

Logaritmen volgens Barton

Verslag Ontwerp van onderwijs (5EC)



APRIL 2020

Wiskunde

Gerhard Veluwenkamp

S8714924

Inhoud

Woord vooraf	3
Samenvatting	4
1 Aanleiding en probleemstelling	5
2 Theoretisch kader	7
2.1 Leren is informatieverwerking	7
2.2 Vakdidactiek volgens Barton	11
2.3 Fouten en misconcepties bij logaritmen	17
2.4 Impact voor het lesontwerp voor logaritmen	19
3 Methode	21
3.1 Formuleer heldere ontwerpeisen	21
3.2 Lesopbouw volgens Barton	23
3.3 Het ontwerpen van de lessen	24
3.4 Toetsing van het ontwerp	24
4 Resultaten	25
4.1 Toelichting lesontwerp	25
4.2 Koppeling met theoretisch kader en ontwerpeisen	27
4.3 Expertopinie	28
5 Conclusie	30
6 Literatuur	32
Bijlagen	34
A. Eindexamenopgaven 2017-2019	35
B. Het lesontwerp	41
C. Verslag van de expertopinie	42

Woord vooraf

Op dit moment studeer ik als zijinstromer aan de Universiteit Twente om mijn eerstegraadsbevoegdheid als docent te halen. Met het schrijven van dit verslag zet ik een belangrijke stap in het afronden van deze studie. Maar het gaat niet alleen om het papiertje. De vakken over vakdidactiek doen je realiseren dat je zoveel effectiever les kunt geven door vooraf goed na te denken over hoe je een wiskundig onderwerp introduceert en uitlegt aan, oefent met en toetst bij je leerlingen.

Tijdens één van de colleges werd ik gewezen op de boeken “Volgens Barton – deel 1” (Barton – 2019a) en “Volgens Barton – deel 2” (Barton – 2019b) van de Engelse docent wiskunde Craig Barton. Het voorbeeld uit die boeken over diagnostische vragen dat tijdens het college werd behandeld, sprak mij zo aan dat ik al snel de boeken bestelde. Ze lezen bijna als een roman. De treffende direct toepasbare voorbeelden, de goede wetenschappelijke onderbouwing en de heldere didactische aanpakken hebben mij geïnspireerd. Ik besloot om mijn ontwerp van onderwijs te baseren op de didactische aanpak van Barton.

Maar over welk onderwerp? Daarvoor ga ik terug in de tijd. Het is mei 2019. Ik ben net gestart als docent wiskunde. Een collega van mij sprak vermoeid uit dat geen van zijn leerlingen een vraag uit het examen wiskunde A van havo goed had. De leerlingen moesten de formule: $100 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$ herleiden tot 10^{2-n} .

Ik was verbaasd. Je zou zeggen dat dit een eenvoudige opgave was. Helemaal omdat je wist waar je naar toe moest werken (i.e. de tweede formule was ook gegeven). Zijn klas was geen uitzondering. De p-score (een indicatie hoe goed de vraag door de leerlingen is gemaakt) was volgens CITO (2019) slechts 3%. Dat zou bijvoorbeeld kunnen betekenen dat maar 3 van de 100 leerlingen de vraag volledig goed had (je kon namelijk maximaal drie punten voor deze vraag behalen), of dat slechts 9 van de 100 leerlingen niet verder kwam dan de eerste van de drie stappen en daarmee slechts één punt hadden verdiend. Daarmee was dit veruit de slechts gemaakte vraag van dat examen.

Van machten/exponenten is het voor een docent wiskunde een kleine stap naar logaritmen, maar een grote stap voor leerlingen. De resultaten van de eindexamens van de afgelopen drie jaar voor havo (wiskunde B) en vwo (wiskunde A en B), zie bijlage A, laten zien dat leerlingen veel moeite met logaritmen hebben. Het onderwerp was nu geboren. Ik had eerder al een introductieles in gedachten en ook uitgewerkt. Na het lezen van Barton besloot ik om het roer om te gooien. Dat brengt mij tot de titel van dit verslag: “Logaritmen volgens Barton”.

Gerhard Veluwenkamp

Samenvatting

Naar goede wiskundendidactiek is al veel onderzoek gedaan. Docent Craig Barton heeft deze wetenschappelijke inzichten op een rij gezet. Dat heeft geresulteerd in een samenhangend geheel van leerstappen voor een les/lessenserie. Het boek is relatief nieuw. Daarom zijn er in Nederland nog geen openbare lesmethoden die op Barton gebaseerd zijn. Er is ook nog niet uitgebreid onderzocht in welke mate de principes van Barton goed zijn toe te passen op het Nederlandse wiskundeonderwijs. Dit onderzoek vult dat hiaat deels op met een ontwerp van een lessenserie waarin die toepassing heeft plaatsgevonden.

De toepassing is gevonden in het onderwerp logaritmen. Uit internationaal onderzoek blijkt namelijk dat bij leerlingen er veel misconcepties zijn bij logaritmen. Ook de resultaten van het Nederlands centraal schriftelijk eindexamen geven hetzelfde beeld.

Deze beide bevindingen hebben geleid tot probleemstelling van dit ontwerp van onderwijs: *“Hoe kan een lesontwerp er uitzien gedurende de eerste fase van kennisverwerving over het onderwerp logaritmen als dit ontwerp gebaseerd wordt op de vakdidactische en onderwijskundige principes van Barton?”*.

Het heeft geresulteerd in een samenhangende lessenserie over exponenten en logaritmen. De lessen zijn gebaseerd op de instructieve leersituatie die Barton voor ogen heeft. Dus uitleg via ‘Voorbeeld-oefening-paren’ en veel diagnostische toetsen of andere vormen van formatief evalueren om vast te kunnen stellen of de leerlingen het begrepen hebben en de leerlingen zelf bewust te maken van hun misconcepties.

Rode draad door de lessenserie zijn de incrementele leerstappen. Daardoor lijkt de uitleg langzaam te gaan, maar juist daar zit de kracht van dit ontwerp. Docenten moeten namelijk volgens Barton hun leerlingen als beginners benaderen en niet zien als experts in deze eerste fase van kennisverwerving.

De conclusie is dan ook dat de vakdidactische en onderwijskundige principes van Barton goed zijn toe te passen op het Nederlandse wiskundeonderwijs. In ieder geval voor het onderwerp logaritmen. Er is geen reden om te veronderstellen dat niet andere kennisdomeinen geschikt zijn voor Barton’s aanpak.

1 Aanleiding en probleemstelling

Elke student aan de lerarenopleiding wiskunde krijgt er mee te maken: de vele, soms ook verschillende, inzichten van wat goede vakdidactische en onderwijskundige principes zijn. Bekende vakdidactici als Ehrenfest, Dijksterhuis, Skemp, Sfard, Tall, Schoenfeld en Van Streun behoren tot het verplichte repertoire van elke student. Binnenkort wordt wellicht Barton (2019a en 2019b) aan dit rijtje toegevoegd. Vorig jaar verscheen de Nederlandse vertaling van zijn boek 'How I wish I'd taught maths'.

In dit boek bespreekt hij de vakdidactische en onderwijskundige principes voor het wiskundeonderwijs. Hij beantwoordt bij elk aspect de volgende vragen:

- Wat ik vroeger dacht?
- Wat ik ervan opstak (wetenschappelijk onderzoek)?
- Wat ik nu doe?

Hij steunt daarbij in belangrijke mate op de cognitieve psychologie: hoe leren leerlingen? Op basis van die wetenschap heeft zijn vakdidactische en onderwijskundige principes geformuleerd.

Wat zijn boek bijzonder maakt, is dat het een samenhangende met wetenschappelijke literatuur onderbouwde beschrijving is van hoe volgens hem wiskunde in het voortgezet onderwijs moet worden gegeven. Van de eerste fase van kennisverwerving tot de fase van de toepassing van de wiskunde om complexe problemen op te lossen. Van de leerstap 'Uitleg' tot de leerstap 'Formatief evalueren'. Hij werkt, in tegenstelling tot de meeste hiervoor genoemde vakdidactici, alles uit tot concrete werkvormen die in onderlinge samenhang staan. Daarmee zou het boek een uitstekende basis kunnen vormen voor elke beginnende en ook ervaren docent om lessen te ontwerpen of voor te bereiden.

Het boek is relatief nieuw. Daarom zijn er in Nederland nog geen openbare lesmethoden die op Barton gebaseerd zijn. Er is ook nog niet uitgebreid onderzocht in welke mate de principes van Barton goed zijn toe te passen op het Nederlandse wiskundeonderwijs. Dit onderzoek vult dat hiaat deels op met een ontwerp van een lessenserie waarin die toepassing heeft plaatsgevonden. We hebben hierbij gekozen voor het onderwerp logaritmen, dat bij uitstek vraagt om een sterke didactische onderlegging vanwege de vele misconcepties die leerlingen erbij kunnen oplopen. Uit internationaal onderzoek (o.a. Kenney (2005), Weber (2002), Ganesan en Dindyal (2014) en Boon Liang en Wood (2005)) blijkt namelijk dat bij leerlingen er veel misconcepties zijn bij logaritmen. Ook de resultaten van het Nederlands centraal schriftelijk eindexamen geven hetzelfde beeld (zie bijlage A). Een veel voorkomende misvatting is bijvoorbeeld $\log(a) + \log(b) = \log(a + b)$. Daarnaast blijken leerlingen veel moeite te hebben met het 'gewoon' uitrekenen van een enkele logaritme. Bijvoorbeeld de opgave: 'Vereenvoudig $2^5 \log 5$ '. Een beter begrip van logaritmen is dus zeer wenselijk. Dit start vanzelfsprekend al in de eerste fase van kennisverwerving.

De probleemstelling van dit ontwerp van onderwijs luidt dan ook: *“Hoe kan een lesontwerp er uitzien gedurende de eerste fase van kennisverwerving over het onderwerp logaritmen als dit ontwerp gebaseerd wordt op de vakdidactische en onderwijskundige principes van Barton?”*. Doelstelling van dit ontwerp is dus om een lessenserie te ontwerpen ‘Volgens Barton’. Het onderzoeken of deze lessenserie ook in de praktijk leidt tot betere leerresultaten valt echter buiten de reikwijdte van dit verslag. Daarvoor worden andere studenten uitgenodigd om de effectiviteit van deze lessenserie te onderzoeken.

Het lesontwerp is in drie stappen tot stand gekomen. Deze drie stappen worden in de volgende drie hoofdstukken besproken:

1. Het schetsen van het theoretisch kader op basis van literatuuronderzoek
2. Het vaststellen van de methode op basis waarvan het lesontwerp tot stand komt
3. Het daadwerkelijk ontwerpen van de les en wat de resultaten daarvan zijn

In onderstaande afbeelding zijn de onderliggende onderzoeksvragen per stap weergegeven.



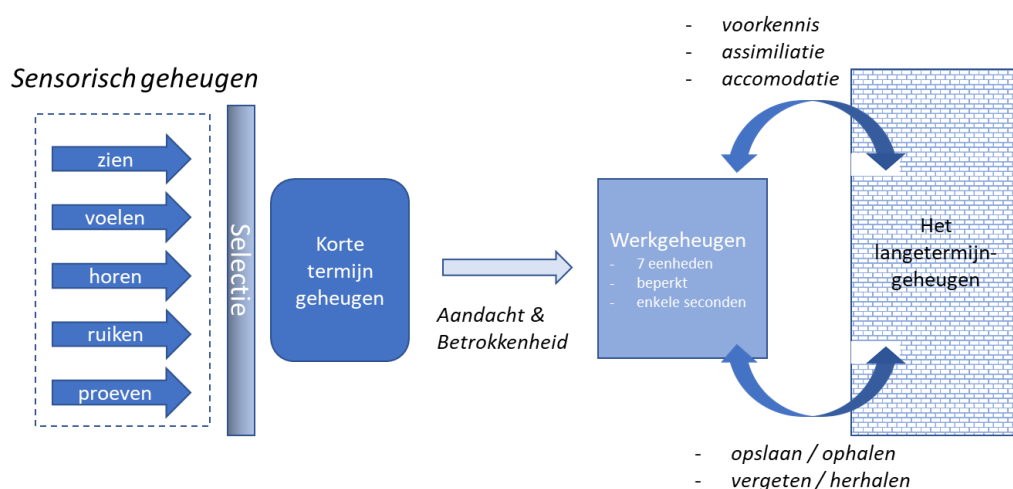
Het verslag wordt afgesloten met conclusies die naar aanleiding van dit ontwerp van onderwijs getrokken kunnen worden.

2 Theoretisch kader

In dit hoofdstuk wordt leren gelijk gesteld aan informatieverwerking. Dit wordt toegelicht in paragraaf 2.1. Die zienswijze vormt een belangrijke pijler voor de didactische aanpak van Barton die besproken wordt in paragraaf 2.2. Daarna wordt de problematiek rondom fouten en misconcepties bij logaritmen besproken. Het hoofdstuk wordt afgesloten met de principes voor het lesontwerp die uit het voorgaande kunnen worden afgeleid.

2.1 Leren is informatieverwerking

Leren is informatieverwerking. Marzano & Miedema (2018) en ook Barton (1.1) gaan uit van het informatieverwerkingsmodel. In onderstaande afbeelding is dit model schematisch weergegeven:



Informatieverwerking is dus het opslaan van informatie (paragraaf 2.1.1.) en het ophalen van informatie (paragraaf 2.1.2).

2.1.1 Het opslaan van informatie

Volgens dit model beschikken wij over **sensorisch geheugen** (zien, voelen, horen, ruiken en proeven). In dit geheugen wordt informatie 1-2 seconden vastgehouden als het wordt waargenomen. Door middel van aandacht en betrokkenheid kan de informatie via het **kortetermijngeheugen** worden gestuurd naar het **werkgeheugen**. Dit werkgeheugen kan de informatie maar kort vasthouden. Het is dus belangrijk dat de informatie wordt opgeslagen in het langetermijngeheugen en waaruit het later weer kan worden opgehaald. Of dit gebeurt hangt af van diverse processen die hierna worden toegelicht.

Volgens het informatieverwerkingsmodel bepaalt **aandacht en betrokkenheid** hoe we de betekenis van informatie bepalen en of dit in het werkgeheugen terecht komt. In het werkgeheugen wordt de nieuwe informatie vergeleken met de reeds opgeslagen informatie. In het werkgeheugen wordt besloten wat met de nieuwe kennis wordt gedaan. De interpretatie van nieuwe informatie hangt in belangrijke mate af van oude informatie (voorkennis). Als de nieuwe kennis irrelevant is, wordt deze verwijderd. Het kan ook zo zijn dat de nieuwe informatie ongewijzigd wordt opgeslagen in het langetermijngeheugen waarbij dan wordt aangesloten bij bestaande schema's. Piaget (1952) noemt dit 'assimilatie'. Het kan ook zijn dat in het werkgeheugen wordt besloten de oude informatie in het langetermijngeheugen aan te passen aan de nieuwe inzichten van de nieuwe informatie *die met assimilatie is verkregen*. Piaget noemt dit 'accommodatie'. Hij stelde dat sprake is van effectief leren als er een flexibele afwisseling bestaat tussen assimilatie en accommodatie.

Voorbeeld: een leerling heeft tot nu toe alleen nog maar machtsfuncties (waarvan parabolen en lineaire verbanden de meest voorkomende zijn) geleerd. Hij zal exponentiële of logaritmische verbanden niet direct als functies beschouwen. Als we de leerling vertellen dat dit ook functies zijn, dan zal hij exponentiële of logaritmische verbanden scharen onder het bestaande schema 'functies'. Dit is assimilatie. Tegelijkertijd zal de leerling dit schema aanpassen. Functies kunnen voortaan meer zijn dan alleen machtsfuncties. Dit is accommodatie.

Om informatie te onthouden maken we volgens Miller (1956) gebruik van chunking: het samenvoegen van kleine **eenheden** van informatie tot een betekenisvol geheel. Uit onderzoek is gebleken dat een mens maximaal zeven van die eenheden kan onthouden.

De capaciteit van het werkgeheugen is klein. Barton stelt daarom dat lesmethoden- en omstandigheden zodanig moeten zijn georganiseerd dat het werkgeheugen zo min mogelijk wordt belast.

Er kunnen dus maar zeven eenheden, enkele seconden, worden vastgehouden. Om te zorgen dat waargenomen informatie in het werkgeheugen blijft, is **herhalen** nodig. Volgens Van den Broeck (2008) is dit het beter verwerken van informatie door het geheugenmateriaal te structureren en te organiseren. Bijvoorbeeld door het in verband te brengen met reeds bestaande kennis uit het langetermijngeheugen. Of door er een voorbeeld bij te vertellen. Als nieuwe informatie niet overeenkomt met oude informatie, kunnen er geen verbanden worden gelegd, en wordt de nieuwe informatie vergeten.

Als kennis in het **langetermijngeheugen** zit, betekent het dat je iets kan terughalen, je hebt iets geleerd. De capaciteit is groot en informatie wordt op een hiërarchische manier georganiseerd. Voor het langetermijngeheugen zijn herhalen, het activeren van voorkennis en het koppelen van nieuwe informatie aan bekende informatie belangrijk bij het leren en ophalen van informatie. In het langetermijngeheugen zijn drie soorten kennis te onderscheiden:

- **Declaratieve** kennis: theorie (iets weten)
- **Procedurele** kennis: praktijk (iets kunnen doen)
- **Zelfregulerende** kennis: weten hoe je eigen leren gereguleerd kan worden

Leren verlangt een interactie tussen declaratieve kennis (ook wel domeinkennis genoemd) en procedurele kennis. Om een procedure aan te leren, is eerst declaratieve kennis nodig, zeker wanneer het om een vrij specifiek kennisdomein als wiskunde gaat. Het optellen van breuken: declaratieve kennis is nodig om breuken te herkennen. Procedurele kennis is eerst nodig om vast te stellen of de breuken eerst gelijknamig gemaakt moeten worden alvorens (de tweede procedure) ze te kunnen optellen. Er is een continue afwisseling van opslaan en ophalen uit het langetermijngeheugen van beide soorten kennis. Geautomatiseerde procedurele kennis, kennis dat snel en juist wordt ingezet, ontlast het werkgeheugen. En dat is cruciaal omdat het werkgeheugen maar een beperkte capaciteit heeft.

Procedurele kennis is, eenmaal foutief aangeleerd, moeilijk te veranderen. Dat vereist dus goede instructie vanaf het begin. Daarom is Barton (7.2) bijvoorbeeld ook tegen het gebruik van vuistregels (waarbij je ook vaardigheden leert), omdat die kunnen leiden tot misconcepties. Declaratieve kennis is doorgaans gemakkelijker te veranderen. Procedures leren we echter vaak stap voor stap. Bij elke herhaling versterken we die kennis. Vaardigheden kunnen zo geautomatiseerd zijn dat we niet meer kunnen uitleggen hoe we ze doen. Ze vergen minimale bewuste inspanning en zijn waardevol voor toekomstig leren omdat we erop kunnen bouwen zonder dat ze een significant beslag leggen op het werkgeheugen. Denk aan bijvoorbeeld de procedure fietsen.

Wanneer blijkt dat leerlingen bepaalde misconcepties hebben, dan kan je misconcepties corrigeren. Barton (8.4) stelt bijvoorbeeld voor dat leerlingen, nadat ze een opgave hebben gemaakt, ook de kans noteren hoe zeker ze van dat antwoord zijn. De leerling vergelijkt daarna zijn uitwerkingen van de opgave met de opgave. Als hij daarna vaststelt dat zijn antwoord fout was, maar hij was ervan overtuigd dat die goed was, kan dit hem helpen om in te zien waar zijn overtuigingen of kennis onjuist zijn. Een andere manier die Barton (hoofdstuk 5) voorstelt is om de leerlingen te vragen hun denkproces te expliciteren door middel van bijvoorbeeld een uitleg bij elke stap in hun uitwerking. Zo krijgt de docent zicht op de redenering die leerlingen maken en kan hij mogelijke fouten trachten bij te sturen.

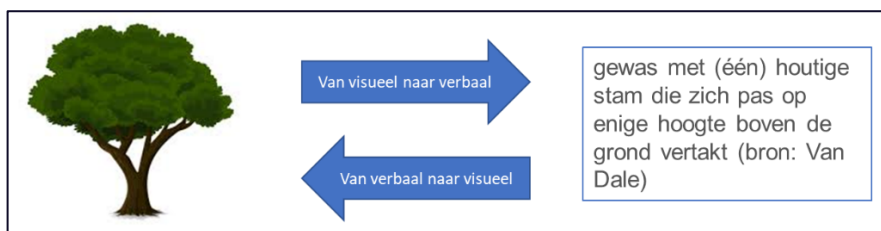
Zelfregulering is een taak of proces doelgericht te kunnen voltooien en verantwoordelijkheid te nemen voor het eigen handelen. Denk aan plannen en timemanagement, doelgericht leren, zich kunnen concentreren en motiveren, reflecteren, omgaan met feedback en inzicht hebben in eigen ontwikkeling. Zelfregulering zorgt dus voor effectiever en efficiënter leren, omdat de leerling de leerstof beter kan structureren en zich meer bewust is van het leerproces.

2.1.2 Het ophalen van informatie

Naast het opslaan van kennis is het **ophalen** van kennis net zo belangrijk. Leraren gebruiken meerdere technieken om na te gaan in hoeverre leerlingen vooruitgang boeken, zowel binnen één les als tussen twee lessen. Voorbeelden hiervan zijn de stof laten herhalen, het stellen van diagnostische vragen of een quiz organiseren. Het is volgens Didau & Rose (2019) verleidelijk om aan te nemen dat als deze vragen goed worden beantwoord, de leerlingen zich de belangrijkste delen van de stof hebben eigen gemaakt, dus dat deze veilig zijn opgeslagen in het langetermijngeheugen. Toch komt het volgens hen vaak voor dat leerlingen bij de

volgende les alweer een hoop zijn **vergeten**. Overigens zijn ze het meestal niet echt vergeten. Ze krijgen er soms geen toegang toe of kunnen een ervaring niet terughalen. Barton (12.1) haalt onderzoek aan van Bjork (1975). Bjork legt uit dat alles wat je opslaat een terughaalsterkte (hoe makkelijk het ons weer te binnen schiet) en een opslagsterkte (hoe goed we iets weten; het aantal schema's waarmee een los onderdeel verbonden is) heeft. De terughaalsterkte hangt samen met ons vermogen om informatie op te roepen wanneer we willen, en de opslagsterkte laat zien hoe sterk een los stukje informatie is ingebed in schema's. Sommige dingen – zoals de formule waarmee je de omtrek van een cirkel berekent – hebben een extreem hoge terughaal- en opslagsterkte; ze zijn op afroep beschikbaar, omdat we ze zo vaak hebben opgeroepen gedurende langere tijd. Om de opslagsterkte te vergroten, moeten we volgens Bjork eerst grotendeels vergeten. Maar wat eens vergeten is, is gelukkig heel makkelijk opnieuw te leren. Die hernieuwde confrontatie met die informatie zal de opslag versterken en op lange termijn het leren versterken. Het klinkt vreemd: vergeten is een van de beste manieren om meer te leren.

Volgens Paivio (1971) worden verbale en non-verbale (visuele) informatie langs verschillende kanalen verwerkt door het werkgeheugen en zo ook dubbel opgeslagen in het langetermijngeheugen. Deze twee systemen zijn verbonden: de dual-coding theorie. Onderstaand ter illustratie de wisselwerking van het begrip boom:



De mogelijkheid om een prikkel op twee verschillende manieren te coderen, vergroot de kans om dat item te onthouden in vergelijking met als de prikkel maar op één manier was gecodeerd. Clark en Paivio (1991) geven aan dat het leren nog verder wordt versterkt als het verbale en visuele wordt aangevuld met concreet lesmateriaal. Gebruik bijvoorbeeld concrete voorbeelden die betrekking hebben op het leven van leerlingen. Hun onderzoek toont aan dat lessen die concrete informatie bevatten en levendige beelden oproepen, gemakkelijker te begrijpen en te onthouden zullen zijn dan lessen die abstract zijn en geen beeld opwekken. Het leren kan dus sterk worden bevorderd door concreet, verbaal én visueel te onderwijzen. Barton (4.3) vult dit aan door op te merken dat voorkomen moet worden dat exact *dezelfde* informatie op twee manieren tegelijkertijd wordt gegeven: verbaal (in tekst of in gesproken woord) en visueel. Dat belast het werkgeheugen namelijk onnodig. Krachtiger is als het ene kanaal de andere aanvult. Denk maar eens aan die docent van vroeger die de Powerpoint volledig oplas. Veel beter is als hij aanvullende toelichting bij de presentatie geeft.

2.2 Vakdidactiek volgens Barton

De hiervoor beschreven werking van het leren is voor Barton hét vertrekpunt geweest voor zijn vakdidactiek. Barton (2.8) maakt daarbij onderscheid tussen drie fases van leren:

- De eerste fase van kennismaking
- De fase van versterkt leren
- De fase van het probleemoplossend vermogen.

