervolgens aan voorbeelden van algebraïsche bewerkingen in geometrische representaties.

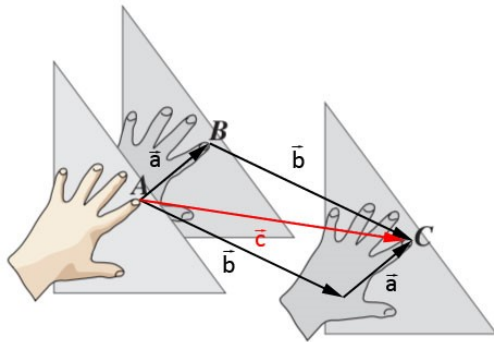
Keuze naamgeving vectoren

In de aritmetische fase kan de vector tussen de punten A en B bijvoorbeeld $\overrightarrow{AB}$ of $\vec{a}$ genoemd worden. Zie Figuur 12 voor het geval van de eerder gebruikte somvector in het geval van verplaatsing. Het lijkt vanzelfsprekend dat geldt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ en $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, echter hier kan $\overrightarrow{AB}$ meer opgevat worden als gebonden aan de punten A en B, terwijl de benaming $\vec{a}$ dit meer loslaat. Watson, Spyrou & Tall (2003) raden aan gebruik te maken van benamingen met kleine letters, zoals $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Dat deze keuze in naamgeving invloed heeft op de cognitieve ontwikkeling wordt toegelicht met behulp van de ontwikkeling van de commutatieve eigenschap binnen de context van verplaatsing, zie Figuur 13.



Figuur 12 Benaming vectoren bij de somvector. Aangepast van (Watson, Spyrou, & Tall, 2003).

De formule $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ klopt voor het gevoel, het effect van de verplaatsing van punt A naar punt B en dan van punt B naar punt C is gelijk aan de directe verplaatsing van punt A naar punt C. Kijken we echter naar Figuur 13 dan lijkt de formule $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ niet te kloppen; hoe kun je immers van punt A naar punt C komen, door van punt B naar punt C en dan van punt A naar punt B te gaan? Als vastgehouden wordt aan de benaming van begin- en eindpunt van de vectoren zal dit ook in geometrische representatie er vreemd uitzien.



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$$

Figuur 13 Benaming vectoren commutativiteit. Aangepast van (Watson, Spyrou, & Tall, 2003).

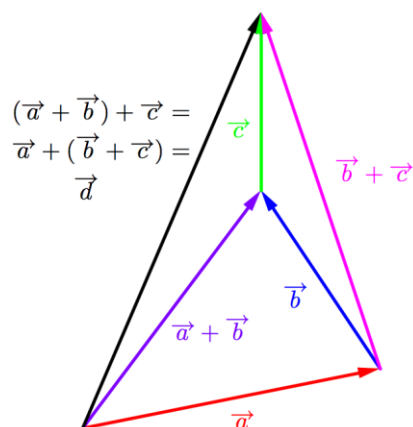
De formule $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$ daarentegen ziet er veel natuurlijker uit, het lijken immers gewone variabelen en daarvoor geldt commutativiteit ook. In de numerieke representatie volgt hoe het verband van commutativiteit tussen vectoren en gewone variabelen gemaakt kan worden. En ondanks dat in de geometrische representatie $\vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$ een verplaatsing via een ander punt dan B voorstelt is er geen conflict meer tussen benaming van punten in de formule.

In het algemeen geldt dat het met behulp van benamingen een stuk makkelijker is om relaties tussen vectoren kort te omschrijven. Bijvoorbeeld de vector die dezelfde richting heeft als $\vec{a}$ maar twee keer zo lang is, is nu als $2\vec{a}$ te omschrijven, maar ook als $\vec{a} + \vec{a}$. En de vector die even lang is, maar tegengestelde richting heeft als $-\vec{a}$.

Voorbeeld 1: associatieve eigenschap somvector

Als voorbeeld van de stap naar het gebruik van algebra wordt in Figuur 14 de associatieve eigenschap van de som van drie vectoren $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ op procedureel niveau getoond. Dit houdt in dat telkens gebruik wordt gemaakt van de kop-staart-methode voor twee vectoren. Om de procedure te kunnen volgen wordt naast de geometrische representatie de algebraïsche omschrijving gebruikt. Vanwege het kleurgebruik is deze figuur al eerder in de fase zonder algebraïsche omschrijving te gebruiken. Waar in de geometrische representatie, met concrete vectoren, heel goed te zien is dat beide optellingen tot hetzelfde effect leiden, namelijk $\vec{d}$, zet de algebraïsche omschrijving meer aan tot veralgemenisering van de regel met willekeurige vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$. Ook DGE's (Dynamische Meetkunde Omgevingen) zoals GeoGebra kunnen veralgemenisering bevorderen, hiermee kunnen vectoren in een figuur makkelijk gemanipuleerd worden, het onderzoeken, waardoor het vermoeden van de algemene juistheid van de regel ondersteund kan worden en eventueel zelfs evident kan worden, waarna via de gevonden eigenschappen het "bewijs" opgebouwd kan worden (Donevska-Todorova, 2014).

De notatie van $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ en $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ zonder haakjes als $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ volgt logisch uit de kop-staart-route in Figuur 14, beide hebben als resultaat $\vec{d}$.



a. Geometrische representatie

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{d}$$

en

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{d}$$

b. Algebraïsche omschrijvingen

Figuur 14 De associatieve eigenschap bij somvectoren

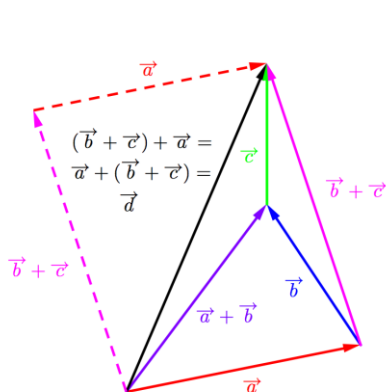
Ten opzichte van de algebraïsche omschrijving is het belangrijk in de geometrische representatie goed na te denken over de plaats van de vectoren, zoals in het volgende voorbeeld zal blijken.

Voorbeeld 2: commutatieve eigenschap drie vectoren

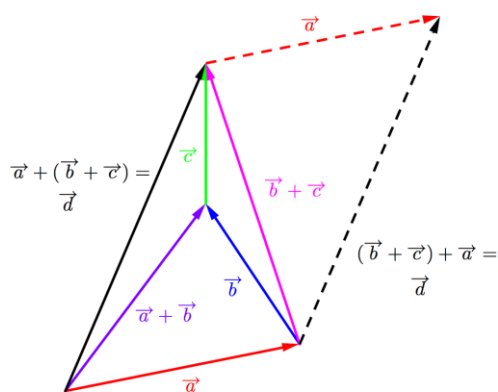
Via de algebraïsche omschrijving kan de commutatieve eigenschap van de som van twee vectoren, $\vec{a} + \vec{q} = \vec{q} + \vec{a}$, met behulp van substitutie met $\vec{q} = \vec{b} + \vec{c}$ als het ware uitgebreid worden naar drie vectoren:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{a} \quad (= \vec{d})$$

Wordt in de geometrische representatie ervoor gekozen $(\vec{b} + \vec{c}) + \vec{a}$ te tekenen door de somvector $\vec{b} + \vec{c}$ (gestippeld) in het “beginpunt” neer te leggen en vector $\vec{a}$ (gestippeld) kop-staart te leggen, zie Figuur 15a, dan liggen beide zwarte vectoren $\vec{d}$ ook op dezelfde plaats. Op dezelfde manier als in Figuur 10c en Figuur 13 wordt er een parallellogram gevormd, eerst de zijden met de diagonaal als resultaat van de som.



a. Gebruik nieuwe ligging $\vec{b} + \vec{c}$



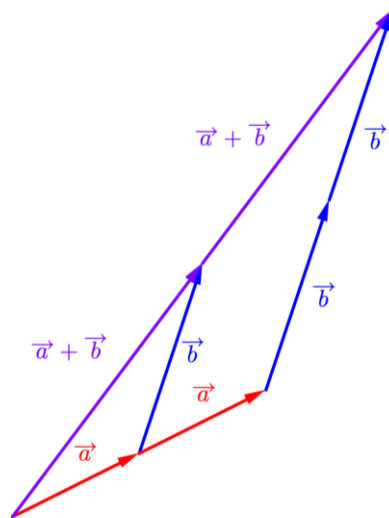
b. Gebruik bestaande ligging $\vec{b} + \vec{c}$

Figuur 15 Uitbreiding commutatieve eigenschap

In Figuur 15b echter, wordt de vector $\vec{d}$ (gestippeld) kop-staart gelegd aan de bestaande somvector $\vec{b} + \vec{c}$ en ontstaat een equivalente zwarte vector $\vec{d}$ (gestippeld). Die equivalentie is misschien voor leerlingen niet meteen evident. Deze volgt natuurlijk ook uit de eigenschappen van een parallellogram, maar hiervoor is wel een iets andere kijk op de eigenschappen hiervan nodig. Figuur 15a sluit meer aan bij de eerdere uitleg, maar Figuur 15b vraagt flexibeler gebruik te maken van de eigenschappen van figuren.

Voorbeeld 3: distributieve eigenschap van de scalaire vermenigvuldiging ten opzichte van de som van twee vectoren

Een ander voorbeeld van een algebraïsche bewerking in de geometrische representatie is de distributieve eigenschap van de scalaire vermenigvuldiging ten opzichte van de som van twee vectoren: $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ met $k \in \mathbb{R}$, in Figuur 16 getoond voor $k = 2$.



$$2(\vec{a} + \vec{b}) =$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} + \vec{b})$$

Is in de figuur gelijk aan:

$$2\vec{a} + 2\vec{b} =$$

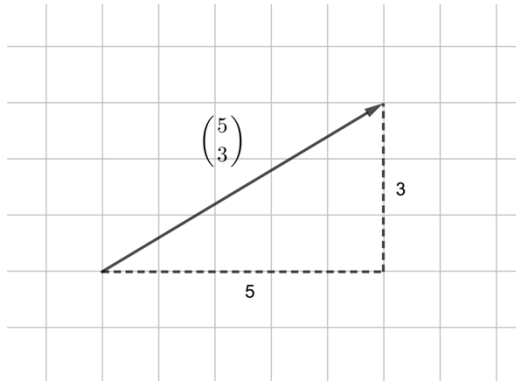
$$(\vec{a} + \vec{a}) + (\vec{b} + \vec{b})$$

Figuur 16 Geometrische representatie distributieve eigenschap

In de geometrische representatie kan via gelijkvormigheid van driehoeken (voorkennis van de leerlingen) bewezen worden dat deze eigenschap geldt voor $k = 2$. De uitbreiding naar $k \in \mathbb{N}$ heeft een inductief karakter immers uitbreiding levert telkens weer een gelijksoortig bewijs met gelijkvormige driehoeken op. Voor negatieve gehele getallen levert dit een punt-gespiegeld figuur op met gelijksoortig bewijs met gelijkvormige driehoeken. Voor breuken kan voor $k = \frac{1}{2}$ eenzelfde figuur als Figuur 16 gebruikt worden waarbij deze juist “gehalveerd” wordt. Gelijkvormigheid van driehoeken en proportionaliteit zal voor het gevoel van de doelgroep (4 vwo wiskunde B) voldoende “bewijs” leveren om te veralgemeniseren naar $k \in \mathbb{R}$.

3.2.3 Faseovergang D1: de overgang tussen de geometrische en numerieke representatie op aritmetisch/procedureel kennisniveau; de introductie van numerieke-aritmetische vectoren

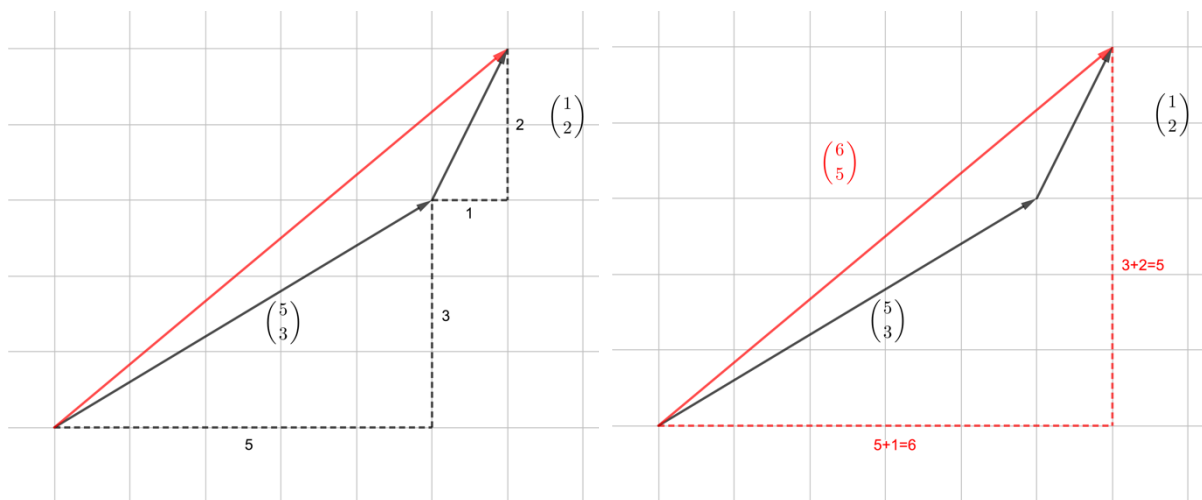
De introductie van de numerieke vector vindt (meestal) plaats vanuit een geometrische vector in een (Cartesisch) rooster. In Figuur 17 is de overgang naar de (concrete) numerieke vector met behulp van “hokjes tellen” (Watson, Spyrou, & Tall, 2003) te zien.



Figuur 17 Overgang aritmetische geometrische naar aritmetische numerieke representatie vector

De pijl vertegenwoordigd hier bijvoorbeeld de actie van een verplaatsing van vijf hokjes naar rechts en drie hokjes omhoog. Een numerieke notatievorm hiervan is onder andere de kolomvector, hier $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, waar de getallen 5 en 3 kentallen genoemd worden. Numerieke vectoren in zijn algemeen zijn n-tuples (geordende paren, drietallen etc.) (Donevska-Todorova, 2014), voor deze doelgroep beperkt zich dit tot 2-tuples. Deze kolomvector is net als de geometrische vector een procept en kan dus als actie, maar ook als object gezien worden.

De som van twee vectoren kan ook met deze dubbele representatie in combinatie met hokjes tellen weergegeven worden, zie Figuur 18.



Figuur 18 Overgang aritmetische geometrische naar aritmetische numerieke representatie somvector

De som van twee vectoren kan nu als commutatief gezien worden doordat de som van de kentallen commutatief is (Watson, Spyrou, & Tall, 2003). Op het aritmetische niveau ziet het “bewijs” er dan als volgt uit:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+1 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Door gebruik te maken van de commutatieve eigenschap van de som van de kentallen geldt ook:

$$\binom{5}{3} + \binom{1}{2} = \binom{5+1}{3+2} = \binom{5+1}{2+3} = \binom{5}{2} + \binom{1}{3} \quad \text{en} \quad \binom{5}{3} + \binom{1}{2} = \binom{5+1}{3+2} = \binom{1+5}{3+2} = \binom{1}{3} + \binom{5}{2}.$$

Uit de “oude (aritmatische) waarheid” (Watson, Spyrou, & Tall, 2003) dat $5 + 1 = 1 + 5$, omdat het resultaat van beide sommen “6” is, kan vervolgens de deur geopend worden naar een oneindige hoeveelheid mogelijkheden (in $\mathbb{R}$) voor de som van de kentallen en hierdoor ook voor de som van (twee of meer) vectoren bij de gegeven resultaatvector.

Met behulp van een rooster zijn ook aritmatische rekenregels makkelijk duidelijk te maken en te koppelen aan de geometrische representatie. Bijvoorbeeld dat de vector die dezelfde richting als $\binom{5}{3}$ heeft, maar twee keer zo lang is, als $2\binom{5}{3}$ te omschrijven is. In een rooster kan duidelijk gemaakt worden dat hiervoor geldt: $2\binom{5}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{3} = \binom{5+5}{3+3} = \binom{10}{6} = \binom{2 \cdot 5}{2 \cdot 3}$. Op soortgelijke wijze wordt de omschrijving $-\binom{5}{3}$ voor de vector die even lang is als $\binom{5}{3}$, maar tegengestelde richting heeft, in een rooster dan ook meteen duidelijk, aangezien hiervoor geldt $-\binom{5}{3} = \binom{-5}{3}$. Met behulp van het gevoel van de leerlingen voor proportionaliteit is dit voor elke scalar in $\mathbb{R}$ uit te leggen.

De stap naar algebraïsch kan vervolgens vrij makkelijk gemaakt worden.

3.2.4 Faseovergang B2: de overgang van aritmetisch/procedureel naar algebraïsch/procedureel in de numerieke representatie.

Net als bij geometrische vectoren wordt in deze fase de stap van concrete naar variabele vectoren gemaakt. Ten eerste wordt voor de (concrete) numerieke vectoren en de bijbehorende geometrische vectoren dezelfde algebraïsche naamgeving gebruikt, bijvoorbeeld als in Figuur 17 de concrete geometrische vector $\vec{a}$ genoemd wordt dan geldt ook $\vec{a} = \binom{5}{3}$. Deze symbolen zijn dan ook de spil tussen beide representaties. Ten tweede worden in het overgangsbied tussen aritmetisch numeriek en algebraïsch numeriek, de kentallen met letters weergegeven. Plaatsing van vectoren in een Cartesisch assenstelsel levert dan het algemene symbool $\binom{x}{y}$ voor een variabele numerieke vector op, wat tevens een procept is. Veralgemeinering moet vervolgens zorgen voor algemeen geldende (reken)regels, waarmee makkelijk te werken is en die makkelijk uit te breiden zijn.

Ook hier kan naamgeving in de vorm van $\overrightarrow{AB}$ gebruikt worden voor een vector van punt A naar punt B. Hier is gekozen gebruik te maken van kortere notaties zoals $\vec{a}$, ook vanwege het probleem voor de ontwikkeling van het begrip vrije vector, zoals bij de geometrische representatie ook het geval was. Voor de kentallen kan een variatie aan notatievormen gebruikt worden, bijvoorbeeld $\vec{a} = \binom{x_a}{y_a}$ om het algemene symbool $\binom{x}{y}$ (twee dimensies) onderscheidend te maken voor $\vec{a}$, maar ook $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ (Noordhoff Uitgevers bv, 2014a) wat de stap naar de notatie bij hogere dimensies makkelijker maakt. Waar geen verband met de context (benaming assen/dimensies/vectornaam) gewenst is, uit zich dit ook in de notatie, bijvoorbeeld in de keuze van $\binom{a}{b}$ voor de steunvector en $\binom{p}{q}$ voor de richtingsvector (Noordhoff Uitgevers bv, 2014a) bij de vectorvoorstelling van een lijn.

De som van twee vectoren kan nu berekend worden door de variabele kentallen op te tellen:

$$\vec{a} + \vec{b} = \binom{x_a}{y_a} + \binom{x_b}{y_b} = \binom{x_a + x_b}{y_a + y_b}$$

Het bewijs van de commutatieve eigenschap uit Figuur 13 volgt in de numerieke representatie uit de bestaande algebraïsche kennis van variabelen dat $x + y = y + x$. Het bewijs hiervoor is voortgekomen uit de “oude (aritmatische) waarheden”, waarvan we uit ervaring en observatie weten dat deze “waar”

zijn, bijvoorbeeld $5 + 1 = 1 + 5$, en “aannemen dat het (de oude waarheden) natuurlijkerwijze in de algebra standhoudt” (Watson, Spyrou, & Tall, 2003). Op het algebraïsche niveau ziet het “bewijs” er dan als volgt uit:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_b + x_a \\ y_b + y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \vec{b} + \vec{a}$$

Met behulp van de veralgemenisering van het vermenigvuldigen van een vector met een scalar,

$$k\vec{a} = k \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_a \\ ky_a \end{pmatrix}$$

kan vervolgens, in combinatie met de somregel en de distributieve eigenschap bij variabelen $k(x + y) = kx + ky$, de distributieve eigenschap van de scalaire vermenigvuldiging ten opzichte van de som van twee vectoren uit Figuur 16 bewezen worden via numerieke vectoren:

$$\begin{aligned} 2(\vec{a} + \vec{b}) &= 2 \left(\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} \right) = 2 \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_a + x_b) \\ 2(y_a + y_b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_a + 2x_b \\ 2y_a + 2y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_a \\ 2y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_b \\ 2y_b \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = 2\vec{a} + 2\vec{b} \end{aligned}$$

Een speciale vector is de plaatsvector van een punt A (Watson, Spyrou, & Tall, 2003), dit is de vector die O (een willekeurige referentieoorsprong) transleert naar A . In een twee-dimensionaal assenstelsel is het beginpunt de oorsprong $O(0,0)$ en het eindpunt het punt waar de plaats van bepaald wordt, bijvoorbeeld $A(x_A, y_A)$. Deze wordt dan vaak wel genoteerd met $\vec{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$. De kentallen komen overeen met de coördinaten van het punt. Deze vector is speciaal aangezien deze dus vanuit een gegeven (wiskundige) context gezien kan worden als gebonden vector.

De koppeling naar de geometrische representatie blijft vanwege het bereik van de doelgroep goed mogelijk, het beperkt zich hier immers tot twee dimensies. Voor vectoren in de ruimte, dus met drie dimensies, wordt dit vanwege gebrek aan voorkennis al lastiger. Nog hogere dimensies vallen buiten de waarnemingszin, maar ook buiten het bereik van de doelgroep.

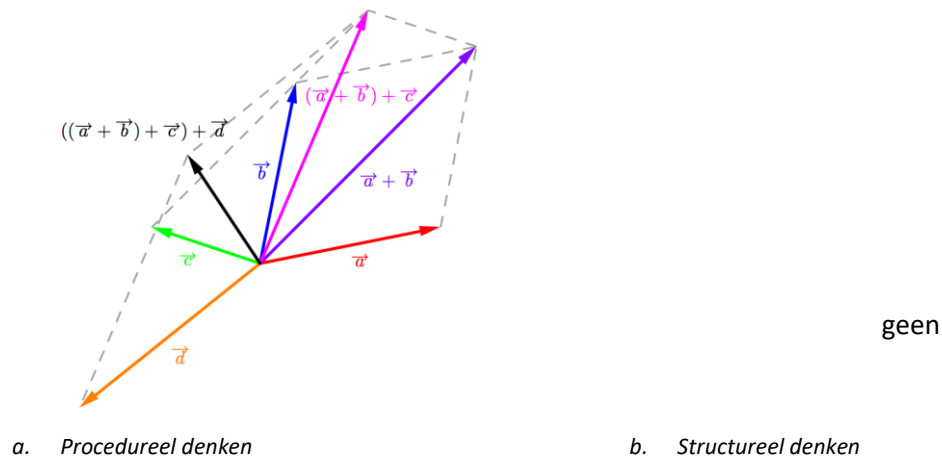
3.2.5 Faseovergangen C1 en C2: de overgang van algebraïsch/procedurele kennis naar algebraïsch/structurele kennis in de geometrische respectievelijk de numerieke representatie.

Het doel is het bereiken van zowel structureel als procedureel denken, waarin onder andere context, symboolkeuze, methodekeuze en representatievorm een complex samenspel in het leerproces vertonen. Zoals eerder al aangegeven speelt hierbij de proces-objectdualiteit een rol. Dit houdt in dat zonder vaardigheid in de processen geen goed idee ontstaat van de objecten/concepten, maar zonder objecten/concepten zijn de processen betekenisloos en daardoor moeilijk uit te voeren en te onthouden. Procepten worden gezien als de spil in de overgang tussen procedureel en conceptueel denken. Deze procepten zijn symbolen die gezien kunnen worden zowel als een proces om te doen alsmede als een concept (verzelfstandigd idee/object) om over na te denken.

Ter illustratie van deze overgang wordt de som van drie vectoren op procedureel niveau (Figuur 14) verder uitgebreid naar vier vectoren: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ (aangepast van Kwon, 2013) om het structurele niveau te bereiken. Net zoals bijvoorbeeld $\vec{a} + \vec{b}$ als procept fungeert, kan dit “oudere” symbool/procept als het ware uitgebreid worden naar het nieuwe procept $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$. De stap naar structureel denken bestaat uit het zien van het procept $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ als object, inclusief uitbreiding met meer dan vier vectoren. Door gebruik te maken van beide methodes voor de somvector zowel in

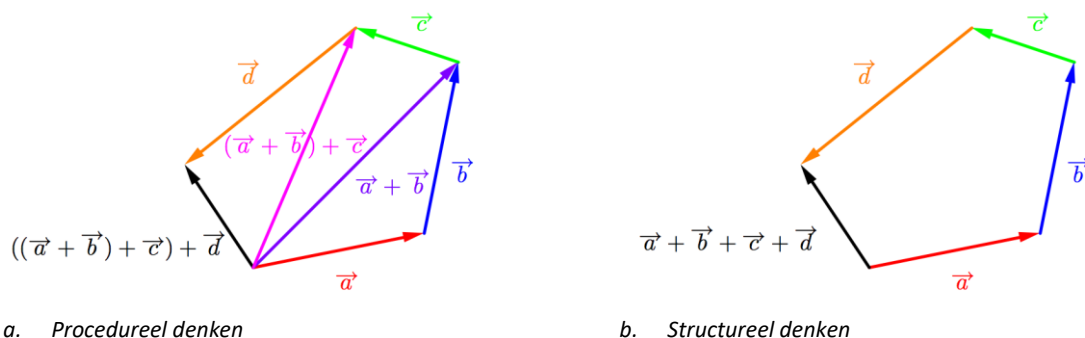
geometrische representatie als in numerieke representatie zal duidelijk worden dat elke manier voor- en nadelen heeft. In alle gevallen speelt algebraïsche symboolomschrijving een belangrijke rol, namelijk ter verduidelijking van procedures in geometrische representaties en als spil tussen de beide representaties.

Wanneer voor $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ in de geometrische representatie gebruik gemaakt wordt van de parallellogram-methode (som van twee vectoren), zie Figuur 19, wordt dit procedureel in algebraïsche omschrijving weergegeven als $((\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}) + \vec{d}$ en ontstaat een wirwar van vectoren. Hier wordt geen overzicht bereikt, dus deze methode leent zich hier niet voor de ontwikkeling van structureel denken.



Figuur 19 Procedureel en structureel denken somvector: geometrische representatie, parallellogram-methode.

Bij de kop-staart-methode (som van twee vectoren) kan in Figuur 20a gezien worden dat, ondanks het proces van het herhaald optellen van twee vectoren, alle originele vectoren kop-staart komen te liggen. De tussenvectoren, de paarse en roze vector, kunnen als het ware weggedacht worden waardoor overzicht ontstaat. De bestaande stap-voor-stap procedure wordt veralgemeniseerd naar meer dan twee vectoren. Op dit structurele niveau “lezen” we in Figuur 20b nu $((\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}) + \vec{d}$ op twee manieren, namelijk als de aaneenschakeling van de vectoren a, b, c en d ($\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$), maar ook als de ene zwarte (resultaat)vector.



Figuur 20 Procedureel en structureel denken somvector: geometrische representatie, kop-staart-methode.

Bij de numerieke representatie op procedureel niveau in Figuur 21 is snel duidelijk dat de kentallen ook direct opgeteld kunnen worden. Het resultaat $\begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1+d_1 \\ a_2+b_2+c_2+d_2 \end{pmatrix}$ is echter misschien nog niet zo duidelijk een object door al die verschillende variabelen, waar de zwarte vector in de geometrische representatie dit duidelijk wel is. Het structurele equivalent in de numerieke representatie van deze zwarte vector is bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \vec{e}$. Hier kan, tegenstrijdig misschien, het gebruiken van vier concrete numerieke vectoren de beeldvorming helpen. Het resultaat van de optelling van de kentallen levert dan namelijk één concrete numerieke vector op.

$$\begin{aligned}
 ((\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}) + \vec{d} &= & \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} &= \\
 \left(\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} &= & \begin{pmatrix} a_1 + b_1 + c_1 + d_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 + d_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \vec{e} \\
 \left(\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} &= \\
 \begin{pmatrix} a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} &= \\
 \begin{pmatrix} a_1 + b_1 + c_1 + d_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 + d_2 \end{pmatrix} &=
 \end{aligned}$$

a. Procedureel denken

b. Structureel denken

Figuur 21 Procedureel en structureel denken somvector: numerieke representatie

Dat de commutatieve eigenschap bij deze uitbreiding met meer dan twee vectoren ook geldig is, is in de numerieke representatie makkelijk voor te stellen, terwijl dit in de geometrische representatie weer niet zo makkelijk is, ook al kunnen DGE's (Dynamische Meetkunde Omgevingen) zoals GeoGebra hier eventueel uitkomst bieden.

Het voorbeeld illustreert waar in het geval van de somvector zich voor- en nadelen bevinden en dat het belangrijk is de lesstof te benaderen vanuit verschillende representaties en methodes, zodat optimaal gebruik gemaakt kan worden van de voordelen. Per onderwerp kan dit anders liggen, visualisaties bijvoorbeeld hoeven niet altijd structureel/conceptueel denken op te leveren.

3.2.6 Conclusie

Om een hoger cognitief niveau te kunnen bereiken zullen zowel conceptueel/structureel denken als proces-vaardigheden doorontwikkeld moeten worden in een soort heen-en-weer-proces tussen beide manieren van denken en beide representaties. Bij elk nieuw geïntroduceerd stukje kennis zal dit proces weer opnieuw plaatsvinden waarbij tevens integratie met de bestaande stukjes kennis plaatsvindt, hierdoor worden processen en concepten steeds ingewikkelder en uitgebreider. Het is belangrijk dit stapsgewijs op te bouwen uit dingen die al bekend en bewezen zijn, telkens zoekend naar structuur en bewijs op het betreffende niveau in verschillende representaties. Leerlingen moeten hier op zijn minst op gewezen worden, zodat hier weer verder op gebouwd kan worden. Dit houdt bijvoorbeeld ook in dat de kop-staart-methode niet meteen als procedure voor meer dan twee vectoren aangeleerd wordt, maar opgebouwd wordt vanuit twee vectoren, zoals in het voorbeeld. Sommige leerlingen zullen echter de stap naar structureel denken in bepaalde contexten niet kunnen maken (Kwon, 2013) en blijven steken in procedureel denken, wat volgens Tall et al. (2001) een splitsing veroorzaakt tussen leerlingen die wel of geen succes hebben in het leren van wiskunde. Het is dus belangrijk een

lesprogramma te ontwikkelen dat ervoor zorgt dat leerlingen de stap naar conceptueel/structureel denken wel maken.

Bij het leren van nieuwe kennis biedt de analytische methode leerlingen een stevige en toegankelijke methode (Goddijn, 2007), hierbij wordt na de introductie van vectoren snel van de geometrische naar de numerieke representatie overgegaan. Hierbij is naast voldoende algebraïsche vaardigheden, wel een basis van kennis van figuren en hun meetkundige relaties nodig (Goddijn, 2007). Ook voor verdere kennisontwikkeling (verificatie en evidentie) en bij het kiezen van een goede oplossingsstrategie bij het oplossen van een probleem is het belangrijk te kunnen wisselen tussen representaties (Sawyer, 1959) (Goddijn, 2007), aangezien deze verschillende kwaliteiten bezitten (Tall, 1995) (Watson, Spyrou, & Tall, 2003) (Goddijn, 2007) (Donevska-Todorova, 2014).

Alhoewel het literatuuronderzoek geen compleet beeld geeft van de cognitieve ontwikkeling van het construct vector, geeft het in combinatie met het raamwerk wel een overzicht over de verschillende aspecten die hierin een rol kunnen spelen. Dit zorgt ervoor dat de onderzoeksvraag verder gespecificeerd kan worden en het programma van eisen een theoretische basis heeft.

3.3 Continuïteit en horizontale samenhang

Als we het hebben over opbouw van lesstof, dan hebben we het over leerplanontwikkeling. Hier spelen de zogeheten leerlijnen een rol. Volgens Strijker (2010) is een leerlijn een beredeneerde opbouw van tussendoelen en inhouden, leidend naar een einddoel. Hierin zijn verschillende niveaus te onderscheiden. De niveaus, die in dit onderzoek het meest van belang zijn, zijn het microniveau (groep/docent, lesplan/lesmateriaal-module/leergang-leerboek/lesmethode) en het mesoniveau (school/opleiding, schoolwerkplan/opleidingsprogramma). Wel belangrijk, maar niet beïnvloedbaar is het macroniveau (landelijk, eindtermen). Wel belangrijk, maar beperkt beïnvloedbaar is het nanoniveau (leerling/individu, persoonlijk leerplan/individuele leerweg).

Het einddoel bij deze lesstof is het pakket van kerndoelen en eindtermen zoals beschreven staat in de syllabus voor vwo betreffende het onderwerp vectoren (macroniveau). De tussentijdse leerdoelen worden grotendeels door het leerboek/de lesmethode bepaald met implicaties op microniveau. In dit onderzoek zijn we dan ook bezig op groeps-/docentniveau (microniveau) met invloed van en eventuele implicaties op schoolniveau (mesoniveau). Op deze niveaus zijn de begrippen continuïteit en horizontale samenhang van belang (Strijker, 2010). De invloed vanuit het nanoniveau zit hem bijvoorbeeld in de voorkennis, maar ook persoonlijke voorkeur van individuen, welke misschien beperkt beïnvloedbaar zijn, maar waar in het ontwerp zeker wel rekening mee gehouden kan worden.

3.3.1 Continuïteit

Continuïteit wordt in dit onderzoek gedefinieerd als de verticale samenhang in een leerlijn, over verschillende leerjaren heen, maar ook binnen leerjaren, hoofdstukken en paragrafen. Dit betekent dat lesstof moet aansluiten op voorkennis en leerdoelen, maar ook dat kennis en vaardigheden geleidelijk opgebouwd moeten worden en dat actief koppelingen gemaakt moeten worden tussen hoofdstukken en paragrafen. Een groot deel van de continuïteit in de opbouw van kennis en vaardigheden binnen het hoofdstuk is reeds uit het literatuuronderzoek van de cognitieve ontwikkeling en didactiek naar voren gekomen en heeft zo een dubbelrol.

3.3.2 Horizontale samenhang

Met horizontale samenhang wordt bedoeld de samenhang tussen verschillende vakken (SLO, 2017). Gestreefd moet worden naar het actiever koppelen van kennis en vaardigheden uit andere vakgebieden. De natuurkundige insteek bij de introductie van vectoren uit het literatuuronderzoek sluit hierbij aan.

3.3.3 Conclusie

De uitkomsten worden opgenomen in het programma van eisen voor het ontwerp. Het is hierbij belangrijk te realiseren dat sommige uitkomsten, zoals het geleidelijk opbouwen en actief koppelen, een dubbelrol met de cognitieve ontwikkeling en didactiek vervullen. Theoretisch gezien wordt meer continuïteit en horizontale samenhang bereikt als het lukt het programma van eisen zoveel mogelijk toe te passen in het ontwerp. Als effectmeting voor het onderzoek is echter vooral interessant wat de perceptie van docenten (en leerlingen) hierover is.

Hoofdstuk 4 – Gespecificeerde onderzoeksvraag

Op basis van het theoretisch kader is de algemene onderzoeksvraag “Hoe kan het inzicht bij leerlingen verbeterd worden op het gebied van vectormeetkunde en hoe kan de tevredenheid over de opbouw van de lesstof bij de docenten verbeterd worden?” verder gespecificeerd.

In dit onderzoek betekent “inzicht ... op het gebied van vectormeetkunde” de structurele kennis, in beide representaties (geometrische en numerieke), betreffende de lesstof. De aanname, op basis van de ervaringen van docenten, is dat de leerlingen de procedurele kennis bezitten en dat er ruimte is de structurele kennis te verbeteren.

In dit onderzoek betekent “de opbouw van het hoofdstuk” de samenstelling van de betreffende lesstof op het gebied van continuïteit (verticale leerlijnen) en horizontale samenhang (samenhang tussen vakgebieden). Hier wordt aangenomen dat een verbeterde samenstelling zorgt voor verbeterde tevredenheid bij docenten en dat verbeterde tevredenheid veroorzaakt wordt door de verbeterde samenstelling.

Samen met de beperking tot de lesstof in de paragrafen 8-V t/m 8-3 (Moderne Wiskunde 11e editie 4vwoB H8-vectoren) leidt dit tot de volgende twee gespecificeerde hoofdonderzoeksvragen:

“Hoe kan de structurele kennis van leerlingen verbeterd worden betreffende de lesstof over vectormeetkunde (H8-V t/m H8-3 Moderne Wiskunde 11e editie 4vwoB)?”

en

“Hoe kan de tevredenheid bij de docenten over de samenstelling van de betreffende lesstof over vectormeetkunde (H8-V t/m H8-3 Moderne Wiskunde 11e editie 4vwoB) op het gebied van continuïteit (verticale leerlijnen) en horizontale samenhang (samenhang tussen vakgebieden) verbeterd worden?”

4.1 Hypothesen en verwachtingen

Voor de kwantitatieve effectbepaling betreffende de verbetering van de structurele kennis zijn de nulhypothese opgesteld als “geen effect”. Een eventueel effect kan zowel positief als negatief zijn. Vanwege de beperkte omvang van de steekproef is het onwaarschijnlijk dat er statistisch significante resultaten uit de kwantitatieve effectbepaling gaan komen, maar ondanks dat worden wel positieve waarden verwacht. Uit de (voornamelijk) kwalitatieve vergelijking van de continuïteit en horizontale samenhang is de verwachting dat er een positief effect gezien gaat worden, wat op zich al een mooi resultaat zou zijn van het onderzoek.

Hopelijk levert het onderzoek verder (ook zonder significant statistisch (positief) resultaat) waardevolle gegevens op voor docenten of onderzoekers. Hierbij kan gedacht worden aan het theoretische onderzoek over de cognitieve ontwikkeling, dat hopelijk meer inzicht geeft in het denkniveau en eventuele misconcepties bij leerlingen en de didactische leidraad dat een aantal didactische ideeën en handvatten biedt. Ook is het goed mogelijk dat zaken naar voren komen waar vooraf niet aan gedacht is of afwijken van aannames, misschien zelfs wel misconcepties bij de docenten of de onderzoeker. Op basis van alle resultaten kunnen hopelijk aanbevelingen gedaan worden voor vervolgonderzoek, voor bijvoorbeeld een herontwerp van het lesmateriaal of de benodigde steekproefgrootte om mogelijk wel een statistisch significant resultaat te krijgen.

Hoofdstuk 5 – Programma van eisen

Het programma van eisen (pve) is de verzameling van eisen (en wensen) ten aanzien van het ontwerp van de lessenserie (alle didactische instrumenten met betrekking tot instructie en opgaven). De bedoeling van een programma van eisen is van tevoren de randvoorwaarden en limieten te definiëren. Deze moeten eenvoudig en eenduidig zijn, maar niet te specifiek, zodat ruimte gelaten wordt voor creativiteit en de (onvoorspelbare) praktijk. De eisen zijn gebaseerd op de uitkomsten van het (literatuur)onderzoek en aangevuld met enkele, vaak vanzelfsprekende, extra eisen vanuit de school/docent/onderzoeker. Het doel is deze zoveel mogelijk in het ontwerp toe passen, hiervoor zijn mogelijke bedreigingen ook in kaart gebracht.

Continuïteit en horizontale samenhang

- De inhoud van de lesstof moet aansluiten bij de leerdoelen in de syllabus.
- De inhoud van de lesstof moet aansluiten bij de voorkennis van de leerlingen.
- De lesstof (instructie en opgaven) moet binnen de paragrafen en binnen het hoofdstuk geleidelijk opgebouwd en zoveel mogelijk actief aan elkaar gekoppeld worden.
- De lesstof moet actief aansluiten bij kennis en vaardigheden uit andere vakgebieden.

Faseovergang A

- Expliciteer de verschillende natuurkundige invalshoeken (reis, transformatie, snelheid, versnelling, kracht, impuls et cetera), maar focus op het effect/resultaat van de actie.
- Breng de voor- en nadelen voor conceptvorming in kaart die (de gebruikte) natuurlijke verschijnselen met bijbehorende fysieke ervaringen kunnen opleveren en speel tijdens de lessen hierop in.
- Om het effect/resultaat te benadrukken kan gebruik worden gemaakt van fysieke methodes zoals in de voorbeelden in het literatuuronderzoek, maar dit kan bijvoorbeeld ook met het smartbord of GeoGebra.
- Expliciteer (de perceptie van) vrije en gebonden vectoren bij verschillende contexten.
- Expliciteer zowel de kop-staart-methode als de parallelogram-methode bij verschillende contexten, maar focus ook hier weer op het effect/resultaat.
- Lever bewijs op het betreffende niveau, baseer dit op bestaande (geometrische) kennis.
- Las reflectiemomenten tijdens de les in, bijvoorbeeld klassengesprekken.

Faseovergang B1

- Expliciteer de keuze voor de algebraïsche naamgeving van vectoren in verschillende contexten. Focus ook hier weer op het effect/resultaat. Zorg ervoor dat de naamgeving de conceptvorming niet in de weg staat.
- Zorg ervoor dat de plaats van vectoren in de geometrische representatie aansluit bij het doel van het voorbeeld/de opgave.
- Lever bewijs op het betreffende niveau, baseer dit op bestaande (geometrische) kennis.
- Maak (waar haalbaar en zinvol) gebruik van DGE's (Dynamic Geometry Environments, dynamische meetkunde omgevingen), zoals GeoGebra.

Faseovergang D1

- Werk vanuit de koppeling met de geometrische-aritmetische vector.
- Lever bewijs op het betreffende niveau, baseer dit op bestaande (aritmetische) kennis.

Faseovergang B2

- Expliciteer ook bij de introductie van het assenstelsel de keuze voor de algebraïsche naamgeving in verschillende contexten. Let op dat de naamgeving de conceptvorming niet in de weg staat.
- Benadruk het begripsverschil tussen een plaatsvector en een vrije vector en de overeenkomsten betreffende het werken/rekenen ermee.
- Benadruk het verschil in begrip en notatie tussen een plaatsvector en de coördinaten van een punt.
- Maak koppelingen naar de gevonden eigenschappen en regels van de geometrische representatie.
- Lever bewijs op het betreffende niveau, baseer het rekenen met de kentallen op bestaande kennis van algebraïsche rekenregels van gewone variabelen.

Faseovergang C1 en C2

- Laat vorderingen in proces-vaardigheden en object-begrip/structureel denken redelijk gelijk met elkaar opgaan, zowel in de geometrische als symbolische representatie. Vaak komt procedureel denken voor structureel denken.
- Benoem (waar mogelijk) tijdens de lessen de opvatting (van leerlingen) van een procept als proces en object (proces-objectdualiteit).

Synthetische en analytische benadering/meetkunde

Gebruik voor de behandeling van nieuwe onderwerpen de analytische methode, aangezien deze methode voor leerlingen toegankelijker is dan de synthetische methode, waarbij voldaan moet worden aan de volgende voorwaarden:

- Voorkennis: Leerlingen moeten voldoende algebraïsche vaardigheden en een basis van kennis van figuren en hun meetkundige relaties bezitten.
- Opstarten: De route gaat van de introductie van vectoren vanuit de natuurkundige context eerst naar de geometrische representatie, waarna vervolgens snel naar de numerieke representatie overgegaan wordt.
- Vervolg: Blijf bij de behandeling van nieuwe onderwerpen met de analytische methode wel bij met de geometrische representatie (synthetische aanpak) voor evidentie en verificatie, zowel op proces- als objectniveau en bouw hierbij voort op de voorkennis uit de klassieke meetkunde.

Aanvullend

- Het aangeleverde lesmateriaal moet aansluiten bij de vaardigheden van de docent.
- Aanpassingen/extra materiaal mogen niet van de lesstof afleiden, moeten goed leesbaar zijn en een herkenbare structuur hebben.
- Er moet nauwkeurig en consequent omgegaan worden met notatievormen en begripsdefinities. Dit moet afgestemd zijn op de bestaande lesmethode, de syllabus en de voorkennis.
- Het bestaande leerboek is de basis voor het ontwerp.
- Behandel indien mogelijk ook bij de bespreking van huiswerkopgaven meerdere oplossingsmogelijkheden in verschillende representaties.

Bedreigingen

- De voorkennis, voorkeur en niveau van individuele leerlingen is verschillend; differentiëren zal (soms) nodig zijn. Ondanks het differentiëren is het mogelijk dat sommige leerlingen sommige stappen niet kunnen maken binnen de termijn van dit hoofdstuk, in het kader van het onderzoek is het belangrijk dit te noteren.
- Een grotere focus op het structurele denkniveau kan ten koste gaan van de procedurele vaardigheden.
- Het is mogelijk dat leerlingen van de testgroep tijdens het maken van het huiswerk en de voorbereiding voor het proefwerk het leerboek als naslagwerk gebruiken of zelfs het aangepaste lesmateriaal helemaal kwijt zijn. Een individuele leerling zou in verwarring gebracht kunnen worden en hierdoor slechter presteren of juist door de vergelijking tussen beide meer inzicht krijgen en beter presteren. Een eventueel effect op de resultaten van het proefwerk wordt als heel klein ingeschat.

Hoofdstuk 6 – Methode en (ontwerp)resultaten lessenserie

De lessenserie (uitvoering en lesmateriaal) vormt de kern van het onderzoek. Eerst wordt de methode voor de uitvoering van de lessenserie besproken, inclusief respondenten en randvoorwaarden, en de methode voor de gegevensverzameling en verwerking. Hierna volgt de verantwoording van de ontwerpkeuzes voor de didactische leidraad en het lesmateriaal voor de leerlingen, inclusief de onderzoeksresultaten naar de leerdoelen en de voorkennis. Als laatste worden de verzamelde gegevens besproken om te bepalen in hoeverre de uitvoering van de lessenserie aan de ontwerpeisen heeft voldaan.

6.1 Methode lessenserie

6.1.1. Respondenten

Het onderzoek is uitgevoerd in twee klassen 4 vwo wiskunde B met twee verschillende docenten. De controlegroep bestaat uit in totaal 26 leerlingen die allemaal hoofdstuk 8 volgens de lesmethode Moderne Wiskunde gevolgd hebben. De testgroep bestaat uit 25 leerlingen, waarvan 24 leerlingen hoofdstuk 8 volgens het ontwerp gevolgd hebben. Eén leerling van de testgroep heeft, vanwege de overstap naar havo, hoofdstuk 8 niet meegedaan en is daarom uitgesloten van het onderzoek. Beide docenten hebben ongeveer evenveel werkervaring in het onderwijs en zitten in dezelfde fase van de opleiding van tweede- naar eerstegraads docent. Beide docenten hebben weinig ervaring met het onderwerp; voor de docent van de controlegroep was dit de introductie op het onderwerp en voor de docent van de testgroep het tweede jaar. Aangezien de meeste leerlingen ook de onderbouw op het CCS gevolgd hebben wordt uitgegaan van een redelijk homogene groep wat betreft voorkennis.

Ouders en leerlingen zijn ruim voor de start van de lessenserie door middel van een brief geïnformeerd over de inhoud van het onderzoek inclusief de anonieme gegevensverwerking met de mogelijkheid tot exclusie van de gegevensverzameling. Deze informatie met exclusiemogelijkheid voor de leerlingen is in beide klassen herhaald. Geen van de ouders of leerlingen heeft hiervan gebruik gemaakt. Aangezien de klassen-gegevens (namen gekoppeld aan cijfers) slechts voor enkele personen op de onderzoeksschool toegankelijk zijn en de gegevens door de onderzoeker geanonimiseerd zijn, zijn deze niet (makkelijk) terug te voeren op individuen.

6.1.2 Randvoorwaarden

Naast dat het ontwerp van het lesmateriaal moet voldoen aan het programma van eisen zijn voor de uitvoering van de lessenserie de volgende randvoorwaarden opgesteld waaraan (zoveel mogelijk) voldaan moet worden om de validiteit van de effectmeting van het ontwerp te verhogen, inclusief bedreigingen:

- Het is belangrijk dat in de controlegroep zoveel mogelijk het leerboek gevolgd wordt en in de testgroep zoveel mogelijk het ontwerp. De docent van de controlegroep moet daarom ook alleen procedureel ingelicht worden, maar niet inhoudelijk. Ondanks dat is het mogelijk dat de docent van de controlegroep eigen kennis en vaardigheden gebruikt die misschien wel hetzelfde zijn als de uitgangspunten van het ontwerp.
- Hierbij sluit aan dat leerlingen uit de testgroep het aangepaste lesmateriaal niet mogen delen met leerlingen uit de controlegroep. Uitwisseling tussen de twee groepen leerlingen is echter waarschijnlijk niet tegen te houden.
- Beide klassen moeten (ongeveer) hetzelfde aantal lessen gebruiken, om een eventueel effect vanwege een (ongewenst) grotere tijdsbesteding uit te kunnen sluiten. Door onvoorziene

omstandigheden (ziekte, excursies e.d.) is het echter mogelijk dat het geplande aantal lessen niet aangehouden kan worden.

- De aanwezigheid en eventuele lesuitvoer door de onderzoeker mag niet tot verstoringen in het leerproces van de leerlingen leiden, anders dan beoogd in het onderzoeksdoel.

Verder moet het aantal lesuren binnen de bestaande jaarplanning passen, wat inhoudt dat het aantal lesuren ongeveer even groot zal zijn als voorgaande jaren.

6.1.3. Methode van het ontwerp van het lesmateriaal

Voor het ontwerpen van het lesmateriaal is eerst onderzoek gedaan naar de leerdoelen, de voorkennis en de paragrafen 8-V t/m 8-3 van de lesmethode, inclusief opgaven, uitwerkingenboek en docentenhandleiding. Vervolgens is gekeken wat wel en niet aan het programma van eisen voldeed en naar mogelijkheden voor verbetering. De resultaten hiervan hebben geleid tot een didactische leidraad voor de docent van de testgroep en vervangend of aanvullend lesmateriaal voor de leerlingen. De didactische leidraad heeft de functie gekregen van praktisch werkdocument naast het leerboek, dat gaandeweg de uitvoering van de lessenserie met de docent van de testgroep besproken en aangevuld is. De inhoud hiervan is door de docent van de testgroep verwerkt in de eigen lesvoorbereiding. Ook het lesmateriaal voor de leerlingen (inclusief werkblad en uitwerkingen) is in overleg met de docent van de testgroep ontworpen. Daarnaast is overleg gevoerd met de begeleider van de opleiding.

6.1.4 Methode gegevensverzameling en verwerking

Voor een valide effectmeting van het ontwerp is het belangrijk dat in de controlegroep zoveel mogelijk het leerboek gevolgd is en in de testgroep zoveel mogelijk het ontwerp. Om dit gestructureerd en mede daardoor betrouwbaarder bij te houden zijn voor de lessen van beide docenten door de onderzoeker observatielijsten en een logboek gebruikt en zijn aanstreeplijsten voor de docent van de controlegroep gebruikt, aangevuld met de lesvoorbereidingen en foto's van het (smart)bord. Een voorbeeld van een leeg exemplaar van zowel een originele aanstreep- als een observatielijst is in bijlage A ingevoegd.

