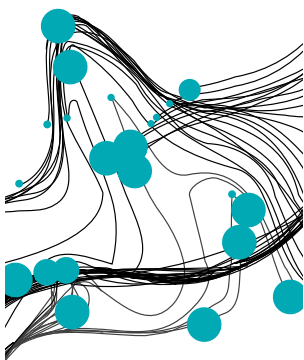




Een lesontwerp over haakjes wegwerken voor 4 havo wis- kunde A leerlingen

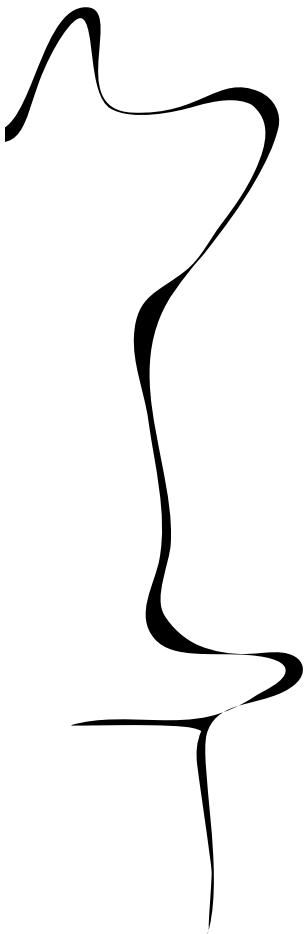
Educatie en Communicatie in de Bètawetenschappen

Onderzoek van onderwijs (10 EC)

27 oktober 2020

Emily Zoetbrood
s1485520

Eerste begeleider: Tom Coenen
Tweede begeleider: Hannie Lensink



Voorwoord

Voor u ligt het verslag *Een lesontwerp over haakjes wegwerken voor 4 havo wiskunde A leerlingen*. Dit verslag is de afronding van het vak Onderzoek van Onderwijs voor de studie Educatie en Communicatie in de Bètawetenschappen aan de Universiteit Twente en is onderdeel van mijn afstuderen aan deze opleiding om een eerstegraads bevoegdheid in de wiskunde te krijgen. Dit onderzoek is begonnen in 2018 toen ik tijdens mijn stage merkte dat leerlingen in 4 havo veel moeite hebben met het wegwerken van haakjes. In september 2019 heb ik de metingen gedaan voor dit onderzoek en het daarop volgende jaar de resultaten verwerkt en geanalyseerd.

Dit verslag werd begeleid door Tom Coenen. Ik wil hem bedanken voor de begeleiding die ik heb gekregen tijdens dit onderzoek. Door zijn vragen en feedback, ben ik aan het denken gezet om het beste eruit te halen wat erin zit. Daarnaast wil ik graag de school bedanken dat ik dit onderzoek bij hun uit heb mogen voeren. De samenwerking was heel erg prettig. Vervolgens wil ik ook mijn vriend, vrienden, ouders en familie bedanken voor hun emotionele steun en de feedback.

Ik wens u veel leesplezier!

Emily Zoetbrood
Enschede, 31 augustus 2020

Samenvatting

Veel leerlingen op de middelbare school, maar ook anderen, hebben moeite met het wegwerken van haakjes. Dit heb ik uit eigen ervaring gemerkt toen ik stage liep en dit onderwerp uitgelegd heb aan leerlingen in 4 havo. Het wegwerken van haakjes is een routinekwestie. Ondanks de routine gaat het toch vaak fout. Daarom is het doel van dit onderzoek: Het ontwerpen van een les om de vaardigheden die nodig zijn voor het wegwerken van haakjes voor leerlingen in 4 havo wiskunde A te verbeteren.

In dit onderzoek wordt de les ontworpen aan de hand van theorie. De meest voorkomende fouten bleken: het verkeerd overschrijven van de opdracht, rekenfouten, geen haakjes om negatieve getallen zetten bij vermenigvuldiging, verkeerd gebruik van de rekenvolgorde en rekenregels, de vraag wordt niet (af)gemaakt of de leerlingen zijn aan het breien. Hierna wordt gekeken of de les ook daadwerkelijk de vaardigheden van de leerlingen verbetert. Hiervoor worden er twee verschillende klassen gebruikt. De ene klas krijgt de ontworpen les en de andere klas volgt het reguliere programma. Twee weken voor de les maken beide groepen een toets. Twee weken na de les maken zij weer een vergelijkbare toets. Deze toetsen worden vervolgens geanalyseerd aan de hand van de gemaakte fouten. Om de analyse in goede banen te leiden zijn er drie onderzoeksvragen opgesteld:

1. Welke van de verwachte fouten maken de leerlingen? En welke andere fouten maken ze nog meer?
2. Wat zijn de verschillen in resultaten tussen de prétoets en posttoets?
3. Wat zijn de verschillen in resultaten tussen de testgroep en controlegroep?

Uit de analyse blijkt dat de testgroep veel vaker vereenvoudigt binnen de haakjes. De controlegroep maakte beide toetsen beter dan de testgroep. Ook groeide de controlegroep harder waardoor dit verschil toenam. De conclusie van dit onderzoek is dat de ontworpen les er niet voor zorgt dat de leerlingen betere vaardigheden ontwikkelen voor het wegwerken van haakjes.

Op basis van de uitkomsten zijn er verschillende aanbevelingen. De eerste is dat de toetsen meer gevarieerd kunnen worden en dat het niveau verhoogd kan worden zodat deze beter aansluit bij de lesmethode. Meerdere toetsmomenten zou ook meer inzicht kunnen geven in hoe goed de vaardigheden blijven hangen bij de leerlingen. De volgende aanbeveling is om de les te herhalen. En dit dan vooral te laten doen door de standaard docent van de klas. Daarnaast zou het onderzoek ook vaker herhaald kunnen worden. Veel verschillende klassen van verschillende scholen door het land heen verkleint waarschijnlijk het niveauverschil tussen beide groepen.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	1
1.1	Probleemstelling	1
1.2	Onderzoeksdoel	2
2	Theoretische achtergrond	3
2.1	Definities	3
2.2	Gemaakte fouten	5
2.3	De les	6
2.4	De toetsen	8
3	Onderzoeksvragen	10
4	Methode	12
	Onderdeel 1: Vooronderzoek	12
	Onderdeel 2: Het opstellen van de toetsen	13
	Onderdeel 3: Het ontwerpen en geven van de les	14
	Onderdeel 4: De analyse van de resultaten	15
5	De les	16
5.1	Vooronderzoek naar de ontwerpeisen	16
5.2	Ontwerpeisen	16
5.3	Ontwerpen	17
6	Resultaten	20
6.1	Gemaakte fouten	20
6.2	Verschil tussen de prétoets en de posttoets	22
6.3	Verschil tussen de testgroep en de controlegroep	23
7	Conclusie	25
8	Discussie	26
8.1	Aanbevelingen	28
	Referenties	30
	Bijlagen	31

1. Inleiding

In dit verslag wordt een onderzoek uitgevoerd met als doel het onderwijs te verbeteren. In deze inleiding zal een probleemstelling uit het onderwijs besproken worden. Hieruit zal een onderzoeksdoel voortkomen. Dit onderzoeksdoel zal in de rest van het verslag onderzocht worden. Na dit onderzoeksdoel zal in de komende hoofdstukken een theoretische achtergrond geschetst worden en zullen er onderzoeksvragen worden opgesteld om het onderzoek in goede banen te kunnen leiden.

1.1. Probleemstelling

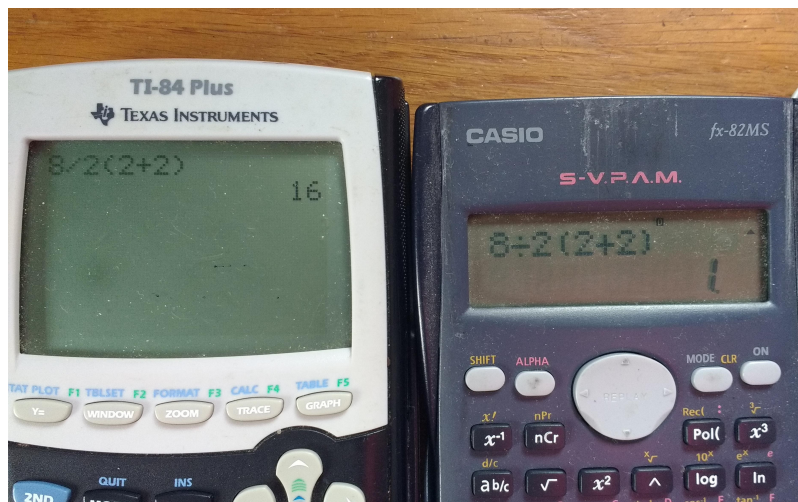
Tijdens mijn stage voor schoolpracticum 2 heb ik lesgegeven aan twee 4 havo wiskunde A klassen. Het eerste hoofdstuk ging over rekenregels en verhoudingen. Hierin moesten leerlingen breuken vereenvoudigen en haakjes wegwerken. Ik merkte dat ondanks dat dit voor het grootste deel herhaling was, de leerlingen hier heel veel moeite mee hadden. Dit bleek later ook in de resultaten op de toetsen. Na informeren bij collega's kwam ik al snel tot de conclusie dat dit niet zozeer een probleem is bij de leerlingen van 4 havo wiskunde A maar bij alle leerlingen van verschillende niveaus. Na wat verder onderzoek bleek dat zelfs in de vervolgopleiding, dit nog steeds een probleem was (Drijvers, Streun & Zwaneveld, 2016). Zo is er ook een artikel in de New York Times, dit artikel werd later overgenomen door de NOS. Hierin werd een Twitter discussie besproken over de volgende formule (Strogatz, 2019)(NOS, 2019):

$$8 \div 2(2 + 2) \tag{1}$$

Er zijn verschillende antwoorden waar mensen op komen, maar de meest voorkomende antwoorden zijn 1 en 16. Zelfs rekenmachines komen tot een ander antwoord, zie figuur 1.1. Het verschil zit hem hier in de rekenvolgorde. De eerste stap is het optellen van de $2 + 2$ binnen de haakjes. Dit levert op $8 \div 2(4)$. Hierna ontstaat er een verschil. Sommigen gaan nu van links naar rechts verder werken en komen dan op 16 uit. Anderen vinden dat door de haakjes je eerst de 2 met de 4 moet vermenigvuldigen en dan kom je op het antwoord 1. In het onderwijssysteem worden de leerlingen rekenvolgordes aangeleerd. Zo heb ik *Hoe Moeten Wij Van De Onvoldoendes Afkomen?* ooit geleerd wat staat voor *Haakjes*, *Machtsverheffen* en *Worteltrekken*, *Vermenigvuldigen* en *Delen*, *Optellen* en *Aftrekken*. Hierin is de gelijkwaardigheid van bijvoorbeeld vermenigvuldigen en delen niet direct duidelijk. Dat is in deze zin wel: *Hé, Mw. v/d Aorta!*. Maar deze rekenvolgordes geven nog steeds geen uitsluitsel over hoe de Twitteropgave opgelost moet worden omdat er nog een gelijkwaardige vermenigvuldiging en een deling over gebleven zijn. Hier zit het hem erin in wat aangeleerd is. Is het aangeleerd om van links naar rechts te werken? Dan kom je uit op 16. Is het aangeleerd om eerst het getal voor de haakjes te vermenigvuldigen met binnen de haakjes, dan kom je uit op 1. Hierdoor is er dus niet één specifiek antwoord te vinden voor deze formule omdat het eraan ligt wat de persoon die hem opgesteld heeft

bedoelde. Zoals het artikel van de New York Times ook stelt: *“No professional mathematician would ever write something so obviously ambiguous. We would insert parentheses to indicate our meaning and to signal whether the division should be carried out first, or the multiplication”* (Strogatz, 2019).

Maar naast de rekenvolgorde zijn er nog zoveel meer problemen die leerlingen hebben met het wegwerken van de haakjes. Leerlingen hebben bijvoorbeeld ook moeite met de rekenregels. Zo passen ze de verkeerde regel toe of onthouden ze de regel niet goed. Daarnaast valt het ook op dat leerlingen weinig ‘gevoel’ hebben voor haakjes. Doordat leerlingen hier zoveel moeite mee hebben en de problemen gevarieerd zijn, roept het bij mij de vraag op of het ligt aan de manier van aanleren. Dit brengt ons tot het onderzoeksdoel.



Figuur 1.1: Twee rekenmachines die een ander antwoord weergeven.

1.2. Onderzoeksdoel

Nu het probleem bekend is, wordt er een onderzoeksdoel gesteld. Als het doel van dit onderzoek bekend is, kan de theoretische achtergrond onderzocht worden. Het doel voor dit onderzoek is: Het ontwerpen van een les om de vaardigheden die nodig zijn voor het wegwerken van haakjes voor leerlingen in 4 havo wiskunde A te verbeteren. Na de theoretische achtergrond worden deelvragen opgesteld om te zorgen dat dit doel behaald wordt.

2. Theoretische achtergrond

Om het onderzoek in goede banen te leiden, is er een theoretische achtergrond nodig. Deze wordt opgesplitst in vier onderdelen. Het eerste onderdeel zijn verschillende, nuttige definities. In het tweede onderdeel worden de gemaakte fouten bij het wegwerken van haakjes besproken. Als derde wordt de theoretische achtergrond over het geven van een les over het wegwerken van haakjes gegeven. Tenslotte wordt er nog een stuk theorie gegeven over hoe een goede toets opgesteld wordt en welke eisen er horen bij het opstellen van de toets.

2.1. Definities

In het lesboek wordt er gesproken over *Werk de haakjes weg en herleid* of *Werk de haakjes weg en vereenvoudig*. Maar een duidelijke definitie van wat dit inhoud wordt niet gegeven. Daarom wordt hieronder kort uitgelegd wat herleiden, vereenvoudigen en haakjes wegwerken betekenen.

2.1.1. Herleiden

Van Dale geeft als betekenis voor herleiden: *in andere (eenvoudiger) vorm uitdrukken* (Van Dale Uitgevers, 2019). Het instituut voor de Nederlandse taal geeft de volgende vijf definities (Instituut voor de Nederlandse taal, 2019):

1. *Opnieuw leiden of voeren*
2. *Terugleiden of -brengen tot de plaats waar iemand of iets van daan komt*
3. *Iets terugbrengen tot, in den zin van het weder maken tot, het weder doen worden datgene wat het vroeger geweest is*
4. *In andere oneigenlijke toepassingen, gelijkbet. met sommige overeenkomstige toepassingen van fra. réduire, eng. to reduce. Iets brengen of maken tot datgene wat in eene bepaling (met tot of (zie b) met in) wordt aangewezen*
5. *(Tot) op iets herleiden komt voor met de bet. van: terugbrengen (t.w. verkleinen, verminderen) tot op het genoemde. (Verg. voor de bet. verkleinen, verminderen, hetzelfde gebruik van het Fra. en Eng. ww.).*

De definitie van Van Dale zal gebruikt worden: *In een andere (eenvoudigere) vorm uitdrukken*.

2.1.2. Vereenvoudigen

Voor vereenvoudigen geeft Van Dale de volgende betekenis: *eenvoudiger maken, in eenvoudiger vorm voorstellen* (Van Dale Uitgevers, 2019). Het instituut voor de Nederlandse taal geeft de volgende definitie: *Eenvoudig(er), makkelijker, minder ingewikkeld, minder gecompliceerd (van vorm) maken* (Instituut voor de Nederlandse taal, 2019). De definitie die gebruikt gaat worden is: *in eenvoudigere vorm voorstellen*.

2.1.3. Haakjes wegwerken

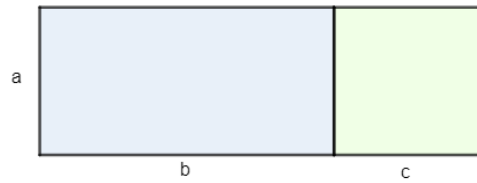
Voor haakjes wegwerken is geen mooie definitie te vinden zoals voor de rest hierboven. Wat met haakjes wegwerken bedoeld wordt is een formule zo herschrijven dat er geen haakjes meer in voorkomen, de haakjes worden dus weg gewerkt. Zodra de haakjes weggewerkt zijn kan een formule herleid of vereenvoudigd worden.

In de onderbouw van de middelbare school wordt haakjes wegwerken meestal uitgelegd aan de hand van oppervlakten. Zie het voorbeeld in figuur 2.1.

