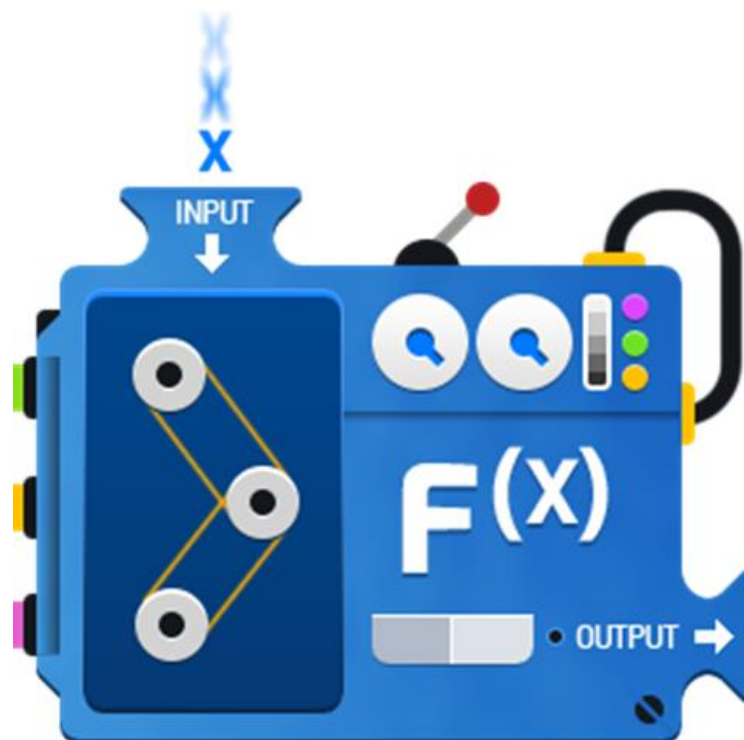


Problematiek bij het wisselen tussen representaties van functies en het bepalen van belangrijke kenmerken van functies

Onderzoek van Onderwijs (10EC)



<i>Naam:</i>	<i>Bram Leferink</i>
<i>Studentnummer:</i>	<i>s1233084</i>
<i>Eerste begeleider:</i>	<i>dr. Mark Timmer</i>
<i>Tweede begeleider:</i>	<i>dr. Gerard Jeurnink</i>
<i>Master:</i>	<i>Educatie en Communicatie in de Bètawetenschappen (ECB)</i>
<i>Schoolvak:</i>	<i>Wiskunde</i>
<i>Datum:</i>	<i>17-10-2019</i>
<i>Onderzoek:</i>	<i>Onderzoek van Onderwijs (10 EC variant)</i>

Voorwoord

Elke (wiskunde)docent maakt het mee: Je kijkt een proefwerk na, en komt erachter dat de leerlingen er weinig van begrepen hebben. Je baalt ervan omdat je had gedacht dat de stof en het proefwerk zelf wel te doen waren. Je spreekt er dan met collega's over en je merkt dat het in de andere klassen ook zo is. Als docenten ben je het dan vaak snel met elkaar eens: wat kunnen die leerlingen toch onnodige fouten maken. En soms is dat ook wel zo, want leerlingen zien er nou eenmaal vaak tegen op om te gaan leren. Daarom kunnen ze soms relatief makkelijke dingen niet, of snappen ze een belangrijk onderdeel niet dat al vaak is teruggekomen. Een van die dingen is het herkennen van variaties op standaardfuncties. Functies kennen verschillende representaties, zoals functievoorschrift en grafiek, en leerlingen lijken vaak moeite te hebben met het leggen van verbindingen daartussen. Ik vind het te makkelijk om alles op de motivatie van leerlingen af te schuiven, dus ben ik benieuwd welke oorzaken er nog meer zijn voor de problemen die leerlingen ondervinden met het leggen van verbanden tussen verschillende representaties van functies.

Samenvatting

Functies komen veel aan bod bij wiskunde, en op de middelbare school krijgen leerlingen er vanaf de derde klas voor het eerst mee te maken. Als docenten observeren we geregeld dat leerlingen onnodige fouten maken of belangrijke conclusies vergeten. Een voorbeeld hiervan is het vergeten van de tweede oplossing bij een kwadratische vergelijking zoals $2x^2 = 18$. De grafiek van $f(x) = 2x^2$ is een dalparabool. Deze heeft twee snijpunten met de lijn $y = 18$, dus heeft de vergelijking ook twee oplossingen. Voor docenten lijkt het soms makkelijk om dit soort verbanden te leggen tussen verschillende representaties van functies en andere wiskundige concepten, maar voor leerlingen lijkt dit lastig te zijn. Uit deze observaties van collega's volgt dit onderzoek met als onderzoeksvraag:

Wat zijn de oorzaken van de fouten die leerlingen maken bij het wisselen tussen representaties van functies en het bepalen van belangrijke kenmerken van die functies?

Na een theoretisch onderzoek zijn een werkblad en evaluatieblad ontworpen, bestemd voor leerlingen uit 5 vwo bij wiskunde B. De vaardigheden van deze leerlingen zijn getest met het werkblad, waarna ze zelf op het evaluatieblad aangekruist hebben welke stof ze wel en niet beheersten. De stof omvatte verschillende soorten standaardfuncties, de bijbehorende grafiekvormen en concepten als domein/bereik en transformaties. De bedoeling was dat leerlingen deze concepten zouden toepassen op verschillende soorten standaardfuncties door te wisselen tussen de formulevorm en de grafische representatie. De resultaten van dit evaluatieblad laten zien in welke mate de leerlingen van zichzelf aangeven de stof te beheersen. Ook zijn twee docenten geïnterviewd die lesgeven aan 5 vwo wiskunde B. De interviews zijn kwalitatief geanalyseerd, waarna fragmenten ervan zijn gebruikt ter onderbouwing van de eindconclusies, evenals de resultaten van de evaluaties van de leerlingen. Als antwoord op de onderzoeksvraag zijn een aantal oorzaken naar voren gekomen:

- Leerlingen kennen de eigenschappen van de verschillende standaardfuncties niet uit hun hoofd. De algemene vorm van de grafiek kennen ze vaak wel, maar waar bijvoorbeeld de toppen of asymptoten liggen weten ze niet.
- Leerlingen weten wel wat transformaties zijn, maar ze weten ze niet toe te passen.
- Er wordt te weinig tijd besteed aan herhaling waardoor de stof snel wegzakt. Een oorzaak hiervan is dat er te weinig contacturen zijn voor wiskunde. Ook worden verschillende soorten functies gesorteerd aangeboden, waardoor een functie na behandeling een tijd niet terugkomt.
- Leerlingen vertrouwen te veel op standaardprocedures. Dit leren ze aan door de voorbeelden uit het boek en de uitwerkingen na te doen. Daardoor leren ze niet op inzicht en leren ze geen verbanden leggen tussen verschillende representaties van functies.
- Leerlingen vertrouwen te veel op de grafische rekenmachine (GR). Ze krijgen dan ook te veel mogelijkheden om deze te gebruiken bij het huiswerk en tijdens toetsen. Doordat leerlingen de GR meer laten doen leren ze zelf minder nadenken.
- Bij de uitleg van functies kunnen docenten zich snel verspreken. Het is belangrijk dat er onderscheid gemaakt wordt in de termen *functie* en *functievoorschrift*.

Het onderzoek is afgesloten met een aantal limitaties die zijn opgetreden tijdens dit onderzoek en een aantal suggesties voor verder onderzoek.

Inhoud

Voorwoord	1
Samenvatting.....	2
1 Inleiding	5
2 Theoretisch Kader	7
2.1 De stof	7
2.1.1 Functies	7
2.1.2 Domein en bereik	8
2.1.3 Transformaties	8
2.2 Didactiek.....	9
2.2.1 Relationeel/instrumenteel begrip	9
2.2.2 Cognitief schema	11
2.2.3 Dualiteit	12
2.2.4 Transfer	12
2.3 Het inbeelden van grafieken	13
3 Onderzoeksvraag.....	14
4 Methode.....	15
4.1 Context	15
4.2 Procedure	15
4.3 Respondenten	18
4.4 Instrumenten.....	18
4.5 Analyse	20
5 Resultaten.....	21
5.1 Resultaten evaluatie leerlingen.....	21
5.2 De kennis van leerlingen over verschillende standaardfuncties	23
5.3 De kennis van leerlingen over de stellingen.....	24
5.4 Analyse interview: Ordenen	25
6 Conclusies en discussie.....	30
6.1 Conclusies	30
6.1.1 Oorzaken hoofdstuk 3	30
6.1.2 Nieuwe oorzaken.....	32
6.2 Limitaties	34
6.3 Implicaties	35
6.4 Suggesties voor verder onderzoek	36

7	Verwijzingen	37
8	Bijlagen	38
8.1	Bijlage 1: Werkblad 5vwo Wiskunde B.....	38
8.2	Bijlage 2: Antwoorden Werkblad 5vwo wiskunde B	41
8.3	Bijlage 3: Powerpoint uitleg werkblad	43
8.4	Bijlage 4: Evaluatieformulier	47
8.5	Bijlage 5: Interviewvragen docenten.....	49
8.6	Bijlage 6: Interview met docent A	50
8.7	Bijlage 7: Interview met docent B	54
8.8	Bijlage 8: Gemarkeerde fragmenten uit de interviews	58
8.9	Bijlage 9: Labelen.....	60

1 Inleiding

Functies zijn de kern van wiskunde. Zoals vele andere wiskundige concepten zijn ze niet direct toegankelijk als object (Sfard, 1991). Toegang tot wiskundige concepten kan alleen worden verkregen door representaties. Om wiskundige concepten te begrijpen moet men elementen van verschillende representaties aan elkaar relateren (Janvier, 1987). Voor functies zijn deze representaties algebraïsche formules, grafieken, tabellen en contexten (Janvier, 1987).

Leerlingen hebben moeite met het inzien van de structuur van wiskundige formules, om er betekenis aan te geven, en om ze te manipuleren (Kop, 2015). Zelfs veel studenten die al Calculus hebben gevolgd begrijpen het begrip functie nog niet volledig (Ana Elisa Lage, 2006). In veel gevallen ontbreekt er kennis over de grafieken van relatief makkelijke functies, zoals de functie $f(x) = \frac{1}{x}$, of bijvoorbeeld de functie $f(x) = x^3$. Daardoor lopen ze soms de meest triviale oplossingen mis. In het geval van een tweedegraads vergelijking kan dat zijn dat ze de tweede oplossing vergeten. Veel leerlingen hebben moeite met het zien van functies als input-output-machine en als object (Sfard, 1991)(Kop, 2017). Door de grafiek voor de geest te halen of zelfs te schetsen kun je de situatie van een andere kant bekijken dan als je alleen het functievoorschrift hebt. Grafieken zijn ook toegankelijker voor leerlingen (Kop, 2015). Grafieken worden gebruikt om de situatie van het vraagstuk te begrijpen, om informatie op te slaan, om te onderzoeken, en om resultaten te evalueren of controleren. Dus de vaardigheid om te wisselen tussen verschillende representaties van functies, met name tussen functievoorschrift en grafiek, is belangrijk om algebra te begrijpen en voor het probleemoplossend vermogen. (Kop, 2017). Ruhama Even (1998) maakt onderscheid tussen de puntsgewijze en globale aanpak. Bij de puntsgewijze aanpak plotten leerlingen functies en lezen ze punten af, terwijl ze bij de globale aanpak focussen op het gedrag van de functie, eventueel op een interval. De globale aanpak is krachtiger en geeft een beter begrip van de relatie tussen formules en grafieken. Toch is soms de puntsgewijze aanpak nodig om langzaam het gedrag van een functie te leren begrijpen, en om er zo betekenis aan te geven.

Als leerlingen leren over transformaties leren ze vaak de regeltjes uit hun hoofd van verschillende transformaties en het bijbehorende effect op de functie. Daarbij maken leerlingen vaak fouten met de verkeerde richting van bepaalde translaties. Bij horizontale translaties worden meer fouten gemaakt dan bij verticale translaties (Ana Elisa Lage, 2006). Neem bijvoorbeeld de functie $f(x) = \frac{1}{x}$. Een leerling weet misschien wel wat het bereik en domein hiervan zijn, maar als hij de functie $f(x) = \frac{3}{x+4} - 6$ voor zich krijgt weet hij het misschien ineens niet meer. Het probleem dat zich hier voordoet is dat de leerling geen transformaties toe weet te passen, of hij past het verkeerd toe, en daardoor weet hij ook niet hoe de grafiek eruitziet. De leerling zal door transformaties toe te passen de gebroken functie $f(x) = \frac{1}{x}$ moeten herkennen. Daarvan moet een leerling ten eerste weten hoe de grafiek eruitziet, en vervolgens moet hij uit de transformaties concluderen wat er met het domein en bereik is gebeurd. De leerling heeft het onderwerp transformaties al wel eens gehad, maar dat is misschien al even geleden, en nu weet hij het niet meer toe te passen op deze vraag. Dit soort kennis zou tot de basiskennis van leerlingen moeten behoren, zeker bij wiskunde B en zeker in 5 en 6vwo.

Het probleem waar bij dit onderzoek op gefocust zal worden is dat leerlingen moeite hebben met het herkennen van getransformeerde functie en het wisselen tussen representaties van functies,

waardoor ze fouten maken of belangrijke conclusies mislopen. De drie meest voor de hand liggende representaties zijn functievoorschrift, tabel en grafiek. Tijdens dit onderzoek zal de focus liggen op het wisselen tussen functievoorschrift en grafiek. Daarbij zal de volgende onderzoeksvraag beantwoord worden:

Wat zijn de oorzaken van de fouten die leerlingen maken bij het wisselen tussen representaties van functies en het bepalen van belangrijke kenmerken van die functies?

Tijdens dit onderzoek zal onderzocht worden wat de belangrijkste oorzaken zijn van het probleem, zullen er aanbevelingen gedaan worden voor docenten en methoden, en zullen er suggesties gedaan worden voor een vervolgonderzoek. Hiervoor zijn interviews bij twee ervaren docenten afgelegd, en er zijn twee 5vwo klassen ingezet om een werkblad te maken en een evaluatie in te vullen.

2 Theoretisch Kader

In dit hoofdstuk wordt alle kennis beschreven die benodigd is om valide onderzoeksmethoden te creëren en om conclusies te trekken uit de resultaten. Ten eerste zal relevante wiskundige stof beschreven worden, en vervolgens komen een aantal relevante onderwijskundige en (vak)didactische onderwerpen aan bod.

2.1 De stof

In deze paragraaf wordt de wiskundige stof beschreven waar de leerlingen op getest zullen worden.

2.1.1 Functies

Een functie geeft een relatie weer tussen twee gegeven verzamelingen: aan elk object uit de eerste verzameling wordt precies een object uit de tweede verzameling gerelateerd. Een functie kun je zien als een soort machine waar je een input in stopt uit de eerste verzameling. De output is dan een object uit de tweede verzameling. Die in- en output kunnen van alles zijn: woorden, letters of getallen. Een voorbeeld is een functie waarbij je de naam van een land invoert, en waar de naam van de hoofdstad eruit komt. De functie koppelt dus bijvoorbeeld de input 'Nederland' aan de output 'Amsterdam'. Bij wiskunde op de middelbare school hebben leerlingen echter weinig tot niets te maken met dit soort functies. Zij leren voornamelijk over functies waarbij de in- en output getallen zijn. De functie voert dan een aantal bewerkingen uit op het input-getal, waardoor het output-getal berekend wordt. Een functie kan meerdere bewerkingen uitvoeren op de input, en die bewerkingen kunnen van alles zijn. Voorbeelden hiervan zijn optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, kwadrateren, worteltrekken, enz. Leerlingen krijgen dus alleen te maken met het soort functies dat bewerkingen uitvoert op een in te voeren waarde. Als we weer even aan een functie denken als een machine, dan is de input van deze machine dus een getal waarop de machine vervolgens een of meerdere bewerkingen uitvoert. Zo voert de functie $f(x) = 2x + 3$ twee operaties uit op de input. Eerst wordt de input vermenigvuldigd met twee, en daarna wordt er drie bij opgeteld. De eerdergenoemde functie waarbij een land aan een hoofdstad gekoppeld wordt heeft niets met getallen en bewerkingen te maken. Omdat leerlingen op de middelbare school niet met dit soort functies te maken krijgen gaan we er in dit verslag vanuit dat alle genoemde functies getallen als in- en output hebben, waarbij de functie bewerkingen uitvoert op de input om de output te verkrijgen. De begrippen domein en bereik zijn daarbij van belang (TU Delft, sd).

Tijdens dit onderzoek wordt onderscheid gemaakt in een aantal verschillende soorten functies (ook wel standaardfuncties). Dit zijn tevens de functies die voorkomen op de middelbare school. Sommige kunnen door leerlingen als lastiger worden ervaren dan andere. De verschillende soorten functies zijn:

- Lineaire functies
- Kwadratische functies
- Hogeregraadsfuncties
- Gebroken functies
- Goniometrische functies
- Exponentiële functies
- Wortelfuncties
- Logaritmische functies

2.1.2 Domein en bereik

Het **domein** beschrijft de verzameling van alle mogelijke invoerwaarden van een functie. Bij de functie $f(x) = x^2 + 3$ is het domein de verzameling van alle reële getallen. Notatie: $D_f = (-\infty, \infty)$ of $D_f = \mathbb{R}$. Elk reëel getal dat je invoert levert een uitkomst op. Dit is niet altijd het geval, bijvoorbeeld bij $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$. De waarde $x = 2$ hoort niet bij het domein, want dan zou de noemer nul zijn, en delen door nul is ongedefinieerd. De functie heeft een asymptoot bij $x = 2$. Notatie: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ (Math4All, sd).

Het **bereik** is de verzameling van alle mogelijke uitkomsten. Zo is het bereik van de functie $f(x) = x^2$ de verzameling van alle reële getallen groter dan of gelijk aan 0. Notatie: $B_f = [0, \infty)$ (Math4All, sd). Deze notatie geeft een interval aan met een ondergrens en een bovengrens. De ondergrens is 0, en het teken '[' zegt dat 0 zelf ook meetelt. Als 0 niet zou meetellen zou een '(' gebruikt moeten worden. Als de grenzen meetellen spreken we van een gesloten interval, anders spreken we van een open interval. Een bereik van $B_f = (-\infty, \infty)$ kan ook genoteerd worden als $B_f = \mathbb{R}$.

Het is ook mogelijk om een kleiner domein te kiezen dan het maximaal mogelijke domein. Neem bijvoorbeeld weer de functie $f(x) = x^2 + 3$. Een vraag kan zijn wat het bereik is dat bij het domein $D_f = [-1, 3]$ hoort. Het bereik daarbij is dan $B_f = [3, 12]$. Het maximaal mogelijke domein van de functie is $D_f = \mathbb{R}$, en het bereik daarbij is $B_f = [3, \infty)$.

2.1.3 Transformaties

De grafiek van een functie kunnen we **verschuiven** ofwel **transleren** in zowel horizontale als verticale richting. Om de grafiek omhoog te transleren tellen we een constante a bij de functiewaarde op. Dus de grafiek van $f(x) = x^2 + 3$ heeft exact dezelfde vorm als de grafiek van $f(x) = x^2$, maar dan in zijn geheel 3 omhooggeschoven. Als we de constante a negatief zouden kiezen zouden we de grafiek naar beneden schuiven. Horizontaal verschuiven kan door x te vervangen voor $x + b$ in de functie. Als b positief is verschuift de grafiek b naar links en als b negatief is schuift de grafiek b naar rechts. De

grafiek van $f(x) = (x - 5)^2 + 3$ is dus bijna hetzelfde als die van $f(x) = x^2$, maar dan 3 omhoog en 5 naar rechts geschoven (Math4All, sd). Translaties noteren we dan als (b, a) , niet te verwarren met de notatie voor een interval. De translatie $(3, -1)$ betekent dus dat een functie 3 naar rechts en 1 naar beneden verschoven wordt.

Een ander soort transformatie is **vermenigvuldigen** ten opzichte van een horizontale of verticale as. Vaak wordt hiervoor de x-as of de y-as gekozen. Om te vermenigvuldigen t.o.v. de x-as met een factor c vermenigvuldigen we de gehele functiewaarde met een constante c . De functie $f(x) = 2x^2 + 2$ is dus een vermenigvuldiging van $f(x) = x^2 + 1$ met 2 t.o.v. de x-as. Het zorgt ervoor dat bij een x-waarde de y-waarde twee keer zover van de x-as af komt te liggen. Vermenigvuldigen t.o.v. de y-as met een factor d doen we door iedere x te vervangen voor $\frac{1}{d} \cdot x$. Door $f(x) = x^2$ te vermenigvuldigen t.o.v. de y-as met 4 krijgen we dus $f(x) = (\frac{1}{4}x)^2$. Elk punt bevindt zich na deze vermenigvuldiging vier keer zo ver van de y-as af als voorheen. De functie waar we mee beginnen noemen we het origineel, en de functie na de transformatie noemen we het beeld of de beeldfunctie. We kunnen functies ook spiegelen t.o.v. de y-as of x-as door $c = -1$ of $d = -1$ te kiezen.