De aanstreeplijsten zijn specifiek gemaakt voor de docent van de controlegroep om de behandelde lesstof bij te kunnen houden tijdens de lessen waar de onderzoeker vanwege samenvallende lestijden niet bij kon zijn. Deze bevatten de voorbeelden en opgaven uit het leerboek waarbij aangegeven kan worden of deze klassikaal behandeld zijn of zelfstandig door leerlingen gemaakt moesten worden. Om afwijkingen ten opzichte van het leerboek makkelijk op te sporen is de keuzeoptie voor een eigen instructievoorbeeld van de docent toegevoegd. Via de lesvoorbereidingen en foto's kan dit dan verder onderzocht worden. Voor de observatielijsten van de onderzoeker zijn de aanstreeplijsten aangevuld met specifieke aandachtspunten uit de didactische leidraad.

6.2 Ontwerpresultaat lessenserie

Als eerste volgt een kort overzicht van het verschil van het ontwerp met de bestaande lesmethode *Moderne Wiskunde* (Noordhoff Uitgevers bv, 2014a). Dit wordt gevolgd door de bespreking van het onderzoek naar de leerdoelen en voorkennis. Hierna wordt het ontwerp van het lesmateriaal verder besproken en verantwoord op basis van het programma van eisen en de analyse van de bestaande lesmethode *Moderne Wiskunde*. Materiaal dat zonder het bijbehorende leerboek niet goed te volgen is, is in de bijlage opgenomen.

De leerboek bevat veel bruikbaar materiaal en aangezien het eerste deel van het tweeledige einddoel "meer inzicht bij de leerlingen" is en niet het aanleren van inhoudelijk andere lesstof is zoveel mogelijk

gebruik gemaakt van de opgaven uit het leerboek. Deze zijn voor het leerling-materiaal onder andere in volgorde veranderd, (gedeeltelijk) aangepast, en/of aangevuld met eigen materiaal en materiaal uit vrij toegankelijke bronnen om aan alle eisen uit het programma van eisen te voldoen. Als handleiding voor de docent van de testgroep zijn didactische leidraden gemaakt.

- Paragraaf 8-V Voorkennis: De eerste zes opgaven van het leerboek zijn gehandhaafd. De twee laatste opgaven over zwaartelijnen en het zwaartepunt in driehoeken, wat geen voorkennis is voor de leerlingen in 4 vwo op het CCS, zijn vervangen door twee opgaven over gelijkvormigheid, wat wel voorkennis is voor de leerlingen in 4 vwo op het CCS en later in paragraaf 8-3 gebruikt moet worden. De lesstof over het zwaartepunt in driehoeken komt terug in paragraaf 8-3.
- Paragraaf 8-1 Vectoren: De introductie van vectoren vanuit de natuurkundige context in de geometrische representatie en de opgaven van het leerboek zijn gehandhaafd. Voor de klassikale uitleg en bespreking van de opgaven is een didactische leidraad gemaakt. De belangrijkste verandering ten opzichte van het leerboek is het behandelen van de parallellogram-methode (koppeling natuurkunde) naast de kop-staart-methode en het gebruiken hiervan voor verificatie en bewijs van de commutatieve eigenschap, wat in het leerboek ontbreekt.
- Paragraaf 8-2 Vectoren en kentallen: De vrij snelle introductie van vectoren in de numerieke representatie (analytische benadering) en de opgaven van het leerboek zijn gehandhaafd. Voor de klassikale uitleg en bespreking van de opgaven is een didactische leidraad gemaakt. De belangrijkste verandering ten opzichte van het leerboek is het voortdurend koppelen naar de geometrische representatie en bijbehorende voorkennis en naar numerieke voorkennis van leerlingen en het gebruiken hiervan voor verificatie en bewijs van de rekenregels, wat in het leerboek ontbreekt.
- Paragraaf 8-3 Zwaartepunten en evenwicht: Waar het leerboek vanuit een natuurkundige context en bijbehorende kennis en de geometrische representatie (inclusief bewijs met gelijkvormigheid) naar de formule voor het zwaartepunt werkt, wordt in deel I van het ontwerp meteen de formule voor het zwaartepunt behandeld, maar dan vanuit een wiskundige numerieke context. Door gebruik te maken van de toegankelijk numerieke methode en de bijbehorende voorkennis van leerlingen kan de instap zo op een hoger niveau plaatsvinden. Het leerling-materiaal van het ontwerp omvat theorie met voorbeelden, opgaven, werkbladen en uitwerkingen. Voor het huiswerk wordt ook gebruik gemaakt van opgaven uit het leerboek. In deel II wordt eerst de koppeling gemaakt tussen het zwaartepunt en evenwicht in een natuurkundige context op basis van de voorkennis van leerlingen. Vervolgens wordt de (terug)koppeling gemaakt met de wiskundige context zowel geometrisch als numeriek, inclusief het opstellen van de bijbehorende algebraïsche formules, het werken hiermee volgens de rekenregels en bewijs (gelijkvormigheid). Hierna wordt het zwaartepunt van drie puntmassa's in de hoekpunten van een driehoek behandeld, dit sluit aan bij deze paragraaf en op heel logische wijze volgt hieruit het (oppervlakte)zwaartepunt in een driehoek, wat uit paragraaf 8-V verwijderd is. Het leerling-materiaal van het ontwerp omvat theorie met voorbeelden, opgaven, werkbladen en uitwerkingen. Voor de klassikale uitleg en bespreking van de opgaven is een didactische leidraad gemaakt. Enkele extra opgaven zijn toegevoegd om te kunnen verdiepen en verbreden.

6.2.1 Onderzoek leerdoelen

Met leerdoelen wordt bedoeld duidelijk en concreet gespecificeerde doelen van wat de leerlingen zich eigen moeten maken op het gebied van kennis, inzichten en vaardigheden. Deze worden bepaald door de lesmethode Moderne Wiskunde 4 vwo B 11^e editie (Noordhoff Uitgevers bv, 2014a en 2014b), de eindtermen in de syllabus CE vwo wiskunde B 2018 (College voor Toetsen en Examens vwo, havo, vmbo, 2016) en de wensen van de docenten van het CCS. Een uitgebreide analyse van de leerdoelen

in de lesmethode en de syllabus bevindt zich in bijlage B, hieronder worden belangrijke aandachtspunten besproken.

De lesmethode sluit niet geheel aan bij de syllabus, mede vanwege latere wijzigingen in de syllabus. In dit onderzoek is aangenomen dat de syllabus de aansluiting op het vervolgonderwijs waarborgt en is hierdoor leidend.

Waar de lesmethode aangeeft dat vooral consequent met notaties omgegaan moet worden ondersteunt het verschil in notatie tussen de lesmethode en de syllabus eerder het belang dat de algebraïsche naamgeving geëxpliciteerd moet worden in verschillende contexten. Het doel is dan dat leerlingen makkelijk omgaan met eventueel verschil in notatie. Het blijft natuurlijk wel belangrijk nauwkeurig om te gaan met notaties voor vectoren.

Een belangrijk verschil tussen de syllabus en de lesmethode is de afwijking in de definitie van het begrip zwaartepunt. De definitie van de lesmethode voor het zwaartepunt is meer natuurkundig of toepassingsgericht en die van de syllabus is meer wiskundig. Dit is onder andere te zien aan het gebruik van de term “puntmassa’s” in de lesmethode en “punten” in de syllabus. De natuurkundige insteek hoeft geen probleem te geven en sluit zelfs aan bij het doel dat technieken moeten kunnen worden toegepast in geschikte natuurwetenschappelijke en technische situaties, maar de meer wiskundige definitie in syllabus geniet de voorkeur. Dit niet alleen omdat de syllabus vanuit het programma van eisen leidend is, maar ook omdat de meer wiskundige definitie met de term “gewogen gemiddelde” zowel in combinatie met massa’s als in combinatie met coördinaten van punten logisch is.

Ook belangrijk is de verschuiving in de syllabus van het bepalen van zwaartepunten met behulp van vectoren van de parate vaardigheden naar de productieve vaardigheden, wat een verzwaring is t.o.v. de leerdoelen van de lesmethode. Productieve vaardigheden betekent volgens de syllabus dat leerlingen de parate vaardigheden (routinematige beheersing) in complexe probleemsituatie moeten kunnen toepassen; door inzicht, overzicht, probleemaanpak en metacognitieve vaardigheden zal de leerling een strategie moeten bedenken om het probleem op te lossen. De reden hiervoor is niet helemaal duidelijk ook al is uit de inleiding al gebleken dat ook de docenten van het CCS meer dan alleen routinematige beheersing willen bereiken, wat hierbij aansluit. Een precieze invulling van de bedoeling van de syllabus wordt niet helemaal duidelijk. Complexe probleemsituaties kunnen voortkomen uit een afwijkende probleemstelling, bijvoorbeeld binnen een andere wiskundige discipline of een geschikte natuurwetenschappelijke of technische situatie. In het kader van dit onderzoek kan de routinematige beheersing van de parate vaardigheden gezien worden als procedurele kennis en het inzicht en overzicht van de procedurele vaardigheden gezien worden als structurele kennis. Aangezien dit laatste al een doel in het onderzoek is en ook de natuurkundige situatie, wordt in dit onderzoek hier verder geen speciale aandacht aan gegeven.

Meetkundige eigenschappen en begrippen die niet expliciet in de syllabus en lesmethode benoemd worden, zoals zwaartelijn, loodlijn en hoogtelijn, kunnen (indien toegelicht) in examens voorkomen en zijn hierdoor (indien toegelicht) ook in de lessenserie te gebruiken.

6.2.2 Onderzoek voorkennis

Met voorkennis wordt hier bedoeld de kennis/inzichten/vaardigheden die leerlingen via schoolervaringen of dagelijkse ervaringen eigen gemaakt hebben, al dan niet domein-specifiek. Tussen leerlingen kan enorm verschil bestaan in hoeveelheid, samenhang, beschikbaarheid en correctheid.

Het vaststellen van de aanwezige en benodigde voorkennis richt zich op de lesmethode Moderne Wiskunde, inclusief uitwerkingenboek en docentenhandleiding (Noordhoff Uitgevers bv, 2014a en 2014b), de kennis en ervaring van de docenten op het CCS en van de begeleider van de opleiding.

Volgens de docentenhandleiding bestaat de (benodigde) domeinspecifieke voorkennis uit:

- De stelling van Pythagoras.
- Goniometrische verhoudingen (nodig voor paragraaf 8-4).
- Zwaartelijnen en ligging zwaartepunt in een driehoek.

Activering van deze voorkennis vindt plaats in paragraaf 8-V (voorkennis) (Noordhoff Uitgevers bv, 2014a). Relatief eenvoudige algebraïsche vaardigheden, zoals het hanteren van rekenregels en het oplossen van vergelijkingen worden hier niet expliciet genoemd, maar zijn wel nodig. Hieraan moet verder voor paragraaf 3 nog toegevoegd worden:

- Gelijkvormigheid (snavel- en zandloperfiguur en/of Z- en F-hoeken).
- Evenwicht (ervaring/gevoel en natuurkunde).
- Parallellogram-methode om twee krachten samen te stellen in een resulterende kracht of een kracht te ontbinden in twee componenten (natuurkunde).

Volgens de docenten van het CCS is het onderwerp zwaartelijnen en ligging zwaartepunt in een driehoek in 2 vwo overgeslagen en kan daarom niet als voorkennis beschouwd worden. Gelijkvormigheid is in 3 vwo behandeld en uitgangspunt is dat dit aardig weggezaakt zal zijn, activering van voorkennis zal nodig zijn. Het begrip evenwicht als zijnde ervaring/gevoel van de leerlingen kan gebruikt worden, ook is dit onderwerp reeds in de onderbouw bij natuurkunde behandeld binnen het onderwerp hefboomen met de formule $(kracht \times arm)_{links} = (kracht \times arm)_{rechts}$ voor evenwicht. De parallellogram-methode wordt begin 4 vwo behandeld bij natuurkunde (bron: natuurkundedocent CCS), echter niet alle leerlingen zullen natuurkunde hebben. Ondanks dit laatste is in dit onderzoek uitgegaan van een redelijk homogene groep wat betreft voorkennis.

6.2.3 Ontwerp lesmateriaal

In de komende onderdelen wordt het ontwerp van het lesmateriaal verder besproken en verantwoord op basis van het programma van eisen in combinatie met de analyse van de bestaande lesmethode. De didactische leidraden, die als docentenhandleiding dienen voor de docent van de testgroep, bevatten per paragraaf een uitgebreidere omschrijving van de inhoud, de benodigde voorkennis, de analyses van de opgaven, de gemaakte aanpassingen en advies voor de klassikale uitleg. Zonder leerboek zijn deze vrij lastig te volgen en ze bevinden zich samen met het leerling-materiaal in de bijlage. De didactische leidraden van de paragrafen 8-V t/m 8-2 en het leerling-materiaal van paragraaf 8-V bevinden zich in bijlage C, respectievelijk D. De didactische leidraad van paragraaf 8-3 en het bijbehorende leerling-materiaal bevindt zich in bijlage E, respectievelijk F. Het leerling-materiaal moest leesbaar zijn en een herkenbare structuur hebben en is daarom gemaakt in MS Word en heeft een soortgelijke lay-out als het bestaande leerboek, met dezelfde kleurstelling en dezelfde vormgeving voor bijvoorbeeld theorieblokken en voorbeelden.

Ontwerp paragraaf 8-V: Voorkennis

Ter activering van de benodigde voorkennis voor paragraaf 8-3 zijn twee vervangende opgaven over gelijkvormigheid (snavel- en zandloperfiguur / Z- en F-hoeken) toegevoegd. Bij de vervangende opgave V-7 moet gebruik gemaakt worden van eigenschappen van meetkundige figuren om hoeken uit te rekenen. En bij de vervangende opgave V-8 wordt het aantonen van gelijkvormigheid en het rekenen ermee behandeld.

Ontwerp paragraaf 8-1: Vectoren

De introductie van vectoren vindt plaats vanuit de natuurkundige context in de geometrische representatie, wat het programma van eisen vereist voorafgaand aan de stap naar de numerieke

representatie. Het gebruik maken van de natuurkundige voorkennis van leerlingen, sluit ook aan op het programma van eisen op het gebied van horizontale samenhang. Inmiddels was al wel duidelijk dat een overgrote meerderheid van de leerlingen natuurkunde in het pakket heeft; slechts twee leerlingen uit de controlegroep en één leerling uit de testgroep hebben geen natuurkunde. De belangrijkste punten voor deze paragraaf zijn: terminologie en notatie, equivalentie (effect/resultaat), vrije vector, somvector met kop-staart-methode en parallellogram-methode (incl. commutatieve eigenschap), verificatie en bewijs, natuurkundige context. De belangrijkste afwijking van de bestaande lesmethode is het gebruik van de parallellogram-methode.

Ontwerp paragraaf 8-2: Vectoren en kentallen

Deze paragraaf bevat de overgang naar vectoren in numerieke representatie. De belangrijkste punten voor deze paragraaf zijn: terminologie en notatie, kolomvector, vrije vector en plaatsvector, rekenregels inclusief verificatie en bewijs, ontbinden in vectoren en koppelingen maken tussen de geometrische en de numerieke representatie. Een voorbeeld van verificatie en bewijs van rekenregels is de behandeling van de formule voor het middelpunt bijvoorbeeld geometrisch met behulp van de eigenschap dat de diagonalen van een parallellogram elkaar middendoor snijden of via gelijkvormigheid in combinatie met de distributieve eigenschap van de scalaire vermenigvuldiging van de som van twee vectoren of via de numerieke benadering als gemiddelde positie met het berekenen van de gemiddelde x - en y -coördinaat, wat aansluit bij het zwaartepunt in paragraaf 8-3.

Ontwerp paragraaf 8-3: Zwaartepunten en evenwicht

Aangezien de hoeveelheid lesstof in de originele paragraaf ook al dusdanig veel tijd in beslag nam is besloten het materiaal op anderhalve les, dus 75 minuten, te ontwerpen. Het leerling-materiaal bestaat uit twee delen die gesplitst zijn op inhoud en niet per se op tijdsduur en beide delen zijn voorzien van inleidende opgaven en voorbeelden die didactische materiaal bieden aan de docent, maar er ook voor zorgen dat het materiaal (redelijk) zelfstandig door leerlingen te maken is.

Zoals eerder aangegeven, wordt in deel I vanuit een wiskundige numerieke context de formule voor het zwaartepunt behandeld. Reden hiervoor is dat de numerieke methode een toegankelijke methode biedt voor leerlingen en dat het lesmateriaal moet aansluiten bij de syllabus. De syllabus definieert het zwaartepunt van een aantal punten als eindpunt van de plaatsvector die het gewogen gemiddelde is van de plaatsvectoren van die punten. Via de voorkennis over het berekenen van gemiddelden en gewogen gemiddelden van getallen, wordt overgegaan naar de gemiddelde positie en gewogen gemiddelde positie van punten/puntmassa's in een vlak door middel van de coördinaten (geometrisch zwaartepunt en massazwaartepunt), waarna vervolgens de link van de coördinaten naar de kentallen van de plaatsvectoren van de punten/puntmassa's gemaakt wordt. Hiermee vindt aansluiting plaats met de voorgaande paragraaf voor een betere continuïteit. Waar het startpunt van de bestaande lesmethode twee puntmassa's op een lijn is, waarna uitbreiding plaatsvindt, kan hier juist makkelijk begonnen worden met meer punten (vanwege de rekentijd beperkt tot drie) liggend in een vlak, waarna dit teruggebracht kan worden naar minder punten of punten liggend op een lijn. Bewijs, verificatie en evidentie zijn verweven in de gehele paragraaf.

In deel II volgt als eerste de koppeling tussen het zwaartepunt en evenwicht in natuurkundige context, opgebouwd vanuit een eenvoudige situatie op basis van de voorkennis van de leerlingen. De basis voor de natuurkundige context is dat de syllabus aangeeft dat leerlingen de aangegeven technieken moeten kunnen toepassen in geschikte wetenschappelijke en technische situatie en tevens geeft de eis voor horizontale samenhang aan dat de lesstof actief aan moeten sluiten bij kennis en vaardigheden uit andere vakgebieden. Om tijd te besparen is een werkblad voor leerlingen gemaakt waar antwoorden meteen ingetekend kunnen worden. Vervolgens wordt, zoals het programma van eisen voorschrijft, de (terug)koppeling gemaakt met de wiskundige context, zowel geometrisch als numeriek, waarbij verificatie, evidentie en bewijzen (gelijkvormigheid) een belangrijke rol spelen. In deze paragraaf wordt

het zwaartepunt in een driehoek (met drie gelijke puntmassa's in de hoekpunten) behandeld, wat uit paragraaf 8-V verwijderd is. Het sluit mooi aan bij de lesstof in deze paragraaf en maakt de ligging meteen evident. Het sluit goed aan bij deze paragraaf, maar ook bij de lesstof in 6 vwo, namelijk het zwaartepunt van veelhoeken met een homogene massaverdeling, en voldoet daardoor aan de eisen over continuïteit. Enkele extra opgaven zijn toegevoegd om te verdiepen en verbreden.

Continuïteit en horizontale samenhang

Het programma van eisen over de continuïteit en horizontale samenhang is in het ontwerp van de paragrafen zoveel mogelijk toegepast en toegelicht per paragraaf.

Onopgeloste probleempunten

Binnen de gestelde eisen en mogelijkheden is getracht een zo goed mogelijk ontwerp te maken, maar er blijven onopgeloste probleempunten. In opgave 4 blijft het probleem met de overgang van vectoren als positie (numerieke wiskundige context) naar vectoren als kracht (natuurkundige context) en vice versa bestaan. Hopelijk zorgt de eerste insteek met plaatsvectoren ervoor dat de massa's niet als krachtvector opgevat worden en kan hier in de klassikale les aandacht aan besteed worden. Voor opgave 5 geldt dat hier van leerlingen hetzelfde niveau van bewijzen gevraagd wordt als in de bestaande lesmethode. Het zal gedurende de lessenserie moeten blijken of de vervangende opgaven over gelijkvormigheid in de voorkennis-paragraaf en het meer aandacht besteden aan het bewijzen in het algemeen in dit hoofdstuk ervoor zorgen dat deze makkelijker op te lossen is door leerlingen.

6.3 Resultaten uitvoering lessenserie

De gegevens uit de aanstreep- en observatielijsten, uit het logboek, uit de lesvoorbereidingsformulieren en uit foto's van het (smart)bord zijn gecombineerd in een verzamelbestand dat te vinden is in bijlage G. In deze paragraaf wordt de uitvoering van de lessen per paragraaf kort besproken.

De aanpassingen ten opzichte van de paragrafen 8-V t/m 8-2 en aanvullend advies zijn door de docent van de testgroep verwerkt in de eigen lesvoorbereiding en in drie lessen uitgevoerd. De aanpassingen ten opzichte van paragraaf 8-3 en aanvullend advies zijn door de onderzoeker verwerkt in de eigen lesvoorbereiding en in twee lessen op dezelfde dag (effectief 75 minuten) uitgevoerd, zoals beoogd.

De planning van de lessen van het gehele hoofdstuk is op basis van de planning van het voorgaande jaar gedaan. Dit kwam neer op één les per paragraaf (8-V t/m 8-7), een herhalingsles en een extra uitloop-les. Voor de docent van de controlegroep verviel door onverwachte omstandigheden vanuit de school de extra les.

6.3.1 Les paragraaf 8-V: Voorkennis

Controlegroep: De docent volgt het leerboek en behandelt alle onderdelen kort klassikaal. Opgave V-7 (leerboek) over zwaartelijnen en het zwaartepunt in een driehoek wordt voor de klassikale uitleg gebruikt.

Testgroep: De docent behandelt Pythagoras en goniometrie niet klassikaal, dit zou geen probleem voor de leerlingen meer moeten zijn. Voor paragraaf 8-V is gebruik gemaakt van de vervangende opgaven V7 en V8, die voor aanvang van de klassikale uitleg aan de leerlingen zijn uitgedeeld. De docent behandelt dit onderwerp klassikaal, waarbij in de voorbeelden een andere notatie voor de hoeken gebruikt wordt en waarbij leerlingen Z- en F-hoeken moeten

benoemen, dit complementeert de lesstof in de vervangende opgaven V7 en V8.

De lessen zijn uitgevoerd zoals beoogd.

Opvallend: Bij nader inzien zou in de vervangende opgave V-7a het woord “Bereken” vervangen moeten worden door het woord “Bepaal”. En het viel op dat de notatievorm $\angle CAB$ voor een hoek ten opzichte van $\angle A_1$ niet zo bekend is bij leerlingen.

6.3.2 Les paragraaf 8-1: Vectoren

Controlegroep: Paragraaf 8-1 en 8-2 worden in een blokuur behandeld. De docent springt bij 8-1 meteen naar de representatie in een assenstelsel, inclusief ontbinden evenwijdig aan de assen (paragraaf 8-2) en de berekening van de lengte van een vector (paragraaf 8-2), echter nog wel zonder kolomvector-notatie.

Testgroep: De docent houdt alles in geometrische representatie. De kop-staart-methode en de parallellogram-methode worden naast elkaar behandeld. De nulvector wordt behandeld, net als commutativiteit $\vec{p} + \vec{q} = \vec{q} + \vec{p}$ en de rekenregel $k \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{a} = (k + m) \cdot \vec{a}$ via een concreet voorbeeld.

De lessen zijn deels uitgevoerd zoals beoogd. De docent van de controlegroep slaat in de klassikale uitleg de geometrische representatie zonder assenstelsel over, terwijl het leerboek wel zonder assenstelsel werkt. De leerlingen moeten wel gewoon de huiswerkopgaven maken, echter doordat zij geen werkbladen hebben, gebeurt dit door overtekenen in het schrift op ruitjespapier, wat al snel neigt tot het “hokjes tellen” van de numerieke representatie. De docent van de testgroep voert de les wel uit zoals beoogd; het effect wordt benadrukt, de kop-staart-methode en parallellogram-methode worden naast elkaar behandeld inclusief de commutatieve eigenschap van de somvector.

Opvallend: Bij de verplaatsing van een vorm houden de leerlingen niet altijd rekening met het aangrijpingspunt. De leerlingen zien de som eerst alleen als proces en vergeten de resultaatvector te tekenen of tekenen de resultaatvector de verkeerde kant op. De werkvolgorde bij het tekenen van algebraïsche formules met haakjes geeft problemen, mede ook doordat leerlingen alle stappen kriskras door elkaar tekenen. Een aantal leerlingen slaan wat tekenstappen over door bij opgave 4d al algebraïsche rekenregels (haakjes wegwerken) te gebruiken, waarbij één leerling met een tekening controleert of dit wel hetzelfde antwoord geeft.

6.3.3 Les paragraaf 8-2: Vectoren en kentallen

Controlegroep: Paragraaf 8-2 wordt in het tweede uur van een blokuur behandeld, waarbij de docent het leerboek verder volgt. De voorbeelden uit de vorige les worden gebruikt om de rekenregels uit het boek numeriek te controleren.

Testgroep: De docent gebruikt opgave 4d om via een tekenvoorbeeld te laten zien dat het haakjes wegwerken met vectoren mag (verificatie en bewijs) en wijst de leerlingen naast het proces ook op de resultaatvector. De nulvector als resultaatvector wordt behandeld. De rekenregels uit het boek worden met een numeriek voorbeeld met tekencontrole duidelijk gemaakt. De verificatie en het bewijs van de formule voor het middelpunt wordt klassikaal behandeld.

De lessen zijn grotendeels uitgevoerd zoals beoogd. De docent van de controlegroep koppelt de voorbeelden in het assenstelsel uit de vorige les die op het bord zijn blijven staan aan de numerieke representatie. De docent van de testgroep voert de les uit zoals beoogd en koppelt ook beide representaties aan elkaar, tevens wordt geometrisch bewijs geleverd voor de formule van het middelpunt.

Opvallend Het gebruik van het smartbord is voor de uitleg een aanrader, het proces kan heel “clean” weergegeven worden doordat vectoren simpelweg verplaatst, gekopieerd of gedraaid kunnen worden, zonder dat het bord helemaal volloopt. Op deze manier komt de uiteindelijke resultaatvector ook beter naar voren.

6.3.4 Les(sen) paragraaf 8-3: Zwaartepunten en evenwicht

Deze lessen zijn door de onderzoeker uitgevoerd. De docent van de testgroep was er niet vertrouwd op de lessen uit te voeren zoals de bedoeling was voor het onderzoek. De leerlingen waren al dusdanig aan de onderzoeker gewend dat ingeschat is dat wisseling van docent geen negatieve rol meer zou spelen. Alhoewel het lesmateriaal ontworpen was voor anderhalve les viel het in de planning op de lesdag met twee lesuren. Volgens de docent van de testgroep werken deze twee lessen als anderhalve les, meer is er niet uit te halen. Ook de andere docent, met een echt aaneengesloten blokkur, geeft aan dat dit minder effectief is dan twee lesuren op verschillende dagen. Aangezien de planning het toeliet is besloten beide lesuren geheel te gebruiken om aan effectief anderhalve les te komen, zoals gepland. In de testgroep is aan het begin van de les is het ontwerp van het lesmateriaal, inclusief de werkbladen, maar exclusief de extra opgaven uitgedeeld. De uitwerkingen van de opgaven konden door de leerlingen alleen in de les bekeken worden.

Controlegroep: De docent volgt het leerboek en maakt klassikaal opgave 16cd met het gelijkvormigheidsbewijs en opgave 18 met het combineren van massa's. Bij opgave 18 geeft de docent aan dat de leerlingen deze goed moeten bestuderen. Voor de formule voor het zwaartepunt met plaatsvectoren is geen tijd meer, deze moeten de leerlingen dan ook zelfstandig doen in huiswerktijd.

Testgroep: De wiskundige numerieke insteek voor het zwaartepunt als gewogen gemiddelde positie wordt gebruikt en de stap naar de formule met de plaatsvectoren is evident voor de leerlingen. Volgens de docent van de testgroep vonden de leerlingen het haast te makkelijk en vreesde hierdoor dat leerlingen niet voldoende zouden oefenen. Het natuurkundige evenwicht met massa's aan een staaf met het schuifprincipe en combineren gaat makkelijk, sommige leerlingen gebruiken zelfs het begrip “moment” dat zij bij het vak TP (Technology Program) gehad hebben. Leerlingen vinden de blikwisseling terug naar het assenstelsel (bovenaanzicht) lastig en ook het combineren van gewichten gaat hierin vervolgens vrij moeizaam. Ook het gelijkvormigheidsbewijs vinden de leerlingen heel lastig, zonder hulp kunnen ze de gelijkvormigheid niet “vinden” en ook kunnen ze veelal niet zelfstandig toewerken naar de uiteindelijke formule met behulp van de deelformules, dit vergt dan ook een zeker overzicht over de opgave. Ondanks de dubbele les wordt niet toegekomen aan de extra opgaven.

De docent van de controlegroep voert de les niet helemaal uit zoals beoogd, het klassikaal behandelen van de bewijsopgaven zorgt ervoor dat de formule voor het zwaartepunt niet behandeld kan worden. De onderzoeker voert de les bij de testgroep uit zoals beoogd.

Opvallend: Voor veel leerlingen heeft de wiskundige insteek voorkeur boven de natuurkundige insteek met het schuifprincipe en combineren van gewichten. Leerlingen uit de controlegroep wisten van het printblad van de testgroep en hadden de indruk dat dit makkelijker was dan het leerboek. Uit de observaties blijkt echter dat leerlingen uit beide klassen het bewijzen met gelijkvormigheid erg lastig vinden. Het zelfstandig proberen in de testgroep lukt niet goed, maar ook leken leerlingen het heel snel op te geven. Wel zijn leerlingen nieuwsgierig naar bewijzen. Het werken met de algebraïsche formules van vectoren werd ook niet makkelijk gevonden.

Het programma van eisen geeft aan dat het aangeleverde lesmateriaal moet aansluiten bij de vaardigheden van de docent (van de testgroep), daar is niet aan voldaan.

6.3.5 Bespreking resultaten uitvoering lessenserie

Wat betreft de uitvoering van de lessenserie wordt per randvoorwaarde besproken of hieraan voldaan is:

- Al met al kan gesteld worden dat in de testgroep de didactische leidraad toegepast is en het ontwerp gebruikt is. Er is meer op structurele kennis gefocust, waarbij gelet is op een geleidelijke opbouw op bestaande kennis (ook natuurkundige kennis) en waar koppelingen tussen en bewijzen in verschillende representaties een belangrijke rol hebben gespeeld.
- Al met al kan gesteld worden dat de docent van de controlegroep deels het leerboek volgt; de volgorde van het leerboek en de opgaven worden gebruikt. Naast de snelle klassikale introductie van de vectoren in een assenstelsel is in ieder geval te zien dat het leerboek er niet voor zorgt dat op de aandachtspunten uit de didactische leidraad gestuurd wordt. Koppelingen tussen representaties en eigenschappen zoals rekenregels worden nauwelijks behandeld of bewezen in het leerboek en zijn dan ook beperkt terug te vinden in de lessen van de controlegroep. Het bewijs dat gevraagd wordt in paragraaf 8-3 is dusdanig lastig dat de docent van de controlegroep ervoor kiest deze geheel klassikaal te behandelen, waardoor geen tijd meer overblijft voor een klassikale bespreking van de formule voor het zwaartepunt.
- Het aantal lesuren is vergelijkbaar met het aantal lesuren van het voorgaande jaar.
- Beide klassen hebben niet hetzelfde aantal lessen gebruikt, door onverwachte omstandigheden vanuit de school verviel de extra les voor de docent uit de controlegroep. De extra les is in de testgroep juist gebruikt voor paragraaf 8-3. Een eventueel effect in het voordeel van de testgroep zou hierdoor kunnen komen.
- De docent van de controlegroep is telkens procedureel ingelicht, maar niet inhoudelijk.
- Er is tussen leerlingen van de testgroep en de controlegroep gecommuniceerd over het ontworpen lesmateriaal. Zover bekend, kwam dit niet neer op inhoudelijke uitwisseling, meer op bespreking van de perceptie van de moeilijkheidsgraad. Een inhoudelijke uitwisseling zou duidelijk worden als onderdelen van het ontwerp terug te zien zijn in de antwoorden op het proefwerk van de controlegroep.
- Voor zover de docent van de testgroep en de onderzoeker hebben kunnen observeren heeft de aanwezigheid en lesuitvoer door de onderzoeker niet tot verstoringen in het leerproces van de leerlingen geleid, anders dan beoogd in het onderzoeksdoel.

Hoofdstuk 7 – Methode en resultaten interviews

De interviews dienen voor de bepaling van het effect van het ontwerp van de lessenserie op de tevredenheid bij de docenten over de samenstelling op het gebied van continuïteit (verticale leerlijnen) en horizontale samenhang (samenhang tussen vakgebieden). Eerst wordt de methode voor de gegevensverzameling en verwerking besproken. En daarna worden de resultaten van de verzamelde gegevens besproken.

7.1 Methode interviews

7.1.1. Respondenten

De interviews zijn zoals gepland afgenomen na voltooiing van de lessenserie en voor de start van de toetsweek. Beide docenten zijn geïnterviewd, maar ook zijn per klas door de betreffende docent twee leerlingen gevraagd mee te werken aan het interview, een wat betere en een wat zwakkere leerling. Hierdoor wordt het mogelijk de antwoorden van de docenten te vergelijken met die van de leerlingen en eventuele opvattingsverschillen op te sporen. De interviews hebben plaatsgevonden in daarvoor bestemde overleg ruimten of klaslokalen met alleen de onderzoeker en de geïnterviewde. Voor de controlegroep heeft de onderzoeker nog een derde leerling geïnterviewd, aangezien tijdens de interviews bleek dat de eerste twee toevallig de enige leerlingen waren in die klas zonder natuurkunde in het pakket. Hiervan volgde één leerling wel het hoofdstuk, maar zou volgend jaar de overstap naar wiskunde A maken en bij de andere leerling is het eerste deel van de opname onverwacht en onverklaarbaar afgebroken en niet teruggevonden in de back-up. Van dit eerste deel bestaan alleen de meerkeuzevragen en notities op het interviewformulier en in het tweede deel is getracht zoveel mogelijk terug te grijpen op het eerste deel. Aangezien het inclusie criterium de deelname aan de lessenserie was zijn alle interviews meegenomen.

De leerlingen uit de controlegroep zijn CI (geen natuurkunde, interview half verloren gegaan), CII (geen natuurkunde, stapt over naar wiskunde A) en CIII (wel natuurkunde). De leerlingen uit de testgroep zijn TI (wel natuurkunde) en TII (wel natuurkunde).

7.1.2 Methode gegevensverzameling en verwerking

Voor een eenduidige dataverzameling zijn, ter verhoging van de betrouwbaarheid, vooraf interviewleidraden met ruimte voor notities gemaakt. Voor een soepel verloop van het interview zonder veel schrijfpauzes en tegen verlies van data zijn de interviews opgenomen.

De interviewleidraden zijn opgesteld op basis van het boek van Van der Donk & Van Lanen (2016) en zijn te vinden in bijlage H. De interviews zijn opgezet als een gestructureerd interview met open en gesloten vragen en heeft de volgende opbouw:

- Er wordt begonnen met een inleiding over de inhoud en het doel inclusief een toestemmingsverklaring.
- In het algemene deel wordt gevraagd over welke groep het gaat en om op te starten/kader te creëren volgen daarna enkele algemene meerkeuzevragen over het hoofdstuk wat betreft het moeilijkheidsniveau, de beheersing van de lesstof en de mate waarin het onderwerp als leuk ervaren wordt.
- In het deel over continuïteit en horizontale samenhang is ervoor gekozen om alleen gebruik te maken van de term continuïteit in de vragen en hiervan vooraf een definitie te geven. Deze definitie laat ruimte om problemen met de horizontale samenhang aan te geven, ondanks dat hier niet specifiek naar gevraagd wordt. De vragen zijn van grof naar fijn opgebouwd; van

hoofdstuk, naar paragraaf, naar specifiek paragraaf 8-3. Dit geeft de geïnterviewde de kans eerst de meest opvallende zaken te benoemen zonder te veel sturing door de onderzoeker. Indien nodig wordt hierna gestuurd naar specifieke onderwerpen en onderdelen die van belang zijn voor het onderzoek.

- Als laatste wordt nog de gelegenheid geboden zaken te benoemen die nog vergeten waren.

De opnames van de interviews zijn eerst volledig als letterlijk transcript uitgewerkt, inclusief aanvullingen van de interviewer (tekst tussen rechte haken), vanwege het wissen van de audiobestanden ten behoeve van de privacy. Deze oorspronkelijke transcriptie is geanonimiseerd (tekst tussen accolades) en samen met de antwoorden van de meerkeuzevragen en de notities van de interviewer in één bestand verzameld. De passages over continuïteit en horizontale samenhang zijn hierin gemarkeerd en dit bestand is bij de onderzoeker op te vragen. De passages zijn daarna grotendeels als woordelijk transcript (tekst tussen dubbele aanhalingstekens) uitgewerkt met her en der aanvullingen door de interviewer (tekst tussen rechte haken), ter verhoging van de leesbaarheid. In een aantal gevallen, was het antwoord zo erg versnipperd dat deze geparafraseerd is.

De meerkeuzevragen, notities en woordelijke transcripties zijn geordend in een algemeen deel (moeilijkheid/beheersing/leuk) en per paragraaf. Voor het overzicht zijn de antwoorden die puur betrekking hadden op de continuïteit tussen paragrafen, de langere leerlijnen en de horizontale samenhang apart verzameld en aangevuld met de antwoorden hierover per paragraaf (geel gemarkeerd), waardoor deze laatste dubbel voorkomen. De tabellen met de gegevens zijn te vinden in bijlage I.

Uiteindelijk zijn de gegevens van de paragrafen 8-V t/m 8-3 (kwalitatief) met elkaar vergeleken om de tevredenheid over het herontwerp te bepalen. Er wordt hiervoor vanuit de tevredenheid van de docent van de testgroep gewerkt op basis van de aanpassingen van het lesmateriaal, eerst algemeen en daarna per paragraaf/onderwerp uitgediept. Vervolgens wordt het verschil in tevredenheid met de docent van de controlegroep bepaald. Ook wordt gekeken of dit wel of niet ondersteund wordt door de leerlingen. Overige resultaten bijvoorbeeld van andere paragrafen zijn ook verwerkt, maar zijn niet meegenomen in de bepaling van de tevredenheid.

7.2 Resultaten interviews

Voor het overzicht wordt eerst de tevredenheid tussen de paragrafen en in het bijzonder tussen 8-1 t/m 8-3 besproken, daarna binnen de losse paragrafen 8-V t/m 8-3 en als laatste worden overige resultaten besproken.

7.2.1 Resultaat tevredenheid opbouw tussen de paragrafen

De docent van de testgroep is tevreden over de opbouw van het ontwerp tussen de paragrafen 8-1 t/m 8-3 en ervaart nu een knip bij paragraaf 8-4, dat geen onderdeel van het ontwerp was. Eén van beide leerlingen benoemt voor de opbouw in moeilijkheid niet specifiek de paragrafen 8-1 t/m 8-3, maar wel latere paragrafen. Uit het (niet geheel duidelijke) verhaal van de andere leerling lijkt het erop dat de opbouw voor deze leerling inhoudelijk ook niet geheel uit de verf komt.

Docent testgroep: “Die eerste drie paragrafen [8-1 t/m 8-3] dat liep naadloos. Dat liep mooi in elkaar over en bouwde mooi op, je kon ook zien dat het bezonk bij de leerlingen, dus dat zat goed in elkaar.” “En dan zit er in één keer een knip. Dan zit er zo’n raar inwendig product [8-4] tussen.” “Zo voelde het echt.” “Ik denk voor de leerlingen ook en ik weet er ook nog even geen oplossing voor.”

Leerling TI: "Nou ik vond dit, paragraaf 6, wel iets lastiger. Ja, dan komt er meer samen." "En zo'n lijn opstellen dat vond ik wat lastiger." "Dit [de gemengde opgaven] bijvoorbeeld is ook best wel wat moeilijker dan de rest van het hoofdstuk..."

Leerling TII: "Ja, de eerste twee of drie paragrafen lukken altijd wel prima." "De eerste, dan had je alleen maar die vectoren." "En dan werd het wel steeds moeilijker." "Dit [?] vond ik ook alweer wat minder aansluiten, dan weer dit [?]." "Daar heb je wat meer rekenen met die kentallen en dan zijn die vectoren meer weg."

De docent van de controlegroep is tevreden over de inhoudelijke opbouw tussen de paragrafen 8-1 en 8-2 en ervaart een knip bij paragraaf 8-3 (en 8-4) in moeilijkheid. Eén van de drie leerlingen ervaarde paragraaf 8-3 als lastiger dan paragraaf 8-4. De andere twee leerlingen geven aan dat het wel op elkaar opbouwt.

Docent controlegroep: "De paragraaf [8-1] bouwt volgens [mij] vrij logisch op, maar er wordt veel te veel tijd aan besteed." "Dat ze naar die kentallen [8-2] daarna gaan, vond ik heel duidelijk, ..." "Maar dat zwaartepunt [8-3], ik weet niet zo goed waar ik dat zou plaatsen, want eigenlijk breekt dat het hoofdstuk." "Misschien dat het zwaartepunt wel naar achteren gehaald moet worden, na de vectorvoorstelling, zodat je de moeilijkheidsgraad verspreidt over het hoofdstuk. Dan heb je eerst het inproduct, daarna twee wat makkelijkere paragrafen, die veel meer recht voor zijn raap zijn en dan weer een lastigere paragraaf." "En dat heeft alles te maken met de bewijsopdrachten."

Leerling CII: "Volgens mij loopt het redelijk op elkaar door."

Leerling CIII: "Dat [8-1] is dan weer de basis ..." "Dan [8-2] wordt het gewoon wat verder uitgewerkt en dan ga je er ook wat dieper op in. En met meerdere vectoren, en dergelijke." "Het [8-3] gaat steeds verder eigenlijk." "Het was wel een stukje moeilijker, dan wordt het gewoon opgebouwd." "Dat [8-5] is wel weer een stukje lastiger." "... zo dan meer eens een beetje door, bij 6 [8-6] ook."

7.2.2 Resultaat tevredenheid paragraaf 8-V Voorkennis

In het ontwerp zijn de twee laatste opgaven over zwaartelijnen en het zwaartepunt in driehoeken vervangen door twee opgaven over gelijkvormigheid. De lesstof over het zwaartepunt in driehoeken komt terug in paragraaf 8-3. De docent van de testgroep is deels tevreden met het ontwerp, de verschuiving naar het bewijzen met gelijkvormigheid zou rigoureuzer mogen. Beide testgroep-leerlingen geven aan dat de link met de lesstof in het hoofdstuk pas later duidelijk werd.

Docent testgroep: "In principe sloot dat [gelijkvormige driehoeken] heel goed aan met wat ze in het derde jaar gehad hebben, daar hebben we diezelfde bewijsjes ook vast al gehad. Misschien had daar nog net iets meer aandacht voor kunnen zijn." "Dat hele stuk Pythagoras zou je kunnen overslaan, dat receptje kennen ze wel en alleen maar die bewijsjes doen."

Leerling TI: "Als je hier [8-V] mee begint, dan denk je wel "wat heeft dit nou eigenlijk met die vectoren te maken?", maar als je dan verder gaat..." "... dan snap je het daarna wel, dat het wordt gebruikt."

Leerling TII: "Het begin vond ik een beetje vaag, want dit was dan met de cosinus en dan hier in één keer vectoren, ik wist niet wat dat nou met elkaar te maken had. Uiteindelijk had het wel met de driehoek te maken natuurlijk."

De docent van de controlegroep is niet tevreden over de laatste twee opgaven over zwaartelijnen en het zwaartepunt in driehoeken. Eén van de drie controlegroep-leerlingen geeft aan dat de voorkennis aansloot met het hoofdstuk en de vorige jaren.

Docent controlegroep: “Zwaartepunt [in een driehoek], daarvan heb ik uitgelegd wat dat was.” “Ik vind alleen wel de link tussen zwaartepunt hier en zwaartepunt in het boek niet heel duidelijk. Want eigenlijk, zoals ik er nu tegenaan kijk, had je best een punt d kunnen maken, allemaal gewichtjes met een massa van één en dan even dat linken. Waarom is dat nou 2 staat tot 1?” “Dan zie je dat in één keer.”

Leerling CIII: “De voorkennis sloot wel aan met het hoofdstuk en de vorige jaren. Dat is wel handig, dat je eventjes de voorkennis hebt om het weer op te helderen.”

7.2.3 Resultaat tevredenheid paragraaf 8-1 Vectoren

De introductie van vectoren vanuit de natuurkundige context in de geometrische representatie is gehandhaafd. De belangrijkste verandering in het lesmateriaal is het behandelen van de parallellogram-methode (koppeling natuurkunde) naast de kop-staart-methode en het gebruiken hiervan voor verificatie en bewijs van de commutatieve eigenschap. De docent is tevreden met het behandelen van de parallellogram-methode (koppeling natuurkunde) naast de kop-staart-methode. Eén van de twee leerlingen beaamt dit. De andere leerling vindt de opbouw goed.

Docent testgroep: “Ik merkte dat dat [parallellogram-methode] goed landde, dat was voor hun vertrouwd.” “Vooral omdat er heel veel leerlingen in de klas zaten met natuurkunde in het pakket, die kenden dat.” “Dat werkte heel goed, ja. Dat gaf het een beetje bodem.”

Leerling TII: “De andere manier [parallellogram-methode] hadden wij bij natuurkunde geleerd, maar dat mocht ook gewoon, dus ... dan was het wel te doen.”

De docent van de controlegroep is deels tevreden met de opbouw, de overgang met de numerieke representatie zou sneller mogen. Eén van de drie leerlingen beaamt dit en benoemt deze paragraaf samen met een andere leerling als “de basis”.

Docent controlegroep: “De paragraaf bouwt volgens vrij logisch op, maar er wordt veel te veel tijd aan besteed.” “... een pijl die twee omhoog en vier opzij gaat en dan ben je eigenlijk al met de kentallen bezig, onbewust. Ja, gewoon, puur om te laten zien dat ze echt evenwijdig zijn en echt even groot en daar zit ‘m dat in. Dat is belangrijk.”

Leerling CIII: “Hier heb je dan zeven opgaven en om ze allemaal te maken, dat vind ik dan misschien niet nodig, dan begrijp ik het wel.”

7.2.4 Resultaat tevredenheid paragraaf 8-2 Vectoren en kentallen

De vrij snelle introductie van vectoren in de numerieke representatie (analytische benadering) is gehandhaafd. De belangrijkste verandering ten opzichte van het leerboek is het voortdurend koppelen naar de geometrische representatie en bijbehorende voorkennis en naar numerieke voorkennis van leerlingen en het gebruiken hiervan voor verificatie en bewijs van de rekenregels, wat in het leerboek ontbreekt. De docent van de testgroep is hier tevreden over. De leerlingen hebben over de inhoud niets specifiek gezegd.

Docent testgroep: “Ja, dit [8-2] ging ook probleemloos.”

De docent van de controlegroep is deels tevreden. De introductie van vectoren in de numerieke representatie zou sneller mogen om meer tijd voor de latere paragrafen te creëren. Eén van de drie leerlingen geeft aan te moeten wennen aan de notatie.

Docent controlegroep: “Dat ze naar die kentallen daarna gaan, vond ik heel duidelijk, dat had misschien voor mij wel in één paragraaf gemogen, want dat rekenen, daar hebben ze nu wel zo lang aan besteed, terwijl juist aan de achterkant meer ruimte nodig is.” “Het ontbinden

in de vectoren heb ik eigenlijk al bij 8-1 benoemd, maar dat was bij mij volgens mij één les. Dat was een blokuur.”

Leerling CI: Uit notities: De leerling moest wennen aan de notatie, bijvoorbeeld de absoluut notatie.

7.2.5 Resultaat tevredenheid paragraaf 8-3 Zwaartepunten en evenwicht

In het ontwerp wordt eerst de formule voor het zwaartepunt vanuit een wiskundige numerieke context behandeld. Hierna wordt eerst de koppeling gemaakt tussen het zwaartepunt en evenwicht in een natuurkundige context, waarna vervolgens teruggekoppeld wordt naar de wiskundige context. Als laatste wordt het zwaartepunt van drie puntmassa's in de hoekpunten van een driehoek behandeld, wat uit paragraaf 8-V verwijderd is. De docent van de testgroep is tevreden. De onderzoeker (uitvoerend docent paragraaf 8-3) is deels tevreden; wel tevreden over de numerieke insteek, niet geheel tevreden over de opgaven vanuit de natuurkundige context en de terugkoppeling naar de wiskundige context (inclusief de bewijsopgave). De leerlingen zijn wel tevreden over de numerieke insteek. De tevredenheid van beide leerlingen is verdeeld over de natuurkundige insteek en de terugkoppeling met de wiskundige context. Eén van beide leerlingen geeft aan de bewijsopgave te lastig te vinden om zelfstandig uit te voeren.

Docent testgroep: “Nou en dit [8-3] ging ook probleemloos, ja.”

Onderzoeker: “Ja, dit stukje wel [formule zwaartepunt]. Dit [natuurkundige context, opgave 4 en terugkoppeling wiskundige context, opgave 5] is nog even de vraag.”

Docent testgroep: “Ja, maar ik denk toch dat ze het beter begrepen hebben dan de klas van vorig jaar. Want die kregen gewoon de formule en “veel succes d'r mee”. En nu hebben ze, het verhaal erachter goed begrepen.”

Leerling TI: “De [gemiddelde] positie tussen die dingen bepalen was wel duidelijk en met dit samenvoegen [van massa's], daarvan was op zich ook wel duidelijk hoe dat moest.” “Sowieso vond ik dit wel iets makkelijker, omdat we die momentenwet dit jaar bij TP [Technology Program] hebben gehad.”

Leerling TII: “Ik vond dit [vectorformule zwaartepunt] dus heel makkelijk en toen ging ik eigenlijk naar het boek kijken en toen dacht ik “huh, is dit hetzelfde?” “Want ik vond het eigenlijk best wel moeilijk hier [in het boek] uitgelegd en hier dacht ik echt van het is makkelijk.” “Ja, dat [de natuurkundige insteek] vond ik wel wat moeilijker, maar als je het dan uitlegt, dan is aan de ene kant wel weer logisch. Maar ja, wel moeilijker.” “Het [de bewijsopgave] lukte me zelf niet, moet ik wel zeggen, maar als je het dan uitlegt op het bord dan snap ik het vaak wel. Maar uiteindelijk moet je het wel zelf kunnen, maar eigenlijk zelfstandig is wat te lastig. “Dit [opgave 4 en 5] vond ik niet aansluiten op dit [opgave 1 t/m 3] of dit [opgave 6]. Ik snapte niet wat dat met elkaar te maken had in één keer. Omdat je natuurlijk een soort van driehoek had [opgaven 1 t/m 3] en dit [opgave 4 en 5] was eigenlijk gewoon dat en toen kreeg je hier weer die driehoek [opgave 6] en toen dacht ik: oh ja, dat is dan wel weer logisch.”

De docent van de controlegroep is (naast de plaatsing in het hoofdstuk) niet tevreden over de opbouw binnen de paragraaf. De bewijsopgaven zijn door leerlingen niet zelfstandig te maken wat ten koste gaat van de tijd voor de vectorformule voor het zwaartepunt. De leerlingen zijn het wel eens met de docent over de bewijsopgaven, het niet behandelen van de vectorformule lijken ze geen probleem te vinden.