In onderstaande afbeelding is dit schematisch weergegeven waarbij de vakdidactische aspecten (veelal werkvormen zoals samengevat in hoofdstuk 2 van Barton) zijn ingedeeld naar deze fasen:



In het vervolg van deze paragraaf worden deze aspecten toegelicht. Hierbij ligt de nadruk op de aspecten in de eerste fase van kennisverwerving omdat de focus van het lesontwerp daarop is gericht. De overige aspecten worden daarom korter besproken.

2.2.1 Geef expliciet les

Expliciete instructie is een goed voorbereide, leraargestuurde, volledig geleide instructie. Deze bestaat uit de volgende uitgangspunten:

1. Presenteer nieuwe stof in kleine stappen, waarbij leerlingen na elke stap kunnen oefenen
2. Stel heel veel vragen en check de antwoorden van alle leerlingen. Ga hierbij ook op zoek naar misconcepties en stuur die bij.
3. Bied voorbeelden aan
4. Stuur het oefenen van de leerlingen bij
5. Gebruik scaffolding (ondersteuning die ook geleidelijk wordt afgebouwd) bij moeilijke taken

Deze lesvorm wijkt dus ver af van het onbegeleid zelf laten ontdekken van leerlingen van nieuwe domeinkennis. Volgens Barton (1.2) is dat namelijk onverstandig: leerlingen zijn namelijk beginners en geen experts. Zij zullen in de regel dus snel vastlopen, daardoor ongemotiveerd raken en afhaken. Bovendien zijn leerlingen pas in staat om probleemoplossend vermogen aan te leren als de domeinspecifieke kennis aanwezig is. Dit sluit mooi aan bij de visie van Sfard (1991). Een leerling moet eerst een proces in stapjes geleidelijk onder de knie krijgen (*interiorization*). Met andere woorden: domeinkennis opbouwen. Daarna gaat hij steeds beter het gehele proces overzien (*condensation*) om ten slotte het geheel als een object te zien (*reification*). Hij heeft op dat moment conceptuele kennis opgebouwd. Daarna kan hij nieuwe processen leren die voortbouwen op die conceptuele kennis om weer nieuwe conceptuele kennis aan te leren.

Barton (hoofdstuk 3) is dus grote voorstander om eerst procedurele kennis/beheersing op te bouwen (instrumentele kennis volgens Skemp (2006)) en daarna conceptuele begrip te laten ontstaan (het relationele begrip van Skemp). Hij ondersteunt wel de opvatting dat relationeel begrip nodig is om daadwerkelijk te leren.

Wat bijdraagt aan het expliciet lesgegeven is de kracht van verhalen. Niet alleen om leerlingen te activeren, maar ook om hen te helpen leren en onthouden. Verhalen zijn namelijk eenvoudiger te begrijpen en te onthouden. Verhalen moeten volgens Barton (3.6) dan aan de volgende voorwaarden voldoen:

- Laat zien dat de nieuwe kennis verband houdt met eerder opgedane kennis. Leerlingen leren dan verbanden tussen de diverse onderwerpen zien
- Creëer een conflict/laat complicaties zien: een probleem dat niet met de bestaande kennis kan worden opgelost. De leerlingen zien dan het nut of de noodzaak van de nieuwe kennis.
- Het gebruik van personages of de oorsprong van bepaalde begrippen geven.

2.2.2 Ontlast het werkgeheugen

Het werkgeheugen is, zoals beschreven in paragraaf 2.1.1, beperkt van omvang. Instructie is dus pas effectief als het werkgeheugen niet overbelast raakt, zodat informatie goed verwerkt kan worden. Het werkgeheugen kunnen we optimaal benutten door informatie op verschillende manieren en in verschillende vormen te presenteren: verbaal en visueel.

Met name in de fase van eerste kennisverwerving is het van groot belang dat de beperkte capaciteit van het werkgeheugen wordt gebruikt voor het verwerken van de juiste informatie. Om het werkgeheugen te ontlasten hanteert Barton (hoofdstuk 4) de volgende uitgangspunten:

- Voorkom het redundantie-effect ('overbodige' informatie). Barton adviseert om in deze fase zo min mogelijk contextopgaven te gebruiken. De context leidt af en zorgt ervoor dat het werkgeheugen sneller vol raakt. De leerlingen vinden het lastig om hoofd- en bijzaken te onderscheiden. Voorkom ook dat leerlingen verschillende informatiebronnen moeten integreren.
- Maak goed gebruik van het gegeven dat beeld en gelijktijdige gesproken aanvullende toelichting via twee aparte kanalen worden verwerkt en geen extra belasting voor je werkgeheugen vormen.
- Laat leerlingen gestructureerd en stap voor stap werken in plaats van meerdere (moeilijk overzienbare) stappen. Daarmee is elke stap binnen handbereik (motivatie bevorderend).

2.2.3 Voorzie van zorgvuldig uitgewerkte uitleg, voorbeelden en opdrachten

Bij eerste fase van kennisverwerving is de werkvorm 'Voorbeeld-opgave-paar' volgens Barton (6.2) heel effectief. Deze werkvorm werkt als volgt:

- De docent werkt op de linkerzijde van het bord een (volledige) opgave uit. De leerlingen nemen dit over in hun schrift.
- Daarna licht hij de uitwerking toe.
- De leerlingen moeten daarna op de rechterzijde in hun schrift een vergelijkbare opgave zelfstandig uitwerken.
- Om het leereffect te vergroten, kunnen de leerlingen ook nog elke stap toelichten ('Uitleggen aan jezelf'). Dit is reflectie op hun eigen uitwerking. Ze moeten bij elke stap uitleggen 'waarom' ze die stap hebben gezet. Hiermee worden leerlingen aangemoedigd om stil te staan, na te denken en iets op te merken.

De leerlingen ervaren op die manier succes en gaan daarom gemotiveerd verder met het volgende voorbeeld-opgave-paar. Er wordt domeinkennis opgebouwd. Geleidelijk zullen de leerlingen het geheel aan processtappen overzien en wordt de 'object'-fase van Sfard bereikt.

Het uitkiezen van voorbeelden is hierbij heel belangrijk. Daarmee kan de docent hiaten en dubbelzinnigheden in definities, uitleg en vuistregels corrigeren. Tegelijkertijd kunnen ook non-voorbeelden het conceptueel begrip van leerlingen volledig maken. Een juiste opbouw van voorbeelden en opgaven stelt de leerlingen in staat om essentiële verbanden te leggen die leiden tot procedurele beheersing en conceptueel begrip. Bij de voorbeelden brengt Barton (7.8) daarom steeds maar geleidelijk verschillen aan. Hierdoor kunnen de leerlingen die verschillen en de impact daarvan beter doorzien.

Hij maakt ook gebruik van opgaven met de zelfde oppervlaktestructuur maar met andere dieptes. De zogenoemde ZOAD-opdrachten. Bijvoorbeeld:

- **Oppervlaktestructuur:** in alle opgaven is een gelijkbenige driehoek het uitgangspunt
- **Diepte:** De leerlingen moeten steeds iets anders uitrekenen en een beroep doen op - zo nodig - een ander kennisdomein:
 - Het berekenen van de hoogte gegeven de oppervlakte en de lengte van de basis
 - Bereken de lengtes van de zijden als de totale omtrek gegeven is (de zijdes zijn uitgedrukt in een formule met een onbekende x)
 - Bereken de onbekende hoek (als de basishoeken gegeven zijn)
 - Bereken de oppervlakte als de zijden van de driehoek bekend zijn.

De leerlingen gaan dan verbanden tussen de diverse onderwerpen zien. Bovendien is dit een goede mogelijkheid om aanwezige voorkennis op te frissen. Bijvoorbeeld de hiervoor genoemde opgave: het oplossen van een vergelijking uitgedrukt in x in combinatie met de berekeningswijze van een omtrek. De leerling oefent gelijktijdig het berekenen van de omtrek als het oplossen van een vergelijking.

2.2.4 Oefen doelgericht

Doelgericht oefenen (hoofdstuk 8) wordt ingezet als een onderwerp wordt geïntroduceerd. Hierbij wordt een specifieke vaardigheid geïsoleerd behandeld. Het bestaat uit de volgende vijf stappen:

1. vaardigheid. Bijvoorbeeld: het oplossen van kwadratische vergelijkingen bevat meerdere stappen. Met isoleren wordt bedoeld, dat je elke stap afzonderlijk doelgericht oefent. Zodra de vaardigheid goed wordt beheerst, ga je naar de volgende stap.
2. Ontwikkel de vaardigheid door oefeningen (bijvoorbeeld: voorbeeld-opgave-paar)
3. Evaluer de vaardigheid (door middel van diagnostische vragen)
4. Oefen een vraag of een reeks vragen waarin alle stappen samenkomen
5. Herhaal op later tijdstip

2.2.5 Signaleer misconcepties door formatief te evalueren

Formatief evalueren is volgens Barton (11.1) het aanpassen van het lesgeven aan de behoeftes van de leerlingen. Wellicht wat kort door de bocht of erg algemeen gesteld, maar het geeft goed de intentie weer in de meer gebruikelijke definitie van Cowie en Bell (1999) 'het proces dat door leraren en leerlingen gebruikt wordt om het leren van leerlingen te herkennen en erop te reageren, om zo het leerproces verder te brengen, gedurende het leerproces'.

Barton (11.6) stelt enkele malen tijdens de les diagnostische vragen. Deze worden meestal in multiplechoicevorm gesteld. Op die manier krijgt hij snel feedback van de leerlingen. De antwoorden moeten voor de docent duidelijk maken welk begrip of juist misconcept de leerlingen hebben. Om ook goede feedback te krijgen, moeten de vragen aan de volgende voorwaarden voldoen:

1. De vragen moeten duidelijk en ondubbelzinnig zijn.
2. De vragen moeten één enkele vaardigheid of één enkel begrip onderzoeken. Zo niet, knip dan de vraag op en stel vervolgvragen.
3. De vragen moeten binnen 10 seconden te beantwoorden zijn. Zo niet, dan bevat de vraag vermoedelijk dat er meerdere vaardigheden of begrippen worden getoetst.
4. Van elk onjuist antwoord moet de docent iets kunnen opsteken zonder dat de leerling het nader hoeft toe te lichten.
5. Het moet niet mogelijk zijn om op het juiste antwoord uit te komen met behulp van een misvatting.

De reactie van de docent is afhankelijk van de mate waarin de leerlingen het goede antwoord hebben gekozen:



De vragen kunnen op elk moment tijdens de les worden gesteld. Afhankelijk van het doel wat de docent wil bereiken. Bijvoorbeeld: als de docent de voorkennis wil peilen, ligt het begin van de les voor de hand. De vragen zijn vooraf zodanig opgesteld dat ze inzichtelijk maken welke fouten en misconcepties er kunnen zijn die relevant zijn voor die les.

2.2.6 De overige didactische aspecten volgens Barton

Doelbewust oefenen wordt ingezet als een onderwerp al eerder is behandeld. De bijbehorende opgaven dagen de leerlingen uit om bestaande kennis in te zetten op een andere manier dan ze gewend zijn. Omdat zelfs een eerste stap in de opgave al oefenen is en tot resultaat leidt, ervaart iedereen succes. Een ander belangrijk aspect is dat de leerlingen gevraagd worden hun antwoord aan zichzelf uit te leggen wat het leereffect vergroot.

Van echt leren is sprake als de relevante en correcte items die in het langetermijngeheugen van leerlingen terecht komen een hoge terughaalsterkte (= informatie wordt makkelijk opgehaald) en opslagsterkte (= informatie is goed ingebed) hebben. Zie paragraaf 2.1.2. Hiervoor moet informatie eerst worden vergeten om dan weer te worden teruggehaald. Barton schaaft de hiervoor geschikte werkvormen onder noemer 'Goed gekozen oefeningen en quizen'. Het zijn oefeningen en quizen waarbij ook weinig op het spel staat om de prestatiedruk bij de leerlingen te verminderen.

Barton (12.3-12.6/12.9) karakteriseert deze werkvormen aan de hand van het effect dat hiermee wordt bereikt:

Effect	Toelichting
Het gespreid-oefenen-effect	Leerlingen leren meer wanneer ze twee keer of vaker met tussenpozen een oefening maken, dan wanneer ze hetzelfde aantal keren meteen achter elkaar dezelfde oefeningen maken. Je kunt dus beter een aantal oefeningen 'opsparen' en die op latere tijdstippen alsnog aanbieden. Dit betekent ook dat leraren een deel van hun les moeten besteden aan het herhalen van lesstof van een aantal weken geleden. Afsluitende toetsen en quizen moeten dan ook cumulatief zijn. Dus niet onderwerpspecifiek zoals dat meestal gebeurt.
Het gevarieerd-oefenen-effect	Dit is het gespreid-oefenen effect maar dan met meerdere onderwerpen door elkaar
Het variatie-effect	Het geheugen is deels afhankelijk van de context waarin de informatie is gegeven. Als informatie in een andere context nodig is, bestaat de kans dat de informatie 'vergeten' is. Door te variëren (locatie, klasindeling, werkvormen etc) kan je dit nadelig effect voorkomen.
Het testeffect	Het terughalen van informatie leidt tot leren. Formatieve toetsen zijn een hulpmiddel om informatie terug te halen en dus daarmee het leren te versterken. Hoe je kan toetsen, is onderstaand verder uitgewerkt.
Het pretesteffect	Dit betreft toetsen van een nog onbekend onderwerp. Het effect hiervan is dat je beter in staat bent om leerstof te onthouden en te begrijpen als je eerst over getoetst bent en het daarna bestudeert

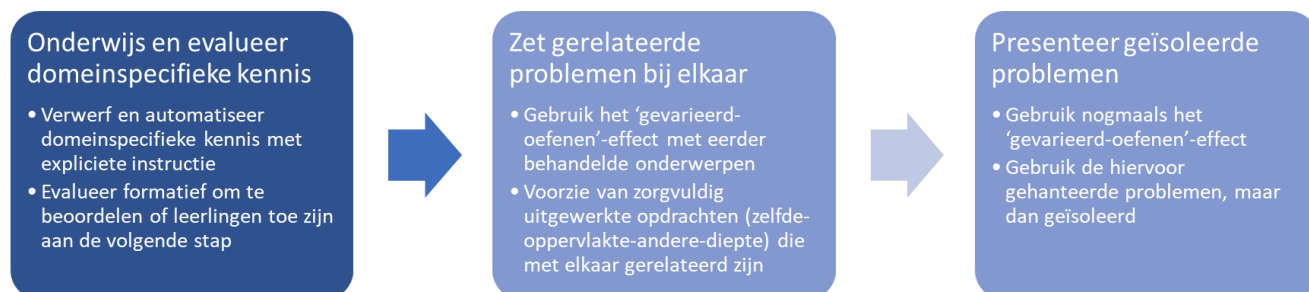
In bovengenoemde oefeningen zijn de omstandigheden die het leren in eerste instantie moeilijk maken. Op termijn verbeteren ze echter de terughaalprocessen die het leren, begrijpen en onthouden ondersteunen. Barton (12.5) noemt deze oefeningen dan ook wel 'gewenste moeilijkheden'.

Barton is een grote voorstander van regelmatig toetsen. Bijvoorbeeld in de vorm van quizzen, met de eerder besproken goed opgestelde diagnostische vragen, waar weinig op het spel staat (12.8). De leerlingen zien deze quizzen dan niet als een vorm van beoordeling (en het daarmee onnodig spannend maken).

De voordelen van deze toetsen zijn:

- Ze geven feedback aan de leraren: wat weten de leerlingen wel of niet.
- Ze geven feedback aan de leerlingen: wat weten ze wel of niet.
- Ze moedigen leerlingen aan om te leren: ze weten waar ze nog aan moeten werken
- Ze versterken het leren in het langetermijngeheugen

De derde fase is het 'Probleemoplossend denken' (hoofdstuk 9). Deze heeft veel raakvlakken met conceptueel begrip. Barton ziet probleemoplossend denken dan ook niet als een vaardigheid. Om succesvol problemen op te kunnen lossen moeten leerlingen eerst beschikken over domeinspecifieke kennis. Om deze derde fase te bereiken, past hij een driestappenproces toe dat onderstaand schematisch is weergegeven:



Deze werkwijze wordt toegelicht aan de hand van de eerder genoemde opdracht met de gelijkbenige driehoeken:

1. In de eerste stap worden de diverse aspecten van gelijkbenige driehoeken uitgelegd. Denk aan de begrippen oppervlakte, omtrek, lengtes van zijden en de grootte van de hoeken. Pas als al deze begrippen voldoende worden beheerst, wordt de tweede stap gezet.
2. Alle opgaven zoals eerdergenoemd worden behandeld. Ze gaan allemaal over de gelijkbenige driehoek.
3. Ten slotte wordt één van deze opgaven enkele weken later afzonderlijk (dus niet in samenhang met de andere opgaven) behandeld. Naast het gewenste 'gespreid-oefenen'-effect, verlangt dit ook van de leerlingen om een strategie te bepalen: welke specifieke domeinkennis heb ik bij deze opgave nodig?

2.3 Fouten en misconcepties bij logaritmen

Leerlingen hebben volgens Kenney (2005) en Weber (2002) moeite om het concept van logaritme te begrijpen. Ganesan en Dindyal (2014) hebben onderzoek gedaan naar veel voorkomende fouten bij logaritmen. Ze hebben deze fouten gecategoriseerd. Ze hebben daarvoor gebruik gemaakt van de vier categorieën voor fouten en misconcepties in de wiskunde van Movshovitz-Hadar, Zaslavsky en Inbar (1987).

In onderstaande tabel zijn deze categorieën weergegeven en toegelicht. In de laatste kolom zijn voorbeelden van veel voorkomende fouten bij logaritmen vermeld zoals die in een onderzoek van Ganesan en Dindyal werden geconstateerd. De onderzoekers stelden vast dat de meeste fouten in alle categorieën vallen, maar dat het niet eenvoudig is om de oorzaken daarvan te duiden:

Categorie	Toelichting bij de categorie	Voorbeeldfouten
Onjuist gebruik van informatie	- Negeren van de gegeven gegevens die belangrijk zijn om een oplossing te vinden - Gebruiken van gegevens die anders zijn dan de gegeven gegevens - Toevoegen van irrelevante of vreemde gegevens - Gebruiken van een numerieke waarde van een variabele voor een andere variabele	Zet in de juiste volgorde (van klein naar groot): $\log 5, \log 1, -\log 2, \log \frac{1}{2}, -\log \frac{3}{4}$ <u>Antwoord:</u> $-\log 2, -\log \frac{3}{4}, \log \frac{1}{2}, \log 1, \log 5$
Onjuist gebruik van een stelling of definitie	- Een stelling of definitie toepassen als niet aan de voorwaarden daarvoor is voldaan - Een distributieve eigenschap toepassen op een niet-distributieve functie of bewerking - Onjuist citeren van een definitie, stelling, regel of formule	Los op: $y = {}^{25}\log 5$ <u>Antwoord:</u> $y = 2$ Herleid: $\frac{{}^y\log 16}{{}^y\log 4}$ <u>Antwoord:</u> ${}^y\log(16 - 4) = {}^y\log 12$
Niet-geverifieerde oplossing	Het eindresultaat is niet de oplossing voor het probleem (er is bijvoorbeeld niet teruggerekend of het eindresultaat juist was)	Los op: ${}^x\log(2x + 15) = 2$ <u>Antwoord:</u> $2x + 15 = x^2 \rightarrow (x - 5)(x + 3) = 0$ $x = 5 \vee x = -3$
Technische fout	- Fout in berekening vanwege onzorgvuldigheid - Fout bij het manipuleren van algebraïsch symbool of bewerking - Fout bij het toepassen van een algoritme	Gegeven is: $x = {}^5\log 2 \text{ en } y = {}^5\log 3$ Druk ${}^5\log 36$ uit in x en y <u>Antwoord:</u> ${}^5\log 36 = {}^5\log(2^2 \cdot 3^2)$ ${}^5\log 36 = {}^5\log 2^2 \cdot {}^5\log 3^2$ ${}^5\log 36 = 2x + 2y$

Volgens Ganesan en Dindyal zijn de fouten en misconcepties vooral toe te wijzen aan:

1. Leerlingen beseffen onvoldoende dat een logaritme de exponent van een machtsfunctie beschrijft. De relatie $y = a^x \leftrightarrow x = {}^a\log y$ is onvoldoende ingebed in cognitieve schema's. Dit blijkt ook uit een onderzoek van Boon Liang en Wood (2005).
2. Het onderwerp over logaritmen in de klas volgt op het onderwerp over exponenten, terwijl logaritmen historisch anders zijn ontstaan.
3. Leerlingen realiseren zich onvoldoende dat een vermenigvuldigings- of deelprobleem kan worden herleid tot een optel- of aftrekkingsprobleem, wat een zeer significant resultaat is bij afwezigheid van een rekenmachine.
4. Symboliek: de notatie $x = {}^a\log y$ is ongebruikelijk in het voortgezet onderwijs. Leerlingen zijn de basisschool vertrouwd met de bewerkingen som, verschil, product en quotiënt en de bijbehorende symboliek: +, -, x, :. Op het voortgezet onderwijs komen daar de begrippen en symbolen voor machten en wortels bij. Die worden al vanaf de brugklas geautomatiseerd. Leerlingen hebben dan ook minder moeite met deze begrippen dan met logaritmen. De symboliek wordt vervolgens bemoeilijkt door afwijkende notatie voor ${}^{10}\log y$ waarbij de exponent achterwege wordt gelaten ($\log y$) en voor de natuurlijke logaritme ($\ln$).

Er zijn meerdere suggesties gedaan om een beter begrip te realiseren. Bijvoorbeeld door:

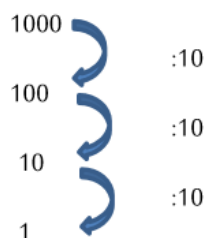
- de geschiedenis van logaritmen op te nemen in het lesprogramma (Panagiotou, 2011). De geschiedenis onthult dat logaritmen zijn uitgevonden vóór de exponentiële functie en laat zien dat de logaritmen een reactie zijn op een probleem. Volgens Panagiotou helpt het leerlingen als vanuit de probleem de evolutie van het concept logaritmen wordt uitgelegd. Pas daarna zou de exponentiële functie mogen worden geïntroduceerd. Deze werkwijze wordt niet gevolgd in dit lesontwerp zoals toegelicht in paragraaf 2.4.1.
- het leggen van de relatie tussen rekenkundige en geometrische reeksen (Gruver, 2018) zoals in onderstaande afbeelding is weergegeven:

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32

$$4 \times 8 = 2^2 \times 2^3 = 2^5 = 32$$

Een vermenigvuldiging van 4×8 wordt gezien als een optelsom van de bijbehorende exponenten: $2 + 3$. Vervolgens kan de waarde van de bijbehorende macht worden gevonden: 32 . Hoewel dit het inzicht in bijvoorbeeld de rekenregels van logaritmen vergroot ($\log(a) + \log(b) = \log(ab)$), is in dit verslag niet voor deze methode gekozen. Met de (grafische) rekenmachine ervaren de leerlingen de noodzaak van het vereenvoudigd vermenigvuldigen namelijk niet.

- de waarde van een logaritme te benaderen met herhaalde deling (Vos en Espedal, 2016). Een voorbeeld van deze methode: hoe vaak kun je 1000 delen door 10 voordat je bij 1 uitkomt? Oplossing:



Je maakt dus drie stappen tot je bij 1 uitkomt. Dit wordt dan vervolgens opgeschreven als:

${}^{10}\log 1000 = 3$. Het 'Herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt' is een wiskundige context, die een procesmatige betekenis geeft aan de logaritme. Deze aanpak wordt uitsluitend toegepast in de eerste fase van kennisverwerking. Het voordeel van deze aanpak is dat leerlingen inductief werken. Dus door eerst praktisch, met concrete getallen stapsgewijs iets uit te zoeken, en van daaruit naar algemene regels toe te werken.

2.4 Impact voor het lesontwerp voor logaritmen

Wat leert dit ons voor het onderwijs van wiskunde (en straks logaritmen in het bijzonder)?