De functie $h(x) = 3e^{x-2} - 9$ is dus niets meer dan de functie $f(x) = e^x$ waar een paar transformaties op toegepast zijn. Welke transformaties dat zijn hangt af van de volgorde. Door $f(x) = e^x$ eerst te vermenigvuldigen t.o.v. de x-as met factor 3 krijgen we $g(x) = 3e^x$. Vervolgens krijgen we door translatie $(2, -9)$, dus 2 naar rechts en 9 naar beneden, de functie $h(x) = 3e^{x-2} - 9$. Deze beeldfunctie kunnen we echter ook verkrijgen door éérst de translatie $(2, -3)$ en vervolgens de vermenigvuldiging t.o.v. de x-as met 3 uit te voeren. De translatie in verticale richting hangt hier dus af van de volgorde waarin de transformaties uitgevoerd worden.

Bij het origineel f horen domein $D_f = \mathbb{R}$ en bereik $B_f = (0, \infty)$. Bij het beeld h horen domein $D_h = \mathbb{R}$ en bereik $B_h = (-9, \infty)$. Het bereik is dus veranderd. Omdat de grafiek 9 omlaag is verschoven, wordt de ondergrens -9 in plaats van 0.

2.2 Didactiek

In deze paragraaf komen relevante onderwijskundige en (vak)didactische onderwerpen aan bod.

2.2.1 Relationeel/instrumenteel begrip

Dit onderzoek richt zich op de oorzaken van problemen die leerlingen hebben met functies in verschillende representaties, waarbij transformaties een grote rol spelen. Een probleem kan zijn dat leerlingen niet begrijpen waarom de stof zo in elkaar steekt. We proberen als docent de leerlingen niet alleen te leren hoe een berekening uitgevoerd moet worden, maar ook waarom dit zo moet. Leerlingen kunnen problemen ondervinden met wiskundige concepten als ze het 'waarom' erachter niet begrijpen. De termen instrumenteel begrip en relationeel begrip (Skemp, 2006) zijn daarom erg relevant voor dit onderzoek. Instrumenteel begrip (Skemp, 2006) betekent dat iemand een stukje stof bestudeerd heeft, en als het ware een soort trucje aangeleerd heeft om de sommetjes erbij op te

lossen. Dit kan bijvoorbeeld een algoritme zijn. De abc-formule wordt door veel mensen gebruikt, maar weinig mensen weten waarom deze zo werkt. Mensen volgen gewoon het algoritme dat ze aangeleerd hebben en gebruiken deze om kwadratische vergelijkingen op te lossen. Als een leerling relationeel begrip (Skemp, 2006) heeft van een bepaald onderwerp, betekent dat dat hij of zij niet alleen weet hoe iets moet, maar ook snapt waarom dit zo is. Een heel simpel voorbeeld is de oppervlakte van een driehoek ($Opp_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$). Op jonge leeftijd leer je deze formule gebruiken om oppervlaktes van driehoeken te berekenen. Als een leerling gewoon deze formule uit zijn hoofd leert en gebruikt heeft hij of zij instrumenteel begrip. Als de leerling inziet waar die $\frac{1}{2}$ in de formule vandaan komt krijgt hij of zij een stukje relationeel begrip. Met instrumenteel begrip kan een leerling wel vragen oplossen, maar de leerling moet de algoritmes goed uit zijn hoofd leren en onthouden. Dit kan veel moeite kosten, terwijl het ook snel weer vergeten wordt. Relationeel begrip zorgt ervoor dat de leerling bijvoorbeeld tijdens de toets zelf formules kan reproduceren. Dat kan omdat de leerling een formule dan logisch vindt. Hij weet precies hoe de formule opgebouwd is en waar alle getallen en/of variabelen vandaan komen.

Hoewel Richard Skemp (2006) pleit voor relationeel begrip, wat over het algemeen als beter wordt gezien dan instrumenteel begrip, heeft instrumenteel begrip ook een aantal voordelen:

1. Soms is het makkelijker om wiskundige concepten instrumenteel te begrijpen. Van sommige onderwerpen, zoals het vermenigvuldigen van twee negatieve getallen, of delen door een breuk, is het lastig om ze relationeel te begrijpen. 'Min keer min is plus' en 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde' zijn makkelijke regels om te onthouden en ze leiden je snel naar de goede antwoorden.
2. Instrumenteel begrip wordt vaak sneller beloond met een succesgevoel, wat niet ondergewaardeerd mag worden. Dit succesgevoel kan vaak erg motiverend werken voor leerlingen, bijvoorbeeld voor een volgende toets. Door dit succesgevoel kan een leerling ook veel vertrouwen krijgen in zichzelf. Sommige leerlingen hebben problemen met zelfvertrouwen of motivatie, dus instrumenteel begrip zou deze leerlingen kunnen helpen.
3. Leerlingen komen sneller tot het juiste antwoord, en soms zorgt instrumenteel denken er ook voor dat de uitwerking van wiskundige problemen betrouwbaarder verloopt. Het verschil in snelheid en betrouwbaarheid is soms zo groot dat zelfs wiskundigen de snelle regeltjes van een instrumenteel ingesteld iemand vaak gebruiken.

Hoewel instrumenteel begrip aanleren meestal sneller gaat en iets makkelijker kan zijn, heeft relationeel begrip toch een aantal belangrijke voordelen (Skemp, 2006):

1. Het zorgt ervoor dat leerlingen kunnen adapteren als ze sommen krijgen die verschillen van elkaar. Sommige instrumentele regels werken alleen onder bepaalde omstandigheden. Als een leerling een regel gebruikt terwijl de omstandigheden niet helemaal juist zijn voor die regel, maakt hij fouten.
2. Het is makkelijker te onthouden. Het is wel moeilijker om relationeel begrip te leren, maar als een leerling het eenmaal heeft, hoeft hij al die verschillende regels niet meer te onthouden en te weten wanneer hij welke regel moet toepassen. Het is misschien wel makkelijker om te onthouden hoe je de oppervlakte van een driehoek berekent dan te weten waarom dat zo is. Maar dan moet een leerling ook de regels kennen voor rechthoeken en parallellogrammen.

Door middel van relationeel begrip kan de leerling de regels zien als een groter geheel, waardoor het makkelijker te onthouden is. Het blijft beter hangen.

3. Relationeel begrip kan effectief zijn als doel op zich. Dit is een empirisch feit dat gebaseerd is op bewijs uit gecontroleerde experimenten met niet-wiskundig materiaal (Skemp, 2006). Er zijn minder externe beloningen of straffen nodig, waardoor het motiverende aspect van de docent een stuk makkelijker wordt.
4. Als leerlingen relationeel begrip ontwikkelen, kan het zijn dat sommige leerlingen nieuwsgierig worden en meer gaan opzoeken over de stof dan dat hen aangereikt is.

Een argument tegen instrumenteel begrip is ook dat het vaak meerdere regels of formules betreft in plaats van een wat algemenere regel die op meerdere concepten toe te passen is. Om de leerlingen écht iets te leren proberen docenten dus zoveel mogelijk relationeel begrip te kweken. Instrumenteel begrip kan soms echter een handig opstapje naar relationeel begrip zijn. Zo is Jan van de Craats (2008) er voorstander van om eerst instrumenteel begrip te kweken, zodat relationeel begrip later kan volgen.

Toch zijn er ook valkuilen waar rekening mee gehouden moet worden:

1. Sommige leerlingen willen juist graag instrumenteel begrip krijgen zodat ze sneller klaar zijn. Als je als docent deze leerlingen forceert relationeel begrip te vormen kan er een 'mismatch' ontstaan.
2. Andersom geldt dit ook, dus als je een leerling instrumenteel begrip wilt aanleren terwijl hij juist graag relationeel begrip wil ontwikkelen.

Het eerste geeft op de korte termijn vaak weinig problemen, maar het kan frustrerend voor de docent zijn. Leerlingen willen simpelweg niet weten wat er allemaal voor theorieën achter de stof zitten. Ze willen gewoon het regeltje weten om het antwoord te berekenen. Als een leerling eenmaal deze mindset heeft houden ze zich eraan vast en negeren ze de docent (Skemp, 2006).

Als docenten willen we de leerlingen graag motiveren om relationeel begrip te kweken. Dat betekent dat we daar rekening mee moeten houden in de uitleg. We willen dit voornamelijk omdat dit betekent dat leerlingen het 'waarom' achter de stof ook begrijpen. De stof blijft dan ook beter hangen. We moeten echter ook rekening houden met de valkuilen, voornamelijk de eerste. Soms zullen we toe moeten geven aan instrumenteel begrip als leerlingen tegen lijken te stribbelen.

2.2.2 Cognitief schema

Volgens Paul Drijvers (2016) is de kennis in het langetermijngeheugen alleen toegankelijk als die geordend is in samenhangende cognitieve schema's. Dit zijn mentale structuren die we ons kunnen voorstellen als netwerken van knooppunten (feiten, concepten, procedures, beelden) die onderling verbonden zijn door relaties ertussen. Cognitieve schema's zijn niet statisch, maar veranderen tijdens het leerproces. Als een persoon iets leert voegt hij knooppunten toe aan de cognitieve schema's in zijn hoofd. Hij kan dan instappen bij de kennis die al in zijn hoofd zit, en zo uitbreiden als hij iets nieuws leert. Een probleem voor leerlingen kan zijn dat onderwerpen zoals transformaties, domein en bereik niet verbonden zijn met de kennis van grafieken van standaardfuncties. Docenten proberen leerlingen zo goed mogelijk te ondersteunen om deze verbindingen te maken, maar blijkbaar hebben leerlingen toch moeite als het om functies en grafieken gaat.

2.2.3 Dualiteit

Wiskundige concepten kun je vaak zowel als object of als proces zien. Neem bijvoorbeeld een breuk. Een breuk zoals $\frac{2}{3}$ kun je als een object zien. Een getal dat ergens tussen nul en één in ligt. Je kunt het echter ook zien als een proces, een deling van twee door drie. Het zien van een concept als proces betekent dat het gezien wordt als iets dat ontstaat na een aantal acties te ondernemen. Deze verschillende kijken op wiskundige concepten noemen we proces-object-dualiteit (Sfard, 1991). Het kunnen zien van een wiskundig concept als zowel een object als een proces geeft de leerling meer inzicht in de stof. Hij kan zijn kijk op het concept veranderen en zo kan hij meerdere oplossingsroutes bedenken, voor het geval de meest voor de hand liggende niet werkt. Ook functies kun je als object en als proces zien. Zoals vele andere wiskundige concepten zijn ze niet direct toegankelijk als object (Sfard, 1991). Toegang tot wiskundige concepten kan alleen worden verkregen door representaties. Om wiskundige concepten te begrijpen moet men elementen van verschillende representaties aan elkaar relateren (Janvier, 1987). De grafiek is een voorbeeld van een functie als object. De grafiek is een 'ding', een plaatje waar je informatie uit kunt aflezen. De input-output-machine is een voorbeeld van een functie als proces. Zodra je x-waarden invoert, komen er functiewaarden uit. Je krijgt een beter beeld van de functie na het ondernemen van acties.

Tijdens dit onderzoek wordt onderzocht hoe we leerlingen beter kunnen laten switchen tussen verschillende representaties van functies, zodat ze dit kunnen gebruiken om getransformeerde functies te herkennen en te kunnen bepalen wat de transformaties betekenen voor het domein en bereik van de functie. Proces-object-dualiteit kan daarbij een belangrijke rol spelen omdat in sommige representaties van functies meer het object naar voren komt, en in sommige meer het proces. Zo kan de grafische representatie beter als object beschouwd worden, en het functievoorschrift beter als proces.

2.2.4 Transfer

In het algemeen gaat transfer over hoe kennis in de ene situatie toegepast kan worden in de andere situatie (Carragher, 2009). In deze algemene zin van de term kan transfer op het toepassen van kennis uit het ene hoofdstuk in het andere hoofdstuk slaan. Zo zal de term ook geïnterpreteerd worden in dit onderzoeksverslag. Transfer wordt echter ook vaak gedefinieerd als het overbrengen van kennis uit het ene vak naar het andere vak, het overbrengen van kennis vanuit school naar een buitenschoolse situatie, of het overbrengen van kennis vanuit een buitenschoolse situatie naar een binnenschoolse situatie (Evans, 1999). Leerlingen vinden het moeilijk om kennis uit een schoolvak toe te passen in een ander schoolvak. Ze zien bijvoorbeeld pas later dat bepaalde natuurkundeformules uit elkaar zijn af te leiden door te differentiëren. Leerlingen vallen vaak terug op regeltjes en procedures die ze bij dat specifieke vak geleerd hebben, en zien niet in dat ze methodes uit een ander vak ook kunnen toepassen (Drijvers, 2016). Voor dit onderzoek is het belangrijk hoe leerlingen omgaan met verschillende onderwerpen die met functies te maken hebben. Deze onderwerpen worden in verschillende hoofdstukken behandeld, en we zouden als docenten graag zien dat leerlingen deze kennis ook meenemen naar volgende hoofdstukken.

2.3 Het inbeelden van grafieken

Leerlingen hebben vaak moeite met het begrip functie. Om te begrijpen wat hun problemen zijn is het interessant om onder andere te kijken naar hoe de gemiddelde leerling denkt en hoe experts werken. Om de leerling meer begrip te geven moeten we namelijk bekijken wat er ontbreekt aan hun cognitieve schema, en in dit onderzoek wordt bekeken wat de oorzaken daarvan zijn.

Grafieken spelen vaak een belangrijke rol bij het oplossen van wiskundige problemen. Meer dan 70 jaar geleden zei Polya (1945) al dat het maken van een schets of diagram een van de eerste dingen is waar je aan denkt bij wiskundige vraagstukken. Het creëren en gebruiken van verschillende representaties van functies, en het wisselen ertussen, zijn belangrijke vaardigheden. Tegenwoordig zijn er allerlei tools en software (denk aan de grafische rekenmachine) waarmee het maken van grafieken makkelijk is. Dit zorgt ervoor dat we zelf vaak minder hoeven na te denken, wat niet helpt bij het kweken van relationeel begrip. Vroeger was bij wiskunde het tekenen van een grafiek een competentie op zich. Om grafieken te tekenen had je vele algebraïsche vaardigheden nodig, zoals het bepalen van het domein, de nulpunten en de afgeleide (Kop, 2015). Tegenwoordig gebruiken we vaak tools die dit voor ons doen. Drijvers (2016) zegt dat het functieonderzoek vroeger centraal stond op elk eindexamen. Op elk centraal eindexamen kwam minstens één opgave voor van het type 'Onderzoek de functie en teken de grafiek'. Tegenwoordig wordt hier minder aandacht aan besteed.

Leerlingen hebben er moeite mee om functies zowel te zien als een input-output-machientje en als object (Kop, 2017) (Sfard, 1991). Dat maakt het lastig voor ze om te wisselen tussen verschillende representaties van functies. Een probleem waar veel leerlingen tegen aan lopen is dat ze transformaties niet herkennen. Het herkennen van de standaardfunctie in functies is een belangrijke stap, en dit gaat mis bij veel leerlingen. Kop (2017) noemt IGF's, Instantly Graphable Formulas. Dit zijn formules of functies waarvan een persoon zich direct de grafiek kan voorstellen. IGF's zijn persoonlijk en kunnen gebruikt worden als bouwstenen voor het tekenen van grafieken met de hand. In het zojuist genoemde voorbeeld zou $f(x) = 2^x$ voor de meeste mensen een IGF genoemd kunnen worden (zo niet, dan is dat een goede eerste stap). Deze gebruik je als bouwsteen om de grafiek van een van de andere functies voor te stellen. Het uitbreiden van het bestand van IGF's van leerlingen kan een manier zijn om leerlingen te helpen het verband te zien tussen de formulevorm en zijn grafiek.

3 Onderzoeksvraag

Onderzoeksvraag:

Wat zijn de oorzaken van de fouten die leerlingen maken bij het wisselen tussen representaties van functies en het bepalen van belangrijke kenmerken van die functies?

Dit onderzoek zou enkele onverwachte resultaten op kunnen leveren, maar er zijn ook een aantal vermoedens waar we alvast rekening mee kunnen houden. Sommige daarvan kunnen eventueel ontkracht worden. Hieronder worden deze mogelijke oorzaken genoemd:

- Leerlingen kennen de vormen van de grafieken van standaardfuncties niet uit hun hoofd. Dit vermoeden is ontstaan uit eigen ervaringen en de ervaringen van collega's. Ook eigen ervaringen als leerling versterken dit vermoeden.
- Leerlingen hebben moeite met de eigenschappen van standaardfuncties zoals bereik/domein en asymptoten. Dit is deels een eigen vermoeden en deels de ervaring van collega's. Leerlingen zouden ze door elkaar kunnen halen. Ook zouden leerlingen in de war kunnen raken wanneer ze het bereik moeten geven bij een bepaald domein.
- Leerlingen weten transformaties niet toe te passen. Dit vermoeden ontstaat door de artikelen van Kop (2015)(2017) en Ana Elisa Lage (2006). Als een functie een getransformeerde vorm van een standaardfunctie betreft, kan het zijn dat het geen IGF meer is voor de leerling, terwijl de standaardfunctie dat misschien wel was. Zonder transformaties toe weten te passen kan de leerling zich dan de grafiek niet meer voorstellen.

4 Methode

4.1 Context

Het doel van het onderzoek is om erachter te komen waarom leerlingen fouten maken bij vraagstukken waarbij ze moeten wisselen naar de grafische representatie van functies (en terug) om kenmerken van de functie te bepalen. Het gaat er enerzijds om welke problemen leerlingen tegenkomen bij bepaalde onderwerpen, zoals transformaties of domein en bereik. Anderzijds gaat het erom bij welke soorten standaardfuncties leerlingen tegen de meeste problemen aan lopen. Daarvoor worden zowel de input van ervaren docenten als de input van leerlingen geanalyseerd. De leerlingen maken een test die ze vervolgens zullen evalueren. Bij twee docenten wordt een interview afgenomen. Door twee ervaren docenten te interviewen kunnen hopelijk waardevollere conclusies getrokken worden. Ook zullen extra aanbevelingen worden gedaan aan het eind van dit onderzoek. De resultaten zullen geanalyseerd worden, waarna te zien zal zijn wat de oorzaken van de problemen van leerlingen met het onderwerp zijn. Na afloop zullen er aanbevelingen worden gedaan over hoe deze fouten voorkomen kunnen worden.

4.2 Procedure

De onderzoeksopzet bestaat uit twee delen: een test met bijbehorende evaluatie voor leerlingen en een interview voor hun docenten. Hiervoor is een ethiekaanvraag gedaan met nummer 190827.

De test en de evaluatie namen 1 lesuur in beslag. In bijlage 1 is de test terug te vinden en in bijlage 2 de antwoorden. Eerst kregen de leerlingen een half uur de tijd om de test zelf te maken. Deze bestaat uit 15 vragen. Ze kregen van tevoren geen uitleg, behalve dat het voor een onderzoek is en dat er geen cijfer of iets dergelijks aan verbonden is. Na de test volgde een evaluatieformulier (Bijlage 4) en vervolgens een bespreking (Bijlage 3) van de benodigde kennis voor elke vraag van het werkblad. Er is gekozen om eerst het evaluatieformulier te laten invullen en dan pas het werkblad te bespreken omdat leerlingen het werkblad moesten invullen met de kennis die ze hadden op het moment van het maken van het werkblad. Als eerst de werkbladvragen besproken zouden worden zou het beoordelingsvermogen van de leerlingen (of ze een vraag nou wel of niet wisten) beïnvloed kunnen worden. Op het evaluatieformulier beoordeelden de leerlingen zelf welke stukjes kennis ze wel of niet hadden. De antwoorden van de leerlingen voor de test en het evaluatieformulier zijn na afloop ingenomen om resultaten te verzamelen. Aan het evaluatieformulier is te zien waar de leerlingen voornamelijk moeite mee hebben, en welke onderdelen beter gaan. De evaluatie bestaat uit twee delen. Bij het eerste gedeelte gaven ze voor een aantal stellingen over verschillende onderwerpen aan hoe ze hierop scoren per standaardfunctie. Door de leerlingen geen open vragen te geven werd getracht te voorkomen dat ze niets of weinig invullen. Met open vragen was de kans aannemelijk geweest dat ze niet wisten wat ze op moesten schrijven, of ze hadden er geen zin in gehad. Het enige wat de leerlingen nu hoefden te doen was kruisjes zetten als ze iets wisten. Dit heeft hopelijk voor meer en betrouwbaardere input van de leerlingen gezorgd. Leerlingen hoefden geen namen op hun bladen te schrijven, zodat de resultaten volledig anoniem blijven.