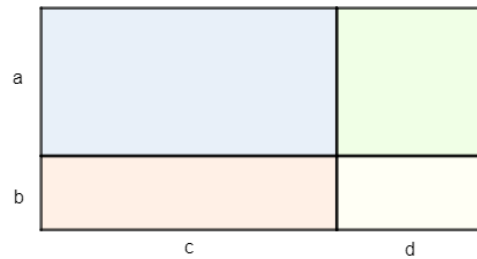
In figuur 2.1a is de oppervlakte van het blauwe rechthoek gelijk aan $a \cdot b$ en die van het groene rechthoek gelijk aan $a \cdot c$. Samen is dat dus $a \cdot b + a \cdot c$. Maar als in één keer de oppervlakte van het grote rechthoek berekend wordt, kan dit in één keer door eerst de lengtes b en c bij elkaar op te tellen en dan wordt de oppervlakte: $a(b + c)$. En door deze twee samen te nemen, wordt aangetoond dat $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Ditzelfde kan gedaan worden voor $(a + b)c$.

In figuur 2.1b is de oppervlakte van het blauwe rechthoek gelijk aan $a \cdot c$. De oppervlakte van het groene rechthoek gelijk aan $a \cdot d$. De oppervlakte van het rode rechthoek gelijk aan $b \cdot c$ en de oppervlakte van het gele rechthoek gelijk aan $b \cdot d$. Samen wordt dit dus: $a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$. Maar dit kan ook in één keer. De lengte is $a + b$ en de breedte is $c + d$, dus de oppervlakte is $(a + b)(c + d)$. En dus wordt aangetoond dat: $(a + b)(c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$.

Nadat dit duidelijk is gemaakt aan de leerlingen komen de vuistregels aan bod. Wanneer deze stof in de bovenbouw weer aan bod komt, worden deze vuistregels herhaald. Deze zien er als volgt uit:



(a) $a(b + c)$



(b) $(a + b)(c + d)$

Figuur 2.1: Voorbeelden met oppervlakten

$$a(b + c) = ab + ac \quad (2)$$

$$(a + b)c = ac + bc \quad (3)$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd \quad (4)$$

Vergelijkingen 2, 3 en 4 kunnen ook aangetoond worden met de zogenoemde “Papegaaienbek-methode”. Hierbij wordt een papegaaienbek, bestaande uit twee boogjes, getekend van het ene getal naar de twee andere getallen waarmee het vermenigvuldigd moet worden. Bij vergelijking 2 en 3 wordt één papegaaienbek getekend, respectievelijk

van de a naar de b en de c en van de c naar de a en de b . Bij vergelijking 4 worden twee papegaaienbekken getekend, van de a naar de c en de d en van de b naar de c en de d . Op deze manier kunnen de leerlingen de boogjes volgen en zien welke getallen ze met elkaar moeten vermenigvuldigen. Deze kunnen ze vervolgens op tellen en hoeven ze alle verschillende regels niet uit hun hoofd te leren, maar slechts de papagaaienbek te onthouden. Deze methode bestaat onder veel verschillende namen die allen op dezelfde manier werken.

2.1.4. Werk de haakjes weg en herleid of Werk de haakjes weg en vereenvoudig

Hiermee wordt bedoeld dat de leerlingen eerst de haakjes weg gaan werken en daarna de vergelijking in een zo eenvoudig mogelijke vorm opschrijven. Beide opdrachten zijn eigenlijk synoniem aan elkaar.

2.2. Gemaakte fouten

Voordat er begonnen kan worden met de rest van het onderzoek, is het van belang om uit te zoeken welke fouten er gemaakt worden met het wegwerken van haakjes. Vanuit de literatuur is een lijst opgesteld met de meest voorkomende fouten van leerlingen (Kostadinov, 2009)(Arcavi, Drijvers & Stacey, 2016):

- Verkeerd overschrijven van de opdracht
- Rekenfouten
- Geen haakjes om negatieve getallen zetten bij vermenigvuldiging
- Verkeerd gebruik van de rekenvolgorde
- Verkeerd gebruik van de rekenregels

Uit eigen ervaring en de ervaring van collega's komen daar de volgende fouten nog bij:

- De vraag niet (af)gemaakt
- Breien

Niet alle veel voorkomende fouten zijn fouten die met een les aan te pakken zijn. Het verkeerd overschrijven van de opdracht of rekenfouten zijn fouten die gemaakt kunnen worden door leerlingen. Als een leerling een opdracht verkeerd overneemt, heeft dit niks te maken met het kunnen uitvoeren van de opdracht of het niet begrijpen van de opdracht. De leerling heeft een andere fout gemaakt waardoor het antwoord fout is, ondanks dat de leerling de stof wel helemaal zou kunnen beheersen. Als een leerling een rekenfout maakt, kan dit betekenen dat de leerling niet begrijpt waar hij of zij mee bezig maar dit kan ook betekenen dat de leerling bijvoorbeeld een optel- of vermenigvuldigfout heeft gemaakt. De andere gemaakte fouten zijn wel fouten waar in de les mee gewerkt kan worden.

Het niet zetten van haakjes om een negatief getal bij vermenigvuldigen lijkt onschuldig. Het probleem zit erin, dat de $\cdot$ dan eenvoudig over het hoofd gezien wordt, en dat de leerling 'vergeet' dat hij bezig was met vermenigvuldigen (Kostadinov, 2009): $2 \cdot (-5) = -10$ wordt $2 - 5 = -3$. Door dit in de les consequent te doen en te benoemen waarom er altijd haakjes om negatieve getallen staan, leer je de leerlingen dit zelf ook toe te passen.

De verkeerde rekenvolgorde gebruiken is zeker een veel voorkomende fout. Dit heb ik zelf ook vaak zien gebeuren. Door de rekenvolgorde te herhalen kan ook deze fout in de les behandeld worden om zo te voorkomen dat deze fout zich herhaalt.

Het verkeerd gebruiken van rekenregels kan in veel verschillende vormen. Zo kunnen leerlingen machten verkeerd gebruiken door bijvoorbeeld $2 \cdot 3^2$ te interpreteren als $(2 \cdot 3)^2$ (Kostadinov, 2009), hier ontstaan haakjes die hier niet horen te zijn, of de haakjes worden verkeerd uitgewerkt zoals bij: $-5(a + b) = -5a + 5b$. Rekenregels zullen dan ook herhaald moeten worden en leerlingen zullen op hun fouten gewezen moeten worden. Al moet hier wel rekening gehouden worden met de gevoelens en houding van de leerling ten opzichte van wiskunde (Arcavi et al., 2016). Voor veel leerlingen is wiskunde een ingewikkeld vak. Hoe vaak sommigen ook oefenen, ze blijven fouten maken. Hierdoor worden ze gefrustreerd en daalt hun zelfvertrouwen en motivatie. Door leerlingen alleen op hun fouten te wijzen zal dit niet beter worden. Een oplossing hiervoor is dat leerlingen de fouten van elkaar gaan proberen te vinden en op die manier leren fouten te herkennen, zowel bij anderen als bij henzelf.

Als een leerling een vraag niet heeft (af)gemaakt, kan dit duiden op tijdsgebrek of het niet begrijpen van de opdracht. Zeker bij het herleiden en vereenvoudigen gebeurt het regelmatig dat een leerling de opdracht niet volledig herleid of vereenvoudigt. Het tijdsgebrek is niet iets waar rekening mee gehouden kan worden in een les. Wel kan er aandacht besteed worden aan efficiënt omgaan met de tijd. Tijdens de les kan wel aandacht besteed worden aan het afmaken van een vraag. Er kan herhaald worden hoe ver leerlingen moeten herleiden of vereenvoudigen.

Breien is het achter elkaar schrijven van wiskunde zonder dat het klopt. Bijvoorbeeld $(3 + 5) \cdot 8$ kan een leerling zo opschrijven: $3 + 5 = 8 \cdot 8 = 64$. Hoewel dit wel fout is, wordt het bij 4 havo wiskunde A niet fout gerekend op bijvoorbeeld het eind examen. In de les is het belangrijk om hier wel aandacht aan te besteden. Ondanks dat niet fout gerekend wordt, is het wel fout en moet het voorkomen worden.

2.3. De les

Om goed de invloed van een les te kunnen onderzoeken, is het belangrijk dat er een groep is die de ontworpen les krijgt en dat er een groep is die de ‘standaard’ les volgt en de controle groep is.

Het wegwerken van haakjes is instrumenteel en routine (Drijvers et al., 2016). Er wordt van leerlingen verwacht dat ze direct herkennen welke kennis of vaardigheden ze moeten gebruiken om tot het eindantwoord te komen. Voor het oplossen van dit type opdrachten zullen de leerlingen feitelijke kennis en algoritmische methoden paraat moeten hebben (Drijvers et al., 2016). Onder deze feitelijke kennis en algoritmische methoden wordt de kennis bedoeld die een leerling moet hebben om een wiskundig probleem op te lossen. Denk hierbij aan kennis van feiten en begrippen, reproduceren en technieken beheersen. Parate kennis helpt om tijdens het oplossen van problemen het werkgeheugen te ontlasten, zodat

er meer capaciteit beschikbaar blijft voor het echte probleem (Drijvers et al., 2016). Door het herhalen van dezelfde onderdelen worden routines gecreëerd: snel op te roepen, feilloos uit te voeren en gememoriseerd. Als een leerling een probleem of situatie na verkenning kan koppelen aan een routine om een deelhandeling bijna automatisch uit te voeren, dan houdt de leerling ruimte over in het werkgeheugen om aan het eigenlijke probleem te werken. Dit alles valt onder de term Symbol Sense (Drijvers et al., 2016)(Drijvers, 2006), wat hieronder verder uitgelegd wordt.

2.3.1. Symbol Sense

Symbol Sense is de algebraïsche expertise of ‘algebraïsche geletterdheid’ die, veelal op de achtergrond zonder dat we ons daar bewust van zijn, de uitvoering van de basisroutines stuurt en het inzicht in onderliggende concepten omvat. Symbol Sense speelt vaak op de achtergrond een rol bij het plannen, coördineren en interpreteren van basisbewerkingen. Symbol Sense bevat de volgende drie met elkaar samenhangende vaardigheden (Drijvers et al., 2016)(Drijvers, 2006):

1. *Strategische vaardigheden en heuristieken* om tot een probleemaanpak of strategie te komen, het vermogen om daarop overzicht te houden, om daarbinnen handige keuzes te maken of, als een strategie vastloopt, om een andere invalshoek te zoeken.
2. Het vermogen om *globaal naar expressies en formules te kijken*, om de structuur van expressies en subexpressies te herkennen, en om de betekenis van symbolen in de context te zien en om expressies op een andere manier weer te geven.
3. Het vermogen tot *algebraïsch redeneren*. Denk hierbij aan kwalitatieve beschouwingen over termen en factoren in expressies, aan symmetrie overwegingen of redeningen met randgevallen.

Als gekeken wordt naar de Symbol Sense vaardigheden voor havoleerlingen met een maatschappijprofiel, gaat het vooral over het doorzien van een eenvoudig algebraïsch model, het kiezen van een oplossingsstrategie en het interpreteren van resultaten. Voor dit specifieke onderzoek zijn de eerste twee punten vooral van toepassing. Symbol Sense laat leerlingen zien hoe vergelijkingen vereenvoudigd kunnen worden op een eenvoudige manier zonder regels toe te passen of de haakjes eerst weg te moeten werken. Bijvoorbeeld bij $(2x + 5) \frac{3x}{2x+5}$ ziet een leerling met Symbol Sense dat de linker term weg gedeeld kan worden door de noemer en dat de teller $3x$ overblijft, of hij ziet bij $74(5x - 7) - 73(5x - 7)$ dat dit vereenvoudigd kan worden naar $(74 - 73)(5x - 7) = 5x - 7$, of bij $5(8x - 3x)$ dat dit $5 \cdot 5x = 25x$ wordt. Leerlingen zonder Symbol Sense zullen hier veel meer moeite mee hebben en waarschijnlijk bij alle opdrachten eerst de haakjes weg gaan werken met de regels van vergelijkingen 2, 3 en 4 die ze hebben geleerd en daarna gaan vereenvoudigen. Dit is geen foute aanpak, maar het kost wel veel meer moeite en energie en het vergroot de kans op fouten.

Symbol Sense heeft niet direct te maken met het wegwerken van haakjes. Toch heeft het wel invloed. Leerlingen met Symbol Sense, zullen zoals beschreven, gelijke termen herkennen en hierdoor minder moeite hebben met het oplossen van opgaven.

2.3.2. Voorbeelden en non-voorbeelden

Vaak als wiskunde wordt uitgelegd, wordt de focus gelegd op het geven van voorbeelden. In het boek (Dijkhuis et al., Elfde editie 2014) worden ook alleen maar voorbeelden gegeven. Met voorbeelden krijgen leerlingen een beeld van wat iets kan zijn. Dit beeld hoeft alleen niet altijd compleet of kloppend te zijn. Dit incomplete of incorrecte beeld worden ook wel misconcepties genoemd. Een voorbeeld van een misconceptie bij het wegwerken van haakjes is bijvoorbeeld dat $2 \cdot 3^2$ gelijk is aan $(2 \cdot 3)^2$ zoals eerder al beschreven (Drijvers et al., 2016)(Kostadinov, 2009). Door ook voorbeelden te geven die niet kloppen, de zogenaamde non-voorbeelden, wordt het begrip voor leerlingen nog meer afgebakend omdat ze niet alleen weten wat het wel is maar ook weten wat het niet is.

2.4. De toetsen

Er zijn over het algemeen twee verschillende soorten toetsen, formatief en summatief (Drijvers et al., 2016). Formatieve toetsen worden gebruikt om het hele proces van leren en onderwijzen te monitoren en bij te sturen. Op basis van informatie uit formatieve toetsen past de docent zijn onderwijs aan. Er kan meer oefening nodig zijn of de gegeven uitleg was niet voldoende. Formatieve toetsing is een onderdeel van het leerproces en geen onderbreking daarvan. Feedback, voor zowel de docent als de leerling, is belangrijk. Summatieve toetsen worden gebruikt om een oordeel te vellen over de mate waarin de leerling de stof beheerst. De scores zetten leerlingen in een bepaalde rangorde en aan de score wordt vaak een oordeel gekoppeld. Summatieve toetsing wordt vaak gebruikt om het einde van het leerproces te beoordelen.

Voor het maken van een kwalitatief goede toets zijn een aantal stappen belangrijk (Drijvers et al., 2016):

1. Vaststellen van de leerdoelen van de toets.
2. Kiezen van een toetsvorm.
3. De vorm van de vragen kiezen.
4. Ontwerpen van de toetsvragen.
5. Toetsvragen gebruiken om de toets op te stellen en het maken van een correctiemodel.
6. Evaluatie van de toets.
7. Bespreken van de toets.

Het vaststellen van de leerdoelen voor de toets, zorgt ervoor dat zowel de docent als de leerling een duidelijk overzicht heeft. Aan de hand van de leerdoelen wordt namelijk de toetsvorm gekozen. Niet elke toetsvorm is geschikt voor elk leerdoel. Het is dus van belang dat deze goed op elkaar aansluiten. Na het kiezen van de toetsvorm is het belangrijk om de vorm van de vragen te kiezen en de toetsvragen te ontwerpen. Niet alle toetsvormen zullen veel vrijheid geven over de vorm van de toetsvraag. Bij een schriftelijke toetsing kan bijvoorbeeld gedacht worden aan open vragen, meerkeuze vragen of lange vragen die uit verschillende onderdelen bestaan. Als de vorm van de vragen bekend zijn, kunnen de verschillende toetsvragen ontworpen worden. Een evenwichtige toets kent een goede

spreiding over de te toetsen wiskundige inhoud en moeilijkheidsgraad. Bij het maken van de toetsvragen is het belangrijk om rekening te houden met de beschikbare hulpmiddelen. Denk hierbij aan het gebruik van een (grafische) rekenmachine, geodriehoek of passer. Nadat de verschillende toetsvragen gemaakt zijn, worden ze samengevoegd tot een toets. Hierbij is het van belang dat er rekening gehouden wordt met de volgorde van de vragen en dat er genoeg variatie zit in de vragen, maar ook dat de toets niet te lang wordt. Vervolgens wordt er een correctiemodel gemaakt. Door het maken van een correctiemodel, kunnen mogelijke fouten opgespoord worden. Ook geeft het uitschrijven van de opdrachten een indicatie over hoeveel tijd de leerlingen kwijt gaan zijn met de toets. Na het afnemen van de toets vindt de evaluatie van de toets plaats. Er wordt gekeken of de toets aan de verwachtingen voldeed. Denk hierbij aan de lengte van de toets, het niveau van de toets of de duidelijkheid van de toets. Tenslotte vindt de toetsbespreking plaats. De resultaten van de toets worden met de leerlingen besproken. Deze stap zal in dit onderzoek niet plaats vinden.

