

GUIDED REINVENTION IN KANSREKENING

DE INVLOED VAN GUIDED REINVENTION OP HET PROBLEEMOPLOSSEND VERMOGEN BIJ HET
LEREN VAN KANSREKENING.

SAMENVATTING

In dit onderzoek is gekeken naar de invloed van guided reinvention op het probleemoplossend vermogen bij het leren van kansrekening. Guided reinvention is een lesmethode waarin leerlingen wiskundige theorie zelf ontdekken, onder begeleiding van de docent en aan de hand van lesmateriaal. Met probleemoplossend vermogen wordt het vermogen bedoeld om in concrete vraagstukken wiskundige problemen te herkennen en een oplosstrategie te bepalen. Om de invloed van guided reinvention op het probleemoplossend vermogen bij het leren van kansrekening te onderzoeken, zijn twee lessen ontworpen voor twee parallelklassen 4VWO wiskunde A. Beide klassen kregen bij uitvoering van het experiment dezelfde theorie aangeleerd met betrekking tot onafhankelijke en afhankelijke gebeurtenissen in de kansrekening. De leerlingen in de ene klas moesten deze theorie zelf ontdekken aan de hand van opgaven, waar de leerlingen uit de andere klas de theorie op papier kregen om vervolgens vergelijkbare opgaven te maken.

De invloed van deze lessen op zowel het theoretisch niveau als het probleemoplossend vermogen is bij beide klassen getest. Met theoretisch niveau wordt in deze zin bedoeld dat er getest is in hoeverre de leerlingen de theorie kunnen reproduceren en zonder context kunnen toepassen. Uit de resultaten blijkt dat de leerlingen uit de guided reinvention klas slechter scoorden op het theoretisch niveau. Beide klassen scoorden op het probleemoplossend vermogen even goed. Deze resultaten worden in dit verslag uitgebreid geanalyseerd. In de discussie wordt het onderzoek besproken en geëvalueerd.

Floor Venderbosch (s1726986)

*Master Educatie en Communicatie in de Bètawetenschappen
(Schoolvak wiskunde)*

Onderdeel: Onderzoek van Onderwijs (10 EC)

Datum: 28-02-2021

Begeleider: Tom Coenen

Tweede beoordelaar: Mark Timmer

INHOUDSOPGAVE

Samenvatting	1
Inhoudsopgave	2
Inleiding	3
Theoretische inbedding	4
Methode	7
Respondenten	7
Ontwerpeisen les	8
Ontwerpeisen toets	10
Leerdoelen	12
Onderbouwing lessen	14
Onderbouwing toetsvragen	15
Variabelen	18
Analyse	18
Resultaten	20
Conclusie	24
Discussie	25
Aanbevelingen	26
Referenties	27
Bijlagen	28
Bijlage I - Overige Resultaten SPSS	28
Bijlage II - Les	29
Inhoud	29
Planning	30
Werkblad Versie GR(2)	32
Werkblad Versie GT(1)	36
Bijlage III - Lerarenhandleiding	40
Bijlage IV - Toets	44
Bijlage V - Nakijkmodel toets	46
Bijlage VI - Resultaten	50

INLEIDING

Het aanleren van theorie wordt in de huidige wiskundelessen vaak op de volgende manier gedaan: de theorie vormt de basis van een les en wordt aan het begin van de les door de docent aan de leerlingen aangeboden. De docent legt uit waarom deze theorie werkt, wat deze betekent en laat zien wat je ermee kan. Meestal gaat dit aan de hand van voorbeelden of een bewijs. Leerlingen zien in dit geval het hoe en waarom aan de hand van door de docent voorgelegde theorie. Deze manier van traditioneel lesgeven lijkt veel op de manier van college geven aan de universiteit. De docent introduceert een stelling en bewijst deze. Vervolgens is het aan de studenten om zowel stelling als bewijs te begrijpen en te kunnen toepassen. Ondanks deze overeenkomst, past deze aanpak niet bij alle leerlingen/studenten en zijn veel didactici het erover eens dat het goed is om de leerling zelf theorie te laten ontdekken. Wiskunde is volgens het realistisch wiskundeonderwijs abstract en resultaat van een lang ontwikkelproces (Freudenthal, 1991). Tijdens het wiskundige ontwikkelproces doorlopen leerlingen verschillende niveaus van abstractie (Sfard, 1991). Deze abstractie wordt volgens realistisch wiskundeonderwijs alleen bereikt door zelf te ontdekken. De lesmethode waarin de leerling zelf theorie ontdekt wordt door het realistisch wiskundeonderwijs *guided reinvention* genoemd (Freudenthal, 1991).

Het huidige wiskundeonderwijs is naast het aanleren van theorie ook gericht op het aanleren van probleemoplossend vermogen. Met probleemoplossend vermogen wordt in dit onderzoek het vermogen om wiskundige problemen te herkennen in concrete vraagstukken en tot een plan te kunnen komen om deze problemen op te lossen, bedoeld. De wiskundige problemen zijn hierbij eventueel in context geplaatst. Veel wiskundige toepassingen bestaan uit het oplossen van wiskundige problemen in context. Zowel een sterke theoretische basis als het vermogen om deze toe te kunnen passen dragen samen bij aan een sterk probleemoplossend vermogen. Om een goede wiskundige probleemoplosser te worden, moet een leerling eerst een wiskundig theoretische basis opbouwen (Wilson, Fernandes & Hadaway, 1993). Een sterke probleemoplosser is in staat de wereld om zich heen te vertalen naar wiskunde en deze te begrijpen. Een sterk probleemoplossend vermogen werkt bovendien motiverend en maakt wiskunde leuker (Wilson, Fernandes & Hadaway, 1993).

Zowel voor de algemene kwaliteit van het wiskundeonderwijs als voor de individuele inzichten voor het eigen lesgeven van de onderzoeker is het nuttig om te onderzoeken wat de invloed is van *guided reinvention* op het probleemoplossend vermogen bij kansrekening. Meer inzicht in dit onderwerp kan motiverend zijn voor zowel het lesgeven van docenten als voor vervolgonderzoek naar dit onderwerp. Het onderwerp kansrekening leent zich goed voor een onderzoek naar *guided reinvention* omdat het wiskunde is die gemakkelijk in context te plaatsen is. In de lesmethodes wordt kansrekening bovendien veelal aangeleerd aan de hand van wiskundige modellen die op context zijn gebaseerd. Een bekend voorbeeld hiervan is het vaasmodel. Leerlingen moeten bij elke opgave in de kansrekening opnieuw de koppeling van context naar abstractie zien te maken. Binnen de planning van de onderzoeksschool kwam kansrekening op het juiste moment aan bod, wat er voor zorgde dat het met succes kon worden uitgevoerd.

Er werd voorafgaand aan het onderzoek een positieve invloed verwacht van *guided reinvention* op het probleemoplossend vermogen. Leerlingen die hun theorie zelf hebben ontdekt, kunnen de theorie beter toepassen, was de verwachting. De reden voor deze verwachting is dat de leerling die de theorie zelf heeft ontdekt waarschijnlijk beter kan reageren op opgaven die afwijken van de eerder gemaakte opgaven dan een leerling die de theorie niet zelf heeft ontdekt. Het doel van *guided reinvention* is immers om de leerling inzicht te verschaffen (ter Heege, 2009). Leerlingen zijn tijdens het proces van *guided reinvention* meer dan bij een les met gegeven theorie bezig met het zoeken naar een juiste oplossingsstrategie en nodige theorie bij

het gegeven vraagstuk. Om te kunnen onderzoeken of deze invloed echt positief is, was een ontwerp-onderzoek nodig. Het ontwerp omvat twee lessen die slechts verschillen op het gebied van het wel of niet gebruik maken van guided reinvention. Twee parallelklassen 4VWO wiskunde A hebben deze lessen gebold en naderhand een test gemaakt die test op het probleemoplossend vermogen. Het analyseren van deze testresultaten zou vervolgens een beeld van het probleemoplossend vermogen van beide klassen geven. De klas die volgens guided reinvention te werk ging wordt in dit verslag aangegeven met de afkorting GR. Voor de klas die aan de slag ging met gegeven theorie wordt de afkorting GT gebruikt.

Bij beide series staat hetzelfde onderwerp in de kansrekening (het berekenen van afhankelijke en onafhankelijke kansen) centraal. Bij deze lessen hoort een lerarenhandleiding waarin staat hoe de leerlingen begeleid moeten worden tijdens het ontdekken van theorie en praktijk. Deze lerarenhandleiding zorgt ervoor dat het onderzoek op dezelfde manier herhaald kan worden.

De toets bevat opgaven waarin wordt getest of de leerling de theorie kent en de belangrijke bijbehorende vaardigheden beheerst. Hiernaast komen er opgaven in de toets voor waarin vooral wordt getest of de leerling ook snapt waarom de theorie zo is. Hier moet de leerling zelf nadenken over het aanpassen van de bekende strategie zodat deze toepasbaar is op de gegeven opgave. De leerling bedenkt hier een strategie met behulp van de theorie. Het gaat hier dus niet alleen om het juiste antwoord, de wegen naar de oplossing toe zijn hierbij minstens zo belangrijk.

De hoofdvraag van dit onderzoek luidt:

In welke mate heeft het gebruik van guided reinvention ten opzichte van het gebruik van gegeven theorie invloed op het probleemoplossend vermogen bij het leren van kansrekening?