Veel evaluatievragen (bijlage 4) zijn gebaseerd op de mogelijke oorzaken die vermeld staan in hoofdstuk 3. In tabel 1 is te zien welke stellingen door welke mogelijke oorzaken tot stand zijn gekomen.

Mogelijke oorzaak:	Stellingen Evaluatieformulier
Leerlingen kennen de vormen van de grafieken van de standaardfuncties niet uit hun hoofd.	2, 3, 5, 9, 10, 11, 12, 19, 20, 22, 23, 28
Leerlingen hebben moeite met de eigenschappen van standaardfuncties zoals bereik/domein en asymptoten.	3 t/m 12, 19, 20, 22, 23, 25, 27
Leerlingen hebben moeite met het toepassen van transformaties	14 t/m 27

Tabel 1: Basis stellingen evaluatieformulier

Tevens is bij het samenstellen van de evaluatie- en werkbladvragen rekening gehouden met het aantal overeenkomsten tussen de twee. Deze overeenkomsten zijn terug te vinden in tabel 2. Als er een verband is tussen een werkbladopgave en een evaluatievraag is hiervoor een kruisje in de tabel geplaatst. Op deze manier zijn het evaluatieformulier en het werkblad op elkaar afgestemd. Irrelevante vragen zijn aan de hand van deze methode geschrapt, zodat alleen relevante vragen overbleven.

	Werkblad vragen																
	#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	x
Evaluatie vragen	1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	15
	2		x			x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	12
	3								x		x			x			3
	4	x							x		x				x	x	5
	5								x						x		2
	6					x	x	x									3
	7		x			x	x	x			x					x	6
	8													x			1
	9								x		x			x	x	x	5
	10														x		1
	11			x	x	x	x	x									5
	12			x	x		x	x									4
	13		x							x		x	x				4
	14	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	14
	15	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	15
	16	x			x	x	x	x	x		x		x		x		9
	17		x	x		x		x		x	x	x			x	x	9
	18												x				1
	19	x							x		x				x	x	5
	20			x	x		x	x									4
	21	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	14
	22		x							x		x	x				4
	23											x	x				2
	24	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	14
	25					x	x	x			x					x	5
	26	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	14
	27		x	x		x	x	x		x	x	x	x				9
	28	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	14
	x	10	13	11	11	15	16	17	14	12	17	13	14	7	15	14	

Tabel 2: Overeenkomsten werkblad-evaluatie

Het interview is afgenomen bij twee docenten. Dit interview bestaat uit een aantal open vragen, zie bijlage 5. Waar onderwerpen niet aan bod zijn gekomen zal worden doorgevraagd om de discussie iets te sturen. Als deze vragen gesteld zijn krijgen de docenten de resultaten van het leerlingonderzoek te zien, om hier verder over te kunnen discussiëren. Het doel is om zo uitgebreid mogelijke antwoorden te krijgen.

4.3 Respondenten

De bedoeling was om onderzoek te doen in twee klassen. Hiervoor zijn de twee docenten van deze klassen benaderd, die hier vervolgens toestemming voor gegeven hebben. Helaas moest een van de twee docenten zich toch terugtrekken in verband met een te strakke planning met zijn klas. Hierdoor bleef er nog maar één klas over, en dit bleek helaas een klas van slechts 17 leerlingen te zijn. Op de dag van het onderzoek waren er ook nog eens 4 leerlingen afwezig, waardoor er slechts 13 overbleven. De intentie was om van zo'n 35 á 40 leerlingen resultaten te verkrijgen. Helaas is dat aantal uiteindelijk dus wat lager geworden dan verwacht. De groep van 13 bestond uit 4 jongens en 9 meisjes.

De klas waarin onderzoek is gedaan is een klas 5vwo wiskunde B. Het einde van het jaar naderde, en deze leerlingen hadden de meeste stof wel gehad, vandaar de keuze voor de 5^e klas. De stof die dit onderzoek omvat is typisch wiskunde B-stof, dus vandaar de wiskunde B-klas. In de klas zaten geen respondenten die niet meewerkten.

Ook wordt van twee docenten een interview afgenomen. Zij zijn beiden ervaren docenten die nu meer dan 10 jaar werken aan het Bonhoeffer College (locatie van der Waalslaan). Ze geven allebei voornamelijk les in de bovenbouw, havo en vwo, wiskunde A en wiskunde B. Ze zullen docent A en docent B worden genoemd in dit verslag.

4.4 Instrumenten

De test en de bijbehorende evaluatie zijn ontworpen om de basiskennis van leerlingen over functies te testen. Leerlingen worden getest op hun kennis over een aantal verschillende onderdelen en op hun kennis over verschillende standaardfuncties. De onderdelen die zijn getest zijn transformaties, domein/bereik, schetsen van functies en het oplossen van hogeregraadsvergelijkingen. De verschillende standaardfuncties die zijn getest zijn kwadratische, hogeregraads, gebroken, goniometrische, exponentiële, en wortelfuncties. Met kwadratische en hogeregraadsfuncties worden respectievelijk functies van de vorm ax^2 en ax^n bedoeld (met even of oneven n). Bij een hogeregraadsfunctie is de macht n groter dan 2. Logaritmische functies zijn expres achterwege gelaten. Dit onderwerp is nog maar kort voor dit onderzoek behandeld in 5vwo. De leerlingen hebben nog niet de kans gehad om deze stof goed te laten bezinken. Voor de zekerheid is deze functiefamilie daarom weggelaten. Vaak wordt er een functie gegeven en moeten leerlingen aangeven wat het domein of het bereik is, wat de coördinaten van de top zijn, of wat de asymptoten zijn. Ook moeten ze functievoorschriften aan grafieken koppelen. De leerlingen moeten de functies dus zowel op object- als procesniveau bekijken (Sfard, 1991) (Janvier, 1987). Er worden verschillende soorten functies gebruikt waar vaak een transformatie op toegepast is. Hiervoor moeten de leerlingen zelf translaties kunnen toepassen om achter de eigenschappen van de standaardfunctie te komen. Volgens Lage (2006) hebben leerlingen ook moeite met de richting van translaties. De richting van translaties zit verwerkt in de opgaven, aangezien de leerlingen bijvoorbeeld voor het geven van een domein van een gebroken functie wel de richting van de horizontale translatie moeten kennen. De leerlingen weten van tevoren niet waar de test over gaat. Uiteindelijk hebben de leerlingen bij de bespreking hun eigen werkblad nagekeken, wat helaas niet ideaal is voor de betrouwbaarheid van de resultaten. Het evaluatieformulier is gebaseerd op zowel de onderzoeken van Kop (2015)(2017), Lage (2006), Janvier (1987), en eigen vermoedens. Leerlingen vullen het evaluatieformulier in door kruisjes te zetten, in plaats van open vragen te beantwoorden. Op deze manier wordt geprobeerd een eerlijkere respons

te ontvangen. Dit omdat leerlingen misschien geneigd kunnen zijn open vragen heel kortaf te beantwoorden. Met behulp van een kruistabel is gekeken welke werkbladvragen en evaluatievragen met elkaar te maken hadden. Daarin was vervolgens te zien welke werkbladvragen of evaluatievragen niet of nauwelijks relevant waren, waarna deze geschrapt zijn. Het resultaat van deze kruistabel is tabel 2, waarin aan de kruisjes te zien is dat de overgebleven werkbladvragen en evaluatievragen veel verband met elkaar hebben. Voor de bespreking van de vragen is in een PowerPoint voor elke vraag een dia aangemaakt, zie bijlage 3. Daarop staat dan het antwoord met een grafiek erbij, en bij elke vraag wordt uitgelegd welke kennis ze nodig hadden gehad.

Voor de interviews zijn een aantal vragen samengesteld om de mening van de twee docenten over de kennis van hun leerlingen te vragen. Daarnaast worden er nog een paar vragen achter de hand gehouden om de docenten een richting in te sturen, maar in eerste instantie is het interessanter om te zien waar ze zelf mee komen. Ook worden de resultaten van het leerlingonderzoek achter de hand gehouden, zodat deze samen met de docenten bekeken kan worden om hun mening hier over te vragen. De interviewvragen zijn opgesteld aan de hand van de resultaten van de evaluaties, verwachtingen en het vooronderzoek (theoretisch kader). Dit is gedaan door eerst informatie en bronnen te zoeken over relevante onderwerpen (zoals transfer), en de problemen van leerlingen hiermee. In het theoretisch kader is deze informatie terug te vinden. Na het evaluatieonderzoek zijn de resultaten verwerkt (zie hoofdstuk 5), en deze zijn ook gebruikt bij de interviews. De interviewvragen zijn terug te vinden in bijlage 5. De interviews met docent A en docent B zijn volledig na te lezen in respectievelijk bijlage 6 en 7.

4.5 Analyse

Om de resultaten van de evaluatieformulieren te analyseren zijn deze eerst weergegeven in tabellen (zie hoofdstuk 5: Resultaten). De resultaten zijn op verschillende manieren weergegeven:

- Het gehele evaluatieformulier met in elk hokje de relatieve frequentie van de leerlingen die hier in een kruisje gezet hebben.
- Een tabel waarin de dertien leerlingen uitgezet zijn tegen de verschillende standaardfuncties. Hierin is te af te lezen hoe elke leerling scoort op vragen over elke soort functie. Het ja/nee gedeelte van de evaluatie is hier niet van toepassing.
- Twee tabellen waarin de dertien leerlingen uitgezet zijn tegen de stellingen van het evaluatieformulier. De twee tabellen zijn voor het eerste gedeelte over de verschillende standaardfuncties, en het tweede gedeelte met de ja/nee stellingen.

Het analyseren van de interviews zal in drie stappen gebeuren (Eurib, 2012):

1. Ordenen:

Tijdens deze fase worden de uitgeschreven interviews gecomprimeerd tot alleen relevante informatie overblijft. Dit wordt gedaan door relevante woorden, zinsdelen of zinnen te markeren in het **geel**.

2. Labelen:

Als alle belangrijke informatie gemarkeerd is zal elke markering gelabeld worden. Daarvoor worden de verschillende labels eerst beschreven. Als alle data gelabeld is kan het zijn dat sommige labels vaker voorkomen dan andere. De frequentie van elk label zal dan geteld worden.

3. Verbanden leggen:

Nu de uitgeschreven interviews gereduceerd zijn tot een aantal labels kunnen er verbanden worden gelegd tussen deze labels. Hiermee kunnen antwoorden geformuleerd worden op de onderzoeksvraag. Deze stap zal verwerkt worden in de conclusie en discussie (Hoofdstuk 6).

5 Resultaten

5.1 Resultaten evaluatie leerlingen

In de tabellen 3 en 4 zijn de relatieve frequenties af te lezen van de kruisjes in elk hokje. In totaal hebben 13 leerlingen dit evaluatieformulier ingevuld. Met kleuren is visueel gemaakt welke scores hoog en welke laag zijn. Hiervoor is een kleurenschaal van rood (laag) naar groen (hoog) gebruikt.

1	Hoeveel vragen van het werkblad had je goed? (Gemiddeld)								5,23
#	Stelling	ax^2	ax^n (n oneven)	ax^n (n even)	$\frac{1}{x}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	a^x	$\sqrt{x}$
2	Ik ken de vorm van de grafiek van de functie	100%	69%	62%	62%	100%	100%	62%	69%
3	In het geval van een parabool weet ik of de grafiek een berg- of dalparabool is	100%	54%	62%					
4	Ik kan coördinaten van de top of het punt van symmetrie aflezen uit functievoorschriften	62%	23%	23%	8%				
5	Ik kan de grafiek van de functie schetsen	92%	46%	31%	23%	69%	69%	38%	31%
6	Ik kan het domein geven van de functie	69%	38%	46%	46%	54%	54%	38%	54%
7	Ik kan het bereik geven van de functie	62%	38%	38%	15%	38%	38%	31%	31%
8	Ik weet wanneer hogeregraadsvergelijkingen 0, 1 of 2 oplossingen hebben	92%	15%	23%					
9	Ik weet wanneer de grafiek van een hogeregraadsfunctie een paraboolvorm of een s-vorm heeft	69%	46%	38%					
10	In het geval van een s-vorm kan ik aan het functievoorschrift zien of het om een stijgende of een dalende grafiek gaat.	54%	31%	31%					
11	Ik weet of de functie een horizontale asymptoot heeft en zo ja, waar die ligt	38%	38%	31%	38%	31%	31%	31%	38%
12	Ik weet of de functie een verticale asymptoot heeft en zo ja, waar die ligt	38%	31%	31%	31%	31%	31%	23%	38%
13	Ik denk niet alleen aan de eenheidscirkel maar ook aan de grafiek					92%	92%		

Tabel 3: Resultaten evaluatie gedeelte 1

#	Stelling	ja	nee
14	Ik weet wat transformaties zijn	92%	8%
15	Ik weet wat het effect is van verticale translaties op functievoorschriften en wat ze doen met de grafieken van functies	92%	8%
16	Ik weet wat het effect is van horizontale translaties op functievoorschriften en wat ze doen met de grafieken van functies	92%	8%
17	Ik weet wat het effect is van vermenigvuldigingen t.o.v. de x-as op functievoorschriften en wat ze doen met de grafieken van functies	69%	31%
18	Ik weet wat het effect is van vermenigvuldigingen t.o.v. de y-as op functievoorschriften en wat ze doen met de grafieken van functies	62%	38%
19	Ik kan de coördinaten van de top zonder berekening aflezen uit het functievoorschrift $f(x) = 3(x - 2)^2 - 5$	62%	38%
20	Ik kan de vergelijkingen van de asymptoten aflezen uit het functievoorschrift $f(x) = \frac{4}{x+8} + 3$	15%	85%
21	Ik herken het soort functie nog steeds als er een paar transformaties op uitgevoerd zijn.	77%	23%
22	Ik zie het verband tussen het bereik en de evenwichtsstand en amplitude van goniometrische functies	54%	46%
23	Ik zie het verband tussen vermenigvuldiging t.o.v. de y-as en de periode van goniometrische functies	46%	54%
24	Ik had moeite met toepassen van transformaties omdat de stof te lang geleden was voor mij.	85%	15%
25	Ik had moeite met vragen over domein/bereik omdat de stof te lang geleden was voor mij.	69%	31%
26	Doordat ik transformaties toe weet te passen op simpelere functies zoals $f(x) = 2x^2$, weet ik ook hoe je transformaties toepast op lastigere functies zoals $g(x) = \frac{1}{7}e^{7\frac{1}{2}x-14} - 3$	15%	85%
27	Omdat ik het domein en bereik ken van de functie $f(x) = \sqrt{x}$, ken ik d.m.v. het toepassen van transformaties het domein en bereik van de functie $g(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2x-7} + 5$	31%	69%
28	Ik maak graag een schets van de grafieken van functies om inzicht te krijgen in vraagstukken.	85%	15%

Tabel 4: Resultaten evaluatie gedeelte 2

5.2 De kennis van leerlingen over verschillende standaardfuncties

In tabel 5 is per leerling af te lezen hoeveel ze van elk van de verschillende soorten standaardfuncties weten. Het betreft alleen het eerste gedeelte van het evaluatieformulier (niet de ja/nee-stellingen).

Leerling	ax^2	ax^n n oneven	ax^n n even	$\frac{1}{x}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	a^x	$\sqrt{x}$	Totaal
1	100%	100%	100%	0%	100%	100%	100	100	89%
2	36%	18%	18%	14%	29%	29%	17%	50%	26%
3	64%	36%	0%	0%	43%	43%	0%	0%	26%
4	100%	0%	0%	14%	29%	29%	17%	17%	27%
5	36%	0%	9%	29%	29%	29%	17%	33%	21%
6	55%	0%	0%	0%	57%	57%	0%	0%	21%
7	82%	45%	45%	57%	71%	71%	67%	67%	62%
8	64%	18%	0%	0%	57%	57%	0%	0%	26%
9	82%	36%	64%	43%	43%	43%	67%	33%	53%
10	36%	9%	18%	14%	57%	57%	0%	17%	26%
11	91%	82%	82%	71%	86%	86%	17%	67%	76%
12	73%	73%	55%	71%	71%	71%	67%	83%	70%
13	100%	91%	91%	86%	100%	100%	100%	100%	95%
Gem	60%	33%	31%	17%	32%	32%	17%	20%	

Tabel 5: De kennis van leerlingen over verschillende standaardfuncties

5.3 De kennis van leerlingen over de stellingen

In tabel 6 is te zien hoeveel kruisjes elke leerling bij elke stelling heeft gezet. De frequenties zijn relatief.

	Stellingen (over verschillende onderdelen)													
Leerling	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Totaal
1	87%	88%	100%	75%	88%	88%	88%	100%	100%	100%	88%	88%	100%	92%
2	13%	100%	33%	0%	13%	13%	38%	33%	0%	0%	0%	0%	100%	27%
3	20%	50%	67%	25%	50%	0%	0%	33%	67%	33%	0%	0%	100%	35%
4	0%	75%	33%	25%	13%	13%	13%	33%	33%	33%	13%	13%	100%	33%
5	20%	63%	67%	0%	50%	0%	0%	33%	0%	0%	0%	0%	100%	26%
6	13%	38%	33%	25%	38%	38%	0%	33%	0%	0%	0%	0%	100%	25%
7	7%	100%	100%	25%	13%	100%	38%	33%	0%	0%	100%	100%	100%	59%
8	20%	38%	67%	0%	38%	38%	0%	33%	33%	33%	0%	0%	100%	32%
9	33%	88%	67%	25%	63%	50%	63%	67%	100%	67%	25%	0%	100%	59%
10	27%	75%	67%	0%	38%	0%	25%	0%	33%	0%	13%	0%	100%	29%
11	20%	100%	100%	0%	75%	88%	13%	100%	100%	100%	88%	88%	100%	79%
12	60%	100%	100%	100%	50%	100%	100%	33%	100%	33%	25%	25%	100%	72%
13	67%	100%	100%	75%	100%	100%	100%	33%	100%	100%	100%	100%	100%	92%
Gem	30%	78%	72%	29%	48%	48%	37%	44%	51%	38%	35%	32%	100%	

Tabel 6: De kennis van leerlingen over de stellingen - gedeelte 1

In tabel 7 is per leerling te zien bij welke ja/nee stellingen ze een kruisje gezet hebben. De kruisjes bij stellingen 24 en 25 zijn omgekeerd i.v.m. de negatieve formulering t.o.v. de andere stellingen. Dus waar de leerlingen een kruisje gezet hebben is er in de tabel juist géén kruisje te zien. Dit is gedaan om de totaalscores juist te kunnen interpreteren.

	Stellingen ja/nee																		
Leerling	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	Totaal	%		
1	x	x	x	x	x			x	x	x					x	9	60		
2	x	x	x	x	x			x	x	x					x	9	60		
3	x	x	x			x		x							x	6	40		
4	x	x	x	x	x			x	x						x	8	53		
5	x	x	x	x	x	x				x					x	8	53		
6	x	x	x	x	x	x		x							x	8	53		
7						x										1	7		
8	x	x	x	x				x	x						x	7	47		
9	x	x	x			x	x	x				x		x	x	9	60		
10	x	x	x			x				x					x	6	40		
11	x	x	x	x	x			x	x					x	x	9	60		
12	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	14	93		
13	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		14	93		
Totaal	12	12	12	9	8	8	2	10	7	6	2	3	2	4	11				
%	92	92	92	69	62	62	15	77	54	46	15	23	15	31	85				

Tabel 7: De kennis van leerlingen over de stellingen - gedeelte 2

5.4 Analyse interview: Ordenen

Tijdens de interviews wordt vaak over ‘het probleem’ gesproken. Voor het afnemen van de interviews is daarom eerst de probleemstelling van dit onderzoek (nogmaals) besproken, namelijk dat leerlingen veel moeite lijken te hebben met het wisselen tussen verschillende representaties van functies en daardoor moeite hebben met het bepalen van kenmerken ervan, vooral als de functie een transformatie van een standaardfunctie betreft. Tijdens de interviews wordt dus steeds naar dit probleem gerefereerd.

In bijlage 6 en 7 zijn de gemarkeerde interviews volledig terug te lezen. Alle gemarkeerde fragmenten uit beide interviews zijn terug te vinden in bijlage 8.