2.4.1 Een sterke koppeling met exponentiële functies

In dit verslag wordt de stelling opgevat dat om logaritmen te kunnen conceptualiseren leerlingen dit niet successievelijk maar juist in samenhang met exponentiële groei moeten leren. De beweegredenen hiervoor zijn:

- Leren is informatieverwerking (paragraaf 2.1). Daarbij wordt informatie opgeslagen en opgehaald uit het langetermijngeheugen. Om assimilatie en accommodatie mogelijk te maken, moet het lesontwerp aansluiten bij bestaande cognitieve schema's. Voor de hand liggende kennisdomeinen zijn machten en exponentiële verbanden. Hierbij moet de relatie $y = a^x \leftrightarrow x = {}^a\log y$ beter worden ingebed in de cognitieve schema's. Boon Liang en Wood pleiten er daarom voor om, zeker in de eerste fase van kennisverwerving, de leerlingen steeds die relatie onder woorden te laten brengen: " x is de exponent die nodig is om $a^x = y$ te krijgen". Het voordeel is volgens hen dan ook dat de leerlingen een logaritme als een getal gaan zien. Als ze dat eenmaal doen, zullen ze ook sneller (zelfs zonder berekeningen) inzien dat bijvoorbeeld $2^{\log_2 5} = 5$. Ook Kuper en Carlson (2020) raden in een recent onderzoek aan om op vergelijkbare wijze een sterke koppeling te maken met exponentiële functies.
- De huidige onderwijsmethoden leunen erg op exponentiële functies. Deze functies komen in de praktijk veel voor (bijvoorbeeld 'rente op rente' bij spaarrekeningen) en sluiten goed aan bij de beleevingswereld van leerlingen wat het begrip versterkt.

Voor de eerste fase van kennisverwerving zijn de rekenregels voor logaritmen (bijvoorbeeld: $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$) en daarmee de veelvoorkomende fouten niet van toepassing. Het ligt echter voor de hand te veronderstellen als leerlingen de relatie tussen logaritmen en exponentiële groei goed begrijpen, zij minder snel deze fouten maken. De leerlingen kunnen dan de rekenregels bijvoorbeeld altijd zelf weer herleiden. Zie onderstaand voorbeeld.

Als leerlingen de relatie $y = a^x \leftrightarrow x = {}^a\log y$ 'geautomatiseerd' hebben en op basis van de voorkennis de rekenregel $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ kunnen toepassen, dan kunnen ze de volgende rekenregel relatief eenvoudig afleiden:

Stap 1: laat $p = {}^a\log(x)$ en $q = {}^a\log(y)$ zijn

Stap 2: dan geldt $x = a^p$ en $y = a^q$

Stap 3: dus $x \cdot y = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

Stap 4: ${}^a\log(x \cdot y) = {}^a\log(a^p \cdot a^q) = {}^a\log(a^{p+q}) = p + q = {}^a\log(x) + {}^a\log(y)$

2.4.2 Lesopbouw volgens Barton

De in paragraaf 2.2 besproken didactische zienswijze van Barton heeft geleid tot de volgende uitgangspunten bij het lesontwerp:

1. Verhaalstructuur om een onderwerp in te leiden. Zie paragraaf 2.2.1. In het lesontwerp worden geen personages gebruikt, maar wordt de beleavingswereld van de leerlingen aangesproken door een aansprekend thema te gebruiken als leidraad voor het verhaal.
2. Het gebruik van de in paragraaf 2.2.3 genoemde 'Voorbeeld-opgave-paar'-methode waarbij context wordt vermeden:
 - a. Volgens Barton (1.3) onthouden leerlingen datgene waar ze aandacht aan besteden. In de eerste fase van kennisverwerving wil hij de aandacht volledig op de domeinspecifieke kennis hebben. Contextopgaven of afwijkende werkvormen kunnen de aandacht afleiden van de domeinspecifieke kennis die de docent de leerlingen wilt aanleren. Als leerlingen aandacht geven aan die afleidingen, dan beperkt dat de kans dat ze beoogde domeinkennis aanleren. Hij vermijdt dan ook deze afleidingen in zijn lessen. Dit betekent contextvrije opgaven bij aanvang.
 - b. Het werkgeheugen is zeer beperkt (zie paragraaf 2.2.2). Dat vereist leerstrategieën die het werkgeheugen zo veel als mogelijk ontlasten zodat je daarmee de kans vergroot dat nieuwe kennis wordt opgeslagen in het langetermijngeheugen. Door in kleine stapjes te werken en deze op het bord te motiveren ontlast je het werkgeheugen.
3. Oefen doelgericht (paragraaf 2.2.4). Nadat de leerlingen een vaardigheid hebben ontwikkeld ('Uitleg') oefenen ze deze vaardigheid en wordt deze geëvalueerd door middel van diagnostische vragen.
4. Nadat meerdere vaardigheden zijn ontwikkeld, worden deze geëvalueerd door middel van een vraag of een reeks vragen waarin alle stappen/vaardigheden samenkomen. Dit kan een quiz zijn waarbij niets op het spel staat.

3 Methode

Volgens Van der Donk en Van Lanen (2018) begint het ontwerp van een les (of lessenserie) met het formuleren van heldere ontwerpeisen. Daarna vindt daadwerkelijk het ontwerpen plaats: van ontwerpvorm, via het maken van de lessen, tot het evalueren van de lessen. In dit hoofdstuk wordt dit proces gevolgd waarbij de volgende vragen worden beantwoord:

- Wat zijn de ontwerpeisen?
- Hoe ziet een lesopbouw volgens Barton eruit?
- Hoe worden de lessen ontworpen?
- Hoe wordt het lesontwerp geëvalueerd?

3.1 Formuleer heldere ontwerpeisen

Het formuleren van de ontwerpeisen voor logaritmen is gedaan aan de hand van het model van SLO (2019a) opgezet volgens de tien leerplanaspecten van het curriculaire spinnenweb van SLO (2019b). In de eerste kolom zijn de vragen per aspect weergegeven waarop met de ontwerpeisen antwoord moet worden gegeven. Deze ontwerpeisen (zoals bijvoorbeeld 'Leeractiviteiten') zijn opgesteld op basis van de didactische uitgangspunten van Barton uit hoofdstuk 2. Een aantal ontwerpeisen (bijvoorbeeld: 'Groeperingsvormen' en 'Tijd') is meer van praktische of algemene aard en deze zijn bedoeld om de overige kaders van het lesontwerp te schetsen.

Leerplanaspecten	Ontwerpeisen
Basisvisie Waartoe leren leerlingen? Vanuit welke idealen of visie wil je deze module/lessen opzetten?	• Leren is door docent begeleid uitzoeken hoe het zit • Leren is vooral een kwestie van veel oefenen en vaak doen (herhaling) • Leren door reflecteren: terugkoppeling en evaluatie van gemaakte opdrachten
Leerdoelen Wat kunnen de leerlingen straks wat ze nu niet nog niet (voldoende) kunnen? Wat wil je precies met je nieuwe lessenserie bereiken? Wat kan er aan het eind van de lessenserie getoetst worden?	Niveau: 4 havo (wiskunde B) of 4 vwo (wiskunde A en B): • Leerlingen kunnen de basisregels van machten goed toepassen (activeren voorkennis) • Leerlingen kunnen exponentiële verbanden herkennen en leggen • Leerlingen kunnen de functiewaarde van een exponentieel verband bepalen gegeven de waarde van de variabele/exponent • Leerlingen kunnen de waarde van de variabele <i>herleiden</i> als de functiewaarde van een exponentieel verband gegeven is ('terugrekenen') • Leerlingen kunnen de waarde van de exponent <i>berekenen als logaritme</i> als de functiewaarde van een exponentieel verband gegeven is ('terugrekenen') • Leerlingen weten wat een logaritme is en kunnen deze algebraïsch berekenen en uitdrukken in een getal (zo nodig met behulp van de rekenmachine)

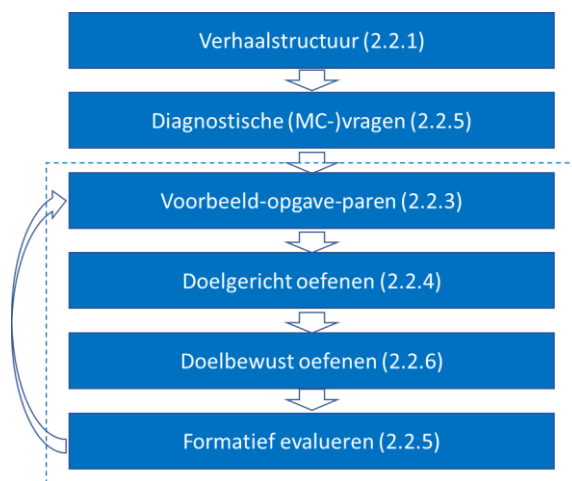
Leerplanaspecten	Ontwerpeisen
Leerinhoud Wat leren leerlingen dan? Gaat het om vakinhouden, om vakvaardigheden of anderszins?	• Leerlingen raken vertrouwd met logaritmen • Leerlingen weten wat logaritmen zijn en kunnen de waarde daarvan in een getal uitdrukken • Leerlingen worden bewust van hun misconcepties en weten die aan te passen
Leeractiviteiten Wat doen leerlingen? Welk gedrag of welke activiteiten laten zij zien?	• Leerlingen maken individueel in klassikaal verband opgaven volgens de 'Voorbeeld-opgave-paar'-lesmethode, de ZOAD-opdrachten van Barton • Leerlingen beantwoorden diagnostische vragen en 'leggen aan zichzelf uit' of onderbouwen hun antwoord aan andere leerlingen • Leerlingen oefenen individueel de opgaven die door de docent zijn aangereikt
Docentrollen Wat betekent het voor de rol als docent?	• De docent heeft een sturende rol in deze eerste fase van kennisverwerving • De docent geeft ook non-voorbeelden om misconcepties weg te nemen voor een beter begrip
Bronnen en materialen Welke middelen zijn er nodig?	• Leerlingen krijgen opgaven op papier uitgereikt • Tabellenboek • Rekenmachine • PowerPoint / whiteboard
Groeperingsvormen Leren leerlingen in groepjes? Hoe groot is de groep? Samenstelling? Wie formeert de groep?	• Klassieke klasopstelling (busopstelling) waarbij leerlingen die naast elkaar zitten in tweetallen mogen overleggen op die momenten die de docent toestaat • Geen verplicht klassenplattengrond
Tijd Hoeveel tijd beslaat de module? Wat betekent dit voor de inroostering en de planning?	• Betreft drie lessen van elk 60 minuten
Leeromgeving Waar leren de leerlingen? Wat voor soort lokaal? Binnen of buiten de school?	• Het eigen klaslokaal. Dit is voor leerlingen een veilige leeromgeving
Toetsing Hoe wordt getoetst wat leerlingen hebben geleerd? (Bv. schriftelijk, mondeling, door een onderzoeksopdracht, een practicumtoets?)	• Formatief toetsen op basis van diagnostische vragen of quizzen/spelletjes • Summatief toetsen is niet van toepassing in deze lessenserie

3.2 Lesopbouw volgens Barton

Barton steunt in zijn uitleg sterk op de zogenoemde ‘Uitgewerkte voorbeelden’. Uit zijn lesbeschrijving op blz. 235 (deel 1) kan de hiernaast grafisch weergegeven lesopbouw worden afgeleid (tussen haakjes zijn de paragraafnummers weergegeven waarin deze leerstappen zijn toegelicht):

Voorafgaand aan de uitgewerkte voorbeelden is de leerstap ‘Verhaalstructuur’ toegevoegd om de aanvang van de les te markeren en de nieuwe uitleg een ‘plek te geven’. Dit is te vergelijken met de leerstap ‘Engageren’ uit het 6E-model van Windels (2012). De leerstap

‘Evalueren voorkennis’ wordt door Barton ingevuld met zijn diagnostische (MC-)vragen. Voor de overige leerstappen kan Windels niet worden gevolgd. Hij gaat namelijk uit van de constructieve leersituatie waarbij de leerlingen onder begeleiding van de docent zelf de nieuwe lesstof ontdekken. Barton is te karakteriseren als de instructieve leersituatie: de docent legt zelf de nieuwe stof uit door middel van voorbeeld-opgave-paren: “De docent doet voor; de leerlingen doen daarna na”.



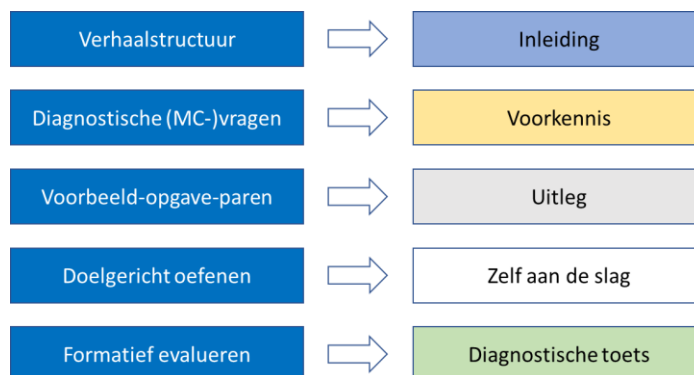
Barton pleit ervoor om uitleg in behapbare brokken op te delen. Dat betekent dat een aantal stappen meerdere keren tijdens één les kunnen voorkomen. Als bij de stap ‘Voorbeeld-opgave-paren’ de leerlingen ook gelijktijdig doelgericht oefenen, wordt de stap ‘Doelgericht oefenen’ echter niet nog eens afzonderlijk uitgevoerd om een overdaad aan oefening te voorkomen.

‘Formatief evalueren’ moet na elke uitleg worden gehouden. In het lesontwerp worden hiervoor diagnostische vragen ontwikkeld. Indien de uitleg echter relatief beperkt in omvang is en er een tweede uitleg volgt, kan de docent ook informeel (bijvoorbeeld door mondeling een korte vraag te stellen) toetsen of de eerste uitleg voldoende begrepen is alvorens met de tweede uitleg te kunnen beginnen. In dat geval worden geen diagnostische vragen opgenomen in het les ontwerp.

‘Doelbewust oefenen’ is een middel om kennisdomeinen die eerder zijn behandeld in de les terug te laten komen om daarmee het leereffect te versterken. In dit lesontwerp zijn die kennisdomeinen en daarmee het oefenen niet opgenomen omdat dit een ‘stand alone’ lesontwerp is en geen onderdeel is van een compleet lesprogramma.

3.3 Het ontwerpen van de lessen

Voor het ontwerpen van de lessen wordt dus de lesopbouw van Barton uit 3.2. gevolgd. In de lessen zullen deze leerstappen als volgt te herkennen zijn:



Er is gekozen om elke stap een eigen kleur in de les te hebben zodat dit de herkenbaarheid zowel bij de docent als de leerlingen vergroot.

Een les kan worden afgesloten met een ‘Eindspel’. Dit is een oefening waarbij weinig op het spel staat, zoals Barton (12.8) dat noemt. Het eindspel moet zodanig zijn vormgegeven dat de geleerde vaardigheden goed kunnen worden ingeoefend. Het spel mag uitdagend zijn en mogen zowel individueel als in groepsverband worden gespeeld.

De leerstappen worden ook ‘volgens Barton’ ingevuld. Dat betekent bijvoorbeeld dat bij het evalueren van de voorkennis ook de foute antwoorden de docent en de leerlingen inzicht geeft in de oorsprong van de misconcepties. Bij de uitleg wordt bijvoorbeeld de ‘voorbeeld-opgave-paren’-methode gevolgd. De lessenserie zal bestaan (zie ontwerpeisen) uit instructiemateriaal, leertaken- en opdrachten en werkbladen/tabellen. Deze zullen de in 3.1. genoemde leerdoelen en leerinhoud moeten beslaan.

3.4 Toetsing van het ontwerp

Het onderzoeken of deze lessenserie ook in de praktijk leidt tot betere leerresultaten valt buiten de reikwijdte van dit verslag. Daarvoor in de plaats is het conceptontwerp voorgelegd aan twee ervaren docenten voor hun expertopinie. Het zijn docenten met ieder meer dan 30 jaar ervaring als docent. Zij geven wiskundeles aan de bovenbouw van havo en vwo en hebben dus veel te maken met het onderwerp logaritmen. Het zijn docenten die ook verbonden zijn aan het Thomas à Kempis college te Arnhem. De feedback is via een interview afgenomen. Een verslag van het interview is ter goedkeuring aan hen voorgelegd. Het verslag is opgenomen in bijlage C bij dit verslag. De feedback van hun review is verwerkt in het definitieve lesontwerp en waar hun feedback niet is gevolgd, is dit in hoofdstuk 4 van dit verslag toegelicht.

4 Resultaten

In paragraaf 4.1 wordt dit lesontwerp toegelicht. Daarbij wordt antwoord gegeven op de vragen ‘Wat zijn de leerstappen per les?’ en ‘Waarom zijn deze leerstappen op deze wijze vormgegeven?’. In paragraaf 4.2 wordt aangegeven hoe de lessenserie aansluit bij de in hoofdstuk 2 genoemde conclusies en de in hoofdstuk 3 genoemde ontwerpeisen. In paragraaf 4.3 is een expertopinie over het lesontwerp opgenomen en tot welke wijzigingen dit heeft geleid.

4.1 Toelichting lesontwerp

In onderstaande tabel worden de lesstappen toegelicht. Op de eerste rij van elke stap wordt voor alle drie de lessen overkoepelend de stap toegelicht. Daarna, indien van toepassing, wordt specifiek voor die stap ingezoomd op de keuzes die zijn gemaakt in het lesontwerp.

Les Leerstap	Les 1	Les 2	Les 3
Stap 1: Inleiding	Engageren van de leerlingen door introductie van het onderwerp exponentiële verbanden bij het coronavirus. De wereld is in 2020 opgeschrikt door het coronavirus. Leerlingen zullen zich daarom geboeid voelen bij dit onderwerp. Elke les start met een aspect van dit onderwerp: de groei van het aantal besmettingen, de halveringstijd van virussen en het berekenen van het tijdstip waarop een vooraf bepaald aantal besmettingen is bereikt. De leerlingen zien het nut of de noodzaak in van het onderwerp van deze lessenserie.		
Stap 2: Voorkennis	Elke les start met het evalueren van de voorkennis. Dit wordt gedaan door middel van diagnostische multiplechoicevragen. Deze vragen zijn zodanig opgesteld dat niet alleen vastgesteld wordt welke en hoeveel leerlingen het juiste antwoord weten, maar bij de foute antwoorden welke misconcepties bij de leerlingen bestaan. De docent kan dan situationeel bijsturen. Pas als deze misconcepties zijn weggenomen kan de uitleg starten.		
	Goede beheersing van machten is noodzakelijk voor een juiste begrip van logaritmen. Met deze vragen wordt deze beheersing getoetst	In de vorige les hebben ze exponentiële verbanden opgesteld en uitgerekend met behulp van tabellen. Met deze vragen wordt getoetst of ze een formule van exponentieel verband kunnen opstellen en of ze de uitkomst van een exponentieel verband kunnen berekenen	In deze les ligt de focus op het correct uitdrukken van een logaritme in een geheel getal. De leerlingen worden gevraagd hoe zeker zij zijn van een antwoord. Op die manier worden zij bewuster van misconcepties (“Ik had het fout maar was vrij zeker van dat het goed was”)
Stap 3: Uitleg	De uitleg start steeds met ‘Voorbeeld-opgave-paar’. De docent werkt een opgave stap-voor-stap uit en licht daarna (om het werkgeheugen te ontlasten) mondeling toe. De leerlingen worden vervolgens gevraagd om deze stappen na te doen in een andere opgave. Door de opgaven fysiek ook naast elkaar te presenteren, kunnen de leerlingen eenvoudiger de stappen nabootsen en wordt wederom minder beroep gedaan op het werkgeheugen.		

Leerstep \ Les	Les 1	Les 2	Les 3
	In de opgaven van de eerste uitleg wordt van de leerlingen gevraagd om flexibel te kunnen schakelen tussen de waarde van een exponentiële functie (het argument) en de waarde van het exponent. Door te werken met een tabel (in plaats van een rekenmachine) wordt het schakelen ook visueel gemaakt wat het leren verbetert. De opgaven van de tweede uitleg zijn beperkt in complexiteit toegenomen zoals Barton dat adviseert.	In les 1 waren de exponentiële functie en de vergelijkingen die moeten worden opgelost gegeven. In de opgave in les 2 leren leerlingen om een exponentiële functie en de benodigde vergelijkingen zelf op te stellen. Ook nu weer wordt van hen verlangd flexibel te kunnen schakelen tussen de waarde van een exponentiële functie en de waarde van het exponent. In de tweede uitleg wordt het begrip logaritme als oplossing voor de exponent van een exponentiële vergelijking geïntroduceerd. Om mentaal te kunnen blijven schakelen tussen waarde van de exponent en de waarde van exponentiële vergelijking moeten ze de oplossing ook controleren waarbij de gehele vergelijking op schrift staat. De controle mogen ze met hun rekenmachine doen zodat ze die ook leren te beheersen	Tot nu toe hebben de leerlingen logaritmen uitgerekend met de meegeleverde tabellen. Dit werkt alleen voor gehele exponenten. In de vervollessen zullen de leerlingen logaritmen moeten kunnen uitrekenen met hun rekenmachine. Dan zijn ook niet-gehele oplossingen mogelijk. In deze opgave (die iets afwijkt van het 'Voorbeeld-opgave-paar') moeten ze logaritmen met hun rekenmachine uitrekenen. Ze kunnen zichzelf controleren door de uitkomsten in een grafiek te zetten. Er moet dan weer een exponentiële functie worden geschetst. De vorm van deze functie kennen ze al, zodat ze inderdaad in staat zijn zichzelf te controleren. In de tweede uitleg leren de leerlingen hoe ze algebraïsch een logaritme kunnen uitrekenen wat het begrip van logaritmen vergroot
Stap 4: Zelf aan de slag	Na de uitleg worden extra opgaven aangeboden om het zojuist geleerde in te oefenen Met deze opgave wordt inzicht gevraagd in het opstellen en interpreteren van (uitkomsten van) exponentiële functies.	Deze opgave verlangt inzicht in de verschillende componenten: het grondtal, de exponent en het argument. De opgaven lijken veel op elkaar en dwingt de leerlingen om goed de verschillen te kunnen duiden. Het moet leiden tot een beter begrip van logaritmen	Met hun rekenmachine krijgen ze relatief veel opgaven om de vaardigheid van het juist uitrekenen van een logaritme in te oefenen. In sommige opgaven is de exponent een formule die ze dan ook correct moeten uitwerken.
Stap 5: Diagnostische vragen	Na het inoefenen van de vaardigheden worden deze getoetst. De docent krijgt dan inzicht in eventuele misconcepties bij de leerlingen. Hij kan dan bijsturen waar nodig. De leerlingen moeten hun antwoorden doorgeven door hun vingers op te steken (1 vinger is antwoord A, 2 vingers antwoord B etc) of het antwoord op hun wisbordje te schrijven. De foutieve antwoorden zijn zodanig gekozen dat deze de docent ook informatie geeft wat de misconcepties zijn bij de leerlingen. Voor les 1 is ervoor gekozen om aansluitend nog een kwartetspel uit te voeren. Naast het extra inoefenen dat dit met zich meebrengt, geeft het de docent ook informatie waar leerlingen vastlopen. In les 3 zijn de diagnostische vragen vervangen door een mini-locospel. Dit vereist wel van de docent dat hij rondloopt door de klas om te kijken waar mogelijke misconcepties zijn.		

4.2 Koppeling met theoretisch kader en ontwerpisen

In paragraaf 2.4.2. zijn op basis van de didactische zienswijze van de volgende uitgangspunten bij het lesontwerp opgesteld:

1. Verhaalstructuur om een onderwerp in te leiden.
2. Het gebruik van de 'Voorbeeld-opgave-paar'-methode waarbij context wordt vermeden.
3. Nadat de leerlingen een vaardigheid hebben ontwikkeld ('Uitleg') oefenen ze deze vaardigheid en wordt deze geëvalueerd door middel van diagnostische vragen.
4. Nadat meerdere vaardigheden zijn ontwikkeld, worden deze geëvalueerd door middel van een vraag of een reeks vragen waarin alle stappen/vaardigheden samenkomen. Dit kan een quiz zijn waarbij niets op het spel staat.

Met de keuze van de in paragraaf 3.3 gehanteerde lesopbouw zijn deze uitgangspunten min of meer vanzelfsprekend verwerkt in de lessenserie. De verschillende leerstappen zijn duidelijk herkenbaar aan naamgeving van elke stap (bijvoorbeeld 'Uitleg') en de bijbehorende kleurstelling.

In paragraaf 3.1 zijn de ontwerpisen opgesteld. De belangrijkste eisen hadden betrekking op:

- De didactische visie en de rol van de docent/leerlingen daarbij
- De leerdoelen
- De leeractiviteiten

De didactische visie en de rol van de docent/leerlingen daarbij

De didactische visie is gebaseerd op Barton:

- Leren is door docent begeleid uitzoeken hoe het zit
- Leren is vooral een kwestie van veel oefenen en vaak doen (herhaling)
- Leren door reflecteren: terugkoppeling en evaluatie van gemaakte opdrachten

Met de in 3.3 genoemde leerstappen (met uitzondering van 'Inleiding') is daar invulling aangegeven. De docent heeft in deze lessen een sturende rol in deze eerste fase van kennisverwerving. Bijvoorbeeld door het hanteren van de 'Voorbeeld-opgave-paren'-methode. Met de diagnostische vragen geeft de docent non-voorbeelden om misconcepties vast te kunnen stellen en te kunnen herstellen.