Docent controlegroep: “16 c en d heb ik eigenlijk met ze gedaan en ik heb daarna 18 met ze gedaan. Dat heb ik gewoon op het bord uitgewerkt en iedere keer even proberen, zelf laten doen, maar dan lopen ze zo vast, omdat ze die hele structuur niet gewend zijn.” “Ik heb ook als doel in mijn lesplannen gezet; “leerlingen zien de structuur van bewijzen”

in plaats van “leerlingen werken met de structuur van bewijzen”” “En toen heb ik gezegd: “die formule voor dat zwaartepunt ga je zelf maar uitvinden, want dat kan je heel goed zelf.””

Leerling CI: “{De docent} ging vooral bewijzen en later zei de docent dat het niet per se in de toets hoefde.” “En dat hele bord was volgeschreven, dat vond ik een beetje chaotisch.” “[Er stond] Wel heel veel op het bord en allemaal onder mekaar en dan kon je het natuurlijk weer niet zo heel goed lezen.” “Ja, de opbouw [van de paragraaf] is wel prima.”

Leerling CII: “In het begin [massa’s aan staaf] snapte ik het ieder geval wel, maar toen met die driehoeken, vond ik het wel wat lastiger worden.” “We hebben sowieso deze [opgave 16] wel gedaan in de les en volgens mij heeft [de docent] deze [opgave 18] ook nog wel uitgelegd.” “Ik snap op zich wel een beetje het verband. Het is meer dat ik dan gewoon [van] de getallen weet waar ik ze in de formule moet zetten.”

Leerling CIII: “Ja, ik vond dat [de opbouw] wel logisch.” “Dat [opgave 18] vond ik wel lastig, want hoe je dat dan moet doen.” “Ja, dat [formule zwaartepunt] begreep ik ook wel, gewoon hoe dat in mekaar steekt.”

7.2.6 Overige resultaten

Waar de docent van de testgroep niet specifiek over de koppelingen met de geometrische representatie ingaat geeft de docent van de controlegroep aan niet tevreden te zijn over de hoeveelheid tekenen.

Docent controlegroep: “Wat ik jammer vind is dat het tekenen er niet in voorkomt, want 8-1 begint met tekenen, maar dat komt hier helemaal niet terug.” “Het boek tekent gewoon heel weinig, terwijl dat juist bij vectoren dingen heel erg duidelijk kan maken.” “Maar het is constant rekenen, rekenen, rekenen en het is wel analytisch, maar bij analytisch hoort ook tekenen.”

De docent van de testgroep ervaart nu een knip bij paragraaf 8-4 Inwendig product. De docent van de controlegroep zet vraagtekens bij de natuurkundige context waarin het inwendig product wordt gebracht en geeft aan meer aandacht aan het bewijzen in het hoofdstuk te willen besteden.

Docent controlegroep: “En wat is het inproduct nou? Ja, ik heb het uitgelegd met een slee, aan de hand van opdracht 23. Maar ja, wat is nou arbeid? Ja, daar wil ik ook niet te diep op ingaan, bijvoorbeeld bij natuurkunde. Ik weet er ook niet megaveel van af.”

Docent controlegroep: “Dat zou voor dit hoofdstuk wel heel mooi zijn, als je één les aan bewijzen kan besteden. En of je nou die van het inproduct doet of die van het zwaartepunt dat maakt dan niet zo heel veel uit. Als je maar iets kunt bewijzen en de leerlingen die structuur een beetje bij kan gaan brengen, want dat onderwijsdoel kan ik nu niet behalen met mijn leerlingen.”

Beide docenten zijn ontevreden over paragraaf 8-7 Gemengde opdrachten.

Docent testgroep: “Ik zou [de volgende keer] de gemengde opdrachten niet als los ding aan het einde behandelen, maar het in de les iedere keer proberen.” “In ieder geval deels zou ik ze d’r uit halen en naar voren schuiven.” “De leukste vind ik eigenlijk de meetkundige opdrachten [opgave 52 en 53] dan weer en daar zijn we te weinig aan toe gekomen, achteraf.”

Docent controlegroep: “Bijvoorbeeld bij [opgave] 48, moet je honderd keer hetzelfde doen. Is dat een gemengde opdracht of is dat iets dat je in een paragraaf terug laat komen? Waar onderscheidt zich dit van de rest?” “Dat [opgave 52 en 53] is gemengd, ja klopt.”

Hoofdstuk 8 – Methode en (ontwerp)resultaten proefwerk

Het proefwerk dient voor de bepaling van het effect van het ontwerp van de lessenserie op de ontwikkeling van structurele kennis van leerlingen. Met behulp van de cijferresultaten van een proefwerk kan een kwantitatieve effectbepaling door middel van een t-test gedaan worden. Door de complexiteit van de cognitieve ontwikkeling van het construct vector in combinatie met allerlei mogelijke oplossingsstrategieën in verschillende representaties leek dit niet voldoende en is onderzoek gedaan naar een toetsmethode die meer aspecten toetst en hiervoor gebruik maakt van Multiple Solution Tasks (meervoudig oplosbare opgaven), de MST-methode.

In het methode-deel worden eerst de respondenten en randvoorwaarden besproken. Hierna wordt de methode voor het ontwerpen van het proefwerk besproken. Hierna volgt de methode voor de effectbepaling met aansluitend een apart onderdeel met de MST-methode. Hierna wordt het ontwerp van het proefwerk besproken, inclusief de verantwoording. Als eindresultaat wordt het effect van het ontwerp bepaald via de (cijfer)resultaten van het proefwerk en de MST-methode.

8.1 Methode proefwerk

8.1.1. Respondenten

Het proefwerk is uitgevoerd in de toetsweek. Het inclusie criterium voor deelname aan de effectanalyses was deelname aan dit proefwerk en heeft geleid tot 22 leerlingen uit de testgroep en 25 leerlingen uit de controlegroep. Voor de overige leerlingen geldt dat één leerling uit de testgroep op een ander moment een duidelijk andere versie gemaakt heeft en dat de overige leerlingen, twee in de testgroep en één in de controlegroep, het proefwerk niet gemaakt hebben. Achteraf gaven de surveillanten aan dat er nog leerlingen aan het werk waren toen de 50 minuten voorbij waren en de proefwerken ingenomen werden.

8.1.2 Randvoorwaarden

Voor het ontwerp van het proefwerk zijn de volgende randvoorwaarden opgesteld waaraan (zoveel mogelijk) voldaan moet worden om de validiteit te verhogen, inclusief bedreigingen:

- Het proefwerk moet een goede balans van procedurele en structurele vragen bevatten.
- Het proefwerk moet opgaven bevatten die de mogelijkheid openhouden om in verschillende representaties op te lossen.
- Het proefwerk moet een MST bevatten.
- Het proefwerk mag niet langer duren dan vorig jaar, dus één lesuur van 50 minuten.
- Het proefwerk mag geen onderdelen bevatten die niet middels de lesstof in het leerboek opgelost kunnen worden, aangezien de leerlingen uit de controlegroep niet benadeeld mogen worden.
- Zowel de docent van de testgroep als de docent van de controlegroep moeten het proefwerk goedkeuren.
- Achteraf zal het proefwerk bekeken moeten worden op tijdsduur in combinatie met de balans van het niveau van de vragen, aangezien te veel moeilijke vragen ook kunnen leiden tot te veel tijdsbelasting. Indien geen antwoord gegeven wordt bij opgaven blijft het onduidelijk of de leerlingen geen idee en/of geen tijd hadden.

8.1.3 Methode ontwerp

Eerst is onderzoek gedaan naar het vorige proefwerk inclusief correctiemodel. Vervolgens is gekeken wat wel of niet aan de randvoorwaarden voldeed en naar mogelijkheden voor verbetering. Doordat het proefwerk ook lesstof bevat dat buiten het bereik van dit onderzoek valt heeft de docent van de testgroep in overleg met de onderzoeker een eerste opzet voor het proefwerk en correctiemodel gemaakt, waarna deze samen met de onderzoeker verder ontwikkeld is. Alhoewel een aantal opgaven betrekking had op de paragrafen 8-4 t/m 8-6 en een vaardighedenblok en dus buiten dit onderzoek vallen, zijn deze wel meegenomen in het overleg, vanwege een goede balans in het hele proefwerk. Het ontwerp is vervolgens ter goedkeuring overlegd aan de docent van de controlegroep.

8.1.4 Methode effectbepaling

Er worden verschillende gegevens met elkaar vergeleken, ter bepaling van het effect van het ontwerp, maar ook ten behoeve van de validiteit en betrouwbaarheid. Hierbij zijn de nulhypothese opgesteld als “geen effect” of “geen verschil”, die worden verworpen bij een statistisch significant effect of verschil. Het effect of verschil kan positief of negatief zijn.

Beide docenten hebben hun eigen groep nagekeken, wat gebruikt is voor tussentijdse aanpassing van het correctiemodel (in overleg en door alle betrokkenen doorgevoerd), voor het rapportcijfer van de leerlingen en voor validiteits- en betrouwbaarheidsdoeleinden. De onderzoeker heeft alle proefwerken nagekeken, waarvan de (cijfer)resultaten gebruikt zijn voor de effectbepaling van het ontwerp en voor validiteits- en betrouwbaarheidsdoeleinden. Ook is voor de effectbepaling van het ontwerp en voor validiteits- en betrouwbaarheidsdoeleinden gebruik gemaakt van de jaargemiddelden van de leerlingen voor wiskunde, wat neerkomt op het gemiddelde van alle lesstof van 4 vwo behalve het onderwerp vectoren. De bepaling van de MST-score ten behoeve van de MST-methode heeft na het beoordelen van het (cijfer)resultaat van het gehele proefwerk plaatsgevonden en is alleen door de onderzoeker uitgevoerd, daarover volgt in de volgende paragraaf meer.

Hieronder volgen korte omschrijvingen van de gemaakte vergelijkingen en effectbepalingen, gevolgd door de methode voor de bepaling van de effectgrootte en de statistische significantie. De overige uitgangspunten, aannames en formules zijn te vinden in bijlage J.

Tijd/moeilijkheid proefwerk

Om een inschatting van de lengte en/of niveau van het proefwerk te maken zijn (naast de observaties van de surveillanten en eventuele opmerkingen van leerlingen) per groep de proefwerkcijfers (nakijkwerk onderzoeker) vergeleken met de jaargemiddelden (nulmeting), met als nulhypothese dat er geen verschil is.

Bestaand niveauverschil tussen de groepen

Om te bepalen of er een bestaand niveauverschil tussen beide groepen is, zijn de jaargemiddelden van de beide groepen met elkaar vergeleken, met als nulhypothese dat er geen verschil is.

Betrouwbaarheid nakijkinstrument (interrater reliability)

Het nakijkinstrument is de combinatie van de nakijker met het correctiemodel. Om de betrouwbaarheid van het nakijkinstrument in te schatten wordt het verschil tussen het (cijfer)resultaat (gehele proefwerk) van de onderzoeker met het (cijfer)resultaat (gehele proefwerk) van de docenten bepaald, met als nulhypothese dat er in beide gevallen geen verschil is.

Effect ontwerp lessenserie

Om het effect van het ontwerp van de lessenserie te bepalen is het belangrijk dat het verschil tussen de groepen leerlingen gemeten wordt en niet het verschil tussen het nakijkwerk van de beide docenten. Ongeacht de uitkomsten van voorgaande vergelijkingen zijn ter verhoging van de validiteit en betrouwbaarheid de (cijfer)resultaten van het nakijkwerk van de onderzoeker gebruikt. Ook is het belangrijk dat een eventueel niveauverschil tussen beide groepen geen invloed heeft. Ongeacht de uitkomsten van voorgaande vergelijkingen is daarom niet puur gekeken naar de (cijfer)resultaten van het proefwerk, maar naar het verschil tussen het (cijfer)resultaat van het proefwerk (door de onderzoeker) en het jaargemiddelde.

Voor de effectbepaling wordt gekeken naar het verschil tussen de groepen op de volgende onderdelen:

- Om te bepalen of het ontwerp van de paragrafen 8-V t/m 8-3 effect heeft op de structurele kennis van leerlingen wordt gekeken naar de structurele opgave. De verschilcijfers (cijfer opgave 4a – jaargemiddelde) tussen beide groepen worden vergeleken. Hierbij geldt:

$$\text{cijfer opgave 4a} = \frac{\text{score opgave 4a}}{\text{max. score opgave 4a}} \cdot 9 + 1 \leq 10$$

- Om het effect van het ontwerp van de paragrafen 8-V t/m 8-3 specifiek op de kennis over die lesstof te bepalen wordt gekeken naar de subset van opgaven betreffende deze paragrafen. De verschilcijfers (cijfer subset - jaargemiddelde) tussen beide groepen worden vergeleken. Hierbij geldt:

$$\text{cijfer subset} = \frac{\text{score subset van de opgaven incl. bonusopgave}}{\text{max. score subset van de opgaven excl. bonusopgave}} \cdot 9 + 1 \leq 10$$

- Om te bepalen of het ontwerp van de paragrafen 8-V t/m 8-3 ook een (doorwerkend) effect heeft op de kennis van de lesstof van alle paragrafen wordt gekeken naar het hele proefwerk. De verschilcijfers (proefwerkcijfer - jaargemiddelde) tussen beide groepen worden vergeleken. Hierbij geldt:

$$\text{proefwerkcijfer} = \frac{\text{score opgaven incl. bonusopgave}}{\text{max. score opgave excl. bonusopgave}} \cdot 9 + 1 \leq 10$$

Bepaling effectgrootte

Om het verschil tussen de gemiddelden van twee verschillende groepen (twee onafhankelijke steekproeven) te bepalen wordt gebruik gemaakt van de gestandaardiseerde effectgrootte *Cohen's d_s* (Lakens, 2013). Voor de standaarddeviatie wordt gebruik gemaakt van de *SD_{pooled}* (Lakens, 2013), een soort gecombineerde standaarddeviatie van beide groepen, die ook rekening houdt met de groeps grootte.

Om het verschil tussen de gemiddelden binnen een groep (gepaarde waarden, dus twee afhankelijke steekproeven) te bepalen wordt gebruik gemaakt van *Cohen's d_{av}* (Lakens, 2013), die de correlatie niet meeneemt en voor de standaardafwijking de gemiddelde waarde neemt. De *Pearson's r* wordt daarom los vermeld.

De berekeningen zijn uitgevoerd in Excel en ook in G*Power (Faul, Erdfelder, Lang, & Buchner, 2019), ter controle en voor de poweranalyse.

Bepaling statistische significantie

Voor de statistische significantie worden tweezijdige onafhankelijke en afhankelijke t-tests gedaan in Excel met eventueel een poweranalyse in het programma G*power (Faul, Erdfelder, Lang, & Buchner, 2019) om de steekproefgrootte van een eventueel vervolgonderzoek in te schatten.

Vanwege de vrij lage impact van een onterecht verworpen H_0 in dit (type) onderzoek is gekozen voor een vrij hoge alfa van 0,1. Er is statistische significantie bij $p < 0,1$. Voor de poweranalyse wordt een power van 0,8 aangehouden ($\beta = 0,2$; de kans op onterecht accepteren van H_0) met als gegenereerde uitkomst gelijke steekproefgroottes voor beide groepen. We stellen de kans op het onterecht verwerpen van H_0 dus kleiner dan de kans op het onterecht accepteren. Dit houdt in dat het doorvoeren van veranderingen die geen positief effect hebben wat erger is dan het niet doorvoeren van veranderingen die wel een positief effect hebben, wat in de context van dit onderzoek wel te verdedigen is (en in de menselijke voorkeur ligt).

Vanwege de kleine steekproefgrootte zullen de uitkomsten waarschijnlijk niet statistisch significant zijn. Als dit het geval is wordt in het geval van het effect bij de verschilcijfers betreffende de structurele opgave en de subset (opgaven van de paragrafen 8-V t/m 8-3) bepaald hoe groot de steekproef of het verschil had moeten zijn en via een power-analyse hoe groot de steekproef bij een vervolgonderzoek zou moeten zijn.

8.1.5 De MST-methode

Uit het theoretische kader is gebleken dat verschillende representaties en methodes verschillende kwaliteiten hebben bij de cognitieve ontwikkeling, dat dit ook zorgt voor meerdere mogelijke routes in het raamwerk voor de aanpak van problemen en dat leerlingen hier een bepaalde voorkeur in hebben. Een opgave die op meerdere manieren opgelost kan worden wordt een Multiple Solution Task genoemd, ofwel MST. Volgens Levav-Waynberg & Leikin (2009, 2012) kunnen MST's gebruikt worden om te toetsen of leerlingen wiskundige verbanden kunnen leggen, maar ze kunnen ook als didactisch middel ingezet worden. De toetsmethode van het onderzoek van Levav-Waynberg & Leikin (2009, 2012) is in dit onderzoek gebruikt, waar afgeweken is van deze methode wordt dit toegelicht.

MST's bevorderen volgens de onderzoekers de verbinding van wiskundige kennis en de wiskundige creativiteit. Zonder verbinding wordt volledig vertrouwd op het geheugen, er moeten veel verschillende op zichzelf staande concepten en procedures onthouden worden (Levav-Waynberg & Leikin, 2012), wat redelijk overeenkomt met het procedurele denken zoals bedoeld wordt in het theoretisch kader. Meer verbinding wordt dan gezien als meer structureel denken. Creativiteit is niet een gegeven en statisch kenmerk van een exceptioneel getalenteerd individu, maar eerder een dynamische eigenschap die ontwikkeld kan worden in een breed segment van de populatie door ervaring en instructie en die beschouwd moet worden als een denkgewoonte ("habit of mind"). Creativiteit is een integraal component van hoge wiskundige bekwaamheid. Meetkunde is in zijn algemeenheid een erg geschikt onderwerp voor de MST-methode; veel opgaven hebben deze meervoudige oplossingsmogelijkheden al in zich.

Het verschil tussen de oplossingen kan zich uiten in het gebruiken van a) verschillende representaties van een wiskundig concept; b) verschillende eigenschappen (definities, stellingen, hulpconstructies) van wiskundige concepten in een specifiek wiskundig onderwerp; of c) wiskundige instrumenten (hulpmiddelen) en stellingen die bij verschillende takken van wiskunde horen.

De oplossingen van een MST worden in de hieronder gedefinieerde oplossingsruimten ingedeeld.

- De expert-oplossingsruimte is de meest complete verzameling van oplossingen van een MST. Binnen deze ruimte liggen conventionele oplossingen, de oplossingen die binnen het

curriculum of leergeschiedenis van de leerling(en) liggen en onconventionele oplossingen, de oplossingen die daarbuiten liggen. Deze oplossingsruimte wordt voor het toets moment opgesteld, maar wordt (ook in het geval van dit onderzoek) soms nog aangevuld met onverwachte oplossingen van respondenten.

- De individuele oplossingsruimte is de verzameling geschikte oplossingen door één persoon geproduceerd. Binnen deze ruimte liggen beschikbare oplossingen, de oplossingen die iemand alleen produceert en potentiële oplossingen, de oplossingen die met een beetje hulp geproduceerd kunnen worden.
- De collectieve oplossingsruimte omschrijft alle geschikte oplossingen van een groep individuen.

Om de kennis van leerlingen te evalueren wordt gekeken naar de score van geschikt bevonden oplossingen op het gebied van correctheid en verbondenheid (connectedness). Een oplossing wordt ongeschikt bevonden als deze gebaseerd is op verkeerde argumenten of als slechts het begin gegeven is. Om creativiteit te evalueren wordt gekeken naar de score van geschikt bevonden oplossingen op het gebied van vloeiendheid (fluency), flexibiliteit en originaliteit. Zodra alleen gerekend wordt met scores voor geschikt bevonden oplossingen is de evaluatie van creativiteit onafhankelijk van de score voor correctheid en verbondenheid (Levav-Waynberg & Leikin, 2012). De aspecten worden als volgt omschreven:

- Correctheid: de mate waarin geschikte oplossingen correct zijn uitgevoerd.
- Verbondenheid: een maat bepaald door het totale aantal verschillende concepten en stellingen in de geschikte gegenereerde oplossingen.
- Vloeiendheid: het aantal geschikte gegenereerde oplossingen.
- Flexibiliteit: een maat voor de bekwaamheid te wisselen van strategie.
- Originaliteit: een maat voor de zeldzaamheid van een bepaalde oplossing binnen een onderzoeksgroep. Bij verschillende onderzoeksgroepen binnen één onderzoek kan de originaliteitsscore voor dezelfde oplossing dus verschillen.

Per aspect wordt de scoremethode besproken met als resultaat de scorekaart in bijlage K, die de basis vormt voor de berekeningen in Excel.

Scoremethode van de correctheid

Voor de correctheid (*Co*) kan een score behaald worden tussen 50 en 100 afhankelijk van de nauwkeurigheid van de geschikte oplossing. Is een oplossing gebaseerd op verkeerde argumenten of is slechts het begin gegeven dan wordt de opgave ongeschikt bevonden en telt op geen enkel aspect mee. Als een oplossing onnauwkeurig is, maar naar een correcte conclusie leidt, dan wordt de oplossing geschikt bevonden. Een volledig correcte oplossing scoort 100 punten, voor foute of incomplete theorie geldt een aftrek van 20 punten per fout en voor kleine fouten een aftrek van 10 punten per fout, met een minimale score van 50. Voor de puntenaftrek is gaandeweg een lijst gemaakt, waarna vervolgens alle opgaven voor een tweede keer gecontroleerd zijn. Waar doorgestreepte oplossingen in de berekening van het proefwerkcijfer niet meegenomen zijn, worden deze (indien goed leesbaar) wel in de MST-methode meegerekend.

De hoogste score van de verschillende oplossingen van een leerling wordt gebruikt als totale correctheidsscore in de gehele individuele oplossingsruimte van een leerling. Hiermee wordt dus gekeken naar de maximaal haalbare correctheid van een leerling. Een gemiddelde waarde straft leerlingen af die naast een volledig correcte oplossing, veel alternatieve, maar niet geheel correcte oplossingen, hebben. En het optellen van alle scores bevoordeelt leerlingen met veel, niet geheel correcte oplossingen, boven een leerling met minder, maar volledig correcte oplossingen.

Scoremethode van de verbondenheid

Voor de verbondenheid (Vb) kan een score behaald worden tussen 0 en 100 afhankelijk van de verhouding tussen het totale aantal gebruikte concepten en stellingen in de individuele oplossingsruimte en het totale aantal concepten in de expert-oplossingsruimte, gecorrigeerd naar correctheid. Dit gebeurt aan de hand van de volgende formule:

$$Vb = \frac{t}{T} \cdot \overline{Co}$$

Met:

- Vb Verbondenheid
- t Het totale aantal concepten en stellingen in de individuele oplossingsruimte
- T Het totale aantal concepten en stellingen in de expert-oplossingsruimte
- $\overline{Co}$ De gemiddelde correctheidsscore van de geschikt bevonden oplossingen

Scoremethode van de creativiteit

Creativiteit (Cr) wordt geëvalueerd door te kijken naar de score voor vloeiendheid (Vl), flexibiliteit (Fl) en originaliteit (Or). Deze aspecten kunnen ook los geëvalueerd worden.

De vloeiendheid (Vl) is het totale aantal geschikte oplossingen binnen een individuele oplossingsruimte.

De flexibiliteit (Fl) is de bekwaamheid te wisselen van strategie, waarbij rekening wordt gehouden met de mate van verschil tussen de strategieën. Voor de eerste geschikte oplossing i geldt $Fl_i = 10$. Voor de overige geschikte oplossingen geldt $Fl_i = 10$ als deze zich in een andere hoofdgroep bevindt, $Fl_i = 1$ als deze zich in dezelfde hoofdgroep bevindt, maar in een andere subgroep. En $Fl_i = 0,1$ als deze zich zowel in dezelfde hoofdgroep als in dezelfde subgroep bevindt. Voor de flexibiliteit binnen een individuele oplossingsruimte geldt: $Fl = \sum Fl_i$.

De originaliteit (Or) is de zeldzaamheid van een bepaalde geschikte oplossing binnen een onderzoeksgroep. Bij verschillende onderzoeksgroepen, in dit onderzoek een testgroep en een controlegroep, kan de originaliteitsscore voor dezelfde oplossing dus ook verschillen. Op basis van resultaten uit experimenten wordt door Levav-Waynberg & Leikin (2012) de norm gehanteerd, dat als meer dan 8 uit 20 leerlingen een bepaalde oplossing geven de kans groot is, dat deze in de les uitgelegd is en daardoor niet origineel is. Als 3 (of minder) uit 20 leerlingen een bepaalde oplossing geven wordt deze als origineel gezien. De zeldzaamheid van een geschikte oplossing i wordt bepaald aan de hand van de formule voor P_i :

$$P_i = \frac{m_i}{N} \cdot 100\%$$

Met:

- P_i Relatieve frequentie van geschikte oplossing i
- m_i Het aantal leerlingen dat geschikte oplossing i gebruikte
- N Het totale aantal leerlingen

De scores zijn: $Or_i = 10$ als $P \leq 15\%$, $Or_i = 1$ als $15\% < P \leq 40\%$ en $Or_i = 0,1$ als $P > 40\%$. Voor de originaliteit binnen een individuele oplossingsruimte geldt: $Or = \sum Or_i$.

De creativiteit (Cr) binnen een individuele oplossingsruimte wordt berekend met de volgende formule:

$$Cr = Vl \cdot \sum (Fl_i \cdot Or_i)$$

Met:

- Vl Het aantal geschikte oplossingen in de individuele oplossingsruimte
- Fl_i De score voor flexibiliteit van geschikte oplossing i
- Or_i De score voor originaliteit van geschikte oplossing i

Door de scoretoekenning en vervolgens de vermenigvuldiging van flexibiliteit met originaliteit is het mogelijk dat de volgorde van de geschikte gegenereerde oplossingen een verschil in creativiteit geeft, terwijl exact dezelfde oplossingen gegenereerd zijn. In dit onderzoek is bepaald dat de volgorde niet van belang is. Indien hierdoor een verschil in score ontstaat wordt slechts één van de scores voor de verschillende volgorden gebruikt. De keuze voor de gebruikte score moet duidelijk verantwoord worden en indien mogelijk gebaseerd zijn op de uitgangspunten van de aspecten.

Bepaling effect van het ontwerp

Naar aanleiding van de oplossingsruimten van een specifieke opgave kunnen de scores van individuele leerlingen en groepen op de verschillende aspecten bepaald worden en vervolgens met elkaar vergeleken worden. Er wordt gekeken naar de gecombineerde aspecten kennis (correctheid en verbondenheid) en creativiteit (vloeiendheid (fluency), flexibiliteit en originaliteit) en naar de losse aspecten. De bepaling van effectgrootte en statistische significantie vindt op dezelfde manier plaats als bij de (cijfer)resultaten, met als nulhypothese dat er geen verschil is. Deze methode houdt echter in dat geen rekening gehouden wordt met een eventueel bestaand niveauverschil tussen de beide groepen. Hiermee moet bij de bespreking van de resultaten rekening gehouden worden.

Alleen betreffende de correctheid kan het effect van het ontwerp berekend worden aangezien daarmee een verschilcijfer met het jaargemiddelde berekend kan worden. Voor de overige aspecten is geen nulmeting beschikbaar en kan met de MST-methode alleen gekeken worden naar het verschil tussen de groepen. Om het effect te meten zijn de verschilcijfers (het correctheidscijfer - jaargemiddelde) tussen beide groepen vergeleken. Voor het correctheidscijfer wordt de correctheidsscore omgezet naar een (cijfer)resultaat via de volgende formule:

$$correctheidscijfer = \frac{correctheidsscore}{100} \cdot 9 + 1$$

Betrouwbaarheid

Om te controleren of de scoremethode voor correctheid dezelfde resultaten geeft als het nakijkwerk met het correctiemodel worden deze met elkaar vergeleken. Het (cijfer)resultaat via het correctiemodel wordt net als bij de correctheidsscore met de hoogste score van de oplossingen van de MST-opgave berekend:

$$hoogste\ deeltcijfer\ MSTopgave = \frac{hoogste\ score\ van\ MSTopgave}{max.\ score\ opgave\ MSTopgave} \cdot 9 + 1$$

Om het effect te meten zijn de verschilcijfers (het hoogste deeltcijfer van de MST-opgave - jaargemiddelde) tussen beide groepen vergeleken.

Aangezien beide scoremethodes de juistheid van een opgave meten zouden beide methodes ongeveer dezelfde waarden moeten opleveren.

De theorie achter de MST-methode vormt een aanvulling op het literatuuronderzoek in het theoretische kader. Naast de correctheid, waar in proefwerken normaal op beoordeeld wordt, geeft het een manier om oplossingen te ordenen en kwantitatief te vergelijken op andere aspecten. De MST-methode van Levav-Waynberg & Leikin (2009, 2012) vereist echter uitdrukkelijk dat studenten de problemen oplossen in zoveel mogelijk manieren (gebruik makend van zoveel mogelijk strategieën). Vanwege het proefwerk en het schema van de leerlingen was dat hier niet mogelijk en is gekozen voor een gewone vraag met een bonusvraag voor één alternatieve oplossingsmethode. Door de beperking tot maximaal twee oplossingen is de scoreverdeling waarschijnlijk niet onderscheidend genoeg. De bruikbaarheid van de scoremethodiek van de MST-methode zal mede uit de data-analyse moeten blijken. Hoe dan ook biedt het invoegen van de MST een manier om vast te stellen waar de voorkeur van leerlingen ligt en of zij in staat zijn te wisselen naar een andere strategie.

8.2 Ontwerpresultaat proefwerk

Het proefwerk dient voor de bepaling van het effect van het ontwerp van de lessenserie op de ontwikkeling van structurele kennis van leerlingen. Om dit te waarborgen moet het ontwerp van het proefwerk zoveel mogelijk voldoen aan de opgestelde randvoorwaarden. Eerst wordt hier een samenvatting van het onderzoek naar het vorige proefwerk besproken, gevolgd door de verantwoording van de ontwerpkeuzes. Hierna volgt de expert-kaart van de MST-opgave volgens de MST-methode.

8.2.1 Onderzoek vorig proefwerk 2016/2017

Het proefwerk 2016/2017 inclusief correctiemodel en de uitgebreide analyse hiervan zijn te vinden in bijlage L en M. Volgens de docenten van het CCS was dit proefwerk inhoudelijk en wat betreft tijd heel goed te doen voor de leerlingen, het gemiddelde cijfer voor dit proefwerk was volgens de docenten ook hoger dan voor de overige proefwerken. Alleen opgave 1 en 2 zijn geanalyseerd aangezien de overige opgaven buiten beschouwing van dit onderzoek vallen. Hieronder volgt per opgave een samenvatting van de analyse.

Opgave 1 heeft betrekking op de paragrafen 8-1 Vectoren en 8-2 Vectoren en kentallen. Elke deelvraag stuurt sterk aan op het gebruiken van een bepaalde procedure binnen een bepaalde representatie. Opgave 1a is geometrisch procedureel met algebraïsche naamgeving en opgave 1b en 1c behandelen beide verschillende aritmetisch procedurele kennis in de numerieke representatie. Beide representaties zijn dus vertegenwoordigd, er wordt echter alleen op procedurele kennis getoetst en niet op structurele kennis.

Opgave 2 heeft betrekking op paragraaf 8-3, zwaartepunten en evenwicht. Elke deelvraag stuurt aan op het oplossen in numerieke representatie en dit is ook terug te vinden in het correctiemodel. Waar opgave 2a procedurele kennis toetst is er bij 2b meer overzicht nodig, een vorm van structurele kennis, echter niet zozeer op het gebied van vectoren. Opgave 2b valt meer in de categorie productieve vaardigheden volgens de syllabus, het toepassen van de parate vaardigheden (routinematige beheersing) in complexe probleemsituaties, waarbij door inzicht, overzicht, probleemaanpak en metacognitieve vaardigheden een strategie bedacht moet worden om het probleem op te lossen.

De analyse laat zien dat de opgaven de kennis van vectoren op procedureel niveau toetsen en sturen naar een oplossingsmethode in een bepaalde representatie. Ondanks de sturing zijn de opgaven prima op andere manieren in andere representaties op te lossen en minder sturend te maken. Ook kunnen ze daardoor als basis voor een MST dienen.

8.2.2 Ontwerp proefwerk 2017/2018

In bijlage N bevindt zich een combinatiebestand van de proefwerkopgaven met het correctiemodel. Er is gezocht naar balans in de moeilijkheid van het ontwerp van het gehele proefwerk, waarbij procedurele opgaven (aritmetisch en algebraïsch) het grootste deel vormen, gevolgd door een kleiner deel complexere opgaven en een enkele structurele opgave in een puntenverhouding van (ongeveer) 3:2:1. Het ontwerp start met redelijk eenvoudige aritmetisch procedurele opgaven, zodat leerlingen op gang kunnen komen. Ten opzichte van het vorige proefwerk is naast de procedurele opgaven over paragraaf 8-V t/m 8-3 een structurele opgave hierover toegevoegd om specifiek op structurele kennis te kunnen toetsen. Ook is het aandeel van complexere opgaven betreffende de lesstof van paragraaf 8-V t/m 8-3 verhoogd. Bij complexe opgaven moet een strategie gekozen worden en de aanname is dat leerlingen met meer structurele kennis hier beter presteren. Verder zijn naast de bestaande aritmetisch procedurele opgaven ook algebraïsch procedurele opgave toegevoegd, specifiek in beide representaties, dit verdiept en verbreed de toetsing van de kennis. De vraagstelling van onder andere de MST is juist aangepast, zodat deze niet sturend is in de keuze voor representatie, waardoor de voorkeur van leerlingen naar voren kan komen.

Wat betreft de tijdsduur van 50 minuten voor het proefwerk was de inschatting dat het proefwerk door meer opgaven (inclusief een verplichte vaardighedenopgave vanuit het Programma van Toetsing en Afsluiting van het CCS) en de verhoogde moeilijkheidsgraad iets meer tijd zou kosten dan het vorige proefwerk en dat hierdoor ook het gemiddelde cijfer wat lager zou uitvallen dan vorig jaar. Vanwege deze “dubbele” verzwaring is in overleg met de docenten van het CCS besloten om van het tweede deel van de MST (opgave 7b) een bonusvraag te maken.

Voor de opgaven in het ontwerp die betrekking hadden op paragraaf 8-V t/m 8-3 geldt in het kort dat de opgaven 2a, 2b en 3b aritmetisch procedurele opgaven in numerieke representatie zijn. Opgave 4a kan als structureel gezien worden en in meerdere representaties opgelost worden. Opgave 4b en 4c vragen voor hetzelfde algebraïsch procedurele en complexe probleem zowel een oplossing in de geometrische als de numerieke representatie. Opgave 7ab kan op verschillende manieren procedureel opgelost worden, maar ook structureel en vraagt leerlingen dit in maximaal twee verschillende representaties te doen. Opgave 7c kan ook op verschillende manieren procedureel opgelost worden en structureel, maar deze is tevens complex. In de bespreking hieronder wordt dieper ingegaan op de ontwerpkeuzes van de opgaven.

- Opgave 2a en 2b: Na de vaardighedenopgave is als start van het deel over vectoren gekozen voor opgave 1b en 1c uit het bestaande proefwerk. Deze aritmetisch procedurele opgaven in numerieke representatie moeten voor leerlingen goed te doen zijn. Deze opgaven behandelen lesstof uit paragraaf 8-2.
- Opgave 3b: De lengteberekening van de vector uit paragraaf 8-2 is tevens een aritmetisch procedurele opgave.
- Opgave 4a: Deze opgave kan gezien worden als een structurele opgave uit het begin van de ontwikkeling van het construct vector in de paragrafen 8-1 en 8-2. Leerlingen hebben niet eerder een vergelijkbare opgave gehad en door de vraagstelling in algebraïsche omschrijving en de term “bepaal” is er ook geen sturing in de te kiezen representatie en/of oplossingsmethode. Er zijn verschillende oplossingsmethodes mogelijk, het correctiemodel bevat er vier: 1) een “verbale” beredenering, 2) een algebraïsche aanpak met de gegeven algebraïsche formules, 3) een oplossing in geometrische representatie en 4) een oplossing in numerieke representatie met (variabele) kentallen. Alhoewel dit niet het uitgangspunt was, is in overleg met de docent van de controlegroep deze laatste ook goed gerekend indien gewerkt is met getalvoorbeelden. De verantwoording daarvoor is dat de bestaande lesmethode geen aandacht besteedt aan de verschillende niveaus in bewijzen gaandeweg de cognitieve ontwikkeling, wat in de testgroep wel het geval was, en dat de controlegroep anders

onevenredig benadeeld zou worden. Ook zou de specifieke vermelding bij opgave 4c (dat getalvoorbeelden niet voldoen) kunnen impliceren dat dit hier wel gebruikt mag worden. Deze opmerking zou bij 4a echter teveel sturen naar een numerieke oplossing en is daarom bewust niet toegevoegd.

- Opgave 4b en 4c: Alhoewel bij beide opgaven gebruik gemaakt moet worden van algebraïsch procedurele vaardigheden uit de paragrafen 8-1 en 8-2 vergt deze opgave dusdanig veel overzicht dat deze in ieder geval als complex gezien kan worden. Aangezien het belangrijk is dat leerlingen beide representatievormen beheersen wordt gevraagd de opgave zowel in geometrische representatie als in numerieke representatie op te lossen. Vanwege het beoogde algebraïsche niveau is specifiek vermeld dat getalvoorbeelden niet voldoen.
- Opgave 7a en 7b: Dit is opgave 2a uit het bestaande proefwerk betreffende paragraaf 8-3 zwaartepunten en evenwicht. Aangezien het zwaartepunt van het ontwerp bij deze paragraaf 8-3 ligt is deze opgave gekozen om met de MST-methode op verschillende aspecten te onderzoeken. Hierbij wordt de oplosmethode in 7a vrijgelaten en in 7b, de bonusopgave, naar een alternatieve oplossingsmethode gevraagd. Voor de vraagstelling bij 7a is gekozen het woord “bereken” te vervangen door “bepaal” om minder aan te sturen op de numerieke representatie. En bij 7b is gekozen voor een inleiding met het benoemen van verschillende oplossingsmethoden, zoals “formule” en “tekening” en “een combinatie hiervan” om leerlingen op weg te helpen met het bedenken van een alternatief. Dit valt volgens de MST-methode nog binnen de individuele oplossingsruimte waarin ook de potentiële oplossingen vallen die met hulp geproduceerd kunnen worden. Deze opgave kan op verschillende manieren procedureel opgelost worden, maar ook structureel. Dit verschil wordt bij de MST-methode wel meegenomen, maar voor de scoretoekenning in het correctiemodel niet.
- Opgave 7c: Deze opgave is gelijk aan opgave 2b uit het bestaande proefwerk, waar alleen het woord “bereken” vervangen is door het woord “bepaal”, zodat leerlingen minder gestuurd worden in hun oplossingsmethode. Het correctiemodel geeft twee oplossingsmethodes.

Vanwege de keuze om opgave 7b als bonusvraag uit te voeren is deze opgave door de docenten in zijn geheel achterin het proefwerk geplaatst. Deze verplaatsing heeft last-minute en zonder overleg met de onderzoeker plaatsgevonden. Voor het onderzoek was het gunstiger geweest deze opgave eerder in het proefwerk te plaatsen, aangezien eventueel tijdgebrek invloed heeft op de resultaten van de MST-methode.

8.2.3 Expert-kaart MST-methode opgave 7a en 7b

De indeling van de expert-kaart bepaalt (deels) de score op de verschillende aspecten van de scorekaart. Voor de expert-kaart met de expert-oplossingsruimte (bijlage O) zijn alle mogelijke oplossingen geanalyseerd met behulp van het theoretische kader op de gebruikte concepten en stellingen en de volgorde waarin deze gebruikt worden. Alle oplossingen zijn uiteindelijk ingedeeld in de volgende vier verschillende hoofdgroepen met onderscheidbare oplossingsstrategieën:

1. Het zwaartepunt $Z(OABCD)$ wordt in één keer bepaald. De oplossingen zijn van numerieke procedurele aard.
2. Het zwaartepunt $Z(OABCD)$ wordt bepaald door de punten willekeurig één-voor-één te combineren. De oplossingen zijn van numerieke of geometrische procedurele aard en minder snel.
3. Het zwaartepunt $Z(OABCD)$ wordt bepaald door eerst $Z(OACD)$ te bepalen, door de puntmassa's één-voor-één (onwaarschijnlijk) of paarsgewijs te combineren, en deze daarna met punt B te combineren of door $Z(OC)$ en $Z(AD)$ te bepalen en deze beide met B te combineren. De keuze voor de strategie is geometrisch structureel, terwijl de tussenoplossingen numeriek of geometrisch procedureel zijn.

4. Het zwaartepunt $Z(OABCD)$ wordt bepaald door eerst $Z(OACD)$ in één keer te bepalen en deze daarna met punt B te combineren. Zowel de keuze voor de strategie als de tussenoplossingen zijn geometrisch structureel.

De concepten en stellingen waaruit de oplossingen bestaan zijn bijvoorbeeld eigenschappen, formules, rekenregels en redeneringen die als losse denkstappen opgevat kunnen worden en zijn voor deze opgave als volgt:

1. Berekening met numerieke vectoren via de vectorformule.
2. Berekening x - en y -coördinaten via het gewogen gemiddelde van de x - en y -coördinaten van de puntmassa's.
- 3a. Geometrisch-natuurkundige bepaling via massaverhouding en schuifprincipe.
- 3b. Geometrisch-wiskundige bepaling via (massaverhouding en) geometrische eigenschappen.
4. Beredenering over het zwaartepunt van meerdere puntmassa's als deze in hetzelfde punt liggen (onafhankelijk van grootte van de massa's).

Afhankelijk van de opgave zijn type 3a en 3b niet altijd even goed van elkaar te onderscheiden, bijvoorbeeld bij het bepalen van het zwaartepunt bij twee gelijke puntmassa's. Hier verschilt de oplossingsstrategie echter dusdanig dat ze niet binnen dezelfde hoofdgroep voorkomen. Voor de telling van T , het totale aantal concepten en stellingen, worden deze twee niet apart meegeteld, hierdoor geldt dan ook $T = 4$. In de expert-kaart zijn de vier verschillende concepten en stellingen ook van elkaar te onderscheiden door hun eigen kadervorm. De onderdelen van de oplossing die een bepaalde strategie duidelijk maken, maar niet als los concept of stelling gezien worden, zijn in rechthoekige kaders geplaatst, zo ook het maken van een tekening. Dit is voor de geometrische oplossingen (vrijwel) altijd noodzakelijk, maar kan ter ondersteuning van een numerieke oplossing ook gebruikt worden.

De uiteindelijke opbouw in de subgroepen is tot stand gekomen door de mate van verschil tussen de verschillende concepten en stellingen te bepalen. Hierbij zijn alleen type 1 en type 2 in dezelfde subgroep geplaatst aangezien deze voorkomen binnen dezelfde hoofdgroep en weinig van elkaar verschillen.

Om de oplossingen van elkaar te onderscheiden zijn ze gecodeerd met drie cijfers. Het eerste cijfer geeft de hoofdgroep (oplossingsstrategie) aan, het tweede cijfer de subgroep binnen de hoofdgroep en het derde cijfer het type concept of stelling binnen de subgroep.

De expert-kaart is na het proefwerk nog aangevuld, doordat een oplossing van een leerling (type 2.1.1) vooraf niet voorzien was. Ook deed zich bij de bonusopgave in de testgroep een onverwacht resultaat voor ten gevolge van de klassikale behandeling van een notatievariant op de bepaling van het zwaartepunt via de vectorformule, zie de beide formules.

Origineel:
$$\vec{Z} = \frac{m_1}{m} \cdot \vec{a}_1 + \frac{m_2}{m} \cdot \vec{a}_2 + \dots + \frac{m_n}{m} \cdot \vec{a}_n$$

Notatievariant:
$$\vec{Z} = \frac{m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + m_n \cdot \vec{a}_n}{m}$$

Deze notatievariant zorgt bij de berekening met concrete vectoren over het algemeen voor minder rekenfouten, dit is echter geen alternatieve oplossing.

8.3 Resultaten proefwerk

De jaargemiddelden en cijfers betreffende de proefwerken zijn te vinden in bijlage P. Een voorbeeld van de uitvoer van de berekeningen en de poweranalyse in G*power zijn te vinden in bijlage Q.

De bij de MST-methode uitgesloten notatievariant bij opgave 7ab wordt hier ook niet gezien als alternatieve oplossing.

8.3.1 Tijd/moeilijkheid proefwerk

Bij de laatste proefwerkopgave, deels de MST, wordt door één leerling uit de testgroep en twee leerlingen uit de controlegroep aangegeven dat ze te weinig tijd hadden, maar in combinatie met de observatie van de surveilleerdocenten zal dit waarschijnlijk bij meer leerlingen het geval zijn geweest. Uit de vergelijking van het proefwerkcijfers (onderzoeker) en de jaargemiddelden komen de volgende resultaten:

- In de testgroep is het verschil klein-middelgroot in het voordeel van het proefwerk (*verschil* = 0,40; *Cohen's d_{av}* = 0,33; p = 0,134; r = 0,6650; *power* = 0,45).
- In de controlegroep is het verschil verwaarloosbaar-klein in het voordeel van het proefwerk (*verschil* = 0,25; *Cohen's d_{av}* = 0,16; p = 0,419; r = 0,6722; *power* = 0,21).

Alhoewel beide keren H_0 niet verworpen kan worden ($p \geq 0,1$), kunnen we door de lage power ($power < 0,8$) niet uitsluiten dat er wel verschil is.

8.3.2 Bestaand niveauverschil tussen de groepen

Uit de vergelijking van de jaargemiddelden van beide groepen komt het volgende resultaat:

- Tussen beide groepen is het verschil klein-middelgroot in het voordeel van de testgroep (*verschil* = 0,32; *Cohen's d_s* = 0,30; p = 0,304; *power* = 0,27).

H_0 kan niet verworpen worden ($p \geq 0,1$). Onterecht accepteren van H_0 kan vanwege de lage power ($p < 0,8$) echter niet uitgesloten worden.

8.3.3 Betrouwbaarheid nakijkinstrument (interrater reliability)

Uit de vergelijking van het nakijkwerk van de onderzoeker met het nakijkwerk van de docenten komen de volgende resultaten:

- In de testgroep is het verschil verwaarloosbaar-klein met een hoger gemiddelde bij de onderzoeker (verschil en effect positief) (*verschil* = 0,15; *Cohen's d_{av}* = 0,10; p = 0,655; r = 0,9344; *power* = 0,13).
- In de controlegroep is het verschil verwaarloosbaar-klein met een hoger gemiddelde bij de docent (verschil en effect negatief) (*verschil* = -0,15; *Cohen's d_{av}* = -0,08; p = 0,692; r = 0,9553; *power* = 0,11).

In beide gevallen kan H_0 niet verworpen worden ($p \geq 0,1$) en kan onterecht accepteren van H_0 vanwege de lage power ($power < 0,8$) echter ook niet uitgesloten worden. De correlatie is beide keren wel hoog ($r > 0,81$).

Wel opvallend aan de resultaten zijn de uitschieters. In de testgroep komt twee keer een verschil groter dan 1,0 punt (-1,3 en +1,4) voor en in de controlegroep drie keer (-1,3; -1,1 en +1,1).

8.3.4 Effect ontwerp lessenserie

Effect op de structurele kennis van leerlingen

Uit de vergelijking van de verschilcijfers (cijfer opgave 4a – jaargemiddelde) tussen beide groepen betreffende de structurele kennis komt het volgende resultaat:

- Het effect is verwaarloosbaar-klein in het voordeel van de testgroep ($\text{verschil} = 0,16$; $\text{Cohen's } d_s = 0,04$; $p = 0,884$; $\text{power} = 0,13$).

H_0 kan niet verworpen worden ($p \geq 0,1$). Onterecht accepteren van H_0 kan vanwege de lage power ($p < 0,8$) echter niet uitgesloten worden.

Aangezien de eerste gespecificeerde hoofdonderzoeksvraag betrekking heeft op de structurele kennis van leerlingen is gekeken hoe groot de steekproef of het verschil geweest zou moeten zijn om statistisch significant te zijn (bij gelijkblijvende overige waarden) en is een poweranalyse gedaan om de steekproefgrootte voor een eventueel vervolgonderzoek vast te stellen, waarbij de kans op onterecht accepteren van H_0 heel klein zou zijn geweest (bij gelijkblijvende overige waarden).

- Voor $p < 0,1$ zou de steekproefgrootte per groep minimaal 2962 geweest moeten zijn of zou een verschil van 1,87 gemeten moeten zijn.
- De poweranalyse ($\text{power} = 0,8$) wijst uit dat de steekproefgrootte per groep minimaal 4919 zou moeten zijn.

Effect op de kennis van leerlingen over de lesstof van de paragrafen 8-V t/m 8-3

De subset met opgaven die betrekking hebben op de paragrafen 8-V t/m 8-3 bestaat uit de opgave 2a, 2b, 3b, 4a, 4b, 4c, 7a, 7b (bonusopgave) en 7c. Uit de vergelijking van de verschilcijfers (cijfer subset – jaargemiddelde) tussen beide groepen komt het volgende resultaat:

- Het effect is klein-middelgroot in het voordeel van de testgroep ($\text{verschil} = 0,44$; $\text{Cohen's } d_s = 0,29$; $p = 0,334$; $\text{power} = 0,25$).

H_0 kan niet verworpen worden ($p \geq 0,1$). Onterecht accepteren van H_0 kan vanwege de lage power ($p < 0,8$) echter niet uitgesloten worden.

Aangezien het ontwerp betrekking had op deze lesstof is gekeken hoe groot de steekproef of het verschil geweest zou moeten zijn om statistisch significant te zijn (bij gelijkblijvende overige waarden) en is een poweranalyse gedaan om de steekproefgrootte voor een eventueel vervolgonderzoek vast te stellen, waarbij de kans op onterecht accepteren van H_0 heel klein zou zijn geweest (bij gelijkblijvende overige waarden).

- Voor $p < 0,1$ zou de steekproefgrootte per groep minimaal 68 geweest moeten zijn of zou een verschil van 0,77 gemeten moeten zijn.
- De poweranalyse ($\text{power} = 0,8$) wijst uit dat de steekproefgrootte per groep minimaal 153 zou moeten zijn.

Effect op de kennis van leerlingen over alle lesstof in hoofdstuk 8

Uit de vergelijking van de verschilcijfers (proefwerkcijfer – jaargemiddelde) tussen beide groepen betreffende alle lesstof van het hoofdstuk komt het volgende resultaat:

- Het effect is verwaarloosbaar-klein in het voordeel van de testgroep ($\text{verschil} = 0,15$; $\text{Cohen's } d_s = 0,12$; $p = 0,681$; $\text{power} = 0,13$).

H0 kan niet verworpen worden ($p \geq 0,1$). Onterecht accepteren van H0 kan vanwege de lage power ($p < 0,8$) echter niet uitgesloten worden.

Vanwege de kleine steekproefgrootte, waardoor statistisch significante effecten onwaarschijnlijk zijn, heeft het weinig zin resultaten van andere opgaven te vergelijken, zoals bijvoorbeeld de resultaten van de procedurele complexe vragen.