In Bijlage 9 is te zien hoe elk interviewfragment in eerste instantie gelabeld is. Eerst worden 14 labels genoemd, en vervolgens is per fragment aangegeven welke labels daarbij horen. Om de interviews te analyseren is het echter interessanter om te zien wat er tijdens de interviews over elk label gezegd is door de docenten. Dus in plaats van per fragment aan te geven welke labels erbij horen, zal per label aangegeven worden welke fragmenten er onder vallen. Achteraf gezien zit er wel wat overlap in deze labels, dus zijn deze eerst samengevoegd voor de analyse. Het label ‘relationeel begrip’ is zo breed dat het eigenlijk bij bijna alle andere labels past, dus deze is verwijderd. Dit is ook logisch want als relationeel begrip geen probleem was voor leerlingen dan was het onderwerp van de hoofdvraag ook niet zo’n groot probleem voor ze. Voor elk label staat een letter zodat later elk fragment gecodeerd kan worden. De volgende labels blijven over:

- **A: Kennis vormen standaardgrafieken:** kennen de leerlingen de grafieken van alle standaardfuncties uit hun hoofd, en hoe gaan ze er mee om?
- **B: Eigenschappen van functies:** Kennen leerlingen de eigenschappen (toppen, asymptoten, domein/bereik, enz.) van alle standaardfuncties uit hun hoofd?
- **C: Transfer:** Kunnen leerlingen een eerder geleerd wiskundig concept toepassen bij een nieuw onderwerp?
- **D: Methode:** Alle opmerkingen over de gebruikte lesmethode, zowel het boek als tools zoals de grafische rekenmachine.
- **E: Mentaliteit/motivatatie leerlingen:** Alles over de motivatie en mentaliteit van leerlingen. Met motivatie wordt bedoeld of de leerlingen wel gemotiveerd zijn voor het vak of voor een goed cijfer. Met mentaliteit wordt bedoeld dat de leerlingen misschien wel gemotiveerd zijn, maar het met zo weinig inzet te doen. Dat betekent misschien het zoeken van alternatieve oplossingsroutes (soms trucjes), maar ook de manier van leren (te veel kijken naar antwoorden en uitwerkingen tijdens het leren).
- **F: Herhaling:** Herhalen de leerlingen wel genoeg of zakt veel stof weg? Misschien is er geen of te weinig tijd voor herhaling?
- **G: Uitleg Docent:** De invloed van de uitleg van de docent op de leeropbrengst van de leerlingen en het vasthouden van deze kennis.

De labels uit bijlage 9 zijn dus samengevoegd tot 7 nieuwe labels. In tabel 8 is te zien onder welke nieuwe labels de oude labels vallen.

Nieuwe labels	Oude labels (bijlage 9)
Kennis vormen standaardgrafieken	Kennis standaardgrafieken
Eigenschappen van functies	Eigenschappen functies
Transfer	Transfer
Methode	Methode
	Grafische rekenmachine
Mentaliteit/motivatatie leerlingen	Motivatatie Leerlingen
	Mentaliteit Leerlingen
	Alternatieve Oplossingsroutes
	Manier van leren
Herhaling	Herhaling
	Tijd
Uitleg docent	Uitleg docent

Tabel 8: Samenvoegen oude labels tot nieuwe labels

Elk fragment is gecodeerd met een letter voor het label en een cijfer voor het fragment zodat naar deze codes gerefereerd kan worden in de conclusie. Nu zal voor elk van deze labels aangegeven worden welke fragmenten hieronder vallen:

Kennis vormen standaardgrafieken: (12 fragmenten)

- **A1:** Verband functievoorschrift-tabel-grafiek vormt geen eenheid bij leerlingen.
- **A2:** In hogere klassen moeten meer typen functies bekend zijn.
- **A3:** Docent en methode schenken niet genoeg aandacht aan grafieken.
- **A4:** Leerlingen een overzichtje laten maken van alle soorten functies, hun grafiekvormen en eigenschappen.
- **A5:** Quizjes: welk functievoorschrift hoort bij welke grafiek?
- **A6:** Leerlingen eerst een tabel laten maken, dan een grafiek.
- **A7:** Niet nadenken over verband tussen functievoorschrift en grafiek.
- **A8:** Mathplus dwingt leerlingen dwarsverbanden te leggen. Leerlingen worden zo meer voor de leeuwen geworpen. Dat is een goede zaak, alleen voor de zwakke leerlingen is het minder.
- **A9:** Leerlingen vermijden inzichtelijke aanpak. Algebra is makkelijker, een standaardprocedure.
- **A10:** In de les breng je als docent steeds inzicht en grafieken aan de orde. Leerlingen begrijpen het dan, maar vervolgens doen ze toch weer het voorbeeldje na in plaats van zelf na te denken.
- **A11:** Het is raar dat leerlingen functies van type ax^2 en ax^n (met n is even) niet gelijkwaardig behandelen.
- **A12:** In de tweede en derde wordt veel aandacht besteed aan inzicht in functievoorschriften en grafieken, maar daarna wordt het losgelaten.

Eigenschappen van functies: (15 fragmenten)

- **B1:** Functie is een abstract begrip voor leerlingen.
- **B2:** Verband functievoorschrift-tabel-grafiek vormt geen eenheid bij leerlingen.
- **B3:** In hogere klassen moeten meer typen functies bekend zijn.
- **B4:** Leerlingen een overzichtje laten maken van alle soorten functies, hun grafiekvormen en eigenschappen.
- **B5:** Quizjes: welk functievoorschrift hoort bij welke grafiek?
- **B6:** Leerlingen hebben problemen met geven van domein en bereik.
- **B7:** Leerlingen hebben problemen met voldoet / voldoet niet.
- **B8:** Wanneer levert een gebroken vergelijking nul op?
- **B9:** Mathplus dwingt leerlingen dwarsverbanden te leggen. Leerlingen worden zo meer voor de leeuwen geworpen. Dat is een goede zaak, alleen voor de zwakke leerlingen is het minder.
- **B10:** In de les breng je als docent steeds inzicht en grafieken aan de orde. Leerlingen begrijpen het dan, maar vervolgens doen ze toch weer het voorbeeldje na in plaats van zelf na te denken.
- **B11:** Asymptoot is een abstract begrip voor leerlingen.
- **B12:** Het is raar dat leerlingen functies van type ax^2 en ax^n (met n is even) niet gelijkwaardig behandelen.
- **B13:** Wortels zijn abstract voor leerlingen.
- **B14:** In de tweede en derde wordt veel aandacht besteed aan inzicht in functievoorschriften en grafieken, maar daarna wordt het losgelaten.
- **B15:** Leerlingen hebben wel kennis van transformaties. Ze weten wat transformaties zijn, maar kunnen ze niet toepassen.

Transfer: (9 fragmenten)

- **C1:** In hogere klassen moeten meer functies bekend zijn.
- **C2:** Leerlingen raken verward doordat de methode het bereik bij een bepaald domein vraagt.
- **C3:** Moordend tempo in de vierde klas, de stof bezinkt daardoor niet.
- **C4:** Er ligt een probleem bij de transfer.
- **C5:** De ICT zou leerlingen een testje aan het begin en het einde van het jaar kunnen geven, om zo te zien op welke fronten iedere leerling vooruitgegaan is of stil is blijven staan.
- **C6:** In de derde klas kunnen leerlingen nog beredeneren en schetsen maken, in de vierde klas leren ze het af door de GR.
- **C7:** In de les breng je als docent steeds inzicht en grafieken aan de orde. Leerlingen begrijpen het dan, maar vervolgens doen ze toch weer het voorbeeldje na in plaats van zelf na te denken.
- **C8:** In de tweede en derde wordt veel aandacht besteed aan inzicht in functievoorschriften en grafieken, maar daarna wordt het losgelaten.
- **C9:** Leerlingen hebben wel kennis van transformaties. Ze weten wat transformaties zijn, maar kunnen ze niet toepassen.

Methode: (16 fragmenten)

- **D1:** G&R biedt functies gesorteerd aan.
- **D2:** Docent en methode schenken niet genoeg aandacht aan grafieken.
- **D3:** Methode besteedt veel aandacht aan hogeregraadsvergelijkingen, maar leerlingen scoren hier niet hoog op.
- **D4:** Leerlingen raken verward doordat de methode het bereik bij een bepaald domein vraagt.
- **D5:** Soms kunnen we beter afwijken van de methode.
- **D6:** Mathplus dwingt leerlingen dwarsverbanden te leggen. Leerlingen worden zo meer voor de leeuwen geworpen. Dat is een goede zaak, alleen voor de zwakke leerlingen is het minder.
- **D7:** Leerlingen worden lui van de GR.
- **D8:** GR zit niet genoeg verweven in de methode.
- **D9:** De GR heeft ook wel voordelen, zoals tijdbesparing.
- **D10:** Leerlingen realiseren niet dat rekenmachines ook numerieke algoritmes gebruiken om benaderingen van antwoorden te geven.
- **D11:** Er wordt te weinig gevraagd van leerlingen om te beredeneren.
- **D12:** In de derde klas kunnen leerlingen nog beredeneren en schetsen maken, in de vierde klas leren ze het af door de GR.
- **D13:** In de les breng je als docent steeds inzicht en grafieken aan de orde. Leerlingen begrijpen het dan, maar vervolgens doen ze toch weer het voorbeeldje na in plaats van zelf na te denken.
- **D14:** Getal en ruimte is te makkelijk voor leerlingen, ze hoeven alleen maar voorbeeldjes na te doen.
- **D15:** De Wageningse methode laat leerlingen zelf proberen en conclusies trekken, dan blijft de stof beter hangen.
- **D16:** De GR voegt niets toe.

Mentaliteit/motivatatie leerlingen: (17 fragmenten)

- **E1:** Leerlingen leren trucjes uit hun hoofd.
- **E2:** Met leerlingen in gesprek gaan over opvallende resultaten.
- **E3:** Leerlingen denken niet na over verband tussen functievoorschrift en grafiek.
- **E4:** Leerlingen kunnen nonchalant zijn.
- **E5:** Mathplus dwingt leerlingen dwarsverbanden te leggen. Leerlingen worden zo meer voor de leeuwen geworpen. Dat is een goede zaak, alleen voor de zwakke leerlingen is het minder.
- **E6:** Leerlingen worden lui van de GR.
- **E7:** Leerlingen vermijden inzichtelijke aanpak. Algebra is makkelijker, een standaardprocedure.
- **E8:** Leerlingen willen wel goed scoren maar zonder inzicht halen ze het ook wel, en inzicht krijgen kost te veel tijd.
- **E9:** Leerlingen zijn niet gewend om op inzicht te leren.
- **E10:** Er zijn te veel uitvluchtsmogelijkheden, alternatieve oplossingsroutes.
- **E11:** In de derde klas kunnen leerlingen nog beredeneren en schetsen maken, in de vierde klas leren ze het af door de GR.
- **E12:** In de les breng je als docent steeds inzicht en grafieken aan de orde. Leerlingen begrijpen het dan, maar vervolgens doen ze toch weer het voorbeeldje na in plaats van zelf na te denken.
- **E13:** Leerlingen kunnen onzeker zijn.
- **E14:** Leerlingen hebben ook veel stof van andere vakken aan hun hoofd.
- **E15:** Getal en ruimte is te makkelijk voor leerlingen, ze hoeven alleen maar voorbeeldjes na te doen.
- **E16:** Leerlingen kijken te snel naar de uitwerkingen.
- **E17:** De Wageningse methode laat leerlingen zelf proberen en conclusies trekken, dan blijft de stof beter hangen.

Herhaling: (5 fragmenten)

- **F1:** We zouden meer moeten herhalen.
- **F2:** Leerlingen een overzichtje laten maken van alle soorten functies, hun grafiekvormen en eigenschappen.
- **F3:** Quizjes: welk functievoorschrift hoort bij welke grafiek?
- **F4:** Er zijn te weinig contacturen om genoeg aandacht aan wiskunde te besteden.
- **F5:** In de tweede en derde wordt veel aandacht besteed aan inzicht in functievoorschriften en grafieken, maar daarna wordt het losgelaten.

Uitleg docent: (4 fragmenten)

- **G1:** Docent en methode schenken niet genoeg aandacht aan grafieken.
- **G2:** Soms kunnen we beter afwijken van de methode.
- **G3:** In de les breng je als docent steeds inzicht en grafieken aan de orde. Leerlingen begrijpen het dan, maar vervolgens doen ze toch weer het voorbeeldje na in plaats van zelf na te denken.
- **G4:** In de tweede en derde wordt veel aandacht besteed aan inzicht in functievoorschriften en grafieken, maar daarna wordt het losgelaten.

6 Conclusies en discussie

In dit hoofdstuk worden conclusies getrokken uit de resultaten van het onderzoek. Tevens wordt gereflecteerd op het verloop van het onderzoek zelf. Bij referenties naar interviewfragmenten wordt tussen haakjes een code van een letter en een getal gegeven, bijvoorbeeld: (E10). De fragmenten zijn terug te vinden in paragraaf 5.4.

6.1 Conclusies

Het gemiddelde van iets meer dan 5 van de 15 goede antwoorden op de test geeft al wel aan dat de leerlingen moeite hebben gehad met de vragen. Dit is ook aardig naar verwachting, maar aan de hand van de resultaten en interviews kunnen nu ook conclusies getrokken worden over de oorzaken van deze scores. Als eerste zullen de drie mogelijke oorzaken uit hoofdstuk 3 besproken worden, en vervolgens een aantal oorzaken die uit de resultaten naar voren zijn gekomen.

6.1.1 Oorzaken hoofdstuk 3

1. Leerlingen kennen vormen van de grafieken van de standaardfuncties niet uit hun hoofd.

De scores op stelling 2 van de evaluatie zeggen dat leerlingen de vorm van de grafieken van functies wel aardig kennen. Op zijn laagst wordt 62% gescoord op gebroken functies, exponentiële functies, en hogeregraadsfuncties met even macht. 100% van de leerlingen geeft aan de vormen van de grafieken van kwadratische en beide gevraagde goniometrische functies te kennen. Kwadratische functies behandelen de leerlingen natuurlijk al jarenlang, dus dat is niet vreemd. De hoge score bij de sinus- en cosinusfuncties zijn te verklaren door het feit dat de leerlingen op het moment van afnemen van de evaluatie midden in een hoofdstuk over goniometrie zaten. Kijken we echter naar stelling 5, dan zien we dat de leerlingen wel aangeven moeite te hebben met het schetsen van grafieken. Weer zijn bij de sinus- en cosinusfuncties aardige scores te zien (69%), en op kwadratische functies wordt 92% gescoord, maar op de overige functies wordt niet hoger dan 46% gescoord. Met 23% wordt het laagst gescoord op gebroken functies. Voor het schetsen van een grafiek is natuurlijk ook meer nodig dan alleen kennis van de vorm. Het is dan weer vreemd dat 85% van de leerlingen bij stelling 28 aangeven dat ze graag een schets maken van de grafieken van functies om inzicht te krijgen in vraagstukken. Dit kan echter ook betekenen dat ze hiervoor de GR als hulpmiddel gebruiken. De vorm van de grafieken is in elk geval niet het grootste probleem. Het zijn de eigenschappen van de verschillende standaardfuncties waar leerlingen meer moeite mee hebben.

2. Leerlingen hebben moeite met de eigenschappen van standaardfuncties zoals bereik/domein en asymptoten.

Uit stelling 6 en 7 blijkt dat leerlingen inderdaad moeite hebben met de begrippen domein en bereik. Alleen bij kwadratische functies wordt voldoende gescoord, maar bij de overige functies is de hoogste score 54%. De scores voor het geven van het bereik zijn steeds lager dan de scores voor het geven van

het domein. Dit kan komen doordat de methode vaak te snel vraagt naar een bereik bij een bepaald domein, in plaats van eerst het bereik eens afzonderlijk te behandelen (C2/D4). Bij stelling 25 geeft 69% van de leerlingen aan dat ze moeite hebben met vragen over domein/bereik omdat de stof te lang geleden is voor ze. Ook zeggen de docenten dat leerlingen al bijna afhaken zodra ze het woord 'asymptoot' horen (B11). Op asymptoten (stelling 11 en 12) wordt bij geen enkele functie hoger dan 38% gescoord. Toch zou het kunnen zijn dat leerlingen gewoon verward zijn geraakt bij functies die geen asymptoot hebben. De stelling luidde namelijk: ik weet *of* de functie een (verticale of horizontale) asymptoot heeft en zo ja, waar die ligt. Het zou kunnen dat leerlingen dit niet goed gelezen hebben, en daardoor verward zijn geraakt. Bij functies zoals de gebroken functie moet ook een verband gelegd worden tussen domein/bereik en asymptoten. Dit kan verklaren waarom de leerlingen bij stelling 6 en 7 het laagst scoren op de gebroken (46% en 15%) en de exponentiele functie (38% en 31%). Het valt ook op dat leerlingen laag scoren op de hogeregraadsfuncties (type ax^n), zowel met even als oneven n . Het is niet gek dat ze goed scoren op de kwadratische functie, deze kennen ze immers al vanaf het begin van de onderbouw. Het valt echter wel op dat leerlingen de hogeregraadsfunctie met even n niet hetzelfde behandelen als de kwadratische functie (A11/B12). In de evaluatie is dit ook terug te zien, want op kwadratische functies wordt gemiddeld 60% gescoord en op de hogeregraadsfunctie met even n slechts 31%. 62% van de leerlingen weet bijvoorbeeld wel de coördinaten van de top van een kwadratische functie af te lezen uit het functievoorschrift, maar bij de hogeregraadsfunctie met even n weet slechts 23% dit. In tabel 5 is per leerling de score te zien op het gebied van de verschillende standaardfuncties. De laagste gemiddelde scores zijn voor de gebroken en exponentiele functies. Op beide is 17% gescoord. Dit zijn functies waar niet zoveel aandacht aan wordt besteed als bijvoorbeeld hogeregraadsfuncties. Volgens de geïnterviewde docenten zijn deze functies erg abstract voor leerlingen. Ook de wortelfunctie, waarop 20% gescoord wordt, is een 'abstract monster' voor ze (B13). Functies in het algemeen zijn een abstract begrip voor leerlingen (B1), en naarmate ze verder in de bovenbouw komen moeten steeds meer soorten functies bekend zijn (B3). Het zou kunnen helpen om de leerlingen een overzichtje te laten maken van de verschillende soorten functies, grafiekvormen, en eigenschappen (A4/B4/F2).

3. *Leerlingen hebben moeite met het toepassen van transformaties.*

92% van de leerlingen geven bij stelling 14, 15 en 16 aan dat ze weten wat transformaties zijn, maar als gevraagd wordt of ze toppen of asymptoten kunnen aflezen uit een functievoorschrift hebben ze moeite. Dit heeft dus te maken met het toepassen van transformaties (B15/C9). In de resultaten van stelling 19 en 20 zien we dit terug. Bij stelling 19 geeft 62% van de leerlingen aan dat ze wel toppen kunnen aflezen uit een functievoorschrift. Die score valt mee, maar het viel op de werkbladen wel op dat een aantal leerlingen in plaats van transformaties toe te passen gewoon de afgeleide berekend hebben en deze gelijk gesteld hebben aan nul. Het aflezen van asymptoten uit een functievoorschrift (stelling 20) kan slechts 15%. Asymptoten zijn misschien lastiger voor leerlingen dan toppen, maar dit is ook een transformatie-probleem. Leerlingen geven bij stelling 14 t/m 18 aan dat ze aardig goed weten wat transformaties zijn, en wat er door verschillende transformaties gebeurt met een functie. Toch geeft 85% aan bij stelling 26 dat ze deze transformaties niet kunnen toepassen bij een functie die er ingewikkelder uitziet. Dit lijkt meer een transfer-probleem (C4). Hoewel een transformatie toepassen op beide functies hetzelfde werkt, schrikt de ingewikkelde functie de leerlingen blijkbaar toch af. Bij stelling 27 over het domein en bereik van een relatief simpele en een meer ingewikkelde

functie zien we hetzelfde resultaat. Blijkbaar ontbreken er veel verbindingen tussen deze concepten en functies in het cognitief schema van de leerlingen. Er is al geconstateerd dat leerlingen ook moeite hebben met de concepten domein/bereik en asymptoten zelf, maar begrip van deze concepten is wel van belang voor het toepassen van transformaties.