De leerdoelen

De leerdoelen zijn gericht op een samenhangend begrip van exponenten en logaritmen waarbij de rekenregels van machten een vaardigheid is die leerlingen al moeten beheersen maar wel worden getoetst ('evalueren voorkennis'). Het lesontwerp start dan ook met de evaluatie van machten. Om het samenhangend begrip te realiseren, is gekozen om te werken met tabellen zodat de leerlingen leren flexibel te schakelen tussen exponent, grondtal en argument.

Leeractiviteiten

Met 'Voorbeeld-opgave-paren' in de leerstap 'Uitleg', opgaven in de leerstap 'Zelf aan de slag' en 'Eindspel' oefenen de leerlingen veel. Met het 'Voorbeeld-opgave-paar'-lesmethode (onderdeel van elke 'Uitleg') en 'Zelf aan de slag' maken de leerlingen individueel in klassikaal verband opgaven. Sommige opgaven zijn zodanig opgesteld dat ze voldoen aan de ZOAD-opdrachten van Barton. Bijvoorbeeld in 'Zelf aan de slag' van les 2. In les 3 moeten de leerlingen bij de voorkennis hun antwoorden onderbouwen aan de andere leerlingen.

4.3 Expertopinie

Een concept-lesontwerp is voorgelegd aan twee ervaren bovenbouw docenten van het Thomas à Kempis college te Arnhem. Hun reactie is verwerkt in het definitieve lesontwerp. In deze paragraaf zijn hun bevindingen weergegeven.

Algemeen

De lessen worden als goed beoordeeld. Er zit een duidelijke structuur in de lesopbouw. De stappen zijn goed te volgen voor de leerlingen. Er is genoeg oefening voor de leerlingen. De leerlingen worden goed geëngageerd met de inleidingen over het coronavirus. Een actueel thema dat de leerlingen zal inspireren. Ze kunnen daarmee ook mooi zien hoe wiskunde in de praktijk wordt toegepast.

De leerlingen hebben al kennis opgedaan over exponentiële functies. De docenten vragen zich wel af of de stappen wellicht daarom niet te klein zijn. Voor het tempo is echter aansluiting gezocht bij Barton. Hij heeft het namelijk over de 'vloek van kennis'. Dat is de valkuil dat docenten hun leerlingen behandelen als experts in plaats van beginners. Wat voor een docent eenvoudig is, is vaak nog moeilijk te begrijpen door de leerlingen. Het is volgens Barton daarnaast noodzakelijk om complexe processen voor beginnende leerlingen op te delen in subprocessen waarbij vaardigheden worden geïsoleerd, ontwikkeld en geëvalueerd. Het lesontwerp is ondanks de expertopinie hiervoor niet aangepast. Het lesontwerp is namelijk gericht op de eerste fase van kennisverwerving (leerlingen zijn dus beginners) en er is onderbouwd gekozen voor een sterke koppeling met exponentiële functies. Bovendien is bewezen veel leerlingen logaritmen moeilijk vinden. De lijn van Barton is dus vastgehouden.

Ze geven ook de suggestie om logaritmen in meer historisch perspectief te plaatsen. In hoofdstuk 2 is dat ook als één van de mogelijkheden genoemd door Panagiotou, maar zoals toegelicht in paragraaf 2.4.1. niet in dit lesontwerp overgenomen.

Inhoudelijke feedback

Hieronder volgen puntsgewijs de inhoudelijke opmerkingen bij het lesontwerp:

- In het lesontwerp komen regelmatig de term ‘machten’ voor. Dit is volgens de docenten ongewenst omdat dit kan leiden tot misvattingen bij de leerlingen. Ze hebben immers eerder machtsfuncties gehad zoals bijvoorbeeld $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 6$. Hoewel ze zich realiseren dat het lastig is om het begrip ‘macht’ te allen tijde te vermijden, raden ze aan om zoveel mogelijk het begrip ‘exponentieel’ te hanteren. Dit voorkomt ook dat leerlingen logaritmen als machten gaan behandelen: als $y = x^5$ dan geldt $x = y^{\frac{1}{5}}$ en dus ook redeneren dat als $y = 5^x$ dan geldt $5 = y^{\frac{1}{x}}$ en daarmee niet verder komen. Het lesontwerp is hierop aangepast.
- De titel van de lessenserie is verwarrend aangezien het einddoel weliswaar logaritmen is, maar een groot deel van de lessenserie over exponentiële verbanden gaat. De titel is aangepast.
- Wiskundig zijn de formuleringen in het lesontwerp niet altijd zuiver. Bijvoorbeeld ‘uitkomst’ in plaats van ‘oplossing’. Dit is in het lesontwerp aangepast. Dit heeft ook geleid tot een aanpassing van de uitleg op blz. 9 en 10 waarbij de logaritme als een tussenstap wordt gezien om daarna de oplossing van de exponentiële vergelijking te bepalen.
- De logaritme is de oplossing voor een probleem. Een stuk gereedschap dat de leerlingen eerst niet hadden. Dit kan beter worden benadrukt in het lesontwerp. Dat is nu gedaan.
- Alle vragen zijn gezamenlijk doorgenomen. Waar antwoorden of vragen onduidelijk waren of voor meerderlei te interpreteren, zijn die in de lessen aangepast.
- In de wiskunde zijn modellen een benadering van de werkelijkheid. Dit kan beter worden benadrukt in de introductie van de eerste les. Dat is aangepast.

5 Conclusie

Naar goede wiskundendidactiek is al veel onderzoek gedaan. Docent Craig Barton heeft deze wetenschappelijke inzichten op een rij gezet. Dat heeft geresulteerd in een samenhangend geheel van leerstappen voor een les/lessenserie. Kernvragen die hij daarmee beantwoordt zijn:

1. Wat is de beste manier om iets uit te leggen?
2. Hoe zorg ik dat ze de stof beter gaan onthouden?
3. Hoe zet je formatieve evaluatie goed in?

In dit ontwerp is onderzocht in welke mate de principes van Barton goed toe te passen zijn op het Nederlandse wiskundeonderwijs. Voor de toepassing is gekozen voor het onderwerp logaritmen, dat bij uitstek vraagt om een sterke didactische onderlegging vanwege de vele misconcepties die leerlingen erbij kunnen oplopen, zoals ook blijkt uit internationaal onderzoek. Ook de resultaten van het Nederlands centraal schriftelijk eindexamen geven hetzelfde beeld.

Deze beide bevindingen hebben geleid tot probleemstelling van dit ontwerp van onderwijs: *“Hoe kan een lesontwerp er uitzien gedurende de eerste fase van kennisverwerving over het onderwerp logaritmen als dit ontwerp gebaseerd wordt op de vakdidactische en onderwijskundige principes van Barton?”*.

Het ontwerp heeft geresulteerd in een samenhangende lessenserie over exponenten en logaritmen. Logaritmen kunnen namelijk niet los gezien worden van exponenten en de lessenserie maakt juist gebruik van die samenhang. De lessen zijn gebaseerd op de instructieve leersituatie die Barton voor ogen heeft. Dus uitleg via ‘Voorbeeld-oefening-paren’ en veel diagnostische toetsen of andere vormen van formatief evalueren om vast te kunnen stellen of de leerlingen het begrepen hebben en de leerlingen zelf bewust te maken van hun misconcepties. Rode draad door de lessenserie zijn de incrementele leerstappen. Daardoor lijkt de uitleg langzaam te gaan, maar juist daar zit de kracht van dit ontwerp. Docenten moeten namelijk volgens Barton hun leerlingen als beginners benaderen en niet zien als experts in deze eerste fase van kennisverwerving.

Het bestuderen van Barton heeft geleid tot de in paragraaf 3.2 opgestelde lesopbouw. Deze lesopbouw wijkt af van de lesopbouw volgens 6E-model van Windels. Hij gaat immers uit van een constructieve leersituatie en Barton van de instructieve leersituatie.

Na het ontwerp van de lessen, is het ontwerp voorgelegd aan twee ervaren docenten wiskunde die lesgeven aan de bovenbouw havo/vwo en dus veel met het onderwerp logaritmen te maken hebben. Zij hebben de lessenserie als goed beoordeeld. Een groot deel van hun adviezen zijn verwerkt in de definitieve lessenserie. Samenvattend: het is mogelijk om een lessenserie over logaritmen volgens Barton te ontwerpen.

Limitaties

Dit ontwerp kent ook een aantal beperkingen. Een onderzoek naar de effectiviteit van deze lessenserie viel namelijk buiten de reikwijdte van dit ontwerp. Daarnaast was het uitvoeren van de lessenserie ook praktisch niet mogelijk door het uitbreken van het coronavirus. Het verdient dan ook aanbeveling om die effectiviteit in een ander onderzoek vast te stellen. Alleen dan kan worden beoordeeld of het lesontwerp en/of de visie van Barton ook daadwerkelijk tot betere leerresultaten bij leerlingen leiden. Daarnaast zijn de leerresultaten niet alleen afhankelijk van het lesontwerp, maar ook van het klassenklimaat (is die zodanig dat de leerlingen optimaal kunnen leren) en de voorkennis. Aangezien de leerlingen het onderwerp 'logaritmen' pas in hun vierde of vijfde leerjaar krijgen, zijn er al vele jaren onderwijs voorafgegaan. Misconcepties die toen zijn ontstaan of onvoldoende beheersing van basisvaardigheden, kunnen de effectiviteit van dit lesontwerp doen verminderen.

Generalisatie

De 'Volgens Barton' opgestelde lesopbouw lijkt algemeen toepasbaar te zijn en dus niet beperkt tot het onderwerp logaritmen. De lesopbouw met onder andere 'voorbeeld-opgave-paren' en goedgekozen 'diagnostische vragen' zijn uiteraard niet onderwerpspecifiek. De lesopbouw is een handvat voor iedere docent om een les voor te bereiden als hij de visie van Barton deelt dat leerlingen meer aan de hand moeten worden genomen dan volgens het model van Windels. Andere docenten worden daarom uitgenodigd om lessen 'Volgens Barton' te ontwerpen over andere onderwerpen en die ervaringen met andere docenten te delen.

6 Literatuur

- Barton, Craig (2019) – “Volgens Barton (deel 1 en 2)” – Uitgeverij Phronese
- Boon Liang, Chua en Wood, Eric (2005) – “Working with Logarithms: Students’ Misconceptions and Errors” - The Mathematics Educator, Vol. 8, No.2, 53-70
- Bjork, Robert A (1975) – “Retrieval as a memory modifier” – In R.L. Solso (red.), Information processing and cognition: the Loyola Symposium (pp123-144). Mahwah, NJ: Erlbaum
- Broeck, van den Wim (2008) – “Algemene Psychologie” – Academic & Scientific Publishers
- Clark, James M. en Paivio, Allan (1991) – “Dual Coding Theory and Education” - Educational Psychology Review, Vol 3, No. 3, pp 149-210
- Cowie, B. & Bell, B. (1999) – “A model of formative assessment in science education.” – Assessment in Education: Principle, Policy & Practice, 6(1), 101-116
- Didau, David & Rose, Nick (2019) – “Psychologie in de klas” – Uitgeverij Phronese
- Donk, van der Cyrilla en Van Lanen, Bas (2018) – “Praktijkonderzoek in de school” – Uitgeverij Coutinho.
- Ganesan, Raman en Dindyal, Jaguthsing (2014) – “An investigation of students’ errors in logarithms” - Proceedings of the 37th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia
- Gruver, John (2018) – “A trajectory for developing conceptual understanding of logarithmic relationships” - The Journal of Mathematical Behavior, 50, pp. 1-22
- Kenney, Racheal (2005) – “Students understanding of logarithmic functions” - Proceedings of the Twenty-Seventh Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA), Roanoke, VA: Virginia Tech
- Kuper, Emily en Carlson, Marilyn (2020) – “Foundational ways of thinking for understanding the idea of logarithm” - Journal of Mathematical Behavior 57
- Marzano, Robert J. & Miedema, Wietske (2018) – “Leren in vijf dimensies” – Koninklijke Van Gorcum BV
- Miller, George A. (1956) – “The Magical Number Seven, Plus or Minus Two: Some Limits on Our Capacity for Processing Information” - The Psychological Review, 1956, vol. 63, pp. 81-97
- Movshovitz-Hadar N., Zaslavsky O. and Inbar S. (1987) - “An empirical classification model for errors in high school mathematics” – Journal for Research in Mathematical Education – vol 18, pp 3–14
- Peeters, Wessel (2018) – <https://www.vernieuwenderwijs.nl/dual-coding-codeer-leerstof-dubbel-in-je-brein/>
- Piaget, Jean (1952) – “The origins of intelligence of children” – International Universities Press
- Paivio, Allan (1971) – “Imagery and verbal processes” - New York: Holt, Rinehart, and Winston
- Sfard, Anna (1991) – “On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin” – Educational Studies in Mathematics – vol 22, pp 1-36

-
- Skemp, Richard R. (2006) – “Relational Understanding and Instrumental Understanding” - Mathematics Teaching in the Middle School - vol. 12, No. 2 , pp. 88-95
 - SLO (2019a) - “16-micro-ontwerpeisen-mh” - <https://slo.nl/zoeken/@11556/ontwerpeisen/>
 - SLO (2019b) - “Curriculumontwikkeling” – <https://slo.nl/thema/meer/curriculumontwikkeling/instrumenten/spinnenweb/inleiding/>
 - Vos, Pauline en Espedal, Børge (2016) – “Logaritme een betekenisvolle aanpak met herhaald delen” – Euclides 91-3
 - Weber, Keith (2002) – “Developing students’ understanding of exponents and logarithms” - Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1-4, pp. 1019-1027
 - Windels, Bart (2012) – “Het 6E-model” – Nieuwe wiskrant 32-2 pp 20-26

Bijlagen

A. Eindexamenopgaven 2017-2019

In deze bijlage zijn de resultaten van de eindexamens van de afgelopen drie jaar geïnventariseerd voor de havo (wiskunde B) en vwo (wiskunde A en B). In onderstaande tabel zijn de vragen over logaritmen voor havo (wiskunde B) en vwo (wiskunde A) opgenomen die betrekking hebben op logaritmen. De tabel bevat de p-score zoals die door het CITO wordt berekend weergegeven. Een p-score van bijvoorbeeld 40% geeft aan dat het gemiddeld behaald aantal punten gelijk is aan 40% van het aantal punten dat maximaal voor die vraag had kunnen worden behaald. Dit overzicht is aangevuld met de relatieve positie. Dit geeft hoeveel procent van de vragen slechter is gemaakt. Hoe lager het percentage, hoe moeilijker de leerlingen kennelijk de vraag in vergelijking tot de andere vragen vonden.

Niveau	Vraag	P-score	Relatieve positie
Havo 2017	Gegeven zijn $\log(N) = 1$ voor $t = 1$ en $\log(N) = 7$ voor $t = 8$ met N het aantal bacteriën en t de tijd in uren. Het aantal bacteriën neemt dus toe met ongeveer 3% per minuut. Bereken dit percentage in één decimaal nauwkeurig	35%	18%
	Bereken in hoeveel minuten het aantal bacteriën verdubbelt	40%	24%
	Gegeven is: $\log(p) = 5,68 - \frac{2120}{273+t}$. Druk T uit in p	28%	6%
Havo 2019	Gegeven is: $y = 2^{\frac{1}{2}x+3}$. Druk x uit in y	54%	35%
	Gegeven is: $K = \log(A) + 1,6 \log(D) - 0,15$. Dit kan worden herschreven tot $K = \log(p \cdot A \cdot D^q)$. Bepaal p en q	43%	24%
Vwo-A 2017	Gegeven is $H = 520 \cdot 0,95^L$. Dit kan worden herschreven tot $L = a \cdot \log(H) + b$. Bepaal a en b	38%	10%
Vwo-A 2018	Gegeven is: $H = -(p \cdot \ln(p) + (1-p) \cdot \ln(1-p))$. Onderzoek met de GR tot welke waarde H nadert als het aandeel eiken in het bos (p) steeds kleiner wordt	44%	5%
	Gegeven is: $D = 3,65 \cdot e^{0,533t}$. Druk t uit in D	65%	32%

Voor vwo-wiskunde B is het lastiger om de resultaten toe te wijzen aan de matige begripsvorming bij logaritmen. Vaak spelen ook andere elementen een rol bij de beantwoording van een vraag.

De leerlingen moeten bijvoorbeeld eerst de afgeleide bepalen en deze op nul stellen. Of ze moeten een integraal uitrekenen. Ter informatie zijn in onderstaande tabel wel de scores op de vragen vermeld.

In 2018 valt met name vraag 12 op. In deze vraag moesten de leerlingen de x uit de relatief eenvoudige vergelijking $y = \ln(\sqrt{x})$ uitdrukken in y , waarbij het antwoord ($x = e^{2y}$) al gegeven was. Dit vergt niet zo veel kennis van logaritmen.

	Vraag	P-score	Relatieve positie
2017	1	57	40%
	11	49	13%
	13	56	33%
2018	12	96	94%
	13	62	29%
	14	55	12%
2019	8	62	63%
	9	54	50%

Op basis van deze inventarisatie is de conclusie getrokken dat vragen met logaritmen:

- door veel leerlingen überhaupt slecht worden gemaakt (een lage p-score); of
- in vergelijking tot de andere vragen slecht gemaakt worden (een lage relatieve positie).

De zogenoemde Toets- en Itemanalyses van CITO zijn onderstaand voor deze examens weergegeven.

Havo – B - 2017

Toets en Item Analyse (1)

Item Label	Item nr. Gew.	Key	----- P- en A- waarden -----		O/D	% #		Mis- -----		Gewogen -----						
								singl	Max Gem	P	Sd	RSK	Rit	Rir	AR	
1#	1	1				1	124	4	2,45	61	1,64	0,41	49	39	78	
2	2	1				1	129	6	4,87	81	1,65	0,27	53	43	78	
3#	3	1				3	457	4	1,40	35	1,51	0,38	52	43	78	
4	4	1				9	1192	3	1,19	40	1,35	0,45	45	36	78	
5	5	1				2	248	4	2,98	75	1,12	0,28	42	35	79	
6#	6	1				1	112	8	1,57	20	1,93	0,24	43	30	79	
7#	7	1				0	23	4	3,52	88	0,91	0,23	38	32	79	
8	8	1				2	218	4	2,47	62	1,48	0,37	47	38	78	
9	9	1				3	421	4	2,19	55	1,55	0,39	43	33	79	
10	10	1				14	1857	4	1,15	29	1,53	0,38	41	31	79	
11#	11	1				2	229	4	2,42	60	1,54	0,38	57	48	78	
12	12	1				4	574	6	2,98	50	2,57	0,43	61	46	78	
13	13	1				7	860	5	2,25	45	1,83	0,37	56	45	78	
14#	14	1				2	284	3	2,15	72	1,05	0,35	33	26	79	
15	15	1				2	228	3	2,46	82	0,95	0,32	43	37	79	
16	16	1				4	592	3	0,84	28	1,09	0,36	32	24	79	
17#	17	1				2	225	4	3,26	81	1,23	0,31	47	39	78	
18	18	1				6	827	6	2,60	43	2,13	0,36	64	53	77	
SubGroepnummer			:	0	SubToetsnummer			:	0							
Aantal personen in toets			:	13178	Aantal geselecteerde items			:	18							
Minimale toetsscore			:	0	Maximale toetsscore			:	79							
Gemiddelde toetsscore			:	42,74	Standaarddeviatie			:	13,21							
Gemiddelde P-waarde			:	54,10	Gemiddelde Rit			:	0,47							

Havo – B - 2018

Toets en Item Analyse (1)

Item Label	Item nr. Gew.	Key	----- P- en A- waarden -----		O/D	% #		Mis- -----		Gewogen -----						
								singl	Max Gem	P	Sd	RSK	Rit	Rir	AR	
1#	1	1				0	8	3	2,42	81	1,02	0,34	36	29	78	
2	2	1				0	54	6	5,05	84	1,45	0,24	49	39	77	
3	3	1				5	630	3	0,53	18	0,84	0,28	35	29	78	
4#	4	1				1	163	6	4,74	79	2,02	0,34	56	43	77	
5	5	1				2	297	4	3,02	75	1,34	0,34	46	37	78	
6#	6	1				2	279	3	2,25	75	1,17	0,39	28	19	79	
7	7	1				1	97	3	2,39	80	0,94	0,31	33	26	78	
8	8	1				5	595	5	3,55	71	1,89	0,38	52	39	77	
9#	9	1				2	191	6	3,04	51	1,81	0,30	60	50	76	
10#	10	1				1	128	3	2,21	74	1,02	0,34	41	34	78	
11	11	1				4	546	3	1,62	54	1,30	0,43	38	28	78	
12	12	1				2	271	5	3,60	72	1,54	0,31	47	36	78	
13#	13	1				2	265	5	2,93	59	1,97	0,39	61	50	77	
14	14	1				5	641	6	1,70	28	1,90	0,32	45	31	78	
15#	15	1				3	406	3	1,93	64	1,28	0,43	44	35	78	
16	16	1				12	1484	4	1,86	47	1,56	0,39	51	41	77	
17#	17	1				6	701	4	1,78	45	1,49	0,37	53	44	77	
18	18	1				7	892	5	2,31	46	1,50	0,30	53	43	77	
SubGroepnummer			:	0	SubToetsnummer			:	0							
Aantal personen in toets			:	12222	Aantal geselecteerde items			:	18							
Minimale toetsscore			:	0	Maximale toetsscore			:	77							
Gemiddelde toetsscore			:	46,94	Standaarddeviatie			:	12,45							
Gemiddelde P-waarde			:	60,97	Gemiddelde Rit			:	0,46							

Havo – B – 2019

Toets en Item Analyse (1)

Item Label	Item nr. Gew.	Key	----- P- en A- waarden -----		O/D	% #		Mis- ----- Gewogen -----		P	Sd	RSK	Rit	Rir	AR
1#	1	1			0	55	3	2,66	89	0,68	0,23	19	13	72	
2	2	1			8	1003	3	1,71	57	1,32	0,44	44	34	70	
3	3	1			1	161	3	2,11	70	0,85	0,28	33	26	71	
4#	4	1			1	69	4	1,50	37	1,38	0,35	38	27	71	
5	5	1			6	788	5	2,96	59	2,11	0,42	51	36	70	
6#	6	1			1	89	4	2,93	73	1,53	0,38	39	27	71	
7	7	1			3	386	3	1,63	54	1,28	0,43	43	33	70	
8#	8	1			4	502	4	2,37	59	1,61	0,40	43	30	71	
9	9	1			6	759	6	2,90	48	2,24	0,37	43	26	71	
10#	10	1			1	85	3	0,98	33	1,09	0,36	27	19	72	
11	11	1			2	212	5	3,41	68	1,77	0,35	53	41	69	
12	12	1			1	151	3	2,46	82	0,93	0,31	35	28	71	
13#	13	1			3	332	5	3,66	73	1,73	0,35	44	31	71	
14	14	1			9	1236	5	1,56	31	1,63	0,33	45	33	70	
15#	15	1			2	305	4	3,62	91	0,83	0,21	22	15	72	
16	16	1			2	297	5	3,28	66	1,45	0,29	48	38	70	
17	17	1			9	1196	5	2,13	43	2,03	0,41	54	41	69	
18#	18	1			5	623	8	3,29	41	2,58	0,32	56	39	70	
SubGroepnummer			:	0	SubToetsnummer			:	0						
Aantal personen in toets			:	13027	Aantal geselecteerde items			:	18						
Minimale toetsscore			:	0	Maximale toetsscore			:	78						
Gemiddelde toetsscore			:	45,17	Standaarddeviatie			:	11,87						
Gemiddelde P-waarde			:	57,91	Gemiddelde Rit			:	0,41						

Vwo – B – 2017

Toets en Item Analyse (1)

Item Label	Item nr. Gew.	Key	----- P- en A- waarden -----		O/D	% #		Mis- ----- Gewogen -----		P	Sd	RSK	Rit	Rir	AR
1#	1	1			0	26	5	2,83	57	2,04	0,41	60	48	76	
2#	2	1			0	11	5	4,39	88	1,04	0,21	33	25	78	
3	3	1			0	59	3	2,53	84	0,85	0,28	36	30	78	
4	4	1			0	80	5	2,87	57	1,56	0,31	63	54	76	
5#	5	1			2	257	3	2,40	80	0,99	0,33	35	28	78	
6	6	1			8	1387	4	2,05	51	1,78	0,45	48	36	77	
7#	7	1			1	126	7	5,08	73	2,35	0,34	61	47	76	
8#	8	1			0	44	5	3,26	65	1,83	0,37	50	38	77	
9	9	1			0	51	5	2,77	55	1,72	0,34	54	43	77	
10	10	1			2	341	6	3,65	61	2,18	0,36	63	51	76	
11#	11	1			0	70	5	2,47	49	1,98	0,40	64	53	76	
12	12	1			1	94	4	3,71	93	0,73	0,18	31	26	78	
13	13	1			2	265	7	3,94	56	2,35	0,34	55	40	77	
14#	14	1			7	1173	5	1,83	37	1,76	0,35	51	39	77	
SubGroepnummer			:	0	SubToetsnummer			:	0						
Aantal personen in toets			:	17059	Aantal geselecteerde items			:	14						
Minimale toetsscore			:	0	Maximale toetsscore			:	69						
Gemiddelde toetsscore			:	43,79	Standaarddeviatie			:	12,41						
Gemiddelde P-waarde			:	63,47	Gemiddelde Rit			:	0,51						