8.4 Resultaten MST-methode

8.4.1 Geschikte oplossingen en combinaties

In de collectieve oplossingsruimte van de testgroep bevinden zich vier verschillende geschikte oplossingen: 1.1.1, 1.1.2, 3.2.3 en 4.2.3. In de collectieve oplossingsruimte van de controlegroep bevinden zich ook vier verschillende geschikte oplossingen: 1.1.1, 2.1.1, 3.2.3 en 4.2.3. In beide groepen samen komen dus in totaal vijf verschillende oplossingen voor, ten opzichte van elf in de expert-oplossingsruimte. De oplossing die alleen in de testgroep behandeld is (1.1.2) komt dus niet voor bij de controlegroep. Verder zijn ook geen grote aanwijzingen gevonden dat het ontwerp gedeeld is met leerlingen uit de controlegroep. In bijlage R is van elke oplossing een voorbeeld te vinden, zoals deze op het proefwerk door een leerling gegeven is. De telling van de geschikte oplossingen per groep en de combinaties met de verschillende volgordes van de MST-opgave (7a en 7b) bevinden zich in bijlage S. De resultaten van de MST-methode per aspect zijn te vinden in bijlage T.

De verdeling van het aantal oplossingen per leerling is vooral bij geen geschikte oplossingen afwijkend per groep. In de testgroep heeft 4,5% van de leerlingen geen enkele geschikte oplossing gegeven tegenover 24% in de controlegroep. Het aantal leerlingen met één of twee geschikte oplossingen ligt binnen beide groepen dicht bij elkaar. In de testgroep heeft 45,5% van de leerlingen één geschikte oplossing en 50% twee geschikte oplossingen. In de controlegroep heeft 40% van de leerlingen één geschikte oplossing en 36% twee geschikte oplossingen.

De eerste of enige keuze van leerlingen is vaak 1.1.1 of 1.1.2, slechts in één geval is dit de tweede keuze en in één geval wordt juist als enige oplossing 4.2.3 gegeven. In de controlegroep komt oplossing 3.2.3 twee keer voor en in de testgroep slechts één keer.

8.4.2 Effect ontwerp op correctheid

Uit de vergelijking van de verschilcijfers (het correctheidscijfer - jaargemiddelde) tussen beide groepen komt het volgende resultaat:

- Het effect is middelgroot-groot in het voordeel van de testgroep ($\text{verschil} = 1,35$; $\text{Cohen's } d_s = 0,48$; $p = 0,107$; $\text{power} = 0,49$).

H0 kan niet verworpen worden ($p \geq 0,1$). Onterecht accepteren van H0 kan vanwege de lage power ($\text{power} < 0,8$) echter niet uitgesloten worden.

Aangezien het ontwerp betrekking had op deze lesstof is gekeken hoe groot de steekproef of het verschil geweest zou moeten zijn om statistisch significant te zijn (bij gelijkblijvende overige waarden) en is een poweranalyse gedaan om de steekproefgrootte voor een eventueel vervolgonderzoek vast te stellen, waarbij de kans op onterecht accepteren van H0 heel klein zou zijn geweest (bij gelijkblijvende overige waarden).

- Voor $p < 0,1$ zou de steekproefgrootte per groep minimaal 25 geweest moeten zijn of zou een verschil van 1,39 gemeten moeten zijn.

- De poweranalyse ($power = 0,8$) wijst uit dat de steekproefgrootte per groep minimaal 55 zou moeten zijn.

8.4.3 Effect ontwerp op hoogste deeltijfer proefwerk

Uit de vergelijking van de verschilcijfers (het hoogste deeltijfer van de MST-opgave - jaargemiddelde) tussen beide groepen komt het volgende resultaat:

- Het effect is middelgroot-groot in het voordeel van de testgroep ($verschil = 1,22$; $Cohen's d_s = 0,48$; $p = 0,110$; $power = 0,48$).

H_0 kan niet verworpen worden ($p \geq 0,1$). Onterecht accepteren van H_0 kan vanwege de lage power ($power < 0,8$) echter niet uitgesloten worden.

8.4.4 Verschil tussen de groepen per aspect

De MST-methode kijkt naar het verschil tussen groepen, zonder naar een bestaand niveauverschil te kijken. De resultaten van de bepaling van de verschilgrootte staan in Tabel 1 en worden vervolgens waar nodig per aspect besproken. Een positieve waarde betekent een verschil in het voordeel van de testgroep en een negatieve waarde een verschil in het voordeel van de controlegroep.

	<i>Verschil</i>	<i>Cohen's d_s</i>	<i>Effectgrootte/verschilgrootte</i>	<i>p</i>	<i>power</i>
Correctheid	18,6	0,56	middelgroot-groot	0,062	0,59
Verbondenheid	7,8	0,32	klein-middelgroot	0,279	0,29
Vloeiendheid	0,3	0,48	middelgroot-groot	0,109	0,49
Flexibiliteit	1,5	0,23	klein-middelgroot	0,443	0,20
Originaliteit	-0,7	-0,26	klein-middelgroot	0,386	0,22
Creativiteit	-14,3	-0,26	klein-middelgroot	0,387	0,22

Tabel 1 Resultaten van de bepaling van de verschilgrootte per aspect van de MST-methode

H_0 kan alleen verworpen worden bij het aspect correctheid ($p < 0,1$). Voor de overige aspecten geldt dat H_0 niet verworpen kan worden ($p \geq 0,1$). Onterecht accepteren van H_0 kan vanwege de lage power ($power < 0,8$) echter niet uitgesloten worden.

De gebruikte waarde voor de originaliteit per oplossing Or_i , zie Tabel 2, is bepaald met behulp van de uitgangspunten van de MST-methode. Hiervoor is eerst de originaliteit per groep bepaald en daarna de originaliteit bij het samennemen van de geschikte oplossingen van beide groepen.

	<i>Or_i testgroep</i>	<i>Or_i controlegroep</i>	<i>Or_i gezamenlijk</i>	<i>Or_i gebruikt</i>
Oplossing 1.1.1	0,1	0,1	0,1	0,1
Oplossing 1.1.2	1	-	10	0,1
Oplossing 2.1.1	-	10	10	10
Oplossing 3.2.3	10	10	10	10
Oplossing 4.2.3	1	1	1	1

Tabel 2 Originaliteit per oplossing

Alleen voor oplossing 1.1.2, die in de testgroep behandeld is, is de Or_i van beide groepen gezamenlijk afwijkend van de Or_i van de groepen los, aangezien deze oplossing in de controlegroep niet voorkomt. Bovendien zijn de waarden 1 en 10 beide te hoog, doordat deze oplossing uitgebreid in de testgroep behandeld is hoort hierbij een waarde van 0,1. Aangezien deze oplossing niet in de controlegroep voorkomt, waar het wel origineel zou zijn, kan deze waarde gewoon gebruikt worden. Het probleem van verschillende waarden voor $Fl_i \cdot Or_i$ door de volgorde van de oplossingen bij de oplossingscombinatie 1.1.1 met 1.1.2 en omgekeerd is hierdoor ook opgelost en ook het achteraf omdraaien van de nummering van 7a en 7b, wat bij één leerling in de controlegroep gebeurde.

Het is opvallend dat, ondanks een hogere vloeiendheid en flexibiliteit voor de testgroep, de creativiteit in het voordeel uit van de controlegroep uitvalt.

Hoofdstuk 9 – Conclusie en discussie

Het onderzoek heeft als doel antwoord te geven op de twee gespecificeerde hoofdonderzoeksvragen:

“Hoe kan de structurele kennis van leerlingen verbeterd worden betreffende de lesstof over vectormeetkunde (H8-V t/m H8-3 Moderne Wiskunde 11e editie 4vwoB)?”

en

“Hoe kan de tevredenheid bij de docenten over de samenstelling van de betreffende lesstof over vectormeetkunde (H8-V t/m H8-3 Moderne Wiskunde 11e editie 4vwoB) op het gebied van continuïteit (verticale leerlijnen) en horizontale samenhang (samenhang tussen vakgebieden) verbeterd worden?”

Dit hoofdstuk start met de algemene conclusies, waarna de daarbij horende resultaten besproken worden. De limitaties, betrouwbaarheid en validiteit van de gebruikte onderzoeksmethodes volgen hierna in een losse paragraaf, waarna het hoofdstuk afgesloten wordt met aanbevelingen voor verdere aanpassingen aan het ontwerp en voor eventueel vervolgonderzoek.

9.1 Conclusies hoofdonderzoeksvragen

Op de eerste hoofdvraag is de conclusie dat het ontwerp niet heeft gezorgd voor een statistisch significante verbetering van de structurele kennis bij leerlingen.

Op de tweede hoofdvraag is de conclusie dat het ontwerp gezorgd heeft voor een verbetering van de tevredenheid bij de docent over de samenstelling van de betreffende lesstof.

9.2 Bespreking van het effect op de kennis van leerlingen

De uitkomsten van de drie effectbepalingen van het ontwerp, namelijk het effect op de structurele kennis, het effect op de kennis over de lesstof van het ontwerp (de paragrafen 8-V t/m 8-3) en het effect op de kennis over de lesstof van het gehele hoofdstuk, vallen alle zoals verwacht wel uit in het voordeel van de testgroep, maar zijn statistisch niet significant. Dit was vanwege de kleine steekproefgrootte ook niet verwacht, maar ook de kleine verschillen tussen beide groepen bij de structurele opgave 4a en bij het gehele proefwerk en de grote standaardafwijkingen, vooral bij de structurele opgave 4a, hebben hierbij een rol gespeeld. Voor de toetsing van structurele kennis lijkt een enkele opgave die ook nog eens betrekking heeft op structurele kennis uit het begin van de ontwikkeling van het construct vector niet voldoende te zijn. Het kleine-middelgrote effect bij de kennis over de lesstof van het ontwerp biedt perspectief voor vergroting van de steekproef. Bij gelijkblijvende verschillen en standaardafwijkingen was voor een significant positief effect een steekproefgrootte van 68 per groep voldoende. Een poweranalyse wijst uit dat de steekproefgrootte idealiter minimaal 153 respondenten per groep zou zijn. De combinatie van het kleine-middelgrote effect bij de kennis over de lesstof van het ontwerp met het verwaarloosbare-kleine effect op de kennis over de lesstof van het hele hoofdstuk betekent dat de testgroep juist de overige opgaven over de lesstof uit de paragrafen 8-4 t/m 8-6 relatief slecht gemaakt heeft ten opzichte van de controlegroep.

9.3 Bespreking van het effect en het verschil tussen beide groepen bij de MST-methode

Bespreking van geschikte oplossingen en combinaties

Aangezien maximaal twee oplossingen gegeven mochten worden (opgave 7a en 7b), valt het aantal van vijf verschillende oplossingen in de collectieve oplossingsruimte van beide klassen, ten opzichte van elf in de expert-oplossingsruimte, niet tegen.

Opvallend is dat 24% (6 leerlingen) van de controlegroep geen enkele geschikte oplossing gegeven heeft, ten opzichte van slechts 4,5% (1 leerling) van de testgroep. Dit ligt niet puur aan het behandelen in de testgroep van een extra geschikte oplossing via de gemiddelde x - en y -coördinaten. Slechts één leerling gaf dit namelijk als enige antwoord, de anderen wisten dit te combineren met een andere geschikte oplossing. De oorzaak ligt waarschijnlijk in het feit dat vanwege tijdgebrek de leerlingen in de controlegroep zich de vectorformule voor het zwaartepunt zelfstandig eigen moesten maken, zonder klassikale uitleg. Het is mogelijk dat een tijdgebrek vanwege de plaatsing aan het einde van het proefwerk hierbij ook een rol gespeeld heeft. De redenen voor een eventueel tijdgebrek, bijvoorbeeld verminderde vaardigheden of snelheid in de overige opgaven, kunnen niet achterhaald worden.

Zoals verwacht ligt de voorkeur van leerlingen bij de numerieke oplossingen, de eerste (of enige) oplossing is bijna altijd een numerieke oplossing met de vectorformule of via de gemiddelde x - en y -coördinaten. De oplossing waar gebruik gemaakt wordt van de massaverhouding/geometrische eigenschappen komt percentueel gezien in beide groepen evenveel voor en ligt dus in het bereik van de leerlingen, ongeacht de groep. Reden dat deze oplossing niet de voorkeur heeft (per groep slechts één leerling met deze als eerste of enige keuze) zouden kunnen zijn dat leerlingen niet gewend zijn een probleem te verkennen met een tekening, dat leerlingen twijfelen of dit wel een toegestane oplossing is of dat ze moeite hebben met het formuleren van dit soort oplossingen en dan een “veiligere” manier met een berekening kiezen. De oplossingen met herhaald combineren van puntmassa’s, welke in het leerboek behandeld wordt, komen alleen voor in combinatie met de vectorformule en dan wat vaker in de controlegroep. Het leerboek biedt dus wel de mogelijkheid dit soort oplossingen eigen te maken.

Bespreking van het effect van het ontwerp op het aspect van correctheid

Bij bepaling van de correctheid via de MST-methode is het middelgrote-grote effect van het ontwerp op de verschilcijfers van de correctheid (correctheidscijfer – jaargemiddelde) met $p = 0,107$ net niet statistisch significant. Dit geldt ook als gekeken wordt naar het equivalente effect via het normale correctiemodel ($p = 0,110$). Het ondersteunt wel het gevoel van de onderzoeker dat de leerlingen in de testgroep in zijn algemeenheid wat minder moeite hadden met het (volledig en correct) formuleren en noteren van antwoorden.

Bespreking van het verschil tussen de groepen op het aspect van correctheid

De MST-methode kijkt, normaal gesproken, puur naar het verschil op correctheid tussen beide groepen (zonder rekening te houden met een eventueel bestaand niveauverschil) en in dat geval is er wel een statistisch significant middelgroot-groot verschil in het voordeel van de testgroep. En dat terwijl het bovenstaande effect van het ontwerp en het kleine-middelgrote verschil tussen de jaargemiddelden (bestaand niveauverschil tussen de groepen) in het voordeel van de testgroep niet statistisch significant waren.

Bespreking van het verschil tussen de groepen op de overige aspecten

Alhoewel voor de overige aspecten geen statistisch significant verschil gevonden is, zijn toch enkele interessante observaties te doen. Het gemeten middelgrote-grote verschil op het aspect vloeiendheid

in het voordeel van de testgroep was met $p = 0,109$ net niet statistisch significant. Als het maximale aantal oplossingen niet op twee beperkt was zou dit verschil waarschijnlijk groter uitvallen (en misschien daardoor wel statistisch significant), aangezien in de testgroep een extra oplossing via de gemiddelde x - en y -coördinaten behandeld is. Dit is echter niet met zekerheid te zeggen. Het gemeten verschil kan ook gedrukt worden doordat bij zes leerlingen in de testgroep de notatievariant van de vectorformule niet meegerekend is. Het is hierbij niet duidelijk of deze leerlingen dit echt als alternatief beschouwd hebben, niet in staat waren een alternatieve oplossing te bedenken of daar niet genoeg tijd voor hadden. Door de extra oplossing via de gemiddelde x - en y -coördinaten die weinig afwijkend is van de oplossing met de vectorformule vallen de verschillen tussen verbondenheid en flexibiliteit in het voordeel van de testgroep ook lager uit. Doordat de oplossing via de gemiddelde x - en y -coördinaten ook als minder origineel wordt gezien vallen de originaliteit en daardoor de creativiteit, ondanks een hogere vloeiendheid voor de testgroep, zelfs uit in het voordeel van de controlegroep. Er geldt dat als meer dan twee oplossingen mogelijk waren geweest zowel de vloeiendheid, de flexibiliteit als de verhoudingen voor de bepaling van de originaliteit Or_i anders hadden gelegen en hierdoor ook bij zowel de originaliteit als uiteindelijk bij de creativiteit. Er is niet te zeggen in hoeverre dit anders was geweest.

9.4 Bespreking van het effect op de tevredenheid van de docenten

Doordat het programma van eisen zoveel mogelijk toegepast is in het ontwerp, wordt op zich al meer continuïteit en horizontale samenhang bereikt.

De aanname dat een verbeterde samenstelling zorgt voor verbeterde tevredenheid bij docenten en dat verbeterde tevredenheid veroorzaakt wordt door de verbeterde samenstelling wordt bevestigd in de interviews. Er wordt specifiek gevraagd naar tevredenheid over de verbeterde samenstelling en er is duidelijk een koppeling te zien tussen de verbeterde samenstelling en de verbeterde tevredenheid hierover.

De belangrijkste ontwerponderdelen, waarop de tevredenheid van de docent van de testgroep verbeterd is, zijn:

- De aanpassing naar het bewijzen met gelijkvormigheid in paragraaf 8-V in plaats van de behandeling van het zwaartepunt in een driehoek.
- De continuïteit tussen de paragrafen 8-1 t/m 8-3.
- Het behandelen van de parallellogram-methode in paragraaf 8-1.
- Het koppelen naar de geometrische representatie en geometrische en numerieke voorkennis voor verificatie en bewijs van rekenregels in paragraaf 8-2.
- De wiskundig numerieke insteek voor het zwaartepunt in paragraaf 8-3.
- De behandeling van het zwaartepunt in een driehoek in paragraaf 8-3 in plaats van in paragraaf 8-V.

Wat betreft de ontwerponderdelen is de docent van de controlegroep juist niet tevreden over het bestaande lesmateriaal betreffende de continuïteit tussen de paragrafen 8-1 t/m 8-3 en de koppeling van het zwaartepunt in een driehoek in paragraaf 8-V met de lesstof in paragraaf 8-3.

Alhoewel de tevredenheid over de samenstelling van de betreffende lesstof van het ontwerp verbeterd is, leveren de onopgeloste probleempunten ontevredenheid op bij de docenten van beide groepen en is er ook ontevredenheid buiten het kader van het onderzoek.

9.4.1 Tevredenheid onopgeloste probleempunten van het ontwerp van paragraaf 8-3

Het ontwerp van de lesstof betreffende de overgang van vectoren als positie (numerieke wiskundige context) naar vectoren als kracht (natuurkundige context) en vice versa is niet optimaal voor alle leerlingen. Vooral problemen met modelleervaardigheden, maar ook verschil in natuurkundige (voor)kennis spelen hier een rol, zoals het wel of niet volgen van het vak natuurkunde en in het geval van het CCS ook TP (Technology Program). Bijkomende ontevredenheid bij de onderzoeker (docent paragraaf 8-3) was dat het ontwerp van de lesstof in zijn algemeenheid bij natuurkundige context niet helemaal goed aan bleek te sluiten bij de natuurkundige (voor)kennis van de docent van de testgroep. Ook de docent van de controlegroep voelt zich niet geheel vertrouwd met natuurkundige contexten. De eis voor horizontale samenhang voor verbetering van de samenstelling van de lesstof botst met de vaardigheden van docenten en met het doel van verbeterde tevredenheid.

Het probleem met het hoge bewijsniveau is in de testgroep niet opgelost door het behandelen van gelijkvormigheid in de voorkennis. Zowel in de testgroep als in de controlegroep zijn de leerlingen niet in staat de bewijsopgaven zelfstandig te maken, maar ze kunnen de klassikale bespreking hiervan wel volgen. De docent van de testgroep en de onderzoeker (docent paragraaf 8-3) zijn nog niet geheel tevreden over de opbouw van de lesstof in het ontwerp naar het gevraagde bewijsniveau. De docent van de controlegroep is niet tevreden over de opbouw van de lesstof in het leerboek naar het gevraagde bewijsniveau en de beschikbare tijd hiervoor tijdens de lessenserie.

9.4.2 Tevredenheid buiten het kader van het onderzoek.

De docent van de testgroep ervaart nu een “knip” naar paragraaf 8-4 Inwendig product. Beide docenten zijn niet tevreden over de samenstelling van paragraaf 8-7 Gemengde opdrachten.

9.5 Limitaties, betrouwbaarheid en validiteit

9.5.1 literatuuronderzoek, ontwerp lessenserie en uitvoering lessenserie

Het literatuuronderzoek levert door gebruik te maken van meerdere bronnen een betrouwbare basis voor het afbakenen en specifiekere definiëren van de onderzoeksvraag en voor het programma van eisen voor het ontwerp van het lesmateriaal en hierdoor ook voor de didactische leidraad.

In overleg met alle betrokken partijen (docenten en begeleider van de opleiding) zijn enkele, vaak vanzelfsprekende, extra eisen vanuit de school/docent/onderzoeker opgesteld en zijn zoveel mogelijk de bedreigingen in kaart gebracht. Dit heeft in ieder geval gezorgd voor grotere alertheid tijdens de uitvoering van het onderzoek en voor sommige bedreigingen voor het invoeren van een extra controle.

Binnen de gestelde eisen en mogelijkheden is een zo goed mogelijk ontwerp gemaakt. Doordat de lessen van paragraaf 8-3 uitgevoerd zijn door de onderzoeker wordt voldaan aan de eis dat het aangeleverde lesmateriaal moet aansluiten bij de vaardigheden van de docent.

Dat bepaalde aanpassingen in het ontwerp draagkracht hebben blijkt direct uit de interviews. De docent van de controlegroep geeft verbeteringen aan die al in het ontwerp toegepast zijn:

- De verbinding van de ligging van het zwaartepunt in een driehoek met de ligging van het (massa)zwaartepunt bij gelijke puntmassa's in de hoekpunten van een driehoek.
- Het gebruiken van tekeningen voor evidentie en verificatie en het rekenen minder te laten overheersen.
- De beslissing meer tijd voor paragraaf 8-3 in te plannen wordt bevestigd.

Door de uitvoering in lespraktijk zijn er altijd onverwachte zaken die invloed (kunnen) hebben op het resultaat van het onderzoek, zoals het uitvallen van een les in de controlegroep of dubbele lesuren op een dag, die minder effectief zijn dan verspreide lessen over een week. Alhoewel daar in het ontwerp zoveel mogelijk vooraf rekening mee gehouden is of dit opgevangen is tijdens de uitvoering, is dat niet altijd mogelijk geweest. Deze zaken en hun mogelijke invloed zijn in het verslag verwerkt.

Het uitgangspunt dat de groep leerlingen redelijk homogeen is wat betreft voorkennis is grotendeels waar. Er is tussen leerlingen altijd verschil in hoeveelheid, samenhang, beschikbaarheid en correctheid van (voor)kennis, maar dit valt hier grotendeels binnen de verwachting bij een 4 vwo wiskunde B klas. Er is wel wat minder homogeniteit betreffende de parallellogram-methode en het ontbinden in vectoren vanwege de drie leerlingen die geen natuurkunde hebben. In het ontwerp en door te differentiëren tijdens de lessen is zoveel mogelijk met bovenstaande punten rekening gehouden. Later bleek ook op het gebied van zwaartepunten en evenwicht wat minder homogeniteit vanwege de leerlingen die het vak TP (Technology Program) volgen.

9.5.2 Ontwerp proefwerk en methode effectmeting inclusief MST-methode

Proefwerk

Het toetsen via een proefwerk heeft beperkingen gegeven vanuit de schoolpraktijk door de inspraak van de betrokken docenten en de vastliggende eisen op het gebied van tijdsduur en te toetsen lesstof.

We kunnen niet concluderen dat het proefwerk te lang of te moeilijk was of dat de balans niet goed was. Gemiddeld komen de cijfers wel lager uit dan vorig jaar (bron: docent CCS), maar dit was verwacht, aangezien het proefwerk moeilijker is gemaakt. In de bespreking van de resultaten is wel rekening gehouden met het eventuele effect van het tijdgebrek bij leerlingen. Dit zal namelijk vooral invloed hebben op de laatste proefwerkopgaven 7a, 7b (bonusopgave) en 7c, waar 7a en 7b samen de MST-opgave vormen.

We kunnen met de beschikbare gegevens niet concluderen dat er een verwaarloosbaar-klein verschil is tussen het nakijkwerk van de onderzoeker en het nakijkwerk van de docenten. De correlatie is wel hoog, maar het is opvallend dat de uitschieters zo groot zijn. Die kunnen veroorzaakt worden door een verschil in interpretatie van het correctiemodel en/of de uitleg van de leerling. Het correctiemodel geeft al meer mogelijke oplossingsmogelijkheden dan een normaal correctiemodel, maar zou om de betrouwbaarheid te verhogen nog verder uitgebreid kunnen worden. Een instructie aan de correctoren zou dit nog verder kunnen verhogen. Ook kan met een tweede corrector, met overleg zoals bij de eindexamens, gewerkt worden. Bij een vervolgonderzoek is het wenselijk deze maatregelen te overwegen en afhankelijk van de mogelijkheden door te voeren. Voor de validiteit van dit onderzoek onderstreept het de noodzaak voor het gebruiken van de cijfers van de onderzoeker. Verder is opvallend dat de (cijfer)resultaten van de onderzoeker hoger uitvallen dan die van de docent van de testgroep en lager dan die van de docent van de controlegroep. Er zijn te weinig gegevens beschikbaar om hier een verklaring voor te geven. Voor de conclusies van de effectbepalingen wordt aangenomen dat het nakijkinstrument voldoende betrouwbaar is. De onderzoeker heeft immers het correctiemodel betreffende de opgaven over de paragrafen 8-V t/m 8-3 grotendeels ontworpen en er mag aangenomen worden dat het daarom juist geïnterpreteerd is. Ook heeft de onderzoeker naar eer en geweten objectief en consequent gehandeld.

MST-methode opgave 7ab

Er kan uit de resultaten van het proefwerk niet geconcludeerd worden dat het lesmateriaal inhoudelijk gedeeld is met leerlingen uit de controlegroep.

Voor betrouwbaardere resultaten met de MST-methode moet aan de voorwaarde voldaan worden dat zoveel mogelijk oplossingen gegenereerd worden. Zonder nulmeting was alleen via de correctheid het effect van het ontwerp te bepalen, voor de overige aspecten kon alleen het verschil tussen beide groepen bepaald worden. Ondanks dat geven de resultaten toch interessante informatie over de voorkeur van leerlingen en of ze in staat zijn te wisselen naar een andere strategie.

De gewijzigde waarde van de originaliteit van een bepaalde oplossing kon op basis van de uitgangspunten van de methode onderbouwd worden. Door deze wijziging maakte de volgorde van de oplossingen niet meer uit bij de bepaling van de creativiteit. Vanuit de methode worden geen aanwijzingen gegeven hoe dit opgelost zou moeten worden als de volgorde wel verschil maakt.

Het correctheidscijfer (MST-score) en het hoogste cijfer van opgave 7a of 7b (proefwerkscore) (gecorrigeerd naar bestaand niveauverschil) geven ongeveer gelijke resultaten voor de effectmeting. Dat ondanks een andere scoremethode toch de resultaten overeenkomen geeft aan dat consequent is gehandeld en dat beide methoden met dezelfde corrector betrouwbaar zijn. Dat het verschil tussen de gemiddelden van de groepen iets hoger is bij het correctheidscijfer kan komen doordat daar alleen geschikte oplossingen meegerekend worden of vanwege de scoretoekenning hiervan; het deelcijfer voor geschikte oplossingen ligt voor de correctheid tussen 5,5 en 10 en bij de normale beoordeling van het proefwerk tussen 4,0 en 10.

9.5.3 Ontwerp interviews en methode effectmeting tevredenheid

Een voordeel van de interviews is dat het veel informatie oplevert over de tevredenheid van de continuïteit en horizontale samenhang betreffende de paragrafen 8-V t/m 8-3. Daarnaast levert het ook veel informatie op over de tevredenheid betreffende overige paragrafen. Verder beperkt dit zich niet tot de tevredenheid opzichzelfstaand, maar levert dit ook inhoudelijk informatie op en suggesties voor mogelijke verbeteringen. Het nadeel van de interviews is het maken van de transcripties van de opnames (soms lastig te volgen en tijdrovend), het omzetten van de letterlijke transcripties naar duidelijke woordelijke transcripties en de ordening van al die informatie, zodat een (kwantitatieve) vergelijking gemaakt kan worden.

9.6 Bespreking verdere aanpassingen van het ontwerp en aanbevelingen voor vervolgonderzoek

Uit het onderzoek komen aanbevelingen voor aanpassingen aan het ontwerp en aanbevelingen voor vervolgonderzoek, waaronder een aantal zaken waar vooraf niet aan was gedacht of afwijken van aannames.

9.6.1 Algemeen

Het toetsen van structurele kennis met behulp van een proefwerk is niet ideaal gebleken, mede door de beperking tot slechts één structurele opgave uit het begin van de ontwikkeling van het construct vector. Voor verder onderzoek wordt geadviseerd dit niet middels een proefwerk te doen en meerdere structurele opgaven te gebruiken uit verschillende stadia van de ontwikkeling.

In zijn algemeenheid vinden de leerlingen het tempo erg hoog liggen, zie de opmerkingen in bijlage I, wat mede veroorzaakt wordt door de dubbele uren op een dag, die minder effectief zijn dan uren die verdeeld zijn over andere dagen. Hierdoor is er namelijk geen verwerkingstijd en kan de lesstof niet goed opgebouwd worden. Er moet dan ook bij de planning van het aantal lessen rekening gehouden worden met de effectieve lestijd en niet met de ingeroosterde tijd.

9.6.2 Trend analytische methode

Er bestaat een trend naar de analytische methode, de docent uit de controlegroep geeft de suggestie nog sneller over te gaan op de numerieke vectoren en de geometrische vectoren bijna geheel over te slaan. De reden is echter om meer tijd creëren voor de bewijsopgaven. Uit literatuuronderzoek blijkt dat de geometrische representatie belangrijk is en dus niet overgeslagen moet worden.

9.6.3 Bewijzen

De docent van de testgroep geeft aan dat in paragraaf 8-V nog wel veel meer tijd aan het bewijzen met gelijkvormigheid besteed mag worden, ter vervanging van de overige onderdelen in deze paragraaf.

Alhoewel het ontwerp duidelijk aandacht besteedt aan het type bewijzen op het betreffende kennisniveau van de lesstof wordt het vereiste niveau niet expliciet in het lesmateriaal behandeld. Dit is klassikaal echter wel kort ter sprake gekomen in de testgroep. In het proefwerk heeft dan ook geen enkele leerling uit de testgroep een bewijs met getalvoorbeelden gegeven, tegenover twee leerlingen in de controlegroep. Het minimale bewijsniveau moet voor leerlingen duidelijker zijn.

Wat betreft de aandacht aan het maximale niveau van bewijzen heeft de docent uit de controlegroep duidelijk aangegeven dat de bewijsopdrachten uit paragraaf 8-3 en 8-4 niet zelfstandig uitgevoerd hoeven te worden. Tijdens de lesuitvoer is dit ook in de testgroep niet haalbaar gevonden en aan de leerlingen kenbaar gemaakt. Dit niveau van bewijzen zou wel behaald moeten worden om de aansluiting naar het vervolgonderwijs te behalen. Hierop moet het lesmateriaal aangepast worden, gebaseerd op (nieuw) literatuur- en praktijkonderzoek. Voor de uitvoering van paragraaf 8-3, ongeacht de groep, is één les nu al onvoldoende, meer aandacht voor het bewijzen in paragraaf 8-3 en 8-4 zal hoogstwaarschijnlijk nog meer (les)tijd gaan kosten.

9.6.4 Modelleervaardigheden en natuurkundige context

De keuze voor de fysieke en natuurkundige context zorgt voor de noodzaak meer aandacht te besteden aan modelleervaardigheden bij leerlingen. Voorbeelden hiervan zijn:

- Fysieke ervaringen zijn in drie dimensies (met tijd erbij zelfs in vier). Dit wordt gemodelleerd in twee-dimensies, waarbij ook nog eens, zonder uitleg, gewisseld wordt tussen de keuze voor de ligging van het vlak ("zijaanzicht" bij massa's aan een staaf en "bovenaanzicht" bij de positie van puntmassa's met plaatsvectoren). De tijdcomponent kan ook gebruikt worden om enkele problemen uit de literatuur te verklaren betreffende procedure en effect in de natuurkundige context, bijvoorbeeld het na elkaar werken van krachten op een object ten opzichte van het tegelijkertijd werken. De uitleg waarom de volgorde van het combineren van gewichten niet uitmaakt voor de uiteindelijke plaats van het zwaartepunt in de uitwerkingen van opgave 6 van het ontwerp maakt ook gebruik van deze tijdscomponent in fysieke/natuurkundige context.
- Ook overige aannames in het modelleerproces zouden besproken moeten worden. Bijvoorbeeld bij de massa's aan een staaf: de aanname dat de staaf massaloos en oneindig stijf is en de ophanging van de massa's massaloos en scharnierend (statisch bepaald). Bij koppeling aan de fysieke wereld (drie dimensies) betekent dit ook scharnierend in drie dimensies.

Voorafgaand aan het doorvoeren van deze aanpassingen is (literatuur)onderzoek op zijn plaats en naderhand het bepalen van de effecten hiervan.

Het gebruiken van natuurkundige context vraagt ook voldoende kennis en vaardigheden bij de docenten. In hoeverre dit bij docenten ook het geval is of hoe dit eventueel verbeterd moet worden zal uit verder onderzoek moeten blijken.

9.6.5 Overige paragrafen

In een verder aangepast ontwerp moeten de overige paragrafen ook meegenomen worden. In ieder geval paragraaf 8-4 Inwendig product waar nu een “knip” in de continuïteit ervaren wordt. Maar ook moet goed naar paragraaf 8-7 Gemengde opdrachten gekeken worden. Sommige opdrachten worden door de docenten niet als gemengd beschouwd, maar meer als (afsluitende) opgave van een paragraaf. Deze opgaven kunnen naar deze paragrafen verplaatst worden. De twee meetkundige opdrachten worden wel als gemengd beschouwd, eventueel zouden deze aangevuld moeten worden. Ook kan aan het eind van elke paragraaf een gemengde opdracht ontworpen worden, waarin telkens alle voorgaande lesstof voorkomt.

Referenties

- College voor Toetsen en Examens vwo, havo, vmbo. (2016). *WISKUNDE B VWO | syllabus centraal examen 2018 (bij het nieuwe examenprogramma) Nader vastgesteld 3 versie 2 april 2016*. Utrecht.
- cTWO. (2011, augustus). *De kracht van vectoren*. cTWO.
- Cumming, G., & Calin-Jageman, R. (2016). *Introduction to the new statistics*. New York: Routledge.
- Donevska-Todorova, A. (2014). *Three Modes of Description and Thinking of Linear Algebra Concepts at Upper Secondary Education*. (J. Roth, & J. Ames, Red.) Münster: WTM-Verlag.
- Faul, F., Erdfelder, E., Lang, A.-G., & Buchner, A. (2019, februari 6). *G*Power: Statistical Power Analyses for Windows and Mac. Release 3.1.9.4*. Opgehaald van <http://www.gpower.hhu.de/en.html>
- Goddijn, A. (2007, september). Meetkunde: waarom met én zonder algebra. *Nieuwe Wiskrant* 27-1, 4-11.
- Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the Teaching and Learning of Geometry. In Á. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero, *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 109-149). Rotterdam: Sense Publishers.
- Kwon, O. (2013). Conceptualizing Vectors in College Geometry: a New Framework for Analysis of Student Approaches and Difficulties. In S. Brown, G. Karakok, K. Roh, & M. Oehrtman, *Proceedings of the 16th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 555-565). Denver, Colorado.
- Lakens, D. (2013, november). Calculating and reporting effect sizes to facilitate cumulative science: a practical primer for t-tests and ANOVAs. *Frontiers in Psychology, volume 4*(863), 1-12.
- Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2009). Multiple Solutions for a Problem: a Tool for Evaluation of Mathematical Thinking in Geometry. *Proceedings of CERME 6* (pp. 776-785). Lyon: INRP.
- Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012). Using Multiple Solution Tasks for the Evaluation of Students' Problem-Solving Performance in Geometry. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*(12:4), 311-333.
- Mechanics Magazine. (1824). *On the Equilibrium of Planes*. Opgeroepen op november 2018, van Wikipedia: [http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Archimedes_lever_\(Small\).jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Archimedes_lever_(Small).jpg)
- Noordhoff Uitgevers bv. (2014a). Hoofdstuk 8 Vectoren. In H. Bakker, B. Boon, D. Bos, B. van Dijk, W. Doekes, N. Gietema, . . . C. Wallien, *Moderne Wiskunde 4 vwo B* (pp. 198-223). Groningen/Houten: Noordhoff Uitgevers bv.
- Noordhoff Uitgevers bv. (2014b). Hoofdstuk 8 - Vectoren. *Moderne wiskunde Docentenhandleiding 4 vwo B*. Groningen: Noordhoff Uitgevers bv.
- Sawyer, W. W. (1959). *A Concrete Approach to Abstract Algebra*. San Francisco: W.H. Freeman and Company.
- Sfard, A. (1991, februari). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.
- SLO. (2017, December). Leerplan in beeld. Opgeroepen op December 2017, van Leerplan in beeld: <http://leerplaninbeeld.slo.nl/>
- Strijker, A. (2010). *Leerlijnen en vocabulaires in de praktijk*. Enschede: Stichting leerplanontwikkeling (SLO).
- Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In D. Carraher, & L. Miera (Red.), *Proceedings of PME XIX* (Vol. 1, pp. 61-75). Recife, Brazil.
- Tall, D., Gray, E., Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., . . . Yusof, Y. (2001). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 1, 81-104.
- van der Donk, C., & van Lanen, B. (2016). *Praktijkonderzoek in de school*. Bussum: Uitgeverij Coutinho.

- Wageningse Methode. (sd). *5.8 Extra Opgaven*. Opgeroepen op 2 juni 2018, van Stercollectie wiskunde van de Wageningse Methode: 4VB H5 De kracht van vectoren.:
http://wm.math4allview.appspot.com/view?comp=lj4-v-b-h05&subcomp=lj4-v-b-h05-08&variant=basis_wm&item=1&comp=lj4-v-b-h05&subcomp=lj4-v-b-h05-08&variant=basis_wm&item=1
- Watson, A., Spyrou, P., & Tall, D. (2003). *The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: The concept of vector*. Retrieved from The University of Warwick:
<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003c-watson-spyrou.pdf>

Bijlage A – Voorbeeld aanstreeplijst en observatielijst (originelen)

Aanstreeplijst hoofdstuk 8-1 Vectoren docent controlegroep

Herhalen V-8 Voorkennis

- Klassikaal: activering voorkennis: voorbeeld methode / eigen voorbeeld
- Huiswerk: opgave V-1a – V-1b – V-2a – V-2b – V-2c – V-2d – V-3a – V-3b – V-4a – V-4b – V-5 – V-6a – V-6b – V-6c – V-6d – V-7 – V-8a – V-8b – V-8c – V-8d

Opgave 1-theorie-opgave 2

- Klassikaal: voorbeelden methode / eigen voorbeelden
opgave 1a – 1b – 2
- Zelfst. les: opgave 1a – 1b – 2
- Terugkop.: opgave 1a – 1b – 2 / eigen voorbeeld
- Huiswerk: opgave 1a – 1b – 2

Theorie-opgave 3-theorie-opgave 4 en 5

- Klassikaal: voorbeelden methode / eigen voorbeelden
opgave 3a – 3b – 3c – 3d – 4a – 4b – 4c – 4d – 5a – 5b
- Zelfst. les: opgave 3a – 3b – 3c – 3d – 4a – 4b – 4c – 4d – 5a – 5b
- Terugkop.: opgave 3a – 3b – 3c – 3d – 4a – 4b – 4c – 4d – 5a – 5b / eigen voorbeeld
- Huiswerk: opgave 3a – 3b – 3c – 3d – 4a – 4b – 4c – 4d – 5a – 5b

Theorie-opgave 6 en 7

- Klassikaal: voorbeelden methode / eigen voorbeelden
opgave 6a – 6b – 6c – 6d – 7a – 7b
- Zelfst. les: opgave 6a – 6b – 6c – 6d – 7a – 7b
- Terugkop.: opgave 6a – 6b – 6c – 6d – 7a – 7b / eigen voorbeeld
- Huiswerk: opgave 6a – 6b – 6c – 6d – 7a – 7b

Observatielijst hoofdstuk 8-1 Vectoren

Herhalen V-8 Voorkennis

- Klassikaal: activering voorkennis: voorbeeld methode / eigen voorbeeld
- Huiswerk: opgave V-1a – V-1b – V-2a – V-2b – V-2c – V-2d – V-3a – V-3b – V-4a – V-4b – V-5 – V-6a – V-6b – V-6c – V-6d – V-7 – V-8a – V-8b – V-8c – V-8d

Opgave 1-theorie-opgave 2

- Klassikaal: voorbeelden methode / eigen voorbeelden / opgave 1a – 1b – 2
 - verplaatsing / nadruk op effect/resultaat?
 - equivalentie / mix benamingen?
- Zelfst. les: opgave 1a – 1b – 2
- Terugkop.: opgave 1a – 1b – 2 / eigen voorbeeld
- Huiswerk: opgave 1a – 1b – 2

Theorie-opgave 3-theorie-opgave 4 en 5

- Klassikaal: scalaire vermenigvuldiging: voorbeelden methode / eigen voorbeelden
opgave 3a – 3b – 3c – 3d

somvector/verschilvector kop-staart-methode: voorbeelden methode
eigen voorbeelden / opgave 4a – 4b – 4c – 4d
 - Parallelogram-methode (krachten) / keuze welke
 - werkvolgorde
 - notatie: $k\vec{p} = k \cdot \vec{p}$ en $-\vec{p} = -1 \cdot \vec{p}$
 - rekenregel: $k \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{a} = (k + m) \cdot \vec{a}$
 - rekenregel: commutativiteit $\vec{p} + \vec{q} = \vec{q} + \vec{p}$
 - de som van vectoren levert als antwoord een vector op
nulvector: voorbeelden methode / eigen voorbeelden / opgave 5a – 5b
- Zelfst. les: opgave 3a – 3b – 3c – 3d – 4a – 4b – 4c – 4d – 5a – 5b
- Terugkop.: opgave 3a – 3b – 3c – 3d – 4a – 4b – 4c – 4d – 5a – 5b / eigen voorbeeld
- Huiswerk: opgave 3a – 3b – 3c – 3d – 4a – 4b – 4c – 4d – 5a – 5b

Theorie-opgave 6 en 7

- Klassikaal: andere context: voorbeelden methode / eigen voorbeelden
opgave 6a – 6b – 6c – 6d – 7a – 7b (7 hoe?)
 - meer contexten: versnelling, impuls etc.
- Zelfst. les: opgave 6a – 6b – 6c – 6d – 7a – 7b
- Terugkop.: opgave 6a – 6b – 6c – 6d – 7a – 7b / eigen voorbeeld
- Huiswerk: opgave 6a – 6b – 6c – 6d – 7a – 7b (7 hoe?)

Bijlage B – Leerdoelen

Analyse

Met leerdoelen wordt hier bedoeld duidelijk en concreet gespecificeerde doelen van wat de leerlingen zich eigen moeten maken op het gebied van kennis, inzichten en vaardigheden. De analyse hiervan richt zich op de lesmethode Moderne Wiskunde 4 vwo B 11^e editie (Noordhoff Uitgevers bv, 2014a en 2014b) en de eindtermen in de syllabus CE vwo wiskunde B 2018 (College voor Toetsen en Examens vwo, havo, vmbo, 2016).

Een punt dat meteen opvalt bij het onderzoek van de syllabus CE vwo wiskunde B 2018 en de lesmethode is dat het tijdstip van uitgifte van de lesmethode, 2014, vóór het tijdstip van de laatste wijzigingen in de syllabus ligt, namelijk september 2015 (blauw gemarkeerd) en april 2016 (groen gemarkeerd). De lesmethode en de verantwoording in de docentenhandleiding (Noordhoff Uitgevers bv, 2014b) sluiten waarschijnlijk mede daarom niet geheel aan bij de syllabus.

Algemeen geldt dat binnen domein E, meetkunde met coördinaten, met meetkundige vaardigheden (E1) bedoeld wordt dat leerlingen meetkundige eigenschappen van objecten kunnen onderzoeken en bewijzen en daarbij gebruik kunnen maken van meetkundige en algebraïsche technieken (productieve vaardigheden) en van ICT. Overige voor dit onderzoek relevante onderdelen zijn: het begrip afstand (parate kennis) en stelling van Pythagoras gebruiken, gelijkvormigheid gebruiken, tekeningen maken van meetkundige problemen (parate vaardigheden).

Voor vectoren en inproduct (E3) geldt dat leerlingen met behulp van vectoren en inproducten eigenschappen van figuren in het vlak kunnen afleiden en berekeningen kunnen uitvoeren. Voor dit onderzoek relevante onderdelen zijn:

- Parate kennis: het begrip vector als grootte met lengte en richting en als getallenpaar, notatie: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, de begrippen lengte, richtingshoek, kentallen en componenten van een vector, het zwaartepunt van een aantal punten als eindpunt van de plaatsvector die het gewogen gemiddelde is van de plaatsvectoren van die punten.
- Parate vaardigheden: rekenen en redeneren met vectoren die beschreven zijn door grootte en richting of door middel van kentallen, vectoren ontbinden in componenten, scalair vermenigvuldigen, bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken, zowel meetkundig als met behulp van een berekening (parate vaardigheden).
- Productieve vaardigheden: met behulp van vectoren zwaartepunten bepalen.

In domein E4, toepassingen, wordt nog aangegeven dat leerlingen de aangegeven technieken moet kunnen toepassen in geschikte natuurwetenschappelijke en technische situaties.

Vergelijking lesmethode en syllabus

Er zijn enkele verschillen te vinden tussen de lesmethode en de syllabus. De lesmethode maakt gebruik van de notatievorm $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ in plaats van $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, waarbij de docentenhandleiding (Noordhoff Uitgevers bv, 2014b) aangeeft dat het belangrijk is nauwkeurig en consequent om te gaan met notaties voor vectoren. Verder wordt bij het ontbinden in vectoren de term componenten niet genoemd, waarbij voor de componenten evenwijdig aan de x - en y -as gebruikt gemaakt wordt van de notatievorm $\vec{a}_x$ en $\vec{a}_y$. Een belangrijk verschil tussen de syllabus en de lesmethode is de toevoeging/wijziging van de definitie van het begrip zwaartepunt, deze wijkt dan ook af van de lesmethode. De definitie van de lesmethode voor het zwaartepunt is meer natuurkundig/toepassingsgericht en die van de syllabus is meer wiskundig, dit is onder andere te zien

aan het gebruik van de term “puntmassa’s” in de lesmethode en “punten” in de syllabus. Verder gebruikt de lesmethode niet de term “gewogen gemiddelde”. Ook belangrijk is de verschuiving van het bepalen van zwaartepunten met behulp van vectoren van de parate vaardigheden naar de productieve vaardigheden, wat een verzwaring is t.o.v. de leerdoelen van de lesmethode. Productieve vaardigheden betekent volgens de syllabus dat leerlingen de parate vaardigheden (routinematige beheersing) in complexe probleemsituatie moeten kunnen toepassen, door inzicht, overzicht, probleemaanpak en metacognitieve vaardigheden zal de leerling een strategie moeten bedenken om het probleem op te lossen. De reden hiervoor is niet helemaal duidelijk ook al is uit de inleiding al gebleken dat ook de docenten van het CCS meer dan alleen routinematige beheersing willen bereiken, wat hierbij aansluit. Een precieze invulling van de bedoeling in de syllabus is de onderzoeker ook niet helemaal duidelijk. In het kader van dit onderzoek kan de routinematige beheersing van de parate vaardigheden gezien worden als procedurele kennis en het inzicht en overzicht van de procedurele vaardigheden juist gezien worden als structurele kennis. Aangezien dit al een doel in het onderzoek is en complexe probleemsituaties voort kunnen komen uit een afwijkende probleemstelling of bijvoorbeeld geschikte natuurwetenschappelijke of technische situaties, wordt in dit onderzoek hier verder geen speciale aandacht aan gegeven.

Bijlage C – Didactische leidraad en aanvullend lesmateriaal paragrafen 8-V t/m 8-2 (werkdocument)

Voor de leesbaarheid is de originele didactische leidraad tekstueel wat aangepast. De gebruikte afbeeldingen en GeoGebra-bestanden zijn aangeleverd aan de docent van de testgroep.

Algemeen lesmethode Moderne Wiskunde

Ten opzichte van de vorige editie is het onderdeel meetkunde in de 11^e editie volledig vernieuwd. De nadruk ligt in de meetkunde niet meer op het bewijzen in de vlakke meetkunde. Leerlingen moeten bij meetkundige vraagstukken gebruik kunnen maken van algebraïsche methoden (vergelijkingen van lijnen en cirkels, parametervoorstellingen en vectorvoorstellingen), van meetkundig rekenwerk (goniometrische verhoudingen, sinus- en cosinusregel, gelijkvormigheid) en van redeneren met behulp van een beperkt aantal stellingen betreffende cirkels. In deel 4 vwo B komen lijnen en vectoren aan bod, in deel 5 vwo B cirkels en het redeneren met meetkundige stellingen. In 6 vwo B komt de lesstof grotendeels nog eens langs en wordt er gewerkt met parametervoorstellingen die de baan van een bewegend punt beschrijven en zwaartepunt/massamiddelpunt van een veelhoek (homogene massaverdeling in geometrische figuren).

Paragraaf 8-V: Voorkennis

Inhoud: Het hoofdstuk bevat de onderwerpen:

- De stelling van Pythagoras: V-1 t/m V-4.
- Goniometrische verhoudingen (nodig voor paragraaf 8-4): V-5 en V-6.
- Zwaartelijnen en ligging zwaartepunt in een driehoek: V-7 en V-8.

Voorkennis: Relatief eenvoudige algebraïsche vaardigheden, zoals het hanteren van rekenregels en het oplossen van vergelijkingen worden hier niet expliciet genoemd, maar zijn wel nodig. Volgens de docenten van het CCS is het onderwerp zwaartelijnen en ligging zwaartepunt in een driehoek in 2 vwo overgeslagen en kan daarom niet als voorkennis beschouwd worden. In paragraaf 3 is ruimte deze lesstof betekenisvol te introduceren en wordt hier vervangen door het activeren van voorkennis over gelijkvormigheid (snavel- en zandloperfiguur / Z- en F-hoeken), waarvan de docent aangeeft dat dit onderwerp in 2/3 vwo behandeld is en aardig weggezakt zal zijn. Overige voorkennis, ook buiten het wiskunde domein, zal geactiveerd en/of gebruikt worden gaandeweg de uitvoering van de paragrafen.

Aanpassingen/advies op basis van het programma van eisen en overleg met de docent van de testgroep:

- V-7 en V-8 vervangen door twee opgaven over gelijkvormigheid. Let op de notatie en werkwijze voor de berekening.
- De lesstof over zwaartelijn en zwaartepunt gebruiken in paragraaf 3.

Paragraaf 8-1: Vectoren

Inhoud: Introductie van vectoren in de geometrische representatie.

Voorkennis: Leerlingen hebben bij natuurkunde al kennism gemaakt met vectoren, in de vorm van krachten. De parallellogram-methode, eventueel te gebruiken bij opgave 7, wordt begin 4 vwo behandeld bij natuurkunde.