3. Onderzoeksvragen

Het doel van het onderzoek was: Het ontwerpen van een les om de vaardigheden die nodig zijn voor het wegwerken van haakjes voor leerlingen in 4 havo wiskunde A te verbeteren. In de theoretische achtergrond werd al benoemd dat er twee verschillende groepen, de testgroep en controlegroep, en twee verschillende metingen nodig zijn, de nulmeting en effectmeting. De nulmeting wordt in dit onderzoek de prétoets genoemd, en de effectmeting de posttoets. Om te zorgen dat het doel gehaald kan worden zijn er verschillende onderzoeksvragen opgesteld:

1. Welke van de verwachte fouten maken de leerlingen? En welke andere fouten maken ze nog meer?
2. Wat zijn de verschillen in resultaten tussen de prétoets en posttoets?
3. Wat zijn de verschillen in resultaten tussen de testgroep en controlegroep?

Onderzoeksvraag 1: Welke van de verwachte fouten maken de leerlingen? En welke andere fouten maken ze nog meer?

Deze onderzoeksvraag heeft als doel om te controleren of de gemaakte fouten die uit de literatuur komen ook terug te vinden zijn in dit onderzoek. Het is van belang om te kijken of de leerlingen wel de fouten maken die verwacht worden en of er andere fouten voorkomen. Als bekend is welke fouten er gemaakt worden, kan de les beter geanalyseerd worden om te kijken of deze fouten ook daadwerkelijk aan bod komen en kan gekeken worden of het aantal gemaakte fouten minder is na de les. De verwachting is dat alle fouten uit de theoretische achtergrond gemaakt zullen worden door de leerlingen. De verwachting is ook dat daarnaast nog meer fouten voor zullen komen. De fouten uit het theoretische kader zijn slechts de veel voorkomende fouten dus zullen er ook andere fouten voorkomen.

Onderzoeksvraag 2: Wat zijn de verschillen in resultaten tussen de prétoets en posttoets?

Deze onderzoeksvraag heeft als doel om te controleren wat de verbetering in het algemeen over tijd is. Hier wordt ook gekeken naar de opvallende verschillen tussen de prétoets en posttoets. De verwachting is dat het aantal goed beantwoorde vragen toe zal nemen. De leerlingen gaan tussen de toetsen door met de stof bezig en zullen daardoor hun vaardigheden aanscherpen en beter worden in het wegwerken van haakjes. Het aantal overschrijffouten en rekenfouten zal naar verwachting ongeveer gelijk blijven. Overschrijf en rekenfouten hebben vooral te maken met nauwkeurigheid en de oplettendheid van de leerling. Als een leerling meer tijdsdruk ervaart of gehaast te werk gaat zal de leerling meer slordige fouten maken (Kostadinov, 2009). Als het niveau van de toetsen hetzelfde is, zullen de leerlingen dezelfde tijdsdruk ervaren en dus hetzelfde aantal van dit soort fouten maken. Naar verwachting zullen de leerlingen minder fouten maken in het niet zetten van haakjes om negatieve getallen en het verkeerd gebruiken van de rekenvolgorde en de rekenregels.

Onderzoeksvraag 3: Wat zijn de verschillen in resultaten tussen de testgroep en controle-groep?

Bij deze vraag worden de verschillen tussen de testgroep en controlegroep vastgelegd. Er wordt gekeken naar het niveauverschil tussen de groepen bij zowel de prétoets als de posttoets en er zal ook gekeken worden naar de groei die beide groepen doormaken tijdens dit onderzoek. De verwachting is dat er vrijwel geen niveauverschil is tussen beide groepen bij de prétoets. De testgroep zal naar verwachting, door de ontworpen les, in de posttoets beter zijn in het vereenvoudigen binnen de haakjes en hierdoor minder snel fouten maken. Hierdoor zal in de posttoets het verschil tussen beide groepen groter zijn dan de prétoets.

4. Methode

Voor dit onderzoek worden twee 4 havo klassen gebruikt. De ene klas vormt de testgroep. Zij zullen de door mij ontworpen les volgen. De andere klas vormt de controlegroep. Zij zullen het reguliere programma volgen. De testgroep bestaat uit 24 leerlingen en de controlegroep uit 23 leerlingen. Gedurende het onderzoek zijn er verschillende leerlingen afgevallen omdat ze niet aanwezig waren bij een van de onderdelen of omdat zij of hun ouders geen toestemming gaven. Als er geen toestemmingsformulier ingeleverd was, deed de leerling niet mee aan de posttoets. Van de testgroep bleven er 11 leerlingen over en van de controlegroep 15, zie tabel 4.1. In totaal nemen 26 leerlingen deel aan dit onderzoek. Over de verdere samenstelling van de klassen is niks bekend.

Tabel 4.1: Aantal aanwezige leerlingen bij de verschillende onderdelen

	Prétoets	Les	Posttoets	Alles
Testgroep	24	23	13	11
Controlegroep	23	22	15	15
Totaal	47	45	28	26

De onafhankelijke variabele in dit onderzoek is dus de les. Om deze onafhankelijke variabele te testen wordt vooraf een toets afgenomen (de prétoets) en achteraf (de posttoets). De resultaten van de toetsen zijn de controlevariabelen. Om dit goed te onderzoeken wordt het onderzoek opgesplitst in vier onderdelen. Het vooronderzoek, het opstellen van de toetsen, het ontwerpen en geven van de les en de analyse van de resultaten.

Onderdeel 1: Vooronderzoek

Het vooronderzoek begint met het schrijven van de inleiding en probleemstelling (Hoofdstuk 1). Hierna zal het literatuuronderzoek plaatsvinden voor het schrijven van de theoretische achtergrond (Hoofdstuk 2). Hierna worden de onderzoeksvragen opgesteld (Hoofdstuk 3). In het vooronderzoek wordt ook de volgende planning gemaakt:

- Prétoets: schoolweek 2
- Gegeven les: schoolweek 4
- Geobserveerde les: schoolweek 4
- Posttoets: schoolweek 6

Om de vaardigheden van de leerlingen te toetsen is het belangrijk dat de verschillende onderdelen niet te dicht op elkaar volgen. Aan het eind van de les over haakjes, zullen de leerlingen de toets een stuk beter maken dan een paar weken later, omdat het dan nog vers in het geheugen zit. Om zeker te weten dat de stof niet meer in het korte termijngeheugen van de leerlingen zit, zit er twee weken tussen de verschillende onderdelen.

Onderdeel 2: Het opstellen van de toetsen

Om te controleren of de les een verbetering is ten opzichte van de standaard les, is het nodig om de vaardigheden van de leerlingen te testen, dus doormiddel van een summatieve toets. Hiervoor is het van belang dat er een zogeheten nulmeting plaatsvindt. Deze nulmeting meet de vaardigheden van de leerlingen helemaal aan het begin van het onderzoek. Om de vooruitgang van de leerlingen te toetsen, is er een zogeheten effectmeting. Deze effectmeting vindt een geruime tijd na de les plaats.

Voor het opstellen van deze toets wordt het stappenplan uit paragraaf 2.4 gebruikt. Als eerste worden de leerdoelen vastgesteld. De leerdoelen zijn:

- De leerling kent de rekenregels en kan ze toepassen.
- De leerling kent de rekenvolgorde en kan die toepassen.
- De leerling is in staat om haakjes weg te werken in een formule.
- De leerling is in staat om een formule te herleiden.

Deze leerdoelen hebben te maken met basisvaardigheden. Basisvaardigheden zijn het best te toetsen in een schriftelijke overhoring. De bijkomende voordelen zijn dat een schriftelijke overhoring relatief weinig tijd inneemt van een les. Ook is een schriftelijke overhoring voor elke leerling hetzelfde. Een schriftelijke overhoring is ook herhaalbaar wat het ideaal maakt voor dit onderzoek. Beide klassen kunnen dezelfde toets maken.

De derde stap is het kiezen van de vorm van de vragen. Voor het testen van basisvaardigheden zijn reproductievragen het meest geschikt. Bij reproductievragen gaat het om wiskundekennis die een leerling paraat moet hebben om de vragen op te kunnen lossen.

Bij het ontwerpen van de toetsvragen is er gekozen om deze reproductievragen te variëren in moeilijkheid. Zo zijn er vragen met rekenwerk zonder onbekenden. Deze vragen zijn bedoeld om te controleren of de leerlingen met haakjes kunnen werken zonder dat er onbekenden in staan. Ook wordt hiermee getoetst of ze zonder de onbekenden de rekenregels toe kunnen passen en zich aan de rekenvolgorde kunnen houden. Daarnaast zijn er vragen met een onbekende x . Bij deze onbekende zit er variatie in met één paar haakjes of twee paar haakjes.

De verwachting is dat de leerlingen nog geen Symbol Sense hebben, om ze niet te laten ontmoedigen en om ervoor te zorgen dat de leerlingen wel zoveel mogelijk vragen maken zijn de vragen waar gelet wordt op Symbol Sense iets versimpeld ten opzichte van de voorbeelden uit de theorie. Als een bepaalde vraag niet gemaakt wordt, is het achteraf niet te bepalen of het komt omdat de leerling deze vraag niet snapte of omdat de leerling hier geen tijd voor had. Om te voorkomen dat er veel vragen niet gemaakt worden, zijn de voorbeelden iets versimpeld. Een voorbeeld van een vraag waarbij gelet wordt op Symbol Sense is: $(6x + 3)(2 - 3)$. Leerlingen die wel beschikken over Symbol Sense zullen deze snel herkennen als $(6x + 3)(-1) = -6x - 3$ terwijl een leerling zonder Symbol Sense niet zou vereenvoudigen binnen de haakjes en ze helemaal uit zou gaan werken.

Alle opgaven zijn zo gemaakt dat de leerlingen ze met de hand uit zouden moeten kunnen rekenen. Het doel is namelijk te kijken of de leerlingen de haakjes uit kunnen werken en

dus moeten ze de stappen zelf ondernemen. Als de leerlingen met de rekenmachine mogen werken, zullen ze de eerste paar opdrachten direct invullen zonder eerst de haakjes weg te werken en hebben we niks aan de resultaten. Verder is er met het maken van de opdrachten ook opgelet dat er geen bewerkingen van dezelfde gelijkwaardigheid achter elkaar staan om situaties zoals de Twitterdiscussie te voorkomen, beschreven in paragraaf ??.

Bij het opstellen van de toets is ervoor gekozen om de vragen op te laten lopen in moeilijkheid. Hier is voor gekozen om de leerlingen zelfvertrouwen te geven. Als de eerste vragen lukken, zal de leerling het gevoel krijgen dat hij of zij het best goed kan. Bij moeilijke vragen zullen sommige leerlingen al afhaken en misschien niet willen kijken naar de rest van de toets. Dus zijn de moeilijke vragen bewaard voor het einde. In bijlage A is de opgestelde prétoets te zien inclusief de uitwerkingen. Voor het opstellen van de posttoets is ervoor gekozen om alleen de getallen aan te passen. Op die manier wordt ervoor gezorgd dat het niveau gelijk is tussen beide toetsen. De posttoets, inclusief uitwerkingen, is te zien in bijlage D.

De prétoets

De prétoets zal in de tweede schoolweek, week 37, afgenomen gaan worden bij de leerlingen. Dit zijn twee klassen 4 havo wiskunde A. Ze werken met de elfde editie uit 2014 van Getal en Ruimte (Dijkhuis et al., Elfde editie 2014). In de eerste periode gaan de leerlingen het hoofdstuk *Rekenregels en verhoudingen* behandelen. In de vierde paragraaf van dit hoofdstuk wordt haakjes wegwerken en substitueren uitgelegd. Als de prétoets afgenomen wordt, hebben de leerlingen haakjes wegwerken nog niet gehad. De docent van de leerlingen zelf zal de prétoets bij de leerlingen afnemen.

De posttoets

De posttoets zal worden afgenomen in de zesde schoolweek, week 41. Zoals aangegeven zit er dan een ruime twee weken tussen de les en de posttoets om de directe invloed van de les op het kortetermijngeheugen weg te nemen. Ook de posttoets zal door de docent van de leerlingen afgenomen worden.

Onderdeel 3: Het ontwerpen en geven van de les

In dit onderdeel wordt de les ontworpen. Hiervoor zal gebruik gemaakt worden van de literatuur in hoofdstuk 2.3. Bij het maken en geven van de les zal er rekening gehouden moeten worden met de manier waarop normaal dit onderwerp uitgelegd wordt en hoe een standaard les eruitziet. Vanwege de planning op de school, heeft er van te voren overleg plaatsgevonden hoe de standaard les eruit zou zien. Na de gegeven les werd de standaard les geobserveerd om de verschillen duidelijk te krijgen. Voor het ontwerp van de les zie hoofdstuk 5. De gegeven les en de geobserveerde les vinden plaats op maandag 23 september 2019 in schoolweek 4, week 39. De standaard les wordt gegeven door de docent van de leerlingen zelf en de ontworpen les wordt gegeven door de onderzoeker.

Onderdeel 4: De analyse van de resultaten

In dit onderdeel zullen de toetsen nagekeken en geanalyseerd worden. Hier zullen de verschillende onderzoeksvragen beantwoord worden, en zullen conclusies getrokken worden. Verder zal er een statistische analyse uitgevoerd worden. Hiervoor wordt IBM SPSS Statistics 25 (IBM, NY, VS) gebruikt. Voor de verschillen tussen de prétoets en posttoets zal een gepaarde t-toets uitgevoerd worden met een significantie van 5%. De hypothese is dat op de posttoets beter gescoord wordt dan op de prétoets. De gepaarde t-toets is goed om een voor en na situatie met elkaar te vergelijken, in dit geval de prétoets en posttoets. Voor de verschillen tussen de testgroep en controlegroep zal een onafhankelijke t-toets uitgevoerd worden met een significantie van 5%. Er wordt van uit gegaan dat de twee groepen onafhankelijk zijn van elkaar in hun resultaten op de toetsen. Ook wordt ervan uit gegaan dat de resultaten van de groepen normaal verdeeld zijn. Bij deze toetsen is de nulhypothese altijd dat beide groepen gelijk zijn aan elkaar. Als de significantie kleiner is dan 5% of 0.05, mag aangenomen worden dat de groepen niet gelijk zijn aan elkaar.

5. De les

Voor een goed ontwerp moet er gebruik gemaakt worden van een ontwerpcyclus die doorlopen wordt. De eerste cyclus is het vooronderzoek naar de ontwerpeisen. Zodra de ontwerpeisen vastgesteld zijn, begint de tweede cyclus met het daadwerkelijke ontwerp (Van Der Donk & Van Lanen, 2016). De ontwerpcyclus wordt hieronder besproken. Om er zeker van te zijn dat de les gericht is op het verbeteren van de vaardigheden van de leerlingen, is de les ontworpen en gegeven voordat de resultaten van de prétoets bekend waren. Dit zorgt ervoor dat de les los staat van de toetsen en echt gericht is op het verbeteren van de vaardigheden van de leerlingen en niet op betere resultaten op de toets. Zoals in de probleemstelling is beschreven, hebben veel leerlingen nog steeds moeite met het wegwerken van haakjes in de vervolgoopleidingen. Het doel van dit onderzoek is dan ook om de vaardigheden van de leerlingen te testen. Door in de les te focussen op alle mogelijke fouten, en niet alleen op de fouten die in de toets terug komen, verbeter je de algemene vaardigheden van de leerlingen.

5.1. Vooronderzoek naar de ontwerpeisen

Onder het vooronderzoek vallen het oriënteren van het probleem, het uitvoeren van een verdiepende probleemanalyse, het plannen van de uitvoering van het onderzoek en het verzamelen van de data om ontwerpeisen op te stellen. Deze onderdelen zijn in de eerste twee hoofdstukken besproken. Zo is uit de theoretische achtergrond naar voren gekomen dat er meerdere veel voorkomende fouten zijn. Deze fouten kunnen voorkomen worden door de leerlingen Symbol Sense te geven en non-voorbeelden te gebruiken. Door leerlingen de fouten van anderen te laten ontdekken zullen ze een beter beeld krijgen van de gemaakte fouten en zullen ze hun eigen fouten ook beter kunnen ontdekken.

5.2. Ontwerpeisen

De ontwerpeisen worden opgesplitst in verschillende onderdelen. Als eerste zullen er wat organisatorische ontwerpeisen vastgesteld worden. Deze eisen zijn ontstaan vanuit de kenmerken van de school en de leerlingen. Hierna zullen er ontwerpeisen opgesteld worden vanuit de theorie. De ontwerpeisen zijn hieronder gegeven.

Organisatorische ontwerpeisen:

1. Het niveau van de les sluit aan bij leerlingen in 4 havo met wiskunde A.
2. De lesduur is 50 minuten.
3. De les is geschikt voor ongeveer 25 leerlingen.
4. De leerlingen gebruiken de methode Getal & Ruimte, editie 11 uit 2014 (Dijkhuis et al., Elfde editie 2014).
5. De leerlingen hebben van havo A deel 1 hoofdstuk 1 de paragrafen 1 tot en met 3 al behandeld en moeten nog beginnen aan paragraaf 1.4.