Vwo – B – 2018

Toets en Item Analyse (1)

Item Label	Item nr. Gew.	Key	----- P- en A- waarden -----		O/D	% #		Mis- -----		Gewogen -----						
								Max	Gem	P	Sd	RSK	Rit	Rir	AR	
1#	1	1			0	15		4	3,61	90	0,76	0,19	35	29	81	
2	2	1			2	346		4	2,69	67	1,63	0,41	46	35	80	
3#	3	1			1	88		4	2,88	72	1,52	0,38	51	42	80	
4	4	1			1	130		3	1,90	63	1,32	0,44	52	44	80	
5	5	1			0	19		5	3,16	63	1,35	0,27	55	47	80	
6#	6	1			2	248		5	4,07	81	1,40	0,28	47	38	80	
7	7	1			3	532		5	3,28	66	2,10	0,42	52	39	80	
8#	8	1			0	22		6	4,13	69	1,89	0,32	53	41	80	
9	9	1			3	441		4	2,90	72	1,62	0,40	46	35	80	
10#	10	1			1	140		4	3,12	78	1,30	0,32	40	31	81	
11	11	1			3	534		5	2,54	51	1,86	0,37	53	41	80	
12#	12	1			0	33		3	2,88	96	0,46	0,15	23	20	81	
13	13	1			1	204		4	2,46	62	1,35	0,34	58	50	79	
14	14	1			1	165		4	2,19	55	1,50	0,37	53	44	80	
15#	15	1			3	495		4	2,29	57	1,79	0,45	59	49	79	
16#	16	1			3	486		5	2,75	55	1,90	0,38	67	58	79	
17	17	1			7	1133		4	2,86	72	1,55	0,39	50	41	80	
SubGroepnummer			:	0	SubToetsnummer			:	0							
Aantal personen in toets			:	15568	Aantal geselecteerde items			:	17							
Minimale toetsscore			:	0	Maximale toetsscore			:	73							
Gemiddelde toetsscore			:	49,72	Standaarddeviatie			:	13,02							
Gemiddelde P-waarde			:	68,11	Gemiddelde Rit			:	0,50							

Vwo – B – 2019

Toets en Item Analyse (1)

Item Label	Item nr. Gew.	Key	----- P- en A- waarden -----		O/D	% #		Mis- -----		Gewogen -----						
								Max	Gem	P	Sd	RSK	Rit	Rir	AR	
1#	1	1			0	17		5	4,35	87	1,28	0,26	41	32	79	
2#	2	1			0	5		5	3,69	74	1,34	0,27	50	42	79	
3#	3	1			1	153		5	2,56	51	1,99	0,40	57	46	78	
4	4	1			5	956		3	1,38	46	1,20	0,40	58	51	78	
5	5	1			0	35		5	4,28	86	1,11	0,22	39	32	79	
6#	6	1			0	37		3	2,86	95	0,44	0,15	16	12	80	
7	7	1			1	220		6	2,42	40	2,17	0,36	58	45	78	
8#	8	1			0	49		5	3,08	62	1,52	0,30	55	46	78	
9	9	1			1	210		7	3,81	54	2,31	0,33	60	48	78	
10#	10	1			1	118		6	2,49	42	1,89	0,31	58	47	78	
11	11	1			3	572		6	1,94	32	1,62	0,27	43	32	79	
12	12	1			7	1182		4	2,04	51	1,44	0,36	59	51	78	
13#	13	1			1	117		5	4,30	86	1,25	0,25	37	29	79	
14	14	1			4	727		8	3,27	41	2,79	0,35	64	49	78	
15#	15	1			3	582		7	4,05	58	2,32	0,33	63	51	78	
SubGroepnummer			:	0	SubToetsnummer			:	0							
Aantal personen in toets			:	18031	Aantal geselecteerde items			:	15							
Minimale toetsscore			:	0	Maximale toetsscore			:	80							
Gemiddelde toetsscore			:	46,52	Standaarddeviatie			:	13,35							
Gemiddelde P-waarde			:	58,15	Gemiddelde Rit			:	0,51							

Vwo – A – 2017

Toets en Item Analyse (1)

Item	Item		----- P- en A- waarden -----			%	#	----- Gewogen -----							
Label	nr.	Gew.	Key			O/D	singl	Max	Gem	P	Sd	RSK	Rit	Rir	AR
1#	1	1				0	28	3	2,60	87	0,87	0,29	33	24	67
2	2	1				0	12	4	3,25	81	0,84	0,21	24	16	68
3	3	1				0	68	4	3,10	77	1,23	0,31	43	31	66
4	4	1				0	44	4	2,15	54	1,27	0,32	44	33	66
5#	5	1				0	23	3	2,51	84	1,01	0,34	21	10	68
6	6	1				0	23	4	3,57	89	0,82	0,21	32	24	67
7	7	1				0	52	6	4,37	73	1,82	0,30	44	27	67
8	8	1				5	716	3	2,02	67	1,34	0,45	35	22	67
9#	9	1				0	5	2	1,93	96	0,28	0,14	12	9	68
10	10	1				2	247	4	1,25	31	1,53	0,38	47	34	66
11	11	1				1	224	4	1,59	40	1,60	0,40	48	34	66
12	12	1				3	532	5	1,91	38	1,81	0,36	54	39	65
13#	13	1				0	13	3	2,88	96	0,42	0,14	18	14	68
14	14	1				1	101	4	3,37	84	1,18	0,29	39	27	67
15	15	1				0	31	4	3,39	85	1,15	0,29	32	21	67
16	16	1				1	117	5	4,08	82	1,46	0,29	41	27	67
17#	17	1				0	10	3	2,75	92	0,52	0,17	25	20	68
18	18	1				2	342	5	2,98	60	1,91	0,38	42	24	68
19	19	1				2	378	4	2,26	56	1,60	0,40	52	38	65
20	20	1				0	74	4	2,96	74	1,16	0,29	45	34	66
21#	21	1				2	322	18	0,03	0	0,28	0,02	5	2	68

SubGroepnummer			:	0			SubToetsnummer			:	0				
Aantal personen in toets			:	15506			Aantal geselecteerde items			:	21				
Minimale toetsscore			:	0			Maximale toetsscore			:	96				
Gemiddelde toetsscore			:	54,93			Standaarddeviatie			:	9,63				
Gemiddelde P-waarde			:	57,22			Gemiddelde Rit			:	0,36				

Vwo – A – 2018

Toets en Item Analyse (1)

Item	Item		----- P- en A- waarden -----			% #		Gewogen -----							
Label	nr.	Gew.	Key			O/D	singl	Max	Gem	P	Sd	RSK	Rit	Rir	AR
1#	1	1				0	16	5	4,35	87	1,05	0,21	32	22	70
2	2	1				2	218	4	2,88	72	1,41	0,35	43	31	69
3	3	1				3	394	4	2,36	59	1,49	0,37	48	35	69
4#	4	1				0	20	3	2,88	96	0,39	0,13	15	11	71
5	5	1				3	395	3	1,33	44	1,13	0,38	36	26	70
6	6	1				2	324	4	3,10	77	1,43	0,36	48	35	69
7#	7	1				0	34	3	2,39	80	0,93	0,31	30	21	70
8	8	1				1	89	4	3,15	79	0,99	0,25	22	13	71
9	9	1				0	53	3	2,55	85	0,91	0,30	33	24	70
10	10	1				1	86	4	2,78	70	1,22	0,31	34	23	70
11	11	1				2	287	4	2,54	64	1,54	0,38	40	26	70
12#	12	1				0	59	4	2,65	66	0,93	0,23	41	33	70
13	13	1				0	21	3	2,55	85	0,71	0,24	29	22	70
14	14	1				6	824	3	1,48	49	1,29	0,43	45	34	69
15	15	1				2	350	3	2,32	77	0,98	0,33	36	27	70
16	16	1				5	716	3	1,37	46	1,08	0,36	45	35	69
17#	17	1				1	181	4	2,54	63	1,71	0,43	32	15	71
18	18	1				4	596	3	2,32	77	1,19	0,40	51	41	69
19	19	1				3	371	3	2,32	77	1,01	0,34	45	36	69
20	20	1				9	1240	4	2,48	62	1,46	0,37	50	38	69
21#	21	1				4	504	7	4,32	62	2,21	0,32	49	30	70
SubGroepnummer			:	0	SubToetsnummer			:	1						
Aantal personen in toets			:	14014	Aantal geselecteerde items			:	21						
Minimale toetsscore			:	0	Maximale toetsscore			:	78						
Gemiddelde toetsscore			:	54,66	Standaarddeviatie			:	10,05						
Gemiddelde P-waarde			:	70,08	Gemiddelde Rit			:	0,39						

Vwo – A – 2019

Toets en Item Analyse (1)

Item Label	Item nr.	Gew.	Key	----- P- en A- waarden -----	%	#	Mis-	Gewogen									
					O/D	singl	Max	Gem	P	Sd	RSK	Rit	Rir	AR			
1#	1	1			0	78		4	3,03	76	1,31	0,33	37	26	73		
2	2	1			0	79		4	3,39	85	0,98	0,24	37	29	72		
3	3	1			2	257		5	3,13	63	1,69	0,34	53	40	71		
4	4	1			0	27		3	2,72	91	0,63	0,21	21	15	73		
5	5	1			0	18		6	3,98	66	1,90	0,32	46	30	72		
6#	6	1			0	71		3	2,53	84	0,85	0,28	33	26	73		
7	7	1			1	230		5	3,27	65	1,33	0,27	42	30	72		
8	8	1			0	30		3	2,36	79	0,77	0,26	21	13	73		
9	9	1			3	569		3	1,59	53	1,27	0,42	41	31	72		
10#	10	1			1	156		3	2,43	81	0,95	0,32	34	26	73		
11	11	1			15	2564		4	1,16	29	1,73	0,43	56	42	71		
12	12	1			0	68		3	2,25	75	0,96	0,32	40	32	72		
13	13	1			11	1931		4	1,22	31	1,73	0,43	53	40	71		
14#	14	1			0	18		5	3,12	62	1,40	0,28	40	27	72		
15	15	1			5	783		3	1,56	52	1,12	0,37	33	23	73		
16	16	1			1	133		4	2,17	54	1,05	0,26	41	32	72		
17	17	1			2	315		3	1,54	51	1,31	0,44	41	29	72		
18	18	1			2	298		3	2,70	90	0,76	0,25	31	24	73		
19	19	1			4	680		3	1,75	58	1,18	0,39	48	39	72		
20#	20	1			1	174		8	3,97	50	1,60	0,20	51	38	71		
21#	21	1			2	358		18	0,02	0	0,24	0,01	-1	-3	74		
SubGroepnummer				:	0	SubToetsnummer				:	0						
Aantal personen in toets				:	17063	Aantal geselecteerde items				:	21						
Minimale toetsscore				:	0	Maximale toetsscore				:	97						
Gemiddelde toetsscore				:	49,90	Standaarddeviatie				:	10,39						
Gemiddelde P-waarde				:	51,44	Gemiddelde Rit				:	0,39						

Bron: [https://www.cito.nl/onderwijs/voortgezet-onderwijs/centrale-examens-voortgezet-
onderwijs/examenvoorbereiding/examenmateriaal/](https://www.cito.nl/onderwijs/voortgezet-onderwijs/centrale-examens-voortgezet-onderwijs/examenvoorbereiding/examenmateriaal/)

B. Het lesontwerp

C. Verslag van de expertopinie

Een concept-lesontwerp is voorgelegd aan twee ervaren bovenbouw docenten van het Thomas à Kempis college te Arnhem. Ze geven allebei les aan de bovenbouw HAVO en VWO en hebben beden ruim 30 jaar leservaring. Hun bevindingen zijn in een overleg besproken. Het verslag van dat overleg is onderstaand weergegeven. Het verslag is voorgelegd aan beide docenten en akkoord bevonden,

Algemeen

De lessen worden als goed beoordeeld. Er zit een duidelijke structuur in de lesopbouw. De stappen zijn goed te volgen voor de leerlingen. Er is genoeg oefening voor de leerlingen. De leerlingen worden goed geëngageerd met de inleidingen over het coronavirus. Een actueel thema dat de leerlingen zal inspireren. Ze kunnen daarmee ook mooi zien hoe wiskunde in de praktijk wordt toegepast.

De leerlingen hebben al kennis opgedaan over exponentiële functies. De docenten vragen zich wel af of de stappen wellicht daarom niet te klein zijn. Met andere woorden: gaat het niet te langzaam?

Ze geven ook de suggestie om logaritmen in meer historisch perspectief te plaatsen.

Taalgebruik: in het lesontwerp is sprake van een informeel taalgebruik door het gebruik van bijvoorbeeld 'je ziet ...'. Zij geven in overweging om meer formeel taalgebruik te hanteren. Bijvoorbeeld: 'De tabel laat zien dat...'.

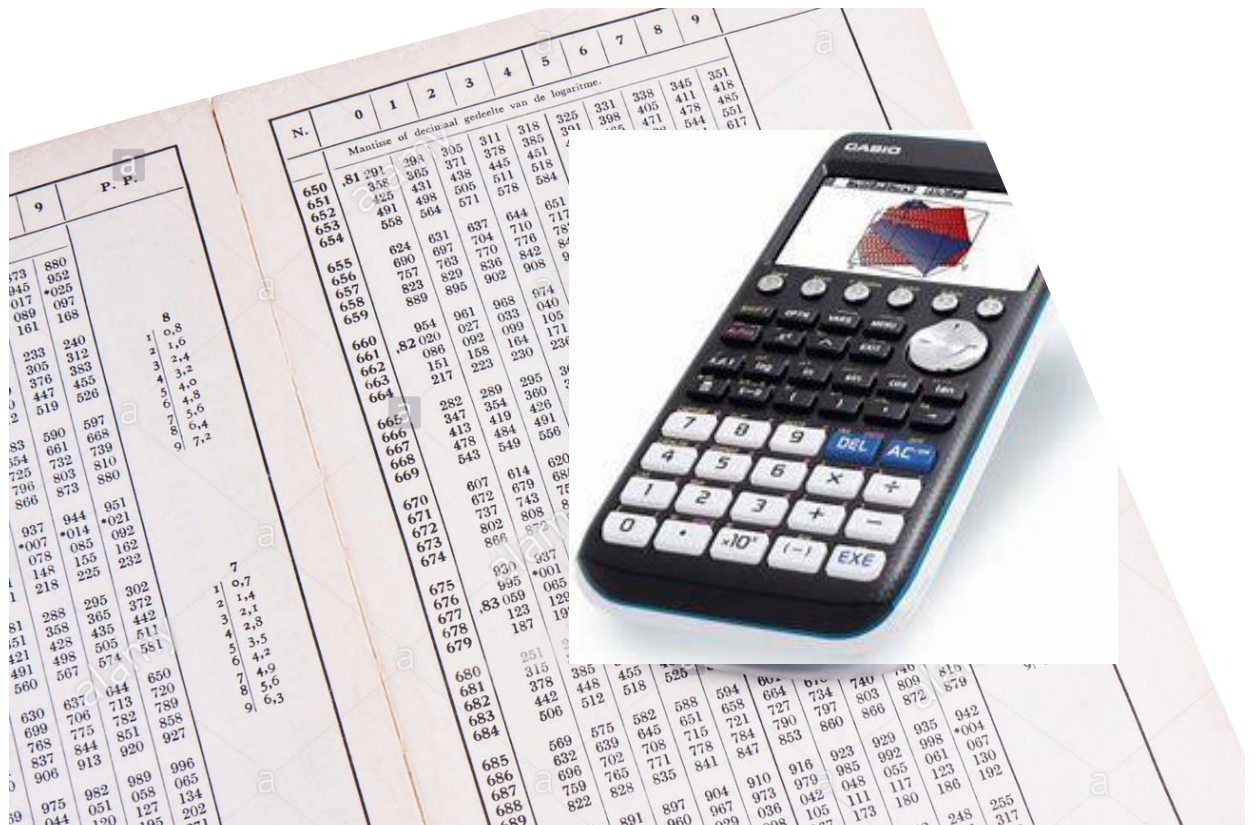
Inhoudelijke feedback

Hieronder volgen puntsgewijs de inhoudelijke opmerkingen bij het lesontwerp:

- In het lesontwerp komen regelmatig de term 'machten' voor. Dit is volgens de docenten ongewenst omdat dit kan leiden tot misvattingen bij de leerlingen. Ze hebben immers eerder machtsfuncties gehad zoals bijvoorbeeld $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 6$. Hoewel ze zich realiseren dat het lastig is om het begrip 'macht' te allen tijde te vermijden, raden ze aan om zoveel mogelijk het begrip 'exponentieel' te hanteren. Dit voorkomt ook dat leerlingen logaritmen als machten gaan behandelen: als $y = x^5$ dan geldt $x = y^{\frac{1}{5}}$ en dus ook redeneren dat als $y = 5^x$ dan geldt $5 = y^{\frac{1}{x}}$ en daarmee niet verder komen.
- De titel van de lessenserie is verwarrend aangezien het einddoel weliswaar logaritmen is, maar een groot deel van de lessenserie over exponentiële verbanden gaat. Ze stellen voor om de titel aan te passen in 'Exponenten en logaritmen'.
- Wiskundig zijn de formuleringen in het lesontwerp niet altijd zuiver. Bijvoorbeeld 'uitkomst' in plaats van 'oplossing'.
- De tabellen op blz.
- De logaritme is de oplossing voor een probleem. Een stuk gereedschap dat de leerlingen eerst niet hadden. Dit kan beter worden benadrukt in het lesontwerp.

-
- De volgende uitleg, vragen, antwoorden of opdrachten geven aanleiding tot opmerkingen:
 - Bij opgaven waarin in procenten de groei of de aanname wordt weergegeven, is groeifactor een gebruikelijker benaming dan grondtal
 - De gedachtenwolk bij de uitleg op blz. 3 staat niet bij de correcte opgave
 - Onduidelijk is of de stappen onderaan bij de ‘voorbeeld-opgave-paar’ ook in alle opgaven daarna verplicht zijn.
 - opdracht 1 op blz. 4 :
 - Het woord “Maar” is onnodig.
 - Halveringstijd moet uitgedrukt worden in perioden
 - ‘Afnamepercentage’ moet zijn ‘De afname in procenten’
 - Opdracht 3:
 - ‘het exponentiele verband’
 - Los op (in twee decimalen nauwkeurig)
 - Opdracht 4: voeg een opdracht toe: “In welk jaar is de prijs van het product verdubbeld *ten opzichte van* de prijs van 20 jaar geleden?”
 - Diagnostische toets blz. 5: gebruik $\approx$ van in plaats van $\pm$
 - Inleiding les 2: de toevoeging “Exponentiële functies kunnen dus zowel stijgen als...” is verwarrend. Bovendien behoren de leerlingen dit te weten
 - Uitleg op blz. 8: de winst moet niet dit jaar maar vorig jaar zijn
 - Uitleg op blz. 9:
 - moet de tekst niet zijn: ‘Dan is de oplossing...’?
 - tabel is verwarrend. Enerzijds ‘oplossing’ is een betere term dan ‘uitkomst’. Bovendien is de tweede kolom ook al de oplossing, alleen dan nog uitgedrukt in logaritme en niet een geheel getal of breuk
 - Uitleg op blz. 10: zie vorige twee opmerkingen
 - Eindspel blz. 15: is het gebruik van rekenmachine wel of niet toegestaan? Met de grafische rekenmachine is de opdracht te eenvoudig.
 - In de wiskunde zijn modellen een benadering van de werkelijkheid. Dit kan beter worden benadrukt in de introductie van de eerste les.
 - Foto van rekenmachine op de voorpagina heeft geen ‘log’-functie

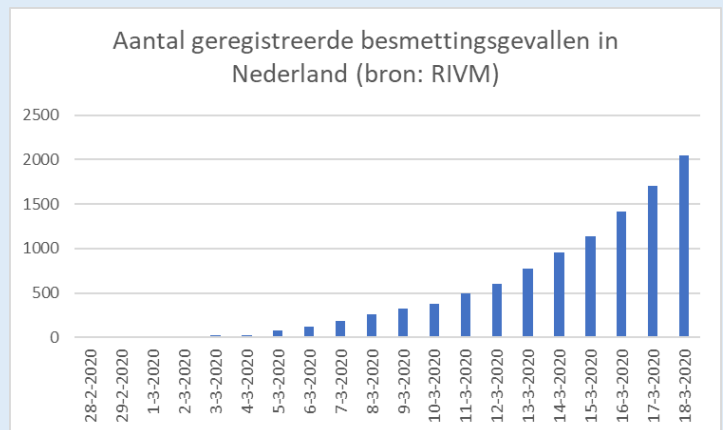
Exponenten en logaritmen



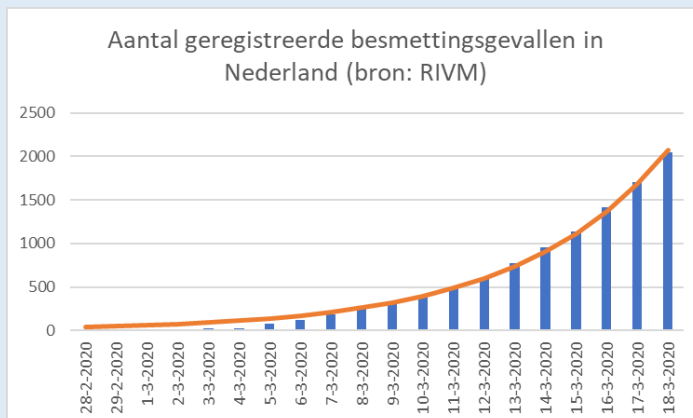
Les 1

Inleiding - "Corona-(COVID-19) virus in Nederland"

In 2020 is de wereld opgeschrikt door het nieuws over het coronavirus. Een virus dat zich razendsnel heeft verspreid en vooral onder kwetsbare ouderen tot sterfte kan leiden. De nationale overheden voerden drastische maatregelen in om de verspreiding af te remmen. In rechtergrafiek zie je hoe het aantal geregistreerde besmettingen zich in Nederland in korte tijd ontwikkelde.



Je ziet dat dit aantal dagelijks flink toeneemt. Je kunt dit herkennen als een exponentiële groei. Die is weergegeven door de oranje lijn in onderstaande grafiek.



Voor die oranje-lijn geldt de volgende functie: $B(t) = 33 \cdot 1,23^t$. Hierbij is t het aantal dagen vanaf 27 februari 2020 (de dag waarop het eerste besmettingsgeval in Nederland is vastgesteld). Deze functie is een wiskundig model. Modellen zijn een vereenvoudigde weergave van de werkelijkheid. Daarom is de functie voor de eerste dagen ($t \leq 7$) niet nauwkeurig. Dit is niet erg, omdat de functie bedoeld is om het aantal besmettingsgevallen te voorspellen (dus voor $t > 20$).

De maatregelen die half maart zijn ingevoerd zullen pas op termijn effect hebben op het aantal geregistreerde besmettingsgevallen. De functie voorspelt dus vooral het aantal besmettingsgevallen als er *geen* maatregelen zouden zijn getroffen. De voorspelling kan later worden vergeleken met het aantal daadwerkelijke geregistreerde besmettingsgevallen. Het verschil tussen de voorspelling en de realisatie geeft informatie over de effectiviteit van de maatregelen.

Over 10 dagen (28 maart 2020 / $t = 30$) is het aantal besmettingen volgens de voorspelling al opgelopen tot 16.431. Maar wanneer is het aantal van 100.000 bereikt? Ook daarvoor kunnen we de functie gebruiken. We proberen eerst $t = 40$. Er zijn er dan 130.232. Teveel dus. Bij $t = 38$ krijgen we 86.981. Nog te weinig. Het zal dus ongeveer $t = 39$ moeten zijn. Dat klopt aardig: 105.880. Maar dat is niet precies 100.000. In dit geval misschien niet zo erg, maar je kunt je situaties voorstellen waarbij je het exacte antwoord moet weten ($t \approx 38,724$). Je kunt dat vinden door steeds een waarde voor t in te vullen en dat steeds nauwkeuriger vast te stellen. Maar dat is omslachtig. Kan het eenvoudiger? Jazeker, dat ga je leren in deze lessenserie.

Voorkennis

In de functie van het aantal besmettingsgevallen herken je een exponentieel verband. In de volgende vragen zijn ook exponentiële verbanden gegeven. Die kan je uitrekenen met de rekenregels voor machten. Reken uit of schat *zonder rekenmachine*.