Omschrijving en analyse van de theorieblokken en de opgaven:

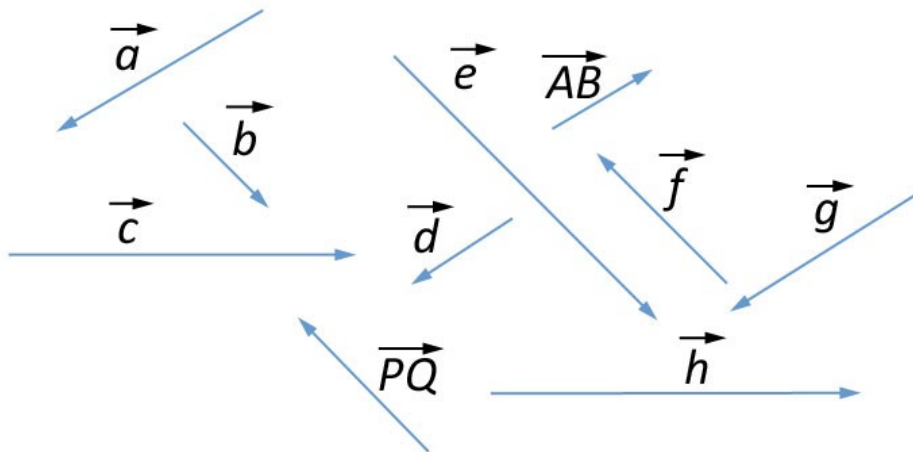
- Opgave 1: Introductie vector in de context van verplaatsing van A naar B, met afstand en richting.
- Theorie: In geometrische representatie wordt een vector in pijl-vorm weergegeven. De benaming en notatie van vectoren wordt uitgelegd, inclusief de lengte van een vector.
- Opgave 2: de vectoren zijn alle benoemd als kleine letter met een pijltje erboven.
- Theorie: Intuïtieve visuele uitleg scalaire vermenigvuldiging met notatie in getalvoorbeeld. Benadrukt dat de plaats van de vector niet van belang is, maar dat het gaat om het aangeven van de richting en grootte. Blijft in de context van verplaatsing.
- Opgave 3: notatiefout punt p met kleine letter in plaats van grote letter, conventie is hoofdletter, eventueel expliciteren van deze conventie.
3b: antwoordenboek: het wordt niet duidelijk wat het resultaat is/moet zijn, namelijk dat de som van vectoren een vector is.
3c: nagaan of leerlingen al bezig zijn met rekenregels, dus tekenen ze de som of alleen het antwoord $\frac{1}{2}\vec{b}$.
3d: in het antwoordenboek worden $\vec{a}$ en $\vec{b}$ beide in Q geplaatst, terwijl de parallellogram-methode verder niet terugkomt.
- Theorie: Uitleg somvector via kop-staart-methode en definitie verschilvector. Definitie nulvector.
- Opgave 4: oefenen kop-staart-methode. 4b: antwoordenboek gebruikt commutatieve eigenschap, behandel klassikaal het “bewijs” hiervoor. 4d: verschilvector met haakjes, werkvolgorde belangrijk.
- Opgave 5: inzichtvraag somvector met meerdere vectoren en nulvector.
- Theorie: vectoren in andere (natuurkundige) context, snelheid en kracht, richting en grootte.
- Opgave 6: intuïtieve opgave met vertaling snelheid in verplaatsing 6c: met Pythagoras.
- Opgave 7: misschien een verwarrende opgave, de krachten grijpen in een punt aan, gaan leerlingen de kop-staart-methode gebruiken? Bij natuurkunde worden krachten alleen over de werklijnen verplaatst en wordt de parallellogram-methode gebruik voor het bepalen van de resultante. Het antwoordenboek maakt in wezen gebruik van ontbinden in vectoren en laat de twee evenwijdige componenten zien, de andere twee loodrechte componenten zijn even groot en tegengesteld, dus heffen elkaar op, maar deze worden nergens getoond.

Aanpassingen/advies op basis van het programma van eisen en overleg met de docent van de testgroep:

Het is mogelijk dat leerlingen met een CM of EM profiel wel wiskunde B, maar geen natuurkunde hebben. Zij zullen de parallellogram-methode niet herkennen. Dit houdt niet in dat deze regel niet behandeld moet worden, echter is dit wel iets om in de gaten te houden. Las tussendoor reflectiemomenten in door bijvoorbeeld bepaalde opgaven te behandelen om ervoor te zorgen dat de leerlingen het begrepen hebben en niet op een verkeerde basis doorgaan. Uitdagende opdrachten of uitleg zijn mogelijkheden voor de docent om op individueel of klasse-niveau te differentiëren. In deze paragraaf, maar ook in de rest van het hoofdstuk worden eigenschappen zoals commutativiteit, associativiteit en distributiviteit bij operaties met vectoren niet expliciet behandeld, terwijl dit later

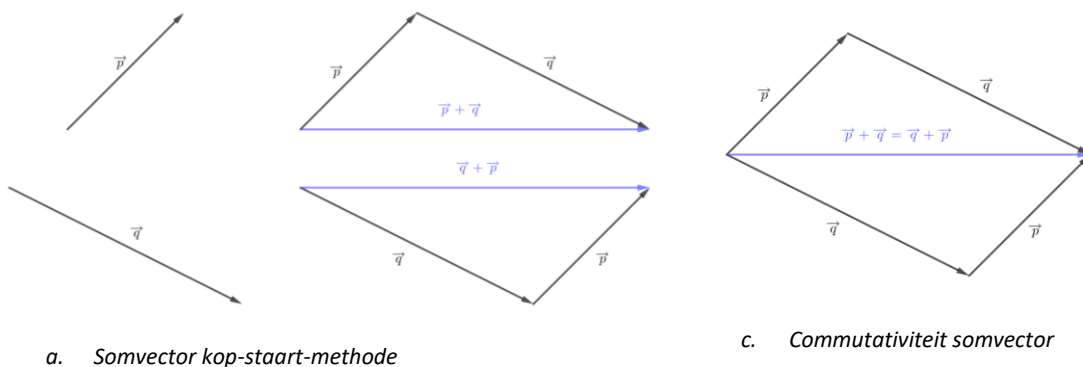
wel impliciet gebruikt wordt/moet worden in opgaven. Het expliciet behandelen van de rekenregels (in principe dezelfde als bij “gewone” variabelen) en bewijs/verificatie/evidentie in geometrische en symbolische representatie bevordert volgens de literatuur de cognitieve ontwikkeling, voornamelijk de stap van procedureel naar structureel denken. De opgaven bieden wel mogelijkheden tot het ontwikkelen hiervan, dus gebruik reflectiemomenten en/of theorieblokken om te expliciteren. Bouw de lesstof geleidelijk op.

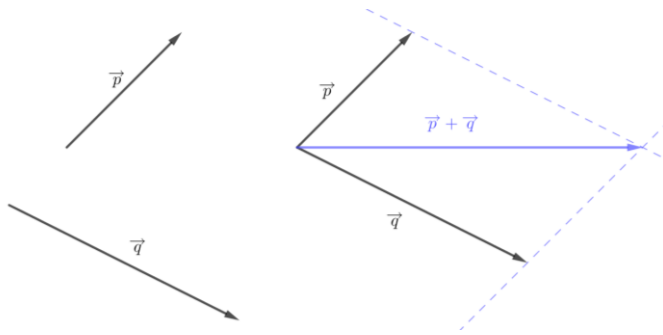
- Opgave 1: Benaming vectoren: expliciteer de keuze voor de naamgeving in bepaalde context.
- Opgave 2: benadruk het effect/resultaat, richting en grootte, niet de plaats. Gebruik voor de ontwikkeling van het concept vrije vector klassikaal een voorbeeld met een mix van benamingen, bijvoorbeeld ook $\overrightarrow{PQ}$ equivalent aan $\vec{f}$. Zie Figuur 22.



Figuur 22 Equivalentie vectoren

- Theorie: gebruik de termen effect/resultaat.
Uitdagende uitleg: scalaire vermenigvuldiging $k\vec{p} = k \cdot \vec{p}$ ziet er bij tegengestelde vector zo uit: $-\vec{p} = -1 \cdot \vec{p}$.
- Opgave 3: gebruiken de leerlingen al rekenregels? Gebruik het volgende theorieblok voor reflectie hierop.
- Theorie: Behandel zowel de kop-staart-methode (voor twee vectoren) als de parallellogram-methode (resultante of resulterende kracht van twee vectoren) voor $\vec{p} + \vec{q}$. Hiermee wordt ook de introductie van een andere context (krachten ook grootte en richting) vervroegd. Gebruik beide voor het bewijs van commutativiteit $\vec{p} + \vec{q} = \vec{q} + \vec{p}$, gebruik de eigenschappen van een parallellogram, zie Figuur 23.





b. Somvector parallellogram-methode

Figuur 23 Opbouw bewijs commutativiteit somvector met behulp van kop-staart- en parallellogram-methode

Benadruk dat beide methodes hetzelfde effect/resultaat geven en beide gebruikt mogen worden, echter in verschillende fysieke/natuurkundige contexten (verplaatsing versus kracht) en/of wiskundige contexten (bijvoorbeeld meer dan twee vectoren $\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$) is het logischer om de een of de andere te gebruiken.

Let op: niet alle leerlingen hebben natuurkunde en het kan het zijn dat krachten voor het gevoel van leerlingen “vastzitten” aan het aangrijpingspunt of dat alleen verschuiving in het verlengde van de kracht/vector mogelijk is. Bij natuurkunde worden krachten over de werklijn verschoven, dit is de rechte in het verlengde van een kracht.

Let op de naamgeving onder andere bij verplaatsing: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{BC} + \vec{AB}$, zie theorie.

Behandel eventueel ook: $3\vec{a} + 2\vec{a} = 5\vec{a}$ (opgave 2b), als voorbeeld van een rekenregel, maar benadruk in ieder geval dat de som van vectoren ook weer een vector is.

Behandel verschilvector met behulp van de formulevorm zoals in het boek.

- Opgave 4: leerlingen kunnen/mogen commutativiteit gebruiken.
4d: uitdagende opdracht of bij huiswerk behandelen: werk de formulevorm uit en controleer de uitkomst met het tekenantwoord in de geometrische representatie. Distributiviteit, associativiteit en commutativiteit werken hetzelfde als bij “gewone” variabelen, zie hoofdstuk 3 voor het bewijzen in de geometrische representatie en bewijs het later in de numerieke representatie via de kolomvector.
$$(\vec{u} - \vec{v}) - (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{u} - \vec{v} + (-1) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{u} - \vec{v} - \vec{v} + \vec{u} = 2\vec{u} - 2\vec{v}$$
- Opgave 5: niet overslaan! Gebruik in het antwoord de term effect, uiteindelijk heeft de som geen effect, dus lengte nul en richting onbepaald, dus nulvector. Ook hier weer: de som van vectoren levert als antwoord een vector op.
- Theorie: eventueel andere voorbeelden: versnelling, impuls enz.
- Opgave 7: Leerlingen kunnen kop-staart- of parallellogram-methode gebruiken.

Paragraaf 8-2: Vectoren en kentallen

Inhoud: Introductie van vectoren in de numerieke representatie.

Voorkennis: Aflezen uit assenstelsels, stelling van Pythagoras, in de geometrische representatie: somvector (kop-staart-methode en parallellogram-methode), verschilvector, scalaire vermenigvuldiging, nulvector, distributiviteit, associativiteit en commutativiteit, natuurkundige contexten.

Omschrijving en analyse van de theorieblokken en de opgaven:

- Opgave 8: plaatsing vrije vectoren, in notatievorm kleine letter met pijl bijvoorbeeld $\vec{a}$, in een assenstelsel. Opbouw opgave goed. Lengteberekening Pythagoras.

- Theorie: vectoren schrijven als kolomvector met kentallen. Equivalentie vectoren hier met notatievorm vectoren alleen als tussen twee punten bijvoorbeeld $\overrightarrow{AB}$.
Lengteberekening vectoren met behulp van kentallen en dus niet helemaal hetzelfde als met Pythagoras en afstand.
Definitie plaatsvector zodanig dat elke vector die in de oorsprong begint een plaatsvector is.
De notatievorm voor het eindpunt van een vector is een coördinaat.
Rekenregels voor kolomvectoren.
- Opgave 9: oefenen met rekenregels en lengte berekenen. 9c. Nauwkeurig toepassen rekenregels.
- Opgave 10: leerlingen berekenen de verschilvector van de twee plaatsvectoren van de punten A en B, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, en moeten concluderen dat de uitkomst een vector is die equivalent is met de vector van A naar B, $\overrightarrow{AB}$, de kentallen zijn gelijk.
10c Gegeven wordt de formule voor het bepalen van de coördinaten van het middelpunt van een lijnstuk met behulp van plaatsvectoren.
- Opgave 11: oefenen met formules uit theorie en rekenregels toepassen.
- Opgave 12: gehele opgave heel mooi, echter 12c en 12d beetje te veel voorbeelden.
- Opgave 13: leerlingen ontbinden een vector zelf in twee vectoren evenwijdig aan de assen.
Kan met parallellogram-methode direct en met kop-staart-methode met verplaatsing vector naar punt P.
- Theorie: het ontbinden van een vector in twee vectoren die evenwijdig aan de x- en y-as zijn.
De formule laat de omgekeerde som zien.
- Opgave 14: 14a bij componenten evenwijdig met de assen wordt het kental van de andere richting 0. 14b heel aardig, kan ook visueel met driehoeken, lengte en Pythagoras, andere richting niet vergeten.

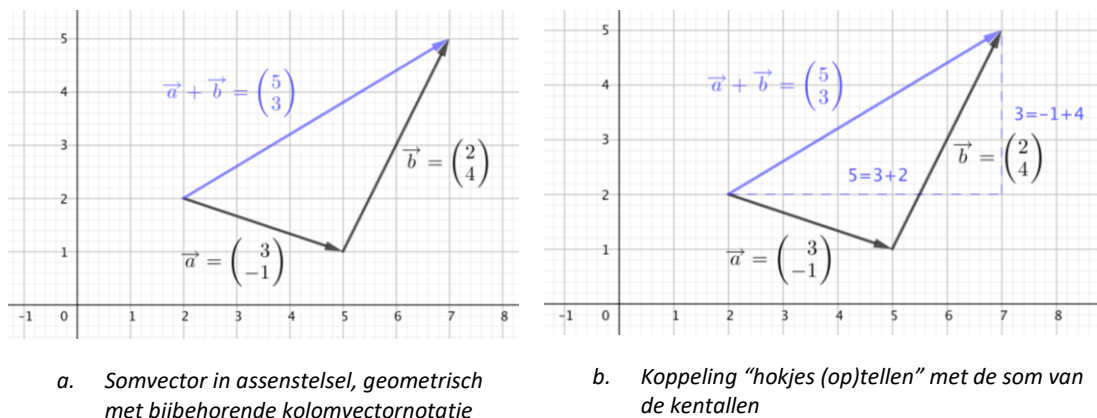
Aanpassingen/advies op basis van het programma van eisen en overleg met de docent van de testgroep:

- Probeer zoveel mogelijk koppelingen te maken naar de geometrische representatie voor bewijs of verificatie, dit kan structureel denken bevorderen.
- Koppel zoveel mogelijk de nieuwe kennis met kennis uit voorgaande paragrafen en voorkennis.
- Gebruik de terminologie uit de syllabus.
- Behandel/bewijs waar mogelijk de rekenregels. Merk op dat de onderstaande rekenregels heel intuïtief zijn: ze zijn dezelfde als bij “gewone” variabelen, dit is heel makkelijk inzichtelijk te maken aangezien de kentallen van de kolomvectoren waarmee gerekend wordt “gewone” variabelen zijn. Dit moet gaandeweg deze paragraaf duidelijk worden gemaakt. De laatste regel zou weggelaten kunnen worden om verwarring met het inproduct (paragraaf 4) te voorkomen.

Voor alle getallen k en m en alle vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ geldt:

$k \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{a} = (k + m) \cdot \vec{a}$	zie opgave 2b uit paragraaf 8-1
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	(commutativiteit somvector)
$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$	(associativiteit somvector)
$k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$	(distributiviteit)
$k \cdot (m \cdot \vec{a}) = (k \cdot m) \cdot \vec{a}$	(associativiteit product met twee getallen en één vector)

- Opgave 8: Benadruk het concept vrije vector, ze zitten niet vast aan het assenstelsel, alleen het effect geldt. Je kunt ook het assenstelsel even “uitzetten”.
- Theorie: Let hier weer op de naamgeving. Benadruk voor equivalentie het “hokjes tellen” en het effect, gelijke kentallen betekent gelijke vectoren. Vector $\vec{a}$ in de eerste afbeelding is equivalent met $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC}$ en $\overrightarrow{DE}$ uit de tweede afbeelding. Dus: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{a}$.
Lengte van een vector: maak de koppeling met Pythagoras. Koppel het rekenen met de lengte van de aanliggende rechthoekszijden aan het rekenen met kentallen, waarbij het kwadrateren van de kentallen altijd leidt tot positieve waarden.
Het is belangrijk het verschil en de overeenkomsten tussen een vrije vector en een plaatsvector te benadrukken. Een plaatsvector is een vector die de plaats van een punt bepaalt. Het beginpunt is de oorsprong en het eindpunt is het punt waar de plaats van bepaald wordt. De kentallen komen dan ook overeen met de coördinaten van het punt. Benadruk hier het verschil in notatie tussen de plaatsvector (kolomvector) en die van het punt dat het eindpunt van die vector is (coördinaten). Een vector vanuit de oorsprong hoeft geen plaatsvector te zijn, dit is context afhankelijk, en bij berekeningen kan een plaatsvector als vrije vector behandeld worden.
- Rekenregels: Hieronder volgen voorbeelden waarbij geometrische representaties gekoppeld worden aan numerieke representaties, werkend van aritmetisch naar algebraïsch, met voorbeelden voor bewijs en evidentie/verificatie.
- De som van twee vectoren: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$
Koppel de geometrische representatie van een somvector aan de aritmetische numerieke representatie met behulp van “hokjes (op)tellen” en de bijbehorende som van de kentallen voor evidentie en verificatie. Zie Figuur 24.



Figuur 24 Somvector in assenstelsel

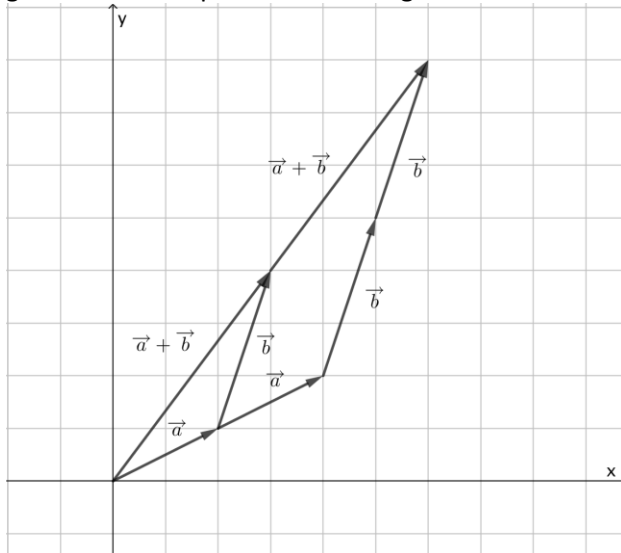
Er geldt: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Veralgemeeniseer vervolgens naar algebraïsch.

- Maak voor de commutatieve eigenschap een koppeling met de geometrische representatie uit paragraaf 8-1. Werk vervolgens van aritmetisch naar algebraïsch.
Aritmetisch: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 4+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{b} + \vec{a}$.
Algebraïsch: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1+a_1 \\ b_2+a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \vec{b} + \vec{a}$.
Benadruk dat de rekenregel uit het boek beide kanten op werkt, dus ook $\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.
- De scalaire vermenigvuldiging $k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}$ met k een reëel getal.
Gebruik een geometrisch voorbeeld met bijvoorbeeld $k = 3$ en “hokjes tellen/vermenigvuldigen”. Vervolgens numeriek laten zien dat de regel volgt uit de som van vectoren, eventueel met aritmetische tussenstap voor $\vec{a}$.

$$3\vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_1 + a_1 \\ a_2 + a_2 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot a_1 \\ 3 \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

Veralgemeeniseer (verbaal) naar k een reëel getal, dit lijkt een redelijke intuïtieve stap.

- Uitdagende opdracht over distributiviteit: $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$. Kan eerst geometrisch behandeld worden met bijvoorbeeld opgave 4b of Figuur 25 (gelijkvormigheid) en daarna in numerieke representatie of eerst in numerieke representatie en daarna de verificatie in de geometrische representatie. Het gebruik van het assenstelsel koppelt beide representaties.

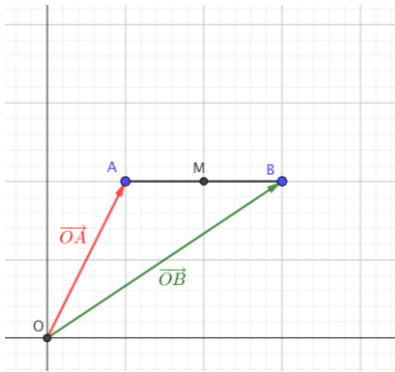


Figuur 25 Distributiviteit in geometrische representatie

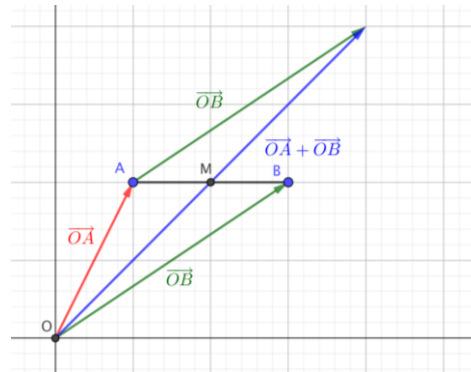
In de formulevorm klopt het voor leerlingen dat $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$, dit lijkt op het werken met gewone variabelen. Maak duidelijk dat dit in wezen bij vectoren ook zo is, aangezien er gewerkt wordt met de kentallen van de vectoren wat gewoon variabelen zijn. Laat bewijzen of lever bewijs in de numerieke representatie met behulp van de reeds behandelde rekenregels:

$$\begin{aligned} k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= k \cdot \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot (a_1 + b_1) \\ k \cdot (a_2 + b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 + k \cdot b_1 \\ k \cdot a_2 + k \cdot b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \cdot b_1 \\ k \cdot b_2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

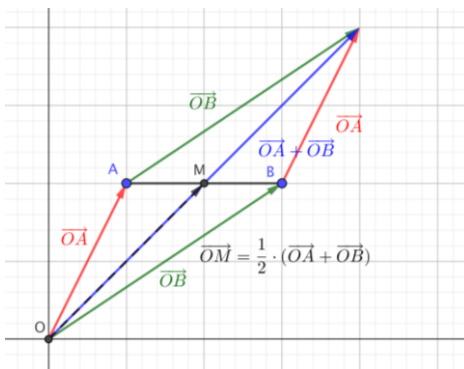
- Opgave 9: Zorg ervoor dat leerlingen zich goed aan de gegeven rekenregels houden. 9c zeker doen.
- Opgave 10b: Bij de berekening van de verschilvector wordt de plaatsvector $\vec{OA}$ als vrije vector behandeld. Als $-\vec{OA}$ kop-staart getekend wordt aan $\vec{OB}$ dan is de uitkomst een vrije vector. Equivalentie aan $\vec{AB}$ volgt uit gelijke kentallen, maar de vectoren ligt niet op dezelfde plaats. Maak in de geometrische representatie met behulp van een parallellogram evident dat deze equivalentie klopt.
10c Geef niet alleen de formule, maar laat ook zien dat deze klopt. Bijvoorbeeld geometrisch met behulp van de eigenschap dat de diagonalen van een parallellogram elkaar middendoor snijden, zie Figuur 26. Het GeoGebra-bestand (8-2 middelpunt.ggb) is geleverd aan de docent van de testgroep, zodat de dynamische eigenschappen van GeoGebra gebruikt kunnen worden voor veralgemenisering, zie Figuur 26d.



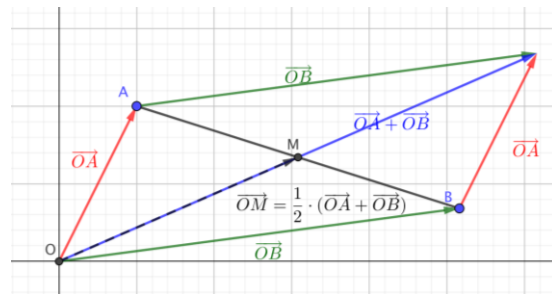
a. beginsituatie



b. somvector $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$



c. snijpunt diagonalen



d. veralgemenisering in GeoGebra

Figuur 26 Middelpunt met behulp van parallellogram

Er kan ook een koppeling gemaakt worden met distributiviteit: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ d.m.v. gelijkvormigheid. Verscaling van het parallellogram met een factor $\frac{1}{2}$ levert $\overrightarrow{OM}$ op als de som van de zijden van het kleine parallellogram $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

Het kan ook zonder vectoren met bestaande kennis, aangezien de kentallen van de plaatsvectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OB}$ ook de coördinaten zijn van de punten A en B, kunnen de coördinaten van middelpunt M ook berekend worden door de gemiddelde x- en y-coördinaat, $\bar{x}$ en $\bar{y}$, uit te rekenen, waarna deze als kentallen voor de plaatsvector $\overrightarrow{OM}$ gebruikt kunnen worden. Deze manier kan uiteindelijk gekoppeld worden aan paragraaf 3 waar M dan het zwaartepunt is van twee gelijke puntmassa's A en B.

- Opgave 12: eventueel bij 12c en 12d minder voorbeelden laten geven.
- Opgave 13: wat doen de leerlingen? Gebruiken ze de parallellogram-methode zodat $\overrightarrow{a_y}$ meteen in punt P begint of de kop-staart-methode en verplaatsen ze vervolgens $\overrightarrow{a_y}$ naar punt P?
- Theorie: De term ontbinden in vectoren is gelijk aan de term bij natuurkunde, waar net zoals in de syllabus de vectoren $\overrightarrow{a_x}$ en $\overrightarrow{a_y}$ componenten genoemd worden, dus gebruik ook het begrip componenten. Benadruk (mondeling) de omgekeerde relatie tussen som/resultante en vector/componenten, waardoor veralgemenisering naar alle mogelijke richtingen voor de twee componenten een logisch gevolg is.
- Opgave 14: Wat doen leerlingen, met de formule of visueel?

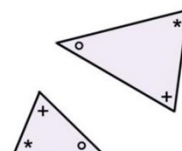
Bijlage D – Leerling-materiaal paragraaf 8-V (origineel)

Alternatief 8-V Voorkennis met vervangende opgaven V-7 en V-8

8-V Voorkennis

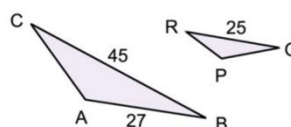
Huiswerk: Maak opgaven V1 t/m V6 uit het boek.

Twee figuren zijn **gelijkvormig** als de ene een uitvergroting is van de andere.
Twee **gelijkvormige driehoeken** hebben dezelfde hoeken. (Hoeken met gelijke tekens zijn gelijk)
Twee driehoeken die twee hoeken gelijk hebben, zijn **gelijkvormig**.



Voorbeeld rekenen met gelijkvormigheid:

Hiernaast staan twee driehoeken. Gegeven is verder dat $\angle P = 135^\circ$, $\angle Q = 20^\circ$, $\angle B = 20^\circ$ en $\angle C = 25^\circ$.
Bereken zijde PQ .



Oplossing 1:

- $\angle B = \angle Q$
 $\angle A = 180^\circ - 25^\circ - 20^\circ = 135^\circ = \angle P$
Dus $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ (twee gelijke hoeken)
- De vermenigvuldigingsfactor van de grote naar de kleine driehoek is
 $QR:BC = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$
 $PQ = \frac{5}{9} \cdot AB = \frac{5}{9} \cdot 27 = 15$

Oplossing 2:

- $\angle B = \angle Q$
 $\angle A = 180^\circ - 25^\circ - 20^\circ = 135^\circ = \angle P$
Dus $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ (twee gelijke hoeken)
- Met verhoudingstabel:

$\frac{AB}{PQ}$	$\frac{BC}{QR}$	$\frac{AC}{PR}$

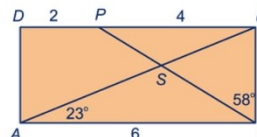
Vul in:

27	45
PQ	25
- Kruislings vermenigvuldigen:
 $PQ \cdot 45 = 25 \cdot 27$
 $PQ = \frac{25 \cdot 27}{45} = 15$

Opgave V-7

$ABCD$ is een rechthoek. Op zijde CD ligt een punt P zó, dat $DP = 2$ en $CP = 4$. Lijn PB snijdt diagonaal AC in S . Er geldt: $\angle CAB = 23^\circ$ en $\angle CBP = 58^\circ$.

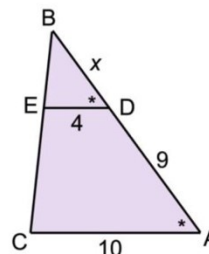
- Bereken de hoeken van driehoek ASB en van driehoek CSP .
- Bereken de verhoudingen $AS:SC$ en $BS:SP$.



Opgave V-8

Zie de figuur hiernaast.

- Toon aan: $\triangle ABC \sim \triangle DBE$.
- Gegeven: $BD = x$. Druk zijde AB ook uit in x .
- Bereken de lengte van zijde BD .
- Gegeven: $BC = 12,5$. Hoe lang is zijde CE ?



Uitwerkingen opgaven

Opgave V-7

- a $\angle ABS = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$ en $\angle ASB = 180^\circ - 23^\circ - 32^\circ = 32^\circ = 125^\circ$
 via overstaande hoeken geldt: $\angle CSP = \angle ASB = 125^\circ$
 via Z-hoeken geldt: $\angle CPS = \angle ABS = 32^\circ$ en $\angle SCP = \angle CAB = 23^\circ$
 of
 $\angle CPB = 180^\circ - 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$
 en $\angle ACB = 180^\circ - 90^\circ - 23^\circ = 67^\circ$, dus $\angle SCP = 90^\circ - 67^\circ = 23^\circ$
 $\angle CSP = 180^\circ - 32^\circ - 23^\circ = 125^\circ$
- b $\triangle ABS \sim \triangle CPS$ (gelijke hoeken)
 Dus $AS:CS=BS:SP=AB:CP=6:4=3:2$

Opgave V-8

- a $\angle ABC = \angle DBE$ en $\angle CAB = \angle EDB$, twee gelijke hoeken
- b $AB = 9 + x$
- c Via vermenigvuldigingsfactor van klein naar groot: $\frac{AC}{ED} = \frac{10}{4} = 2,5$
 Dus $2,5x = 9 + x$. Oplossen geeft $x = 6$.

of

$$\frac{AC}{DE} \Big| \frac{AB}{DB} \quad \text{Vul in:} \quad \frac{10}{4} \Big| \frac{9+x}{x}$$

Kruiselings vermenigvuldigen:

$$4(9+x) = 10x$$

$$36 + 4x = 10x$$

$$36 = 6x, \text{ dus } x = \frac{36}{6} = 6$$

- d $BC = 2,5BE$, dus $BE = \frac{12,5}{2,5} = 5$
 $CE = BC - BE = 12,5 - 5 = 7,5$

Of

Stel $CE = y$, dan $BE = 12,5 - y$

$$\frac{AC}{DE} \Big| \frac{BC}{BE} \quad \text{Vul in:} \quad \frac{10}{4} \Big| \frac{12,5}{12,5-y}$$

Kruiselings vermenigvuldigen:

$$10(12,5 - y) = 4 \cdot 12,5$$

$$125 - 10y = 50$$

$$75 = 10y \text{ dus } y = \frac{75}{10} = 7,5$$

Bronnen

Stercollectie wiskunde van de Wageningse Methode: 2V H15. Gelijkvormigheid

Theorieblok: *H15-3. Gelijkvormige figuren. Theorie en opgave 16 (aangepast)*

http://wm.math4allview.appspot.com/view?variant=basis_wm&item=1&comp=lj2-v-h15&subcomp=lj2-v-h15-03&variant=basis_wm&item=1&comp=lj2-v-h15&subcomp=lj2-v-h15-03

Opgave V-7: *H15-2. Vergroten en verkleinen. Opgave 12.*

http://wm.math4allview.appspot.com/view?variant=basis_wm&item=1&comp=lj2-v-h15&subcomp=lj2-v-h15-02&variant=basis_wm&item=1&comp=lj2-v-h15&subcomp=lj2-v-h15-02

Opgave V-8: *H15-2. Vergroten en verkleinen. Opgave 11 (aangepast).*

http://wm.math4allview.appspot.com/view?variant=basis_wm&item=1&comp=lj2-v-h15&subcomp=lj2-v-h15-02&variant=basis_wm&item=1&comp=lj2-v-h15&subcomp=lj2-v-h15-02

Bijlage E – Didactische leidraad en lesmateriaal paragraaf 8-3 (werkdokument)

Paragraaf 8-3: Zwaartepunten en evenwicht

Inhoud: Zwaartepunten en evenwicht met behulp van vectoren zowel in geometrische als in numerieke representatie, vanuit een natuurkundige context met (punt)massa's.

Voorkennis: Het begrip evenwicht als zijnde ervaring/gevoel van de leerlingen maakt onderdeel uit van de voorkennis, ook is dit onderwerp reeds in de onderbouw bij natuurkunde behandeld binnen het onderwerp hefboomen met de formule $(kracht \times arm)_{links} = (kracht \times arm)_{rechts}$ voor evenwicht. Ook het bewijzen met behulp van gelijkvormigheid, het vertalen van een natuurkundige of geometrische situatie in een algebraïsche vector-formule, het manipuleren hiermee en uitvoeren van berekeningen in (concrete) numerieke situatie behoren tot de benodigde voorkennis.

Omschrijving en analyse van de theorieblokken en de opgaven:

- Opgave 15: Hier wordt aangehaakt bij de voorkennis van leerlingen over het begrip evenwicht, namelijk de fysieke ervaring en de natuurkundige waar dit in de onderbouw behandeld is binnen het onderwerp hefboomen met de formule $(kracht \times arm)_{links} = (kracht \times arm)_{rechts}$ voor evenwicht. Er wordt gewerkt met twee massa's aan een staaf (dus op een lijn), eerst met gelijke massa, daarna met verschillende massa. Hierbij geldt de aanname dat de stang massaloos, oneindig sterk en stijf is (en de massa's aan touwtjes hangen). Uit de formule volgt dat de verhouding van de afstanden van de massa's tot het evenwichtspunt omgekeerd is aan de verhouding van de grootte van de massa's. In het uitwerkingenboek staat $arbeid = kracht \times arm$, dit moet echter $moment = kracht \times arm$ zijn, aangezien moment een maat is voor het rotatie-effect van een kracht. Dit is echter geen voorkennis voor leerlingen.
- Opgave 16: Van opgave 15 naar 16 wisselt de blik van het zijaanzicht naar een bovenaanzicht in een assenstelsel, en eigenlijk ook van een massa naar een punt met een massa. Waar in opgave 15 vanuit die natuurkundige insteek de massa in de vorm van een kracht als vector opgevat kan worden, wordt in opgave 16 juist de plaats door een vector bepaald. Deze stap zou heel verwarrend kunnen werken voor leerlingen, aangezien er geen enkele uitleg gegeven wordt. De naamgeving van de plaatsvectoren vindt hier plaats met kleine letters, ondanks de aanwezigheid van het assenstelsel met oorsprong.
16a: dit is een heel aardige koppeling van het zwaartepunt van twee gelijke massa's met het midden van een lijnstuk uit opgave 10c, waaruit volgt dat $\vec{OZ} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$, let op de naamgeving van de plaatsvector met de verwijzing naar de oorsprong. De stap naar $\vec{z} = \frac{1}{2} \cdot \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b}$ (distributieve eigenschap) wordt echter nergens in de lesmethode behandeld en de koppeling tussen beide naamgevingsvormen (bijvoorbeeld $\vec{OZ}$ en $\vec{z}$) moet gemaakt worden.
16b en c: in het geval van massa's met de verhouding 2:1, zoals ook in opgave 15, wordt hier van de leerlingen gevraagd geheel zelfstandig een bewijs te leveren met behulp van gelijkvormigheid zonder dat eerder dit hoofdstuk gelijkvormigheid behandeld is of dat er als voorbeeld ergens een vorm van bewijs geleverd is. Hierbij moet de positie van het zwaartepunt als juist beschouwd worden en de vectorsom vervolgens aangetoond worden.
16d: Hier moet veralgemenisering plaatsvinden naar "niet-horizontale" posities vanuit het geometrische bewijs.
- Theorie: De algemene formule voor de bepaling van de plaatsvector van het zwaartepunt bij twee massa's. Waar in opgave 15 de verhouding van de afstanden van de punten tot het evenwicht omgekeerd is aan de verhouding van de massa's van de punten, dus een groter

gewicht levert een kleinere afstand op, krijgt door gebruik te maken van de plaatsvectoren de plaatsvector van het grotere gewicht juist een groter aandeel in de bepaling van de plaatsvector van het zwaartepunt, deze trekt het zwaartepunt als het ware meer naar zich toe, dus de afstand is juist kleiner.

- Opgave 17: Oefenopgaven waar 17a nog makkelijk zonder de formule uit het theorieblok kan, maar waar 17b duidelijk makkelijker is met de formule.
- Opgave 18: Hier vindt uitbreiding plaats naar het bepalen van het zwaartepunt van drie gelijke massa's aan een staaf (op een lijn), door herhaaldelijk twee massa's met elkaar te combineren. Er wordt hier weer geschakeld naar het vooraanzicht, wat het makkelijker maakt om in de klassikale uitleg duidelijk te maken dat dit combineren mag. Je kunt je voorstellen dat het evenwicht van de staaf behouden blijft als twee massa's vervangen worden door één massa in het evenwichtspunt van deze twee massa's. Echter moet deze vervangende massa wel van het samengestelde gewicht zijn om de totale massa in het ophangpunt gelijk te houden. Deze opgave is op meerdere manieren aan te pakken. Dit kan bijvoorbeeld via de formule uit het theorieblok, door eerst $\vec{m}$, met M het zwaartepunt van A en C , te bepalen (welke ook al gegeven wordt!) en daarna substitutie van $\vec{m}$ in $\vec{z} = \frac{2}{3} \cdot \vec{m} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b}$ en dit vervolgens uit te werken met behulp van de rekenregels. Dit sluit aan bij de algebraïsche naamgeving met kleine letters uit de opgave en kan goed zonder tekening. Maar dit kan bijvoorbeeld ook door gebruik te maken van de verhouding van de lengte van de lijnstukken, zoals in het uitwerkingenboek van de lesmethode. Hierin wordt de situatie in een assenstelsel geplaatst. En terwijl dit niet gevraagd wordt levert de lesmethode ineens het geometrische bewijs voor de plaats van M met behulp van de eigenschappen van een parallelogram. Hierna wordt $\overrightarrow{BM}$ bepaald met de formule op blz. 105 voor de vector tussen de twee punten, dit levert $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} (= \vec{m} - \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}$. Hierna wordt via de verhouding van de lengte van de lijnstukken $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OB} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BM}$ bepaald. Hierna vindt substitutie plaats met uitwerking volgens de rekenregels. Met deze oplossingsmethode moet telkens gewisseld worden tussen verschillende algebraïsche naamgevingen bijvoorbeeld $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.
Terwijl de werkwijze en onderbouwing van de laatste methode aansluiting vindt bij voorgaande paragrafen vindt de eerste meer aansluiting bij de formules uit deze paragraaf en het abstract werken hiermee. Voornamelijk de tweede stap in de eerste methode geeft veel meer aanzet tot de formule voor het zwaartepunt van n puntmassa's in het volgende theorieblok, waarbij het aandeel van de plaatsvectoren van de puntmassa's in de plaatsvector van het zwaartepunt in verhouding staat met hun massa ten opzichte van de totale massa.
- Theorie: Introductie naar de formule voor de bepaling van het evenwichtspunt van n puntmassa's in een vlak (niet alleen op een lijn) met variabele massa met behulp van numerieke (plaats)vectoren. Hier vindt dus een veralgemeniseringsstap plaats naar een willekeurig aantal puntmassa's met variabele massa in een vlak.
- Opgave 19: Oefenen met de formule, het invullen van de massa's en concrete numerieke vectoren.
- Opgave 20: Deze opgave kan zoals in het antwoordenboek in een assenstelsel met concrete plaatsvectoren in combinatie met de formule, maar deze kan ook zonder assenstelsel via het combineren van gewichten zoals in opgave 18.
- Opgave 21: Hier moet gewerkt worden met variabele plaatsvectoren (in een vlak) maar met concrete massa's. De algebraïsche naamgeving lijkt hier weer meer op de formules in het eerste deel van de paragraaf.
- Opgave 22: Het zwaartepunt van een driehoek is zowel het zwaartepunt van de driehoek als vorm (voorkennis) als het massazwaartepunt van drie gelijke massa's in de hoekpunten. Dit kan echter alleen omdat de zwaartelijnen de driehoek in gelijke oppervlaktes opdeelt, het

modelleren gaat in wezen van vorm naar vorm met een homogene massaverdeling naar een vorm met massa's in de hoekpunten. Wees er dus van bewust dat niet elke geometrische vorm (met homogene massaverdeling) gemodelleerd kan worden met gelijke massa's in de hoekpunten! Voor een voorbeeld zie extra opgave 8 in het leerling-materiaal voor paragraaf 8-3. Het onderwerp zwaartepunten bij vlakken komt in de lesmethode terug in 6vwo.

22a: Dit wordt in het uitwerkingenboek via de formule voor het massazwaartepunt gedaan: noem de massa's a , dan $m = a + a + a = 3a$. Dit geeft $\vec{z} = \frac{a}{3a} \cdot \vec{a} + \frac{a}{3a} \cdot \vec{b} + \frac{a}{3a} \cdot \vec{c} = \frac{1}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \vec{c}$. De stap dat dit gelijk is aan $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ wordt niet gemaakt. Deze kan ook via het combineren van telkens twee massa's en de daaruit volgende verhouding van de lijnstukken, zoals in opgave 18.

22b: Deze vraag is verwarrend, omdat hier de modelleerstappen naar puntmassa's in de hoekpunten wordt overgeslagen. Maar deze is ook verwarrend als 22a op de tweede manier is opgelost. Dan is namelijk juist al het omgekeerde aangetoond, dat de formule volgt uit de verhouding 1:2 in plaats van andersom. Deze omkering is ook logischer en tevens wat het uitwerkingenboek bij 22b doet.

22c: De formule moet hier ingevuld worden met de juiste massaverhouding en plaatsvectoren.

De docent van de testgroep geeft aan dat het eerste deel van de paragraaf, t/m vraag 18, niet lekker loopt. De vragen zouden moeten dienstdoen als opbouw naar de formule voor het zwaartepunt, maar zorgen eerder voor verwarring. Waarschijnlijk komt dit door de wisselingen tussen de natuurkundige insteek en de (vector)meetkundige (van krachtvector naar positievector en van vooraanzicht naar bovenaanzicht) in combinatie met een hogere aanspraak op vaardigheden op het gebied van bewijzen en op het gebied van manipuleren met vectorformules ten opzichte van de vorige paragrafen. Hierdoor neemt dit deel veel tijd in en moeten de leerlingen (zelfstandig) in huiswerktijd het tweede deel met de formule voor het zwaartepunt zich eigen maken. Dit pakken de leerlingen relatief makkelijk op, maar kunnen dit in de ervaring van de docent niet koppelen aan het eerste deel van de paragraaf en lijken op het procedurele niveau te blijven hangen.

Aanpassingen op basis van het programma van eisen en overleg met de docent van de testgroep:

Op basis van het programma van eisen en in overleg met de docent van de testgroep is een ontwerp van het lesmateriaal gemaakt dat bestaat uit leerling-materiaal ter vervanging van delen van de paragraaf uit de lesmethode (inclusief werkblad en uitwerkingen), zie bijlage E, en bijbehorende didactische leidraad voor de docent. Hiervoor is een analyse gemaakt van de didactiek van de lesmethode, inclusief opgaven, uitwerkingenboek en docentenhandleiding welke zonder leerboek lastig te volgen is. Er is vervolgens gekeken wat wel en niet voldeed aan het programma van eisen en naar mogelijkheden voor verbetering. De didactische leidraad had de functie van praktisch werkdocument naast het leerboek, welke gaandeweg de uitvoering van de lessenserie met de docent van de testgroep besproken en aangevuld is. Aangezien de hoeveelheid lesstof in de originele paragraaf ook al dusdanig veel tijd in beslag nam is besloten het materiaal op anderhalve les, dus 75 minuten, te ontwerpen. Het leerling-materiaal bestaat uit twee delen die gesplitst zijn op inhoud en niet per se op tijdsduur en beide delen zijn voorzien van inleidende opgaven en voorbeelden die didactische materiaal bieden aan de docent, maar er ook voor zorgen dat het materiaal (redelijk) zelfstandig door leerlingen te maken is. Ook zijn enkele extra meer uitdagende opdrachten toegevoegd. Hieronder volgt eerst een algemene verantwoording voor de aanpassingen op basis van het programma van eisen en daarna per opgave de didactische aandachtspunten en overwegingen.

De lesmethode bevat veel bruikbaar materiaal en aangezien het doel is een hoger cognitief niveau bij de leerlingen te bereiken en niet het aanleren van andere lesstof (kennis en vaardigheden) is dan ook zoveel mogelijk gebruik gemaakt van de opgaven uit het leerboek, aangevuld met eigen materiaal en aangepast materiaal uit vrij toegankelijke bronnen. De opbouw van de oorspronkelijke lesstof is echter omgegooid. Voor het ontwerp is gekozen om in deel I eerst vanuit een wiskundige numerieke context

de formule voor het zwaartepunt te behandelen. Dit zorgt ervoor dat de instap op een hoger niveau kan plaatsvinden, namelijk met meer dan twee puntmassa's in een vlak in plaats van op een lijn. Dit wordt vervolgens in deel II als het ware geanalyseerd en gekoppeld aan andere contexten, dit kan gezien worden als een analytische benadering binnen de moderne analytische (coördinaten)meetkunde. De basis hiervoor, uit het programma van eisen, zijn de voorkeur van leerlingen voor de numerieke representatie, de aansluiting met de voorgaande paragraaf waar gewerkt wordt met de kentallen en het gebruiken van de meer wiskundige definitie van het zwaartepunt uit de syllabus. Bewijs, verificatie en evidentie moeten verweven worden in de gehele paragraaf. In deel II volgt als eerste de koppeling tussen het zwaartepunt en evenwicht in natuurkundige context, opgebouwd vanuit eenvoudige situatie. De basis voor de natuurkundige context is dat de syllabus aangeeft dat leerlingen de aangegeven technieken moeten kunnen toepassen in geschikte wetenschappelijke en technische situatie en tevens geeft de eis voor horizontale samenhang aan dat de lesstof actief aan moeten sluiten bij kennis en vaardigheden uit andere vakgebieden. En vervolgens wordt, zoals het programma van eisen voorschrijft, de (terug)koppeling gemaakt met de wiskundige context zowel geometrisch als numeriek, inclusief het opstellen van de bijbehorende algebraïsche formules, het werken hiermee volgens de rekenregels in combinatie met verificatie, evidentie en bewijzen. Het aangepaste lesmateriaal moet goed leesbaar zijn en een herkenbare structuur hebben, het leerling-materiaal is gemaakt in MS Word en heeft een soortgelijke lay-out als de lesmethode, met dezelfde kleurstelling en dezelfde vormgeving voor bijvoorbeeld theorieblokken en voorbeelden.

8-3 Deel I: De syllabus definieert het zwaartepunt van een aantal punten als eindpunt van de plaatsvector die het gewogen gemiddelde is van de plaatsvectoren van die punten. Via de voorkennis over het berekenen van gemiddelden en gewogen gemiddelden van getallen, wordt overgegaan naar de gemiddelde positie en gewogen gemiddelde positie van punten/puntmassa's in een vlak d.m.v. de coördinaten (geometrisch zwaartepunt en massazwaartepunt), waarna vervolgens de link van de coördinaten naar de kentallen van de plaatsvectoren van de punten/puntmassa's gemaakt wordt. Waar het startpunt van de lesmethode twee puntmassa's op een lijn is, waarna uitbreiding plaatsvindt, kan hier juist makkelijk begonnen worden met meer punten (vanwege de rekentijd beperkt tot drie) liggend in een vlak, waarna dit teruggebracht kan worden naar minder punten of punten liggend op een lijn.

- Opgave 1: gewogen gemiddelde. Hier wordt gebruik gemaakt van de voorkennis van leerlingen in het berekenen van gemiddelde en gewogen gemiddelde cijfers. Belangrijk hierbij is het begrip dat elk cijfer voor een bepaald deel bijdraagt/meeweegt in de berekening van het gemiddelde cijfer. Om later de vergelijking met de vectorformule makkelijk te maken kan de berekening bij 1b als volgt geschreven worden: $\frac{3+2 \cdot 6+2 \cdot 7}{5} = \frac{1}{5} \cdot 3 + \frac{2}{5} \cdot 6 + \frac{2}{5} \cdot 7$.
- Opgave 2a: geometrisch zwaartepunt. Intuïtief kan hier heel goed de gemiddelde positie van de drie punten aangewezen worden. Analogie met opgave 1a zorgt ervoor dat de gemiddelde x - en y -coördinaat hier snel uit volgt.
Opgave 2b: massazwaartepunt. Combinatie van opgave 1b en 2a, de punten wegen nu verschillend mee in de gemiddelde positie, waarvoor de gewogen gemiddelde x - en y -coördinaten berekend moeten worden. De mate waarin de punten bijdragen in het zwaartepunt wordt hier gekoppeld aan het gewicht (de zwaarte/massa) van puntmassa's, ter koppeling met en introductie op de natuurkundige context.
- Theorie: Begripsdefinitie van de gebruikte zwaartepunt-termen, leidend naar het algemene gebruik van de term zwaartepunt.
- Voorbeeld: Hier wordt voor het geometrisch zwaartepunt uit opgave 2a de koppeling gemaakt tussen de coördinaten van de punten en de kentallen van de plaatsvectoren van die punten, waarna met behulp van berekeningen met concrete numerieke vectoren de

plaatsvector van het zwaartepunt bepaald wordt. Op basis van de rekenregels wordt hier in formulevorm getoond dat elke plaatsvector een bepaald deel bijdraagt/meeweegt in de berekening. Benadruk hier ook weer het verschil tussen kentallen en coördinaten.

- Opgave 3: Het massazwaartepunt uit opgave 2b moet hier in vector-formulevorm berekend worden.
- Theorie: Er is gekozen om de vector-formule uit de lesmethode te gebruiken om aansluiting bij de controlegroep te houden. Wel is een woordelijke definitie gegeven met de term gewogen gemiddelde uit de syllabus gecombineerd met de term puntmassa's uit de lesmethode en het leerling-materiaal. Voor veralgemenisering is het belangrijk dat de structuur van de concrete numerieke berekeningen uit de opgaven gekoppeld wordt aan de structuur van algebraïsche vector-formule.
- Opgaven 19 t/m 21 uit het leerboek sluiten aan bij het ontwerp en bij voorkennis uit voorgaande paragrafen wat betreft het werken met vector-formules.