6. De les kan uitgevoerd worden met behulp van een digibord of een beamer.

Ontwerpeisen vanuit de theorie:

7. Er wordt rekening gehouden met de drie veelvoorkomende gemaakte fouten.
 - (a) In de les worden er consequent haakjes gezet om negatieve getallen bij vermenigvuldiging.
 - (b) Er wordt benadrukt dat er haakjes om negatieve getallen gezet moeten worden bij de vermenigvuldiging.
 - (c) In de les wordt de juiste rekenvolgorde herhaald en benadrukt.
 - (d) In de les wordt correct gebruik van de rekenregels herhaald en benadrukt.
8. Er wordt aandacht besteed aan Symbol Sense.
 - (a) Er wordt een stappenplan aangereikt aan de leerlingen zodat ze daarmee kunnen oefenen om de strategische vaardigheden bij het wegwerken van haakjes te ontwikkelen.
 - (b) Er wordt aandacht besteed aan het globaal kijken naar een formule om zo de leerlingen te laten zien dat ze niet altijd direct de haakjes uit moeten werken maar dat het soms sneller kan.
9. Er wordt gebruik gemaakt van voorbeelden en non-voorbeelden.
10. Er is ruimte voor de leerlingen om opgaven te maken en te herhalen zodat het wegwerken van haakjes routine wordt.
11. De leerlingen hebben de mogelijkheid om het werk van medeleerlingen na te kijken en te beoordelen en zo de fouten van medeleerlingen te ontdekken en beter worden in het ontdekken van hun eigen fouten.
12. Er moeten duidelijke verschillen zitten tussen de ontworpen les en de standaard les zoals die gegeven wordt.

5.3. Ontwerpen

De lesduur is 50 minuten en dus is er gebruik gemaakt van een lesvoorbereidingsschema om zo de lengte in de gaten te houden, zie bijlage B. Omdat er tijdens de les de beschikking is over een digibord, kies ik ervoor om de les te geven met een PowerPoint. Dit heeft als bijkomend voordeel dat de les hierdoor makkelijk te reproduceren is voor andere docenten. Deze PowerPoint is te zien in bijlage C.

De rode lijn door de les worden de rekenregels. Er wordt begonnen met het ophalen van de voorkennis en de rekenregels. Door het ophalen van de voorkennis wordt het cognitieve schema van de leerlingen uit het lange termijngeheugen naar het korte termijn geheugen gehaald (Drijvers et al., 2016). Deze regels worden stapje voor stapje uitgebreid met haakjes en de regels voor het wegwerken van haakjes. Op deze manier wordt de juiste rekenvolgorde herhaald en benadrukt. In de PowerPoint is er rekening gehouden met de haakjes om negatieve getallen. Er is voor gezorgd dat in een van de voorbeelden een situatie voorkwam waarbij er haakjes om een negatief getal moesten komen te staan om ervoor te

zorgen dat dit tijdens de les benadrukt kon worden.

Er wordt gebruik gemaakt van non-voorbeelden bij de regels. De regels worden behandeld op de foute manier en er wordt uitgelegd waarom dit fout is. Op deze manier zien de leerlingen hoe de rekenregels niet horen en kunnen ze beter afbakenen hoe het wel moet. Zo worden zowel non-voorbeelden gebruikt als wordt extra aandacht besteed aan de rekenregels.

In de rekenregels wordt benadrukt dat de leerlingen eerst moeten kijken of ze kunnen vereenvoudigen op een simpelere manier. Op deze manier wordt een poging gedaan de leerlingen Symbol Sense bij te leren door globaal te kijken naar een formule. De rekenvolgorde geeft de leerling een stappenplan voor de strategische vaardigheden van het wegwerken van haakjes. Maar alleen de rekenvolgorde is niet genoeg om de volledige strategische vaardigheden te ontwikkelen. Zoals in vergelijkingen 2, 3 en 4 al is weergegeven, zijn er al drie verschillende soorten formules met daarin een haakje. De verschillen hiertussen moeten ook in het stappenplan worden opgenomen.

Aan het eind zitten twee opdrachten. De eerste opdracht is bedoeld om de leerlingen de opdrachten te laten herhalen en te zorgen dat het wegwerken van haakjes routine wordt. De tweede opdracht is om leerling nog meer Symbol Sense aan te leren. De leerlingen moeten hierin zelf aan de slag met het maken van opdrachten. Ze moeten ze nu niet alleen maar simpel oplossen maar ook bedenken. Dit is een begripstap extra die voor meer Symbol Sense zorgt. Daarna moeten ze de opdrachten van hun burens maken. Deze uitwerkingen vergelijken ze dan met elkaar en zo ontdekken ze de fouten van zichzelf en anderen.

Hierboven is de les beschreven zoals die het beste zou kunnen op basis van de theorie. Hierna heeft een kort overleg plaatsgevonden met de docent van de leerlingen over wat zijn lesplan was. Dit is gedaan om er voor te zorgen dat er genoeg verschillen zitten tussen de ontworpen les en de standaard les. In de standaard les wordt de stof klassikaal uitgelegd aan de hand van de eerste opdrachten uit het boek. Deze worden gezamenlijk en klassikaal opgelost, hierbij wordt gebruik gemaakt van de “Papagaaienbek-methode” om de haakjes weg te werken. Hierna krijgen de leerlingen de gelegenheid om zelfstandig met de opdrachten aan het werk te gaan en vragen te stellen.

5.3.1. De observatie van de standaard les en de verschillen

De standaard les begon met de lesopening. Hierna werd de stof kort klassikaal uitgelegd. Deze uitleg werd gedaan aan de hand van de eerste opdracht uit het boek. De leerlingen kregen de keuze of ze mee wilden luisteren of niet. Er werd herhaald dat er tussen een getal en een haakje eigenlijk een $\cdot$ staat en er werd met de “Papagaaienbek-methode” gewerkt. Er werd nadruk gelegd op haakjes zetten om negatieve getallen en er werd benadrukt dat gelijksoortige termen bij elkaar opgeteld konden worden.

In tabel 5.1 zijn de ontwerpeisen vanuit de theorie weergegeven. Bij de ontwerpeisen die voorkwamen in de standaard les en de ontwerpeisen die voorkomen in de ontworpen les zijn vinkjes gezet. Op deze manier zijn de verschillen duidelijk. In de standaard les werd

gelijksoortige termen aangehaald en hiermee werd er aandacht besteed aan het globaal kijken naar een formule. Er werd geen aandacht besteed aan het ontwikkelen van de strategische vaardigheden. Ook werd er in de standaard les geen gebruik gemaakt van non-voorbeelden. De leerlingen kregen wel de gelegenheid om zelfstandig te werken maar er werd geen nadruk gelegd om het werk van medeleerlingen na te kijken en te beoordelen.

Tabel 5.1: De verschillende ontwerpeisen vanuit de theorie per les

	Ontwerpeisen	Standaard les	Ontworpen les
7.	Er wordt rekening gehouden met de drie veelvoorkomende fouten		
(a)	In de les worden er consequent haakjes gezet om negatieve getallen bij vermenigvuldiging	✓	✓
(b)	Er wordt benadrukt dat er haakjes om negatieve getallen gezet moeten worden bij de vermenigvuldiging	✓	✓
(c)	In de les wordt de juiste rekenvolgorde herhaald en benadrukt	✓	✓
8.	Er wordt aandacht besteed aan Symbol Sense		
(a)	De strategische vaardigheden bij het wegwerken van haakjes worden besproken		✓
(b)	Er wordt aandacht besteed aan het globaal kijken naar een formule	✓	✓
9.	Er wordt gebruik gemaakt van voorbeelden en non-voorbeelden		
(a)	Er wordt gebruik gemaakt van voorbeelden	✓	✓
(b)	Er wordt gebruik gemaakt van non-voorbeelden		✓
10.	Er is ruimte voor de leerlingen om opgaven te maken en te herhalen	✓	✓
11.	De leerlingen hebben de mogelijkheid om het werk van medeleerlingen na te kijken en te beoordelen		✓

6. Resultaten

In dit hoofdstuk worden de resultaten van het onderzoek besproken. Eerst wordt er een terug koppeling gemaakt naar de gemaakte fouten. Hierna wordt er gekeken naar de verschillen tussen de prétoets en posttoets. Tenslotte wordt er gekeken naar de verschillen tussen de testgroep en controle groep.

6.1. Gemaakte fouten

Tijdens het nakijken van de prétoets zijn er veel meer fouten opgevallen dan de besproken fouten in paragraaf 2.2. De tegengekomen fouten en opvallende dingen zijn:

- Verkeerd overschrijven van de opdracht
- Rekenfouten
- Verkeerd gebruik van de rekenvolgorde
- Verkeerd gebruik van de rekenregels
- Geen haakjes zetten om negatieve getallen bij vermenigvuldiging
- De vraag niet (af)gemaakt of niet volledig herleid
- De opdracht wordt niet herleid maar opgelost voor x
- Verkeerd gebruik van de haakjes
- Niet binnen de haakjes vereenvoudigen
- Breien
- x wordt een $\cdot$ of verdwijnt

Naast de verwachte fouten, waren er ook leerlingen die de vraag niet gingen herleiden maar oplossen. Bij deze leerlingen verscheen er een $= 0$ achter het vraagstuk en gingen ze oplossen voor x . Verder kwam het voor dat leerlingen fouten maakten doordat ze de haakjes niet goed opschreven of vergaten op te schrijven. Voornamelijk bij vraag 31. Hier worden 3 termen met elkaar vermenigvuldigd. Weinig leerlingen hadden deze vraag goed. In figuur 6.1 zijn twee verschillende, veel gemaakte fouten te zien bij het oplossen van vraag 31. De eerste fout is dat er na het vermenigvuldigen van 5 met $(3x - 2)$ geen haakjes gezet werden om $15x - 10$. Hierna werd $(5 + 1)$ alleen vermenigvuldigd met de -10 . Bij deze vraag had de $5 + 1$ ook nog vereenvoudigd kunnen worden naar 6. De tweede fout is dat de termen binnen de haakjes wel met elkaar vermenigvuldigd worden, maar de 5 die voor de haakjes staat niet vermenigvuldigd wordt met de uitkomst maar er bij opgeteld wordt. In figuur 6.2 zijn twee interessante gemaakte fouten te zien bij vraag 31. Hier deden leerlingen hele interessante dingen die onder verschillende fouten passen. Over het algemeen zijn deze fouten samen genomen tot het verkeerd gebruiken van de haakjes.

Hiernaast gebeurde het meerdere keren dat leerlingen niet eerst binnen de haakjes gingen vereenvoudigen. Dit is niet per se een fout waardoor de leerling de vraag niet goed heeft, maar het vergemakkelijkt een opgave wel. Vooral bij een opgave als 27 is dit eenvoudiger: $9 + 5x(17 + 4)$ (prétoets) en $8 + 5x(14 + 7)$ (posttoets). Als er geen variabelen in de vraag voorkwamen, werd het vaak wel vereenvoudigd. Zodra er variabelen voorkwamen, werd

31. $5(3x-2)(5+1) = 15x-10(5+1) = 15x-50-10 = 15x-60$

(a) Vergeten van de haakjes na de eerste vermenigvuldiging

31 $5(3x-2)(5+1)$
 $5+15x+3x-10-2 = -7+18x$

(b) De termen binnen de haakjes worden met elkaar vermenigvuldigd, maar de 5 die ervoor staat wordt er bij opgeteld in plaats van vermenigvuldigd.

Figuur 6.1: Twee verschillende, veel gemaakte fouten bij het oplossen van vraag 31.

31. $5(3x-2)(5+1) = (15x-10)(25+5) = 375x+75x-250-50 = 450x-300$

(a) De eerste 5 wordt vermenigvuldigd met de termen binnen beide haakjes.

51) $5(3x-2)(5+1)$
 $5 \cdot 15x + 3x - 10 - 2$
 $75x + 3x - 10 - 10$
 $78x - 10 - 10$
 $78x - 20$

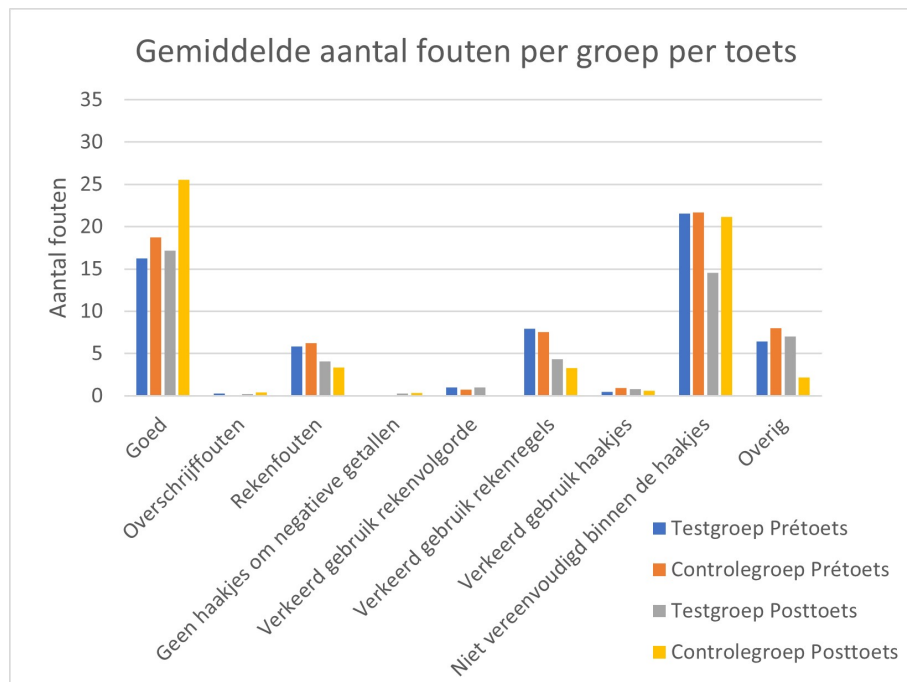
(b) De termen binnen de haakjes worden met elkaar vermenigvuldigd, maar de 5 die ervoor staat wordt alleen met de eerste en laatste term vermenigvuldigd.

Figuur 6.2: Twee interessante gemaakte fouten bij het oplossen van vraag 31.

dit al snel niet meer gedaan en grepen leerlingen terug op de regels. Als laatste gebeurde het dat een x ineens een $\cdot$ werd en de leerling de termen met elkaar ging vermenigvuldigen. Soms verdween de x ook ineens bij leerlingen. Deze twee fouten zijn vergelijkbaar en worden daarom ook samengenomen. De verwachting was dat dit zou gebeuren bij het vergeten van de haakjes om negatieve getallen. Het opvallende was, dat dit vaker gebeurde bij andere getallen dan bij negatieve getallen.

Het is mogelijk dat een leerling meerdere fouten per vraag maakt. Deze worden dan ook allemaal meegenomen. Ook is het mogelijk dat een leerling een vraag goed heeft als de leerling gebreid heeft of als er niet binnen de haakjes vereenvoudigd is. Om de ontworpen les te testen zijn niet alle van de op de vorige pagina staande punten van belang. Wat wel van belang is, zijn de aantal vragen goed gemaakt, de overschrijf- en rekenfouten,

het aantal vragen waarbij er geen haakjes gezet worden om negatieve getallen, verkeerd gebruik van de rekenvolgorde, rekenregels en haakjes en de vragen waarbij de haakjes niet vereenvoudigd worden. De rest van de fouten wordt samengevat onder overig. In figuur 6.3 is een overzicht weergegeven van het aantal fouten per groep en per toets. In tabel 6.1 is zijn de gemiddelden, standaard afwijking en significantie weergegeven van het aantal vragen goed, het aantal rekenfouten en het aantal vragen waarbij niet vereenvoudigd is binnen de haakjes. In bijlage E zijn de tabellen met de gemiddelden, standaardafwijking en significantie weergegeven. Ook zijn hier de figuren met de gemiddelden en standaard afwijking weergegeven per fout. Deze gemiddelden zijn genomen over de leerlingen.



Figuur 6.3: Gemiddelde aantal fouten per groep per toets.

6.2. Verschil tussen de prétoets en de posttoets

In tabel E.1 en figuur E.1 zijn de verschillen in resultaten weergegeven van alle leerlingen tussen de prétoets en posttoets. De resultaten van de testgroep en controlegroep zijn hier samengenomen. Hier is ook de P-waarde weergegeven wat berekend is met een eenzijdige gepaarde t-toets. Het aantal overschrijffouten en rekenfouten zou ongeveer gelijk moeten liggen in beide toetsen. De overschrijffouten verdubbelen en de rekenfouten halveren ongeveer. Dit spreekt elkaar tegen. Alleen het verschil in rekenfouten tussen beide toetsen is significant, $p=0,001$. Dit betekent dat er met 95% zekerheid gezegd kan worden dat het

Tabel 6.1: Gemiddelde aantal waarden $\pm$ de standaardafwijking van het aantal goed beantwoordde vragen, het aantal rekenfouten en het aantal vragen waarbij niet vereenvoudigd is binnen de haakjes.