$3^3 = \underline{\hspace{2cm}}$			
A 6	B 9	C 27	D 33
$2^4 = \underline{\hspace{2cm}}$			
A 24	B 16	C 8	D 6
$(1,1)^8$ is ongeveer gelijk aan:			
A 1,18	B 1,80	C 2,10	D 8,80
$(0,9)^8$ is ongeveer gelijk aan: $\circ$			
A 0,40	B 0,72	C 1,72	D 7,20

grondtal = 0,9

exponent = 8

Uitleg

Gevraagd: wat is $1,3^6$?

- Grondtal = 1,3
- Exponent = 6
- Zoek in kolom "t" het getal 6 op
- Bekijk wat de bijbehorende waarde van $1,3^t$ is
- Antwoord: $1,3^6 = 4,8268$

Gevraagd: wat is $1,3^9$?

t	$1,3^t$
-4	0,3501
-3	0,4552
-2	0,5917
-1	0,7692
0	1,0000
1	1,3000
2	1,6900
3	2,1970
4	2,8561
5	3,7129
6	4,8268
7	6,2749
8	8,1573
9	10,6045
10	13,7858

Maak nu zelf de rechteropgave. Schrijf ook de stappen op zoals links.

Zelf aan de slag

Beantwoord de volgende vragen. Gebruik daarbij de tabel uit de uitleg.

1. Wat is $1,3^{10}$?
2. Wat is $1,3^{-2}$?
3. Bij welke t hoort $1,3^t = 8,1573$?
4. Los de volgende vergelijking op: $1,3^t = 0,7692$
5. Bij welke t hoort $1,3^t = 4$?

Diagnostische toets

$1,3^3 = \underline{\hspace{2cm}}$

☐ A 1,33
 ☐ B 1,39
 ☐ C 2,1970
 ☐ D 3,9

Los op: $1,3^t = 5$. Dus $t = \underline{\hspace{2cm}}$

☐ A Kan niet
 ☐ B bijna 4
 ☐ C bijna 6
 ☐ D meer dan 6

Uitleg

Los op: $4284 = 1500 \cdot 1,3^t$

- Grondtal = 1,3
- Gevraagd wordt de exponent t
- Links en rechts delen door 1500
- $2,856 = 1,3^t$
- Zoek in kolom 2,865 op in de kolom " $1,3^t$ "
- Bekijk wat de bijbehorende waarde van t is
- Antwoord: $t \approx 4$

Los op: $8354 = 2250 \cdot 1,3^t$

t	$1,3^t$
-4	0,3501
-3	0,4552
-2	0,5917
-1	0,7692
0	1,0000
1	1,3000
2	1,6900
3	2,1970
4	2,8561
5	3,7129
6	4,8268
7	6,2749
8	8,1573
9	10,6045
10	13,7858

Maak nu zelf de rechteropgave. Schrijf ook de stappen op zoals links.

Zelf aan de slag

Opdracht 1

Hieronder staan vier uitspraken. Drie horen bij elkaar. Welke hoort in dit rijtje niet thuis:

- a. De formule is $y = 200 \cdot 0,95^x$
- b. Als $x = 10$ dan is $y = 100$. De halveringstijd is dus 10 perioden.
- c. Bij $x = 1$ hoort $y = 190$. Bij $x = 2$ hoort $y = 180,5$
- d. De procentuele afname op het interval $[0,4]$ is ongeveer 19%.

Opdracht 2

Per uur is het groeipercentage 4%. Daan zegt: "Dan is de bijbehorende formule $y = 1,4^x$ met x in uren.". Lucas zegt: "Na één dag is de groei bijna 100%". Wie heeft gelijk?

- a. Alleen Daan heeft gelijk
- b. Alleen Lucas heeft gelijk
- c. Ze hebben allebei gelijk
- d. Ze hebben allebei ongelijk

Opdracht 3

In deze opgave gebruiken wij het exponentieel verband $y = 1250 \cdot 0,81^x$. Los op of bereken (in twee decimalen nauwkeurig). Gebruik hiervoor de knop  op je rekenmachine:

- a. $y = 1250 \cdot 0,81^7$
- b. $664,30 = 1250 \cdot 0,81^x$
- c. De halveringstijd
- d. $y = 1250 \cdot 0,81^{-4}$

Opdracht 4

De prijs van een product neemt al jaren toe met 2% per jaar. De verwachting is dat de komende jaren deze prijsstijging wel doorgaat. De prijs op dit moment is € 250.

- a. Stel de formule van de prijs op in de vorm: $y = b \cdot g^t$ waarbij y de prijs is en t in jaren (met $t = 0$ voor het huidige moment).
- b. Hoeveel kostte het product 4 jaar geleden? Gebruik daarvoor de tabel uit de bijlage.
- c. In welk jaar is de prijs van het product verdubbeld *ten opzichte van* de prijs van 10 jaar geleden?
- d. In welk jaar is de prijs van het product verdubbeld *ten opzichte van* de prijs van 20 jaar geleden?

Diagnostische toets

Als iets met 3% afneemt per dag, dan is het grondtal gelijk aan:

- ☐ A 0,7 ☐ B 0,97 ☐ C 1,03 ☐ D 1,3

Als $150 = 100 \cdot 1,1^x$. Dan is x gelijk aan:

- ☐ A ≈ 4 ☐ B 5 ☐ C 50 ☐ D kan niet

Als $150 = 200 \cdot 0,9^x$. Dan is x gelijk aan:

- ☐ A 2,5 ☐ B ≈ 3 ☐ C ≈ 4 ☐ D 5

Eindspel

Jullie gaan kwartetten met exponentiële functies. Knip uit werkblad 1 de 28 kaartjes uit. Jullie krijgen van elke exponentiële functie vier kaartjes. Het zijn allemaal exponentiële functies die een hoeveelheid (y) beschrijven in de tijd (x in dagen). In groepjes van vier leerlingen zoeken jullie de kwartetten (vier kaartjes behorend bij dezelfde exponentiële functie) bij elkaar.

Les 2

Inleiding - “Corona-(COVID-19) virus in Nederland” - vervolg

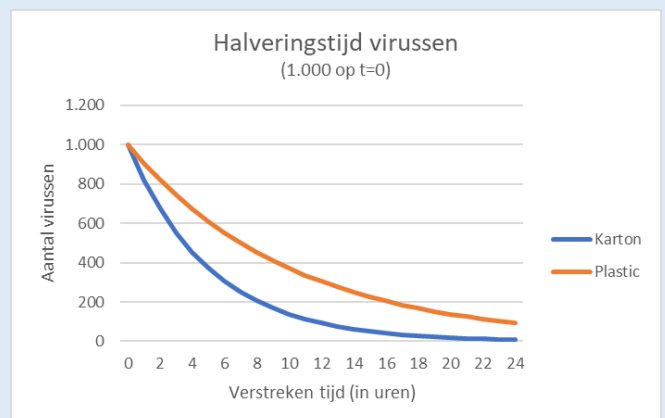
Naar aanleiding van het coronavirus gaan veel verhalen rond hoe lang een virus op verpakkingsmateriaal kan overleven. Mensen durven bijvoorbeeld niet meer producten uit China te bestellen via AliExpress. Om te bepalen hoe goed virussen overleven, bepaalt men de halveringstijd. Als op $t = 0$ bijvoorbeeld 1.000 virussen zijn en op $t = 2$ uur zijn 500 virussen, dan is de halveringstijd 2 uur. Na 4 uur is het aantal virussen weer gehalveerd: er zijn nog 250 virussen over. Hoe minder virussen, hoe minder de kans op besmetting.

Uit onderzoek blijkt dat de halveringstijd afhangt van het soort verpakkingsmateriaal:

- Op karton : 3,5 uur
- Op plastic : 7 uur

In de grafiek zie je het aantal virussen per uur als in het begin 1.000 virussen zijn.

Exponentiële functies kunnen dus ook dalen.



Voorkennis

In de vorige les heb je gerekend met exponentiële verbanden. De ene keer moet je de waarde van een exponentieel verband uitrekenen. De andere keer wil je juist weten welke exponent tot die waarde leidt. Weet je het nog?

Als iets met 4% toeneemt per dag, dan is het grondtal gelijk aan:

- ☐ A 0,6 ☐ B 1,04 ☐ C 1,4 ☐ D 4

Als $y = 180 \cdot 1,2^x$. Dan:

- ☐ A 20% van 180 = 36 ☐ B neemt y per dag af ☐ C $y > 2.160$ als $x = 10$ ☐ D $y = 181,2$ als $x = 1$

Als $300 = 400 \cdot 0,9^x$. Dan is x gelijk aan:

- ☐ A 2,5 ☐ B ± 3 ☐ C ± 4 ☐ D 5

Uitleg

Jaarlijks groeit de winst van een onderneming met 20%. Vorig jaar was de winst € 2 miljoen.

- Wat is de groeifactor?
- Welke functie hoort bij de winst: $w(t)$ (in euro's)?
- Hoeveel is de winst in het zesde jaar?
- In welk jaar is de winst € 3.456.000?
- In welk jaar is de winst voor het eerst meer dan verdubbeld?

- | | |
|--|--|
| <p>a. Groeifactor:</p> <ul style="list-style-type: none">Winst stijgt met 20%Groeifactor = 1,2 <p>b. Functie:</p> <ul style="list-style-type: none">Groeifactor = 1,2.Variabele is het jaar, aangegeven met tWinst op $t = 0$ is gelijk aan € 2.000.000Functie: $w(t) = 2.000.000 \cdot 1,2^t$ <p>c. Winst in het derde jaar:</p> <ul style="list-style-type: none">$t = 6$Gevraagd wordt $w(6) = 2.000.000 \cdot 1,2^6$In tweede kolom staat grondtal 1,2. Regel met $x = 6$ opzoeken: $1,2^6 = 4,8268$$w(6) = 2.000.000 \cdot 1,2^6 = 2.000.000 \cdot 4,8268 = 9.653.600$ <p>d. In welk jaar:</p> <ul style="list-style-type: none">Gevraagd wordt $w(t) = 2.000.000 \cdot 1,2^t = 3.456.000$In de vergelijking links en rechts delen door $2.000.000$. Dus: $1,2^t = 1,7280$Opzoeken in kolom "1,2" de waarde $1,7280$. Deze staat in de regel bij $x = 3$Antwoord: in het derde jaar <p>e. Verdubbeling:</p> <ul style="list-style-type: none">$1,2^t = 2$Opzoeken in kolom "1,2" de waarde 2. Deze staat nergens, maar in de regel bij $x = 4$ is deze macht voor het eerst meer dan 2.Antwoord: in het vierde jaar. | |
|--|--|

Maak nu de volgende opgave aan de rechterkant:

Per uur neemt het aantal bacteriën toe met 50%. Het aantal bacteriën is op dit moment 80.

- Wat is de groeifactor?
- Welke functie hoort bij het aantal bacteriën: $b(t)$?
- Hoeveel bacteriën zijn er na acht uur?
- Na hoeveel uur is het aantal 180?
- Na hoeveel uur is het aantal bacteriën al meer dan 1.000?

Diagnostische toets

Schrijf je antwoord op een wisbordje. Je mag de tabellen erbij houden.

1. Voor welke t geldt: $1,7^t = 24,14$?
2. Wat is de verdubbelingstijd bij een groei van 10% per jaar (t in jaren)?
3. Als er nu 1000 virussen zijn en de afname is 20% per uur (t in uren). Hoeveel uur geleden waren er nog 1.953 virussen?
4. Als je spaargeld jaarlijks met 30% toeneemt en je hebt nu € 2.000 op je spaarrekening staan. Hoeveel jaar geleden had je € 920 op de bank staan?
5. Het aantal abonnees op TikTok groeit met 60% per jaar. Na hoeveel jaar is dat aantal 100x zoveel?

Uitleg

Als gevraagd wordt “Voor welke x geldt: $2^x = 8$?” dan is het antwoord “ $x = 3$ ”. Nu gaan we een nieuw begrip introduceren: de logaritme. Deze is als volgt gedefinieerd:

Als $g^x = y$ dan $x = {}^g\log(y)$. In deze vraag: $2^x = 8$ dan $x = {}^2\log(8) = 3$

Je kunt dit vergelijken met de relatie tussen wortel en kwadraat. Als $x^3 = y$ dan $x = \sqrt[3]{y}$.

Onderstaand zijn enkele voorbeelden weergegeven. Daarbij zijn steeds de volgende stappen gezet:

- x is geschreven als een logaritme
- Er is uitgerekend wat de $\log$ uitgedrukt in een getal moet zijn
- In de laatste kolom is de opgave nagerekend met de rekenmachine.

$g^x = y$	$x = {}^g\log(y)$	Oplossing	Controle
$2^x = 8$	$x = {}^2\log(8)$	${}^2\log(8) = 3$	$2^3 = 8$
$2^x = 32$	$x = {}^2\log(32)$	${}^2\log(32) = 5$	$2^5 = 32$
$3^x = 81$	$x = {}^3\log(81)$	${}^3\log(81) = 4$	$3^4 = 81$
$5^x = 125$	$x = {}^5\log(125)$	${}^5\log(125) = 3$	$5^3 = 125$

Maak nu zelf de volgende tabel af. Gebruik daarvoor de tabellen uit de bijlage. Controleer de opgave door die na te rekenen met je rekenmachine:

$g^x = y$	$x = {}^g\log(y)$	Oplossing	Controle
$5^x = 125$	$x = {}^5\log(125)$	${}^5\log(125) = 3$	$5^3 = 125$
$4^x = 16$			
$4^x = 1024$			
$3^x = 81$			
$1,5^x = 2,25$			
$0,8^x \approx 0,3277$			

Uitleg

Schrijf als een geheel getal: $x = {}^2\log(8)$. Dit kan je doen met dezelfde regel:

Als $x = {}^g\log(y)$ dan $g^x = y$

Je kunt deze regel ook gebruiken om de waarde van x uit te rekenen bij de volgende opgaven:

- $a = {}^x\log(b)$ dus $x^a = b$, waaruit volgt: $x = \sqrt[a]{b}$
- $c = {}^g\log(x)$ dus $g^c = x$

$x = {}^g\log(y)$	$g^x = y$	Oplossing	Controle
$x = {}^2\log(8)$	$2^x = 8$	$x = 3$	$2^3 = 8$
$x \approx {}^{0,9}\log(1,2346)$	$0,9^x \approx 1,2346$	$x \approx -2$	$0,9^{-2} \approx 1,2346$
$3 = {}^y\log(64)$	$y^3 = 64$	$y = \sqrt[3]{64} = 4$	$4^3 = 64$
$7 = {}^{3,25}\log(x)$	$3,25^7 = x$	$x \approx 3830$	$3,25^7 \approx 3830$

Maak nu zelf de volgende tabel af. Gebruik daarvoor de tabellen uit de bijlage. Controleer de opgave door die na te rekenen met je rekenmachine:

$x = {}^g\log(y)$	$g^x = y$	Uitkomst	Controle
$x = {}^2\log(8)$	$2^x = 8$	$x = 3$	$2^3 = 8$
$x \approx {}^{1,1}\log(2,1436)$			
$x = {}^{2,5}\log(0,064)$			
$1838 = {}^{3,5}\log(x)$			
$9 = {}^x\log(262144)$			

Zelf aan de slag

Los exact op (voor $x > 0$). Maak zo nodig gebruik van de rekenregels van machten. Controleer daarna je antwoord door de opgave na te rekenen.

- ${}^2\log(x) = 8$
- ${}^2\log(8) = x$
- ${}^x\log(2) = 8$
- ${}^8\log(x) = 2$
- ${}^8\log(2) = x$
- ${}^x\log(8) = 2$

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1$$

Diagnostische toets

Als $32 = 4^x$ dan geldt:

- ☐ A $x = 4$ ☐ B $x = 8$ ☐ C $x = {}^4\log(32)$ ☐ D $x = {}^{32}\log(4)$

Als $y = 16^x$ dan geldt:

- ☐ A $x = 2$ ☐ B $x = 4$ ☐ C $x = {}^y\log(16)$ ☐ D $x = {}^{16}\log(y)$

Als $u = {}^{1,1}\log(0,9)$. Dan betekent dit dat:

- ☐ A $0,9 = u^{1,1}$ ☐ B $u = 1,1^{0,9}$ ☐ C $1,1 = 0,9^u$ ☐ D $0,9 = 1,1^u$

Als $3 = {}^t\log(9)$. Dan betekent dit dat:

- ☐ A $t = 2$ ☐ B $9 = t^3$ ☐ C $9 = 3^t$ ☐ D $t = 3^9$

Huiswerk

Per uur neemt het aantal virussen af 20%. Het aantal virussen is op dit moment 1800.

- Wat is de groeifactor?
- Welke functie hoort bij het aantal bacteriën: $v(t)$?
- Hoeveel virussen zijn er na negen uur?
- Na hoeveel uur is het aantal 1152?
- Na hoeveel jaar is het aantal bacteriën gehalveerd?

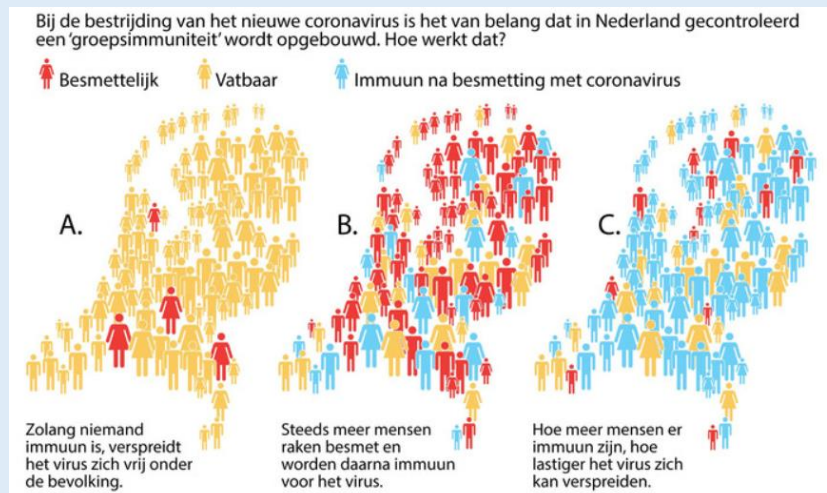
Les 3

Inleiding - “Corona-(COVID-19) virus in Nederland” – slot

In Nederland is het beleid tegen het coronavirus om een zogenoemde groepsimmunitet op te bouwen. Hiervan is sprake als 60% van de inwoners besmet is geraakt met dit virus. Na hun herstel zijn ze naar verwachting immuun voor het virus geworden en beschermen ze de rest van de bevolking tegen het virus. In Nederland wonen ongeveer 17 miljoen mensen. Dat betekent dus dat ongeveer 10 miljoen mensen het virus moeten hebben gehad.

In les 1 hebben we gezien dat het aantal besmettingsgevallen kunnen weergeven met de formule $B(t) = 33 \cdot 1,23^t$ (met $t=0$ op 27 februari 2020). Dit zijn echter alleen die ziektegevallen die ook daadwerkelijk getest zijn. Het vermoeden is dat het werkelijk aantal ziektegevallen ongeveer 6 keer zo hoog is.

Bron: Rijksoverheid



De formule voor het totaal aantal besmettingsgevallen geven wij daarom weer met de formule $N(t) = 200 \cdot 1,23^t$. Nu is de vraag: “Op welk tijdstip is de 10 miljoen bereikt?”. Wij weten nu dat we hiervoor de vergelijking $200 \cdot 1,23^t = 10.000.000 \Leftrightarrow 1,23^t = 50.000$ moeten oplossen. Hieruit volgt $t = {}^{1,23}\log(50.000)$. In deze les leer je hoe je t kunt uitrekenen op je rekenmachine. Daarnaast leer je hoe je machten kunt herschrijven om daarna vergelijkingen met logaritmen algebraïsch te kunnen oplossen.

Voorkennis

In de vorige les heb je kennisgemaakt met logaritmen. Geef de logaritme weer in een geheel getal of breuk. Weet je het nog?

Opgave	Antwoord	Controle	Hoe zeker ben je van je antwoord?		
			Heel zeker	Ik twijfel	Heel onzeker
${}^4\log(64)$	3	$4^3 = 64$	X		
${}^2\log(1)$					
${}^5\log(125)$					
${}^2\log(256)$					
${}^{10}\log(100000)$					
${}^9\log(9)$					
${}^8\log(\frac{1}{64})$					
${}^{100}\log(1)$					
${}^4\log(16)$					
${}^{16}\log(4)$					

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1$$

Vul bovenstaande tabel in. De eerste regel is al voor jou ingevuld. Geef ook aan hoe zeker jij van je antwoord bent. Vergelijk daarna met je buurman of -vrouw onderling jullie antwoorden. Als jullie allebei twifelen of heel onzeker zijn, roep dan de hulp van je docent in. Aan het eind geeft je docent de juiste antwoorden. Als je heel zeker was van je antwoord maar hij blijkt toch fout te zijn, overleg dan nog een keer met je buurman of -vrouw om te achterhalen waarom de fout is gemaakt.

Uitleg

Wij hebben de volgende formule: $y = 1,4^x$. Als je wilt weten wat de waarde van y is voor $x = 6$ dan kan je eenvoudig opzoeken in de tabel: $y = 7,5295$. Je kunt dit ook al uitrekenen op je rekenmachine met de knop $\wedge$.

Reken $y = 1,4^6$ uit met je rekenmachine

Nu gaan we andersom rekenen. We willen graag weten voor welke x geldt: $y = 14,7579$.

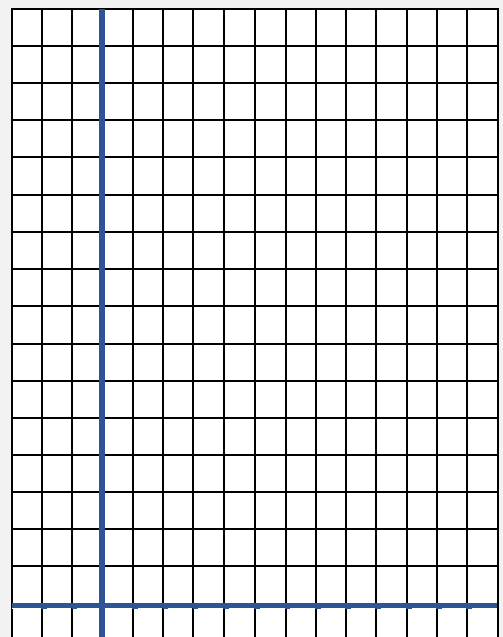
- Zoek dit op in de tabel
- Los dit exact op
- Dit kan je ook uitrekenen met je grafische rekenmachine.
 - Modus 'Run-Matrix'
 - Kies met F4 voor de optie 'Math'
 - Kies $\{\log_a n\}$. Let op! Hiermee wordt bedoeld: ${}^a\log(b)$.
 - Vul voor a nu 1,4 in en voor b 14,7579
 - Op het scherm verschijnt dan: 8.0000

t	$1,4^t$
-4	0,2603
-3	0,3644
-2	0,5102
-1	0,7143
0	1,0000
1	1,4000
2	1,9600
3	2,7440
4	3,8416
5	5,3782
6	7,5295
7	10,5414
8	14,7579
9	20,6610

Los op met je rekenmachine: $3,8416 = 1,4^x$. Klopt het met de tabel?

Maak de volgende tabel af en controleer je antwoord door de grafiek erbij te tekenen

$x \approx$	$1,4^x$
	-3
	-1
	1
	3
	5
	7
	9
	11
	13
8,05	15



Zelf aan de slag

Los de volgende vergelijkingen op, in drie decimalen nauwkeurig.

- a. $5^x = 9$
- b. $9^x = 5$
- c. $2^{x-1} = 12$
- d. $2^{x^2} = 12$
- e. $2^{\sqrt{x}} = 12$
- f. $\sqrt{2}^x = 12$
- g. $1,2^x = 1$
- h. $1,2 \cdot 1,2^x = 1$
- i. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{7}{3}$
- j. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{3}{7}$

Uitleg

Je weet al dat $y = g^x$ dan $x = {}^g\log(y)$. Als we nu y vervangen door g^x krijg je de volgende vergelijking: $x = {}^g\log(g^x)$. Bijvoorbeeld: $8 = 2^3$ dan $3 = {}^2\log(8) = {}^2\log(2^3)$. Dit kan je helpen bij het exact oplossen van de linkervergelijking.

$$y = {}^3\log(9^5)$$

Los op: $y = {}^3\log(9^5)$

Los op: $y = {}^2\log(4^3)$

- Eerst 9^5 herschrijven als een macht van 3
- $9 = 3^2$
- Dus $9^5 = (3^2)^5 = 3^{10}$.
- Invullen in de vergelijking:
- $y = {}^3\log(9^5) = {}^3\log(3^{10}) = 10$

Los nu zelf de rechtervergelijking op.

Zelf aan de slag

Los de volgende vergelijkingen op, in drie decimalen nauwkeurig.