THEORETISCHE INBEDDING

Met probleemoplossend vermogen kunnen verschillende dingen worden aangeduid. Om een probleem op te lossen moet bovendien eerst duidelijk zijn, wat als probleem wordt aangekaart. Reitman (1965) noemt een probleem iets waarvan je de omschrijving hebt, maar waarvoor je nog niets hebt dat hierop aansluit. Sommige wiskundeleraars zullen het oplossen van opgaven als problemen zien, waar anderen problemen in zowel het dagelijks leven als in de les zien. Schoenfeld (1985) benoemt dat het wel of niet beschouwen van iets als een probleem, afhankelijk is van het individu. Dit onderzoek richt zich op wiskundige problemen, eventueel in context geplaatst. Het probleemoplossend vermogen waar dit onderzoek zich op richt, is het vermogen om wiskundige problemen te herkennen in concrete vraagstukken en tot een plan te kunnen komen om deze problemen op te lossen. Het gaat dus vooral om het ontwikkelen van een strategie.

Het college voor toetsen en examens benoemt probleemoplossend vermogen als volgt in het curriculum:

“Bij productieve vaardigheden is het uitgangspunt dat de kandidaat beschikt over de parate vaardigheden en deze in complexe probleemsituaties kan toepassen. De productieve vaardigheden voert de kandidaat niet op routine uit. De kandidaat zal door inzicht, overzicht, probleemaanpak en metacognitieve vaardigheden een strategie moeten bedenken om het probleem op te lossen.” (Wiskunde A VWO syllabus centraal examen 2020, 2018)

Probleemoplossend denken heeft te maken met het kunnen koppelen van theorie aan praktijk. Door theorie aan de hand van praktijk te ontdekken is de leerling al sterk bezig met deze koppeling tijdens de theorie. Het

ontdekken van theorie aan de hand van praktijk is nog steeds een van de speerpunten van het realistisch wiskundeonderwijs (ter Heege, 2009).

In het realistisch wiskundeonderwijs ligt de nadruk op een actieve leerling, een realistische benadering, verschillende niveaus van begrip, verwevenheid van de stof, interactie en het bieden van goede begeleiding. Zowel in het geval van kant en klare instructie als in het geval van guided reinvention zijn niveaus van begrip, verwevenheid van de stof en interactie van groot belang. In het geval van guided reinvention wordt wiskunde als een activiteit beschouwd en in het geval van gegeven theorie wordt wiskunde meer als kennis beschouwd. Een ander verschil tussen de twee lesmethodes zit hem in de hoeveelheid begeleiding. In het realistisch wiskundeonderwijs is het de bedoeling dat begeleiding ervoor zorgt dat de leerling de stof zelf vanuit context “mathematiseert” (ter Heege, 2009). In het geval van gegeven theorie heeft de docent ook een begeleidende rol, maar valt deze taak in het begeleiden naar zelf mathematiseren van wiskunde vanuit context deels weg omdat de theorie al paraat is.

Freudenthal spreekt over een driedeling in denkactiviteiten: horizontaal, verticaal en verticaal in engere zin. Onder horizontaal denken valt het vertalen van de realiteit naar wiskunde. Onder verticaal denken valt het uitvoeren van wiskundige bewerkingen. Onder verticaal in engere zin valt het mathematiseren van de eigen wiskundige activiteit. Dit houdt in dat de leerling bezig is met het organiseren van kennis en het reflecteren op de te maken opgave. Alle drie zijn essentieel om een wiskundig probleem op te lossen. (ter Heege, 2009) Dit verticaal mathematiseren in engere zin speelt hierin een sleutelrol. Tijdens het verticaal mathematiseren in engere zin bepaalt de leerling zijn/haar strategie. De leerling vraagt zich af of zijn bekende aanpak moet worden aangepast. Dit gaat als volgt: de leerling haalt de benodigde theorie op en controleert of deze aan alle voorwaarden voldoet om toegepast te worden in de te maken opgave. De leerling denkt na over de consequenties voor de oplossingsstrategie als niet aan alle voorwaarden voldaan wordt en gaat eventueel op zoek naar een nieuwe theorie om tot een oplossing te komen. Het herkennen van deze aanpassingen en het hier juist op reageren, is essentieel voor een goed probleemoplossend vermogen. Wanneer men het probleemoplossend vermogen van een leerling wil testen, zal het dus essentieel zijn om in kaart te brengen of een leerling tot deze zojuist genoemde stappen in staat is.

In de wiskundendidactiek wordt vaak gesproken over relationeel en instrumenteel begrip. Skemp (1976) zegt dat relationeel begrip (weten wat en waarom) belangrijk is voor lange termijn begrip en instrumenteel begrip (weten wat) vooral belangrijk is voor korte termijn. Het onderwijs is erop gericht dat leerlingen hun kennis breed kunnen toepassen en ook over een aantal jaar kunnen blijven toepassen zodat ze hun kennis kunnen gebruiken bij het eindexamen en vervolgopleiding. Wanneer onderzoek gedaan wordt naar wiskundig begrip, is het belangrijk om af te bakenen over welke vorm van begrip het vooral gaat.

Het wiskundig begrip kan ook bekeken worden vanuit het oogpunt van Sfard. Volgens Sfard (1991) gaat een leerling tijdens een leerproces van een operationele conceptie naar een structurele conceptie. Leerlingen zien daarbij wiskundige kennis eerst als iets dynamisch (een proces) en vervolgens als iets statisch en abstracts. Tijdens de wiskundeles gaan leerlingen vaak procesmatig aan de slag. Het doel is om na enige tijd een bepaald abstractieniveau te bereiken. Bij een hoger abstractieniveau kunnen leerlingen hun kennis beter toepassen op opgaven die afwijken van de gemaakte opgaven omdat de kennis dan onafhankelijk is van context. Bij structurele conceptie is er sprake van een hoger abstractieniveau. Het doel is dus om structurele conceptie te bereiken. Structurele conceptie is algemener toepasbaar en kan gemakkelijker gerelateerd worden aan andere wiskundige concepten dan operationele conceptie. Deze algemene toepasbaarheid draagt bij aan een sterk probleemoplossend vermogen.

Volgens Tricot en Sweller (2014) is het belangrijk dat probleem oplossen op zichzelf staand geen leermiddel is. Een sterk probleemoplossend vermogen wordt volgens hen bereikt door veel domein-specifieke kennis op te doen. Door middel van beschikbare domein-specifieke kennis kunnen leerlingen een bekende oplossingsstrategie kiezen. Om te voorkomen dat domein specifieke kennis verkeerd gebruikt wordt, is het volgens Barton (2018) van belang om bij het koppelen van context en theorie steeds na te gaan waarom de theorie bij de context past. Hierbij spelen zowel voorbeelden als non-voorbeelden een rol. De docent heeft in zijn opzicht veel sturing en helpt de leerling met uitgewerkte voorbeelden stapsgewijs zelfstandig worden.

Hoewel kansrekening tegenwoordig niet meer in het centraal eindexamen zit, komt het wel uitgebreid aan bod in de bovenbouw voor wiskunde A op het VWO. Volgens Drijvers et al. (2016) vormt een goed begrip van kansrekening het fundament van een goed begrip van statistiek. Tijdens statistiek is het van belang is om regelmatig van perspectief te wisselen (waarnemingen naar kansverdelingen) zonder deze twee te verwarren. Een goed kansbegrip is dus een voorwaarde voor een goed begrip van statistiek.

Bij kansrekening is er altijd sprake van een toevalsexperiment, ook als dit niet expliciet genoemd is; dit toevalsexperiment vindt plaats in de werkelijkheid, maar ook eventueel in de vorm van een gedachte-experiment (Drijvers et al. 2016). De theorie die in dit onderzoek wordt aangeleerd gaat over het herkennen van afhankelijke en onafhankelijke gebeurtenissen en het gebruiken van enkele theorieën omtrent deze twee soorten gebeurtenissen. Deze gebeurtenissen zijn onderdeel van het toevalsexperiment.

Volgens Lijnse (2007) is het bij een geslaagde guided reinvention van belang dat er een probleemstellende aanpak nodig is. Een probleemstellende benadering heeft als doel om leerlingen zelf de inhoudelijke zin van de richting van hun begripsvorming te laten begrijpen. Dit houdt in dat ze zelf hun kennis in een richting uitbreiden die goed aansluit bij wat ze al kennen en waar leerlingen logischerwijs nieuwe vragen over kunnen stellen. De beantwoording van die vragen is dan precies dat wat de docent wil onderwijzen. Volgens Lijnse kan deze probleemstellende benadering bereikt worden door een verhaallijn toe te voegen waarin inhoudelijke motieven een centrale rol spelen. Hiermee bedoelt hij dat leerlingen de context begrijpen, het doel van de les voor zich zien en dat de les aansluit bij bestaande opvattingen. Leerlingen hebben dan van tevoren een gevoel van het soort kennis dat ze op gaan doen (Lijnse, 2007).

METHODE

Om te kunnen onderzoeken in welke mate guided reinvention invloed heeft op het probleemoplossend vermogen, was data nodig van leerlingen die theorie uit de kansrekening wel of niet via guided reinvention hebben aangeleerd. Om deze data te verkrijgen was een onderzoek binnen de onderzoeksschool nodig bij twee klassen VWO4 wiskunde A. Er is voor deze leerlingen gekozen omdat het onderdeel uit de kansrekening normaliter ook op dit moment aangeleerd zou worden. De leerlingen zouden dus in staat moeten zijn om het niveau aan te kunnen. Omdat dit onderzoek niet eerder uitgevoerd is, is het materiaal zelf ontworpen. De gekozen methode voor dit onderzoek is dus een ontwerponderzoek. Dit houdt in dat er een les ontworpen is, die ervoor zorgt dat leerlingen uit de twee groepen theorie in de kansrekening via guided reinvention of via gegeven theorie aangeleerd krijgen. Om te onderzoeken of er verschil in het probleemoplossend vermogen van de leerlingen optreedt, is er ook een toets afgenomen. Het ontwerponderzoek omvat dus zowel een les als een toets. Deze toets geeft een beeld van zowel het theoretisch als het probleemoplossend vermogen. Het toetsen van theoretisch vermogen is belangrijk omdat dit als testvariabele dient in het onderzoek. Toetsen op probleemoplossend vermogen bij een leerling zonder theoretische basis heeft immers geen zin omdat een theoretische basis essentieel is om een goede wiskundige probleemoplosser te worden (Wilson, Fernandes & Hadaway, 1993).