		Goed	Rekenfouten	Niet vereenvoudigd binnen haakjes
Prétoets		$17,69 \pm 9,44$	$6,08 \pm 2,80$	$21,62 \pm 5,28$
Posttoets		$22 \pm 8,40$	$3,65 \pm 2,67$	$18,35 \pm 8,81$
P-waarde		0,019	0,001	0,034
Testgroep	Pretoets	$16,27 \pm 7,35$	$5,82 \pm 2,60$	$21,55 \pm 6,44$
	Posttoets	$17,18 \pm 9,37$	$4,09 \pm 3,45$	$14,55 \pm 8,19$
	P-waarde	0,681	0,132	0,002
Controlegroep	Pretoets	$18,73 \pm 10,85$	$6,27 \pm 3,01$	$21,67 \pm 4,48$
	Posttoets	$25,53 \pm 5,62$	$3,33 \pm 1,99$	$21,13 \pm 8,43$
	P-waarde	0,013	0,002	0,786
Prétoets	Testgroep	$16,27 \pm 7,35$	$5,82 \pm 2,60$	$21,55 \pm 6,44$
	Controlegroep	$18,73 \pm 10,85$	$6,27 \pm 3,01$	$21,67 \pm 4,48$
	P-waarde	0,522	0,695	0,955
Posttoets	Testgroep	$17,18 \pm 9,37$	$4,09 \pm 3,45$	$14,55 \pm 8,19$
	Controlegroep	$25,53 \pm 5,62$	$3,33 \pm 1,99$	$21,13 \pm 8,43$
	P-waarde	0,009	0,486	0,058

aantal rekenfouten afneemt tussen de toetsen met herhaling van dit experiment. Bij het aantal overschrijffouten kan dit niet gezegd worden. Gemiddeld beantwoorden de leerlingen meer vragen goed in de posttoets dan in de prétoets. Dit verschil, $p=0,019$, is significant. Daarnaast is het ook opvallend dat er in de prétoets altijd haakjes gezet worden om de negatieve getallen, maar in de posttoets niet altijd. Dit is opvallend omdat alleen de getallen aangepast zijn en de $+$ of $-$ gelijk gebleven is. Verder neemt, zoals verwacht, het verkeerd gebruik van de rekenvolgorde, rekenregels en haakjes af. Tenslotte neemt het gemiddelde aantal vragen waarbij niet vereenvoudigen binnen de haakjes significant ($p=0,034$) af.

6.3. Verschil tussen de testgroep en de controlegroep

Om een goed onderscheid te maken tussen de verschillen van de testgroep en de controlegroep, wordt er eerst gekeken naar de verschillen in de prétoets. Daarna wordt er gekeken naar de verschillen in de posttoets. Voor de verschillen tussen de testgroep en de controlegroep wordt een onafhankelijke t-toets gebruikt. Hierna wordt de groei van de testgroep vergeleken met die van de controlegroep. Voor de groei wordt een gepaarde t-toets gebruikt. In tabel E.2 en figuur E.2 zijn de verschillende resultaten weergegeven van de testgroep en de controlegroep in de prétoets. De controlegroep heeft iets meer vragen goed dan

de testgroep. De testgroep maakt ook meer overschrijffouten dan de controlegroep. De controlegroep maakt meer rekenfouten. De testgroep maakt vaker verkeerd gebruik van de rekenvolgorde of de rekenregels terwijl de controlegroep vaker verkeerd gebruik maakt van de haakjes. Het aantal vragen waarbij de haakjes niet vereenvoudigd werden ligt ongeveer gelijk in beide groepen. Geen van onderdelen is significant.

In tabel E.3 en figuur E.3 zijn de verschillende resultaten weergegeven van de testgroep en de controlegroep in de posttoets. Gemiddeld beantwoorde de controlegroep meer vragen goed dan de testgroep. Dit verschil, $p=0,009$ is significant. De controlegroep heeft meer dan twee keer zoveel overschrijffouten gemaakt als de testgroep, terwijl de testgroep meer rekenfouten maakte. Beide groepen zetten ongeveer even vaak geen haakjes om negatieve getallen. De testgroep maakt vaker verkeerd gebruik van de rekenvolgorde, de rekenregels en haakjes. De controlegroep vereenvoudigt veel vaker niet binnen de haakjes dan de testgroep. Bij de overige onderdelen zijn de verschillen niet significant.

In tabel E.4 en figuur E.4 zijn de verschillende resultaten weergegeven van de testgroep in de prétoets en posttoets. Er is een toename te zien in het aantal vragen dat goed beantwoord is. Er is een afname te zien in de overschrijf- en rekenfouten. Er is een toename te zien in het vergeten van de haakjes om negatieve getallen. Het verkeerd gebruiken van de rekenvolgorde is gelijk gebleven. Het verkeerd gebruiken van de rekenregels is ongeveer gelijk gebleven en het verkeerd gebruiken van de haakjes is toegenomen. Het niet vereenvoudigen binnen de haakjes is sterk afgenomen en is significant, $p=0,002$.

In tabel E.5 en figuur E.5 zijn de verschillende resultaten weergegeven van de controlegroep in de prétoets en posttoets. Het aantal goed beantwoorde vragen neemt significant toe, $p=0,013$. Het aantal overschrijffouten neemt sterk toe. Het aantal rekenfouten neemt significant af, $p=0,002$. Het vergeten van haakjes om de negatieve getallen neemt toe. Het verkeerd gebruiken van de rekenvolgorde, rekenregels en haakjes neemt af. Het niet vereenvoudigen binnen de haakjes neemt heel iets af. Het aantal overige fouten neemt significant af, $p=0,043$.

7. Conclusie

In de conclusie zullen eerst de deelvragen beantwoord worden en zal daarna besproken worden of het doel van dit onderzoek gehaald is.

Deelvraag 1: Welke van de verwachte fouten maken de leerlingen? En welke andere fouten maken ze nog meer?

Alle verwachte fouten werden gemaakt door de leerlingen. Al werden er in de prétoets geen overschrijffouten gemaakt. Daarnaast werd de vraag soms niet helemaal gemaakt of niet volledig herleid. Soms werd de opdracht niet herleid maar opgelost voor x . Naast verkeerd gebruik van de rekenregels of rekenvolgorde werden de haakjes ook verkeerd gebruikt. Er waren ook leerlingen die gingen breien. En de x werd een $\cdot$ bij sommige leerlingen of ze vergaten de x in het algemeen.

Deelvraag 2: Wat zijn de verschillen in resultaten tussen de prétoets en posttoets?

Zoals verwacht neemt het aantal goed beantwoorde vragen toe, maar het aantal overschrijffouten en rekenfouten blijft niet gelijk. Omdat ze elkaar tegenspreken, kan er weinig gezegd worden over de tijdsdruk die de leerlingen ervoeren, en dus weinig over het gelijke niveau van de toets. Het verkeerd gebruiken van de rekenregels en rekenvolgorde neemt naar verwachting af. Ook wordt er significant vaker binnen de haakjes vereenvoudigd. Doordat het aantal vragen goed beantwoord significant toe neemt en er geen aanwijzing is dat de tijdsdruk op de leerlingen veranderde tussen de twee toetsen, wordt er geconcludeerd dat het niveau tussen beide toetsen gelijk was.

Deelvraag 3: Wat zijn de verschillen in resultaten tussen de testgroep en controlegroep?

Bij de prétoets kan nergens de nulhypothese verworpen worden en dus kan er niet aangenomen worden dat de groepen verschillen van elkaar. Bij de posttoets kan de nulhypothese verworpen worden bij het aantal vragen goed beantwoord. Hier scoort de controlegroep veel beter. Er kan aangenomen worden dat er verschil zit tussen beide groepen. De verwachting was dat er verschil tussen de groepen zou zitten, maar dan dat de testgroep beter zou scoren en niet de controlegroep. De testgroep vereenvoudigt significant vaker binnen de haakjes, terwijl de controlegroep dit niet doet.

Onderzoeksdoel: Het ontwerpen van een les om de vaardigheden die nodig zijn voor het wegwerken van haakjes voor leerlingen in 4 havo wiskunde A te verbeteren.

De les zorgt er niet voor dat de leerlingen betere vaardigheden ontwikkelen voor het wegwerken van haakjes. Wel zorgt de les ervoor dat de leerlingen beter worden in het vereenvoudigen binnen de haakjes.

8. Discussie

Uit de resultaten blijkt dat de leerlingen uit de testgroep eerder binnen de haakjes zullen vereenvoudigen dan de leerlingen uit de controlegroep. Dit resulteert niet in een algemeen beter resultaat.

Er is een groot aantal punten dat mee kan spelen. Waaronder de toetsen, de les, het niveau-verschil tussen de klassen, de samenstelling van de klassen en de hoeveelheid leerlingen.

Toetsen

Het niveau van de toetsen komt niet helemaal overeen met het niveau dat de leerlingen moeten hebben aan het eind van hoofdstuk 1 in 4 havo wiskunde A. In de toetsen komen bijvoorbeeld geen breuken of kwadraten voor waardoor het niveau van de toetsen lager is dan het niveau wat de leerlingen horen te hebben in dit onderdeel van het hoofdstuk.

Er had meer variatie kunnen zitten in de toetsen. Zo hadden er meer opgaven kunnen zijn die gefocust waren op Symbol Sense. De vragen waren nu redelijk veel van hetzelfde. In de posttoets werden ook overschrijffouten gemaakt. Door de leerlingen de opdracht uit te laten werken op het opgaveblad, zullen deze overschrijffouten wegvallen. In de gehele toets was de variabele x . Voor de variatie, had dit ook een keer een andere letter kunnen zijn. Daarnaast was de posttoets twee weken na de les. De leerlingen zijn in die twee weken kort bezig geweest met deze stof maar daarna verdergegaan met het volgende hoofdstuk. Hierdoor is de verwachting dat het wegwerken van haakjes niet meer in het kortetermijn-geheugen zit. Doordat de leerlingen met andere stof bezig gegaan zijn, is het mogelijk dat de vaardigheden die zijn opgedaan al weer zo ver weggezakt zijn, dat het voor de leerlingen moeilijk is om zich te herinneren hoe het ook al weer zat.

De les

Bij de les waren er ook een aantal punten die invloed hebben gehad. Zo is de les in dit onderzoek niet gegeven door de standaard docent van de leerling. Hierdoor kunnen de leerlingen minder opgeslagen hebben of minder opgelet hebben. De standaard docent van de leerlingen kent de groep en weet wat hij of zij moet doen om de groep gemotiveerd te krijgen. De standaard docent kent de namen van de leerlingen ook en kan de groep zo beter bij de les houden.

Daarnaast werd de les ook gegeven op maandagochtend het eerste uur. Zoals alle docenten weten, zijn de leerlingen dan nog redelijk suf en nemen ze de stof niet altijd even goed op. Dit was ook te merken in het gedrag van de leerlingen. De leerlingen waren redelijk inactief. Er was sterke activatie nodig om de leerlingen aan de opdrachten te krijgen. Het wisselen met de briefjes ging ook niet vanuit de leerlingen zelf. Hierdoor kan het zijn dat de les een veel kleinere impact heeft gehad op de leerlingen dan dat gebeurd zou zijn op een ander moment in de week.

Daarnaast was er een niet kloppende tijdsinschatting in de les. De uitleg van de stof ging veel sneller. De leerlingen hadden hierdoor heel veel tijd om aan de opdrachten te werken

maar ze waren hier niet heel actief in. Daarnaast waren de opdrachten die ze voor zichzelf en hun burens maakten redelijk ingewikkeld met grote getallen. Er was geen regel dat de opdrachten met de hand uitgerekend moesten worden. Ook kwamen er geen vragen van de leerlingen over de uitleg. Hierdoor is het mogelijk dat leerlingen die moeite hadden met de stof niet de hulp hebben gekregen die ze nodig hadden en dus minder geleerd hebben dan mogelijk is.

De opdrachten die de leerlingen voor zichzelf en hun klasgenoten maakten, werden al snel vrij ingewikkeld. Er kwamen duizendtallen en zelfs miljoentallen voor. Er waren wel bepaalde eisen gesteld aan de opdrachten, maar niet dat ze zonder rekenmachine uit te rekenen zouden zijn. Hierdoor werden de te oefenen opdrachten al niet meer representatief voor de toetsen. Het laatste puntje met de les was het niveau van de les. Het niveau van de les sloot aan op de toetsen. Niet zozeer direct op de stof vanuit het boek. Ook waren de klassikale voorbeelden eenvoudiger dan de opdrachten die de leerlingen zelf moesten maken. In de huiswerkopdrachten kwamen kwadraten voor. Dit kwam niet voor in de voorbeelden. Daarnaast zitten in het boek ook opdrachten waarbij de leerlingen ook breuken in de haakjes hebben. Dit kwam in de les helemaal niet terug.

Niveaueverschil tussen de klassen

Tussen beide groepen zat een groot niveaueverschil. Dit verschil was bij de prétoets al duidelijk, maar werd bij de posttoets alleen maar duidelijker. Dit kan zeker van invloed zijn geweest op de resultaten. De leerlingen in de controlegroep hadden gemiddeld in de prétoets al meer vragen goed dan de leerlingen in de testgroep in de posttoets. Het aantal gemaakte fouten met de rekenregels of rekenvolgorde in de testgroep geeft dit ook duidelijk weer. Waar bij de controlegroep eigenlijk geen fouten gemaakt worden met de rekenvolgorde in de posttoets, is dit gemiddeld bij één vraag in de testgroep. De rekenregels gaat bij de testgroep gemiddeld 7,55 keer fout terwijl dit bij de controlegroep 3,27 keer is. Als er gekeken wordt naar de groei van beide groepen, groeit de controlegroep ook veel harder dan de testgroep. Doordat de verschillen versterken, is het de vraag of het probleem van wegwerken van haakjes wel bij het vereenvoudigen binnen de haakjes en Symbol Sense ligt.

Samenstelling van de groepen

Een van de verklaringen voor dit niveaueverschil kan zitten in de samenstellingen van de groepen. In dit onderzoek is de samenstelling niet bekend en dus kan dit niet meegenomen worden in de verwerking en analyse van de resultaten. Het zou kunnen dat in de controlegroep meer leerlingen zitten die 4 havo voor de tweede keer doen of leerlingen die vanaf het VWO afgestroomd zijn. Deze leerlingen hebben de stof dan al een keer extra gehad, daardoor zou het voor hun slechts een extra herhaling zijn in de les dan een herhaling met wat nieuwe stof. Daarnaast is het ook mogelijk dat er leerlingen vanaf het VMBO komen. Hun voorkennis is heel anders dan die van de andere leerlingen. Hierdoor is het aannemelijk dat zij veel meer moeite hebben met de stof. Hiernaast speelt leeftijd ook een

rol. Zittenblijvers zullen ouder zijn en daardoor meer volwassen en ervaren. Leerlingen die een klas over hebben geslagen zijn jonger en minder ervaren.

Over het algemeen hebben leerlingen met wiskunde A een maatschappij-profiel. Een enkeling kan best een natuur-profiel hebben. Welk profiel de leerlingen hebben, en welke vakken ze in hun pakket hebben kan ook nog invloed hebben. Bij een vak als economie of natuurkunde wordt ook veel met formules gewerkt. Hier komt haakjes wegwerken ook in voor. Leerlingen met deze vakken hebben hierdoor meer ervaring en zullen over het algemeen iets beter zijn.

Hoeveelheid leerlingen

De hoeveelheid leerlingen heeft zeker ook een invloed op het onderzoek. Het onderzoek begon met 50 leerlingen maar hier bleven er uiteindelijk slechts 26 van over. Een paar vielen er af doordat ze afwezig waren bij een van de drie onderdelen, maar het over grote deel viel af doordat de toestemmingsformulieren niet ingeleverd werden. Door deze kleine hoeveelheid leerlingen is het lastig om te bepalen of dit onderzoek relevant is voor de grote hoeveelheid havo wiskunde A leerlingen in Nederland.

8.1. Aanbevelingen

Hierboven zijn bij vier onderdelen verschillende punten genoemd die van invloed kunnen zijn geweest op de resultaten van dit onderzoek. Vanuit deze punten worden een aantal aanbevelingen gedaan voor een eventueel vervolgonderzoek.