- a. $y = {}^4\log(2^{11})$
- b. $y = {}^{\frac{1}{4}}\log(9^5)$
- c. $y = {}^2\log((\frac{1}{4})^5)$
- d. $y = {}^{\frac{1}{2}}\log((\frac{1}{4})^5)$

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1$$

Eindspel

In werkblad 2 vinden jullie een Mini-LoCo-spel. Wat moet je doen?

- Knip de drie grote rechthoeken uit
- Plak de derde rechthoek (met de kleuren rood/groen/blauw) aan de achterzijde van de rechthoek met alle opgaven
- Knip nu elke opgave uit. Je hebt dan 12 kaartjes
- Leg ieder kaartje bij het juiste antwoord op de rechthoek met de antwoorden. De opgave naar boven gericht
- Als je klaar bent draai je elk kaartje om. Als je alle antwoorden goed hebt, zie je drie dezelfde figuren. Elk in zijn eigen kleur.
- Een rekenmachine is *niet* toegestaan

Succes!

Tabellen

x	Groeifactor: <1							
	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
-4	123,4568	39,0625	16	7,7160	4,1649	2,4414	1,5242	1
-3	37,0370	15,625	8	4,6296	2,9155	1,9531	1,3717	1
-2	11,1111	6,3	4	2,7778	2,0408	1,5625	1,2346	1
-1	3,3333	2,5	2	1,6667	1,4286	1,25	1,1111	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1
3	0,027	0,064	0,125	0,216	0,343	0,512	0,729	1
4	0,0081	0,0256	0,0625	0,1296	0,2401	0,4096	0,6561	1
5	0,0024	0,0102	0,0313	0,0778	0,1681	0,3277	0,5905	1
6	0,0007	0,0041	0,0156	0,0467	0,1176	0,2621	0,5314	1
7	0,0002	0,0016	0,0078	0,0280	0,0824	0,2097	0,4783	1
8	0,0001	0,0007	0,0039	0,0168	0,0576	0,1678	0,4305	1
9	0,0000	0,0003	0,0020	0,0101	0,0404	0,1342	0,3874	1
10	0,0000	0,0001	0,0010	0,0060	0,0282	0,1074	0,3487	1

x	Groeifactor : 1,1 - 1,9								
	1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
-4	0,6830	0,4823	0,3501	0,2603	0,1975	0,1526	0,1197	0,0953	0,0767
-3	0,7513	0,5787	0,4552	0,3644	0,2963	0,2441	0,2035	0,1715	0,1458
-2	0,8264	0,6944	0,5917	0,5102	0,4444	0,3906	0,3460	0,3086	0,2770
-1	0,9091	0,8333	0,7692	0,7143	0,6667	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
2	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61
3	1,331	1,728	2,197	2,744	3,375	4,096	4,913	5,832	6,859
4	1,4641	2,0736	2,8561	3,8416	5,0625	6,5536	8,3521	10,4976	13,0321
5	1,6105	2,4883	3,7129	5,3782	7,5938	10,4858	14,1986	18,8957	24,7610
6	1,7716	2,9860	4,8268	7,5295	11,3906	16,7772	24,1376	34,0122	47,0459
7	1,9487	3,5832	6,2749	10,5414	17,0859	26,8435	41,0339	61,2220	89,3872
8	2,1436	4,2998	8,1573	14,7579	25,6289	42,9497	69,7576	110,1996	169,8356
9	2,3579	5,1598	10,6045	20,6610	38,4434	68,7195	118,5879	198,3593	322,6877
10	2,5937	6,1917	13,7858	28,9255	57,6650	109,9512	201,5994	357,0467	613,1066

x	Groeifactor: 2 – 4								
	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00
-4	0,0625	0,0390	0,0256	0,0175	0,0123	0,0090	0,0067	0,0051	0,0039
-3	0,125	0,0878	0,064	0,0481	0,0370	0,0291	0,0233	0,0190	0,0156
-2	0,25	0,1975	0,16	0,1322	0,1111	0,0947	0,0816	0,0711	0,0625
-1	0,5	0,4444	0,4	0,3636	0,3333	0,3077	0,2857	0,2667	0,25
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2,25	2,5	2,75	3	3,25	3,5	3,75	4
2	4	5,06	6,25	7,56	9	10,56	12,25	14,06	16
3	8	11,39	15,63	20,80	27	34,33	42,88	52,73	64
4	16	25,63	39,06	57,19	81	111,57	150,06	197,75	256
5	32	57,67	97,66	157,28	243	362,59	525,22	741,58	1.024
6	64	129,75	244,14	432,51	729	1.178,42	1.838,27	2.780,91	4.096
7	128	291,93	610,35	1.189,40	2.187	3.829,87	6.433,93	10.428,43	16.384
8	256	656,84	1.525,88	3.270,86	6.561	12.447,06	22.518,75	39.106,61	65.536
9	512	1.477,89	3.814,70	8.994,86	19.683	40.452,95	78.815,64	146.649,78	262.144
10	1.024	3.325,26	9.536,74	24.735,86	59.049	131.472,10	275.854,74	549.936,67	1.048.576

Werkblad I

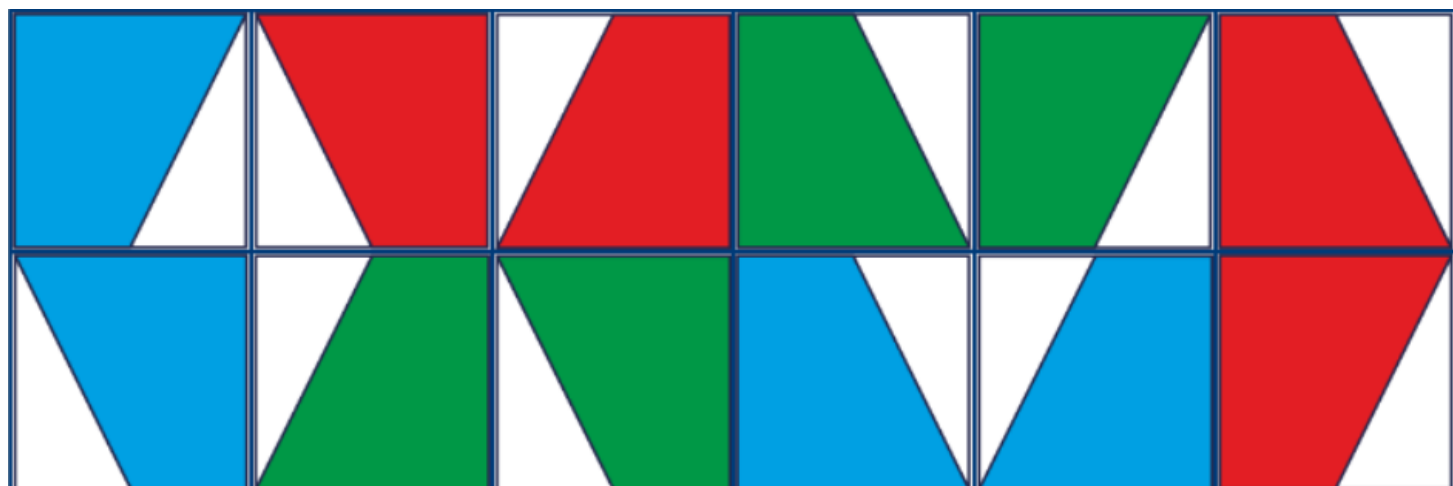
De formule is: $y = 100 \cdot 1,03^x$	Bij $x = 3$ hoort $y = 120,0$ En bij $x = 7$ hoort $y = 97,8$	Per dag neemt de hoeveelheid af met 5%	Het groeipercentage per week is 11,0%
De formule is: $y = 90 \cdot 1,015^x$	Het afnamepercentage per 4 dagen is 11,5%	De formule is: $y = 200 \cdot 0,97^x$	Bij $y = 121$ hoort $x = 2$
De formule is: $y = 100 \cdot 2^x$	Bij $x = 1$ hoort $y = 194$. En bij $x = 2$ hoort $y = 188,2$	De groeifactor per dag is 1,5%	Na dagen is het aantal verviervoudigd
Het groeipercentage is 3% per dag	Bij $y = 99,9$ hoort $x = 7$	Het groeipercentage per week is 23%	De formule is: $y = 140 \cdot 0,95^x$
De groeifactor per week is 1,23	Het groeipercentage per dag is 10%	Bij $y = 114,0$ hoort $x = 4$	Bij $x = 0$ hoort $y = 100$. En bij $x = 7$ hoort $y = 195$
De formule is: $y = 80 \cdot 1,04^x$	Na 9 dagen is het met 24% afgenomen	Bij $y = 101,2$ hoort $x = 6$	Bij $y = 148,0$ hoort $x = 10$
Bij $x = 3$ hoort $y = 90,0$. En bij $x = 4$ hoort $y = 93,6$	De groeifactor per week is 1,95	Bij $y = 6400$ hoort $x = 6$	Bij $x = 7$ is de 10.000 overschreden

Werkblad 2

Rekenen met logaritmen

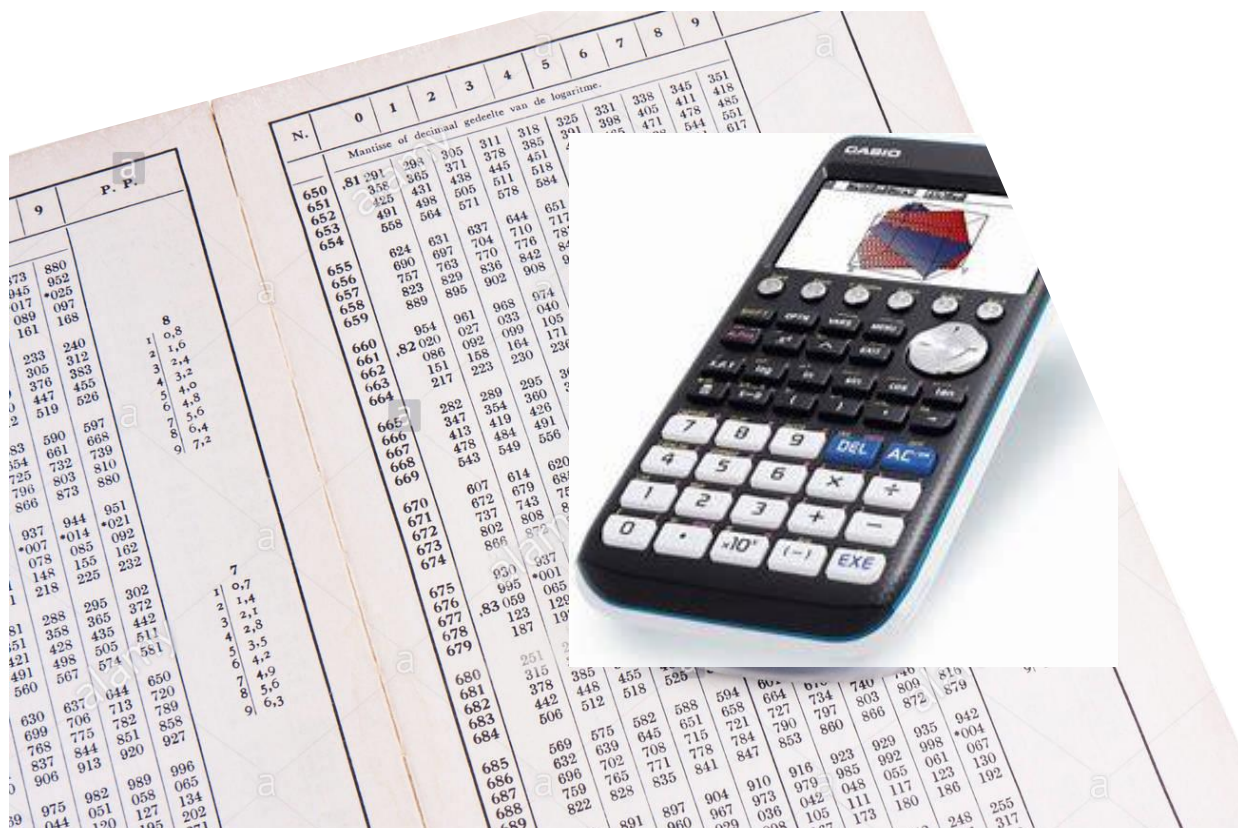
1 $y = \frac{1}{3}\log(27)$	2 $14 = 2^x$	3 $^{0,1}\log(10) = x$	4 $\sqrt{2}\log(1) = x$	5 $^{x+1}\log(16) = 4$	6 $1 = \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(x+1)$
7 $^x\log(9) = 2$	8 $y = {}^2\log(128)$	9 $2 + {}^3\log(x) = 3\frac{1}{2}$	10 $16^{1,5} = x$	11 $^x\log(\sqrt[3]{x})$	12 $x^3=16$

3,8	64	24	2,5	3	1
-1	$\frac{1}{3}$	5,2	7	-3	0



Versie van de lessenserie zoals voorgelegd voor de expertopinie

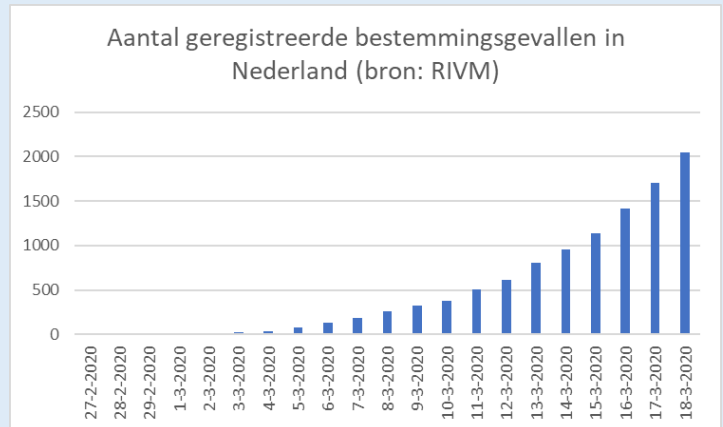
Exponenten en logaritmen



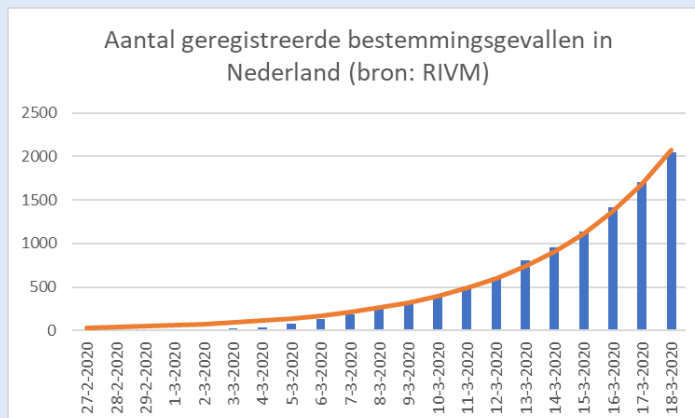
Les 1

Inleiding - "Corona-(COVID-19) virus in Nederland"

In 2020 is de wereld opgeschrikt door het nieuws over het coronavirus. Een virus dat zich razendsnel heeft verspreid en vooral onder kwetsbare ouderen tot sterfte kan leiden. De nationale overheden voerden drastische maatregelen in om de verspreiding af te remmen. In rechtergrafiek zie je hoe het aantal geregistreerde besmettingen zich in Nederland in korte tijd ontwikkelde.



Je ziet dat dit aantal dagelijks flink toeneemt. Je kunt dit herkennen als een exponentiële groei. Die is weergegeven door de oranje lijn in onderstaande grafiek.



Voor die oranje-lijn geldt de volgende functie: $B(t) = 33 \cdot 1,23^t$. Hierbij is t het aantal dagen vanaf 27 februari 2020 (de dag waarop het eerste besmettingsgeval in Nederland is vastgesteld). Deze functie is een wiskundig model. Modellen zijn een vereenvoudigde weergave van de werkelijkheid. Daarom is de functie voor de eerste dagen ($t \leq 7$) niet nauwkeurig. Dit is niet erg, omdat de functie bedoeld is om het aantal besmettingsgevallen te voorspellen (dus voor $t > 20$).

De maatregelen die half maart zijn ingevoerd zullen pas op termijn effect hebben op het aantal geregistreerde besmettingsgevallen. De functie voorspelt dus vooral het aantal besmettingsgevallen als er *geen* maatregelen zouden zijn getroffen. De voorspelling kan later worden vergeleken met het aantal daadwerkelijke geregistreerde besmettingsgevallen. Het verschil tussen de voorspelling en de realisatie geeft informatie over de effectiviteit van de maatregelen.

Over 10 dagen (28 maart 2020 / $t = 30$) is het aantal besmettingen volgens de voorspelling al opgelopen tot 16.431. Maar wanneer is het aantal van 100.000 bereikt? Ook daarvoor kunnen we de functie gebruiken. We proberen eerst $t = 40$. Er zijn er dan 130.232. Teveel dus. Bij $t = 38$ krijgen we 86.981. Nog te weinig. Het zal dus ongeveer $t = 39$ moeten zijn. Dat klopt aardig: 105.880. Maar dat is niet precies 100.000. In dit geval misschien niet zo erg, maar je kunt je situaties voorstellen waarbij je het exacte antwoord moet weten ($t \approx 38,724$). Je kunt dat vinden door steeds een waarde voor t in te vullen en dat steeds nauwkeuriger vast te stellen. Maar dat is omslachtig. Kan het eenvoudiger? Jazeker, dat ga je leren in deze lessenserie.

Voorkennis

In de functie van het aantal besmettingsgevallen herken je een exponentiële verband. In de volgende vragen zijn ook exponentiële verbanden gegeven. Die kan je uitrekenen met de rekenregels voor machten. Reken uit of schat *zonder rekenmachine* uitrekenen of schatten.

$3^3 = \underline{\hspace{2cm}}$			
☐ A 6	☐ B 9	☐ C 27	☐ D 33
$2^4 = \underline{\hspace{2cm}}$			
☐ A 24	☐ B 16	☐ C 8	☐ D 6
$(1,1)^8$ is ongeveer gelijk aan:			
☐ A 1,18	☐ B 1,80	☐ C 2,10	☐ D 8,80
$(0,9)^8$ is ongeveer gelijk aan: ☐			
☐ A 0,40	☐ B 0,72	☐ C 1,72	☐ D 7,20

grondtal = 0,9
exponent = 8

Gevraagd: wat is $1,3^6$?

- Grondtal = 1,3
- Exponent = 6
- Zoek in kolom "t" het getal 6 op
- Bekijk wat de bijbehorende waarde van $1,3^t$ is
- Antwoord: $1,3^6 = 4,8268$

Gevraagd: wat is $1,3^9$?

t	$1,3^t$
-4	0,3501
-3	0,4552
-2	0,5917
-1	0,7692
0	1,0000
1	1,3000
2	1,6900
3	2,1970
4	2,8561
5	3,7129
6	4,8268
7	6,2749
8	8,1573
9	10,6045
10	13,7858

Maak nu zelf de rechteropgave. Schrijf ook de stappen op zoals links.

Zelf aan de slag

Beantwoord de volgende vragen. Gebruik daarbij de tabel uit de uitleg.

1. Wat is $1,3^{10}$?
2. Wat is $1,3^{-2}$?
3. Bij welke t hoort $1,3^t = 8,1573$?
4. Los de volgende vergelijking op: $1,3^t = 0,7692$
5. Bij welke t hoort $1,3^t = 4$?

Diagnostische toets

$1,3^3 = \underline{\hspace{2cm}}$

☐ A 1,33
 ☐ B 1,39
 ☐ C 2,1970
 ☐ D 3,9

Los op: $1,3^t = 5$. Dus $t = \underline{\hspace{2cm}}$

☐ A Kan niet
 ☐ B bijna 4
 ☐ C bijna 6
 ☐ D meer dan 6

Uitleg

Los op: $4284 = 1500 \cdot 1,3^t$

- Grondtal = 1,3
- Gevraagd wordt de exponent t
- Links en rechts delen door 1500
- $2,856 = 1,3^t$
- Zoek in kolom 2,865 op in de kolom " $1,3^t$ "
- Bekijk wat de bijbehorende waarde van t is
- Antwoord: $t \approx 4$

Los op: $8354 = 2250 \cdot 1,3^t$

t	$1,3^t$
-4	0,3501
-3	0,4552
-2	0,5917
-1	0,7692
0	1,0000
1	1,3000
2	1,6900
3	2,1970
4	2,8561
5	3,7129
6	4,8268
7	6,2749
8	8,1573
9	10,6045
10	13,7858

Maak nu zelf de rechteropgave. Schrijf ook de stappen op zoals links.

Zelf aan de slag

Opdracht 1

Hieronder staan vier uitspraken. Drie horen bij elkaar. Welke hoort in dit rijtje niet thuis:

- a. De formule is $y = 200 \cdot 0,95^x$
- b. Als $x = 10$ dan is $y = 100$. De halveringstijd is dus 10 perioden.
- c. Bij $x = 1$ hoort $y = 190$. Bij $x = 2$ hoort $y = 180,5$
- d. De procentuele afname op het interval $[0,4]$ is ongeveer 19%.

Opdracht 2

Per uur is het groeipercentage 4%. Daan zegt: "Dan is de bijbehorende formule $y = 1,4^x$ met x in uren.". Lucas zegt: "Na één dag is de groei bijna 100%". Wie heeft gelijk?

- a. Alleen Daan heeft gelijk
- b. Alleen Lucas heeft gelijk
- c. Ze hebben allebei gelijk
- d. Ze hebben allebei ongelijk

Opdracht 3

In deze opgave gebruiken wij het exponentieel verband $y = 1250 \cdot 0,81^x$. Los op (in twee decimalen nauwkeurig). Gebruik hiervoor de knop  op je rekenmachine:

- a. $y = 1250 \cdot 0,81^7$
- b. $664,30 = 1250 \cdot 0,81^x$
- c. De halveringstijd
- d. $y = 1250 \cdot 0,81^{-4}$

Opdracht 4

De prijs van een product neemt al jaren toe met 2% per jaar. De verwachting is dat de komende jaren deze prijsstijging wel doorgaat. De prijs op dit moment is € 250.

- a. Stel de formule van de prijs op in de vorm: $y = b \cdot g^t$ waarbij y de prijs is en t in jaren (met $t = 0$ voor het huidige moment).
- b. Hoeveel kostte het product 4 jaar geleden? Gebruik daarvoor de tabel uit de bijlage.
- c. In welk jaar is de prijs van het product verdubbeld *ten opzichte van* de prijs van 10 jaar geleden?
- d. In welk jaar is de prijs van het product verdubbeld *ten opzichte van* de prijs van 20 jaar geleden?

Diagnostische toets

Als iets met 3% afneemt per dag, dan is het grondtal gelijk aan:

- ☐ A 0,7 ☐ B 0,97 ☐ C 1,03 ☐ D 1,3

Als $150 = 100 \cdot 1,1^x$. Dan is x gelijk aan:

- ☐ A ≈ 4 ☐ B 5 ☐ C 50 ☐ D kan niet

Als $150 = 200 \cdot 0,9^x$. Dan is x gelijk aan:

- ☐ A 2,5 ☐ B ≈ 3 ☐ C ≈ 4 ☐ D 5

Eindspel

Jullie gaan kwartetten met exponentiële functies. Knip uit werkblad 1 de 28 kaartjes uit. Jullie krijgen van elke exponentiële functie vier kaartjes. Het zijn allemaal exponentiële functies die een hoeveelheid (y) beschrijven in de tijd (x in dagen). In groepjes van vier leerlingen zoeken jullie de kwartetten (vier kaartjes behorend bij dezelfde exponentiële functie) bij elkaar.

Les 2

Inleiding - “Corona-(COVID-19) virus in Nederland” - vervolg

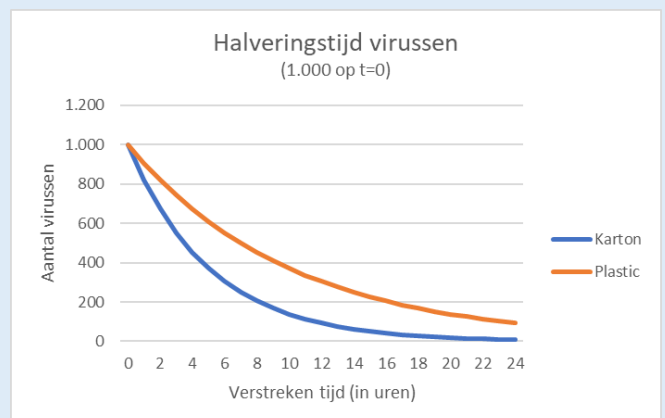
Naar aanleiding van het coronavirus gaan veel verhalen rond hoe lang een virus op verpakkingsmateriaal kan overleven. Mensen durven bijvoorbeeld niet meer producten uit China te bestellen via AliExpress. Om te bepalen hoe goed virussen overleven, bepaalt men de halveringstijd. Als op $t = 0$ bijvoorbeeld 1.000 virussen zijn en op $t = 2$ uur zijn 500 virussen, dan is de halveringstijd 2 uur. Na 4 uur is het aantal virussen weer gehalveerd: er zijn nog 250 virussen over. Hoe minder virussen, hoe minder de kans op besmetting.