Omdat er veel vrijheid is binnen het ontwerp is het belangrijk dat het ontwerp in ieder geval aan een aantal eisen voldoet. Deze eisen zorgen ervoor dat het onderzoek aansluit bij de school en de leerdoelen en daarnaast zinvolle resultaten kan opleveren. De lessen moeten goed onderbouwd zijn en moeten bij herhaaldelijk uitvoeren een vergelijkbaar leerresultaat geven. Voor zowel de les als de toets is een aantal ontwerpeisen opgesteld met daarbij een manier waarop hieraan voldaan kan worden.

Vanuit de ontwerpeisen zijn de les en toets opgebouwd. Deze eisen worden in dit hoofdstuk gepresenteerd. Ook zal er nader ingegaan worden in de totstandkoming van de les en toets. Het laatste onderdeel van dit hoofdstuk is gericht op het verwerken van de data.

RESPONDENTEN

Het onderzoek is afgenomen bij twee wiskunde A klassen 4VWO wat betekent dat de leerlingen tussen de 14 en 17 jaar oud waren ten tijde van het onderzoek. De leerlingen hadden een aantal lessen gehad over kansrekening en hadden eerder een hoofdstuk over combinatoriek afgerond. De correspondenten zijn geselecteerd omdat het onderwerp kansrekening bij deze leerlingen precies op het gewenste moment aan bod kwam in de oorspronkelijke planning. Bovendien hadden deze leerlingen precies de voorkennis die het onderzoek vereist. De GR klas bestaat uit 26 leerlingen en werd normaliter door de onderzoeker onderwezen en de GT klas bestaat uit 22 leerlingen en werd normaliter door een collega onderwezen. Omdat geslacht voor de onderzoeksvraag niet relevant is, is ervoor gekozen deze niet te benoemen. Het is niet het doel van dit onderzoek om de invloed van geslacht of gender op wiskundige prestaties te onderzoeken. Verschillen in prestaties op basis van geslacht zouden bovendien stereotyperend kunnen werken. Dit zou afdoen aan de objectiviteit van het onderzoek.

Alle aanwezige leerlingen hebben meegedaan aan zowel de les als de toets. Voor dit onderzoek is een ethiekaanvraag ingediend en deze is goedgekeurd¹. Omdat er sprake was van minderjarige leerlingen was er toestemming van de ouders van de leerlingen nodig. De ouders zijn via de online leeromgeving geïnformeerd over het onderzoek, maar er omdat er geen bezwaar is gemaakt door ouders en leerlingen, deden alle

¹ Nummer ethiekaanvraag: 191409

leerlingen mee met het onderzoek. Veel leerlingen gaven bovendien ook aan dat ze het leuk vonden om mee te doen.

ONTWERPEISEN LES

De ontwerpeisen en de manier waarop hieraan is voldaan worden gepresenteerd. Meteen wordt aangegeven op welke manier hieraan wordt voldaan. Verderop zal verder onderbouwd worden hoe de les tot stand is gekomen. Het uiteindelijke ontwerp is te vinden in bijlage II.

Ontwerpeis les	Op deze manier aan voldaan
Beide lessen moeten ervoor zorgen dat de leerling de theorie kent (het wat) en dat de leerling deze begrijpt en kan uitleggen (het waarom).	De leerdoelen zijn gekoppeld aan instrumenteel of relationeel begrip. In de gevallen van instrumenteel begrip is het vooral belangrijk dat de leerling de theorie kent (zie tabel opgaven). In de gevallen van relationeel begrip is het essentieel dat de leerling ook begrijpt waarom deze theorie zo werkt.
Beide lessen moeten dezelfde leerdoelen hebben	De algemene leerdoelen staan opgesteld bovenaan de lessen en worden op de volgende pagina aan de werkbladopgaven gekoppeld voor beide lessen. Bij het ontwerpproces dient rekening gehouden te worden met de leerdoelen en dat beide lessen in dezelfde mate proberen deze leerdoelen te bereiken.
Beide lessen moeten hetzelfde oefenmateriaal hebben	Door middel van dezelfde hoofdpogave in de les en dezelfde opgaven als huiswerk uit Getal en Ruimte. Er is in beide klassen evenveel tijd in de les om te oefenen met de opgaven en daarnaast hebben beide klassen 2 dagen om huiswerkopgaven te maken.
De les die gebruik maakt van guided reinvention moet ervoor zorgen dat ontdekken van de theorie in het hoofd van elke individuele leerling plaatsvindt	De docent leidt de les en fungeert als coach. Dit is een kenmerk van guided reinvention. Hoe de docent dit dient te doen wordt in de lerarenhandleiding (bijlage III) omschreven. De lijst met tips en mogelijke vragen zorgt ervoor dat de docent de leerling op een hoger niveau kan krijgen zonder de theorie letterlijk te geven.
De lessen moeten door een andere docent uitvoerbaar zijn op dezelfde manier	Er moet beschikking zijn tot een uitgebreid en concreet lesplan waarin tips staan voor mogelijke antwoorden als een leerling vastloopt. De taken die de docent uitvoert zijn

	concreet beschreven in de les zodat het onderzoek zo min mogelijk afhankelijk is van het type docent.
De lessen moeten de opgaven 31 t/m 42 dekken en bijbehorende theorie uit Getal en Ruimte (in verband met school). Deze bladzijden komen overeen met de opgestelde leerdoelen van dit onderzoek	Deels maken de leerlingen deze in de les en deels worden deze als huiswerk opgegeven. Beide klassen hebben tussen de twee lessen in een aantal dagen de tijd om een paar huiswerkopgaven te maken. Het werkblad werkt als vervanger voor een aantal opgaven uit Getal en Ruimte en is op dezelfde leerdoelen gericht als het deel uit Getal en Ruimte.
Beschikbare tijd: De les moet (inclusief het toetsmoment) maximaal twee lesuren in beslag nemen (in verband met school)	Onderzoeker spreekt af met onderzoeksschool dat twee opeenvolgende lessen en bijbehorende huiswerktijd gericht zijn op het onderzoek. De te behalen leerdoelen zijn voor school en onderzoeker duidelijk en overeenkomstig. Onderzoeker voert de les in het eerste uur en de toets in het tweede uur uit en is de docent voor beide klassen.
De lessen moeten worden uitgevoerd bij twee parallelklassen met dezelfde voorkennis	Uitvoeren bij twee parallelklassen op de onderzoeksschool. De lessen worden de eerste week na de toetsweek gegeven dus er kan vanuit gegaan worden dat de leerlingen van beide klassen dezelfde voorkennis hebben.
Beschikbare materialen: De les moet binnen een klaslokaal uitgevoerd kunnen worden. Hier hoeft naast een eventueel whiteboard of krijtbord niets specifiek aanwezig te zijn.	Dit kan in de lokalen uitgevoerd worden waar de klassen normaal ook les hebben. Leerlingen worden van tevoren geïnformeerd over de nodige materialen die ze mee moeten nemen.

Tabel 3: Ontwerpeisen les

ONTWERPEISEN TOETS

Onderstaand worden de ontwerpeisen en de manier waarop hieraan is voldaan opgesomd. In dit hoofdstuk wordt al verwezen naar het uiteindelijke ontwerp. De totstandkoming van dit ontwerp komt aan bod nadat ook de leerdoelen gepresenteerd zijn. Het uiteindelijke ontwerp is te vinden in bijlage IV.

Ontwerpeis toets	Op deze manier aan voldaan
De toets moet controleren of de leerling de kennis heeft opgedaan zoals in de leerdoelen omschreven zodat de toets aansluit op de les.	De toetsvragen kunnen als volgt worden ingedeeld aan de hand van de leerdoelen: Vraag 1 test de leerdoelen 1 en 2. Vraag 2a test de leerdoelen 1 en 3. Vraag 2b test leerdoel 1 en 3. Vraag 3 test leerdoel 4. Vraag 4a test leerdoel 4. Vraag 4b test de leerdoelen 3, 4 en 5 Op deze manier kan tijdens de analyse worden vastgesteld in hoeverre de leerdoelen bereikt zijn.
De toets moet een testvariabele hebben (theoretisch vermogen)	De vragen 1 en 4a testen of de leerling de juiste theorie paraat heeft en of hij/zij deze direct kan gebruiken in de opgave. De leerling heeft hier instrumenteel begrip nodig. De leerling laat hier dus zien dat hij/zij weet wat hij moet doen in een opgave en laat daarnaast zien dat hij/zij dit kan uitvoeren.
De toets moet testen hoe goed het probleemoplossend vermogen is.	De vragen 2a, 2b, 3 en 4b testen of de leerling praktische problemen kan oplossen waarvan ze de oplosstrategie niet eerder hebben gezien. De leerling moet in elk van deze vragen zelf een strategie vaststellen, waarbij ze hun theoretische achtergrond moeten gebruiken. In deze vragen is er sprake van zowel relationeel als instrumenteel begrip. De leerling moet hier dus laten zien dat hij/zij weet wat er moet gebeuren en waarom dit de juiste methode is. In deze opgaven speelt verticaal mathematiseren in engere zin een sleutelrol. Hier is de leerling namelijk sterk bezig met het zelf bepalen van een strategie. Deze toetsvragen zijn nodig om een antwoord te kunnen geven op de onderzoeksvraag. Tijdens de analyse kan d.m.v. de score op deze toetsvragen het probleemoplossend vermogen worden vastgesteld.