6.1.2 Nieuwe oorzaken

4. *Te weinig (tijd voor) herhaling.*

Stelling 24 laat zien dat 85% van de leerlingen aangeeft moeite te hebben met het toepassen van transformaties omdat dit onderwerp te lang geleden is voor ze. Stelling 25 laat zien dat 69% van de leerlingen aangeeft dat ze moeite hebben met vragen over het domein/bereik omdat dit te lang geleden is voor ze. Volgens interviewfragment C3 ligt het tempo erg hoog in de vierde klas, waardoor de stof niet bezinkt. Dit kan verklaren waarom de leerlingen uit de vijfde klas nog moeite hebben met deze stof. Ook zijn er te weinig contacturen voor wiskunde (F4). De verhouding tussen de hoeveelheid stof en het aantal contacturen is dus niet ideaal. Door meer te herhalen (F1) kunnen we het probleem dat stof niet bezinkt proberen aan te pakken, maar dan moet daar wel tijd voor zijn. Ook bij het onthouden van grafieken van standaardfuncties zou herhaling goed kunnen helpen (F1). Als de leerlingen een keer in de week (of twee weken) een soort testje of quizje zouden krijgen over de grafieken van alle soorten standaardfuncties die ze op dat moment moeten kennen, blijven ze hiermee bezig (A5/B5/F3). Door de gebroken en exponentiele functies blijven ze ook bezig met asymptoten. Daardoor zouden ze dit begrip misschien ook wat meer kunnen laten zakken zodat het wat minder abstract wordt voor ze. Uit de interviews blijkt namelijk ook dat de verschillende soorten functies te gesorteerd aangeboden worden (D1). Daardoor zijn de leerlingen bijvoorbeeld een hoofdstuk lang met exponentiele functies bezig, en krijgen ze ze daarna een tijdje niet terug. Zo moeten ze telkens als ze weer te maken krijgen met een functie die ze een tijdje niet gezien hebben weer even inkomen. Ook gaan leerlingen zich focussen op de functie die ze op dat moment behandelen, en laten ze de andere soorten functies even links liggen. De docenten geven aan dat als je de stof van het werkblad van tevoren een kwartier met ze zou behandelen, dat ze het dan wel zouden kunnen. Op korte termijn lukt het de leerlingen dus wel, maar het zou mooi zijn als deze kennis op lange termijn ook bleef hangen. Als eerder behandelde functies herhaald zouden blijven worden in de lessen, zou dit leerlingen ook de kans bieden om er een aantal als IGF's op te slaan. Op het moment dat een leerling van een grafiek een persoonlijke IGF weet te maken kunnen we stellen dat de leerling de basis van deze soort functie onder de knie heeft. Als die basis er is kunnen er verdere verbanden gelegd worden, bijvoorbeeld met transformaties.

5. *Leerlingen vertrouwen te veel op standaardprocedures.*

Sommige leerlingen wisten op het werkblad de coördinaten van de top nog te geven door het berekenen van de afgeleide, en het gelijkstellen hiervan aan nul. Hoewel dit ook een correcte methode is, kost het meer tijd. De bedoeling was dat leerlingen bedachten dat de top van de standaard hogeregraadsfunctie in de oorsprong ligt. Door transformaties toe te passen konden ze de coördinaten rechtstreeks aflezen uit het gegeven functievoorschrift. Hoewel deze methode veel efficiënter is, moeten er wel een aantal verbanden voor gelegd worden. Ook moet hiervoor gewisseld worden naar de grafische representatie van de functie. Het berekenen van de afgeleide en het gelijkstellen ervan

aan nul is meer een standaardprocedure voor leerlingen. De docenten geven ook aan dat leerlingen graag volgens deze standaardprocedures werken (A9/E7). Ze kunnen hetzelfde trucje opnieuw en opnieuw gebruiken om toppen te vinden. Dit zorgt ervoor dat de leerlingen het niet nodig vinden om de inzichtelijke methode aan te leren, want ze zoeken wel een andere route (E10). Ook zijn ze door deze standaardprocedure misschien meer verzekerd van een goed antwoord, omdat het trucje altijd grotendeels hetzelfde werkt. Het is vertrouwd, leerlingen weten dat het werkt, want leerlingen kunnen soms onzeker zijn (E13). De leerlingen zijn dus niet zo gemotiveerd om relationeel begrip te kweken. Ze neigen meer naar instrumenteel begrip, omdat dit voor hen sneller is, minder moeite kost, en vertrouwd is (E8). De methode zou hier een oorzaak van kunnen zijn. De docenten vinden dat de leerlingen in de methode G&R te veel aan het handje meegenomen worden. Overall staan vergelijkbare voorbeeldjes die de leerlingen precies na kunnen doen (D13/E12, D14/E15). Ook vormt het een probleem dat leerlingen te veel naar de antwoorden en uitwerkingen kijken tijdens het maken van huiswerk en tijdens het leren (E16). Daardoor leren de leerlingen niet zelf nadenken over wiskundige problemen (E3, E9), maar leren ze standaardprocedures aan (E7). Mathplus en de Wageningse Methode pakken dit anders aan. Mathplus dwingt leerlingen meer dwarsverbanden te leggen en werpt ze dan ook meer voor de leeuwen (E5). Volgens Docent A is dit beter voor de sterke leerlingen, maar voor de zwakkere leerlingen is het dan weer minder fijn. Volgens docent B laat de Wageningse Methode leerlingen zelf proberen en conclusies trekken zodat de stof beter blijft hangen (E17). Deze methode ziet dus meer af van de voorbeeldjes, zodat de leerlingen deze ook niet na kunnen doen en uit hun hoofd kunnen leren.

6. Leerlingen vertrouwen te veel op de GR.

Volgens beide docenten kan er wel wat aan de grafische rekenmachine gebeuren. Docent B vindt dat hij helemaal weg mag (D16), docent A vindt dat hij verkeerd toegepast wordt (D8). De leerlingen vertrouwen te veel op de GR, en beide docenten zijn het erover eens dat de leerlingen daardoor zelf niet genoeg dwarsverbanden leren leggen (D7/E6, D12/E11). De Grafische rekenmachine heeft zijn voordelen (D9), maar leerlingen vertrouwen er te veel op (D12/E11) en realiseren zich niet dat rekenmachines ook numerieke algoritmes gebruiken om benaderingen van antwoorden te geven (D10).

7. Verwarring bij de uitleg van functies.

Tijdens de interviews werd ook duidelijk dat het begrip 'functie' al erg abstract is voor leerlingen (B1). In de onderbouw wordt alleen maar over formules en grafieken gepraat, maar in de bovenbouw beginnen ze ineens met functies. Vaak denken leerlingen dat een functie en een formule hetzelfde is, maar een functie is meer dan een formule. Een functie kan natuurlijk wel in formulevorm weergegeven worden, wat we dan het functievoorschrift noemen. Het is lastig voor leerlingen om dit te bevatten. Een van de redenen daarvoor is dat we ons als docent daar wel eens in kunnen verspreken. In de interviews is al te zien dat de docenten vaak over functies praten terwijl ze eigenlijk het functievoorschrift bedoelen. Als dit in de klas ook gebeurt pikt de leerling het begrip 'functie' al snel op als een formule, maar dan met $f(x)$ in plaats van y voor het gelijkheidsteken. Juiste termen gebruiken tijdens de uitleg is dus erg belangrijk.

Deze conclusies zijn getrokken om de volgende onderzoeksvraag te beantwoorden: *Wat zijn de oorzaken van de fouten die leerlingen maken bij het wisselen tussen representaties van functies en het bepalen van belangrijke kenmerken van functies?*

Voor het overzicht worden deze conclusies nog een keer onder elkaar gezet:

- Leerlingen kennen de eigenschappen van de verschillende standaardfuncties niet uit hun hoofd. De algemene vorm van de grafiek kennen ze vaak wel, maar waar bijvoorbeeld de toppen of asymptoten liggen weten ze niet.
- Leerlingen weten wel wat transformaties zijn, maar ze weten ze niet toe te passen.
- Er wordt te weinig tijd besteed aan herhaling waardoor de stof snel wegzakt. Een oorzaak hiervan is dat er te weinig contacturen zijn voor wiskunde. Ook worden verschillende soorten functies gesorteerd aangeboden, waardoor een functie na behandeling een tijd niet terugkomt.
- Leerlingen vertrouwen te veel op standaardprocedures. Dit leren ze aan door de voorbeeldjes uit het boek en de uitwerkingen na te doen. Daardoor leren ze niet op inzicht, en leren ze geen verbanden leggen tussen verschillende representaties van functies.
- Leerlingen vertrouwen te veel op de GR. Ze krijgen dan ook te veel mogelijkheden om deze te gebruiken bij het huiswerk en tijdens toetsen. Doordat leerlingen de GR meer laten doen leren ze zelf minder nadenken.
- Bij de uitleg van functies kunnen docenten zich snel verspreken. Het is belangrijk dat er onderscheid gemaakt wordt in de termen *functie* en *functievoorschrift*.

6.2 Limitaties

Tijdens dit onderzoek zijn een aantal limitaties ontstaan. Oorspronkelijk was het plan om in twee 5vwo wiskunde B klassen een onderzoek te doen. Meestal zijn dat samen toch wel ongeveer 50 leerlingen. Dit bleken echter klassen te zijn van 17 en 18 leerlingen. Daarnaast was de docent van een van deze klassen vrij laat nog genoodzaakt de afspraak af te zeggen in verband met tijdnood. Er bleef dus slechts een klas over, waarbij uiteindelijk maar 13 leerlingen aanwezig waren op het moment van het afnemen van de test en de evaluatie. Het aantal leerlingen is dus behoorlijk veel minder dan oorspronkelijk de bedoeling was.

Op de evaluatie hebben de leerlingen in gevuld wat ze wel en niet wisten van de gegeven stellingen. Het zou kunnen zijn dat leerlingen niet goed van zichzelf kunnen inschatten of iets weten of niet. Het zou ook kunnen dat leerlingen bepaalde stellingen verkeerd gelezen of begrepen hebben en deze daarom niet goed ingevuld hebben. Er kan dus een bepaalde marge zitten in de percentages van de resultaten van het leerlingonderzoek.

De leerlingen hebben eerst het werkblad gemaakt en daarna de evaluatie ingevuld. Door het werkblad hebben ze hopelijk een beeld gekregen van wat ze wel en niet kunnen. Na het invullen van de evaluatie is het werkblad besproken. Die bespreking liet leerlingen ontdekken wat ze wel en niet wisten, maar kwam pas na de evaluatie. Toch is het bespreken van het werkblad na het invullen van de evaluatie gebeurd zodat de leerlingen niet te makkelijk konden denken dat ze bepaalde dingen wel wisten. Dat zou namelijk ook een verkeerde invloed hebben gehad op de resultaten.

Het labelen van gemarkeerde interviewfragmenten is alleen door mij zelf gedaan. Het zou mooier zijn om dit door twee of meerdere personen te doen en de labeling dan met elkaar te vergelijken, maar dit onderzoek doe ik nu eenmaal alleen.

6.3 Implicaties

Uit dit onderzoek blijkt wel dat leerlingen veel moeite hebben met de eigenschappen van functies. Dit komt onder andere doordat de functies te gesorteerd aangeboden zijn. Dit wil zeggen dat de functies een voor en behandeld worden, en dat elke soort functie daarna weer voor lange tijd losgelaten wordt. Daardoor leren leerlingen bijvoorbeeld vragen over domein/bereik eerst een tijd op een bepaalde soort functie toepassen. Het zou beter zijn om meteen naar alle bekende soorten functies te vragen. Tevens kan meer herhaling ervoor zorgen dat de stof beter blijft hangen. Methoden kunnen docenten hierbij helpen door testjes of toetsjes te ontwikkelen voor herhaling, puur gericht op de grafieken van standaardfuncties. Het gaat er daarbij om dat leerlingen blijven herhalen welke grafiek bij welke soort functie hoort. Docenten kunnen dit dan gebruiken om de leerlingen met alle soorten functies bezig te blijven houden. Volgens de geïnterviewde docenten moeten we dan ook de leerlingen in de toetsen testen op dit gebied. Daar zouden de methoden ook op in kunnen springen. Voor docenten kost dit materiaal veel tijd om dit zelf te ontwikkelen waardoor veel docenten het niet zomaar zullen oppakken.

Uit de analyse van de interviews blijkt ook dat de lesmethode en de grafische rekenmachine veelbesproken onderwerpen zijn. De lesmethode G&R geeft veel voorbeeldopgaven, en leerlingen zijn snel geneigd deze na te gaan doen. Daardoor leren zij zichzelf standaardprocedures aan in plaats van op inzicht te leren. Daarom zou het beter zijn als de methode de leerlingen zelf wat meer liet nadenken over de opgaven. Volgens de geïnterviewde docenten mag er ook wel wat aan de grafische rekenmachine gebeuren. Sommigen zeggen dat hij helemaal weg mag, maar misschien is het beter om eerst te testen of het werkt om de GR anders in de lesmethode te verweven. Zo kunnen methoden de hoofdstukken maken waarbij elke eerste drie of vier hoofdstukken geen GR nodig is, en het hoofdstuk (eventueel) afsluiten met een of twee paragrafen waarbij de GR wel nodig is. Ook bij toetsen zou hierop ingehaakt kunnen worden. Zo kunnen er bijvoorbeeld toetsen gegeven worden die uit twee delen bestaan. Bij het eerste deel mogen de leerlingen geen GR gebruiken en bij het tweede deel wel. Dit zorgt ervoor dat leerlingen niet meer altijd volledig op de GR kunnen vertrouwen en dat er dan meer van hun denkvermogen gevraagd wordt. Op deze manier leren leerlingen alsnog om te gaan met de GR, die toch handig is om bijvoorbeeld zeer ingewikkelde functies te plotten.

Ook is het erg belangrijk dat docenten tijdens de uitleg goed opletten als het over functies gaat. Vanaf de uitleg van het begrip functie, moet de docent zelf ook de term functievoorschrift voor de formulevorm van functies gaan gebruiken.

6.4 Suggesties voor verder onderzoek

Een belangrijke suggestie voor verder onderzoek is om te kijken of het herhalen van stof over verschillende soorten standaardfuncties, met name de grafische representaties, de leerlingen helpt om de stof beter als basis op te kunnen slaan. Er zou onderzocht kunnen worden of dat het beste in de vorm van kleine testjes of in een andere vorm kan, en wat voor soort vragen er dan gesteld moeten worden. Ook zou het mooi zijn om te onderzoeken hoe vaak zo'n herhaling nodig is, en wat je in het geval van tijdnood het beste kunt doen.

Nog een suggestie is het onderzoeken van de verschillen tussen verschillende methoden. Zijn er methoden die de stof minder gesorteerd aanbieden dan G&R? Is er dan ook een verschil in de kennis van de leerlingen die deze methode volgen en de leerlingen die G&R volgen?

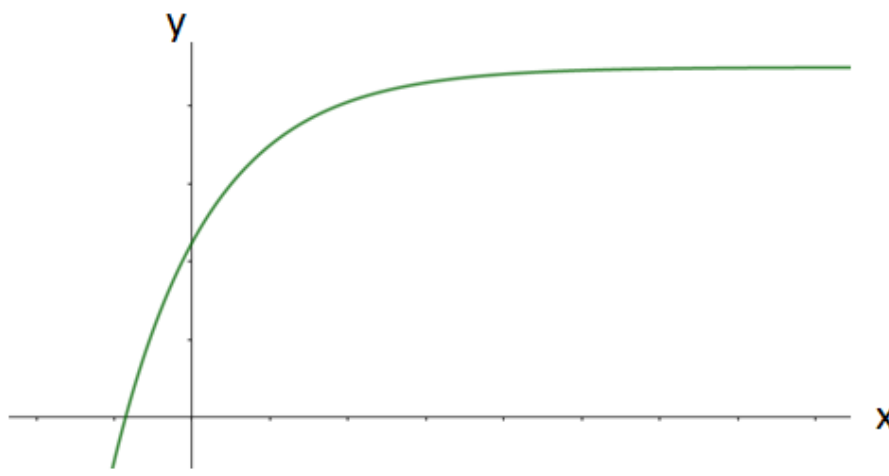
7 Verwijzingen

- Ana Elisa Lage, M. T. (2006). An analysis of students' ideas about transformations of functions. *Advanced Mathematical Thinking*, 161 - 168.
- Craats, J. v. (2008). *Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen*. Zwartboek Rekenonderwijs.
- David Carraher, A. S. (2009). the Transfer Dilemma. *the Journal of the Learning Sciences*, 24.
- Eurib. (2012, september 7). *Verwerken van kwalitatieve data*. Opgehaald van Eurib:
<https://www.eurib.net/verwerken-van-kwalitatieve-data/>
- Evans, J. (1999). Building Bridges: Reflections on the problem of Transfer of Learning in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 22.
- Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *the Journal of Mathematical Behavior*, 17.
- Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Math4All. (sd). *Domein en Bereik*. Opgehaald van Math4All:
http://math4allview.appspot.com/view?comp=vb-bg2&subcomp=vb-bg22&variant=m4a_view_old&parent=www.math4all.nl/overzichten/vwo-b/13&repo=m4a&item=explanation
- Math4All. (sd). *Transformaties*. Opgehaald van Math4All:
http://math4allview.appspot.com/view?comp=vb-bg2&subcomp=vb-bg25&variant=m4a_view_old&parent=www.math4all.nl/overzichten/vwo-b/13&repo=m4a&item=theory
- Paul Drijvers, A. v. (2016). *Handboek wiskundendidactiek*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Peter M.G.M. Kop, F. J. (2015, Juli 9). Identifying a framework for graphing formulas from expert strategies. *the Journal of Mathematical Behavior*, p. 14.
- Peter M.G.M. Kop, F. J. (2017, Februari 9). Graphing formulas: Unraveling experts' recognition processes. *the Journal of Mathematical Behavior*, p. 16.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. *Educational studies in mathematics*, 36.
- Skemp, R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*.
- Skemp, R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *100 years of mathematics teacher*, 8.
- TU Delft. (sd). *Functies*. Opgehaald van tudelft: <https://www.tudelft.nl/ewi/studeren/online-onderwijs/wiskunde-uitgelegd/functies/>

8 Bijlagen

8.1 Bijlage 1: Werkblad 5vwo Wiskunde B

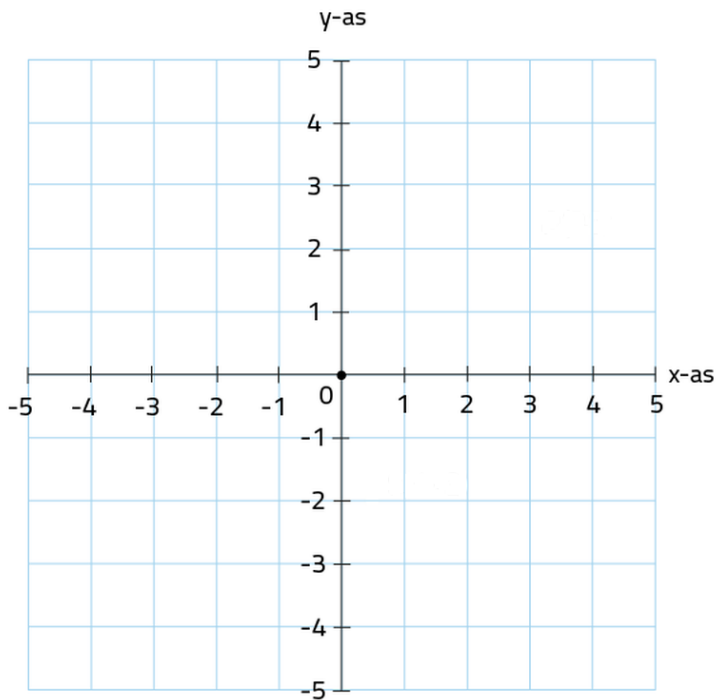
- 1) Wat zijn de coördinaten van de top van de functie $f(x) = 3(x - 5)^2 + 1$?
- 2) Wat is het bereik van de functie $f(x) = 3 \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) + 2$?
- 3) Gegeven is de onderstaande grafiek:



Welke van de volgende functies heeft de bovenstaande grafiek?

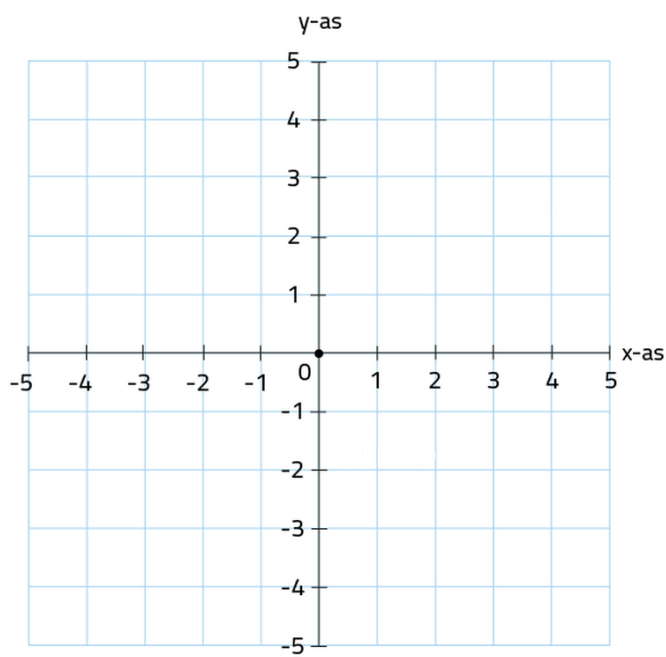
- a. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-2} + 4\frac{1}{2}$
 - b. $g(x) = -\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-2} - 4\frac{1}{2}$
 - c. $h(x) = -\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-2} + 4\frac{1}{2}$
- 4) Geef de verticale en horizontale asymptoot van de functie $f(x) = \frac{2}{x+3} - 5$. Vermeld welke asymptoot de horizontale is en welke de verticale.
 - 5) Geef het domein en het bereik van de functie $f(x) = -\sqrt{x+3} + 2$
 - 6) Geef het domein en het bereik van de functie $f(x) = \frac{2}{x-1} - 3$

- 7) Geef het domein en het bereik van de functie $f(x) = -\frac{1}{2}e^{x-2} + 7$
- 8) Schets de grafiek van de functie $f(x) = (2 + x)^2 - 5$ in het onderstaande assenstelsel.