8-3 Deel II: In dit deel wordt de koppeling gemaakt tussen het zwaartepunt en evenwicht in een natuurkundige context op basis van de voorkennis van leerlingen. Om tijd te besparen is een werkblad voor leerlingen gemaakt waar antwoorden meteen ingetekend kunnen worden. En vervolgens wordt de (terug)koppeling gemaakt met de wiskundige context zowel geometrisch als numeriek, inclusief het opstellen van de bijbehorende algebraïsche formules, het werken hiermee volgens de rekenregels en de bewijzen. Hierna wordt het zwaartepunt van drie puntmassa's in de hoekpunten van een driehoek behandeld, dit sluit aan bij deze paragraaf en kan gekoppeld worden aan het zwaartepunt in een driehoek (oppervlak) en dus ook naar de lesstof in 6 vwo, namelijk het zwaartepunt van veelhoeken met een homogene massaverdeling. Enkele extra opgaven zijn toegevoegd om te verdiepen en verbreden.

- Opgave 4: Het concept evenwicht wordt gekoppeld aan het begrip zwaartepunt en de betekenis in natuurlijke/natuurkundige context in zijaanzicht, zonder assenstelsel. Het aantal puntmassa's is hiervoor teruggebracht naar twee en (daardoor) liggend op een lijn. In deze context, de meest eenvoudige vorm, wordt het verschuivingsprincipe geïntroduceerd ter aansluiting bij het gevoel voor evenwicht van leerlingen en de natuurkundige voorkennis. Deze opgave combineert opgave 15 uit het leerboek, het combineren van massa's uit opgave 18 en het experimentele lesmateriaal van het cTWO (cTWO, 2011). Meestal wordt de verwarring tussen de massa (een eigenschap van de materie) van een object en het gewicht (maat voor de aantrekkingskracht) van een object voorkomen door het woord massa ook als zelfstandig naamwoord te gebruiken om het object aan te duiden in plaats van gewicht. Er is hier gekozen om gebruik te maken van het zelfstandig naamwoord "gewichten" voor de objecten in combinatie met de natuurkundige grootheid massa. De zinnen leken hierdoor beter te lopen, misschien omdat dit beter aansluit bij zowel de natuurlijke als de natuurkundige context.
- Opgave 4a: Dit is opgave 15a uit het boek. Hier moet gebruik gemaakt worden van de evenwichtsformule bij hefboomen.
- Opgave 4b: Hier moet de afstandsverhouding volgend uit de evenwichtsformule behouden blijven bij de verschuiving van de gewichten om het evenwicht te behouden.
- Opgave 4c: Hier moeten twee gewichten gecombineerd worden in het zwaartepunt, hierbij moet duidelijk worden dat niet alleen het evenwicht bewaard blijft, maar dat ook de totale massa in het ophangpunt gelijk blijft.
- Opgave 4d: Dit is opgave 15b uit het boek. Oefenopgave om de afstandsverhouding bij evenwicht te bepalen en om te rekenen naar de afstand.
- Opgave 4e: Oefenopgave waarbij de gewichten in 4d gecombineerd moeten worden.
- Opgave 5: In deze opgave wordt teruggekoppeld naar de wiskundige context, naar het bovenaanzicht in een assenstelsel. Ook wordt weer uitgebreid naar drie puntmassa's, nog wel op een lijn, ter introductie van het herhaaldelijk combineren. De opgave biedt

duidelijkheid over de notatie, er wordt een koppeling gemaakt van de notatievorm van plaatsvectoren en vectoren met kleine letters.

- Opgave 5a: Net zoals in het voorbeeld van opgave 4 moeten hier twee gelijke massa's gecombineerd worden, maar dan in een assenstelsel en met een expliciete koppeling naar de formule van het middelpunt uit paragraaf 8-2. In de uitwerkingen wordt de stap naar het wegwerken van de haakjes expliciet vermeld.
- Opgave 5b: Net zoals in opgave 4 moet gebruik gemaakt worden van de afstandsverhouding bij ongelijke massa's om het zwaartepunt te vinden, maar dan in een assenstelsel.
- Opgave 5c: Dit is opgave 16b en 16c in één met dezelfde moeilijkheidsgraad.
- Opgave 5d: De vraagstelling vraagt naar het werken met algebraïsche formules en koppelt deze aan de formule voor de plaatsvector van het evenwichtspunt. Dit zorgt voor koppeling tussen de natuurkundige en de wiskundige context en hierdoor voor verificatie.
- Opgave 5e: Hier wordt aangestuurd op de algemene geldigheid van de formule en evidentie hiervan vanwege de gelijke verhoudingen (massa en afstand).
- Opgave 6: De lesmethode (en dus de controlegroep) behandelt het (oppervlakte)zwaartepunt in een driehoek in de voorkennis en het zwaartepunt van drie gelijke puntmassa's in de hoekpunten van een driehoek in deze paragraaf. Wees goed bewust van het zwaartepunt in een driehoek als zijnde een oppervlaktezwaartepunt, wat natuurkundig gezien kan worden als een zwaartepunt van een oppervlak met homogene massaverdeling, die in het geval van een driehoek gemodelleerd kan worden als drie puntmassa's in de hoekpunten elk met een massa van $\frac{1}{3}$ van de totale massa van het oppervlak. Het zwaartepunt van een driehoek is voor leerlingen van deze klassen geen voorkennis, maar het bepalen van het zwaartepunt van veelhoeken komt wel terug in 6 vwo. Het zwaartepunt van drie puntmassa's in de hoekpunten van een driehoek kan zorgen voor een logische stap naar beide. De verhouding 2:1 van de zwaartelijnen wordt met behulp van massa's evident. De vertaling naar oppervlakte (met homogene massaverdeling) kan in deze paragraaf in de klassikale bespreking gemaakt worden of later in 6 vwo, tevens komt dit concept terug in opgave 8 van extra opgaven van het leerling-materiaal.
- Opgave 6a: Hier wordt een alternatieve manier van oplossen gevraagd, namelijk met het herhaaldelijk combineren van puntmassa's, voor het probleem uit opgave 2a van het leerling-materiaal. Voor de eerste combinatie wordt de meest makkelijke combinatie gegeven, waarna de tweede vraagt om het werken met verhoudingen, uiteindelijk gekoppeld aan coördinaten.
- Opgave 6b: Om verificatie en evidentie te krijgen over het feit dat de volgorde van het combineren niet uitmaakt voor de plaats van het zwaartepunt worden ook de andere mogelijke volgordes voor het herhaaldelijk combineren gevraagd inclusief een verklaring hiervoor. Het doel is niet een bewijs te leveren maar een intuïtieve onderbouwing zoals gegeven wordt in de uitwerkingen.
- Als uitdagende huiswerkopgave kan opgave 22 uit het boek gedaan worden, waar de koppeling van het zwaartepunt in een driehoek naar de plaatsvectoren in algebraïsche formulevorm gemaakt moet worden.
- Extra opgave 7: Deze opgave vraagt overzicht bij leerlingen, aan procedurele kennis hebben ze niets, het gaat om concept-begrip en dit kan dan ook als structurele vraag opgevat worden. Hier ligt echter wel een stukje proces-object dualiteit: het is heel goed mogelijk dat er leerlingen zijn die intuïtief deze vraag voorafgaand aan de paragraaf al kunnen beantwoorden, dus voordat zij de procedurele kennis bezitten. Door de plaatsing van de vraag achterin de paragraaf moet alsnog een stap (terug) gemaakt worden naar structureel.
- Extra opgave 8: Hier wordt de stap gemaakt naar het zwaartepunt van een veelhoek met een homogene massaverdeling. De procedure van het modelleren wordt helemaal uitgelegd, de clou van de opgave zit vooral in de slimme keuze voor de drie rechthoeken, maar ook en de verschillende oplossingsmogelijkheden voor de uiteindelijke bepaling van het zwaartepunt

zijn interessant. Bij overzicht over de lesstof zal gekozen worden voor drie rechthoeken met gelijk gewicht, waarna de positie van het zwaartepunt via het snijpunt van de zwaartelijnen bepaald kan worden, via herhaald combineren van de massa's of met behulp van een assenstelsel via plaatsvectoren. Bij puur procedureel handelen kan de keuze voor de rechthoeken anders uitpakken en in dat geval zal het zwaartepunt procedureel gevonden worden door herhaald combineren van massa's of met behulp van een assenstelsel via plaatsvectoren.

Binnen de gestelde eisen en mogelijkheden is getracht een zo goed mogelijk ontwerp te maken, maar er blijven probleempunten. In opgave 4 blijft het probleem met de overgang van vectoren als positie naar vectoren als kracht en vice versa bestaan. Hopelijk zorgt de eerste insteek met plaatsvectoren ervoor dat de massa's niet als krachtvector opgevat worden en kan hier in de klassikale les aandacht aan besteed worden. Voor opgave 5 geldt dat hier van leerlingen hetzelfde niveau van bewijzen gevraagd wordt als in de lesmethode. Hopelijk zorgen de vervangende opgaven over gelijkvormigheid in de voorkennis paragraaf en het meer aandacht besteden aan het bewijzen in het algemeen in dit hoofdstuk ervoor dat deze makkelijker op te lossen is door leerlingen.

Bijlage F – Leerling-materiaal paragraaf 8-3 (origineel)

Alternatief 8-3 Zwaartepunten en evenwicht

8-3 Zwaartepunten en evenwicht deel I

Opgave 1 gewogen gemiddelde

Een leerling heeft voor een vak drie cijfers: een 3, een 6 en een 7.

- a Wat is het gemiddelde cijfer en voor hoeveelste deel telt elk cijfer mee in het gemiddelde cijfer?

Voor een ander vak heeft de leerling dezelfde cijfers echter de 3 was een SO-cijfer dat 1x meetelt en de 6 en 7 een proefwerkcijfer die beide 2x meetellen.

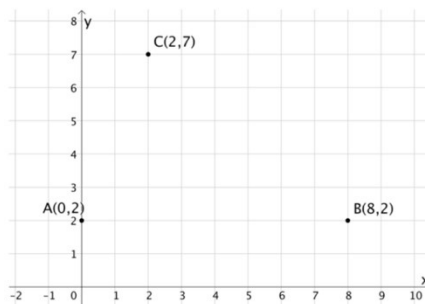
- b Wat is het gemiddelde cijfer en voor hoeveelste deel telt elk cijfer mee in het gemiddelde cijfer?

Een gemiddelde waarbij de zwaarte/weging van de onderdelen een rol speelt wordt een **gewogen gemiddelde** genoemd.

Opgave 2 geometrisch zwaartepunt en massazwaartepunt

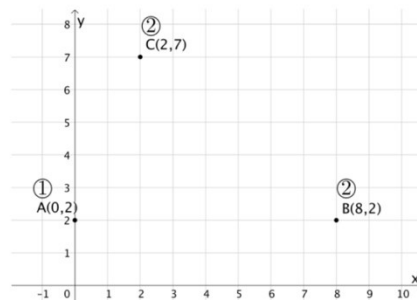
Gegeven zijn drie punten $A(0,2)$, $B(8,2)$ en $C(2,7)$.

- a Bepaal exact de gemiddelde positie van deze drie punten, het geometrisch zwaartepunt $G(\bar{x}, \bar{y})$.
Hierbij is $\bar{x}$ het gemiddelde van de x -coördinaten van de punten A , B en C en $\bar{y}$ het gemiddelde van de y -coördinaten.



We beschouwen de drie punten $A(0,2)$, $B(8,2)$ en $C(2,7)$ nu als puntmassa's. Puntmassa A heeft een massa van 1 en puntmassa's B en C beide een massa van 2.

- b Bepaal exact de coördinaten van het zwaartepunt $Z(\bar{x}, \bar{y})$ van de puntmassa's A , B en C .
Hierbij is $\bar{x}$ het gewogen gemiddelde van de x -coördinaten van de punten A , B en C en $\bar{y}$ het gewogen gemiddelde van de y -coördinaten. Je houdt hierbij dus rekening met de grootte van de massa's.



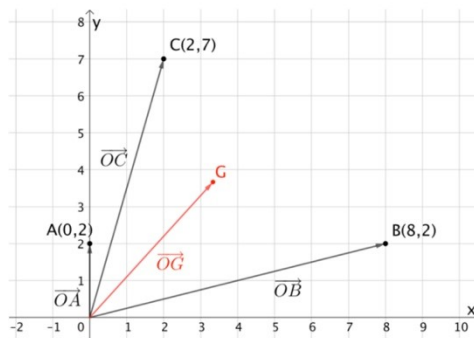
Het **geometrisch zwaartepunt** is de gemiddelde positie van een systeem van n punten.
Het **massazwaartepunt** is de gewogen gemiddelde positie van een systeem van n puntmassa's, waarbij de massa van elk punt het relatieve belang ervan aangeeft.
We kunnen in het algemeen van **zwaartepunt** spreken, een geometrisch zwaartepunt kan gezien kan worden als massazwaartepunt van n puntmassa's van gelijke massa.

Bepalen **zwaartepunt** m.b.v. plaatsvectoren.

Voorbeeld:

In opgave **2a** worden $\bar{x}$ en $\bar{y}$ los van elkaar berekend. Met behulp van plaatsvectoren kan dit als het ware in één keer:

Aangezien de kentallen van de plaatsvectoren $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$, en $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, gelijk zijn aan de coördinaten van de bijbehorende punten kunnen we de plaatsvector $\overrightarrow{OG}$ en daarmee punt G in één formule berekenen.



$$\overrightarrow{OG} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}}{3} = \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 11/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{3} \\ 3\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \text{dus } G(3\frac{1}{3}, 3\frac{2}{3}).$$

Door de formule m.b.v. de rekenregels anders te schrijven is goed te zien dat elke vector voor 1/3 deel meetelt in de berekening:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 11/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{3} \\ 3\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Opgave 3 Zwaartepunt met plaatsvectoren

Ook het zwaartepunt Z met de gewogen gemiddelden $\bar{x}$ en $\bar{y}$ uit opgave **2b** kan met behulp van plaatsvectoren berekend worden.

Bepaal de coördinaten van het zwaartepunt Z op deze manier. Hou hierbij rekening met de grootte van de puntmassa's.

Algemeen geldt voor een **systeem van n puntmassa's**:

Als zich in de punten $A_1, A_2, \dots, A_n$ de massa's $m_1, m_2, \dots, m_n$ bevinden met zwaartepunt Z , dan is $\vec{z} = \frac{m_1}{m} \cdot \vec{a}_1 + \frac{m_2}{m} \cdot \vec{a}_2 + \dots + \frac{m_n}{m} \cdot \vec{a}_n$, waarbij $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

Het zwaartepunt van een systeem van puntmassa's is het eindpunt van de plaatsvector die het gewogen gemiddelde is van de plaatsvectoren van die puntmassa's.

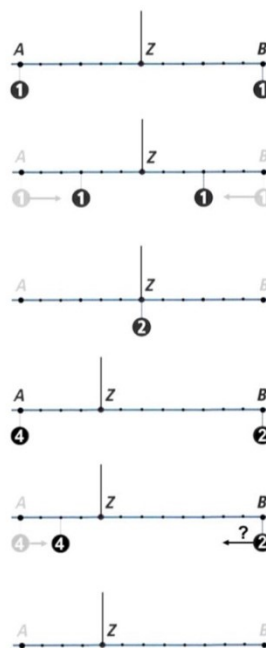
Huiswerk: Maak opgaven 19 t/m 21 uit het boek.

8-3 Zwaartepunten en evenwicht deel II

Opgave 4 Evenwicht

In de figuur hiernaast is de situatie weergegeven van twee gewichten, beide met massa 1, die in de punten A en B aan een massaloze staaf zijn gehangen. De staaf wordt opgehangen in een ophangpunt Z . Als $AZ = BZ$, hangt de staaf in evenwicht en heet het ophangpunt het evenwichtspunt ofwel zwaartepunt. Het evenwicht wordt niet verstoord als deze twee gewichten in tegengestelde richting over dezelfde afstand verplaatst worden, op deze manier zijn beide gewichten ook te combineren/vervangen tot één gewicht met gecombineerde massa 2 in het zwaartepunt.

- Leg uit dat in de figuur hiernaast met een gewicht met massa 4 in A en een gewicht met massa 2 in B bij evenwicht geldt dat $AZ : BZ = 1 : 2$.
- Vervolgens is het gewicht met massa 4, twee posities verschoven. Teken de plaats waar het gewicht met massa 2 heen geschoven moet worden om het evenwicht te behouden.
- Combineer in de laatste figuur beide gewichten tot één gewicht en vermeld de massa.
- Gegeven is net zo'n staaf met in punt A een gewicht met massa 4 en in punt B een gewicht met massa 10. Verder is gegeven dat $AB = 7$. Teken deze situatie en teken de plaats van het ophangpunt Z zodat de staaf in evenwicht hangt. Hoe lang is AZ ?
- Combineer beide gewichten uit d tot één gewicht, teken de plaats van dit gewicht en vermeld de massa.



Het **evenwichtspunt** ofwel **zwaartepunt** is het ophangpunt waarbij een massaloze staaf met gewichten in evenwicht is.

Algemeen geldt: Het **zwaartepunt** van een aantal puntmassa's is het punt ten opzichte waarvan de puntmassa's in **evenwicht** zijn.

Schuifprincipe: een evenwicht van puntmassa's aan een massaloze staaf wordt niet verstoord als twee puntmassa's tegengesteld aan elkaar verplaatst worden, zodanig dat de afstandsverhoudingen behouden blijven.

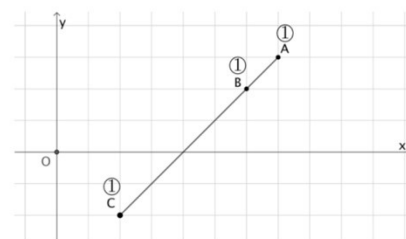
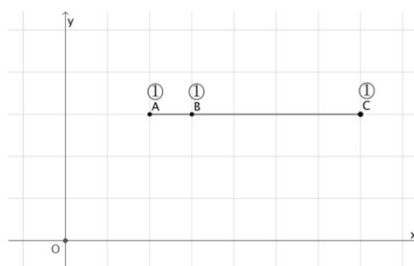
Algemeen geldt: Twee puntmassa's met massa a en b kun je op deze manier **combineren** tot één puntmassa in het zwaartepunt van beide punten met een totale massa van $a + b$.

Opgave 5 meerdere massa's op één lijn

Hiernaast is een massaloze staaf met drie gewichten, oftewel puntmassa's, in een assenstelsel getekend. Je kijkt nu als het ware bovenop de staaf. De puntmassa's in de punten A , B en C hebben allen een massa van 1. Er geldt $AB:BC = 1:4$.

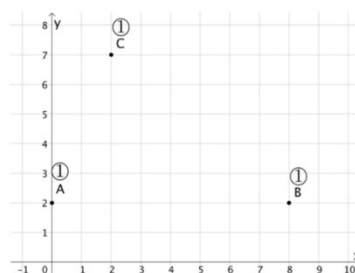
En $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OM} = \vec{m}$ en $\overrightarrow{OZ} = \vec{z}$.

- ✂ a Combineer eerst B en C in punt M , teken punt M . Waarom geldt $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$?
- ✂ b Combineer daarna M en A in punt Z , teken punt Z .
- ✂ c Teken $\vec{m}$ en $\vec{a}$ en vervolgens door punt Z lijnen evenwijdig aan $\vec{m}$ en $\vec{a}$. Laat met behulp van gelijkvormigheid zien dat $\vec{z} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{m}$.
- d Werk de formule voor $\vec{z}$ uit zodat deze alleen de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ bevat. Controleer je antwoord m.b.v. de formule na opgave 3.
- e Waarom geldt in de tekening hiernaast dezelfde formule als bij 4d?

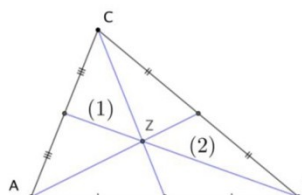

Opgave 6 zwaartepunt driehoek

We bekijken nogmaals de drie punten/puntmassa's uit opgave 2a $A(0,2)$, $B(8,2)$ en $C(2,7)$, elk met massa 1.

- ✂ a Bepaal nu zonder vectoren het zwaartepunt Z . Combineer in de figuur hiernaast daarvoor eerst A en B tot punt M en combineer M vervolgens met C . Vermeld de massa's van M en Z en leg uit hoe je aan de coördinaten komt.
- ✂ b Onderzoek wat er gebeurt als je eerst B en C of A en C combineert. Geef een verklaring hiervoor.



Een **zwaartelij**n in een driehoek is een lijnstuk dat een hoekpunt verbindt met het midden van de overstaande zijde. De drie zwaartelijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt: het **zwaartepunt**. Het zwaartepunt verdeelt elke zwaartelij n in twee delen die zich verhouden als 2:1.



Maak opgave 22 uit het boek.

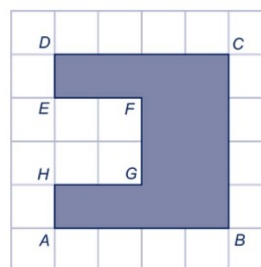
Extra: opgave 7

Bedenk een systeem van 4 of meer puntmassa's waarvan je het evenwichtspunt weet zonder te rekenen of schuiven.

Extra: opgave 8 Zwaartepunt bij homogene gewichtsverdeling

Gegeven is veelhoek $ABCDEFGH$. Zie de figuur. Elk hokje van het raster heeft een lengte en breedte van 1. Bij de veelhoek is sprake van een homogene gewichtsverdeling, dat wil zeggen dat elk hokje van de veelhoek even zwaar is.

Om het zwaartepunt van de veelhoek te vinden, kan de veelhoek worden verdeeld in drie rechthoeken. Elk van deze drie rechthoeken kan worden opgevat als een puntmassa in het zwaartepunt van de rechthoek, met als massa het aantal hokjes van de rechthoek. Het zwaartepunt van de drie puntmassa's valt dan samen met het zwaartepunt van de veelhoek.



✂ Bepaal het zwaartepunt van de veelhoek.

Uitwerkingen 8-3 Zwaartepunten en evenwicht

Opgave 1

- a $\text{gemiddelde cijfer} = \frac{3+6+7}{3} = \frac{16}{3} \approx 5,3$. Elk cijfer telt $\frac{1}{3}$ deel mee.
- b $\text{gemiddelde cijfer} = \frac{3+2 \cdot 6+2 \cdot 7}{5} = \frac{29}{5} \approx 5,8$. De 3 telt $\frac{1}{5}$ deel mee en de 6 en 7 elk $\frac{2}{5}$ deel.

Opgave 2

- a $\bar{x} = \frac{0+8+2}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ en $\bar{y} = \frac{2+2+7}{3} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$
 Dus $G(\bar{x}, \bar{y}) = (3\frac{1}{3}, 3\frac{2}{3})$.
- b $\bar{x} = \frac{0+2 \cdot 8+2 \cdot 2}{5} = \frac{20}{5} = 4$ en $\bar{y} = \frac{2+2 \cdot 2+2 \cdot 7}{5} = \frac{20}{5} = 4$
 Dus $Z(\bar{x}, \bar{y}) = (4, 4)$.

Opgave 3

$$\vec{OZ} = \frac{\binom{0}{2} + 2 \cdot \binom{8}{2} + 2 \cdot \binom{2}{7}}{5} = \frac{1}{5} \cdot \binom{0}{2} + \frac{2}{5} \cdot \binom{8}{2} + \frac{2}{5} \cdot \binom{2}{7} = \binom{0}{2/5} + \binom{16/5}{4/5} + \binom{4/5}{14/5} = \binom{20/5}{20/5} = \binom{4}{4}.$$

of

$$\vec{OZ} = \frac{\binom{0}{2} + 2 \cdot \binom{8}{2} + 2 \cdot \binom{2}{7}}{5} = \frac{\binom{0}{2} + \binom{16}{4} + \binom{4}{14}}{5} = \frac{\binom{20}{20}}{5} = \frac{1}{5} \cdot \binom{20}{20} = \binom{4}{4}.$$

Punt Z is het eindpunt van de plaatsvector $\vec{OZ}$, dus $Z(4, 4)$.

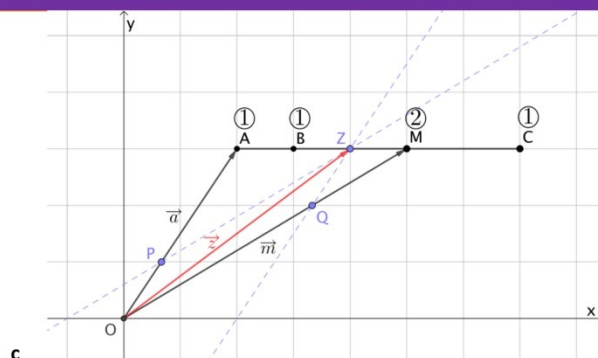
Opgave 4

- a Uit de natuurkunde ken je de wet $(kracht \times arm)_{links} = (kracht \times arm)_{rechts}$ voor evenwicht. Met $kracht = m \cdot g$ wordt dit:
 $m_A \cdot g \cdot AZ = m_B \cdot g \cdot BZ$, hieruit volgt $\frac{AZ}{BZ} = \frac{m_B \cdot g}{m_A \cdot g} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ oftewel $AZ : BZ = 1 : 2$.
- b Het gewicht moet vier posities naar links geschoven worden.
- c Het gewicht bevindt zich op de positie van het zwaartepunt en heeft een massa van $4 + 2 = 6$.
- d Er geldt $\frac{AZ}{BZ} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$, dus $AZ = \frac{5}{2} \cdot AB = \frac{5}{2} \cdot 7 = 5$
- e Het gewicht bevindt zich op de positie van het zwaartepunt en heeft een massa van $4 + 10 = 14$.

Opgave 5

- a $\frac{BM}{CM} = \frac{m_C}{m_B} = \frac{1}{1}$, punt M bevindt zich precies midden tussen punt B en C. Voor het midden M van een lijnstuk BC geldt: $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC})$, dus $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$.
- b $\frac{AZ}{MZ} = \frac{m_M}{m_A} = \frac{2}{1}$, punt Z bevindt $\frac{2}{3} \cdot AM = \frac{2}{3} \cdot 3 \text{ hokjes} = 2 \text{ hokjes}$ rechts van A.

Alternatief 8-3 Zwaartepunten en evenwicht



c

Er geldt: $\vec{z} = \vec{OP} + \vec{OQ}$

$PZ \parallel OM$, dus $\angle AOM = \angle APZ$ (F-hoeken) en $\angle A = \angle A$.

Dus $\triangle OAM \sim \triangle PAZ$ (2 gelijke hoeken)

Oplossing 1:

$$\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{PA}} = \frac{AM}{AZ} \quad \text{Vul in:} \quad \frac{\vec{a}}{\overrightarrow{PA}} = \frac{AM}{\frac{2}{3} \cdot AM}$$

$$\vec{a} \cdot \frac{2}{3} \cdot AM = \overrightarrow{PA} \cdot AM, \text{ dus } \overrightarrow{PA} = \frac{2}{3} \cdot \vec{a},$$

$$\text{dan is } \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3} \cdot \vec{a}.$$

Oplossing 2:

Vermenigvuldigingsfactor van groot naar klein is $\frac{2}{3}$.

Dus $\overrightarrow{PA} = \frac{2}{3} \cdot \vec{a}$, dan

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3} \cdot \vec{a}.$$

$OA \parallel QZ$, dus $\angle OAM = \angle QZM$ (F-hoeken) en $\angle M = \angle M$.

Dus $\triangle OAM \sim \triangle QZM$ (2 gelijke hoeken)

Oplossing 1:

$$\frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{QM}} = \frac{AM}{ZM} \quad \text{Vul in:} \quad \frac{\vec{m}}{\overrightarrow{QM}} = \frac{AM}{\frac{1}{3} \cdot AM}$$

$$\vec{m} \cdot \frac{1}{3} \cdot AM = \overrightarrow{QM} \cdot AM, \text{ dus } \overrightarrow{QM} = \frac{1}{3} \cdot \vec{m},$$

$$\text{dan is } \overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3} \cdot \vec{m}.$$

Oplossing 2:

Vermenigvuldigingsfactor van groot naar klein is $\frac{1}{3}$.

Dus $\overrightarrow{QM} = \frac{1}{3} \cdot \vec{m}$, dan

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3} \cdot \vec{m}.$$

Invullen geeft: $\vec{z} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3} \cdot \vec{a} + \frac{2}{3} \cdot \vec{m}.$

d $\vec{z} = \frac{2}{3} \vec{m} + \frac{1}{3} \vec{a}$ en $\vec{m} = \frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{c})$ geeft:

$$\vec{z} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{c}) \right) + \frac{1}{3} \vec{a} = \frac{1}{3} (\vec{b} + \vec{c}) + \frac{1}{3} \vec{a} = \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c} + \frac{1}{3} \vec{a} \left(= \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c} \right)$$

Controle: $\vec{z} = \frac{m_1}{m} \cdot \vec{a}_1 + \frac{m_2}{m} \cdot \vec{a}_2 + \dots + \frac{m_n}{m} \cdot \vec{a}_n$ met $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$

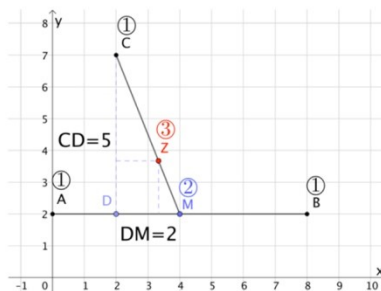
Voor drie punten met plaatsvectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$, elk met een massa van 1 geldt dan:

$$m = 1 + 1 + 1 = 3, \text{ dus } \vec{z} = \frac{1}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \vec{c}$$

e De verhoudingen tussen de lijnstukken is hetzelfde: $AB:BC = 1:4$.

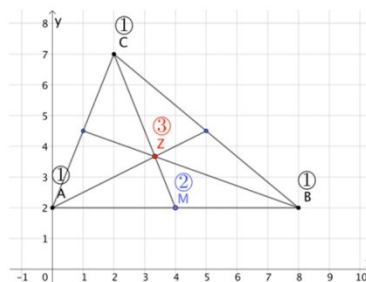
Opgave 6

- a Combineren van A en B:
 $AM:BM = m_B:m_A = 1:1$,
 dus punt M midden tussen A en B,
 geeft $M(4,2)$ met massa $1+1=2$.
 Combineren M en C:
 $CZ:MZ = m_M:m_C = 2:1$,
 x -coördinaat van Z is $2 + \frac{2}{3} \cdot DM = 2 + \frac{2}{3} \cdot 2 = 3\frac{1}{3}$.
 y -coördinaat van Z is $2 + \frac{1}{3} \cdot CD = 2 + \frac{1}{3} \cdot 5 = 3\frac{2}{3}$.
 Dus $Z(3\frac{1}{3}, 3\frac{2}{3})$ met massa $2+1=3$.



- b De lijn vanuit B naar het midden van AC en de lijn vanuit A naar het midden van BC, snijden elkaar en de lijn vanuit C naar het midden van AB in het zwaartepunt Z. Het zwaartepunt moet op alle drie de lijnen liggen, dit kan alleen als er een gezamenlijk snijpunt is.

Verder maakt het voor het evenwicht niet uit in welke volgorde puntmassa's samengevoegd worden. Bij het ophangen van meerdere gewichten maakt het immers voor de uiteindelijke plaats van het zwaartepunt ook niet uit of je de gewichten één voor één ophangt in welke volgorde dan ook (en vervolgens combineert) of allemaal tegelijkertijd.



Extra: opgave 7

Bijvoorbeeld de hoekpunten van een rechthoek met gelijk gewicht. Het zwaartepunt ligt op het snijpunt van de diagonalen.

Extra: opgave 8

Verdeling in drie rechthoeken bijvoorbeeld zoals in de figuur hiernaast. Er zijn ook andere verdelingen mogelijk. In dit geval zijn alle rechthoeken even groot en dus even zwaar, plaats drie puntmassa's P_n in het zwaartepunt van de rechthoeken (snijpunt van de diagonalen) elk met massa 1.

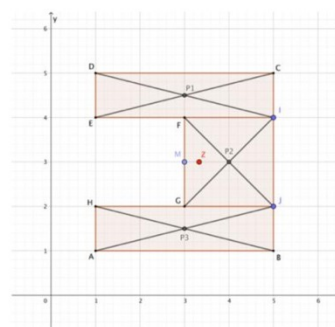
Oplossing 1 in assenstelsel met vectoren:

$$m = 1 + 1 + 1 = 3, \text{ dus } \vec{z} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{3} \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ dan geldt } Z(3\frac{1}{3}, 3)$$

Oplossing 2 combineren puntmassa's:

Combineer P_1 en P_3 in punt M het midden van lijnstuk P_1P_3 met een massa van $1 + 1 = 2$.

$$MZ:P_2Z = m_{P_2}:m_M = 1:2, \text{ dus } MZ = \frac{1}{3} \cdot MP_2.$$



Alternatief 8-3 Zwaartepunten en evenwicht

Bronnen

Opgave 4a en 4d: Hoofdstuk 8 Vectoren opgave 15 (aangepast)

Opgave 5: Hoofdstuk 8 Vectoren opgave 16 en 18 (aangepast)

Opgave 6: Hoofdstuk 8 Vectoren opgave 18 (aangepast)

In H. Bakker, B. Boon, D. Bos, B. van Dijk, W. Doekes, N. Gietema, . . . C. Wallien, Moderne Wiskunde 4 vwo B (pp. 198-223). Groningen/Houten: Noordhoff Uitgevers bv.

Opgave 4b, 4c en 4e: Hoofdstuk 2 Paragraaf 2 Op zoek naar evenwicht (aangepast)

cTWO. (2011, augustus). De kracht van vectoren. cTWO.

[http://www.fi.uu.nl/ctwo/lesmateriaaldir/ExperimenteelLesmateriaal/VWO%20Wiskunde%20B/Gereviseerd\(najaar2011\)/Hoofdstuk2/2_De_kracht_van_vectoren_dec2011.pdf](http://www.fi.uu.nl/ctwo/lesmateriaaldir/ExperimenteelLesmateriaal/VWO%20Wiskunde%20B/Gereviseerd(najaar2011)/Hoofdstuk2/2_De_kracht_van_vectoren_dec2011.pdf)

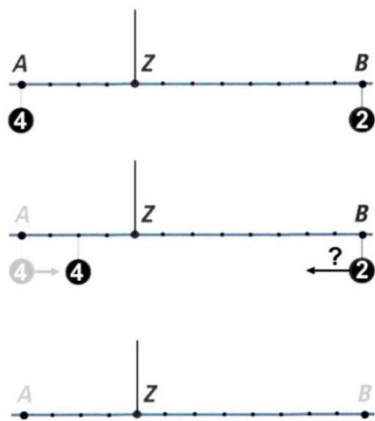
Opgave 8: H5.8 Extra opgaven. Opgave 7 (aangepast).

Stercollectie wiskunde van de Wageningse Methode: 4VB H5 De kracht van vectoren.

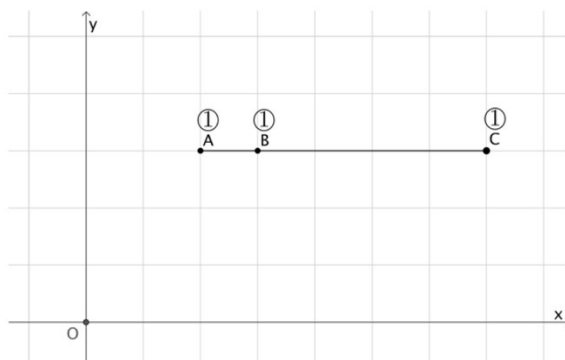
http://wm.math4allview.appspot.com/view?comp=lj4-v-b-h05&subcomp=lj4-v-b-h05-08&variant=basis_wm&item=1&comp=lj4-v-b-h05&subcomp=lj4-v-b-h05-08&variant=basis_wm&item=1

8-3 Zwaartepunten en evenwicht

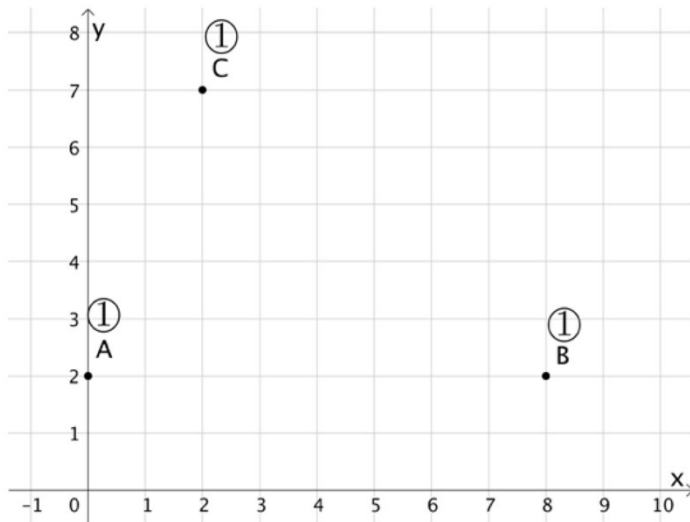
Opgave 4b en c



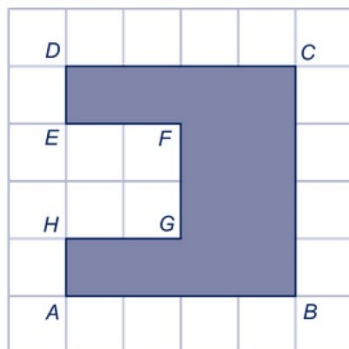
Opgave 5 meerdere massa's op één lijn



Opgave 6 zwaartepunt driehoek



Extra: opgave 8 Zwaartepunt bij homogene gewichtsverdeling



Bijlage G – Verzamelbestand uitvoering lessenserie

Totale aantal lessen voor hoofdstuk 8

- Controlegroep: 9 lessen, waarvan 3x2 blokken (5e en 6e uur). Oorspronkelijk waren dit 10 lessen.
- Testgroep: 10 lessen, waarvan 3x2 uren op dezelfde dag (3e en 6e uur), voor paragraaf 8-3 zijn twee uren op dezelfde dag gebruikt.

Aanwezigheid en rol onderzoeker

- Controlegroep: de onderzoeker heeft 3 lessen geobserveerd.
- Testgroep: de onderzoeker heeft 8 lessen geobserveerd en de dubbele les van paragraaf 8-3 uitgevoerd.

Paragraaf 8-V

<i>Onderwerp</i>	<i>Docent controlegroep</i>	<i>Docent testgroep</i>	<i>Opmerkingen onderzoeker</i>
Pythagoras	Getalvoorbeeld en algemene formule	Geen	Testgroep: de docent vindt het niet nodig dit klassikaal te behandelen: dit hoort geen probleem meer te zijn.
Goniometrie	Tabel exacte waarden	Geen	Testgroep: de docent vindt het niet nodig dit klassikaal te behandelen: dit hoort geen probleem meer te zijn.
Zwaartelijn en zwaartepunt driehoek	Verhouding en V-7 (boek)	X	
Gelijkvormigheid	X	twee voorbeelden gelijkvormigheid: Z- en F- hoeken	
Zelfstandig werken in de les	-	-	Opgave V-7 (printblad): notatie hoeken in de vorm $\angle CAB$ in plaats van $\angle A_1$ etc. is niet zo bekend bij leerlingen.
Huiswerk	V-1, V-3, V-4, V-5, V-6 (V-6cd extra), V-8 (boek)	V-1, V-2, V-4, V-5, V-6, V-7 (printblad) en V-8 (printblad)	

Paragraaf 8-1

<i>Onderwerp</i>	<i>Docent controlegroep</i>	<i>Docent testgroep</i>	<i>Opmerkingen onderzoeker</i>
Herhalen 8-V / huiswerk	Geen, huiswerk niet besproken	Geen, huiswerk niet besproken	

Vervolg paragraaf 8-1

Introductie vector	Uitleg vector meteen in assenstelsel (met $\vec{a}_x$ en $\vec{a}_y$), lengte (met berekening), tegengestelde richting, notatie met kleine letters	Termen en afspraken, II maken opgave 1, uitleg vector met nadruk op effect, lengte, tegengestelde richting, notatie $\vec{AB}$	Docent controlegroep: 8-1 en 8-2 in blokuur. Docent controlegroep met assenstelsel en docent testgroep zonder assenstelsel.
Som- en verschilvector	Kop-staart-methode	Kop-staart-methode en parallellogram-methode naast elkaar	Docent testgroep behandelt de parallellogram-methode en de kop-staart-methode naast elkaar.
Nulvector	nee	ja	
Equivalentie	nee	nee	
Commutativiteit	nee	ja	
$k \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{a} = (k + m) \cdot \vec{a}$	nee	Via opmerking leerling: $2\vec{p} + 3\vec{p} = 5\vec{p}$	
Zelfstandig werken in de les	3, 4 (in de les voldoende tijd voor hw)	1 voorafgaand aan de eerste klassikale uitleg, daarna 2 en 3. Na de tweede klassikale uitleg 4 (in de les voldoende tijd voor hw)	Opgave 1: II tekenen de dozen niet, let op aangrijpingspunt! Opgave 3,4: II tekenen eerst de vectoren uit één punt (als krachten), daarna pas kop-staart. II tekenen geen resultaatvector. II tekenen de resultaatvector van eindpunt naar beginpunt in plaats van andersom. Opgave 4d: II hebben moeite met werkvolgorde met tekenen. En tekenen alle stappen door elkaar heen. II werkt eerst haakjes weg in formule en doet tekeningcontrole: distributiviteit.
Terugkoppeling	Planning opgave 4, maar niet gedaan?		
Huiswerk	2 t/m 7	1 t/m 7	Leerlingen hebben geen werkboek en moeten de opdrachten uitgeprint krijgen (docent testgroep) of zelf tekenen.

Paragraaf 8-2

Onderwerp	Docent controlegroep	Docent testgroep	Opmerkingen onderzoeker
Herhalen 8-1 / huiswerk	Benadrukt lengte en richting vectoren.	Opgave 4d: tekenen en algebraïsch, benadrukt dat het resultaat 1 (lange) resultaatvector is. Opgave 5: nulvector, geen II die het wist.	Docent controlegroep: blokkur met 8-1 Docent testgroep: gebruikt pijltjes op smartbord: copy-paste, bij tegengestelde vectoren omdraaien en dan kop-staart plaatsen. Staat heel "clean" op het bord, tekenen resultaatvector heel eenvoudig. In het schrift werkt dit wat anders, veel door/naast elkaar!
Vectoren in een assenstelsel	Voorbeelden: Kentallen. Rekenregels boek met numeriek voorbeeld en tekencontrole. Ook verschilvector. Lengte vorige les al gedaan. introdunctie plaatsvectoren met $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$	Voorbeelden: Kentallen. Plaatsvector: kentallen en lengte. Rekenregels uit boek met numeriek voorbeeld en tekencontrole. Middelpunt: bewijs met parallellogram.	Notatie kolomvector: nieuw voor II. Testgroep: verwarring bij II met $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, de docent benadrukt: het is geen breuk en geen coördinaat. Controlegroep: II vraagt "is vector a altijd $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?" Docent controlegroep: middelpunt is niet behandeld. Bewijs middelpunt docent testgroep ging makkelijk, een II gaf de suggestie voor optellen plaatsvectoren.
Ontbinden in vectoren	Vorige les al gedaan	-	
Zelfstandig werken in de les	(in de les veel tijd voor hw)	(in de les voldoende tijd voor hw)	
Terugkoppeling	Samenvatting les	-	
Huiswerk	8 t/m 14	8 t/m 14	Opgave 11a: fout in uitwerkingenboek

Paragraaf 8-3

De docent van de testgroep had er minder vertrouwen in de aanpassingen ten opzichte van paragraaf 8-3 uit te voeren zoals deze de bedoeling waren. Deze zijn dan ook door de onderzoeker verwerkt in de eigen lesvoorbereiding en uitgevoerd, de leerlingen waren al dusdanig aan de onderzoeker gewend dat ingeschat is dat wisseling van docent geen negatieve rol meer zou spelen.

Onderwerp	Docent controlegroep	Docent testgroep (voornamelijk de onderzoeker)	Opmerkingen onderzoeker
Herhalen 8-2 / huiswerk	Geen	Opgave 14ab. Docent gebruikt term componenten.	Testgroep: alleen dit deel is door de eigen docent uitgevoerd. LI komen met doorvragen van de docent wel op de tweede oplossing van 14b.
Zwaartepunt en evenwicht	Intro met lijn met massa's: waar ligt het zwaartepunt? Bewijs 16cd (boek) op het bord met gelijkvormigheid. Opgave 18 (boek) samen met II. (goed bekijken voor verwerking) Formule systeem van n puntmassa's: zelfstandig door leerlingen.	Les 4a: Intro formule systeem van n puntmassa's d.m.v. gewogen gemiddelde (positie). (alternatief printblad) Les 4b: Evenwicht met lijn met massa's. Verschuiven en samennemen massa's. (alternatief printblad en werkblad)	Testgroep: beide lessen vallen op dezelfde dag. Volgens de eigen docent werken deze lessen slechts als anderhalve les. Binnen het lesrooster was het mogelijk beide lessen te gebruiken. Het lesmateriaal (exclusief de extra opgaven) is voorafgaand aan de les uitgedeeld. De uitwerkingen waren in de les te raadplegen. Testgroep: Les 4a: II vonden het haast te makkelijk. Gevaar voor te weinig oefening met formule. Testgroep: Les 4b, het evenwicht met massa's aan staaf ging prima. Enkele II met TP (Technology Program) gebruik zelfs de term moment.
Zelfstandig werken in de les	-	Les 4a: 1, 2, 3 (alle van printblad) Les 4b: 4 en 5.	

Vervolg paragraaf 8-3

Terugkoppeling	-	Les 4a: 1, 2, 3 (alle van printblad) Les 4b: Opgave 5: aanzet gelijkvormigheid	Testgroep: II vinden de blikwisseling naar bovenop de staaf kijken lastig. Combineren van gewichten is in 5ab ineens weer lastig. LI weten niet hoe ze de gelijkvormigheid moeten “vinden”/aanpakken. Kunnen niet terugwerken vanuit de gekregen formule.
Huiswerk	15, 16ab, 17, 19 t/m 22 (alle uit boek)	Les 4a: 19 t/m 21 (alle uit boek) Les 4b: 4 t/m 6 (printblad) en 22ab (boek), variant op 22c	Eigen docent testgroep: Om een idee te krijgen van het werk van de leerlingen heeft de docent van de testgroep een variant op 22c gemaakt en uitgedeeld. Deze opgave moesten de leerlingen als extra huiswerk de les erna inleveren.

Overige opmerkingen testgroep paragraaf 8-3

Er zijn leerlingen die niet als eerste keus de formule voor het zwaartepunt gebruiken, maar juist de natuurkundige aanpak van het samennemen van massa's. Dit vonden sommige medeleerlingen “raar”, waarna de onderzoeker heeft benadrukt dat beide methodes correct zijn en gebruikt mogen worden, maar dat het verstandig is beide te kunnen, omdat in verschillende contexten de ene handiger kan zijn dan de andere.

Door een vraag van een leerling over wat nou precies bewijzen is, heeft de onderzoeker het daar klassikaal kort over gehad. Vrij opgeschreven: “Bewijs is als je je peers, in dit geval je medeleerlingen, kunt overtuigen dat iets zo is en niet anders. En dan mag je gebruik maken van alle kennis die je tot dan toe gehad hebt. Het soort bewijs verandert echter naarmate je verder bent.” Als voorbeeld heeft de onderzoeker de leerlingen gevraagd of de commutatieve eigenschap $a + b = b + a$ bewezen wordt door het getalvoorbeeld $5 + 2 = 2 + 5$ te nemen en te stellen dat het klopt, omdat $5 + 2$ en $2 + 5$ allebei 7 zijn. De klas was het eens dat dit niet voldoende was, aangezien dit niet algemeen genoeg was. Vervolgens als voorbeeld een lijnstuk met willekeurige lengte c . Als dit in twee willekeurige stukken a en b gedeeld wordt, dan maakt voor de totale lengte niet uit of a voor b of b voor a geplaatst wordt. De leerlingen gaven aan dat ze het begrepen, maar waren niet zeker of ze dit zelf zouden kunnen verzinnen, hierbij heeft de onderzoeker aangegeven dat het leveren van bewijs ook niet makkelijk is en hiervoor minstens voldoende kennis van de betreffende lesstof nodig is.

Overige opmerkingen controlegroep paragraaf 8-3

Tijdens een observatie hoorde de onderzoeker een aantal leerlingen zeggen dat het niet eerlijk was, want de andere klas had printjes gekregen en dat was allemaal veel makkelijker geweest.

Behandeling huiswerk paragraaf 8-3

Testgroep: opgave 5 en 6 van het ontwerp zijn behandeld. Opgave 15 bestaat uit opgave 16cd uit het boek en een deel van opgave 18. Leerlingen vinden het bewijzen met de gelijkvormigheid heel lastig, zelfs als het voorgedaan wordt. Ze geven aan dat ze er nooit op zouden komen, maar lijken het ook wel heel snel op te geven. Het opvolgen van de instructie twee evenwijdige lijnen te tekenen, is door een heel aantal leerlingen helemaal niet gedaan. Het lijkt erop dat leerlingen denken dat dit vanwege het onderzoek “extra” moeilijk gemaakt is, want wanneer de leerlingen verteld wordt dat dezelfde opgave ook in het boek zit, wordt daarvan opgekeken, dat hadden ze niet verwacht. Opgave 6 met het combineren van gewichten en de zwaartelijnen in een driehoek kunnen ze beter volgen. Al met al neemt het bespreken van het huiswerk vrij veel tijd in beslag.

Bijlage H – Interviewleidraden (geanonimiseerd origineel)

Interviewleidraad leerlingen

Interview leidraad leerlingen (geanonimiseerd)

Het interview is opgezet al een gestructureerd interview met open en gesloten vragen op basis van (van der Donk & van Lanen, 2016).

Let op!

- Denk aan pauzemomenten.
- Hou het boek (en vervangende lesstof) erbij als geheugensteun.

Inleiding

Doel van het interview:

Ik wil graag weten wat je van het onderwerp vectoren vond en dan vooral van de aangeboden lesstof. Over het niveau, de (logische) opbouw (continuïteit), de klassikale uitleg en het boek (en aanpassingen hierop). Waren er bijvoorbeeld dingen die je hielpen of juist niet de stof te begrijpen. Ik ga stap voor stap specifiek vragen langs met ruimte voor opmerkingen.

Vastleggen gesprek en toestemming:

Ik schrijf de antwoorden meteen op en controleer tijdens het interview bij de open vragen en antwoorden of ik het goed begrepen heb. Voor de zekerheid neem ik het op, als ik toch nog iets terug wil luisteren.

Naam leerling:

VRAAG: Ga je akkoord met het interview en de opname hiervan?

Ja / nee

Je mag op ieder moment gedurende het interview besluiten geen antwoord op een vraag te geven of helemaal te stoppen.

Anonimiteit en terugkoppeling resultaten:

Je antwoorden worden anoniem opgeslagen en verwerkt, alleen in welke klas je zit wordt genoteerd, dit is nodig voor de vergelijking. Terugkoppeling van de resultaten is dit schooljaar vanwege de vakantie wat lastig, maar volgend jaar kun je ernaar vragen bij je docent.

Tijdsduur:

Het interview duurt ongeveer 20-30 minuten.