De toets moet testen op verschillende stappen in het probleemoplossend vermogen van de leerlingen en hier per stap punten aan toekennen. Op deze manier kunnen leerlingen niet per ongeluk op het juiste antwoord komen.	Door middel van een uitgebreid en concreet nakijkmodel. Hier staat per punt aangegeven waar de leerling punten voor krijgt. Bovendien zijn de toe te kennen punten onderbouwd in de volgende paragraaf waardoor het duidelijk is dat een leerling punten kan scoren voor het tonen van bepaalde vaardigheden of kennis.
De toets moet gemaakt kunnen worden in het tweede lesuur van de twee lessen.	De toets duurt 30 minuten. Er is in de planning een uitloop van 10 minuten zodat er voldoende tijd is.
De toets moet objectief en gestructureerd nagekeken worden.	Een nakijkmodel met puntenverdeling en onderbouwing per punt. Het nakijkmodel bevat verschillende mogelijke uitwerkingen.
Het gebruiken van data van de leerlingen moet worden goedgekeurd door de ethische commissie en vervolgens op de juiste manier worden gedaan zodat er sprake is van passive consent.	De ethiekaanvraag is voor het afnemen van de toets goedgekeurd. Zowel leerlingen als ouders zijn via de online leeromgeving geïnformeerd over het onderzoek. De leerlingen maken hun toets anoniem. Er zal bovendien ruimte zijn om de theorie die aan bod komt in het onderzoek opnieuw aan de klas uit te leggen om zo eventuele misconcepties te kunnen herstellen.

Tabel 4: Ontwerpeisen toets

LEERDOELEN

De les is gebaseerd op een aantal leerdoelen. Deze leerdoelen sluiten aan bij de kennis en vaardigheden die de leerlingen volgens de planning van de school moeten opdoen. De leerdoelen sluiten aan op de te maken opgaven uit Getal en Ruimte. Deze leerdoelen zijn gericht op het ontwikkelen van een theoretische basis, deze kunnen begrijpen en gebruiken.

Leerdoel
1. Ik kan onafhankelijke en afhankelijke gebeurtenissen herkennen in een context.
2. Ik kan aantonen of gebeurtenissen afhankelijk of onafhankelijk zijn (met behulp van een kruistabel).
3. Ik weet dat slechts voor onafhankelijke gebeurtenissen A en B geldt: $P(A B) = P(A)$ en ik kan uitleggen waarom.
4. Ik ken de productregel voor onafhankelijke kansexperimenten en kan deze toepassen.
5. Ik weet dat ik de productregel niet mag toepassen voor afhankelijke kansexperimenten en kan onderbouwen waarom.

Alle opgaven die de leerlingen maken in de les dienen aan te sluiten bij de leerdoelen. De les (zie bijlage II) is zo ontworpen dat alle leerdoelen voldoende aan bod komen. De les zal de volgorde waarin Getal en Ruimte (on)afhankelijke gebeurtenissen introduceert grotendeels volgen. (Eerst worden (on)afhankelijke gebeurtenissen geïntroduceerd aan de hand van kruistabellen en vervolgens wordt de productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen geïntroduceerd)

Eerst moeten de leerlingen een gevoel ontwikkelen voor de begrippen onafhankelijke en afhankelijke variabelen. Er wordt dus in eerste instantie gewerkt aan leerdoel 1. Er wordt in beide lessen vanuit dezelfde context gewerkt om extra verschillen tussen het leerproces te voorkomen. Er is gekozen voor een toevalsexperiment waarin wel of geen groen licht bij het stoplicht en wel of geen regen de gebeurtenissen zijn die kunnen optreden. Beide lessen kijken hier eerst naar een situatie waarin de gebeurtenissen onafhankelijk zijn, en later naar een situatie waarin de gebeurtenissen afhankelijk zijn. Wanneer door deze context leerlingen een gevoel krijgen voor afhankelijke en onafhankelijke gebeurtenissen, gaan de leerlingen aan de slag met het berekenen van kansen. Hierbij vergelijken ze de situatie van afhankelijke gebeurtenissen met die van onafhankelijke gebeurtenissen. Leerdoelen 2 en 3 komen aan bod.

Hierna wordt de productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen geïntroduceerd/ontdekt. Leerlingen moeten hier in beide klassen bezig gaan met leerdoel 4 en 5. De les moet dus zowel focussen op de theorie van de productregel, als op het waarom hierachter.

Voor beide parallelklassen staat in onderstaande tabel aangegeven op welk leerdoel de opgave aansluit. Alle leerdoelen komen bij beide klassen aan de orde zodat de leerlingen in beide klassen kennismaken met de theorie en voldoende relationeel en instrumenteel begrip ontwikkelen.

	Guided reinvention	Gegeven theorie
1	Nodig voor opgave 6	Nodig voor opgave 6
2	Nodig voor opgave 6	Nodig voor opgave 6
3	Sluit aan bij leerdoel 1	Sluit aan bij leerdoel 1
4	Nodig voor opgave 6	Nodig voor opgave 6
5	Nodig voor opgave 6	Nodig voor opgave 6
6	Sluit aan bij leerdoelen 2 en 3	Sluit aan bij leerdoelen 2 en 3
7	Sluit aan bij leerdoel 2 en 3	Nodig voor opgave 8
8	Nodig voor opgave 9 en 10	Sluit aan bij leerdoel 4
9	Sluit aan bij leerdoel 4	Sluit aan bij leerdoel 5
10	Sluit aan bij leerdoel 5	
11	Sluit aan bij leerdoel 4 en 5	
32	Opgave uit het schoolboek: Sluit aan bij leerdoel 2	
33	Opgave uit het schoolboek: Sluit aan bij leerdoel 2	
35	Opgave uit het schoolboek: Sluit aan bij leerdoel 4	
39	Opgave uit het schoolboek: Sluit aan bij leerdoel 4	

Tabel 2: Leerdoelen en les

ONDERBOUWING LESSEN

Zoals benoemd in de theoretische inbedding is het van belang om voor een geslaagde guided reinvention een probleemstellende aanpak te gebruiken. In de lessen (zowel GR als GT, zie bijlage II) is geprobeerd om zo dicht mogelijk bij de leefwereld van leerlingen te blijven door een situatie voor te stellen die ze zelf mogelijk dagelijks meemaken. Dit wordt gedaan door middel van een kort verhaaltje van een leerling die naar school fietst. Mogelijk hebben leerlingen zich bij verkeerslichten al wel eens afgevraagd hoe deze werken, maar dit is geen vereiste voor het maken van de lessen. Deze probleemstellende aanpak is vooral voor de GR klas van belang. Er is geprobeerd de opeenvolgende vragen zo op te stellen dat ze logischerwijs volgen. De beantwoording van de vragen leidt tot het ontdekken van de kennis die we de leerlingen willen aanleren: het begrijpen van en rekenen met afhankelijke en onafhankelijke gebeurtenissen in de kansrekening.

Afhankelijke en onafhankelijke gebeurtenissen worden in getal en ruimte geïntroduceerd aan de hand van kruistabellen. Er is gekozen om dit over te nemen omdat kruistabellen een uitgangspunt geven om berekeningen te doen. Naar aanleiding van deze berekeningen kan de leerling vervolgens zelf door het vergelijken van uitkomsten zien dat er bij afhankelijke gebeurtenissen een ander fenomeen optreedt dan bij onafhankelijke gebeurtenissen. Door ook vragen te stellen over het begrip van het bordje 'bij regen vaker groen' zorgen we ervoor dat de leerling ook een begrip krijgt van de situatie zonder deze meteen aan getallen te linken. Door vervolgens de juiste vragen te stellen zorgen we ervoor dat het begrip van de situatie en de conclusies die de leerling uit het vergelijken van berekeningen kan trekken, samen zorgen voor relationeel begrip over afhankelijke en onafhankelijke gebeurtenissen.

ONDERBOUWING TOETSVRAGEN

Binnen de beschikbare tijd moet er een goede afweging gemaakt worden tussen vragen die toetsen op het kennen van theorie en het beschikken over probleemoplossend vermogen. Er is gekozen voor een indeling waarbij het probleemoplossend vermogen in ongeveer tweederde van de vragen wordt getoetst zodat er eenderde van de vragen over blijft voor het toetsen van de testvariabele: het theoretisch vermogen. De toets is te vinden in bijlage IV.

Er is gekozen voor vragen waar steeds sprake is van context. Op deze manier is er bij elke vraag sprake van verticaal mathematiseren. Bij vragen waar sprake is van een sleutelrol voor verticaal mathematiseren in engere zin, wordt getest op probleemoplossend vermogen. Belangrijk is hier dat de leerling laat zien zelf een juiste strategie te kunnen bepalen. De leerling heeft hier bovendien relationeel begrip nodig.

Vragen waar vooral sprake is van instrumenteel begrip en waar het verticaal mathematiseren in engere zin geen sleutelrol speelt, testen het theoretisch vermogen. Hier is de leerling relatief weinig bezig met het zelf bepalen van een strategie. Deze vragen eisen bovendien minimaal instrumenteel begrip. Als de leerling relationeel begrip heeft, is dat uiteraard ook voldoende om de vraag te beantwoorden.