- 9) Gegeven is de functie $f(x) = 5\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{3}x - \pi\right) + 4$. Geef de formules van de raaklijnen van de toppen.
- 10) Gegeven is de functie $f(x) = -(x - 3)^2 - 6$ beperkt tot het domein $D = [0, 5]$. Geef het bereik van de functie op dit domein.
- 11) Geef de amplitude, evenwichtsstand, en periode van de functie $f(x) = 3\sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) + 5$
- 12) Gegeven is de functie $f(x) = \sin(4x) - \frac{3}{4}$ met domein $D = [0, 2\pi]$.
Hoe vaak snijdt de grafiek van $f(x)$ de x-as?
- 13) Los op en geef de exacte oplossing: $\frac{3}{2}x^6 + 22 = 88$

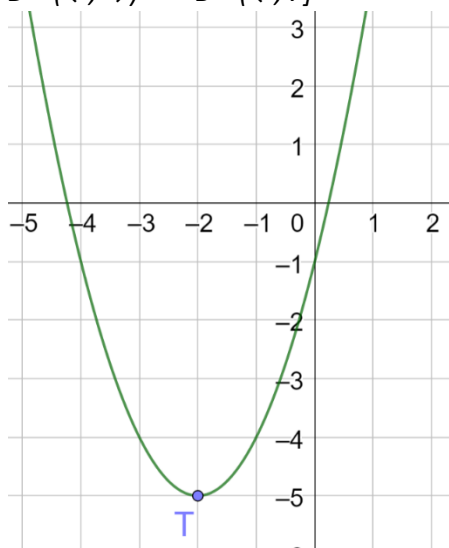
14) Schets de grafiek van de functie $f(x) = -(x - 2)^3 + 1$ in het onderstaande assenstelsel.



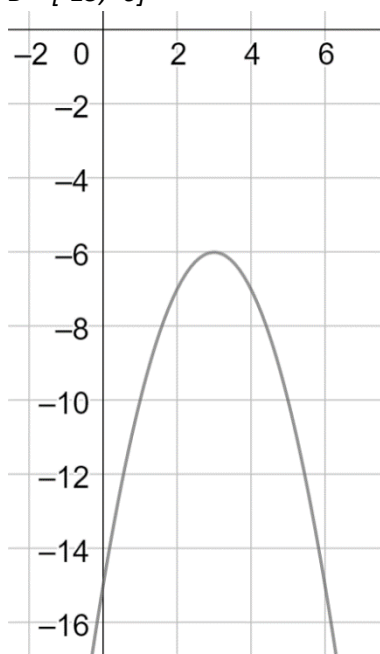
15) Wat is het bereik van de functie $f(x) = -2(x + 6)^4 - 6$?

8.2 Bijlage 2: Antwoorden Werkblad 5vwo wiskunde B

1. $(5, 1)$
2. $B = [-1, 5]$
3. C
4. Horizontaal: $y = -5$ Verticaal: $x = -3$
5. $D = [-3, \rightarrow)$ $B = (\leftarrow, 2]$
6. $D = (\leftarrow, \rightarrow) \setminus \{1\}$ $B = (\leftarrow, \rightarrow) \setminus \{-3\}$
7. $D = (\leftarrow, \rightarrow)$ $B = (\leftarrow, 7]$

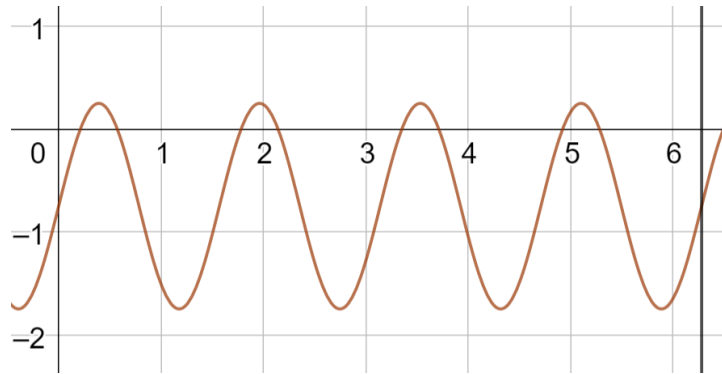


- 8.
9. $y = -1,5$ $y = 9,5$
10. $B = [-15, -6]$

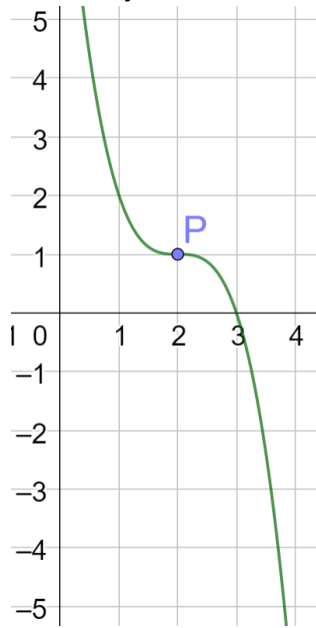


11. Amplitude: 3 Evenwichtsstand: $y = 5$ Periode $= 2\pi$

12. 8 keer



13. $x = \sqrt[6]{44}$ of $x = -\sqrt[6]{44}$



14.

15. $B = (-\infty, -6]$

8.3 Bijlage 3: Powerpoint uitleg werkblad

Werkblad:

Regels:

- Geen beoordeling
- Geen namen opschrijven
- Geen rekenmachine

Evaluatie:

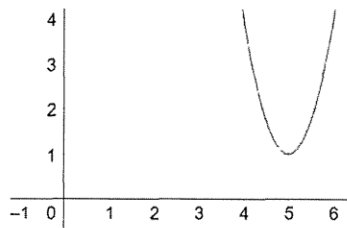
Regels:

- Schrijf je naam niet op
- Zet een kruisje als een stelling voor jou geldt
- Weet je het niet zeker? Zet dan geen kruisje

Vraag 1

$$f(x) = 3(x-5)^2 + 1$$

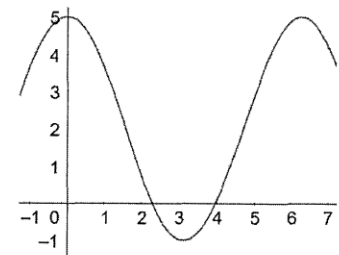
Antwoord:
T(5, 1)



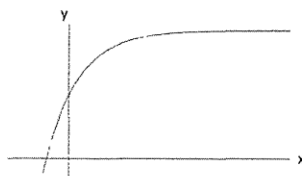
Vraag 2

$$f(x) = 3 \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) + 2$$

Antwoord:
B = [-1, 5]



Vraag 3



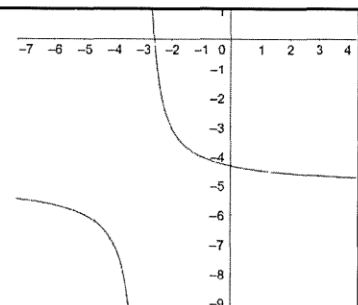
Antwoord C

$$h(x) = -\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-2} + 4 \cdot \frac{1}{2}$$

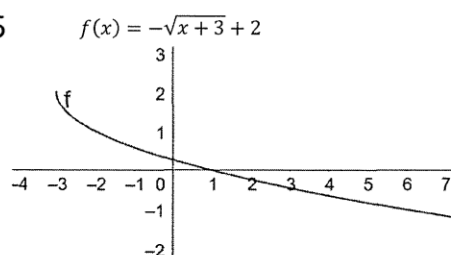
Vraag 4

$$f(x) = \frac{2}{x+3} - 5$$

Antwoord:
Horizontaal: $y = -5$
Verticaal: $x = -3$



Vraag 5



Antwoord:

$$D = [-3, \infty)$$

$$B = (-\infty, 2]$$

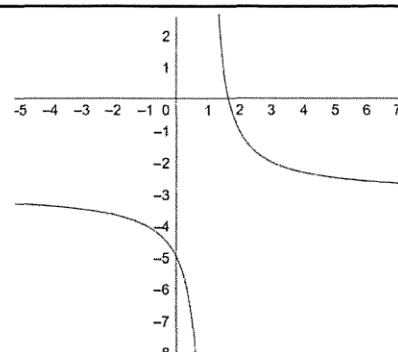
Vraag 6

$$f(x) = \frac{2}{x-1} - 3$$

Antwoord:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$B = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$



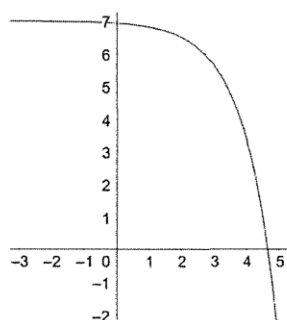
Vraag 7

$$f(x) = -\frac{1}{2}e^{x-2} + 7$$

Antwoord:

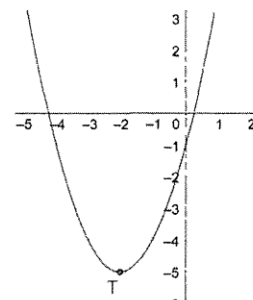
$$D = (-\infty, \infty)$$

$$B = (-\infty, 7)$$



Vraag 8

$$f(x) = (2+x)^2 - 5$$

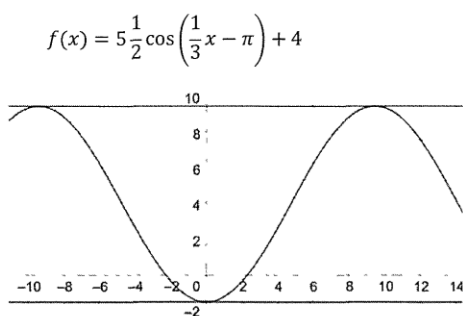


Vraag 9

Antwoord:

$$y = 9\frac{1}{2}$$

$$y = -1\frac{1}{2}$$



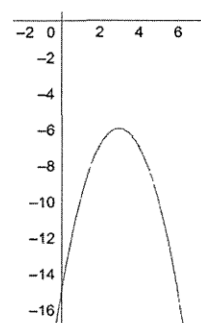
Vraag 10

$$f(x) = -(x-3)^2 - 6$$

$$D = [0, 5]$$

Antwoord:

$$B = [-15, -6]$$



Vraag 11

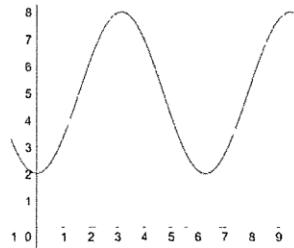
$$f(x) = 3 \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) + 5$$

Antwoord:

Amplitude: 3

Evenwichtsstand: $y = 5$

Periode = 2π



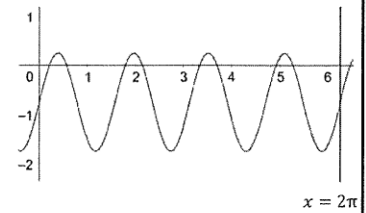
Vraag 12

$$f(x) = \sin(4x) - \frac{3}{4}$$

$$D = [0, 2\pi]$$

Antwoord:

8 keer

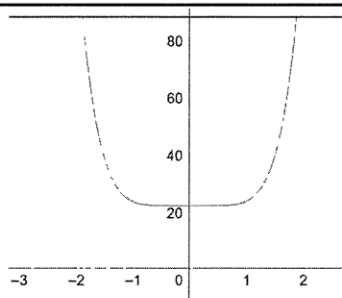


Vraag 13

$$\frac{3}{2}x^6 + 22 = 88$$

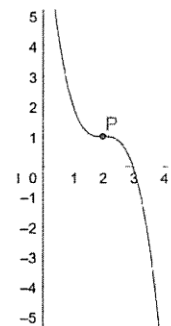
Antwoord:

$$x = \sqrt[6]{44} \quad \vee \quad x = -\sqrt[6]{44}$$



Vraag 14

$$f(x) = -(x-2)^3 + 1$$

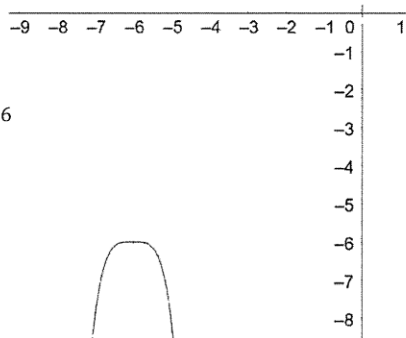


Vraag 15

$$f(x) = -2(x+6)^4 - 6$$

Antwoord:

$$B = (-\infty, -6]$$



8.4 Bijlage 4: Evaluatieformulier

Evaluatie:

1	Hoeveel vragen van het werkblad had je goed?	
---	--	--

Zet bij elke stelling een kruisje bij de functie waar deze op van toepassing is voor jou. Neem bij het invullen aan dat er voor de verschillende functies een willekeurige a en een n gegeven zijn. In het geval van de functie a^x geldt dat a positief is. In alle gevallen geldt: $a \neq 0$ en $n \neq 0$. Vul de tabel in naar de kennis die je had tijdens het maken van het werkblad, niet na het bespreken er van.

#	Stelling	ax^2	ax^n (n oneven)	ax^n (n even)	$\frac{1}{x}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	a^x	$\sqrt{x}$
2	Ik ken de vorm van de grafiek van de functie *								
3	In het geval van een parabool weet ik of de grafiek een berg- of dalparabool is								
4	Ik kan coördinaten van de top of het punt van symmetrie aflezen uit functievoorschriften								
5	Ik kan de grafiek van de functie schetsen								
6	Ik kan het domein geven van de functie								
7	Ik kan het bereik geven van de functie								
8	Ik weet wanneer hogeregraadsvergelijkingen 0, 1 of 2 oplossingen hebben								
9	Ik weet wanneer de grafiek van een hogeregraadsfunctie een paraboolvorm of een s-vorm heeft								
10	In het geval van een s-vorm kan ik aan het functievoorschrift zien of het om een stijgende of een dalende grafiek gaat.								
11	Ik weet of de functie een horizontale asymptoot heeft en zo ja, waar die ligt								
12	Ik weet of de functie een verticale asymptoot heeft en zo ja, waar die ligt								
13	Ik denk niet alleen aan de eenheidscirkel maar ook aan de grafiek								

*Vorm: met de vorm wordt de algemene vorm bedoeld waarbij de oriëntatie niet meegerekend wordt. Van kwadratische vergelijkingen betekent dat dat je weet dat de grafiek een parabool is, en bij derdegraads vergelijkingen weet je dat de grafiek een s-vorm heeft. Ook weet je of de grafiek

asymptoten heeft. De oriëntatie maakt hierbij niet uit, dat wil zeggen dat je bijvoorbeeld niet per se hoeft te weten hoe je kunt zien of het om een berg- of een dalparabool gaat. Je moet wel weten of de grafiek asymptoten heeft of niet.

Kruis aan of de stelling wel of niet van toepassing is op jou.

#	Stelling	ja	nee
14	Ik weet wat transformaties zijn		
15	Ik weet wat het effect is van verticale translaties op functievoorschriften en wat ze doen met de grafieken van functies		
16	Ik weet wat het effect is van horizontale translaties op functievoorschriften en wat ze doen met de grafieken van functies		
17	Ik weet wat het effect is van vermenigvuldigingen t.o.v. de x-as op functievoorschriften en wat ze doen met de grafieken van functies		
18	Ik weet wat het effect is van vermenigvuldigingen t.o.v. de y-as op functievoorschriften en wat ze doen met de grafieken van functies		
19	Ik kan de coördinaten van de top zonder berekening aflezen uit het functievoorschrift $f(x) = 3(x - 2)^2 - 5$		
20	Ik kan de vergelijkingen van de asymptoten aflezen uit het functievoorschrift $f(x) = \frac{4}{x+8} + 3$		
21	Ik herken het soort functie nog steeds als er een paar transformaties op uitgevoerd zijn.		
22	Ik zie het verband tussen het bereik en de evenwichtsstand en amplitude van goniometrische functies		
23	Ik zie het verband tussen vermenigvuldiging t.o.v. de y-as en de periode van goniometrische functies		
24	Ik had moeite met toepassen van transformaties omdat de stof te lang geleden was voor mij.		
25	Ik had moeite met vragen over domein/bereik omdat de stof te lang geleden was voor mij.		
26	Doordat ik transformaties toe weet te passen op simpelere functies zoals $f(x) = 2x^2$, weet ik ook hoe je transformaties toepast op lastigere functies zoals $g(x) = \frac{1}{7}e^{\frac{7}{2}x-14} - 3$		
27	Omdat ik het domein en bereik ken van de functie $f(x) = \sqrt{x}$, ken ik d.m.v. het toepassen van transformaties het domein en bereik van de functie $g(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2x-7} + 5$		
28	Ik maak graag een schets van de grafieken van functies om inzicht te krijgen in vraagstukken.		

8.5 Bijlage 5: Interviewvragen docenten

Interviewvragen:

- *Vallen jou deze problemen ook op in de klas of bij toetsen? Hoe dan?*
- *Waar vallen de problemen het meest op? (welke klassen/jaren)*
- *Wat is de grootste oorzaak van het probleem?*
- *Zijn er nog andere oorzaken van de genoemde problemen die je opvallen? Welke dan?*
- *Wat doe je als docent om de problemen aan te pakken?*
- *Zou je nog meer kunnen doen om de problemen aan te pakken?*
- *Heb je verder nog aanvullingen?*

(Pas nu worden de resultaten laten zien)

- *Wat valt je het meest op aan de resultaten van het leerlingenonderzoek?*
- *Had je deze resultaten verwacht?*
- *Welke resultaten zijn opvallend?*
- *Wat valt je op aan de resultaten van de standaardfuncties?*
- *Wat valt je op aan de resultaten van de verschillende onderdelen?*

Sturende vragen:

- *Denk je dat het probleem in de onderbouw al begint?*
- *Denk je dat er een probleem zit bij de transfer? Hoe dan?*
- *Denk je dat er een probleem zit bij de methode die je gebruikt? Wat dan?*
- *Denk je dat er een probleem zit bij het (overmatig) gebruik van de GR of andere digitale tools? Hoe dan?*
- *Denk je dat er een probleem zit bij de uitleg van (andere) docenten? Hoe dan?*
- *Denk je dat er een probleem zit bij de omstandigheden op school waar je werkt? Hoe dan?*

In eerste instantie worden alleen de interviewvragen gesteld. Deze vragen zijn open en de antwoorden kunnen alle kanten op. Het doel is om zo uitgebreid mogelijke antwoorden te krijgen op de vragen. Met de sturende vragen probeer ik de docenten iets te sturen, mochten ze dingen overslaan waar ik geïnteresseerd in ben.

8.6 Bijlage 6: Interview met docent A

V: Vallen jou deze problemen ook op in jouw 5v wiskunde B klas, en hoe dan?

A: Nou, je merkt dat een **functie voor leerlingen een vrij abstract begrip is**. Ik denk dat als je aan de niveau-theorie van **van Hiele** denkt, dat in getal en ruimte de **functie als het laagste niveau** wordt gezien. Daar bovenop komen de eigenschappen, enz. Maar ik denk eigenlijk dat de grafiek daar onder zit, of dat ze in elk geval met elkaar verbonden zijn. Ik heb het altijd over de driehoek **'functie-tabel-grafiek', en die vormen niet een eenheid bij leerlingen**. Als je het hebt over bereik, toppen, snijpunten met assen, al die dingen, die kun je gewoon het makkelijkst te pakken krijgen als je de grafiek van de functie makkelijk beheerst, en bovendien is dat visuele informatie en dat sla je veel makkelijker op. Raar genoeg doen leerlingen dat niet, of niet goed genoeg.

V: Vallen jou deze problemen ook op in andere leerjaren of niveaus, en waar het meest?