VRAAG: Heb je nog vragen over de procedure/het interview?

Vervolg interviewleidraad leerlingen

Algemeen

VRAAG: In welke klas zit je?

Groep 2 / Groep 1 (controlegroep).

VRAAG: Hoe moeilijk of makkelijk vond je het onderwerp vectoren ten opzichte van de rest van het jaar?

Veel makkelijker / makkelijker / gelijk / moeilijker / veel moeilijker

VRAAG: Kun je dat nog toelichten? Waren er bepaalde aspecten makkelijker/moeilijker? Zo ja, welke? En waarom?

VRAAG: In hoeverre denk je dat je op dit moment de lesstof beheerst wat betreft het toepassen van formules en regels?

Goed / redelijk / niet zo goed

VRAAG: In hoeverre denk je dat je op dit moment de lesstof beheerst wat betreft inzicht (echt begrijpen)?

Goed / redelijk / niet zo goed

OPTIONEEL: Is er iets dat je echt niet begrijpt/kunt of iets dat je juist heel goed begrijpt?

VRAAG: Vond je het onderwerp vectoren leuker of minder leuk ten opzichte van de rest van het jaar?

Veel leuker / leuker / gelijk / minder leuk / veel minder leuk.

VRAAG: Kun je dat nog toelichten? Waren er bepaalde aspecten leuker/minder leuk? Zo ja, welke? En waarom?

Vervolg interviewleidraad leerlingen

Continuïteit

Met continuïteit wordt hier bedoeld de mate waarin de lessen en leerstof op een logische manier op elkaar aansluiten. Denk hierbij aan de klassikale uitleg, maar ook het boek en de opgaven e.d.

VRAAG: Hoe vond je dat het hoofdstuk liep? (continuïteit binnen het hoofdstuk?) Denk aan: logische opbouw van de paragrafen, terugkoppeling? Of juist rare sprongen, buitenbeentjes, gaten erin, missende voorkennis. Welke paragrafen?

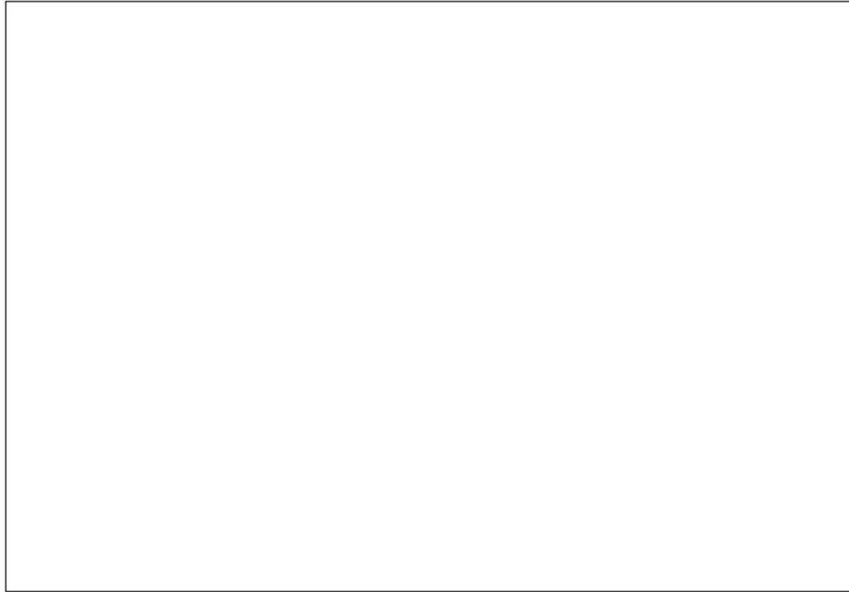
VRAAG: Wat is je opgevallen wat betreft de continuïteit binnen de paragrafen? Denk aan: de logische opbouw van de lesstof binnen de paragraaf en/of lessen. De volgorde van de uitleg en opgaven, type opgaven. Welke paragrafen?

VRAAG: Wat is je opgevallen wat betreft de continuïteit specifiek binnen paragraaf 3, Zwaartepunten en evenwicht? Logische opbouw van de lesstof binnen de paragraaf. De volgorde van de uitleg en opgaven, type opgaven. (afhankelijk van de klas)

Vervolg interviewleidraad leerlingen

Slot

VRAAG: Tot slot is er nog de mogelijkheid tot aanvullende opmerkingen. Zijn er nog dingen die je nu te binnen schieten? Of heb je tips/tops? ((smart)bord gebruik, werkboek, antwoorden en uitwerkingenboeken)



Bedankt voor je tijd. Ik ga je antwoorden verwerken voor het onderzoek. Tot ziens!

Vervolg interviewleidraad leerlingen

Meerkeuzevragen leerling

Naam leerling:

VRAAG: Ga je akkoord met het interview en de opname hiervan?

Ja / nee

Algemeen

VRAAG: In welke klas zit je?

Groep 2 / Groep 1 (controlegroep)

VRAAG: Hoe moeilijk of makkelijk vond je het onderwerp vectoren ten opzichte van de rest van het jaar?

Veel makkelijker / makkelijker / gelijk / moeilijker / veel moeilijker

VRAAG: In hoeverre denk je dat je op dit moment de lesstof beheerst wat betreft het toepassen van formules en regels?

Goed / redelijk / niet zo goed

VRAAG: In hoeverre denk je dat je op dit moment de lesstof beheerst wat betreft inzicht (echt begrijpen)?

Goed / redelijk / niet zo goed

VRAAG: Vond je het onderwerp vectoren leuker of minder leuk ten opzichte van de rest van het jaar?

Veel leuker / leuker / gelijk / minder leuk / veel minder leuk.

Continuïteit

Opbouw hoofdstuk:

- 8-V Voorkennis
- 8-1 Vectoren
- 8-2 Vectoren en kentallen
- 8-3 Zwaartepunten en evenwicht
- 8-4 Inwendig product
- 8-5 Vectorvoorstelling van een lijn
- 8-6 Vectorvoorstelling en vergelijking
- 8-7 Gemengde opdrachten

Interviewleidraad docenten

Interview leidraad docenten (geanonimiseerd)

Het interview is opgezet als een gestructureerd interview met open en gesloten vragen op basis van (van der Donk & van Lanen, 2016).

Let op!

- Denk aan pauzemomenten.
- Hou het boek (en vervangende lesstof) erbij als geheugensteun.

Inleiding

Doel van het interview:

Ik wil graag weten wat je van het onderwerp vectoren vond en dan vooral van de aangeboden lesstof in de methode. Over het niveau, de continuïteit (logische opbouw), de klassikale uitleg, (aanpassingen van) het boek. Waren er bijvoorbeeld dingen die je hielpen of juist niet de stof over te brengen aan de leerlingen. Ik ga stap voor stap specifiek vragen langs met ruimte voor opmerkingen.

Vastleggen gesprek en toestemming:

Ik schrijf de antwoorden meteen op en controleer tijdens het interview bij de open vragen en antwoorden of ik het goed begrepen heb. Voor de zekerheid neem ik het op, als ik toch nog iets terug wil luisteren.

Naam docent:

VRAAG: Ga je akkoord met het interview en de opname hiervan?

Ja / nee

VRAAG: Kan ik eventueel nog contact opnemen als ik nog aanvullende vragen heb?

Ja / nee

Je mag op ieder moment gedurende het interview besluiten geen antwoord op een vraag te geven of helemaal te stoppen.

Anonimiteit en terugkoppeling resultaten:

Je antwoorden worden anoniem opgeslagen en verwerkt, alleen aan welke klas je lesgeeft wordt genoteerd, dit is nodig voor de vergelijking. Terugkoppeling van de resultaten vindt plaats door middel van het verslag en eventueel door een presentatie aan de betrokken docenten of vaksectie.

Tijdsduur:

Het interview duurt ongeveer 20-30 minuten.

VRAAG: Heb je nog vragen over de procedure/het interview?

Vervolg interviewleidraad docenten

Algemeen

VRAAG: Aan welke klas geef je les?

Groep 2 / Groep 1 (controlegroep).

VRAAG: Hoe moeilijk of makkelijk vond je het onderwerp vectoren (didactisch gezien) ten opzichte van de rest van het jaar?

Veel makkelijker / makkelijker / gelijk / moeilijker / veel moeilijker

VRAAG: Kun je dat nog toelichten? Waren er bepaalde aspecten makkelijker/moeilijker? Zo ja, welke? En waarom?

VRAAG: In hoeverre denk je dat de leerlingen op dit moment de lesstof beheersen wat betreft het toepassen van formules en regels?

Goed / redelijk / niet zo goed

VRAAG: In hoeverre denk je dat de leerlingen op dit moment de lesstof beheersen wat betreft inzicht (echt begrijpen)?

Goed / redelijk / niet zo goed

OPTIONEEL: Is er iets dat de leerlingen echt niet begrijpen/kunnen of juist heel goed begrijpen/kunnen?

VRAAG: Vond je het onderwerp vectoren leuker of minder leuk ten opzichte van de rest van het jaar?

Veel leuker / leuker / gelijk / minder leuk / veel minder leuk.

VRAAG: Kun je dat nog toelichten? Waren er bepaalde aspecten leuker/minder leuk? Zo ja, welke? En waarom?

Vervolg interviewleidraad docenten

Continuïteit

Met continuïteit wordt hier bedoeld de mate waarin de lessen en leerstof op een logische manier op elkaar aansluiten. Denk hierbij aan de klassikale uitleg, maar ook het boek en de opgaven e.d.

VRAAG: Wat is je opgevallen wat betreft de continuïteit binnen het hoofdstuk? Denk aan: logische opbouw van de paragrafen, terugkoppeling? Of juist rare sprongen, buitenbeentjes, gaten erin, missende voorkennis. Welke paragrafen?

VRAAG: Wat is je opgevallen wat betreft de continuïteit binnen de paragrafen? Denk aan: de logische opbouw van de lesstof binnen de paragraaf en/of lessen. De volgorde van de uitleg en opgaven, type opgaven. Welke paragrafen?

VRAAG: Wat is je opgevallen wat betreft de continuïteit specifiek binnen paragraaf 3, Zwaartepunten en evenwicht? Logische opbouw van de lesstof binnen de paragraaf. De volgorde van de uitleg en opgaven, type opgaven. (afhankelijk van de klas)

Vervolg interviewleidraad docenten

VRAAG: Zou je nog dingen willen veranderen, heb je tips/tops? Of zijn er dingen waar je als docent meer/minder behoefte aan hebt, (didactisch) materiaal bijvoorbeeld?

Slot

VRAAG: Tot slot is er nog de mogelijkheid tot aanvullende opmerkingen. Zijn er nog dingen die je nu te binnen schieten?

Bedankt voor je tijd. Ik ga je antwoorden verwerken voor het onderzoek. Tot ziens!

Vervolg interviewleidraad docenten

Meerkeuzevragen docent

Naam docent:

VRAAG: Ga je akkoord met het interview en de opname hiervan?

Ja / nee

Algemeen

VRAAG: Aan welke klas geef je les?

Groep 2 / Groep 1 (controlegroep).

VRAAG: Hoe moeilijk of makkelijk vond je het onderwerp vectoren (didactisch gezien) ten opzichte van de rest van het jaar?

Veel makkelijker / makkelijker / gelijk / moeilijker / veel moeilijker

VRAAG: In hoeverre denk je dat de leerlingen op dit moment de lesstof beheersen wat betreft het toepassen van formules en regels?

Goed / redelijk / niet zo goed

VRAAG: In hoeverre denk je dat de leerlingen op dit moment de lesstof beheersen wat betreft inzicht (echt begrijpen)?

Goed / redelijk / niet zo goed

VRAAG: Vond je het onderwerp vectoren leuker of minder leuk ten opzichte van de rest van het jaar?

Veel leuker / leuker / gelijk / minder leuk / veel minder leuk.

Continuïteit

Opbouw hoofdstuk:

- 8-V Voorkennis
- 8-1 Vectoren
- 8-2 Vectoren en kentallen
- 8-3 Zwaartepunten en evenwicht
- 8-4 Inwendig product
- 8-5 Vectorvoorstelling van een lijn
- 8-6 Vectorvoorstelling en vergelijking
- 8-7 Gemengde opdrachten

Bijlage I – Verzamelbestand interviews

De meerkeuzevragen, notities en woordelijke transcripties zijn geordend in een algemeen deel (moeilijkheid/beheersing/leuk) en per paragraaf. Voor het overzicht zijn de antwoorden die puur betrekking hadden op de continuïteit tussen paragrafen, de langere leerlijnen en de horizontale samenhang apart verzameld en aangevuld met de antwoorden hierover per paragraaf (geel gemarkeerd), waardoor deze laatste dubbel voorkomen.

Continuïteit tussen paragrafen en op hoofdstukniveau incl. horizontale samenhang - controlegroep

	<i>Antwoorden en opmerkingen</i>
Docent controlegroep	“Wat ik jammer vind is dat het tekenen er niet in voorkomt, want 8-1 begint met tekenen, maar dat komt hier helemaal niet terug.” “Het boek tekent gewoon heel weinig, terwijl dat juist bij vectoren dingen heel erg duidelijk kan maken.” “Maar het is constant rekenen, rekenen, rekenen en het is wel analytisch, maar bij analytisch hoort ook tekenen.” “Ik vind alleen wel de link tussen zwaartepunt hier [in de voorkennis] en zwaartepunt in het boek niet heel duidelijk.” “De paragraaf [8-1] bouwt volgens [mij] vrij logisch op, maar er wordt veel te veel tijd aan besteed.” “... een pijl die twee omhoog en vier opzij gaat en dan ben je eigenlijk al met de kentallen bezig, onbewust.” “Dat ze naar die kentallen daarna gaan, vond ik heel duidelijk, dat had misschien voor mij wel in één paragraaf gemogen, want dat rekenen, daar hebben ze nu wel zo lang aan besteed, terwijl juist aan de achterkant meer ruimte nodig is.” “Het ontbinden in de vectoren heb ik eigenlijk al bij 8-1 benoemd, maar dat was bij mij volgens mij één les. Dat was een blokkade.” “Maar dat zwaartepunt, ik weet niet zo goed waar ik dat zou plaatsen, want eigenlijk breekt dat het hoofdstuk.” “Dat het inwendig product voor de vectorvoorstelling zit vind ik een hele logische stap, aangezien je zeker in 8.6 dat inproduct gewoon nodig hebt, bij dat loodrecht staan.” “Misschien dat het zwaartepunt wel naar achteren gehaald moet worden, na de vectorvoorstelling, zodat je de moeilijkheidsgraad verspreid over het hoofdstuk. Dan heb je eerst het inproduct, daarna twee wat makkelijkere paragrafen [8-5 en 8-6], die veel meer recht voor zijn raap zijn en dan weer een lastigere paragraaf.” “En dat heeft alles te maken met de bewijsopdrachten.” “Ik denk dat die [paragraaf 8-6] wel weer pittiger voor ze is [dan 8-5], maar toch heel goed te volgen.” 8-7 “Bijvoorbeeld bij 48, moet je honderd keer hetzelfde doen. Is dat een gemengde opdracht of is dat iets dat je in een paragraaf terug laat komen? Waar onderscheidt zich dit van de rest?” “Dat [opgave 52 en 53] is gemengd, ja klopt.” “En dan gaat het wel snel naar examenopdrachten toe, maar dat komt ook omdat d'r niet heel veel meer inzit.”

Leerling controlegroep	CI	Uit notities: De leerling vindt 8-3 lastiger dan 8-4. “Eigenlijk denk ik wel dat de manier van uitleggen voor de rest wel redelijk goed en duidelijk was. Misschien iets meer herhalen, het is een compleet nieuw iets. Als je dan voorafgaand aan de les even kort, vijf of tien minuutjes, herhaalt wat je de vorige les hebt uitgelegd, zodat het ook nog blijft hangen.” “Ik zou toch aantekeningen maken, want ik maak eigenlijk nooit aantekeningen voor wiskunde, maar hierbij vond ik het toch wel erg heel handig. Dan heb je mooi een overzichtje. Want {de docent} legt altijd uit wat het belangrijkste is.” “En ook bijvoorbeeld als de docent een opdracht samen heeft gedaan de tips die de docent erbij geeft. Want het uitwerkingen boekje geeft wel de antwoorden, maar geeft niet per se aan hoe precies en de tips erbij, dat zegt {de docent} dan wel. En daar heb je ook dan wel weer wat aan.”
Leerling controlegroep	CII	“...dit [8-1] is alleen de basis en dat moet je dan steeds meer gaan toepassen.” “Volgens mij loopt het redelijk op elkaar door.” “Als je gewoon door het boek heengaait dan is het wel redelijk toe te passen. Dat is in de andere hoofdstukken een beetje anders, daar was het heel weinig theorie wat erin stond.” “Ik vind de uitleg altijd op zich wel duidelijk, alleen als je het dan even wil overschrijven, zodat je het thuis nog kan doorlezen, dan is er soms een beetje te weinig tijd om dat te doen.” “Of ik schrijf het wel op en dan is {de docent} weer verder en dan snap ik het niet meer. En dan gewoon overschrijven en dan thuis hopen dat ik er nog uit kom.”
Leerling controlegroep	CIII	“De voorkennis sloot wel aan met het hoofdstuk en de vorige jaren. Dat is wel handig, dat je eventjes de voorkennis hebt om het weer op te helderen.” “Dat [8-1] is dan weer de basis en dat is handig, dat je daar een stukje over hebt.” “Dan [8-2] wordt het gewoon wat verder uitgewerkt en dan ga je er ook wat dieper op in. En met meerdere vectoren, en dergelijke.” 8-3 “Het gaat steeds verder eigenlijk.” “Het was wel een stukje moeilijker, dan wordt het gewoon opgebouwd.” “Dat [8-5] is wel weer een stukje lastiger.” “... zo dan meer eens een beetje door, bij 6 ook.” “Dat is dan wel weer handig, dat je dan alles bij elkaar krijgt en dan in de opgaven vind ik altijd wel dat het een stuk lastiger is.” “Dat hadden we in de vorige boeken wel, dat overal, bij elk theorieblokje uitleg stond en hier [in dit boek] dan wel een stukje minder.” “Ja, dat het allemaal wat zelfstandiger is.” “Hier [in dit hoofdstuk] zijn allemaal wat meer voorbeelden, dat is wel handig.” “Misschien nog iets [meer] tijd om huiswerk te maken [in de les].” “Dan kun je vragen aan de docent stellen en dan hoef je het thuis niet te doen. En nu hebben we ook blokkur en dat is niet echt fijn, ik heb liever dat het een beetje verspreid is. Ja, het gaat allemaal een beetje snel, de wiskunde, als je één of twee lessen niet maakt, dan loop je al gelijk een heel deel achter.”

Continuïteit tussen paragrafen en op hoofdstukniveau incl. horizontale samenhang - testgroep

		Antwoorden en opmerkingen
Docent testgroep		“Die eerste drie paragrafen dat liep naadloos. Dat liep mooi in elkaar over en bouwde mooi op, je kon ook zien dat het bezonk bij de leerlingen, dus dat zat goed in elkaar.” 8-V “In principe sloot dat [gelijkvormige driehoeken] heel goed aan met wat ze in het derde jaar gehad hebben, daar hebben we diezelfde bewijsjes ook vast al gehad. Misschien had daar nog net iets meer aandacht voor kunnen zijn.” 8-1 “Ik merkte dat dat [parallellogram-methode] goed landde, dat was voor hun vertrouwd.” “Vooral omdat er heel veel leerlingen in de klas zaten met natuurkunde in het pakket, die kenden dat.” “Dat werkte heel goed, ja. Dat gaf het een beetje bodem.” 8-3 Docent: “Nou en dit [8-3] ging ook probleemloos, ja.” Interviewer: “Ja, dit stukje wel [formule zwaartepunt]. Dit [natuurkundige context, opgave 4 en 5] is nog even de vraag.” Docent: “Ja, maar ik denk toch dat ze het beter begrepen hebben dan de klas van vorig jaar. Want die kregen gewoon de formule en “veel succes d’r mee”. En nu hebben ze, het verhaal erachter goed begrepen.” 8-4 “En dan zit er in één keer een knip. Dan zit er zo’n raar inwendig product tussen.” “Zo voelde het echt.” “Ik denk voor de leerlingen ook en ik weet er ook nog even geen oplossing voor.” “Nou, die opgave [26 bewijs inproduct met kentallen] gaat er sowieso uit, dat kost heel veel tijd en energie en het is eigenlijk zinloos. Dat het anders moet, dat is voor mij duidelijk.” “Het [cosinusregel] in het derde jaar alvast in de week leggen.” “Want anders dan krijgen ze [nu] heel veel nieuwe dingen tegelijk. En in het derde jaar moet er ruimte zijn.” “Dat [8-5 en 8-6] gaat op zich wel weer goed, want dat voelt vertrouwd voor de leerlingen, dat bouwt door op kennis die ze al hebben: vergelijkingen, lijnen.” “De zwakkere leerling die ziet niet [in 8-6] meteen die koppeling met wat ze al kennen.” “En als je daar maar voldoende aandacht aan besteed dan is het echt wel iets dat kan landen.” 8-7 “Ik zou [de volgende keer] de gemengde opdrachten niet als los ding aan het einde behandelen, maar het in de les iedere keer proberen.” “In ieder geval deels zou ik ze d’r uit halen en naar voren schuiven.” “Klopt, klopt, dat [bewijzen] komt heel weinig voor. Ik doe het in het derde jaar wel, die bewijsdingetjes.” “Niet met het idee van: dat gaat allemaal lukken.” “Maar laat ze er maar even mee stoeien.”
Leerling testgroep	TI	“Als je hier [8-V] mee begint, dan denk je wel “wat heeft dit nou eigenlijk met die vectoren te maken?”, maar als je dan verder gaat...” “... dan snap je het daarna wel, dat het wordt gebruikt.” 8-2 “... omdat je alweer eens wat verder bent, dan ben je dit soort makkelijkere dingen alweer vergeten.”

		8-3 “Sowieso vond ik dit wel iets makkelijker, omdat we die momentenwet dit jaar bij TP [Technology Program] hebben gehad.” “Sowieso vind ik die uitlegblokken een beetje kort. Een voorbeeld erbij zou altijd wel fijn zijn. Als je de uitleg in de les erbij hebt dan wordt het al wel iets duidelijker. Dat is wel handig dat erbij te hebben omdat het vrij kort is dit en het is niet altijd te begrijpen uit dit praktisch zonder voorbeelden” “Het gaat soms best snel vind ik, dat hebben we bij andere hoofdstukken ook wel eens gemerkt.” “Het gaat soms iets te snel om het echt goed bij te houden en dan ga je sneller wat overslaan.” “Dat je in één les door een hele paragraaf heengaait, dan moet je ook alles maken.” “Voor de eerste paragrafen is het meestal nog wel te doen, om dat in één les te doen, maar hoe verder je komt hoe meer tijd je daar eigenlijk voor nodig hebt, omdat opdrachten moeilijker worden.” “En als je dan de helft hebt gedaan en daarna moet je alweer verder, dan snap je dit misschien helemaal niet.” “Maar dan heb ik bijvoorbeeld op dinsdag een uur les [wiskunde] en dan twee uur [een andere] les en dan weer wiskunde en dan loop je sowieso een les achter qua huiswerk.”
Leerling testgroep	TII	“Het begin [8-V] vond ik een beetje vaag, want dit was dan met de cosinus en dan hier in één keer vectoren, ik wist niet wat dat nou met elkaar te maken had. Uiteindelijk had het wel met de driehoek te maken natuurlijk.” 8-1 “De andere manier [parallellogram-methode] hadden wij bij natuurkunde geleerd, maar dat mocht ook gewoon, dus ... dan was het wel te doen.” 8-2 “Ja, de eerste twee of drie paragrafen lukken altijd wel prima.” 8-3 “Ja, dat [de natuurkundige insteek] vond ik wel wat moeilijker, maar als je het dan uitlegt, dan is aan de ene kant wel weer logisch. Maar ja, wel moeilijker.” “Het [de bewijsopgave] lukte me zelf niet, moet ik wel zeggen, maar als je het dan uitlegt op het bord dan snap ik het vaak wel. Maar uiteindelijk moet je het wel zelf kunnen, maar eigenlijk zelfstandig is wat te lastig.” 8-4 “Ja, die [opgave 26] was wel moeilijk.” “Wel grote sprong.” “Dit [formule] was echt heel makkelijk invullen steeds en hier moet je er in één keer zelf achter komen wat je moet invullen.” “Ja, dat [zelf kunnen] is wel makkelijk, als je dat kunt.” “Ja, ik vond het wel snel gaan. Dat komt denk ik ook omdat we steeds twee lessen op één dag hadden.” “Dat vind ik ook altijd wel naar. Dan loop je meteen ook altijd twee lessen achter als je geen tijd hebt dat tussendoor te maken. Interviewer: Oké. Nee, dat kan ik me voorstellen. Maar je... dus uh... wat... wat vind je uiteindelijk nou van die opbouw? Want je gaat via het evenwicht vanaf de introductie naar het evenwicht, inproduct en dan naar deze toe, is dat een aardige afsluiting? Om dan met die... Opbouw “De eerste, dan had je alleen maar die vectoren.” “En dan werd het wel steeds moeilijker.” “Dit [?] vond ik ook alweer wat minder aansluiten, dan weer dit [?].” “Daar heb je wat meer rekenen met die kentallen en dan zijn die vectoren meer weg.”

	“Misschien zou gewoon een opdracht waar alles weer een beetje samen voorkomt helpen.” “Als je dan bijvoorbeeld die stof van [paragraaf] 1 hebt gedaan dat je dan een opdracht doet met 1 en 2 en dan opnieuw dat erbij doet.”
--	--

Algemeen: moeilijkheid/beheersing/leuk - controlegroep

	<i>Antwoorden en opmerkingen</i>
Docent controlegroep	Meerkeuze moeilijkheid: makkelijker/ moeilijker “Ik vond sommige dingen wat makkelijker, sommige dingen moeilijker. Het zit hem vooral in de bewijsopdrachten en de rekenopdrachten, dus de rekenopdrachten makkelijker en de bewijsopdrachten moeilijker.” “Sterker nog, ik maak altijd alle opdrachten zelf en ik zat zelf met [de gedachte] “hoe ga ik dit uitleggen?”” Meerkeuze beheersing: • Formules en regels: goed. • Inzicht: niet ingevuld. “Ik denk dat de leerlingen de regels en formules van de vectorvergelijking best wel goed beheersen.” “Maar dat inproduct, hoe ze dat beheersen, dat valt me vies tegen. De formules daarvan, die kennen ze gewoon niet.” “Dat zou voor dit hoofdstuk wel heel mooi zijn, als je één les aan bewijzen kan besteden. En of je nou die van het inproduct doet of die van het zwaartepunt dat maakt dan niet zo heel veel uit. Als je maar iets kunt bewijzen en de leerlingen die structuur een beetje bij kan gaan brengen, want dat onderwijsdoel kan ik nu niet behalen met mijn leerlingen. Ik heb ook als doel in mijn lesplannen gezet; “leerlingen zien de structuur van bewijzen” in plaats van “leerlingen werken met de structuur van bewijzen”. Meerkeuze leuk: gelijk. “Ik vind het een hele leuke afwisseling.”
Leerling CI controlegroep	Meerkeuze moeilijkheid: moeilijker. Uit notities: De leerling vond voornamelijk paragraaf 8-3 moeilijk, moeilijker dan 8-4. Meerkeuze beheersing: • Formules en regels: redelijk. • Inzicht: redelijk. Meerkeuze: leuker. Uit notities: De leerling vindt het leuker omdat het een ander onderwerp is.
Leerling CII controlegroep	Meerkeuze moeilijkheid: makkelijker. “Ja, ... omdat ik het heel erg druk heb, heb ik niet alles...” “maar gewoon, omdat de formules best wel hier duidelijk bij staan, dat het wel iets makkelijker is.”

	Meerkeuze beheersing: • Formules en regels: redelijk. • Inzicht: niet zo goed. “Je moet even weten dan welke [formule] waarbij hoort.” “Ja, ik heb nog niet echt een idee waar die getallen voor staan. Dus dat is niet zo goed.” Meerkeuze leuk: gelijk. “Nee, [het onderwerp] maakt me niet zoveel uit.” “Als ik het niet begrijp dan vind ik het niet meer leuk.”
Leerling CIII controlegroep	Meerkeuze: moeilijker. “Ik vond het wel een beetje pittig, want het is wel anders als de rest. Dus ik vind het wel wat moeilijker.” “Ja, de hoek tussen twee vectoren.” “Het inproduct, dat vind ik dan wel lastig.” “Ik denk meer de formules, dat ziet er wel een beetje lastig uit.” “En de vectorvoorstelling met die lambda. Dat is allemaal wel nieuw.” Meerkeuze beheersing: • Formules en regels: niet zo goed. • Inzicht: redelijk. Meerkeuze leuk: gelijk.

Algemeen: moeilijkheid/beheersing/leuk - testgroep

	<i>Antwoorden en opmerkingen</i>
Docent testgroep	Meerkeuze moeilijkheid: moeilijker. “Nou, de didactische uitdaging, vind ik inderdaad, die zit ‘m d’r in dat het iets is wat de leerlingen totaal niet kennen. Het is een andere manier van tegen wiskundige problemen aankijken en om dat goed over te brengen, dat is de didactische uitdaging, want op zich is het rekenvaardig niet ingewikkeld. Ja, en ik heb het gevoel, dat we daar dit jaar beter in geslaagd zijn dan vorig jaar.” Meerkeuze beheersing: • Formules en regels: redelijk/ niet zo goed. • Inzicht: goed/ redelijk. “Ik denk dat de leerlingen het eigenlijk best wel begrijpen, maar nog worstelen met de notatie en de juiste formules.” Meerkeuze leuk: Veel leuker/ leuker.

		“Ik vond het zeker leuker, vanwege die didactische uitdaging en omdat we er met z’n tweeën ook ... ik ben er veel meer ingedoken.” “Waardoor het allemaal interessanter wordt, dus ook door dit project.” “Ik vond het heel leerzaam, ja.”
Leerling testgroep	TI	Meerkeuze moeilijkheid: makkelijker. “Deze dingen maakt het ook een stuk makkelijker, die kentallen.” “D’r zitten paar bepaalde trucjes achter. Als je die weet dan hoef je ook niet alles uit te schrijven. Dat maakt het best makkelijker van.” “Nou ik vond dit, paragraaf 6, wel iets lastiger. Ja, dan komt er meer samen.” “En zo’n lijn opstellen dat vond ik wat lastiger.” “Dit [de gemengde opgaven] bijvoorbeeld is ook best wel wat moeilijker dan de rest van het hoofdstuk...” Meerkeuze beheersing: • Formules en regels: goed. • Inzicht: redelijk. “Nou, ik denk dat standaarddingen, dat dat wel goed gaat.” Meerkeuze leuk: gelijk. “Maar er zijn wel hoofdstukken dat het gewoon zo moeilijk is dat het gewoon echt niet leuk is.”
Leerling testgroep	TII	Meerkeuze moeilijkheid: moeilijker. “Ik heb altijd eigenlijk bij wiskunde een beetje gehad dat moet ik bijhouden en ik heb dat bij dat laatste hoofdstuk best wel wat minder gedaan. Dan snap ik het wel, maar je moet het wel gewoon blijven oefenen. Maar dat heb ik dan niet gedaan, dus dan begrijp ik het ook wat minder goed.” Dit is vanwege het “einde van het jaar” “En heel druk met andere dingen.” Meerkeuze beheersing: • Formules en regels: goed. • Inzicht: redelijk. “Alleen zoals die formule moet ik dan effe nog weten.” “Dat moet ik nog goed uit mijn hoofd leren.” “Ik weet dan wel vaak wat ik moet doen, maar halverwege loop ik dan altijd vast.” Meerkeuze leuk: gelijk. “Het scheelt wel met waar je beter in bent, heb ik altijd.”

Continuïteit paragraaf 8-V Voorkennis - controlegroep

		<i>Antwoorden en opmerkingen</i>
Docent controlegroep		“Zwaartepunt [in een driehoek], daarvan heb ik uitgelegd wat dat was.” “Ik vind alleen wel de link tussen zwaartepunt hier en zwaartepunt in het boek niet heel duidelijk. Want eigenlijk, zoals ik er nu tegenaan kijk, had je best een punt d kunnen maken, allemaal gewichtjes met een massa van één en dan even dat linken. Waarom is dat nou 2 staat tot 1?” “Dan zie je dat in één keer.”
Leerling controlegroep	CI	Opname verloren gegaan.
Leerling controlegroep	CII	Geen opmerking.
Leerling controlegroep	CIII	“De voorkennis sloot wel aan met het hoofdstuk en de vorige jaren. Dat is wel handig, dat je eventjes de voorkennis hebt om het weer op te helderen.”

Continuïteit paragraaf 8-V Voorkennis - testgroep

		<i>Antwoorden en opmerkingen</i>
Docent testgroep		“In principe sloot dat [gelijkvormige driehoeken] heel goed aan met wat ze in het derde jaar gehad hebben, daar hebben we diezelfde bewijsjes ook vast al gehad. Misschien had daar nog net iets meer aandacht voor kunnen zijn.” “Dat hele stuk Pythagoras zou je kunnen overslaan, dat receptje kennen ze wel en alleen maar die bewijsjes doen.”
Leerling testgroep	TI	“Als je hier [8-V] mee begint, dan denk je wel “wat heeft dit nou eigenlijk met die vectoren te maken?”, maar als je dan verder gaat...” “... dan snap je het daarna wel, dat het wordt gebruikt.”
Leerling testgroep	TII	“Het begin vond ik een beetje vaag, want dit was dan met de cosinus en dan hier in één keer vectoren, ik wist niet wat dat nou met elkaar te maken had. Uiteindelijk had het wel met de driehoek te maken natuurlijk.”

Continuïteit paragraaf 8-1 Vectoren - controlegroep

		<i>Antwoorden en opmerkingen</i>
Docent controlegroep		"8-1 vond ik vrij bijzonder en dat had nog meer te maken met de introductie. Want die richting en die lengte, dat kwam niet helemaal uit die paragraaf, naar mijn mening. Dat vond ik jammer, want dat is wat een vector is en wat hem afzonderlijk maakt ten opzichte van een gewoon lijntje." "De paragraaf bouwt volgens vrij logisch op, maar er wordt veel te veel tijd aan besteed." "... een pijl die twee omhoog en vier opzij gaat en dan ben je eigenlijk al met de kentallen bezig, onbewust. Ja, gewoon, puur om te laten zien dat ze echt evenwijdig zijn en echt even groot en daar zit 'm dat in. Dat is belangrijk."
Leerling controlegroep	CI	Uit notities: De leerling benoemd afstand en richting.
Leerling controlegroep	CII	"Dit snapte ik nog wel, want dit is alleen de basis en dat moet je dan steeds meer gaan toepassen."
Leerling controlegroep	CIII	"Dat is dan weer de basis en dat is handig, dat je daar een stukje over hebt." "Hier heb je dan zeven opgaven en om ze allemaal te maken, dat vind ik dan misschien niet nodig, dan begrijp ik het wel."

Continuïteit paragraaf 8-1 Vectoren - testgroep

		<i>Antwoorden en opmerkingen</i>
Docent testgroep		"Ik merkte dat dat [parallelogram-methode] goed landde, dat was voor hun vertrouwd." "Vooral omdat er heel veel leerlingen in de klas zaten met natuurkunde in het pakket, die kenden dat." "Dat werkte heel goed, ja. Dat gaf het een beetje bodem."
Leerling testgroep	TI	"Alleen maar de uitleg erover en wat het precies is." "Jawel [een goede opbouw daarin]"
Leerling testgroep	TII	"De andere manier [parallelogram-methode] hadden wij bij natuurkunde geleerd, maar dat mocht ook gewoon, dus ... dan was het wel te doen."

Continuïteit paragraaf 8-2 Vectoren en kentallen - controlegroep

		<i>Antwoorden en opmerkingen</i>
Docent controlegroep		“Dat ze naar die kentallen daarna gaan, vond ik heel duidelijk, dat had misschien voor mij wel in één paragraaf gemogen, want dat rekenen, daar hebben ze nu wel zo lang aan besteed, terwijl juist aan de achterkant meer ruimte nodig is.” “Ik heb wel hier aandacht aan besteed, aan die k keer. Dat je dan die bovenste en die onderste moet doen en dat je de bovenste laag mag optellen en de onderste mag optellen. Heb ik het over gehad.” “Het midden heb ik het niet zozeer over gehad. Wel het formuleetje benoemd.” “Het ontbinden in de vectoren heb ik eigenlijk al bij 8-1 benoemd, maar dat was bij mij volgens mij één les. Dat was een blokuur.”
Leerling controlegroep	CI	Uit notities: De leerling moest wennen aan de notatie, bijvoorbeeld de absoluut notatie.
Leerling controlegroep	CII	“Dat [8-2] snapte ik op zich ook wel. Ik snap nooit zo, waar het echt voor staat, dus dan vind ik het heel lastig om toe te passen. Maar als je weet, dat je die lijn berekent, dat snap ik het wel.”
Leerling controlegroep	CIII	“Dan wordt het gewoon wat verder uitgewerkt en dan ga je er ook wat dieper op in. En met meerdere vectoren, en dergelijke.”

Continuïteit paragraaf 8-2 Vectoren en kentallen - testgroep

		<i>Antwoorden en opmerkingen</i>
Docent testgroep		“Ja, dit [8-2] ging ook probleemloos.”
Leerling testgroep	TI	“Ik weet niet meer. Ik kan me niet zo goed meer voorkrijgen wat het ook alweer allemaal betekent. Precies omdat je alweer eens wat verder bent, dan ben je dit soort makkelijkere dingen alweer vergeten.”
Leerling testgroep	TII	“Dat ging op zich wel goed. Ja, de eerste twee of drie paragrafen lukken altijd wel prima.”

Continuïteit paragraaf 8-3 Zwaartepunten en evenwicht - controlegroep

	<i>Antwoorden en opmerkingen</i>
Docent controlegroep	“Maar dat zwaartepunt, ik weet niet zo goed waar ik dat zou plaatsen, want eigenlijk breekt dat het hoofdstuk.” “Misschien dat het zwaartepunt wel naar achteren gehaald moet worden, na de vectorvoorstelling, zodat je de moeilijkheidsgraad verspreid over het hoofdstuk. Dan heb je eerst het inproduct, daarna twee wat makkelijkere paragrafen, die veel meer recht voor zijn raap zijn en dan weer een lastigere paragraaf.” “En dat heeft alles te maken met de bewijsopdrachten.” “16 c en d heb ik eigenlijk met ze gedaan en ik heb daarna 18 met ze gedaan. Dat heb ik gewoon op het bord uitgewerkt en iedere keer even proberen, zelf laten doen, maar dan lopen ze zo vast, omdat ze die hele structuur niet gewend zijn.” “En toen heb ik gezegd: “die formule voor dat zwaartepunt ga je zelf maar uitvinden, want dat kan je heel goed zelf.””
Leerling CI controlegroep	“{De docent} ging vooral bewijzen en later zei de docent dat het niet per se in de toets hoefde.” “En dat hele bord was volgeschreven, dat vond ik een beetje chaotisch.” “[Er stond] Wel heel veel op het bord en allemaal onder mekaar en dan kon je het natuurlijk weer niet zo heel goed lezen.” “Ja, de opbouw [van de paragraaf] is wel prima.”
Leerling CII controlegroep	“In het begin [massa's aan staaf] snapte ik het ieder geval wel, maar toen met die driehoeken, vond ik het wel wat lastiger worden.” “We hebben sowieso deze [opgave 16] wel gedaan in de les en volgens mij heeft [de docent] deze [opgave 18] ook nog wel uitgelegd.” “Ik snap op zich wel een beetje het verband. Het is meer dat ik dan gewoon [van] de getallen weet waar ik ze in de formule moet zetten.”
Leerling CIII controlegroep	“Dat is ook met zwaartepunten, dat je daarmee weer een stukje vectoren kunt uitrekenen.” “Het gaat steeds verder eigenlijk.” “Het was wel een stukje moeilijker, dan wordt het gewoon opgebouwd.” “Ja, ik vond dat [de opbouw] wel logisch.” “Dat [opgave 18] vond ik wel lastig, want hoe je dat dan moet doen.” “Ja, dat [formule zwaartepunt] begreep ik ook wel, gewoon hoe dat in mekaar steekt.”

Continuïteit paragraaf 8-3 Zwaartepunten en evenwicht alternatief lesmateriaal - testgroep

		Antwoorden en opmerkingen
Docent testgroep en interviewer (docent paragraaf 8-3)		Docent: "Nou en dit [8-3] ging ook probleemloos, ja." Interviewer: "Ja, dit stukje wel [formule zwaartepunt]. Dit [natuurkundige context, opgave 4 en terugkoppeling wiskundige context, opgave 5] is nog even de vraag." Interviewer: "Die formule met dat zwaartepunt berekenen, dat was zo eenvoudig, ik denk haast te makkelijk inderdaad." Interviewer: "Wat je [docent testgroep] zelf ook al zei: "nou, ze gingen even achteroverleunen, want het was zo duidelijk."" Docent: "Ja, maar ik denk toch dat ze het beter begrepen hebben dan de klas van vorig jaar. Want die kregen gewoon de formule en "veel succes d'r mee". En nu hebben ze, het verhaal erachter goed begrepen."
Leerling testgroep	TI	"Sowieso vond ik dit wel iets makkelijker, omdat we die momentenwet dit jaar bij TP [Technology Program] hebben gehad." "De [gemiddelde] positie tussen die dingen bepalen was wel duidelijk en met dit samenvoegen [van massa's], daarvan was op zich ook wel duidelijk hoe dat moest." "Oh ja, [die formule] met die kentallen. Oh ja, met die massa's."
Leerling testgroep	TII	"Ik vond dit [vectorformule zwaartepunt] dus heel makkelijk en toen ging ik eigenlijk naar het boek kijken en toen dacht ik "huh, is dit hetzelfde?" "Want ik vond het eigenlijk best wel moeilijk hier [in het boek] uitgelegd en hier dacht ik echt van het is makkelijk." "Ja, dat [de natuurkundige insteek] vond ik wel wat moeilijker, maar als je het dan uitlegt, dan is aan de ene kant wel weer logisch. Maar ja, wel moeilijker." "Het [de bewijsopgave] lukte me zelf niet, moet ik wel zeggen, maar als je het dan uitlegt op het bord dan snap ik het vaak wel. Maar uiteindelijk moet je het wel zelf kunnen, maar eigenlijk zelfstandig is wat te lastig." "Dit [opgave 4 en 5] vond ik niet aansluiten op dit [opgave 1 t/m 3] of dit [opgave 6]. Ik snapte niet wat dat met elkaar te maken had in één keer. Omdat je natuurlijk een soort van driehoek had [opgaven 1 t/m 3] en dit [opgave 4 en 5] was eigenlijk gewoon dat en toen kreeg je hier weer die driehoek [opgave 6] en toen dacht ik: oh ja, dat is dan wel weer logisch."

Continuïteit paragraaf 8-4 Inwendig product - controlegroep

		<i>Antwoorden en opmerkingen</i>
Docent controlegroep		“Dat het inwendig product voor de vectorvoorstelling zit vind ik een hele logische stap, aangezien je zeker in 8.6 dat inproduct gewoon nodig hebt, bij dat loodrecht staan.” “Ik heb het bewijzen gedaan, dat was “vraag 26. En dat was ook weer een groot drama natuurlijk. Eigenlijk had ik wel van ze gedacht, dat ze vraag a bijvoorbeeld sneller zelf konden. Daar moest ik ze echt wel een opzetje voor geven; “bepaal eerst eens OD en ga dan de stelling van Pythagoras toevoegen” en met letters en Pythagoras waren ze de weg kwijt. Ik vind eigenlijk wel dat ze dat moeten kunnen. Eigenlijk vertel ik ze gewoon de stapjes, dus dan moeten ze ook dat kunnen.” “Wat ik ook vond, dat hier [opgave 26] heel erg duidelijk werd, is dat het boek slordig is met lengtes.” “Want de ene keer staan de strepen er wel, de ander keer staan de strepen er niet. En dat werd hier wel heel duidelijk, ...” “En wat is het inproduct nou? Ja, ik heb het uitgelegd met een slee, aan de hand van opdracht 23. Maar ja, wat is nou arbeid? Ja, daar wil ik ook niet te diep op ingaan, bijvoorbeeld bij natuurkunde. Ik weet er ook niet megaveel van af.” “Je bereikt er niet meer inzicht mee, maar ja, leerlingen willen wel graag weten waarom ze het [inproduct] doen.”
Leerling controlegroep	CI	“...dit vond ik wel redelijk logisch eigenlijk, vooral ook omdat je dit gewoon precies in de formules kan stoppen.” “...ik weet niet meer precies wat het is, eerlijk gezegd.”
Leerling controlegroep	CII	Geen opmerking.
Leerling controlegroep	CIII	“Wel lastig [inwendig product].” “Dat is ook iets compleet nieuws.” “En zo’n stukje uitleg [theorieblok op blz. 208] is misschien een klein beetje weinig.” “Als ik dat een beetje oefen met die opgaven die ervoor en erna staan, dan zit het ook wel goed, denk ik.”

Continuïteit paragraaf 8-4 Inwendig product - testgroep

		<i>Antwoorden en opmerkingen</i>
Docent testgroep		"Nou, die opgave [26 bewijs inproduct met kentallen] gaat er sowieso uit, dat kost heel veel tijd en energie en het is eigenlijk zinloos. Maar hoe dan wel? Nee, daar heb ik even nog geen pasklaar antwoord op. Dat het anders moet, dat is voor mij duidelijk." "Misschien met die cosinusregel." "Het in het derde jaar alvast in de week leggen." "Want anders dan krijgen ze [nu] heel veel nieuwe dingen tegelijk. En in het derde jaar moet er ruimte zijn. Die goniometrie, daar hebben ze geen problemen mee."
Leerling testgroep	TI	"Als het goed is [heb ik deze opgaven gemaakt]. Waarschijnlijk wel. Ik heb van dit hoofdstuk sowieso wel heel veel gemaakt. Het is wel een tijdje geleden, dan vergeet ik het altijd wat sneller dit soort dingen."
Leerling testgroep	TII	"Dit [formule inwendig product] vond ik nog niet zo moeilijk. Dat was gewoon invullen." "Ja, die [opgave 26] was wel moeilijk." "Wel grote sprong." "Dit [formule] was echt heel makkelijk invullen steeds en hier moet je er in één keer zelf achter komen wat je moet invullen." "Ja, dat [zelf kunnen] is wel makkelijk, als je dat kunt."

Continuïteit paragraaf 8-5 Vectorvoorstelling van een lijn en paragraaf 8-6 Vectorvoorstelling en vergelijking - controlegroep

		<i>Antwoorden en opmerkingen</i>
Docent controlegroep		“En dat loodrechte komt in dat boek bijna niet voor. Dat staat eventjes één keer in kleur hieronder geschreven [blz 212], terwijl ze juist daar wel op hadden mogen oefenen, ...” “Dit [paragraaf 8-5] was makkelijker. Ik had er een paar die echt constant dan voor $y = ax + b$ begonnen. Daar lijkt het natuurlijk ook heel sterk op, maar juist daardoor, omdat ze die herkenning hebben is het ook wat makkelijker.” “Ik denk dat die [paragraaf 8-6] wel weer pittiger voor ze is, maar toch heel goed te volgen, want normaalvector, dat is appeltje eitje. Alleen hier met die richtingsvector [van lijn l], daar mochten ze van mij wel wat dieper op in gaan. Waarom dat [kentallen p en q] dan dit [p en q in de vergelijking] is.”
Leerling controlegroep	CI	De leerling heeft eerder in het verloren deel van het interview al verteld dat paragraaf 8-5 heel logisch ging, maar vooral veel nieuwe termen bevat. “Ja, en vooral dat nieuwe tekentje, lambda.” “Dit [8-6] kwam me bekend voor.” “En dan met de normaalvector, dat sprak wel redelijk voor zich. Je moet het wel één keer uitgelegd krijgen, maar omdat het natuurlijk wel over vectoren gaat en niet over x-jes, en dergelijke.” “Als het eenmaal uitgelegd was, dan kon je dit wel maken.”
Leerling controlegroep	CII	“Ik ben er nog niet heel erg mee bezig geweest met dit laatste allemaal.” “Maar volgens mij is het wel redelijk toe te passen, als je gewoon er doorheen gaat.”
Leerling controlegroep	CIII	“Dat is wel weer een stukje lastiger, dat met die lambda en met meerdere lijnen werken.” “...zo dan meer eens een beetje door, bij 6 ook.” “Dat is dan wel weer handig, dat je dan alles bij elkaar krijgt en dan in de opgaven vind ik altijd wel dat het een stuk lastiger is.”

Continuïteit paragraaf 8-5 Vectorvoorstelling van een lijn en paragraaf 8-6 Vectorvoorstelling en vergelijking - testgroep

		<i>Antwoorden en opmerkingen</i>
Docent testgroep		"Dat [8-5 en 8-6] gaat op zich wel weer goed, want dat voelt vertrouwd voor de leerlingen, dat bouwt door op kennis die ze al hebben: vergelijkingen, lijnen." "Het verhaal [8-5] was geloof ik, goed te volgen, maar ze [de leerlingen] hadden even zoiets van: "Huh? En wat nu?". Maar ja, in de oefening komt dat wel goed." "De zwakkere leerling die ziet niet [in 8-6] meteen die koppeling met wat ze al kennen." "En als je daar maar voldoende aandacht aan besteed dan is het echt wel iets dat kan landen."
Leerling testgroep	TI	8-5 "Hier heb je ineens de vectoren richting er allemaal bij. Ja, dat is natuurlijk ook wel in één keer, want anders snap je de ene stuk van het hele ding niet." "Dus de steunvector is er zo'n eentje van het nulpunt naar het ding toch? Zo'n richtingsvector snapte ik niet helemaal waar dat dan moet, die kan gewoon overal zijn." 8-6 "En hier [laatste deel van 8-6] ben ik nog mee bezig."
Leerling testgroep	TII	Dit [8-5] snapte ik op zich wel, maar aan de ene kant lukte het dan weer niet." "Maar waarom heb ik het net goed gedaan en nu niet meer." "Met het antwoordenboek lukte het altijd wel." "Ja, ik vind vergelijkingen heel makkelijk, dus dan vind ik dit [8-6] niet zo moeilijk." "Gewoon om het op te lossen vind ik vergelijkingen heel makkelijk, maar..."

Continuïteit paragraaf 8-7 Gemengde opdrachten - controlegroep

	<i>Antwoorden en opmerkingen</i>
Docent controlegroep	“Dat ze opgave 47 aan krachten koppelen vind ik wel leuk, hoewel die opdracht niet helemaal uit de verf kwam. En dat komt vooral door die 50 Newton en die 12 graden, waar is dan de richting?” “En die natuurkunde leerling zegt tegen een niet natuurkundige: “je moet het met de sinus en de cosinus oplossen” en die denkt; “Oh ja!” En die gaat de sinus en de cosinus gebruiken zonder dat die er ook maar iets bij nadenkt of dat klopt met die lengte.” “Bijvoorbeeld bij [opgave] 48, moet je honderd keer hetzelfde doen. Is dat een gemengde opdracht of is dat iets dat je in een paragraaf terug laat komen? Waar onderscheidt zich dit van de rest?” “Dat [opgave 52 en 53] is gemengd, ja klopt.” “En dan gaat het wel snel naar examenopdrachten toe, maar dat komt ook omdat d’r niet heel veel meer inzit.”
Leerling CI controlegroep	Geen opmerking.
Leerling CII controlegroep	“Later moesten we ook nog ergens [opgave 52] iets met evenwicht, maar toen was het ook zo’n gekke driehoek met hier, hier en hier een gewicht en toen snapte ik het niet meer.”
Leerling CIII controlegroep	Geen opmerking.