Zoals in de vorige paragraaf ook werd genoemd kan de leerling in de toets punten behalen voor twee dingen: **het kennen van de theorie (opgave 1 en 4a)** en daarnaast **het probleemoplossend vermogen (opgave 2a,2b,3 en 4b)**. In de tabel zijn deze in respectievelijk met rood en blauw aangegeven. Per te behalen punt onderbouwt de tabel wat er getest wordt. De punten geven aan welke denkstappen er nodig zijn om per vraag tot een goed antwoord te komen. Naast de onderbouwing van de toe te kennen punten (en dus ook de essentiële denkstappen) onderbouw ik per vraag van welke vorm van mathematiseren er sprake is en of deze test op instrumenteel of relationeel begrip. Gebaseerd op deze indeling kunnen de vragen ingedeeld worden in theoretische vragen of probleemoplossende vragen.

Er is een nakijkmodel opgesteld gebaseerd op de stappen die een leerling moet zetten om tot een oplossing te kunnen komen. Deze bevat ook een aantal uitgebreide mogelijke antwoorden en is te vinden in bijlage V. Op de volgende pagina wordt een overzicht gegeven van de puntenverdeling en de onderbouwing per te behalen punt. Elk onderdeel waar punten voor te verdienen is, is essentieel voor het correct oplossen van problemen. Sommige onderdelen wegen zwaarder omdat er ingeschat wordt dat deze onderdelen het meeste denkwerk eisen.

Vraag	Onderbouwing per te behalen punten	Vorm van mathematiseren	Instrumenteel/ relationeel begrip minimaal nodig
1	Leerling kan een onvoorwaardelijke kans uitrekenen (2 punten)	Horizontaal	Instrumenteel
	Leerling kan de berekende kansen koppelen aan theorie (1 punt)	Verticaal	
	Leerling kan theorie koppelen aan het gevraagde in de opgave en kan een conclusie formuleren (1 punt)	Verticaal	
2a	De leerling ziet in dat er berekeningen nodig zijn voor zijn/haar zelf bepaalde oplossingsstrategie en kan deze juist uitvoeren. (3 punten)	Verticaal in engere zin, horizontaal	Relationeel
	De leerling laat zien de theorie te kunnen gebruiken om tot een eindantwoord te komen. (1 punt)	Verticaal	
2b	De leerling gebruikt de theorie om een strategie te bepalen. (1 punt)	Verticaal in engere zin, verticaal	Relationeel
	De leerling ziet in dat er berekeningen nodig zijn voor zijn/haar zelf bepaalde oplossingsstrategie en kan deze juist uitvoeren. (1 punt)	Verticaal in engere zin, horizontaal	
	De leerling kan door middel van berekende kansen bedenken hoe nieuwe gegevens berekent kunnen worden en kan dit juist uitvoeren. (1 punt)	Verticaal in engere zin, Verticaal	
3	De leerling ziet in dat de productregel toegepast kan worden. De leerling herkent dat er sprake is van onafhankelijkheid. De leerling koppelt hier theorie aan praktijk. (1 punt)	Verticaal	Relationeel

	De leerling kan de theorie gebruiken om tot een antwoord te komen in een opgave die de leerling niet eerder op deze manier heeft gezien. De leerling zal dus zelf een strategie moeten bepalen. (1 punt)	Verticaal in engere zin, Horizontaal	
4a	De leerling laat zien de productregel te kennen en deze te herkennen in context. (1 punt)	Verticaal	Instrumenteel
	De leerling kan de productregel juist toepassen zodat de leerling op een juist antwoord komt (1 punt)	Horizontaal	
4b	De leerling kan het verschil inzien tussen afhankelijke en onafhankelijke gebeurtenissen in context. (1 punt)	Verticaal	Relationeel
	De leerling ziet in wat dit voor consequenties heeft voor het gebruiken van de productregel. De leerling ziet dus in dat bij het berekenen van deze kans, de strategie van opgave a niet meer opgaat. (1 punt)	Verticaal in engere zin	

Tabel 5: Onderbouwing toetsvragen

De te behalen punten zijn dus als volgt ingedeeld:

Vragen die testen op het kennen van de theorie : totaal 6 punten

Vragen die testen op probleemoplossend vermogen: totaal 11 punten

Opgave	1	2.a.	2.b.	3.	4.a.	4.b.
Te behalen punten	4	4	3	2	2	2

Tabel 6: Puntenverdeling toetsvragen

Deze indeling voldoet aan de verhouding tussen vragen die testen op probleemoplossend vermogen en vragen die testen op theoretisch vermogen die eerder is vastgesteld.

VARIABELEN

In het onderzoek is er sprake van een onafhankelijke variabele: het wel of niet gebruik maken van guided reinvention bij het aanleren van theorie in de kansrekening. De afhankelijke variabelen zijn: het probleemoplossend vermogen en het beheersen van de theorie. Het beheersen van de theorie is een variabele die nodig is om te kijken of de leerlingen voldoende theoretische kennis hebben om problemen op te lossen. Zoals al eerder genoemd is de score op theoretische kennis nodig als testvariabele.

Tijdens het uitvoeren van het onderzoek op school, zijn er veel factoren die het leerproces van de leerlingen beïnvloeden. Tijdens het uitvoeren van de les is het belangrijk om alert te zijn op deze variabelen zodat hierop in de discussie gereflecteerd kan worden. Deze variabelen zullen niet gemeten worden, maar kunnen toch een grote invloed hebben. Voorbeelden voor deze variabelen zijn werksfeer in de klas, voorkennis van de leerlingen, docent, tijdstip van leren, motivatie van de leerlingen en leervoorkeuren van de leerlingen. Ook zou het zo kunnen zijn er na eerdere toetsmomenten al duidelijk is dat er een verschil is tussen het niveau van de twee klassen.

ANALYSE

Om te controleren wat het theoretische en probleemoplossende niveau van de leerlingen is, worden de resultaten per categorie bij elkaar opgeteld. Per leerling kunnen we nu een theoretisch niveau en een probleemoplossend niveau vaststellen aan de hand van zijn/haar toetsresultaten.

Omdat de twee klassen onafhankelijke groepen zijn met leerlingen die onafhankelijk van elkaar de toets maken, is er sprake van onafhankelijke resultaten. Door middel van de Mann-Whitney U-toets kan worden vastgesteld of de klassen in beide categorieën even goed scoren. De Mann-Whitney U-toets test de nulhypothese dat een willekeurige waarde uit de ene groep kleiner dan of groter dan een willekeurige waarde uit de andere groep is. Deze test wordt veel gebruikt om vast te stellen of twee onafhankelijke steekproeven dezelfde verdeling hebben (Mann & Whitney, 1947).

De test gaat als volgt: de datasets worden samengevoegd en de rang van elke waarneming wordt bepaald. Voor elke dataset wordt de som van de rangen van elke dataset bepaald. Een significant verschil tussen de som van de rangen geeft een significant verschil tussen de verdeling van de twee datasets aan. Dit verschil wordt aangegeven met de Z-waarde. De absolute waarde van deze Z-waarde wordt vergeleken met de Z-waarde van het gewenste significantieniveau. In dit onderzoek wordt gebruik gemaakt van SPSS, waarin naast de Z-waarde, direct de P-waarde afgelezen kan worden. De P-waarde geeft aan of het waarschijnlijk is dat er een verschil tussen twee groepen is. Hoe kleiner de P-waarde, hoe groter de waarschijnlijkheid dat er een verschil is tussen de twee groepen. De P-waarde is in SPSS aangegeven met Asymp. Sig. (2-tailed). Hoewel de verwachting is dat de GR klas beter zou scoren op de probleemoplossende vraagstukken, en een eenzijdige toets voldoende zou lijken, is er toch voor een tweezijdige toets gekomen. Dit omdat beide uitkomsten mogelijk zijn. De verwachting is dat GR positief uitpakt, maar vanwege vele andere factoren (zie hoofdstuk variabelen) kan het ook de andere kant op uitpakken. Beide kanten worden onderzocht. Dit onderzoek gaat uit van een significantieniveau van 5%. Dit betekent dat bij een P-waarde van minder dan 0.05 de nulhypothese van de Mann-Whitney U-toets verworpen kan worden. De nulhypothese voor beide soorten vragen (theoretisch en probleemoplossend) voor de Mann-Whitney U-toets is dat er geen verschil tussen de klassen is (dit kan dus aan twee kanten getoetst worden). De hypothese van mijn onderzoek is dat er wel degelijk verschil tussen de klassen zal zijn op het gebied van probleemoplossend vermogen. Wanneer de nulhypothese van de Mann-Whitney U-toets bij het probleemoplossend vermogen verworpen wordt, komt dit dus overeen met het niet verwerpen van de hypothese van het onderzoek.

De vragen worden daarnaast per leerdoel geanalyseerd. Per leerling kan worden gecontroleerd in hoeverre de leerdoelen van de les zijn bereikt. Mochten de resultaten dan opvallend zijn, dan kan hiermee gecontroleerd worden aan welk leerdoel tijdens de les onvoldoende aandacht is besteed. Dit is vooral van belang voor de verbetering van het onderzoek. Zoals in de onderbouwing van de testopgave ook al is aangegeven kunnen we het behalen van de leerdoelen controleren aan de hand van de volgende testopgaven:

Leerdoel 1: Vraag 1,2a en 2b

Leerdoel 2: Vraag 1

Leerdoel 3: Vraag 2a,2b

Leerdoel 4: Vraag 3, 4a, 4b

Leerdoel 5: Vraag 4b

Per leerdoel kan nu ook door middel van de Mann-Whitney U-toets worden vastgesteld of er een verschil is tussen de twee klassen. De nulhypothese is hier voor elk leerdoel hetzelfde: de verwachting is dat beide klassen beide leerdoelen even goed ontwikkelen.