A: Ze gaan in de hogere klassen meer opvallen omdat daar **meer typen functies bekend moeten zijn** en omdat ze **broksgewijs worden aangeboden in de methode, niet door elkaar**. Daarom zou in die zin de methode van Malmberg (mathplus) veel beter zijn. Omdat ze heel **gesorteerd aangeboden** worden vergeten leerlingen ze weer, en als ze dan verderop het overzicht moeten hebben en je geeft een toets waar ze allemaal in voor komen, dan vallen ze door de mand.

V: Wat is de grootste oorzaak van het probleem?

A: Dat wij als docent en methode **niet genoeg aandacht schenken aan grafieken**. Sterker nog, denk eens aan de parabool, een meetkundig object. Eigenlijk zou je daar met leerlingen eerst eens over moeten fantaseren en dat wetenschappelijk gezien daarna er pas een functievoorschrift bij gekomen is. Want eigenlijk is het een heel concreet object wat je zo met een touwtje en een spijker kan maken. Daarna hebben ze analytisch nog een functie erbij verzonnen. Daar zouden we het meer over moeten hebben. Ook bijvoorbeeld bij de sinus, waarom zouden we het niet eerst over de vorm en eigenschappen hebben, en daarna pas het functiebegrip erbij halen.

V: Zijn er nog andere oorzaken van het probleem?

A: Nou, ik denk dat we ook **meer zouden moeten herhalen**, omdat de methode dat niet doet en juist de stof heel gesorteerd aanbiedt. Ik zou er heel erg voor zijn om het soort opgaven van jouw werkblad gewoon **regelmatig in toetsen terug te laten komen**. Ze zijn helemaal gewend dat als het over parabolen gaat dat ze het dan moeten kunnen, maar als je er ineens een wortel tussen gooit zijn ze van slag. Dus gewoon **meer herhalen**. Je mag ze **niet met dit soort vragen overvallen**, maar als je **in de les aandacht besteedt** aan dit soort vragen mag je het best **in de toets terugvragen**. Op het moment dat je het over de sinus hebt, kun je ook best weer bijvoorbeeld de wortelgrafiek erbij halen om te laten zien wat daar nou de overlap in is.

V: Doe jij zelf als docent ook iets om deze problemen aan te pakken, en wat dan?

A: Ik probeer wel aan te vullen door veel **nadruk te leggen op het verband tussen de grafiek en het functievoorschrift**, dus ik laat ze in 4vwo vaak ook wel een **overzichtje maken van alle standaardgrafieken die ze kennen, zonder rekenmachine**. Ook probeer ik met regelmaat **geogebra** erbij te halen, zeker als je het bijvoorbeeld over die transformaties hebt, om dat zo logisch te laten worden.

V: Zou je nog meer kunnen doen om deze problemen aan te pakken of te voorkomen?

A: Wat bijvoorbeeld heel grappig is, en dat heb ik ooit eens met een vriend gedaan, je kunt gewoon **quizjes** verzinnen waarbij je grafieken moet raden, of waarbij je functies bij grafieken moet raden. In jou werkblad staat een vraag waarbij je het functievoorschrift moet raden, maar daarbij weet je het type functie al, maar er is eigenlijk niets grappiger dan gewoon de **leerlingen te laten kiezen tussen een wortel, een parabool, gebroken, een sinus, enz.** Zo nu en dan is het leuk om de leerlingen daar eens mee te prikkelen.

V: Heb je verder nog aanvullingen?

A: Ik vind het eigenlijk wel interessant, want ik heb het over 'functie-tabel-grafiek', maar vraag leerlingen maar eens om een **tabel te maken, dat vinden ze even moeilijk als een grafiek.** Het is interessant om een beeld te krijgen van hoe mensen met die drie omgaan, wat voor hen de verbanden ertussen zijn, en wat hen het meest bevalt. Als ik jou vraag om de grafiek van een sinus te tekenen, hoe kan het dat jij dat zo precies weet? Heb je daar ook iets van een tabel bij of zie je dat puur aan de functie? En wat als de functie getransformeerd is? Dat is opzich wel een onderzoekje waard.

***Docent krijgt nu de resultaten te zien van het leerlingonderzoek**

V: Als je de resultaten bekijkt, wat valt je dan het meest op?

A: Het rode gedeelte bij **hogeregraadsvergelijkingen.** Dat vind ik bijzonder want **daar wordt in de methode juist wel veel aandacht aan besteed,** maar blijkbaar komt het niet genoeg terug. De **gebroken functie valt ook op.** Ook het **geven van het bereik valt op.** **De methode besteedt daar een keer wat aandacht aan, en dan ook nog zo dat ze het bereik bij een bepaald domein gaan vragen.** Dan denk ik, doe dat nou gewoon pas later, nu is dat niet zo relevant. Het gaat er om wat je voorstelt bij het bereik, wat is het eigenlijk? En dat vinden ze al lastig genoeg, dat je in feite projectie op de y-as doet, en dat je dan kijkt wat allemaal geraakt wordt en wat niet. **Leerlingen leren ook uit hun hoofd dat ze voor het bereik de toppen moeten gaan bepalen, maar dat hoeft helemaal niet.** Er zijn genoeg grafieken die geen toppen hebben, waarom zou je die gaan berekenen? Als docent weet je dat leerlingen het begrip bereik lastig vinden, en dat komt blijkbaar ook uit de test. **Toch doen we vaak maar weer een beetje wat de methode aanreikt, maar hier zou je uit aflezen dat je sommige dingen toch anders moet aanpakken.** **Asymptoten** vallen ook op. Daar gevoel voor kweken is lastig voor leerlingen, en daarna moeten ze het **ook nog wiskundig met limieten kunnen opschrijven.** In de **vierde klas** gaat dit allemaal met een **moordend tempo,** en eigenlijk heb je er te weinig tijd voor om dit te laten bezinken. In de resultaten per leerling kun je ook zien dat sommige leerlingen erg zwak scoren. Je zou je kunnen **afvragen of het zin heeft om zo'n leerling daar ook eens naar te vragen.** Ook leerlingen die bijvoorbeeld maar op één gebied erg laag scoort. Hoe kan het dat zo'n leerling op één gebied erg laag scoort, en op de andere gebieden heel hoog. Heeft zo'n leerling een les gemist of heeft hij de uitleg niet begrepen? Is het weggezakt?

V: Had je deze resultaten verwacht?

A: Dat er problemen liggen bij deze onderwerpen had ik **wel verwacht** ja. Als deze leerlingen hier cijfers voor zouden krijgen zie je wel dat er veel onvoldoendes gevallen waren. Een interessante vraag is dan: wat doe je daaraan? Als je het hebt over de basisvaardigheden, elke tweede klasser moet een lineaire vergelijking op kunnen lossen, dus je zou zeggen dat de stof van dit werkblad wel gewoon in 4vwo en 5vwo bekend moet zijn. Elke leerling moet dit kunnen want je hebt dit in 6vwo keihard nodig.

V: Wat valt je op aan de resultaten van de leerlingen per standaardfunctie?

A: Het valt op dat bij de functies $\sin(x)$ en $\cos(x)$ best wel redelijk gescoord zijn. Maar aan de andere kant denk ik dat ze op het moment van het maken van dit werkblad net deze stof aan het behandelen waren. Verder vind ik het zorgwekkend dat er een aantal leerlingen zijn die op alle fronten onderuitgaan. Ik vraag me af of dat leerlingen zijn die naar 6vwo zijn overgegaan.

V: Wat valt je op aan de resultaten van de leerlingen per stelling?

A: Asymptoten vallen op, daar hebben we het net ook over gehad. Ook het hele domein-probleem valt op. Leerlingen weten vaak niet wanneer er nou wel voldoet bij moet en wanneer niet. Ze gaan dit soort dingen gewoon uit hun hoofd leren, ze hebben geen idee wat ze moeten doen. Ook hebben ze moeite met wanneer een gebroken vergelijking nou nul oplevert. Ze hebben hier geen beeld bij. Daarom denk ik dus dat tabellen als tussenstap kunnen helpen. Ik denk dat de tabel tussen het functievoorschrift en de grafiek in staat. Dat hoeft niet altijd, maar als je wat preciezere data wil hebben heb je een tabel nodig.

V: Zou het probleem in de onderbouw al beginnen?

A: Ik denk het wel. Het is ook een soort abstractieprobleem. Dat merk je wel als ze formules voor rechte lijnen moeten opstellen. Als je dat in de bovenbouw vraagt, dan vergissen sommigen zich nog in positieve of negatieve richtingscoëfficiënt. Dat is slordig, maar in feite denk je dan gewoon niet na over het verband tussen het functievoorschrift en de grafiek. Als je dat wel zou doen zou je die fout gewoon niet maken. Je merkt dan dat er vanuit de onderbouw al wel een soort nonchalance in sluipt die in de bovenbouw in de weg gaat zitten.

V: Denk je dat er een probleem zit bij de transfer?

A: Gelukkig merk je dat domein en bereik bijna elk hoofdstuk weer aan de orde komt. Alleen het probleem is dat elk hoofdstuk vaak heel functiegericht wordt gedaan. Er wordt een bepaald type functie behandeld, maar dan vergeten de leerlingen de rest weer. Op de universiteit merk ik het ook aan eerstejaars. Daar wordt dit allemaal als bekend verondersteld. Het komt zelfs niet eens meer voor in de theorie. En als ze dan iets moeten tekenen slaan ze helemaal dicht. Dat geeft wel aan dat er duidelijk een probleem zit bij de transfer.

V: Denk je dat er een probleem zit bij de methode (G&R)?

A: Ja, het grootste probleem is dat het allemaal veel te gesorteerd is. Toevallig wordt domein en bereik aangeboden in een hoofdstuk dat over parabolen gaat, maar dan denk ik: Gooi gelijk alle functies die je al gehad hebt er tegenaan, en laat ze er een beetje een totaalbeeld van krijgen, want op de een of andere manier bouwen ze er zo geen kennis over op. En ze raken dan ook gelijk bang als ze bijvoorbeeld het bereik moeten geven. Bij Math+ doen ze dit veel beter. Ik vond dat die methode zeer nuttige vragen stelde. Ik denk dat heel veel leerlingen dat wel heel moeilijk zouden vinden, maar als je dat doet dan dwing je ze gewoon om dwarsverbanden te leggen tussen typen functies, en gewoon na te denken bij wat je doet. Zo slaan ze ook niet meteen in de repeteermodus. Bij Math+ worden leerlingen veel meer voor de leeuwen geworpen, dat vind ik een goede zaak. Toch is het misschien niet goed voor de zwakke leerlingen.

V: Denk je dat er een probleem zit bij het (overmatig) gebruik van de grafische rekenmachine?

A: Ja tuurlijk. Net zoals je dat bij rekenen hebt met de rekenmachine, heb je dat bij grafieken tekenen met de grafische rekenmachine. Sommigen vinden dat de GR wel weer weg mag. Ik zou er nog niet eens zo rauwig om zijn, want straks hebben ze op de laptop weer geogebra, en de docent heeft dit ook als middel ter beschikking. Het functieonderzoek vang je daarmee af, en dat je het op toetsen niet ter beschikking hebt, ik geloof dat ik er niet zo tegen zou zijn. Het jammere is ook, op de universiteit mag je geen grafische en geen gewone rekenmachine gebruiken, maar er wordt wel verwacht dat je een grafiek kan tekenen. Die leerlingen zijn kansloos, ze zijn gewend om grafieken te schetsen met behulp van de GR. **Leerlingen worden er lui van, en dat is jammer. Het is jammer dat de GR niet wat meer verweven zit in de methode. Je zou een aantal paragrafen zonder GR kunnen behandelen, en dan misschien een paragraaf waarbij de GR wel nodig is.** Dan kun je over het deel zonder GR ook een toets zonder GR geven. **De voordelen van de GR zie ik ook wel. Soms is het gewoon te tijdrovend om algebraïsch te werk te blijven gaan, en dan is de GR wel wat efficiënter.** Wij als wiskundigen zijn dol op exacte berekeningen, maar in de praktijk wordt er zoveel numeriek benaderd, dus je moet die bruggen ook wel slaan. **Leerlingen moeten realiseren dat zelfs de rekenmachine allerlei slimme numerieke algoritmes gebruikt om sinussen en logaritmen te benaderen.** Wat ik erger vind dat dat leerlingen lui worden van de GR, is dat ze kennis en vaardigheden verliezen. Iedereen zoekt de weg van de minste weerstand, maar dat is wel zonde. Ik zie de voordelen dus wel, maar ik zou de GR anders implementeren in de stof.

V: Denk je dat er een probleem zit bij de uitleg van (andere) docenten? Hoe dan?

A: Dat denk ik wel. **Zeker als beginnend docent ben je vaak wat slaafser aan de methode.** Je denkt dan: laat ik me daar aan vasthouden want dit is examenstof. Als je al wat langer lesgeeft weet je wat leerlingen moeilijk vinden en kan je daar wat meer aandacht aan besteden. En iedereen heeft natuurlijk zijn manieren, en daarom moet je daar eigenlijk ook **met elkaar over in gesprek gaan. Dat doen we te weinig.** Ik vind ook niet dat een bepaalde manier heilig is, maar af en toe eens bij elkaar in de keuken kijken en de goede dingetjes daaruit oppikken, dat doen we niet genoeg.

V: Denk je dat er een probleem zit bij de omstandigheden op jouw school?

A: Ja, bij de lestabel. **Er is te weinig tijd.** Je kunt dan wel helpen om de stof anders aan te bieden, maar leerlingen vinden het vaak weer heel vervelend dat je paragrafen overslaat, of in een andere volgorde behandelt. Maar het herhalen van dingen doen we niet genoeg, maar daar is de tijd vaak ook niet voor, of je maakt de tijd niet vrij. Ik denk dat **ICT** in de toekomst ook erg kan helpen. **Laat de leerlingen in het begin van het jaar een toets maken waarna precies geregistreerd wordt wat elke leerling wel en niet kan.** Zo kunnen de leerlingen ook automatisch op maat geholpen worden, terwijl wij daar als docent geen tijd voor hebben. Daar zie ik echt wel een rol voor de ICT in de toekomst.

8.7 Bijlage 7: Interview met docent B

V: Vallen jou deze problemen ook op? Hoe dan?

A: Het valt me op omdat je het soort vragen van het werkblad vaak gebruikt bij een **inleiding van een vraag**. Leerlingen krijgen bijvoorbeeld te horen: Wat zijn de asymptoten van deze functie? Die kennen jullie al want je zou zo kunnen voorspellen hoe dit getransleerd is uit $f(x) = \frac{1}{x}$. Wie weet dat? Een of twee weten dat dan, maar de rest kijkt je schaapachtig aan. Dan merk je dat maar **weinigen het paraat hebben**. Bij de toets zie je dat ze de **inzichtelijke aanpak vaak proberen te vermijden**. **Algebra is makkelijker voor de leerlingen, het is een standaardprocedure voor ze.**

V: Vallen deze problemen ook in andere leerjaren of niveaus op? Waar dan?

A: Het gekke is, dat al die stof die nu in de vijfde getest is uit de derde klas komt. Daar hebben ze volledig de kennis al moeten opdoen om dit te kunnen. **Daar valt me op dat er een heleboel niet van plan zijn te investeren om dit te beheersen**. Ze willen het trucje wel weten, maar ze proberen het niet te begrijpen. Daar valt op dat ze eigenlijk **niet zo geïnteresseerd zijn in 'weten hoe het zit'**. Ik zeg niet dat het een motivatiegebrek is, **ze willen namelijk wel goed scoren voor wiskunde, en daar willen ze wel wat voor doen**. Maar op de een of andere manier is de lerende jeugd niet meer geïnteresseerd in **hoe het nou daadwerkelijk zit**. Het proberen te snappen? Daar heb ik niks aan, want je kunt toch alles opzoeken (google generatie)? Ze willen alleen weten hoe ze het moeten doen, en daar zijn ze wel in gemotiveerd. En in 5vwo zitten echt wel gemotiveerde leerlingen, maar ze zijn gewoon **niet gewend** dat als je gewoon begrijpt hoe iets zit, dat het dan makkelijker is.

V: Wat is de grootste oorzaak van het probleem?

A: Een groot probleem is: **Er zijn teveel uitvluchtsmogelijkheden** voor ze om antwoorden te geven op vragen waarop ze op getoetst worden. Dus het is **onze fout**, wij hebben namelijk **toetsvragen gemaakt die je kan beantwoorden door die vreselijke grafische rekenmachine**. Ze plotten het er maar in, en als het woord algebraïsch er niet bij staat kunnen ze gewoon GSolv-Max doen. **Ze hebben heel veel mogelijkheden om vragen te beantwoorden en er wordt vrij weinig van ze gevraagd of antwoorden te beredeneren, en dus om het te snappen**. Wiskundige denkactiviteiten is de afgelopen 3 jaar in het programma gekomen. Dat is inderdaad iets wat ze jaren nooit hebben hoeven doen, maar dat zit gewoon niet in deze generatie, in de manier van onderwijs aanbieden. **Als wij veel vaker zouden vragen om een antwoord uit te leggen of te beredeneren, dan moeten ze het wel**. Maar nu kunnen ze er onderuit komen, en dat komen ze ook.

V: Zijn er nog andere oorzaken van het probleem?

A: De typen vragen waar ze op getraind worden, en de GR. Dit is geen verhaal om die GR ten grave te brengen, maar die maakt wel veel kapot. Ik weet dat je zonder GR moet bedenken wat je aan het doen bent. Mijn derde klas waar deze stof ook bekend zou moeten zijn, die vraag je: **Maak een schets**. En zij kunnen niet anders dan even een beredeneren en dan een schets maken. **De wiskunde B type leerling doet dit in de derde klas nog wel, maar leert het in de vierde klas af**. **Ik ben dus tegen de GR, deze heeft volgens mij geen enkele toegevoegde waarde.**

V: Wat doe jij als docent om deze problemen aan te pakken of te voorkomen?

A: Het is dus een probleem omdat we er nu toevallig naar kijken dat deze kennis ontbreekt. Maar het is dus geen probleem omdat leerlingen ermee weg kunnen komen, dat is namelijk de reden dat deze kennis ontbreekt. Ze komen ermee weg en ze voldoen straks volledig aan de eisen waar ze straks bij het examen aan moeten voldoen. Wat ik dan doe is op vrijwel elke mogelijkheid waarbij je het op inzicht te doen, door te zien, door analyse, het steeds weer aan de orde te brengen. Het 'oh ja' komt ook vaak voor bij mijn leerlingen. En daarom is het ook zo verassend voor mij dat er zo slecht gescoord is op de test. Ze hebben wel daadwerkelijk het 'oh ja' moment, en vervolgens is het toch 'monkey see, monkey do', gewoon het voorbeeld van G&R volgen, en dan is het weg. Waarom zou je het ook doen?

V: Zou je nog meer kunnen doen?

A: Nee, want er is niet genoeg tijd. Dit soort testjes zijn natuurlijk wel nuttig, maar dan zou je door onderzoeken moeten geloven dat het daadwerkelijk beter gaat met de kennis van de leerlingen. Je zou dit soort testjes kunnen blijven herhalen als je 50% meer contacturen had. Als ik die tijd had zou ik hiervoor herhalende stof ontwikkelen in de vorm van dit soort testjes. Dan zou je ook delen van lessen hieraan kunnen besteden, maar dan ook in de toetsen meer op inzicht bevragen.

V: Heb je verder nog aanvullingen?

A: Nee.

***Docent krijgt nu de resultaten te zien van het leerlingonderzoek**

V: Wat valt je het meest op aan de resultaten?