Continuïteit paragraaf 8-7 Gemengde opdrachten - testgroep

	<i>Antwoorden en opmerkingen</i>
Docent testgroep	“De leukste vind ik eigenlijk de meetkundige opdrachten [opgave 52 en 53] dan weer en daar zijn we te weinig aan toe gekomen, achteraf.” “De gemengde opdrachten zijn eigenlijk een beetje ondergesneeuwd. Ik zou [de volgende keer] de gemengde opdrachten niet als los ding aan het einde behandelen, maar het in de les iedere keer proberen.” “In ieder geval deels zou ik ze d’r uit halen en naar voren schuiven.” “Klopt, klopt, dat [bewijzen] komt heel weinig voor. Ik doe het in het derde jaar wel, die bewijsdingetjes.” “Niet met het idee van: dat gaat allemaal lukken.” “Maar laat ze er maar even mee stoeien.”
Leerling TI testgroep	Geen opmerking.
Leerling TII testgroep	Geen opmerking.

Bijlage J – Formules en inschaling effectgrootte

Uitgangspunten/aannames:

- De gemiddelde jaarcijfers en proefwerkcijfers van de populaties zijn normaal verdeeld.
- De aanpassingen zullen (nagenoeg) geen effect hebben op de variantie, alleen op het gemiddelde, aangezien aangenomen wordt dat de variantie tussen beide populaties nagenoeg gelijk zal zijn.

De effectgroottes tussen de groepen zijn bepaald in Excel met behulp van onderstaande formules volgens Lakens (2013):

$$Cohen's d_s = \frac{M_t - M_c}{SD_{pooled}}$$

$$SD_{pooled} = \sqrt{\frac{(n_t - 1) \cdot SD_t^2 + (n_c - 1) \cdot SD_c^2}{n_t + n_c - 2}}$$

Met:

- n_t Grootte van de testgroep
- n_c Grootte van de controlegroep
- M_t Gemiddelde score van de testgroep
- M_c Gemiddelde score van de controlegroep
- SD_t Standaardafwijking van de testgroep
- SD_c Standaardafwijking van de controlegroep

Aangezien $n > 20$ (Lakens, 2013) wordt geen gebruik gemaakt van *Hedges's g_s*, waarbij correctie plaatsvindt voor kleine steekproefgroottes.

De normale conventie voor de inschaling van de effectgrootte via de waarde van *Cohen's d_s* in het onderwijsonderzoek bevindt zich in Tabel 3. Voor de inschaling van de gevonden waarden voor *Cohen's d_s* uit dit onderzoek, zijn intervallen bepaald en inclusief de gebruikte termen voor de effectgroottes te vinden in Tabel 4.

Waarde <i>Cohen's d_s</i>	Effectgrootte in onderwijs
0,6	een groot effect
0,4	een middelgroot effect
0,2	een klein effect

Tabel 3 Normale conventies voor de inschaling van de effectgrootte via *Cohen's d_s* in het onderwijsonderzoek (Cumming & Calin-Jageman, 2016)

Intervallen <i>Cohen's d_s</i>	Effectgrootte in onderwijs
$\geq 0,6$	een groot-zeer groot effect
$[0,4; 0,6)$	een middelgroot-groot effect
$[0,2; 0,4)$	een klein-middelgroot effect
$< 0,2$	een verwaarloosbaar-klein effect

Tabel 4 Inschaling *Cohen's d_s* uit het onderzoek in intervallen met effectgrootte

De volgende formule voor t wordt voor bepaling van p in Excel (Lakens, 2013) en voor de poweranalyse in G*power (Faul, Erdfelder, Lang, & Buchner, 2019):

$$t = \frac{Cohen's\ d_s}{\sqrt{\frac{1}{n_t} + \frac{1}{n_c}}}$$

Voor de bepaling van p wordt gebruik gemaakt van vrijheidsgraad $D_f = n_t + n_c - 2$.

Om het verschil tussen de gemiddelden van twee afhankelijke steekproeven (gepaarde waarden) te bepalen kan gebruik worden gemaakt van de gestandaardiseerde effectgrootte *Cohen's d_z* , waarbij gekeken wordt naar het verschil Z tussen de gepaarde waarden X en Y . Deze effectgrootte neemt dus de correlatie tussen de steekproeven mee, maar zorgt ervoor dat niet meer vergeleken kan worden met de effectgrootte tussen twee onafhankelijke steekproeven. Er wordt daarom in deze situatie gekozen voor *Cohen's d_{av}* , die de correlatie niet meeneemt en voor de standaardafwijking de gemiddelde waarde neemt. De *Pearson's r* wordt dan los vermeld. Als $r > 0,5$ is zal *Cohen's d_z* groter zijn dan *Cohen's d_{av}* , soms zelfs veel groter.

$$Cohen's\ d_{av} = \frac{M_{diff}}{(\frac{SD_1 + SD_2}{2})}$$

Met:

- M_{diff} Gemiddelde van het verschil tussen de gepaarde waarden
- SD_1 Standaardafwijking van steekproef 1
- SD_2 Standaardafwijking van steekproef 2

De volgende formule voor t wordt gebruikt voor bepaling van p in Excel en voor de poweranalyse in G*power (Faul, Erdfelder, Lang, & Buchner, 2019):

$$t = \frac{Cohen's\ d_{av}}{\sqrt{n}}$$

Voor de bepaling van p wordt gebruik gemaakt van vrijheidsgraad $D_f = n - 1$.

Bijlage K – Scorekaart MST-methode

Scorekaart opgave 7ab van de individuele oplossingsruimte.

	Code oplossing	Co_i	Creativiteit				
			Vl_i	Fl_i	Or_i		
Score <i>per</i> geschikte oplossing	x.x.x	0-100	1	10/1/0,1	10/1/0, 1	$Fl_i \cdot Or_i$	
Score <i>per</i> geschikte oplossing	x.x.x	0-100	1	10/1/0,1	10/1/0, 1	$Fl_i \cdot Or_i$	
...	...	...	...	...	...	...	
	t	$\max Co_i$	$\overline{Co}$	Vl	Fl	Or	
Tussenscores	0-T	0-100	0-100	$\sum Vl_i$	$\sum Fl_i$	$\sum Or_i$	$\sum (Fl_i \cdot Or_i)$

	<i>Eindscores individuele oplossingsruimte</i>
Correctheid	$Co = \max Co_i$
Verbondenheid	$Vb = \frac{t}{T} \cdot \overline{Co}$
Creativiteit	$Cr = \sum Vl_i \cdot \sum (Fl_i \cdot Or_i)$

Bijlage L – Bestaand proefwerk en correctiemodel 2016/2017 (geanonimiseerd origineel)

Proefwerk V4-WB • Deel 1 – Hoofdstuk 8 v1

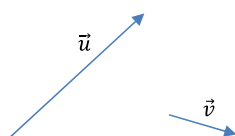
juli 2017

Dit proefwerk bestaat uit 5 opgaven met in totaal 11 onderdelen. Schrijf de uitwerkingen van de opgaven zodanig op, dat duidelijk blijkt hoe de antwoorden verkregen zijn. Antwoorden zonder de vereiste berekeningen of verklaringen leveren geen of weinig punten op.

Veel succes, XXXXXXXXXX

Opgave 1 (3 + 2 + 2 = 7 punten)

- a) Gegeven zijn de volgende twee vectoren:



Teken de vector $\vec{w} = -\vec{u} + 2\vec{v}$. Laat zien hoe je aan je antwoord komt. (Uiteraard is het onmogelijk om de vectoren perfect over te tekenen; het gaat om het idee.)

- b) Gegeven zijn de punten $A(4,7)$ en de $B(14,13)$. Bereken de kentallen van de vector $\overrightarrow{AB}$.
c) Bereken de kentallen van de vector $\overrightarrow{OM}$, waarbij M het midden is van lijnstuk AB .

Opgave 2 (3 + 3 = 6 punten)

We beschouwen de punten $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(b,3)$, $C(6,6)$ en $D(0,6)$ als vijf puntmassa's. De punten O , A , C en D hebben ieder gewicht 1, terwijl het punt B gewicht 3 heeft.

- a) Neem $b = 3$ en bereken de coördinaten van het zwaartepunt Z van deze vijf puntmassa's.
b) Voor één waarde van b ligt het zwaartepunt Z van deze vijf punten precies op lijnstuk AC . Bereken die waarde van b .

Opgave 3 (3 + 1 = 4 punten)

- a) Bereken de hoek tussen de vectoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. Rond af op hele graden.
b) Geef een vector die loodrecht staat op $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Opgave 4 (2 + 3 = 4 punten)

- a) Stel een vectorvoorstelling op van de lijn door de punten $(4,5)$ en $(2,8)$.
b) Stel een vectorvoorstelling op van de lijn $5x - 3y = 9$.

Opgave 5 (3 + 3 = 6 punten)

Gegeven is de lijn l met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- a) Bereken de coördinaten van het snijpunt van l met de x -as.
b) Stel een vergelijking op voor lijn l .

Totaal: $7 + 6 + 4 + 5 + 6 = 28$ punten**Opgave 1 (7 punten)**

- ③ a) • Het achterstevoren en even lang tekenen van $\vec{u}$ ①;
 • Het in dezelfde richting en twee keer zo lang tekenen van $\vec{v}$ ①;
 • Het tekenen van de resulterende vector via kop-staartlegging of parallellogram ①.

② b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ ②

Ook alle punten geven als het antwoord direct gegeven wordt.

② c) $O\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$ ②

Ook alle punten geven als het antwoord direct gegeven wordt.**Opgave 2 (6 punten)**

- ③ a) Het zwaartepunt Z is het eindpunt van de vector

$$\vec{z} = \underbrace{\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\text{①}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ①}$$

(Het zwaartepunt is dus $Z(3,3)$.)

- ③ b) Om op de lijn AC te liggen moet gelden $x_Z = 6$ ①. De x -coördinaat van het zwaartepunt Z is

$$x_Z = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 6 + 3 \cdot b + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 0}{7} = \frac{12 + 3b}{7} \text{ ①}$$

Dus,

$$\frac{12 + 3b}{7} = 6$$

$$12 + 3b = 42$$

$$3b = 30$$

$$b = 10 \text{ ①}$$

Opgave 3 (4 punten)

- ③ a) Invullen in de formule met het inproduct levert

$$\cos(\alpha) = \frac{3 \cdot 6 + 7 \cdot 3}{\sqrt{3^2 + 7^2} \cdot \sqrt{6^2 + 3^2}} \text{ ①}$$

$$\approx 0,763 \dots \text{ ①}$$

Dus, de hoek is $\cos^{-1}(0,763 \dots) \approx 40^\circ$ ①.

① b) $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ ①

Opgave 4 (5 punten)

- ② a) De richtingsvector is $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ①. Dus:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ①}$$

- ③ b) De normaal is $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, dus de richtingsvector is $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ①. Een punt op de lijn is bijvoorbeeld het punt $(0, -3)$ ①. Dus:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ ①}$$

Opgave 5 (6 punten)

- ③ a) Snijpunt met de x -as, dus $y = 0$ ①. Invullen levert $6 + 2\lambda = 0$, dus $\lambda = -3$ ①. Dat levert $x = 2 + 3 \cdot -3 = -7$ ①. Het snijpunt is dus $(-7, 0)$.

- ③ b) De richtingsvector is $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, dus de normaalvector is $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ①. Dat levert

$$2x - 3y = c \text{ ①}$$

Invullen van $(2, 6)$ levert $4 - 18 = c = -14$. Dus, $l: 2x - 3y = -14$ ①.

Bijlage M – Analyse bestaand proefwerk 2016/2017

Volgens de docenten van het CCS was het proefwerk inhoudelijk en wat betreft tijd goed te doen voor de leerlingen. Alleen opgave 1 en 2 zijn geanalyseerd aangezien de overige opgaven buiten beschouwing van dit onderzoek vallen.

Opgave 1 heeft betrekking op de paragrafen 8-1 en 8-2.

- Opgave 1a: Vanuit twee vectoren in geometrische representatie moet een resulterende vector $\vec{w}$ getekend worden. De opgave nodigt, vanwege de term “teken” in combinatie met de opmerking “onmogelijk ... perfect over te tekenen”, sterk uit tot oplossen in geometrische representatie en kan gezien worden als een som van twee vectoren ($-\vec{u}$ en $2\vec{v}$) of van drie vectoren ($-\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{v}$). In principe kunnen beide opgelost worden met behulp van de kopstaart-methode en de parallellogram-methode. Door de beperking tot twee uitgangsvectoren is nauwelijks uitdaging tot structureel denken.
- Opgave 1b: Vanuit twee punten A en B , in coördinaten gegeven, moeten de kentallen van de vector $\overrightarrow{AB}$ berekend worden. De opgave nodigt, vanwege de term “bereken”, sterk uit tot oplossen in numerieke representatie. Hierbij worden de kentallen van $\overrightarrow{AB}$ met behulp van de plaatsvectoren en de formule uit de methode berekend, wat gezien kan worden als procedurele kennis.
- Opgave 1c: Vanuit de twee punten uit opgave 1b moeten de kentallen van de plaatsvector $\overrightarrow{OM}$ berekend worden, met M het midden van lijnstuk AB . Ook deze opgave nodigt, vanwege de term “bereken”, sterk uit tot oplossen in numerieke representatie. Ook hierbij wordt de berekening uitgevoerd met behulp van de plaatsvectoren en een formule uit de methode, wat gezien kan worden als procedurele kennis.

Elke deelvraag stuurt sterk aan op het gebruiken van een bepaalde procedure binnen een bepaalde representatie. Door het wisselen van representatie tussen de deelvragen wordt wel in de breedte getoetst, er wordt echter niet op structurele kennis getoetst.

Opgave 2 heeft betrekking op paragraaf 8-3, zwaartepunten en evenwicht. Er worden vijf puntmassa's met coördinaten en gewicht gegeven, waarvan één met onbekende x -coördinaat b .

- Opgave 2a: Van vijf puntmassa's, in coördinaten gegeven (inclusief $b = 3$), wordt gevraagd de coördinaten van het zwaartepunt Z te berekenen. De opgave nodigt vanwege de term “bereken” sterk uit tot oplossen in numerieke representatie. Hierbij worden de kentallen van $\overrightarrow{OZ}$ met behulp van de plaatsvectoren en de vectorformule uit de methode berekend, wat gezien kan worden als procedurele kennis. De oplossing van de opgave kan echter in geometrische representatie meteen gezien worden, wat opgevat kan worden als structureel denken.
- Opgave 2b: Vanuit het gegeven dat het zwaartepunt Z op het lijnstuk AC ligt wordt gevraagd de waarde van b (de x -coördinaat van punt B) te berekenen. Deze opgave kan als complex beschouwd worden, doordat eerst bedacht moet worden wat de x -coördinaat van het zwaartepunt is. Deze opgave nodigt vanwege de term “bereken” uit tot het oplossen in numerieke representatie, terwijl deze ook in geometrische representatie op te lossen is.

Elke deelvraag stuurt aan op het oplossen in numerieke representatie en dit is ook terug te vinden in het correctiemodel. Waar opgave 2a procedurele kennis toetst is er bij 2b meer overzicht nodig, een vorm van structurele kennis, echter niet zozeer op het gebied van vectoren.

Alhoewel de opgaven dus sturen naar een bepaalde oplossingsmethode in een bepaalde representatie, zijn deze ook prima op andere manieren in andere representaties op te lossen en kunnen daardoor als basis voor een MST dienen.

Bijlage N – Combinatiebestand proefwerk (origineel) en correctiemodel (origineel) 2017/2018

Proefwerk H8 Vectoren

Inclusief correctiemodel

4V-WB versie 1-17/18



Dit proefwerk bestaat uit 7 opgaven. Noteer de uitwerkingen zodanig, dat duidelijk blijkt hoe de antwoorden verkregen zijn. Antwoorden zonder de vereiste berekeningen of verklaringen leveren geen of weinig punten op. Veel succes!

Totaal 33+3 punten. $Cijfer = \frac{Score}{33} \cdot 9 + 1$

Notatiefouten: $-\frac{1}{2}$ punt met een maximum van -2

Opgave 1 (2 punten)

Bereken en schrijf het antwoord als een breuk. Vereenvoudig indien mogelijk het antwoord.

$$\frac{7}{4a} - \frac{2a}{5} \cdot \frac{7-a}{a}$$

Uitwerking opgave 1

$$\frac{7}{4a} - \frac{2a}{5} \cdot \frac{7-a}{a} = \frac{7}{4a} - \frac{14a - 2a^2}{5a} \textcircled{1} = \frac{35}{20a} - \frac{56a - 8a^2}{20a} = \frac{35a - 56a + 8a^2}{20a} \textcircled{1}$$

Opgave 2 (1 + 2 = 3 punten)

- a) Gegeven zijn de punten $C(4,7)$ en de $D(14,13)$. Bereken de kentallen van de vector $\overrightarrow{CD}$.
b) Bereken de kentallen van de vector $\overrightarrow{OM}$, waarbij M het midden is van lijnstuk CD .

Uitwerking opgave 2

- a) $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14-4 \\ 13-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \textcircled{1}$
b) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix} \right) \textcircled{1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix} \textcircled{1}$

a) en b) Ook alle punten geven als het antwoord direct gegeven wordt, rekenfout - $\textcircled{1}$

Opgave 3 (1 + 2 = 3 punten)

Gegeven is de vector $\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$. Vector $\vec{p}$ staat loodrecht op vector $\vec{q}$.

- a) Geef de kentallen van $\vec{p}$.
b) Bereken exact $|\vec{q}|$.

Uitwerking opgave 3

- a) Alle $\vec{p}$ waarvoor geldt: $\vec{p} = \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ met $\lambda \in \mathbb{R}$. $\textcircled{1}$
b) $|\vec{q}| = \sqrt{3^2 + 7^2} \textcircled{1} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58} \textcircled{1}$

Opgave 3a was door de docent van de testgroep bedoeld als: "Geef de kentallen van een mogelijke vector $\vec{p}$ ". Alle vectoren $\vec{p}$ met kentallen die voldoen aan $\vec{p} = \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ met $\lambda \in \mathbb{R}$ zijn goed gerekend.

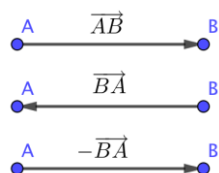
Opgave 4 (3 + 2 + 2 = 7 punten)

- a) Leg uit waarom $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
 b) Maak een tekening waar in je laat zien dat de volgende regel geldt: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.
 c) Laat weer zien dat de regel $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ geldt, maar nu door gebruik te maken van kentallen.
 Let op: gebruik geen getallenvoorbeeld, maar hou het algemeen (letters).

Uitwerking opgave 4

- a) $\overrightarrow{BA}$ is tegengesteld aan $\overrightarrow{AB}$ (en even lang) ①
 Tegengesteld aan (en even lang als) $-\overrightarrow{AB}$ is $\overrightarrow{BA}$ en tegengesteld aan (en even lang als) $\overrightarrow{BA}$ is $-\overrightarrow{BA}$ ①
 , dus $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ ①

$$\begin{aligned} -\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{BA} \quad \text{①} \\ -(-\overrightarrow{AB}) &= -\overrightarrow{BA} \quad \text{①} \\ \text{, dus } \overrightarrow{AB} &= -\overrightarrow{BA} \quad \text{①} \end{aligned}$$



Dus, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ (of pijltje naar $\overrightarrow{AB}$ met "gelijk" erbij) ①

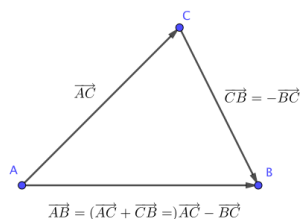
Stel $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Dan $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$ ①

en $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$ ①

En $-\overrightarrow{BA} = -\begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$ ①

Bij getalvoorbeelden toch volle punten toekennen.

b)



Tekening: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ ①

$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$ geeft $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ ①

Kan ook in 1 keer met $-\overrightarrow{BC}$ correct aangegeven in tekening.

Tekening als tussenoplossing met $\overrightarrow{BC}$ met omschrijving $\overrightarrow{BC}$ tegengesteld nodig: $-\overrightarrow{BC}$, dus $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ ①

Geen punten toekennen bij alleen tekening tussenoplossing.

- c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ①

en

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \end{cases}$$

Dus $\overrightarrow{AB}$ is ook $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = -\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Opgave 5 (3 punten)

Stel een vectorvoorstelling op van de lijn door de punten (4,5) en (2,8).

Uitwerking opgave 5

Een richtingsvector is $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. ①

Een steunvector is $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ①

Dus: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ①

Opgave 6 (3 + 3 + 3 = 9 punten)

Gegeven zijn de lijnen $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ en $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Bereken de hoek tussen de lijnen l en m . Rond af op hele graden.
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van l met de x -as.
- Stel een vergelijking op voor lijn l .

Uitwerking opgave 6

- $\cos(\alpha) = \frac{3 \cdot 6 + 7 \cdot 3}{\sqrt{3^2 + 7^2} \cdot \sqrt{6^2 + 3^2}} \approx 0,763 \dots$
De hoek is $\cos^{-1}(0,763 \dots) \approx 40^\circ$ ①

- $y = 0$ invullen: $0 = -3 + \lambda \cdot 7$, dus $\lambda = \frac{3}{7}$ ①

Dan $x = 2 + \frac{3}{7} \cdot 3 = 3\frac{2}{7}$. ①

De coördinaten van het snijpunt met de x -as zijn $(3\frac{2}{7}, 0)$ ①

- De richtingsvector is $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ dus een normaalvector is $\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ ①

Dat levert $l: -7x + 3y = c$. ①

Invullen van $(2, -3)$ levert $-14 - 9 = c = -23$, dus $l: -7x + 3y = -23$ ①

Opgave 7 (3 + 3 = 6 punten, plus 3 bonuspunten voor onderdeel b)

We beschouwen de punten $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(b,3)$, $C(6,6)$ en $D(0,6)$ als vijf puntmassa's.

De punten O , A , C en D hebben ieder gewicht 1, terwijl het punt B gewicht 3 heeft.

- Neem $b = 3$ en bepaal de coördinaten van het zwaartepunt Z van deze vijf puntmassa's.
Bonusvraag: Bij vectormeetkunde kun je problemen vaak op meerdere manieren oplossen; bijvoorbeeld met behulp van formules of met tekeningen of een combinatie hiervan.
- Bij opgave 7a heb je $b = 3$ genomen en de coördinaten van het zwaartepunt Z van de vijf puntmassa's bepaald. Doe dit nog een keer, maar dan op een andere manier.
- Voor één waarde van b ligt het zwaartepunt Z van de vijf punten precies op lijnstuk AC . Bereken die waarde van b .

Uitwerking opgave 7

- $m = 1 + 1 + 1 + 1 + 3 = 7$ ①

$$\vec{z} = \frac{1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} b \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}}{7} = \frac{\begin{pmatrix} 0+6+9+6+0 \\ 0+0+9+6+6 \end{pmatrix}}{7} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ①}$$

De coördinaten van Z zijn $(3,3)$ ①

Ook alle punten indien de x - en y -coördinaat "los" berekend zijn. Berekening totale massa m hoeft niet expliciet, bij verwerking in formule ook het punt toekennen.

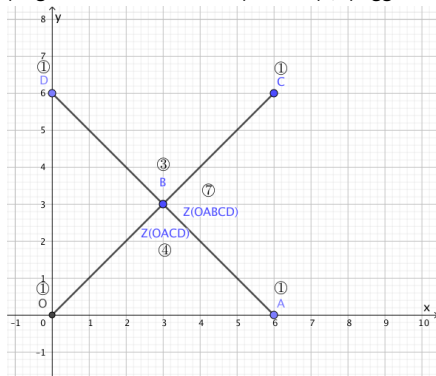
Tekening punten $OACD$ (allen met massa's 1) en $B(3,3)$ (met massa 3) ①

Correct getekend/benoemd $Z_{OACD}(3,3)$ (met massa 4) d.m.v. o.a. ①

- ☐ rechtstreeks benoemen/tekenen diagonalen (vanwege gelijke massa's)
- ☐ combineren van gewichten (meerdere manieren mogelijk)
- ☐ tekstueel "ligt precies in het midden" of anders symmetrie benoemen o.d.
- ☐ Z_{OACD} met formule berekenen

ook voor de tussenstap met $Z_{OC}(3,3)$ en $Z_{AD}(3,3)$ 1 punt toekennen.

$Z_{OACD}(3,3)$ (of $Z_{OC}(3,3)$ en $Z_{AD}(3,3)$) en $B(3,3)$, dan moet het zwaartepunt van alle punten (ongeacht de massa van B) ook in $(3,3)$ liggen. ①



Voorbeeld tekening met diagonalen.

b) Zie de opties bij 7a)

c) Z op lijnstuk AC dan $\vec{z} = \begin{pmatrix} 6 \\ y \end{pmatrix}$ ①

$$\text{Dus } z_x = \frac{3b+12}{7} = 6 \quad ①$$

$$3b + 12 = 42$$

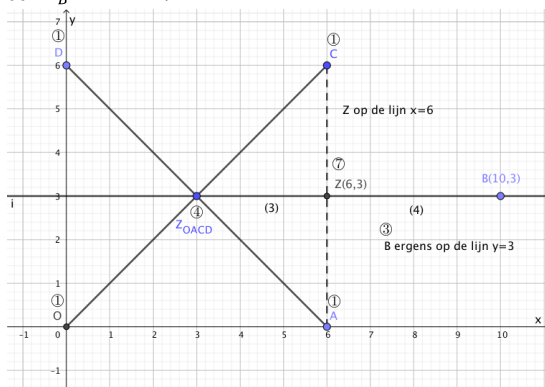
$$3b = 30$$

$$b = 10 \quad ①$$

Tekenen lijnstuk AC (de x -coördinaat van Z moet 6 zijn) ①

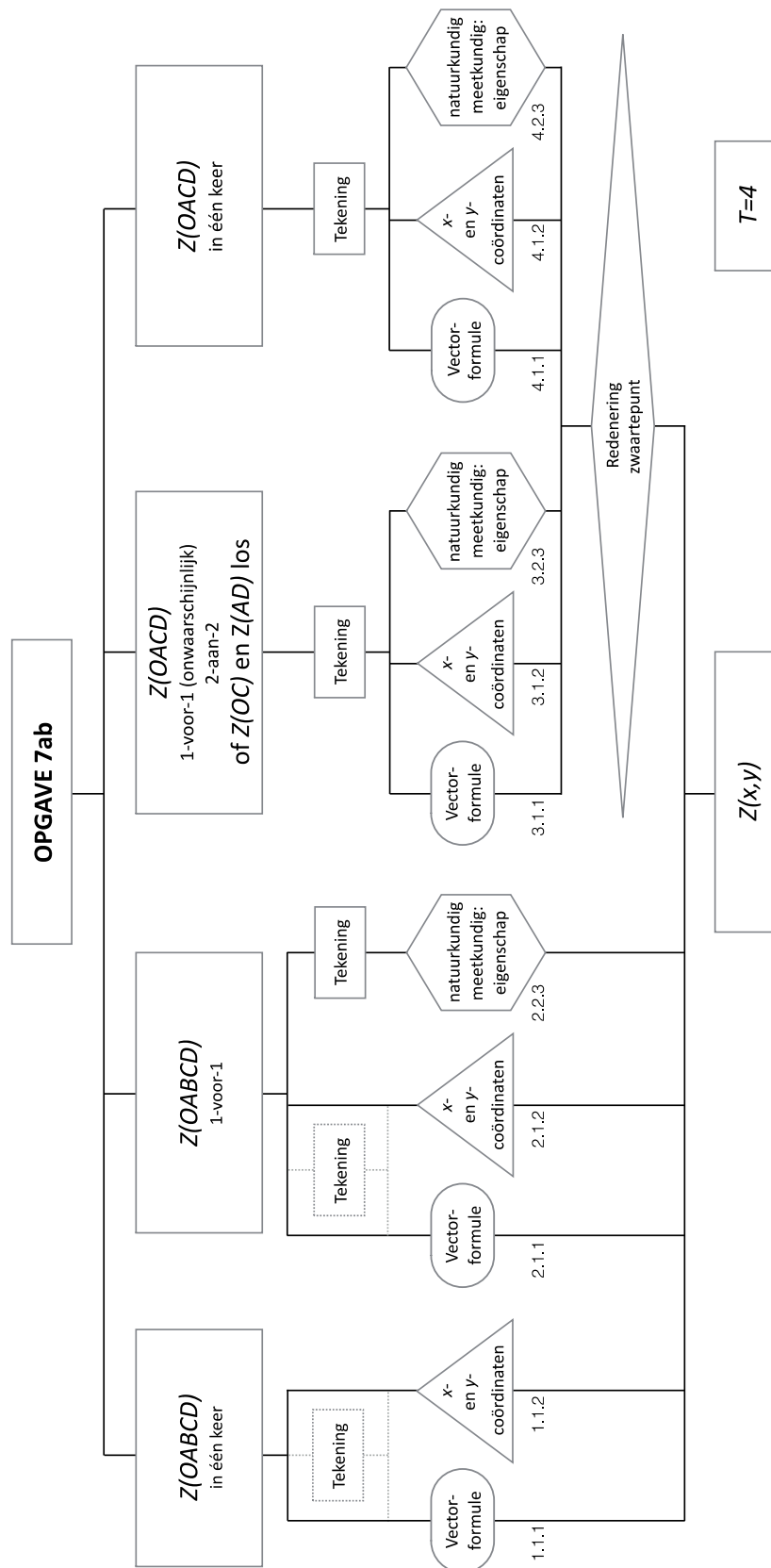
Correct tekenen of beredeneren plaats zwaartepunt: $Z_{OACD}(3,3)$ en punt B liggen op de lijn $y = 3$, dus zwaartepunt heeft ook $y = 3$, dus $Z(6,3)$ ①

Correct berekenen b / tekenen B d.m.v. verhouding. $Z_{OACD}Z:ZB = m_B:m_{Z_{OACD}} = 3:4$, dan $x_B = b = 6 + 4 = 10$. ①



Voorbeeld tekening met diagonalen en Z_{OACD} , lijn AC , lijn $y = 3$, punt $Z(6,3)$, verhouding 3:4 en punt $B(10,3)$.

Bijlage O – Expert-kaart MST-methode



Bijlage P – Cijfers

Cijfers testgroep

<i>Leerlingcode</i>	<i>Gem. jaarcijfer</i>	<i>Proefwerkcijfer docent</i>	<i>Proefwerkcijfer onderzoeken</i>	<i>Cijfer subset onderzoeker</i>	<i>Cijfer opgave 4a onderzoeker</i>
T01	7,3	6,2	6,7	7,0	10,0
T02	7,8	7,7	8,1	8,0	10,0
T03	7,8	9,5	9,7	9,5	10,0
T04	6,7	7,5	7,5	8,0	10,0
T05	6,4	6,9	6,3	4,8	10,0
T06	7,1	5,9	6,3	6,5	10,0
T07	4,8	2,2	2,1	1,8	1,0
T08	6,0	6,2	5,6	7,3	7,0
T09	6,3	7,7	8,4	8,5	10,0
T10	5,3	6,0	6,2	6,0	1,0
T11	6,4	6,6	7,3	7,5	1,0
T12	6,8	5,1	6,5	6,5	1,0
T13	5,6	8,0	6,7	7,0	10,0
T14	5,4	7,5	8,2	8,8	10,0
T15	6,4	7,7	7,4	8,5	10,0
T16	7,1	7,8	7,8	8,0	10,0
T17	7,7	8,4	8,2	6,8	1,0
T18	5,2	5,6	5,6	5,0	1,0
T19	7,2	8,1	8,4	9,0	10,0
T20	5,8	4,3	5,1	6,5	1,0
T21	6,8	7,0	6,7	6,0	10,0
T22	6,7	6,2	6,5	7,5	10,0
<i>Gemiddelde</i>	<i>6,48</i>	<i>6,73</i>	<i>6,88</i>	<i>7,01</i>	<i>7,00</i>

Cijfers controlegroep

<i>Leerlingcode</i>	<i>Gem. jaarcijfer</i>	<i>Proefwerkcijfer docent</i>	<i>Proefwerkcijfer onderzoeker</i>	<i>Cijfer subset onderzoeker</i>	<i>Cijfer opgave 4a onderzoeker</i>
C01	6,5	7,0	7,3	7,0	1,0
C02	6,6	7,3	6,5	6,3	1,0
C03	5,3	6,2	5,9	5,5	7,0
C04	8,4	8,8	9,2	9,5	10,0
C05	6,3	4,8	4,7	6,0	10,0
C06	6,0	6,7	7,8	8,5	1,0
C07	6,9	4,5	4,7	3,5	7,0
C08	6,4	7,3	6,6	5,8	10,0
C09	6,7	9,2	8,9	9,0	10,0
C10	5,9	5,4	5,4	3,5	1,0
C11	5,9	7,5	7,3	6,5	1,0
C12	6,0	5,6	4,8	6,0	8,5
C13	4,1	3,5	3,7	4,5	10,0
C14	8,7	9,5	9,2	10,0	10,0
C15	3,1	1,8	2,6	3,0	1,0
C16	5,8	8,4	8,1	8,5	10,0
C17	6,7	7,3	6,2	4,3	8,5
C18	5,9	5,4	6,2	6,0	10,0
C19	6,0	7,5	7,5	8,3	8,5
C20	7,2	6,5	5,2	4,5	5,5
C21	5,5	7,1	6,5	5,0	1,0
C22	5,0	2,4	2,9	3,5	4,0
C23	5,9	8,1	7,7	7,0	7,0
C24	7,7	8,5	8,1	7,5	10,0
C25	5,6	7,8	7,4	7,3	10,0
<i>Gemiddelde</i>	<i>6,16</i>	<i>6,56</i>	<i>6,41</i>	<i>6,25</i>	<i>6,52</i>

Bijlage Q – Voorbeelduitvoer van de berekeningen en de poweranalyse in G*power

Effect op de kennis van leerlingen over de lesstof van de paragrafen 8-V t/m 8-3 (subset)

t tests - Means: Difference between two independent means (two groups)

Analysis: Post hoc: Compute achieved power

Input:	Tail(s)	=	Two
	Effect size d	=	0,2854747
	α err prob	=	0,1
	Sample size group 1	=	22
	Sample size group 2	=	25
Output:	Noncentrality parameter δ	=	0,9765625
	Critical t	=	1,6794274
	Df	=	45
	Power ($1-\beta$ err prob)	=	0,2518868

De Excel-berekening geeft $t = 0,9765627$ (de “noncentrality parameter δ) en geeft $p = 0,334$.

t tests - Means: Difference between two independent means (two groups)

Analysis: A priori: Compute required sample size

Input:	Tail(s)	=	Two
	Effect size d	=	0,2854747
	α err prob	=	0,1
	Power ($1-\beta$ err prob)	=	0,8
	Allocation ratio N2/N1	=	1
Output:	Noncentrality parameter δ	=	2,4968839
	Critical t	=	1,6498814
	Df	=	304
	Sample size group 1	=	153
	Sample size group 2	=	153
	Total sample size	=	306
	Actual power	=	0,8013718

De benodigde steekproefgrootte met $power > 0,8$ is minimaal 153 per groep.

Bijlage R – Oplossingen in de collectieve oplossingsruimte

Oplossing 1.1.1

Het zwaartepunt $Z(OABCD)$ wordt in één keer berekend met plaatsvectoren via de vectorformule. De oplossing is van numerieke procedurele aard. Deze oplossing is in beide groepen behandeld.

$$\begin{aligned}
 \vec{O} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{A} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{C} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} & \vec{D} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} & \vec{B} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 m &= 1 + 1 + 1 + 1 + 3 = 7 \\
 \vec{Z} &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{3}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{9}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 \text{dus } Z &= (3, 3)
 \end{aligned}$$

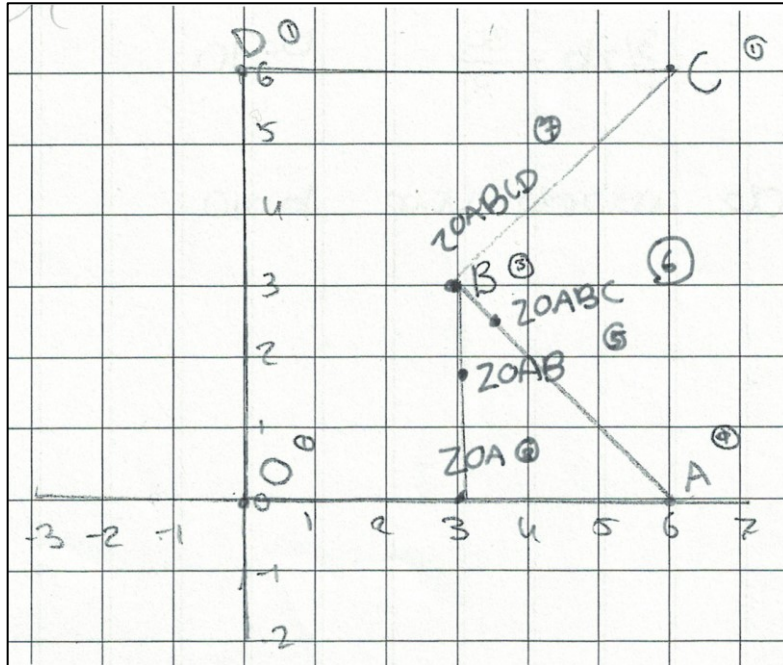
Oplossing 1.1.2

Het zwaartepunt $Z(OABCD)$ wordt in één keer berekend met coördinaten via het gewogen gemiddelde van x en y . De oplossing is van numerieke procedurele aard. Deze oplossing is specifiek in de testgroep behandeld.

$$\begin{aligned}
 Z_x &= \frac{0 + 6 + (3 \cdot 3) + 6 + 0}{7} = \frac{21}{7} = 3 \\
 Z_y &= \frac{0 + 0 + 9 + 6 + 6}{7} = \frac{21}{7} = 3 \\
 \text{Het zwaartepunt is dus } &(3, 3)
 \end{aligned}$$

Oplossing 2.1.1

Het zwaartepunt $Z(OABCD)$ wordt bepaald door de punten willekeurig één-voor-één te combineren met behulp van de vectorformule. De oplossing is van numerieke procedurele aard. Deze oplossing is later toegevoegd aan de expert-oplossingsruimte.



b) eerste zwaartepunt OA

$$\vec{Z}_{OA} = \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{Z}_{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{massa } 2^5$$

zwaartepunt ZOAB

$$\vec{Z}_{OAB} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 9/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9/5 \\ 9/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9/5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{Z}_{OABC} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ 9/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 26/4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{massa } 5$$

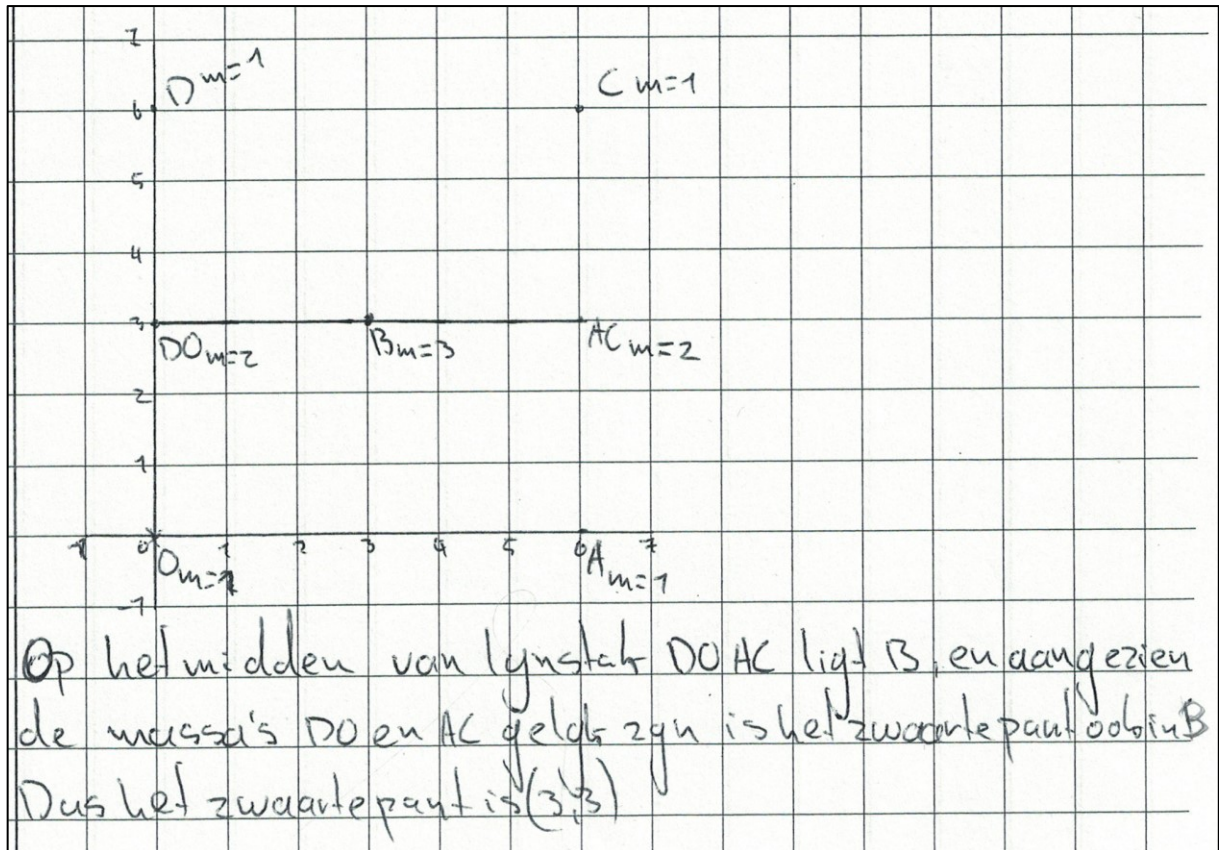
$$\vec{Z}_{OABCD} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{6}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 26/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6/7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 15/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zwaartepunt v.d. 5 massa's. massa 7

Deze leerling uit de controlegroep omcirkelt de grootte van de massa's zoals in het ontwerp het geval was. Het komt in een assenstelsel niet voor in het boek, daar zijn alleen de massa's aan de staven als cirkel weergegeven met daarin de grootte van de massa. De docent van de controlegroep heeft in het voorbeeld van opgave 16 dit op het bord echter wel zo in een assenstelsel gedaan, echter niet consequent bij elke massa.

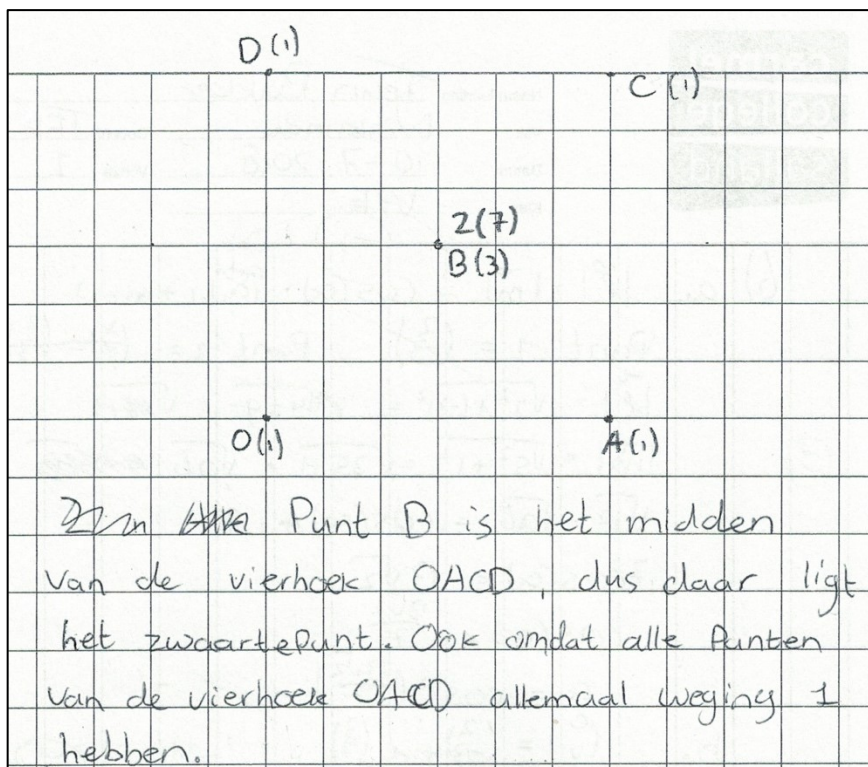
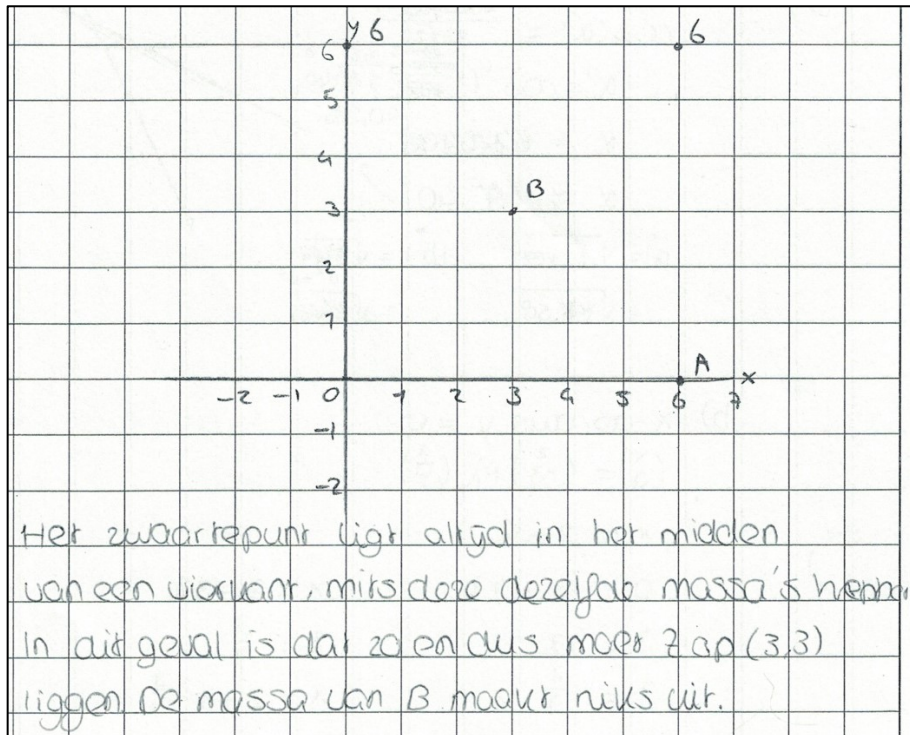
Oplossing 3.2.3

Het zwaartepunt $Z(OABCD)$ wordt bepaald door eerst $Z(OACD)$ te bepalen, door de puntmassa's paarsgewijs te combineren, en deze daarna met punt B te combineren. De keuze voor de strategie is geometrisch structureel, terwijl de tussenoplossingen geometrisch-natuurkundig procedureel zijn. Deze oplossing is in beide groepen behandeld.



Oplossing 4.2.3

Het zwaartepunt $Z(OABCD)$ wordt bepaald door eerst $Z(OACD)$ in één keer te bepalen en deze daarna met punt B te combineren. Zowel de keuze voor de strategie als de tussenoplossingen zijn geometrisch structureel. Deze oplossing is in geen van beide groepen behandeld.



Opvallend is dat bij de tweede oplossing geen assenstelsel getekend is.

Bijlage S – Telling van de geschikte oplossingen

Aantal leerlingen per losse oplossing per groep inclusief het percentage per groep

<i>Oplossing</i>	<i>Aantal testgroep</i>	<i>Percentage leerlingen</i>	<i>Aantal controlegroep</i>	<i>Percentage leerlingen</i>
1.1.1	19	86,4	18	72,0
1.1.2	6	27,3	0	0
2.1.1	0	0	1	4,0
3.2.3	1	4,5	2	8,0
4.2.3	6	27,3	7	28,0
Totaal	32	-	28	-

Aantal combinaties van oplossingen per groep inclusief combinatievolgorde

<i>Combinatie</i>	<i>Aantal testgroep</i>	<i>Volgorde</i>	<i>Aantal controlegroep</i>	<i>Volgorde</i>
Geen oplossingen	1	n.v.t.	6	n.v.t.
Alleen 1.1.1	9	n.v.t.	9	n.v.t.
Alleen 1.1.2	1	n.v.t.	0	n.v.t.
Alleen 3.2.3	0	n.v.t.	0	n.v.t.
Alleen 4.2.3	0	n.v.t.	1	n.v.t.
1.1.1 en 1.1.2	4	1x omgedraaide volgorde	0	n.v.t.
1.1.1 en 2.1.1	0	n.v.t.	1	n.v.t.
1.1.1 en 3.2.3	1	-	2	-
1.1.1 en 4.2.3	5	1x omgedraaide volgorde	6	-
1.1.2 en 4.2.3	1	-	0	n.v.t.

Bijlage T – Statistische resultaten van de MST-methode

Statistische resultaten per groep

Testgroep

<i>Aspect</i>	<i>Spreidingsinterval</i>	<i>Gemiddelde</i>	<i>SD</i>
Correctheid	[0-100]	88,2	21,7
Verbondenheid	[0-71,25]	39,2	22,0
Vloeiendheid	[0-2]	1,5	0,6
Flexibiliteit	[0-20]	12,7	5,5
Originaliteit	[0-10,1]	0,8	2,1
Creativiteit	[0-202]	16,0	42,6

Controlegroep

<i>Aspect</i>	<i>Spreidingsinterval</i>	<i>Gemiddelde</i>	<i>SD</i>
Correctheid	[0-100]	69,6	40,8
Verbondenheid	[0-75]	31,4	26,3
Vloeiendheid	[0-2]	1,1	0,8
Flexibiliteit	[0-20]	11,2	7,8
Originaliteit	[0-10,1]	1,6	3,3
Creativiteit	[0-202]	30,3	65,4

Effectbepaling tussen de groepen per aspect

<i>Aspect</i>	<i>Verschil</i>	<i>SD_{pooled}</i>	<i>Cohen's d_s</i>	<i>Effectgrootte</i>	<i>t</i>	<i>p</i>
Correctheid	18,6	33,3	0,558	middelgroot-groot	1,910	0,062
Verbondenheid	7,8	24,4	0,320	klein-middelgroot	1,096	0,279
Vloeiendheid	0,3	0,7	0,477	middelgroot-groot	1,633	0,109
Flexibiliteit	1,5	6,8	0,226	klein-middelgroot	0,774	0,443
Originaliteit	-0,7	2,8	-0,256	klein-middelgroot	-0,875	0,368
Creativiteit	-14,3	55,9	-0,255	klein-middelgroot	-0,874	0,387