Een aanname die normaliter bij de Mann-Whitney toets wordt gemaakt, is dat gelijke uitkomsten niet mogelijk zijn, wat belangrijk is voor de unieke ordening van datapunten, waardoor deze toets normaal gesproken enkel voor continu verdeelde datasets gebruikt wordt (Mann & Withney, 1947). Bij gebruik van continue verdelingen zijn gelijke scores binnen een groep namelijk niet mogelijk. In dit onderzoek hebben we echter te maken met discrete data, maar het maakt niet uit welke leerling op welke plek in de ordening komt, zolang zij eenzelfde resultaat hebben behaald. Door de data te ordenen op een van de mogelijke manieren, wat SPSS automatisch doet, kan de Mann-Whitney U toets worden uitgevoerd voor de ordinale verdeling waar wij mee werken.

RESULTATEN

De nulhypothese voor beide soorten vragen (theoretisch en probleemoplossend) is in dit geval dat er geen verschil is tussen de twee klassen. Omdat blijkt uit de Mann-Whitney U-toets dat de P-waarde bij de theoretische vragen kleiner is dan 0.05 (zie onderstaande gegevens uit SPSS) wordt de nulhypothese voor de theoretische opgaven verworpen. Voor de probleemoplossende vragen kunnen we de nulhypothese niet verwerpen. De P-waarde (0,983) is daar veel te groot voor. Naast de P-waarde kan in onderstaande afbeelding ook het aantal leerlingen (N), de gemiddelde rang (Mean Rank), som van de rangen (Sum of Ranks) en de Z-waarde (Z) worden afgelezen.

Mann-Whitney Test

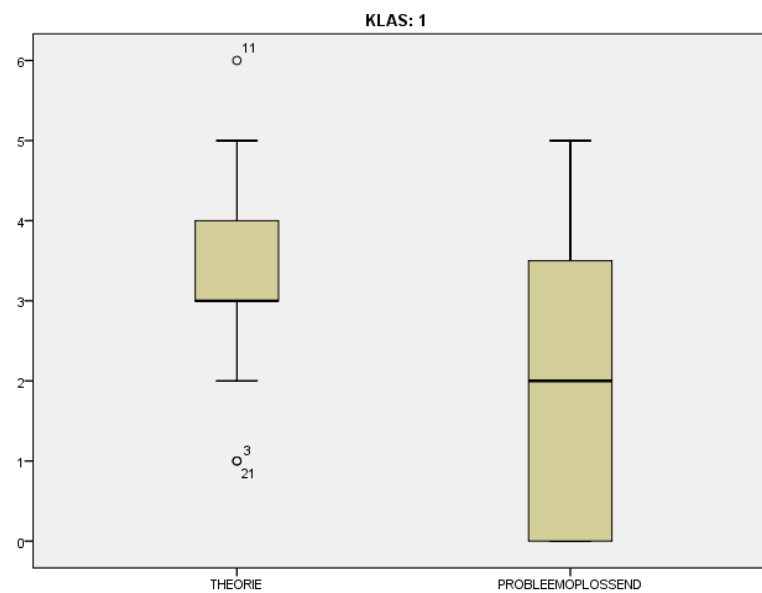
	Ranks			
	KLAS	N	Mean Rank	Sum of Ranks
THEORIE	1	22	29,50	649,00
	2	26	20,27	527,00
	Total	48		
PROBLEEMOPLOSSEND	1	22	24,55	540,00
	2	26	24,46	636,00
	Total	48		

Test Statistics^a

a. Grouping Variable: KLAS	THEORIE	PROBLEEMOPLOSSEND
Mann-Whitney U	176,000	285,000
Wilcoxon W	527,000	636,000
Z	-2,402	-,021
Asymp. Sig. (2-tailed)	,016	,983

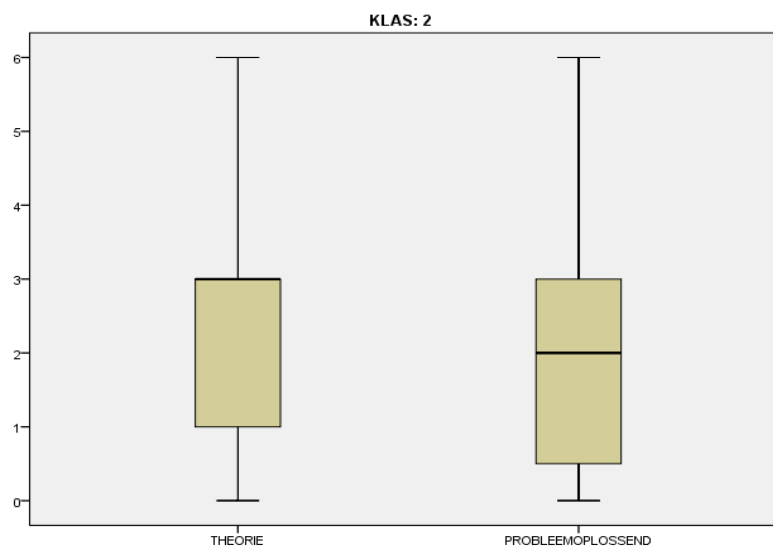
Tabel 7 : Mann-Whitney U-toets theoretisch niveau en probleemoplossend vermogen

Van het aantal behaalde punten in beide categorieën van beide groepen kunnen boxplots gemaakt worden. Deze zijn te zien in Figuur 1 en Figuur 2.



Figuur 1: Boxplot aantal behaalde punten klas GT(1)

Naast het analyseren van de toetresultaten op het gebied van theoretisch en probleemoplossend niveau, zijn ook de verschillende leerdoelen geanalyseerd. Dit is belangrijk om te kijken of de leerdoelen uit de les bij beide klassen voldoende zijn behaald. De resultaten per leerdoel zijn berekend door de totale score van de opgaven te nemen die aansluiten bij elk specifiek leerdoel. Weer wordt de Mann-Whitney U-test gebruikt. De resultaten zijn te zien op de volgende pagina.



Figuur 2: Boxplot aantal behaalde punten klas GR(2)

Mann-Whitney Test

	Ranks			
	KLAS	N	Mean Rank	Sum of Ranks
LEERDOEL1	1	22	27,09	596,00
	2	26	22,31	580,00
	Total	48		
LEERDOEL2	1	22	28,86	635,00
	2	26	20,81	541,00
	Total	48		
LEERDOEL3	1	22	23,50	517,00
	2	26	25,35	659,00
	Total	48		
LEERDOEL4	1	22	26,16	575,50
	2	26	23,10	600,50
	Total	48		
LEERDOEL5	1	22	24,95	549,00
	2	26	24,12	627,00
	Total	48		

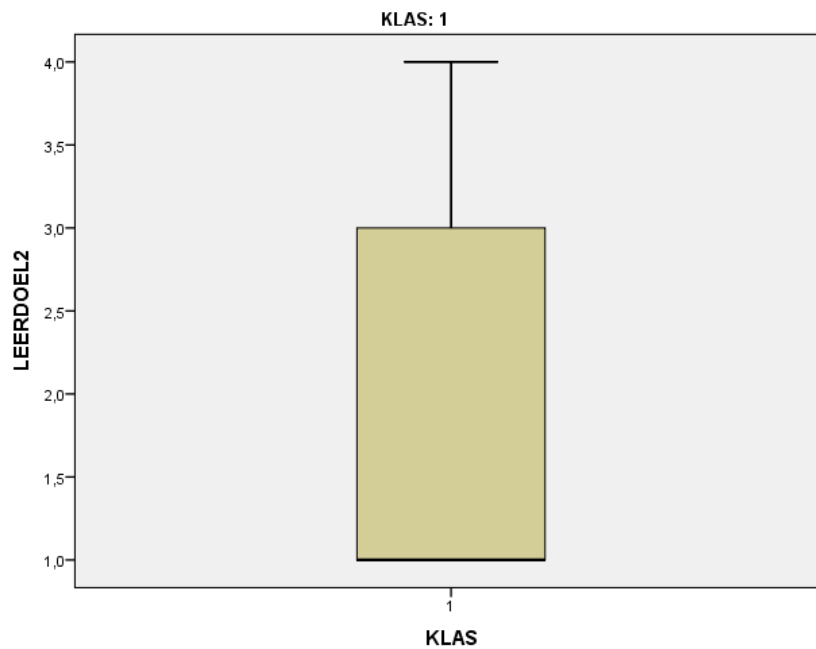
Test Statistics^a

a. Grouping Variable: KLAS

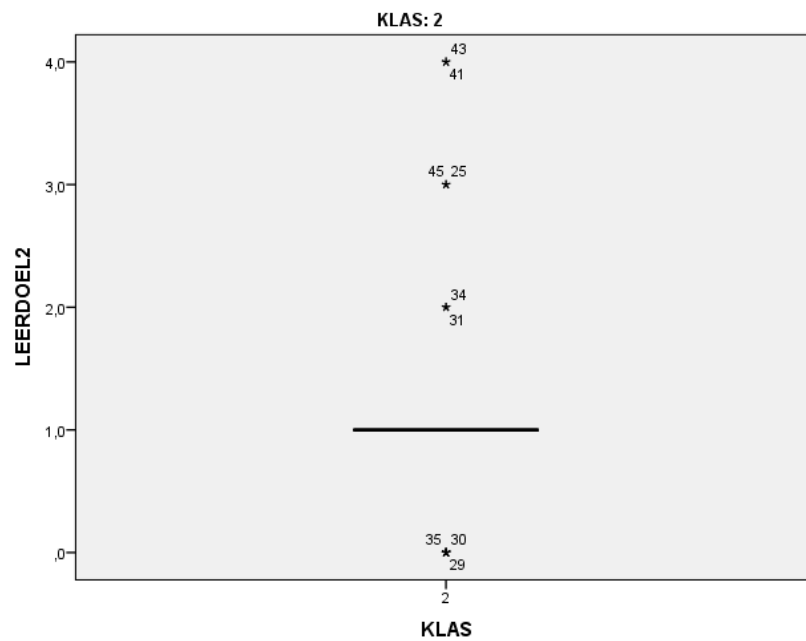
	LEERDOEL1	LEERDOEL2	LEERDOEL3	LEERDOEL4	LEERDOEL5
Mann-Whitney U	229,000	190,000	264,000	249,500	276,000
Wilcoxon W	580,000	541,000	517,000	600,500	627,000
Z	-1,201	-2,199	-,486	-,781	-,292
Asymp. Sig. (2-tailed)	,230	,028	,627	,435	,770