De eerste aanbevelingen hebben betrekking op de toetsen. Zo kunnen de toetsen gevarieerder worden of kunnen de toetsen een hoger niveau krijgen. Ook zou een extra posttoets, meerdere maanden na het onderzoek gedaan kunnen worden. Hier kan dan gekeken worden of de vaardigheden daadwerkelijk in het langetermijngeheugen terecht gekomen zijn en of er op de lange termijn nog verschillen zit tussen de groepen. Hier moet er wel rekening mee gehouden worden met wat er in de tussentijd gebeurt. Tussen de les en de posttoets waren de leerlingen al met hele andere wiskunde bezig, maar het is interessant om te kijken wat de leerlingen allemaal nog weten, meerdere maanden later. Daarnaast kan het ook interessant zijn om juist direct voor en na de les de leerlingen een toets te geven. Zo is er te zien wat er in het kortetermijngeheugen is blijven hangen.

De volgende aanbevelingen zijn van invloed op de les. Voor een volgend onderzoek zou het interessant zijn om dezelfde les een keer te laten geven door de standaard docent van de leerlingen en om dan te kijken of er nog verschillen zit in de normale les en deze ontworpen les. Daarnaast zou de les vaker in verschillende klassen gegeven kunnen worden om zo te kijken wat het effect was van maandagochtend het eerste uur. Verder zal er ook gekeken moeten worden naar de tijdsinschatting van de les. Door deze les vaker te geven ontstaat er een beter beeld van hoeveel tijd elk onderdeel eventueel kost. Daarnaast zou het een optie ook kunnen zijn om leerlingen, na een paar keer geoefend te hebben met de opdrachten van de zichzelf en hun klasgenoten, de opdrachten in het boek te laten maken. Dit zorgt

er ook voor dat de leerlingen met wat meer verschillende soorten opdrachten gaan oefenen. Bijvoorbeeld ook met breuken.

Er zat een groot niveauverschil tussen beide groepen. Door meer metingen te doen bij meer leerlingen in meer verschillende klassen, bij verschillende docenten en eventueel verschillende scholen zou dit niveauverschil kleiner moeten worden. Hierdoor zullen de resultaten een beter beeld geven over het niveau van alle 4 havo leerlingen. Daarnaast is het ook interessant om naar de samenstelling van de groepen te kijken. In dit onderzoek is hier niet naar gekeken maar dit kan zeker van toegevoegde waarde zijn.

In dit onderzoek is gewerkt vanuit de gemaakte fouten bij de leerlingen en is geprobeerd deze aan te pakken. Het is mogelijk dat het probleem dieper ligt dan alleen maar de gemaakte fouten. Het kan interessant zijn om hier bijvoorbeeld te kijken waarom leerlingen fouten maken. Door bijvoorbeeld een leerling een toets mondeling te laten maken en uitleg te vragen bij alle stappen, kom je erachter hoe de leerling denkt. Hopelijk is het mogelijk om er dan achter te komen waar de oorzaak daadwerkelijk ligt.

Referenties

- Arcavi, A., Drijvers, P. & Stacey, K. (2016). *The learning and teaching of algebra: Ideas, insights and activities*. Routledge.
- Dijkhuis, J., Admiraal, C., Verbeek, J., de Jong, G., Houwing, H., Kuis, J., . . . Cornelisse, I. (Elfde editie 2014). *Getal & Ruimte. Havo A deel 1*. Noordhoff Uitgevers Groningen.
- Drijvers, P. (2006). Algebraïsche basisvaardigheden en symbol sense in de tweede fase van havo en vwo. *Nieuwe Wiskrant*, 25(3), 4–10.
- Drijvers, P., Streun, A. & Zwaneveld, B. (2016). *Handboek wiskundendidactiek*. Epsilon Uitgaven.
- Instituut voor de Nederlandse taal. (2019). *Instituut voor de nederlandse taal*. Verkregen van <https://ivdnt.org/>
- Kostadinov, P. B. (2009). *Mat 0630 internet resources, review of concepts and common mistakes*.
- NOS. (2019, Aug). *Wiskundesommetje leidt tot verhit getwitter*. Auteur. Verkregen van <https://nos.nl/artikel/2296080-wiskundesommetje-leidt-tot-verhit-getwitter.html>
- Strogatz, S. (2019, Aug). *The math equation that tried to stump the internet*. The New York Times. Verkregen van <https://www.nytimes.com/2019/08/02/science/math-equation-pedmas-bemdas-bedmas.html>
- Van Dale Uitgevers. (2019). *Van dale gratis woordenboek*. Verkregen van <https://www.vandale.nl/opzoeken>
- Van Der Donk, C. & Van Lanen, B. (2016). *Praktijkonderzoek in de school*. Bussum: Coutinho.

Bijlagen

Inhoudsopgave

A	Prétoets	32
	Uitwerkingen	33
B	Lesvoorbereidingsformulier	35
C	PowerPoint van de les	36
D	Posttoets	43
	Uitwerkingen	44
E	Tabellen en figuren	46

A. Prétoets

Werk de haakjes weg en herleid.

1. $5 + 7(7 - 2)$
2. $7 - 5(7 - 16)$
3. $(15 - 5)(13 + 8)$
4. $11 + 13(5 - 5)$
5. $17 - 3(5 - 5)$
6. $1 + 3(6 \times 4)$
7. $(2 \times 6)(6 - 2)$
8. $(1 + 3)(1 + 3)$
9. $16 + 5(3 \times 6)$
10. $(1 + 3)(1 - 3)$

11. $x(2 + 3)$
12. $7 - 5(4x + 8)$
13. $9x + 13(3 + 2)$
14. $17 - 6(2 \times 3x)$
15. $9 + 9(3x \times 3)$
16. $(2 + x)(3 - 2)$
17. $19 - (2 + 5)$
18. $3 + (2 + x)$
19. $x - 8(4 + 15)$
20. $13 + 12(4)$

21. $2x - 3(5x + 1)$
22. $(6x + 3)(2 - 3)$
23. $17 - 7x(2 + 8)$
24. $x - x(2 + 3)$
25. $2x + 4(9 - 5)$
26. $17x - 8(3x - 2)$
27. $9 + 5x(17 + 4)$
28. $7x + 3x(1 - 1)$
29. $12 + x(19 - 13)$
30. $5 + 6x - 3(5 + 2x)$

31. $5(3x - 2)(5 + 1)$
32. $(3x - 2) + 5(x - 2)$
33. $10(1x - 5) + 3x(2 + 9)$
34. $10x(9 - 2) + 2x(1 + 13)$
35. $(2x - 3x)(3 - 10)$

Uitwerkingen

1. $5 + 7(7 - 2)$
 $5 + 7(5)$
 $5 + 35$
 40
2. $7 - 5(7 - 16)$
 $7 - 5(-9)$
 $7 + 45$
 52
3. $(15 - 5)(13 + 8)$
 10×21
 210
4. $11 + 13(5 - 5)$
 $11 + 13(0)$
 11
5. $17 - 3(5 - 5)$
 $17 - 3(0)$
 17
6. $1 + 3(6 \times 4)$
 $1 + 3(24)$
 $1 + 72$
 73
7. $(2 \times 6)(6 - 2)$
 $(12)(4)$
 48
8. $(1 + 3)(1 + 3)$
 $(4)(4)$
 16
9. $16 + 5(3 \times 6)$
 $16 + 5(18)$
 $16 + 90$
 106
10. $(1 + 3)(1 - 3)$
 $(4)(-2)$
 -8
11. $x(2 + 3)$
 $x(5)$
 $5x$
12. $7 - 5(4x + 8)$
 $7 - 20x - 40$
 $-33 - 20x$
13. $9x + 13(3 + 2)$
 $9x + 13(5)$
 $9x + 65$
14. $17 - 6(2 \times 3x)$
 $17 - 6(6x)$
 $17 - 36x$
15. $9 + 9(3x \times 3)$
 $9 + 9(9x)$
 $9 + 81x$
16. $(2 + x)(3 - 2)$
 $(2 + x)(1)$
 $2 + x$
17. $19 - (2 + 5)$
 $19 - (7)$
 12
18. $3 + (2 + x)$
 $3 + 2 + x$
 $5 + x$
19. $x - 8(4 + 15)$
 $x - 8(19)$
 $x - 152$
20. $13 + 12(4)$
 $13 + 48$
 61
21. $2x - 3(5x + 1)$
 $2x - 15x - 3$
 $-13x - 3$
22. $(6x + 3)(2 - 3)$
 $(6x + 3)(-1)$
 $-6x - 3$
23. $17 - 7x(2 + 8)$
 $17 - 7x(10)$
 $17 - 70x$
24. $x - x(2 + 3)$
 $x - x(5)$
 $x - 5x$
 $-4x$
25. $2x + 4(9 - 5)$
 $2x + 4(4)$
 $2x + 16$
26. $17x - 8(3x - 2)$
 $17x - 24x + 16$
 $-7x + 16$
27. $9 + 5x(17 + 4)$
 $9 + 5x(21)$
 $9 + 105x$
28. $7x + 3x(1 - 1)$
 $7x + 3x(0)$
 $7x$
29. $12 + x(19 - 13)$
 $12 + x(6)$
 $12 + 6x$
30. $5 + 6x - 3(5 + 2x)$
 $5 + 6x - 15 - 6x$
 -10

-
31. $5(3x - 2)(5 + 1)$
 $5(3x - 2)(6)$
 $(15x - 10)(6)$
 $90x - 60$
32. $(3x - 2) + 5(x - 2)$
 $3x - 2 + 5x - 10$
 $8x - 12$
33. $10(1x - 5) + 3x(2 + 9)$
 $10(1x - 5) + 3x(11)$
 $10x - 15 + 33x$
 $43x - 15$
34. $10x(9 - 2) + 2x(1 + 13)$
 $10x(7) + 2x(14)$
 $70x + 28x$
 $98x$
35. $(2x - 3x)(3 - 10)$
 $(-x)(-7)$
 $7x$

B. Lesvoorbereidingsformulier

Docent: Mevrouw Zoetbrood **Datum:** 23-09-2019 **School:** CSG het Noordik locatie Noordikslaan
Tijd: 8.30-9.20 **Klas:** 4 havo wiskunde A
Leerboek: G&R havo A deel 1 **Onderdeel:** 1.4: Haakjes en substitutie Theorie A: Haakjes wegwerken

Beginsituatie:**Onderwerp:** Haakjes wegwerken**Doelstelling:** De leerlingen begrijpen hoe ze haakjes weg moeten werken**Hulpmiddelen:** Beamer met PowerPoint

Onderwijsfuncties	Docent	Leerlingen	Slide	Tijd
Openen	Leerlingen welkom heten. Uitleggen wat het doel van de les is.		1	8.30-8.35
Ophalen voorkennis	Herhalen van de rekenvolgordes (Vermenigvuldigen & delen, optellen & aftrekken).		2	8.35-8.37
Introductie haakjes	Laten zien dat haakjes voor een ander antwoord kunnen zorgen.		3	8.37-8.40
Rekenvolgorde uitbreiden met haakjes	Benoemen dat de rekenvolgorde uitgebreid wordt met de haakjes.		4	8.40-8.42
Oefenen met haakjes	De eerste paar opdrachten klassikaal behandelen met de klas.		5	8.42-8.45
Introductie van de nieuwe regels	Klassikaal de nieuwe regels introduceren aan de hand van voorbeelden.		5	8.45-8.48
Nieuwe regels invoeren in de rekenvolgorde	Herhalen van de rekenvolgorde met de nieuwe regels erbij.		6	8.48-8.50
Gebruik van non-voorbeeld om duidelijk te maken dat de regels alleen gelden voor optellen en aftrekken.	Doormiddel van een voorbeeld en een non-voorbeeld laten zien dat dit alleen geldt voor optellen en aftrekken van getallen. Niet voor vermenigvuldigen en delen.		7	8.50-8.55
Zelfstandig opdrachten maken	De leerlingen zelfstandig aan het werk zetten met de opdrachten van de slide	De opdrachten op de slide gaan maken	8	8.55-9.00
Uitwisselopdracht	De volgende opdracht uitleggen	Aan de opdracht werken	9	9.00-9.15
Les afsluiten	De les klassikaal afsluiten met het herhalen van de rekenvolgorde en het innemen van de briefjes van de leerlingen daarop gemaakte vragen in de tweede opdracht		10	9.15-9.20

C. PowerPoint van de les



3

Rekenvolgorde 1 – even oefenen

- Vermenigvuldigen & delen
 - Optellen & aftrekken
-
- $2 + 6 \times 4$
 - $2 + 24 = 26$
-
- $(2 + 6) \times 4$
 - $8 \times 4 = 32$ ■ $2 \times 4 + 6 \times 4$

3

Rekenvolgorde 1 – even oefenen

- Vermenigvuldigen & delen
 - Optellen & aftrekken
-
- $2 + 6 \times 4$
 - $2 + 24 = 26$
-
- $(2 + 6) \times 4$
 - $8 \times 4 = 32$ ■ $2 \times 4 + 6 \times 4$
 - $8 + 24 = 32$

4

Rekenvolgorde 2

- Haakjes wegwerken
- Vermenigvuldigen & delen
- Optellen & aftrekken

5

Rekenvolgorde 2 – even oefenen

- $2 + 6 \times 4x$

5

Rekenvolgorde 2 – even oefenen

- $2 + 6 \times 4x$
- $2 + 24x$

5

Rekenvolgorde 2 – even oefenen

- $2 + 6 \times 4x$
- $2 + 24x$
- $2 + (6 \times 4x)$

5

Rekenvolgorde 2 – even oefenen

- 2 + 6 × 4x
- 2 + 24x
- 2 + (6 × 4x)
- 2 + 24x

5

Rekenvolgorde 2 – even oefenen

- 2 + 6 × 4x
- 2 + 24x
- 2 + (6 × 4x)
- 2 + 24x
- (2 + 6) × 4x

5

Rekenvolgorde 2 – even oefenen

- 2 + 6 × 4x
- 2 + 24x
- 2 + (6 × 4x)
- 2 + 24x
- (2 + 6) × 4x
- 8 × 4x = 32x

5

Rekenvolgorde 2 – even oefenen

- 2 + 6 × 4x
- 2 + 24x
- 2 + (6 × 4x)
- 2 + 24x
- (2 + 6) × 4x
- 8 × 4x = 32x
- 2x + 6 × (-4)

5

Rekenvolgorde 2 – even oefenen

- 2 + 6 × 4x
- 2 + 24x
- 2 + (6 × 4x)
- 2 + 24x
- (2 + 6) × 4x
- 8 × 4x = 32x
- 2x + 6 × (-4)
- 2x - 24
- 2x + (6 × (-4))

5

Rekenvolgorde 2 – even oefenen

- 2 + 6 × 4x
- 2 + 24x
- 2 + (6 × 4x)
- 2 + 24x
- (2 + 6) × 4x
- 8 × 4x = 32x
- 2x + 6 × (-4)
- 2x - 24
- 2x + (6 × (-4))

5

Rekenvolgorde 2 – even oefenen

- $2 + 6 \times 4x$
- $2 + 24x$
- $2 + (6 \times 4x)$
- $2 + 24x$
- $(2 + 6) \times 4x$
- $8 \times 4x = 32x$
- $2x + 6 \times (-4)$
- $2x - 24$
- $2x + (6 \times (-4))$
- $2x - 24$
- $(2x + 6) \times (-4)$

5

Rekenvolgorde 2 – even oefenen

- $2 + 6 \times 4x$
- $2 + 24x$
- $2 + (6 \times 4x)$
- $2 + 24x$
- $(2 + 6) \times 4x$
- $8 \times 4x = 32x$
- $2x + 6 \times (-4)$
- $2x - 24$
- $2x + (6 \times (-4))$
- $2x - 24$
- $(2x + 6) \times (-4)$

5

Rekenvolgorde 2 – even oefenen

- $2 + 6 \times 4x$
- $2 + 24x$
- $2 + (6 \times 4x)$
- $2 + 24x$
- $(2 + 6) \times 4x$
- $8 \times 4x = 32x$
- $2x + 6 \times (-4)$
- $2x - 24$
- $2x + (6 \times (-4))$
- $2x - 24$
- $(2x + 6) \times (-4)$

Binnen de haakjes kan het niet vereenvoudigd worden!
Dus regels:
 $a(b + c) = ab + ac$
 $(a + b)c = ac + bc$

5

Rekenvolgorde 2 – even oefenen

- $2 + 6 \times 4x$
- $2 + 24x$
- $2 + (6 \times 4x)$
- $2 + 24x$
- $(2 + 6) \times 4x$
- $8 \times 4x = 32x$
- $2x + 6 \times (-4)$
- $2x - 24$
- $2x + (6 \times (-4))$
- $2x - 24$
- $(2x + 6) \times (-4)$
- $2x \times (-4) + 6 \times (-4)$
- $-8x - 24$