Uit onderzoek blijkt dat de halveringstijd afhangt van het soort verpakkingsmateriaal:

- Op karton : 3,5 uur
- Op plastic : 7 uur

In de grafiek zie je het aantal virussen per uur als in het begin 1.000 virussen zijn.

Exponentiële functies kunnen dus ook dalen.



Voorkennis

In de vorige les heb je gerekend met exponentiële verbanden. De ene keer moet je de waarde van een exponentieel verband uitrekenen. De andere keer wil je juist weten welke exponent tot die waarde leidt. Weet je het nog?

Als iets met 4% toeneemt per dag, dan is het grondtal gelijk aan:

- A** 0,6 **B** 1,04 **C** 1,4 **D** 4

Als $y = 180 \cdot 1,2^x$. Dan:

- A** 20% van 180 = 36 **B** neemt y per dag af **C** $y > 2.160$ als $x = 10$ **D** $y = 181,2$ als $x = 1$
Bij $x = 2$: $y = 252$

Als $300 = 400 \cdot 0,9^x$. Dan is x gelijk aan:

- A** 2,5 **B** ± 3 **C** ± 4 **D** 5

Uitleg

Jaarlijks groeit de winst van een onderneming met 20%. Vorig jaar was de winst € 2 miljoen.

- Wat is de groeifactor?
- Welke functie hoort bij de winst: $w(t)$ (in euro's)?
- Hoeveel is de winst in het zesde jaar?
- In welk jaar is de winst € 3.456.000?
- In welk jaar is de winst voor het eerst meer dan verdubbeld?

- | | |
|--|--|
| <p>a. Groeifactor:</p> <ul style="list-style-type: none">Winst stijgt met 20%Groeifactor = 1,2 <p>b. Functie:</p> <ul style="list-style-type: none">Groeifactor = 1,2.Variabele is het jaar, aangegeven met tWinst op $t = 0$ is gelijk aan € 2.000.000Functie: $w(t) = 2.000.000 \cdot 1,2^t$ <p>c. Winst in het derde jaar:</p> <ul style="list-style-type: none">$t = 6$Gevraagd wordt $w(6) = 2.000.000 \cdot 1,2^6$In tweede kolom staat grondtal 1,2. Regel met $x = 6$ opzoeken: $1,2^6 = 4,8268$$w(6) = 2.000.000 \cdot 1,2^6 = 2.000.000 \cdot 4,8268 = 9.653.600$ <p>d. In welk jaar:</p> <ul style="list-style-type: none">Gevraagd wordt $w(t) = 2.000.000 \cdot 1,2^t = 3.456.000$In de vergelijking links en rechts delen door $2.000.000$. Dus: $1,2^t = 1,7280$Opzoeken in kolom "1,2" de waarde $1,7280$. Deze staat in de regel bij $x = 3$Antwoord: in het derde jaar <p>e. Verdubbeling:</p> <ul style="list-style-type: none">$1,2^t = 2$Opzoeken in kolom "1,2" de waarde 2. Deze staat nergens, maar in de regel bij $x = 4$ is deze macht voor het eerst meer dan 2.Antwoord: in het vierde jaar. | |
|--|--|

Maak nu de volgende opgave aan de rechterkant:

Per uur neemt het aantal bacteriën toe met 50%. Het aantal bacteriën is op dit moment 80.

- Wat is de groeifactor?
- Welke functie hoort bij het aantal bacteriën: $b(t)$?
- Hoeveel bacteriën zijn er na acht uur?
- Na hoeveel uur is het aantal 180?
- Na hoeveel uur is het aantal bacteriën al meer dan 1.000?

Diagnostische toets

Schrijf je antwoord op een wisbordje. Je mag de tabellen erbij houden.

1. Voor welke t geldt: $1,7^t = 24,14$?
2. Wat is de verdubbelingstijd bij een groei van 10% per jaar (t in jaren)?
3. Als er nu 1000 virussen zijn en de afname is 20% per uur (t in uren). Hoeveel uur geleden waren er nog 1.953 virussen?
4. Als je spaargeld jaarlijks met 30% toeneemt en je hebt nu € 2.000 op je spaarrekening staan. Hoeveel jaar geleden had je € 920 op de bank staan?
5. Het aantal abonnees op TikTok groeit met 60% per jaar. Na hoeveel jaar is dat aantal 100x zoveel?

Uitleg

Als gevraagd wordt “Voor welke x geldt: $2^x = 8$?” dan is het antwoord “ $x = 3$ ”. Nu gaan we een nieuw begrip introduceren: de logaritme. Deze is als volgt gedefinieerd:

Als $g^x = y$ dan $x = {}^g\log(y)$. In deze vraag: $2^x = 8$ dan $x = {}^2\log(8) = 3$

Je kunt dit vergelijken met de relatie tussen wortel en kwadraat. Als $x^3 = y$ dan $x = \sqrt[3]{y}$.

Onderstaand zijn enkele voorbeelden weergegeven. Daarbij zijn steeds de volgende stappen gezet:

- x is geschreven als een logaritme
- Er is uitgerekend wat dan de waarde van $\log$ moet zijn
- In de laatste kolom is de opgave nagerekend met de rekenmachine.

$g^x = y$	$x = {}^g\log(y)$	Oplossing	Controle
$2^x = 8$	$x = {}^2\log(8)$	${}^2\log(8) = 3$	$2^3 = 8$
$2^x = 32$	$x = {}^2\log(32)$	${}^2\log(32) = 5$	$2^5 = 32$
$3^x = 81$	$x = {}^3\log(81)$	${}^3\log(81) = 4$	$3^4 = 81$
$5^x = 125$	$x = {}^5\log(125)$	${}^5\log(125) = 3$	$5^3 = 125$

Maak nu zelf de volgende tabel af. Gebruik daarvoor de tabellen uit de bijlage. Controleer de opgave door die na te rekenen met je rekenmachine:

$g^x = y$	$x = {}^g\log(y)$	Oplossing	Controle
$5^x = 125$	$x = {}^5\log(125)$	${}^5\log(125) = 3$	$5^3 = 125$
$4^x = 16$			
$4^x = 1024$			
$3^x = 81$			
$1,5^x = 2,25$			
$0,8^x \approx 0,3277$			

Uitleg

Schrijf als een geheel getal: $x = {}^2\log(8)$. Dit kan je doen met dezelfde regel:

Als $x = {}^g\log(y)$ dan $g^x = y$

Je kunt deze regel ook gebruiken om de waarde van x uit te rekenen bij de volgende opgaven:

- $a = {}^x\log(b)$ dus $x^a = b$, waaruit volgt: $x = \sqrt[a]{b}$
- $c = {}^g\log(x)$ dus $g^c = x$

$x = {}^g\log(y)$	$g^x = y$	Oplossing	Controle
$x = {}^2\log(8)$	$2^x = 8$	$x = 3$	$2^3 = 8$
$x \approx {}^{0,9}\log(1,2346)$	$0,9^x \approx 1,2346$	$x = -2$	$0,9^{-2} \approx 1,2346$
$3 = {}^y\log(64)$	$y^3 = 64$	$y = \sqrt[3]{64} = 4$	$4^3 = 64$
$7 = {}^{3,25}\log(x)$	$3,25^7 = x$	$x \approx 3830$	$3,25^7 \approx 3830$

Maak nu zelf de volgende tabel af. Gebruik daarvoor de tabellen uit de bijlage. Controleer de opgave door die na te rekenen met je rekenmachine:

$x = {}^g\log(y)$	$g^x = y$	Uitkomst	Controle
$x = {}^2\log(8)$	$2^x = 8$	$x = 3$	$2^3 = 8$
$x \approx {}^{1,1}\log(2,1436)$			
$x = {}^{2,5}\log(0,064)$			
$1838 = {}^{3,5}\log(x)$			
$9 = {}^x\log(262144)$			

Zelf aan de slag

Los exact op (voor $x > 0$). Maak zo nodig gebruik van de rekenregels van machten. Controleer daarna je antwoord door de opgave na te rekenen.

- ${}^2\log(x) = 8$
- ${}^2\log(8) = x$
- ${}^x\log(2) = 8$
- ${}^8\log(x) = 2$
- ${}^8\log(2) = x$
- ${}^x\log(8) = 2$

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1$$

Diagnostische toets

Als $32 = 4^x$ dan geldt:

- ☐ A $x = 4$ ☐ B $x = 8$ ☐ C $x = {}^4\log(32)$ ☐ D $x = {}^{32}\log(4)$

Als $y = 16^x$ dan geldt:

- ☐ A $x = 2$ ☐ B $x = 4$ ☐ C $x = {}^y\log(16)$ ☐ D $x = {}^{16}\log(y)$

Als $u = {}^{1,1}\log(0,9)$. Dan betekent dit dat:

- ☐ A $0,9 = u^{1,1}$ ☐ B $u = 1,1^{0,9}$ ☐ C $1,1 = 0,9^u$ ☐ D $0,9 = 1,1^u$

Als $3 = {}^t\log(9)$. Dan betekent dit dat:

- ☐ A $t = 2$ ☐ B $9 = t^3$ ☐ C $9 = 3^t$ ☐ D $t = 3^9$

Huiswerk

Per uur neemt het aantal virussen af 20%. Het aantal virussen is op dit moment 1800.

- Wat is de groeifactor?
- Welke functie hoort bij het aantal bacteriën: $v(t)$?
- Hoeveel virussen zijn er na negen uur?
- Na hoeveel uur is het aantal 1152?
- Na hoeveel jaar is het aantal bacteriën gehalveerd?

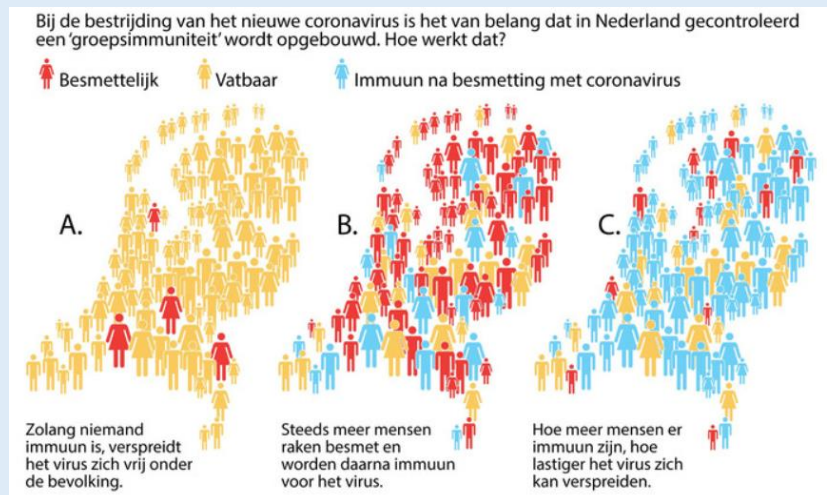
Les 3

Inleiding - “Corona-(COVID-19) virus in Nederland” – slot

In Nederland is het beleid tegen het coronavirus om een zogenoemde groepsimmunitet op te bouwen. Hiervan is sprake als 60% van de inwoners besmet is geraakt met dit virus. Na hun herstel zijn ze naar verwachting immuun voor het virus geworden en beschermen ze de rest van de bevolking tegen het virus. In Nederland wonen ongeveer 17 miljoen mensen. Dat betekent dus dat ongeveer 10 miljoen mensen het virus moeten hebben gehad.

In les 1 hebben gezien dat we het aantal besmettingsgevallen kunnen weergeven met de formule $B(t) = 33 \cdot 1,23^t$ (met $t=0$ op 27 februari 2020). Dit zijn echter alleen die ziektegevallen die ook daadwerkelijk getest zijn. Het vermoeden is dat het werkelijk aantal ziektegevallen ongeveer 6 keer zo hoog is.

Bron: Rijksoverheid



De formule voor het totaal aantal besmettingsgevallen geven wij daarom weer met de formule $N(t) = 200 \cdot 1,23^t$. Nu is de vraag: “Op welk tijdstip is de 10 miljoen bereikt?”. Wij weten nu dat we hiervoor de vergelijking $200 \cdot 1,23^t = 10.000.000 \Leftrightarrow 1,23^t = 50.000$ moeten oplossen. Hieruit volgt $t = {}^{1,23}\log(50.000)$. In deze les leer je hoe je t kunt uitrekenen op je rekenmachine. Daarnaast leer je hoe je machten kunt herschrijven om daarna vergelijkingen met logaritmen algebraïsch te kunnen oplossen.

Voorkennis

In de vorige les heb je kennisgemaakt met logaritmen. Weet je het nog?

Opgave	Antwoord	Controle	Hoe zeker ben je van je antwoord?		
			Heel zeker	Ik twijfel	Heel onzeker
${}^4\log(64)$	3	$4^3 = 64$	X		
${}^2\log(1)$					
${}^5\log(125)$					
${}^2\log(256)$					
${}^{10}\log(100000)$					
${}^9\log(9)$					
${}^8\log(\frac{1}{64})$					
${}^{100}\log(1)$					
${}^4\log(16)$					
${}^{16}\log(4)$					

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1$$

Vul bovenstaande tabel in. De eerste regel is al voor jou ingevuld. Geef ook aan hoe zeker jij van je antwoord ben. Vergelijk daarna met je buurman of -vrouw onderling jullie antwoorden. Als jullie allebei twifelen of heel onzeker zijn, roep dan de hulp van je docent in. Aan het eind geeft je docent de juiste antwoorden. Als je heel zeker was van je antwoord maar hij blijkt toch fout te zijn, overleg dan nog een keer met je buurman of -vrouw om te achterhalen waarom de fout is gemaakt.

Uitleg

Wij hebben de volgende formule: $y = 1,4^x$. Als je wilt weten wat de waarde van y is voor $x = 6$ dan kan je eenvoudig opzoeken in de tabel: $y = 7,5295$. Je kunt dit ook al uitrekenen op je rekenmachine met de knop $\wedge$.

Reken $y = 1,4^6$ uit met je rekenmachine

Nu gaan we andersom rekenen. We willen graag weten voor welke x geldt: $y = 14,7579$.

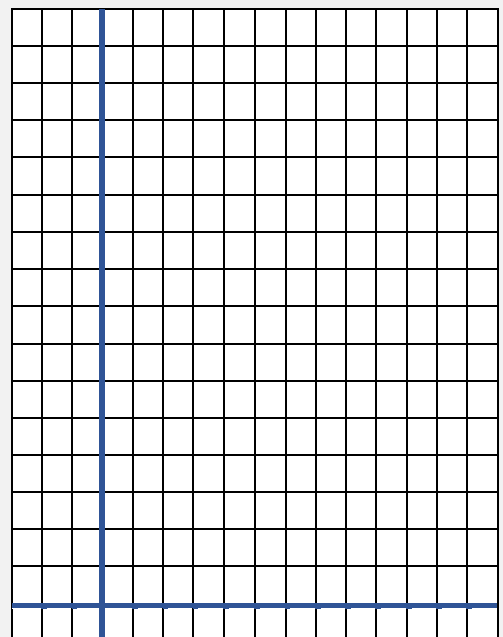
- Zoek dit op in de tabel
- Los dit exact op
- Dit kan je ook uitrekenen met je grafische rekenmachine.
 - Modus 'Run-Matrix'
 - Kies met F4 voor de optie 'Math'
 - Kies $\{\log_a n\}$. Let op! Hiermee wordt bedoeld: ${}^a\log(b)$.
 - Vul voor a nu 1,4 in en voor b 14,7579
 - Op het scherm verschijnt dan: 8.0000

t	$1,4^t$
-4	0,2603
-3	0,3644
-2	0,5102
-1	0,7143
0	1,0000
1	1,4000
2	1,9600
3	2,7440
4	3,8416
5	5,3782
6	7,5295
7	10,5414
8	14,7579
9	20,6610

Los op met je rekenmachine: $3,8416 = 1,4^x$. Klopt het met de tabel?

Maak de volgende tabel af en controleer je antwoord door de grafiek erbij te tekenen

$x \approx$	$1,4^x$
	-3
	-1
	1
	3
	5
	7
	9
	11
	13
8,05	15



Zelf aan de slag

Los de volgende vergelijkingen op, in drie decimalen nauwkeurig.

- a. $5^x = 9$
- b. $9^x = 5$
- c. $2^{x-1} = 12$
- d. $2^{x^2} = 12$
- e. $2^{\sqrt{x}} = 12$
- f. $\sqrt{2}^x = 12$
- g. $1,2^x = 1$
- h. $1,2 \cdot 1,2^x = 1$
- i. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{7}{3}$
- j. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{3}{7}$

Uitleg

Je weet al dat $y = g^x$ dan $x = {}^g\log(y)$. Als we nu y vervangen door g^x krijg je de volgende vergelijking: $x = {}^g\log(g^x)$. Bijvoorbeeld: $8 = 2^3$ dan $3 = {}^2\log(8) = {}^2\log(2^3)$. Dit kan je helpen bij het exact oplossen van de linkervergelijking.

$$y = {}^3\log(9^5)$$

Los op: $y = {}^3\log(9^5)$

Los op: $y = {}^2\log(4^3)$

- Eerst 9^5 herschrijven als een macht van 3
- $9 = 3^2$
- Dus $9^5 = (3^2)^5 = 3^{10}$.
- Invullen in de vergelijking:
- $y = {}^3\log(9^5) = {}^3\log(3^{10}) = 10$

Los nu zelf de rechtervergelijking op.

Zelf aan de slag

Los de volgende vergelijkingen op, in drie decimalen nauwkeurig.

- a. $y = {}^4\log(2^{11})$
- b. $y = {}^{\frac{1}{4}}\log(9^5)$
- c. $y = {}^2\log((\frac{1}{4})^5)$
- d. $y = {}^{\frac{1}{2}}\log((\frac{1}{4})^5)$

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1$$

Eindspel

In werkblad 2 vinden jullie een Mini-LoCo-spel. Wat moet je doen?

- Knip de drie grote rechthoeken uit
- Plak de derde rechthoek (met de kleuren rood/groen/blauw) aan de achterzijde van de rechthoek met alle opgaven
- Knip nu elke opgave uit. Je hebt dan 12 kaartjes
- Leg ieder kaartje bij het juiste antwoord op de rechthoek met de antwoorden. De opgave naar boven gericht
- Als je klaar bent draai je elk kaartje om. Als je alle antwoorden goed hebt, zie je drie dezelfde figuren. Elk in zijn eigen kleur.
- Een rekenmachine is *niet* toegestaan

Succes!

Tabellen

x	Groeifactor: <1							
	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
-4	123,4568	39,0625	16	7,7160	4,1649	2,4414	1,5242	1
-3	37,0370	15,625	8	4,6296	2,9155	1,9531	1,3717	1
-2	11,1111	6,3	4	2,7778	2,0408	1,5625	1,2346	1
-1	3,3333	2,5	2	1,6667	1,4286	1,25	1,1111	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1
3	0,027	0,064	0,125	0,216	0,343	0,512	0,729	1
4	0,0081	0,0256	0,0625	0,1296	0,2401	0,4096	0,6561	1
5	0,0024	0,0102	0,0313	0,0778	0,1681	0,3277	0,5905	1
6	0,0007	0,0041	0,0156	0,0467	0,1176	0,2621	0,5314	1
7	0,0002	0,0016	0,0078	0,0280	0,0824	0,2097	0,4783	1
8	0,0001	0,0007	0,0039	0,0168	0,0576	0,1678	0,4305	1
9	0,0000	0,0003	0,0020	0,0101	0,0404	0,1342	0,3874	1
10	0,0000	0,0001	0,0010	0,0060	0,0282	0,1074	0,3487	1

x	Groeifactor : 1,1 - 1,9								
	1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
-4	0,6830	0,4823	0,3501	0,2603	0,1975	0,1526	0,1197	0,0953	0,0767
-3	0,7513	0,5787	0,4552	0,3644	0,2963	0,2441	0,2035	0,1715	0,1458
-2	0,8264	0,6944	0,5917	0,5102	0,4444	0,3906	0,3460	0,3086	0,2770
-1	0,9091	0,8333	0,7692	0,7143	0,6667	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
2	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61
3	1,331	1,728	2,197	2,744	3,375	4,096	4,913	5,832	6,859
4	1,4641	2,0736	2,8561	3,8416	5,0625	6,5536	8,3521	10,4976	13,0321
5	1,6105	2,4883	3,7129	5,3782	7,5938	10,4858	14,1986	18,8957	24,7610
6	1,7716	2,9860	4,8268	7,5295	11,3906	16,7772	24,1376	34,0122	47,0459
7	1,9487	3,5832	6,2749	10,5414	17,0859	26,8435	41,0339	61,2220	89,3872
8	2,1436	4,2998	8,1573	14,7579	25,6289	42,9497	69,7576	110,1996	169,8356
9	2,3579	5,1598	10,6045	20,6610	38,4434	68,7195	118,5879	198,3593	322,6877
10	2,5937	6,1917	13,7858	28,9255	57,6650	109,9512	201,5994	357,0467	613,1066

x	Groeifactor: 2 – 4								
	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00
-4	0,0625	0,0390	0,0256	0,0175	0,0123	0,0090	0,0067	0,0051	0,0039
-3	0,125	0,0878	0,064	0,0481	0,0370	0,0291	0,0233	0,0190	0,0156
-2	0,25	0,1975	0,16	0,1322	0,1111	0,0947	0,0816	0,0711	0,0625
-1	0,5	0,4444	0,4	0,3636	0,3333	0,3077	0,2857	0,2667	0,25
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2,25	2,5	2,75	3	3,25	3,5	3,75	4
2	4	5,06	6,25	7,56	9	10,56	12,25	14,06	16
3	8	11,39	15,63	20,80	27	34,33	42,88	52,73	64
4	16	25,63	39,06	57,19	81	111,57	150,06	197,75	256
5	32	57,67	97,66	157,28	243	362,59	525,22	741,58	1.024
6	64	129,75	244,14	432,51	729	1.178,42	1.838,27	2.780,91	4.096
7	128	291,93	610,35	1.189,40	2.187	3.829,87	6.433,93	10.428,43	16.384
8	256	656,84	1.525,88	3.270,86	6.561	12.447,06	22.518,75	39.106,61	65.536
9	512	1.477,89	3.814,70	8.994,86	19.683	40.452,95	78.815,64	146.649,78	262.144
10	1.024	3.325,26	9.536,74	24.735,86	59.049	131.472,10	275.854,74	549.936,67	1.048.576

Werkblad I

De formule is: $y = 100 \cdot 1,03^x$	Bij $x = 3$ hoort $y = 120,0$ En bij $x = 7$ hoort $y = 97,8$	Per dag neemt de hoeveelheid af met 5%	Het groeipercentage per week is 11,0%
De formule is: $y = 90 \cdot 1,015^x$	Het afnamepercentage per 4 dagen is 11,5%	De formule is: $y = 200 \cdot 0,97^x$	Bij $y = 121$ hoort $x = 2$
De formule is: $y = 100 \cdot 2^x$	Bij $x = 1$ hoort $y = 194$. En bij $x = 2$ hoort $y = 188,2$	De groeifactor per dag is 1,5%	Na dagen is het aantal verviervoudigd
Het groeipercentage is 3% per dag	Bij $y = 99,9$ hoort $x = 7$	Het groeipercentage per week is 23%	De formule is: $y = 140 \cdot 0,95^x$
De groeifactor per week is 1,23	Het groeipercentage per dag is 10%	Bij $y = 114,0$ hoort $x = 4$	Bij $x = 0$ hoort $y = 100$. En bij $x = 7$ hoort $y = 195$
De formule is: $y = 80 \cdot 1,04^x$	Na 9 dagen is het met 24% afgenomen	Bij $y = 101,2$ hoort $x = 6$	Bij $y = 148,0$ hoort $x = 10$
Bij $x = 3$ hoort $y = 90,0$. En bij $x = 4$ hoort $y = 93,6$	De groeifactor per week is 1,95	Bij $y = 6400$ hoort $x = 6$	Bij $x = 7$ is de 10.000 overschreden

Werkblad 2

Rekenen met logaritmen

1 $y = \frac{1}{3}\log(27)$	2 $14 = 2^x$	3 $^{0,1}\log(10) = x$	4 $\sqrt{2}\log(1) = x$	5 $^{x+1}\log(16) = 4$	6 $1 = \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(x+1)$
7 $^x\log(9) = 2$	8 $y = {}^2\log(128)$	9 $2 + {}^3\log(x) = 3\frac{1}{2}$	10 $16^{1,5} = x$	11 $^x\log(\sqrt[3]{x})$	12 $x^3=16$

3,8	64	24	2,5	3	1
-1	$\frac{1}{3}$	5,2	7	-3	0