Tabel 8 : Mann-Whitney U-toets per leerdoel

De nulhypothese is hier voor elk leerdoel hetzelfde: we verwachten dat beide klassen beide leerdoelen op eenzelfde niveau ontwikkelen. Na analyse met de Mann-Whitney U-test kan met een significantieniveau van 5% worden vastgesteld dat deze nulhypothese niet wordt verworpen voor de leerdoelen 1,3,4 en 5, maar wel wordt verworpen voor leerdoel 2. Op de volgende pagina staan ook de boxplots die horen bij het aantal behaalde punten van leerlingen uit beide klassen voor leerdoel 2.



Figuur 1: Boxplot aantal behaalde punten leerdoel 2 klas GT(1)



Figuur 4: Boxplot aantal behaalde punten leerdoel 2 klas GR(2)

CONCLUSIE

Aan de hand van de Mann-Whitney U-test kan met een significantieniveau van 5% worden vastgesteld dat er een verschil is tussen de prestaties van de twee klassen op de theoretische opgaven. De gemiddelde rang verschilt bij het theoretisch niveau duidelijk meer dan bij het probleemoplossend vermogen: (29,50 en 20,27 bij het theoretisch vermogen van respectievelijk klas GT(1) en GR(2) t.o.v. 24,55 en 24,45 bij het probleemoplossend vermogen van respectievelijk klas GT(1) en GR(2). Aan de bijbehorende boxplots is ook te zien dat de GT(1) meer hoge scores haalt dan de GR(2) klas. Deze resultaten gecombineerd zorgen ervoor dat kan worden geconcludeerd dat er een verschil is in het presteren op theoretische opgaven tussen de twee klassen.

Omdat de nulhypothese voor de probleemoplossende vraagstukken niet verworpen wordt, zijn hier geen aanwijzingen voor een significant verschil in presteren tussen de klassen. De boxplots bevestigen dit beeld. Er is dus onvoldoende bewijsmateriaal om te kunnen concluderen dat de twee klassen verschillend presteren op de probleemoplossende vraagstukken.

Het verschil in theoretische kennis is een opmerkelijk resultaat. Dit verschil maakt het nu extra belangrijk om een leerdoel-analyse te doen zodat kan worden gekeken of er een leerdoel is waar de GR(2) klas ten opzichte van de GT(1) klas relatief lager op scoort.

Aan de hand van de Mann-Whitney U-test kan met een significantieniveau van 5% worden vastgesteld dat er een verschil is in niveau tussen de klassen, bij vragen die testen op leerdoel 2. De boxplots die bij dat leerdoel horen, laten zien dat de GR(2) klas hier lager scoort dan de GT(1) klas (Er is bij de GT(1) klas een spreiding te zien tussen 1 en 3 punten, waar bij de GR(2) klas, op een paar uitschieters na, vrijwel alle leerlingen slechts 1 punt behalen). De les in de GR(2) klas bereikt dus onvoldoende leerdoel 2 ten opzichte van de les in de GT(1) klas. Leerdoel 2 is als volgt: *'Ik kan aantonen of gebeurtenissen afhankelijk of onafhankelijk zijn (met behulp van een kruistabel)'*. De leerlingen uit de GR klas waren klaarblijkelijk onvoldoende in staat om aan de hand van een kruistabel aan te tonen of gebeurtenissen afhankelijk of onafhankelijk zijn terwijl de leerlingen uit de GT klas hiertoe wel in staat waren. Mogelijk hebben de leerlingen de theorie niet voldoende onder de knie of weten ze niet hoe ze kansen uit moeten rekenen aan de hand van een kruistabel.

De opgaven in de les hebben mogelijk onvoldoende bijgedragen aan het behalen van leerdoel 2. In het werkblad van versie GR(2) zijn dit de opgaven 6 en 7 (en daarvoor nodig zijn opgave 1,2,4 en 5).

Op de overige leerdoelen is geen significant verschil gemeten.

Uit dit onderzoek kan dus worden geconcludeerd dat de leerdoelen van beide klassen niet even goed bereikt zijn. Hierdoor is er een verschil in theoretische kennis ontstaan. Doordat een theoretische basis zo belangrijk is voor het probleemoplossend vermogen, is het lastig uitspraken te doen over het probleemoplossend vermogen. Ondanks het verschil in theoretisch vermogen is er geen aantoonbaar verschil tussen het probleemoplossend vermogen van de GR en de GT klas. Als antwoord op de onderzoeksvraag kan dus worden geconcludeerd dat een mogelijke invloed van het probleemoplossend vermogen door dit onderzoek kan worden uitgesloten noch worden aangetoond.

DISCUSSIE

Het niveauverschil tussen de twee klassen op theoretisch vlak geeft aan dat er een groot verbeterpunt is voor vervolgonderzoek. Het huidige onderzoek is gedaan met een kleine steekproef waardoor er al kleine dingen kunnen zijn die het verschil in de resultaten tussen de twee groepen groot maken. Het verschil tussen de werksfeer van de twee lessen kan al een grote invloed hebben. De GR klas bevat 28 leerlingen en de GT klas maar 23. Ik heb tijdens de lessen gemerkt dat het geluidsniveau in de GR klas hoger was dan bij de GT klas. De les kan door deze verschillen in beide klassen een verschillend leerresultaat opleveren. Los van invloeden van buitenaf, is het ook belangrijk om te beredeneren of de theoretische kennis misschien door de guided reinvention minder goed is opgeslagen. Er zijn een aantal mogelijke verklaringen voor de relatief lage score op theoretisch niveau van de GR klas. Ten eerste zou het kunnen dat leerlingen niet gewend zijn om theorie zelf te ontdekken. In dat geval zou het onderzoek uitgebreid moeten worden naar meerdere lessen zodat leerlingen hieraan kunnen wennen. Dit geldt natuurlijk ook voor de docent. De docent die de lessen gaf, was mogelijk ook onvoldoende gewend aan het werken met guided reinvention. Een tweede reden zou kunnen zijn dat een aantal leerlingen dacht het juiste antwoord ingevuld te hebben bij de theorieblokken, terwijl dit niet het geval was. Dit is het gevolg van een onvoldoende ingebouwd controlemoment in de les. In de huidige les zit namelijk geen moment van controle of wordt niet aangegeven dat leerlingen hun antwoorden moeten controleren. Dit leidt ertoe dat sommige leerlingen niet met de juiste theoretische achtergrond de toets maken. Om het verschil in theoretisch niveau kleiner te maken is het belangrijk om er als docent zekerder van te zijn dat de leerling uit de GR klas zijn/haar theorie aan het eind van de les correct in de theorieblokken heeft staan. Dit kan gedaan worden doordat de docent aan het eind van de les het werkblad bespreekt. Ook zouden er eventueel uitwerkingen uitgedeeld kunnen worden aan leerlingen, mits ze het werkblad eerst zelf hebben gemaakt. Voor vervolgonderzoek wordt geadviseerd dit in de docentenhandleiding uitgebreider mee te nemen. Een gevolg van onjuiste theorie op het werkblad kan anders een theoretische achterstand veroorzaken die tijdens het maken van huiswerk niet opgeheven kan worden - omdat de leerling niet over de juiste theorie beschikt om verder te gaan - waardoor de achterstand alleen maar groter wordt.

Opvallend is dat de leerlingen uit beide klassen, ondanks het verschil in theoretisch niveau, wel gelijkmatig lijken te scoren op het niveau van probleemoplossend vermogen. Het zou in eerste instantie kunnen dat de leerlingen uit de GR klas wel inzicht hebben gekregen tijdens het maken van de opgaven in de les, maar dat het hun alleen aan theoretische basis tekort is gekomen. Het blijft alsnog lastig om iets te zeggen over het probleemoplossend vermogen omdat, zoals eerder gesteld, een goede theoretische basis essentieel zou zijn om een goed probleemoplossend vermogen te ontwikkelen. Uitspraken hierover kunnen pas gedaan worden als er geen significant verschil in theoretisch niveau wordt vastgesteld.