A: Wat mij meteen opvalt is dat 12 van de 13 leerlingen aangeeft te weten wat transformaties zijn, en toch scoren ze daarna niet voldoende. Dus ze hebben de kennis wel, maar ze kunnen het niet toepassen. Dat is wel verassend. Ook valt op dat ze op asymptoten laag scoren. Ik denk dat ze, zodra ze het woord 'asymptoot' horen, afhaken. Voor hen is dat blijkbaar toch een heel abstract begrip. Bereik is ook zo'n begrip waarvan ze meestal achterover slaan. Het valt me op dat ze niet de coördinaten van toppen af kunnen lezen, maar dat ze wel aangeven dat ze weten wat transformaties zijn. Ze denken dus dat ze weten wat transformaties zijn, maar zodra ze een functie zien die je kan afleiden uit de standaardfunctie, dan weten ze wat een transformatie is maar doen ze er niks mee. Als je vraagt om een translatie toe te passen van (4,3), dan weten ze wat ze moeten doen. Maar als ze een functie zien en ze moeten de coördinaten van de top geven, dan moeten ze dus bedenken dat transformaties daar een rol in spelen, blijkbaar kunnen ze dat niet. Ik weet zeker dat als je hier een kwartier lang drie voorbeelden had gegeven dan hadden ze veel beter gescoord, maar als je het dan over drie dagen pas zou toetsen hadden ze het weer niet geweten. En dus zou je dit soort dingen eigenlijk een aantal keren moeten herhalen. Pas als je drie keer realiseert dat je met je neus op de feiten gedrukt wordt, dan valt het kwartje wel dat je steeds die transformaties kunt toepassen. In de derde klas zijn er twee hoofdstukken waar die volledig in terug komt. Alleen maar herhaal dit, herhaal dat. Het eindigt weliswaar alleen maar met functies van de vorm ax^n , maar daar hebben ze het wel allemaal al in de pocket. Maar dan komen er later dus nieuwe functies bij, en bij elke nieuwe functie ga ik terug naar x^2 en x^3 . En ik probeer elke keer die transfer te maken, want die kennis die ze daar hadden kunnen ze hier ook toepassen. Nu heb je het bijvoorbeeld niet meer over de top maar over de asymptoten bij gebroken functies. Het lijkt wel alsof het dan veel te veel wordt voor ze. Ik was geschokt door de resultaten. Het valt ook op dat ze zeggen dat ze graag een grafiek schetsen want dat zie ik niet

zoveel terug. Ik vind het wel heel gek dat 5vwo leerlingen ax^2 en ax^n met n is even niet gelijkwaardig behandelen, dat is schokkend. De gebroken functie is natuurlijk wel een bijzondere, en de sinus en cosinus vinden ze altijd al wel lastig. Ze scoren daar misschien wat hoger omdat ze op dat moment mee bezig waren in de les. Misschien dat leerlingen bij de vraag over asymptoten denken: ik dacht dat een sinus geen asymptoot had, maar blijkt dat er wel en weet ik hem niet. Dit heeft denk ik met onzekerheid te maken.

V: Had je de resultaten verwacht?

A: Nee absoluut niet. Ik was overtuigd dat deze groep leerlingen vooral de ax^n functies volledig zouden beheersen, en dat valt tegen. Bij exponentiële functies hadden ze ook redelijk veel fout. Nee, het daadwerkelijk toepassen van het begrip transformatie en het aflezen uit het functievoorschrift, dat is gewoon heel slecht gegaan.

V: Valt je ook iets op aan de resultaten van de leerlingen per functie?

A: Nouja, exponentieel en invers, die scoren heel slecht. En de wortel, die vinden ze dan weer heel ingewikkeld, maar goed dat is natuurlijk ook wel een raar ding. Na ax^n haken ze dus gewoon heel snel af. Als je leerlingen vraagt wat de standaardvorm van 2^x is dan moeten ze vaak heel erg lang nadenken, en dan komen ze er zelden uit. Terwijl je ze vooral vraagt om kennis te hebben van wat nou de standaardfuncties en grafieken zijn. Die moeten ze kennen, al had ik niet verwacht dat ze ze allemaal zouden kennen. Ik had wel bij de vragen van het werkblad verwacht dat ze het zouden kunnen, want ze hadden ook genoeg tijd. Ik weet wel dat als je ze vraagt om standaardfuncties, dat ze dat heel erg moeilijk vinden. Maar als je dan weer met ze spreekt over waarom dit en dat handig is en waarom je dat zo af kan leiden dan is het weer 'oh ja, je kunt er zoveel mee, het is zo handig om te weten'. De wortel wordt al vanaf de tweede klas behandeld en het is en blijft een abstract monster voor de leerlingen.

V: Valt je ook iets op aan de resultaten van de leerlingen per stelling?

A: Het woord asymptoot dus. Verder vind ik het wel triest dat het aflezen van coördinaten van de top of het punt van symmetrie zo laag scoort. Blijkbaar kunnen ze wel weer zien of de s-vorm stijgend of dalend is. Maar ik vind het vooral jammer dat ze de transformaties niet beheersen, want daar is in de derde klas een half jaar lang op getraind. En juist bij goniometrie zit weer die transfer vanuit de derde klas wat transformaties betreft. Als ik in de klas een willekeurige sinusfunctie op het scherm zet (in geogebra), en ik vraag om het functievoorschrift, dan kunnen ze dat echt. Dan vinden ze echt de waarden voor a en d , enz. Dat kunnen ze, en dan gaan ze het nu niet toepassen. Het is echt alsof het een trucje is dat ze leren. Maar ja, het uur daarna hebben ze Engels, en daarna gaan ze tekenen, en dan gaan ze naar huis. Ze worden getraind om een vaardigheid te kunnen, en als ze ermee weg komen om dat niet te kunnen is het ook prima. Waarom willen ze niet snappen hoe het zit? Ik denk dat er heel veel van ze gevraagd wordt in vrij korte tijd, vaak maar twee uur in de week wiskunde. Je kunt er onderuit komen, iedereen haalt een voldoende bij het examen wiskunde B, dat zou toch niet moeten mogen als je deze resultaten ziet?

V: Denk je dat het probleem ook al in de onderbouw begint?

A: In de onderbouw haakt vooral de groep af die uiteindelijk wiskunde A kiest. De groep die wiskunde B kiest die is in de derde klas beter in deze stappen dan 5vwo leerlingen. Gek genoeg, zonder GR, zou

5vwo de toets uit 3vwo misschien slechter hebben gemaakt. Dat zou ik eigenlijk volgend jaar wel eens willen testen.

V: Denk je dat er een probleem ligt bij de transfer van de stof?

A: Ja, dat constateren we. Maar we constateren dat op het moment dat je begint over sinus, dat je dan begint met x^2 , je zegt dan bijvoorbeeld: Dit herkende je ook toen we van x^2 naar 2^x gingen. Die stap wil je ook wel eens overslaan want soms raak je ook gewoon de helft van de klas kwijt. Bij sinus en cosinus lukt het trouwens wel beter want daar zit in de stof wel veel meer dat je vanuit een tekening een functievoorschrift moet gaan opstellen. Dat onderdeel, waarbij je gaat trainen op grafiek, beeld, functievoorschrift, dat zit vele malen minder bij functies die ze daar tussendoor krijgen, dus gebroken, exponentieel, wortelfuncties.

V: Denk je dat er een probleem ligt bij de methode die je gebruikt.

A: Ja, getal en ruimte. Monkey see, monkey do. Ik noem de methode te gemakkelijk voor leerlingen. Als er al een keer wat vragen zijn die hierop aansturen, en die zijn er wel, dan is het vrijwel letterlijk het voorbeeldje nadoen, en er zijn weinig inzicht vragen. Er wordt weinig van ze gevraagd om het zelf te doen. Je doet dat in de introductieles, maar een leerling die dan thuis zit gaat gewoon het voorbeeldje kopiëren. En als ze het fout hebben wordt er dan te vaak gewoon gekeken naar de uitwerkingen. De stap naar 'laat ik het zelf gewoon helemaal begrijpen', dat ontbreekt bij een hele grote groep leerlingen. Ik ben wel voorstander van de Wageningse Methode. Die begint met een probleem, en laat de leerlingen het uitzoeken totdat ze zelf concluderen dat het elke keer weer hetzelfde is. Toch denk ik niet dat dat voor elke leerling weggelegd is. Sommige leerlingen moeten nou eenmaal wiskunde kunnen halen door het probleem wat we gedefinieerd hebben te kunnen omzeilen door gewoon standaard trucjes toe te passen. Maar de leerlingen die excelleren zijn juist de leerlingen die dit wel beheersen. Uiteindelijk is dit ook bijna de essentie van het vak wiskunde, een vertaling maken van het een naar het ander.

V: Heb je toch nog enige toevoegingen over de GR?

A: Ik zat mij toen ik het daar over had te bedenken wat ik dan wel mooi vind van de GR. Kijk, in de praktijk, en daar zijn leerlingen altijd geïnteresseerd in, is vrijwel niets perfect exponentieel of perfect kwadratisch. Het is wel makkelijk om even snel een beeld te krijgen van een functie, en sommige functies, bijvoorbeeld een combinatie van x^2 en 2^x , die kan ik ook niet zomaar tekenen. Maar wat heeft dat voor voordeel op de middelbare school? Niets, want ze hoeven geen wereldproblemen op te lossen, ze hoeven alleen maar iets te begrijpen. Voor het begrijpen van functievoorschriften en grafiekbeelden voegt de GR in mijn ogen niets toe. Het maakt eerder alleen maar wat kapot.

V: Denk je dat er een probleem zit bij de uitleg van (andere) docenten?

A: Weet ik niet, want ik ben veel bezig met inzicht, maar ik ben zwaar teleurgesteld. Het voordeel is, als je een docent hebt die dat niet doet, dan is die in ieder geval niet zo teleurgesteld.

V: Denk je dat er een probleem zit bij de omstandigheden op de school waar je werkt?

A: De tijd, maar als er meer tijd zou zijn zouden er misschien weer andere problemen zijn. Dit onderzoek heeft mij wel met de neus op de feiten gedrukt dat ik denk: Waarom besteden we hier in de tweede en derde klas zoveel tijd aan? Waarom noemen we dit typisch wiskunde B en laten we het daarna los? Maar tijd is dus wel de enige omstandigheid.

8.8 Bijlage 8: Gemarkte fragmenten uit de interviews

Alle gemarkeerde fragmenten uit bijlage 6 en 7 zijn in deze bijlage onder elkaar gezet. Fragmenten die vaker voor zijn gekomen zijn hier maar een keer vermeld.

- Functie is een abstract begrip voor leerlingen
- Functievoorschrift laagste van Hiele-niveau
- Verband functievoorschrift-tabel-grafiek, vormt geen eenheid bij leerlingen
- In hogere klassen moeten meer typen functies bekend zijn.
- G&R biedt functies gesorteerd aan
- Docent en methode schenken niet genoeg aandacht aan grafieken
- We zouden meer moeten herhalen
- Leerlingen een overzichtje laten maken van alle soorten functies, hun grafiekvormen en eigenschappen.
- Quizjes: welk functievoorschrift hoort bij welke grafiek?
- Leerlingen eerst een tabel laten maken, dan een grafiek
- Methode besteedt veel aandacht aan hogeregraadsvergelijkingen, maar leerlingen scoren hier niet hoog op.
- Leerlingen hebben problemen met geven van domein en bereik
- Leerlingen raken verward doordat de methode het bereik bij een bepaald domein vraagt
- Leerlingen leren trucjes uit hun hoofd
- Soms kunnen we beter afwijken van de methode
- Moordend tempo in de vierde klas, stof bezinkt daardoor niet.
- Met leerlingen in gesprek gaan over opvallende resultaten
- Problemen met voldoet / voldoet niet
- Wanneer levert een gebroken vergelijking nul op?
- Niet nadenken over verband tussen functievoorschrift en grafiek
- Leerlingen kunnen nonchalant zijn
- Er ligt een probleem bij de transfer
- Mathplus dwingt leerlingen dwarsverbanden te leggen. Leerlingen worden zo meer voor de leeuwen geworden. Dat is een goede zaak, alleen voor de zwakke leerlingen is het minder.
- Leerlingen worden lui van de GR
- GR zit niet genoeg verweven in de methode
- De GR heeft ook wel voordelen, zoals tijdbesparing.
- Leerlingen realiseren niet dat rekenmachines ook numerieke algoritmes gebruikt om benaderingen van antwoorden te geven.
- Docenten zouden meer met elkaar in gesprek moeten gaan over problemen en verschillende aanpakken.
- Er zijn te weinig contacturen om genoeg aandacht aan wiskunde te besteden.
- De ICT zou leerlingen een testje aan het begin en het einde van het jaar kunnen geven, om zo te zien op welke fronten iedere leerling vooruitgegaan is of stil is blijven staan.
- Leerlingen vermijden inzichtelijke aanpak. Algebra is makkelijker, een standaardprocedure.
- Leerlingen willen wel goed scoren maar zonder inzicht halen ze het ook wel, en inzicht krijgen kost te veel tijd.
- Leerlingen zijn niet gewend om op inzicht te leren.

- Er zijn te veel uitvluchtsmogelijkheden, alternatieve oplossingsroutes.
- Er wordt te weinig gevraagd van leerlingen om te beredeneren.
- In de derde klas kunnen leerlingen nog beredeneren en schetsen maken, in de vierde klas leren ze het af door de GR
- In de les breng je als docent steeds inzicht en grafieken aan de orde. Leerlingen begrijpen het dan, maar vervolgens doen ze toch weer het voorbeeldje na in plaats van zelf na te denken.
- Leerlingen hebben wel kennis van transformaties, maar kunnen het niet toepassen.
- Asymptoot is te abstract voor leerlingen
- Het is raar dat leerlingen functies van type ax^2 en ax^n (met n is even) niet gelijkwaardig behandelen.
- Leerlingen kunnen onzeker zijn.
- Wortels zijn abstract voor leerlingen
- Leerlingen hebben ook veel stof van andere vakken aan hun hoofd.
- Getal en ruimte is te makkelijk voor leerlingen, ze hoeven alleen maar voorbeeldjes na te doen.
- Leerlingen kijken te snel naar de uitwerkingen
- De Wageningse methode laat leerlingen zelf proberen en conclusies trekken, dan blijft de stof beter hangen.
- De GR voegt niets toe.
- In de tweede en derde wordt veel aandacht besteed aan inzicht in functievoorschriften en grafieken, maar daarna wordt het losgelaten.

8.9 Bijlage 9: Labelen

De data uit bijlage 8 zal gelabeld worden met de volgende labels:

- Kennis standaardgrafieken (13)
- Alternatieve oplossingsroutes (6)
- Eigenschappen functies (14) (toppen, asymptoten, domein/bereik)
- Transformaties (2) (weten ze wat het zijn en hoe je ze toepast?)
- Transfer (8)
- Grafische Rekenmachine (7)
- Tijd (4) (zijn er wel genoeg contacturen voor wiskunde?)
- Motivatie leerlingen (3) (willen de leerlingen de stof wel begrijpen?)
- Mentaliteit leerlingen (11) (Zoeken leerlingen de makkelijkste weg?)
- Methode (11) (lesmethode)
- Relatieve begrip (22)
- Herhaling (4)
- Uitleg docent (4)
- Manier van leren (9)

Hierboven is met een cijfer achter elk label weergegeven hoe vaak deze gegeven is aan een gemarkeerd fragment uit de interviews. De labeling is te zien in tabel 8.

Gemarkeerd fragment	Labels
Functie is een abstract begrip voor leerlingen	Relationeel begrip - Eigenschappen functies
Functievoorschrift laagste van Hiele-niveau, daarna komt pas de grafiek.	Relationeel begrip
Verband functievoorschrift-tabel-grafiek vormt geen eenheid bij leerlingen	Kennis standaardgrafieken - eigenschappen functies - relationeel begrip
In hogere klassen moeten meer typen functies bekend zijn.	Kennis standaardgrafieken - eigenschappen functies - transfer
G&R biedt functies gesorteerd aan	Eigenschappen functies - Methode
Docent en methode schenken niet genoeg aandacht aan grafieken	Kennis standaardgrafieken - tijd - methode - uitleg docent - relationeel begrip
We zouden meer moeten herhalen	Herhaling - relationeel begrip
Leerlingen een overzichtje laten maken van alle soorten functies, hun grafiekvormen en eigenschappen.	Kennis standaardgrafieken - eigenschappen functies - herhaling
Quizjes: welk functievoorschrift hoort bij welke grafiek?	Kennis standaardgrafieken - eigenschappen functies - herhaling
Leerlingen eerst een tabel laten maken, dan een grafiek	Kennis standaardgrafieken

Methode besteedt veel aandacht aan hogeregraadsvergelijkingen, maar leerlingen scoren hier niet hoog op.	Methode
Leerlingen hebben problemen met geven van domein en bereik	Eigenschappen functies - relationeel begrip
Leerlingen raken verward doordat de methode het bereik bij een bepaald domein vraagt	Transfer - methode - relationeel begrip
Leerlingen leren trucjes uit hun hoofd	Alternatieve oplossingsroutes - mentaliteit leerlingen - relationeel begrip - manier van leren
Soms kunnen we beter afwijken van de methode	Methode - Uitleg docent
Moordend tempo in de vierde klas, stof bezinkt daardoor niet.	Transfer - tijd
Met leerlingen in gesprek gaan over opvallende resultaten	Motivatatie leerlingen
Problemen met voldoet / voldoet niet	Eigenschappen functies - relationeel begrip
Wanneer levert een gebroken vergelijking nul op?	Eigenschappen functies - relationeel begrip
Niet nadenken over verband tussen functievoorschrift en grafiek	Kennis standaardgrafieken - relationeel begrip - manier van leren
Leerlingen kunnen nonchalant zijn	Motivatatie leerlingen - mentaliteit leerlingen - manier van leren
Er ligt een probleem bij de transfer	Transfer
Mathplus dwingt leerlingen dwarsverbanden te leggen. Leerlingen worden zo meer voor de leeuwen geworpen. Dat is een goede zaak, alleen voor de zwakke leerlingen is het minder.	Kennis van standaardgrafieken - eigenschappen functies - methode - relationeel begrip - manier van leren
Leerlingen worden lui van de GR	Alternatieve oplossingsroutes - grafische rekenmachine - mentaliteit leerlingen
GR zit niet genoeg verweven in de methode	Grafische rekenmachine - methode
De GR heeft ook wel voordelen, zoals tijdbesparing.	Grafische rekenmachine
Leerlingen realiseren niet dat rekenmachines ook numerieke algoritmes gebruikt om benaderingen van antwoorden te geven.	Grafische rekenmachine - relationeel begrip
Docenten zouden meer met elkaar in gesprek moeten gaan over problemen en verschillende aanpakken.	Tijd
Er zijn te weinig contacturen om genoeg aandacht aan wiskunde te besteden.	Tijd
De ICT zou leerlingen een testje aan het begin en het einde van het jaar kunnen geven, om zo te zien op welke fronten iedere leerling vooruitgegaan is of stil is blijven staan.	Transfer
Leerlingen vermijden inzichtelijke aanpak. Algebra is makkelijker, een standaardprocedure.	Kennis standaardgrafieken - alternatieve oplossingsroutes - transformaties - relationeel begrip - mentaliteit leerlingen

Leerlingen willen wel goed scoren maar zonder inzicht halen ze het ook wel, en inzicht krijgen kost te veel tijd.	Motivatatie leerlingen - mentaliteit leerlingen - alternatieve oplossingsroutes
Leerlingen zijn niet gewend om op inzicht te leren.	Manier van leren
Er zijn te veel uitvluchtsmogelijkheden, alternatieve oplossingsroutes.	Alternatieve oplossingsroutes - mentaliteit leerlingen
Er wordt te weinig gevraagd van leerlingen om te beredeneren.	Grafische rekenmachine - methode - relationeel begrip
In de derde klas kunnen leerlingen nog beredeneren en schetsen maken, in de vierde klas leren ze het af door de GR	Alternatieve oplossingsroutes - transfer - grafische rekenmachine - mentaliteit leerlingen - relationeel begrip
In de les breng je als docent steeds inzicht en grafieken aan de orde. Leerlingen begrijpen het dan, maar vervolgens doen ze toch weer het voorbeeldje na in plaats van zelf na te denken.	Kennis standaardgrafieken - eigenschappen functies - transfer - mentaliteit leerlingen - methode - relationeel begrip - uitleg docent - manier van leren
Leerlingen hebben wel kennis van transformaties, maar kunnen het niet toepassen.	Transformaties - relationeel begrip
Asymptoot is te abstract voor leerlingen	Eigenschappen functies - relationeel begrip
Het is raar dat leerlingen functies van type ax^2 en ax^n (met n is even) niet gelijkwaardig behandelen.	Kennis standaardgrafieken - eigenschappen functies relationeel begrip
Leerlingen kunnen onzeker zijn.	Mentaliteit leerlingen
Wortels zijn abstract voor leerlingen	Kennis standaardgrafieken - eigenschappen functies - relationeel begrip
Leerlingen hebben ook veel stof van andere vakken aan hun hoofd.	Mentaliteit leerlingen
Getal en ruimte is te makkelijk voor leerlingen, ze hoeven alleen maar voorbeeldjes na te doen.	Methode - manier van leren
Leerlingen kijken te snel naar de uitwerkingen	Mentaliteit leerlingen - manier van leren
De Wageningse methode laat leerlingen zelf proberen en conclusies trekken, dan blijft de stof beter hangen.	Methode - relationeel begrip - manier van leren
De GR voegt niets toe.	Grafische rekenmachine
In de tweede en derde wordt veel aandacht besteed aan inzicht in functievoorschriften en grafieken, maar daarna wordt het losgelaten.	Kennis standaardgrafieken - eigenschappen functies - transfer - relationeel begrip - uitleg docent - herhaling

Tabel 9: Labeling