Binnen de haakjes kan het niet vereenvoudigd worden!
Dus regels:
 $a(b + c) = ab + ac$
 $(a + b)c = ac + bc$

5

Rekenvolgorde 2 – even oefenen

- $2 + 6 \times 4x$
- $2 + 24x$
- $2 + (6 \times 4x)$
- $2 + 24x$
- $(2 + 6) \times 4x$
- $8 \times 4x = 32x$
- $2x + 6 \times (-4)$
- $2x - 24$
- $2x + (6 \times (-4))$
- $2x - 24$
- $(2x + 6) \times (-4)$
- $2x \times (-4) + 6 \times (-4)$
- $-8x - 24$

Binnen de haakjes kan het niet vereenvoudigd worden!
Dus regels:
 $a(b + c) = ab + ac$
 $(a + b)c = ac + bc$
■ $(2x + 6)(4x + 8)$

5

Rekenvolgorde 2 – even oefenen

- $2 + 6 \times 4x$
- $2 + 24x$
- $2 + (6 \times 4x)$
- $2 + 24x$
- $(2 + 6) \times 4x$
- $8 \times 4x = 32x$
- $2x + 6 \times (-4)$
- $2x - 24$
- $2x + (6 \times (-4))$
- $2x - 24$
- $(2x + 6) \times (-4)$
- $2x \times (-4) + 6 \times (-4)$
- $-8x - 24$

Binnen de haakjes kan het niet vereenvoudigd worden!
Dus regels:
 $a(b + c) = ab + ac$
 $(a + b)c = ac + bc$
■ $(2x + 6)(4x + 8)$

Nu dubbele haakjes dus nieuwe regel:
 $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

5

Rekenvolgorde 2 – even oefenen

- $2 + 6 \times 4x$
- $2 + 24x$
- $2 + (6 \times 4x)$
- $2 + 24x$
- $(2 + 6) \times 4x$
- $8 \times 4x = 32x$
- $2x + 6 \times (-4)$
- $2x - 24$
- $2x + (6 \times (-4))$
- $2x - 24$
- $(2x + 6) \times (-4)$
- $2x \times (-4) + 6 \times (-4)$
- $-8x - 24$

Binnen de haakjes kan het niet vereenvoudigd worden!
Dus regels:

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)c = ac + bc$$

$$(2x + 6)(4x + 8)$$

$$8x^2 + 16x + 24x + 48$$

$$8x^2 + 40x + 48$$

Nu dubbele haakjes dus nieuwe regel:
 $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

6

Rekenvolgorde 3

- Haakjes wegwerken
 - Eerst binnen de haakjes vereenvoudigen als dat kan
 - Anders:
 - $a(b + c) = ab + ac$
 - $(a + b)c = ac + bc$
 - $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- Vermenigvuldigen & delen
- Optellen & aftrekken

7

$$a(b + c) = ab + ac$$

- $6(2x + 2)$

7

$$a(b + c) = ab + ac$$

- $6(2x + 2)$
- $12x + 12$

7

$$a(b + c) = ab + ac$$

- $6(2x + 2)$
- $12x + 12$

7

$$a(b + c) = ab + ac$$

- $6(2x + 2)$
- $12x + 12$
- $3(2 \times 5x)$
- $6 \times 15x$
- $45x$

7

$a(b + c) = ab + ac$

- 6(2x + 2)
- 12x + 12
- 3(2 × 5x)
- 6 × 15x
- 45x
- 3(10x)
- 30x

7

$a(b + c) = ab + ac$

- 6(2x + 2)
- 12x + 12
- 3(2 × 5x)
- 6 × 15x
- 45x
- 3(10x)
- 30x
- 3(2 × 5x) = 90
- 6 × 15x = 90
- 45x = 90
- x = 2
- 3(10x) = 90
- 30x = 90
- x = 3

7

$a(b + c) = ab + ac$

- 6(2x + 2)
- 12x + 12
- 3(2 × 5x)
- 6 × 15x
- 45x
- 3(10x)
- 30x
- 3(2 × 5x) = 90
- 6 × 15x = 90
- 45x = 90
- x = 2
- 3(10x) = 90
- 30x = 90
- x = 3
- 3(2 × (5 × 2))
- 3(2 × 10)
- 3 × 20 = 60
- 3(2 × (5 × 3))
- 3(2 × 15)
- 3 × 30 = 90

7

$a(b + c) = ab + ac$

- 6(2x + 2)
- 12x + 12
- 3(2 × 5x)
- 6 × 15x
- 45x
- 3(10x)
- 30x
- 3(2 × 5x) = 90
- 6 × 15x = 90
- 45x = 90
- x = 2
- 3(10x) = 90
- 30x = 90
- x = 3
- 3(2 × (5 × 2))
- 3(2 × 10)
- 3 × 20 = 60
- 3(2 × (5 × 3))
- 3(2 × 15)
- 3 × 30 = 90

7

$a(b + c) = ab + ac$

- 6(2x + 2)
- 12x + 12
- 3(2 × 5x)
- 6 × 15x
- 45x
- 3(10x)
- 30x
- 3(2 × 5x) = 90
- 6 × 15x = 90
- 45x = 90
- x = 2
- 3(10x) = 90
- 30x = 90
- x = 3
- 3(2 × (5 × 2))
- 3(2 × 10)
- 3 × 20 = 60
- 3(2 × (5 × 3))
- 3(2 × 15)
- 3 × 30 = 90

8

$a(b + c) = ab + ac$
 Wat als c negatief is?

- 6(2x - 2)

8

$a(b + c) = ab + ac$
Wat als c negatief is?

- $6(2x - 2)$
- $6(2x + (-2))$
- $12x + (-12)$
- $12x - 12$

9

Zelf aan de slag

- | | |
|--------------------------|-------------------------------------|
| 1. $5(3 - 2)$ | 6. $4(x - 2) - (x + 1)$ |
| 2. $3 + (5x - 2x)$ | 7. $(3a - 4)(8a - 2)$ |
| 3. $5(x - 4)$ | 8. $5b(8 - 2b) + 3(4b - 2b)$ |
| 4. $8x + 3(x - 2)$ | 9. $(6e + 9)^2 - 3e + 2$ |
| 5. $7(x - 5) + 6(x - 8)$ | 10. $(5p + 6)(8p + 1) + (3p + 5)^2$ |

10

Zelf aan de slag

- Maak 5 opdrachten voor je buurman/vrouw
 - Er zit 2x een stel haakjes in
 - Er zit maar 1 letter in
- Bijvoorbeeld: $8(x + 6) - 9(x - 4)$
- Dus niet:
 - $8(x + 6)$
 - $8(x + 6) - 9(y - 4)$
- Heb je er beiden 5 gemaakt, wissel dan door en maak de opdrachten van je buurman/vrouw.
- Ben je klaar?
 - Wissel door met de mensen voor of achter je

11

Rekenvolgorde

- Haakjes wegwerken
 - Eerst binnen de haakjes vereenvoudigen als dat kan
 - Anders:
 - $a(b + c) = ab + ac$
 - $(a + b)c = ac + bc$
 - $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- Vermenigvuldigen & delen
- Optellen & aftrekken

12

Zelf aan de slag – antwoorden

- | | |
|---|---|
| 1. $5(3 - 2) = 5 \times 1 = 5$ | 6. $4(x - 2) - (x + 1) = 4x - 8 - x - 1 = 3x - 9$ |
| 2. $3 + (5x - 2x) = 3 + 3x$ | 7. $(3a - 4)(8a - 2) = 24a^2 - 6a - 32a + 8 = 24a^2 - 39a + 8$ |
| 3. $5(x - 4) = 5x - 20$ | 8. $5b(8 - 2b) + 3(4b - 2b) = 40b - 10b^2 + 3(2b) = 40b - 10b^2 + 6b = 46b - 10b^2$ |
| 4. $8x + 3(x - 2) = 8x + 3x - 6 = 11x - 6$ | 9. $(6e + 9)^2 - 3e + 2 = 36e^2 + 108e + 81 - 3e + 2 = 36e^2 + 105e + 83$ |
| 5. $7(x - 5) + 6(x - 8) = 7x - 35 + 6x - 48 = 13x - 83$ | 10. $(5p + 6)(8p + 1) + (3p + 5)^2 = 40p^2 + 5p + 48p + 6 + 9p^2 + 30p + 25 = 49p^2 + 83p + 31$ |

D. Posttoets

Werk de haakjes weg en herleid.

1. $7 + 5(5 - 2)$
2. $5 - 7(6 - 17)$
3. $(18 - 8)(16 + 5)$
4. $17 + 15(8 - 8)$
5. $17 - 3(3 - 3)$
6. $6 + 4(3 \times 8)$
7. $(3 \times 4)(4 - 3)$
8. $(2 + 5)(2 + 5)$
9. $8 + 5(3 \times 7)$
10. $(4 + 3)(3 - 4)$

11. $x(6 + 3)$
12. $7 - 6(6x + 2)$
13. $8x + 10(3 + 4)$
14. $19 - 8(2 \times 4x)$
15. $4 + 6(3x \times 3)$
16. $(4 + x)(9 - 2)$
17. $17 - (3 + 4)$
18. $2 + (3 + x)$
19. $2x - 7(8 + 11)$
20. $18 + 12(6)$

21. $4x - 5(3x + 1)$
22. $(5x + 3)(5 - 6)$
23. $17 - 8x(3 + 7)$
24. $x - x(4 + 3)$
25. $3x + 6(8 - 4)$
26. $17x - 6(4x - 2)$
27. $8 + 5x(14 + 7)$
28. $9x + 5x(8 - 8)$
29. $19 + x(18 - 12)$
30. $6 + 8x - 5(3 + 4x)$

31. $6(4x - 2)(4 + 2)$
32. $(3x - 2) + 5(x - 2)$
33. $10(2x - 5) + 3x(3 + 9)$
34. $10x(8 - 2) + 2x(2 + 13)$
35. $(6x - 7x)(5 - 12)$

Uitwerkingen

1. $7 + 5(5 - 2)$
 $7 + 5(3)$
 $7 + 15$
 22
2. $5 - 7(6 - 17)$
 $5 - 7(-11)$
 $5 + 77$
 82
3. $(18 - 8)(16 + 5)$
 $(10)(21)$
 210
4. $17 + 15(8 - 8)$
 $17 + 15(0)$
 17
5. $17 - 3(3 - 3)$
 $17 - 3(0)$
 17
6. $6 + 4(3 \times 8)$
 $6 + 4(24)$
 $6 + 96$
 102
7. $(3 \times 4)(4 - 3)$
 $(12)(-1)$
 -12
8. $(2 + 5)(2 + 5)$
 $(7)(7)$
 49
9. $8 + 5(3 \times 7)$
 $8 + 5(21)$
 $8 + 105$
 113
10. $(4 + 3)(3 - 4)$
 $(7)(-1)$
 -7
11. $x(6 + 3)$
 $x(9)$
 $9x$
12. $7 - 6(6x + 2)$
 $7 - 36x - 12$
 $-5 - 36x$
13. $8x + 10(3 + 4)$
 $8x + 10(7)$
 $8x + 70$
14. $19 - 8(2 \times 4x)$
 $19 - 8(8x)$
 $19 - 16x$
15. $4 + 6(3x \times 3)$
 $4 + 6(9x)$
 $4 + 54x$
16. $(4 + x)(9 - 2)$
 $(4 + x)(7)$
 $28 + 7x$
17. $17 - (3 + 4)$
 $17 - (7)$
 10
18. $2 + (3 + x)$
 $2 + 3 + x$
 $5 + x$
19. $2x - 7(8 + 11)$
 $2x - 7(19)$
 $2x - 133$
20. $18 + 12(6)$
 $18 + 72$
 90
21. $4x - 5(3x + 1)$
 $4x - 15x - 5$
 $-11x - 5$
22. $(5x + 3)(5 - 6)$
 $(5x + 3)(-1)$
 $-5x - 3$
23. $17 - 8x(3 + 7)$
 $17 - 8x(10)$
 $17 - 80x$
24. $x - x(4 + 3)$
 $x - x(7)$
 $x - 7x$
 $-6x$
25. $3x + 6(8 - 4)$
 $3x + 6(4)$
 $3x + 24$
26. $17x - 6(4x - 2)$
 $17x - 24x + 12$
 $-7x + 12$
27. $8 + 5x(14 + 7)$
 $8 + 5x(21)$
 $8 + 105x$
28. $9x + 5x(8 - 8)$
 $9x + 5x(0)$
 $9x$
29. $19 + x(18 - 12)$
 $19 + x(6)$
 $19 + 6x$
30. $6 + 8x - 5(3 + 4x)$
 $6 + 8x - 15 - 20x$
 $-9 - 12x$

-
31. $6(4x - 2)(4 + 2)$
 $6(4x - 2)(6)$
 $(24x - 12)(6)$
 $144x - 72$
32. $(3x - 2) + 5(x - 2)$
 $3x - 2 + 5x - 10$
 $8x - 12$
33. $10(2x - 5) + 3x(3 + 9)$
 $10(2x - 5) + 3x(12)$
 $20x - 50 + 36x$
 $56x - 50$
34. $10x(8 - 2) + 2x(2 + 13)$
 $10x(6) + 2x(15)$
 $60x + 30x$
 $90x$
35. $(6x - 7x)(5 - 12)$
 $(-x)(-7)$
 $7x$

E. Tabellen en figuren

Tabellen overzicht

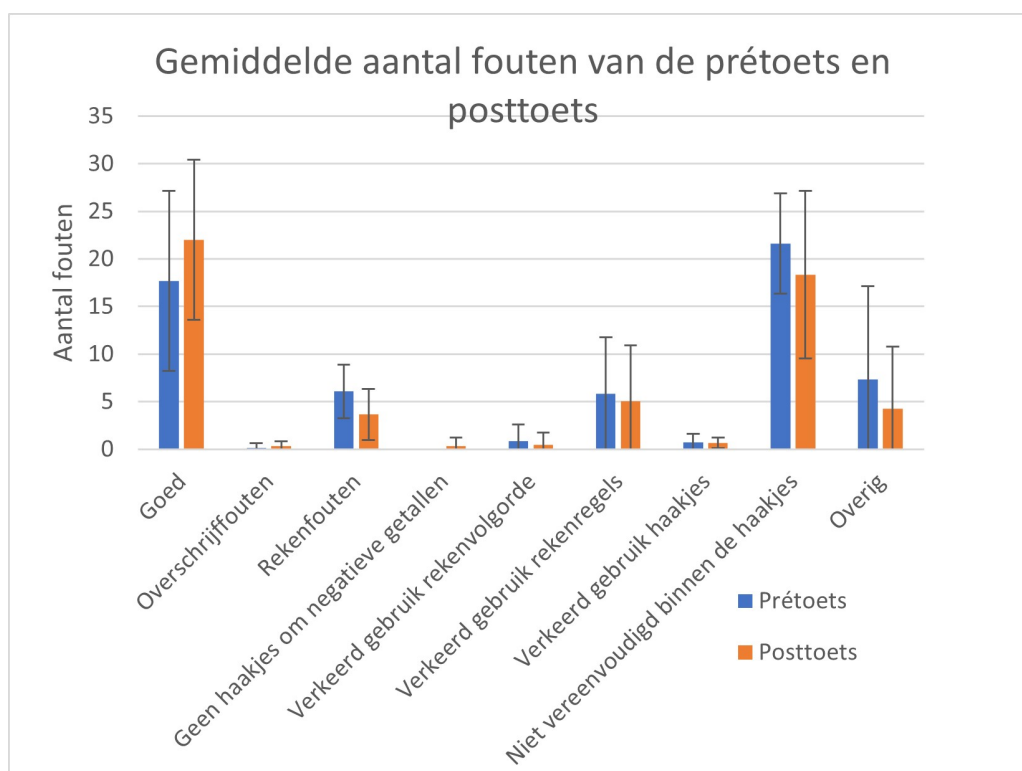
E.1	Het gemiddelde aantal fouten $\pm$ de standaardafwijking van de verschillende onderdelen tussen de prétoets en posttoets	47
E.2	Het gemiddelde aantal fouten $\pm$ de standaardafwijking van de verschillende onderdelen in de prétoets tussen de testgroep en de controlegroep	48
E.3	Het gemiddelde aantal fouten $\pm$ de standaardafwijking van de verschillende onderdelen in de posttoets tussen de testgroep en de controlegroep	49
E.4	Het gemiddelde aantal fouten $\pm$ de standaardafwijking van de verschillende onderdelen van de testgroep	50
E.5	Het gemiddelde aantal fouten $\pm$ de standaardafwijking van de verschillende onderdelen van de controlegroep	51

Figuren overzicht

E.1	De verschillen tussen de prétoets en posttoets.	47
E.2	De verschillen tussen de testgroep en controlegroep van de prétoets	48
E.3	De verschillen tussen de testgroep en controlegroep van de posttoets	49
E.4	De verschillen tussen de prétoets en posttoets van de testgroep	50
E.5	De verschillen tussen de prétoets en posttoets van de controlegroep	51

Tabel E.1: Het gemiddelde aantal fouten $\pm$ de standaardafwijking van de verschillende onderdelen tussen de prétoets en posttoets

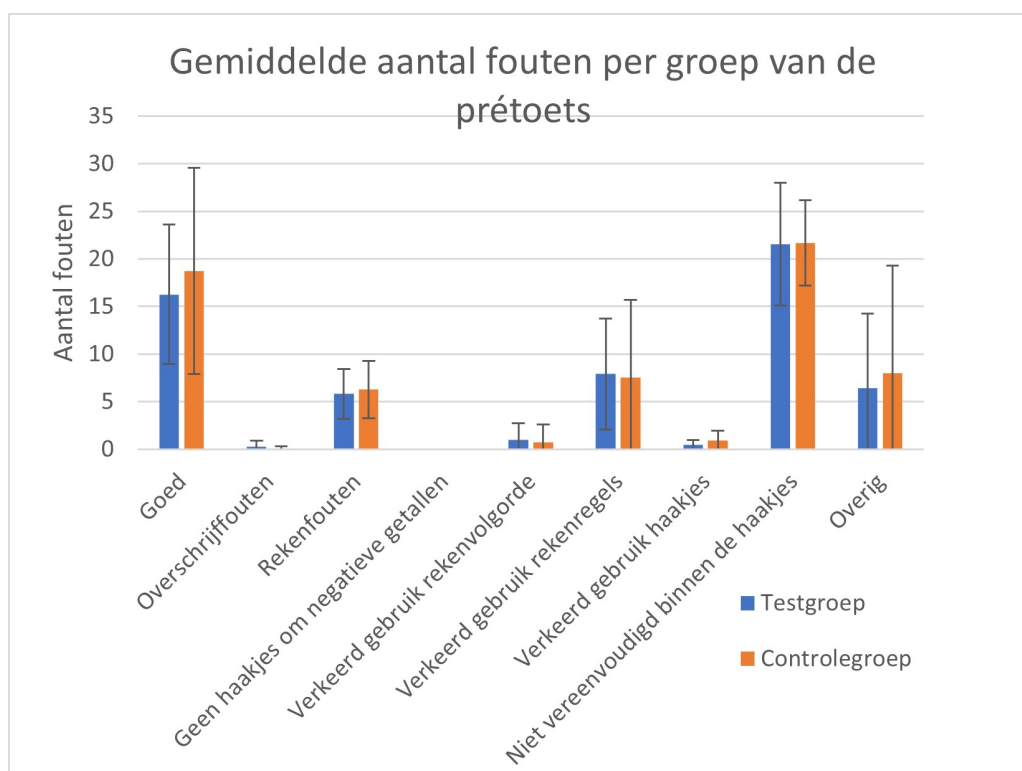
	Prétoets	Posttoets	P-waarde
Goed	17,69 $\pm$ 9,44	22 $\pm$ 8,40	0,019
Overschrijffouten	0,15 $\pm$ 0,46	0,31 $\pm$ 0,55	0,212
Rekenfouten	6,08 $\pm$ 2,80	3,65 $\pm$ 2,67	0,001
Geen haakjes om negatieve getallen	0 $\pm$ 0	0,31 $\pm$ 0,31	0,088
Verkeerd gebruik rekenvolgorde	0,85 $\pm$ 1,78	0,46 $\pm$ 1,27	0,278
Verkeerd gebruik rekenregels	5,85 $\pm$ 5,93	5,08 $\pm$ 5,86	0,430
Verkeerd gebruik haakjes	0,73 $\pm$ 0,87	0,69 $\pm$ 0,55	0,832
Niet vereenvoudigd binnen haakjes	21,62 $\pm$ 5,28	18,35 $\pm$ 8,81	0,034
Overige	1,22 $\pm$ 4,15	0,71 $\pm$ 2,60	0,093



Figuur E.1: De verschillen tussen de prétoets en posttoets.

Tabel E.2: Het gemiddelde aantal fouten $\pm$ de standaardafwijking van de verschillende onderdelen in de prétoets tussen de testgroep en de controlegroep

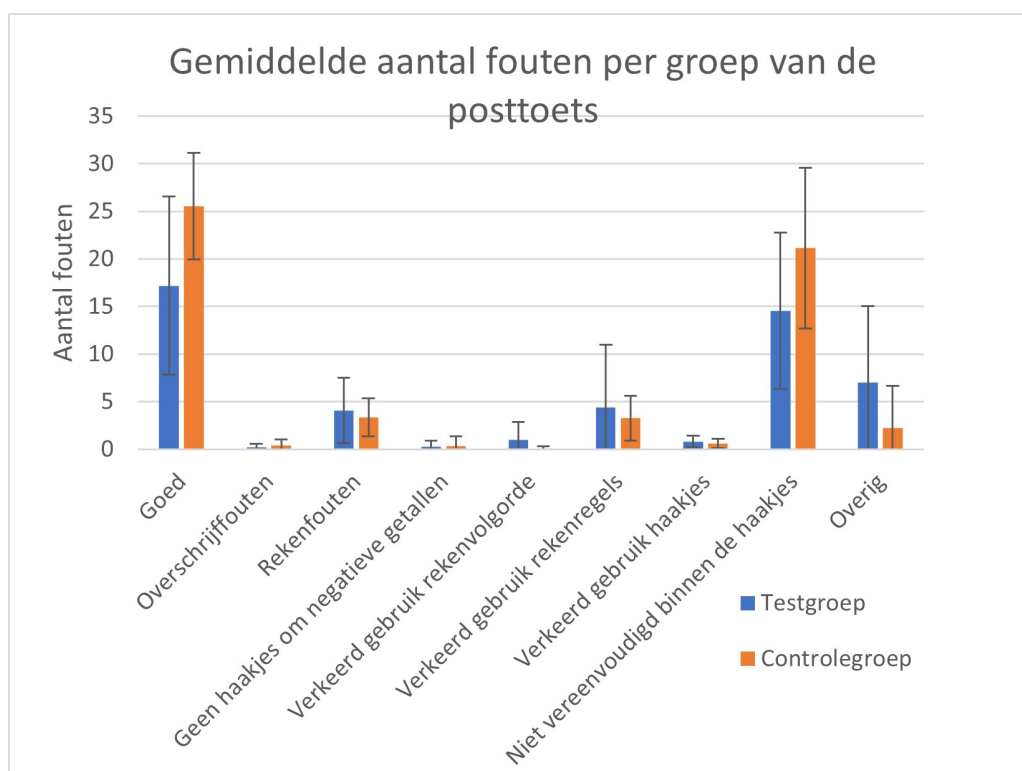
	Testgroep	Controlegroep	P-waarde
Goed	16,27 $\pm$ 7,35	18,73 $\pm$ 10,85	0,522
Overschrijffouten	0,27 $\pm$ 0,65	0,07 $\pm$ 0,26	0,336
Rekenfouten	5,82 $\pm$ 2,60	6,27 $\pm$ 3,01	0,695
Geen haakjes om negatieve getallen	0 $\pm$ 0	0 $\pm$ 0	-
Verkeerd gebruik rekenvolgorde	1 $\pm$ 1,73	0,73 $\pm$ 1,87	0,714
Verkeerd gebruik rekenregels	7,91 $\pm$ 5,82	4,33 $\pm$ 5,73	0,131
Verkeerd gebruik haakjes	0,45 $\pm$ 0,52	0,93 $\pm$ 1,03	0,173
Niet vereenvoudigd binnen haakjes	21,55 $\pm$ 6,44	21,67 $\pm$ 4,48	0,955
Overige	1,08 $\pm$ 3,20	1,33 $\pm$ 4,74	0,703



Figuur E.2: De verschillen tussen de testgroep en controlegroep van de prétoets

Tabel E.3: Het gemiddelde aantal fouten $\pm$ de standaardafwijking van de verschillende onderdelen in de posttoets tussen de testgroep en de controlegroep

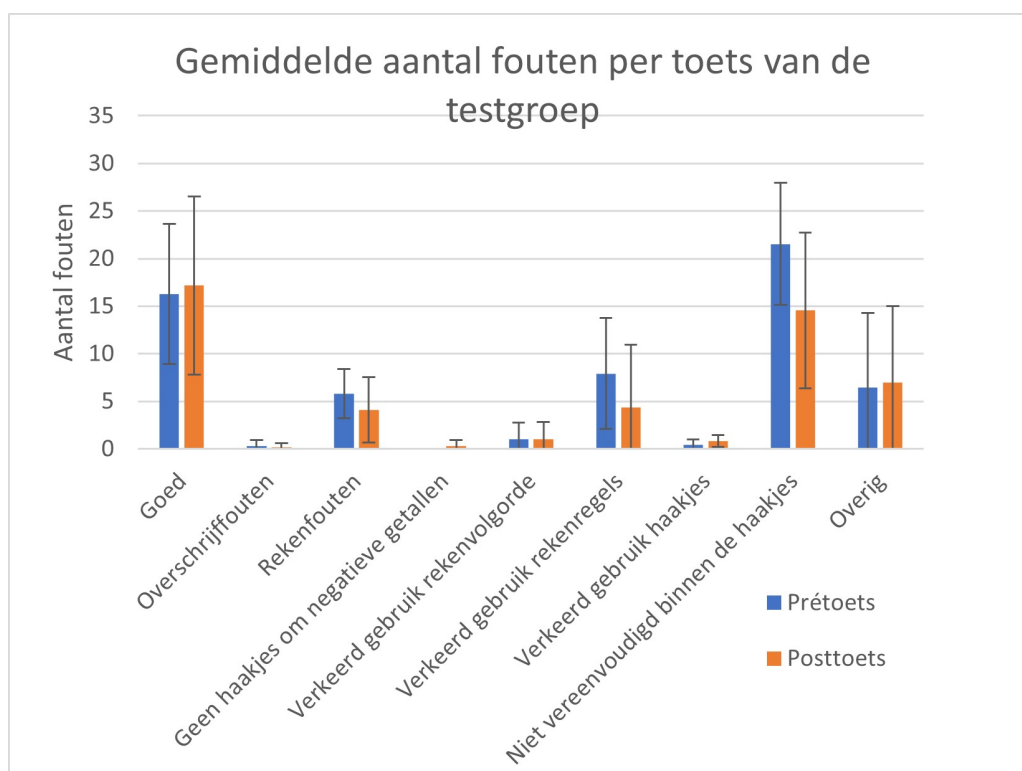
	Testgroep	Controlegroep	P-waarde
Goed	17,18 $\pm$ 9,37	25,53 $\pm$ 5,62	0,009
Overschrijffouten	0,18 $\pm$ 0,41	0,40 $\pm$ 0,63	0,295
Rekenfouten	4,09 $\pm$ 3,45	3,33 $\pm$ 1,99	0,486
Geen haakjes om negatieve getallen	0,27 $\pm$ 0,65	0,33 $\pm$ 1,05	0,867
Verkeerd gebruik rekenvolgorde	1 $\pm$ 1,84	0,07 $\pm$ 0,26	0,126
Verkeerd gebruik rekenregels	7,55 $\pm$ 8,14	3,27 $\pm$ 2,37	0,118
Verkeerd gebruik haakjes	0,82 $\pm$ 0,60	0,60 $\pm$ 0,51	0,327
Niet vereenvoudigd binnen haakjes	14,55 $\pm$ 8,19	21,13 $\pm$ 8,43	0,058
Overige	1,17 $\pm$ 3,71	0,37 $\pm$ 1,22	0,096



Figuur E.3: De verschillen tussen de testgroep en controlegroep van de posttoets

Tabel E.4: Het gemiddelde aantal fouten $\pm$ de standaardafwijking van de verschillende onderdelen van de testgroep

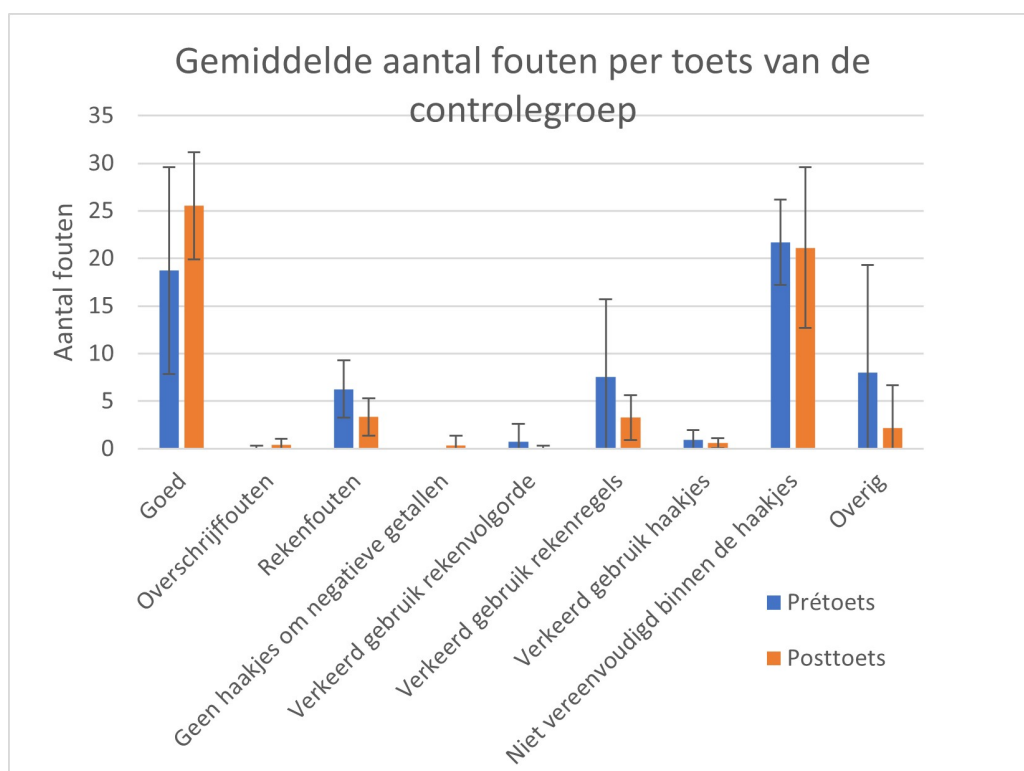
	Prétoets	Posttoets	P-waarde
Goed	16,27 $\pm$ 7,35	17,18 $\pm$ 9,37	0,681
Overschrijffouten	0,27 $\pm$ 0,65	0,18 $\pm$ 0,40	0,588
Rekenfouten	5,82 $\pm$ 2,60	4,09 $\pm$ 3,45	0,132
Geen haakjes om negatieve getallen	0 $\pm$ 0	0,27 $\pm$ 0,65	0,192
Verkeerd gebruik rekenvolgorde	1 $\pm$ 1,73	1 $\pm$ 1,84	1,000
Verkeerd gebruik rekenregels	7,91 $\pm$ 5,82	7,55 $\pm$ 8,14	0,779
Verkeerd gebruik haakjes	0,45 $\pm$ 0,52	0,82 $\pm$ 0,60	0,167
Niet vereenvoudigd binnen haakjes	21,55 $\pm$ 6,44	14,55 $\pm$ 8,19	0,002
Overige	1,08 $\pm$ 3,20	1,17 $\pm$ 3,70	0,786



Figuur E.4: De verschillen tussen de prétoets en posttoets van de testgroep

Tabel E.5: Het gemiddelde aantal fouten $\pm$ de standaardafwijking van de verschillende onderdelen van de controlegroep

	Prétoets	Posttoets	P-waarde
Goed	18,73 $\pm$ 10,85	25,53 $\pm$ 5,62	0,013
Overschrijffouten	0,07 $\pm$ 0,26	0,40 $\pm$ 0,63	0,055
Rekenfouten	6,27 $\pm$ 3,01	3,33 $\pm$ 1,99	0,002
Geen haakjes om negatieve getallen	0 $\pm$ 0	0,33 $\pm$ 1,05	0,238
Verkeerd gebruik rekenvolgorde	0,73 $\pm$ 1,87	0,07 $\pm$ 0,26	0,199
Verkeerd gebruik rekenregels	4,33 $\pm$ 5,72	3,27 $\pm$ 2,37	0,463
Verkeerd gebruik haakjes	0,93 $\pm$ 1,03	0,60 $\pm$ 0,51	0,173
Niet vereenvoudigd binnen haakjes	21,67 $\pm$ 4,48	21,13 $\pm$ 8,43	0,786
Overige	1,33 $\pm$ 4,74	0,37 $\pm$ 1,22	0,043



Figuur E.5: De verschillen tussen de prétoets en posttoets van de controlegroep