De resultaten van eerdere wiskundetoetsen zijn in dit onderzoek niet meegenomen. Omdat er onvoldoende eerdere toetsresultaten waren om daadwerkelijk wat te kunnen zeggen over het algemeen niveau van de twee klassen, hebben we aangenomen dat de twee klassen een gelijk niveau hebben. Het zou natuurlijk zo kunnen zijn dat er wel een verschil is tussen het algemeen wiskundige niveau van de twee klassen.

Het onderzoek is momenteel op kleine schaal gedaan en zou betere resultaten geven als het grootschalig uitgevoerd zou worden. Het uitvoeren van de les in veel meer klassen, geeft een beter beeld van de invloed van guided reinvention op het probleemoplossend vermogen in kansrekening. Bovendien is het huidige onderzoek toegespitst op maar één enkel onderdeel van de kansrekening en is dit onderdeel maar in een les behandeld. Schaalvergroting zou dus ook in tijdsduur en hoeveelheid kunnen. Dit geeft naar verwachting een beter beeld van de eventuele invloed van guided reinvention op het probleemoplossend vermogen.

In de toets zat een typefout die tijdens het maken van de toets wel mondeling is hersteld. Dit werd te laat geconstateerd en kon i.v.m. de beschikbare tijd niet meer hersteld worden en opnieuw worden uitgedraaid.

De invloed van de typefout is klein omdat de fout klassikaal en bij beide klassen op dezelfde manier hersteld is. Er is besloten om deze vraag niet uit het onderzoek te halen omdat bij verwijderen van deze vraag ook het testen van een essentieel leerdoel verloren zou gaan. Bovendien is er getest wat de invloed van het verwijderen van vraag 4b (de vraag met de typefout) is, en dit leverde geen grote verschillen op. Als vraag 4b niet meegenomen wordt in het onderzoek kan er nog steeds geen verschil in niveau op het gebied van probleemoplossend vermogen worden geconcludeerd omdat de Mann-Whitney U-test in dit geval wederom een grote waarde geeft (0,646). De resultaten van deze analyse zijn te vinden in bijlage I.

Tussen de les waarin de leerlingen met het werkblad aan de gang gingen en het maken van de toets zaten bij beide klassen 2 dagen. Er is geen moment geweest waarop leerlingen hun kennis konden opfrissen. Hierdoor zat de theoretische kennis niet meer zo vers in het geheugen als tijdens het maken van het werkblad. Er is wat te zeggen voor het feit dat het onthouden van theorie over een aantal dagen ook bij het begrip zou kunnen horen. Er wordt betwijfeld of de leerlingen met het maken van het werkblad en het thuis maken van huiswerkopgaven de theorie nog scherp hadden bij de toets. Problematisch hierbij is ook dat bij het maken van huiswerk niet gecontroleerd kan worden op de manier waarop leerlingen te werk gaan. Er is geen zicht op eventueel overschrijven van uitwerkingenboeken of het niet maken van het huiswerk. Voor vervolgonderzoek zou er gekeken kunnen worden naar het onthouden en gebruik van theorie, kort nadat leerlingen het hebben geleerd. Ook hier wordt aangeraden het onderzoek over meerdere lessen en een langere tijdsspanne te laten lopen.

De lessen zijn momenteel uitgevoerd door de onderzoeker zelf. Daarbij gaf de onderzoeker al regelmatig les aan de GR klas en was de GT klas nieuw voor de onderzoeker. Dit heeft zeer waarschijnlijk invloed op het leerklimaat in beide klassen en daarmee mogelijk ook op de effectiviteit van het leren. Aangezien de docent bij dit onderzoek een grote rol heeft zou het goed zijn om de lessen door verschillende docenten te laten uitvoeren en te analyseren wat de verschillen in lesgeven zijn. Door dit te analyseren kunnen de lessen verbeterd worden en kan het verschil tussen docenten verkleind worden. De vaardigheden op het gebied van klassenmanagement kunnen in de les niet worden meegerekend. Toch is het scheppen van een goed leerklimaat noodzakelijk voor het uitvoeren van de lessen. Het zou kunnen dat een beginnend docent hierdoor de klas onvoldoende aan het werk kan zetten waardoor er ook verschillen in leerresultaten worden veroorzaakt. Om nuttige resultaten te krijgen, is het dus belangrijk dat de lessen worden uitgevoerd door docenten die erin slagen een prettig leerklimaat te scheppen voor alle leerlingen.

AANBEVELINGEN

Voor vervolgonderzoek op dit gebied wordt vooral aangeraden om de steekproef te vergroten en de lessen meerdere malen te testen en te verbeteren om er zo voor te zorgen dat de leerdoelen in beide klassen voldoende behaald worden. Hierdoor wordt voorkomen dat er een groot verschil in theoretisch vermogen wordt gemeten. Daarnaast wordt aangeraden om het onderzoek uit te breiden naar meerdere lessen en docenten met meer ervaring in guided reinvention te gebruiken. Hier kan namelijk mee worden voorkomen dat zowel de leerlingen als de docent niet gewend zijn aan guided reinvention tijdens de les.

Omdat het probleemoplossend vermogen veel te maken heeft met het kunnen bepalen van een strategie om tot oplossingen te komen, is het interessant om deze strategie van leerlingen bloot te leggen. Voor vervolgonderzoek wordt geadviseerd om deze stappen nog helderder naar boven te krijgen. Dit zou eventueel kunnen aan de hand van interviews waarin kan worden onderzocht tot welke denkstappen de leerling wel of niet in staat is.

Om te voorkomen dat er twee klassen worden gebruikt die in het algemeen al een niveauverschil hebben, is het belangrijk om in vervolgonderzoek van te voren naar het wiskundige niveau van de leerlingen te kijken. Dit kan bijvoorbeeld door eerdere toetsmomenten van de leerlingen te analyseren. Als er een verschil in niveau opgemerkt wordt tussen de klassen, kan er bewust een klassenindeling gemaakt worden waarbij kan worden aangenomen dat het wiskundig niveau niet significant verschilt.

REFERENTIES

- Barton, C. (2018). Volgens Barton – deel 2. Culemborg, Nederland: Phronese.
- College voor toetsen en examens, (2018). Wiskunde A VWO syllabus centraal examen 2020 Versie 2, geraadpleegd van https://www.examenblad.nl/examenstof/syllabus-2020-wiskunde-a-vwo/2020/f=/wiskunde_A_2_versie_vwo_2020.pdf
- Drijvers, P., van Streun, A. & Zwaneveld, B. (2016). *Handboek wiskundendidactiek* (5e druk). Amsterdam, Nederland: Epsilon Uitgaven
- Freudenthal, H. (1991). Revisiting mathematics education: China lectures, University of Utrecht
- ter Heege, J. Wat is realistisch reken-wiskundeonderwijs? (2009)
- Lijnse, P. (2007). Over een probleemstellende aanpak en guided reinvention. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 26(1), 3-11.
- Mann, H., & Whitney, D. (1947). On a Test of Whether one of Two Random Variables is Stochastically Larger than the Other. *The Annals of Mathematical Statistics*, 18(1), 50-60. Retrieved February 14, 2020, from www.jstor.org/stable/2236101
- Reitman, W. R. (1965). Cognition and thought. New York: Wiley
- Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. Orlando, FL: Academic Press.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 77(1), 20-26.
- Tricot, A., & Sweller, J. (2014). Domain-specific knowledge and why teaching generic skills does not work. *Educational Psychology Review*, 26(2), 265-283.
- Wilson, J. W., Fernandez, M. L., & Hadaway, N. (1993). Mathematical problem solving. In P. S. Wilson (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics*, 57-78.

BIJLAGEN

BIJLAGE I - OVERIGE RESULTATEN SPSS

Mann-Whitney Test

Ranks				
	KLAS	N	Mean Rank	Sum of Ranks
THEORIE	1	22	29,50	649,00
	2	26	20,27	527,00
	Total	48		
PROBLEEMOPLOSSEND	1	22	24,55	540,00
	2	26	24,46	636,00
	Total	48		
PROBLEEM OPLOSSEND ZONDER VRAAG4B	1	22	23,52	517,50
	2	26	25,33	658,50
	Total	48		

Test Statistics ^a			
	THEORIE	PROBLEEMOPLOSSEND	PROBLEEM OPLOSSEND ZONDERVRAAG 4B
Mann-Whitney U	176,000	285,000	264,500
Wilcoxon W	527,000	636,000	517,500
Z	-2,402	-,021	-,459
Asymp. Sig. (2-tailed)	,016	,983	,646

a. Grouping Variable: KLAS

BIJLAGE II - LES

INHOUD

Inhoudelijke opbouw les (voor beide klassen V4A2, V4A1)

	Leerdoelen voor de leerling	Hoofdpogave	Oefenopgav(en)
Les 1 (50 minuten) Theorie: (on)afhankelijk- heid Productregel	1. Ik kan onafhankelijke en afhankelijke gebeurtenissen herkennen in een context 2. Ik kan aantonen of gebeurtenissen afhankelijk of onafhankelijke zijn (met behulp van een kruistabel) 3. Ik weet dat slechts voor onafhankelijke gebeurtenissen A en B geldt: $P(A \text{ onder voorwaarde } B) = P(A)$ en ik kan uitleggen waarom 4. Ik ken de productregel voor onafhankelijke kansexperimenten en kan deze toepassen. 5. Ik weet dat ik de productregel niet mag toepassen voor afhankelijke kansexperimenten en kan onderbouwen waarom	Werkblad "Vaker groen bij regen"	Opgaven uit Getal en Ruimte <i>Huiswerk:</i> 32,33,35,39 Wat niet af is als huiswerk opgeven voor de volgende les.
Les 2 (50 minuten) Theorie: Productregel	Leerdoelen herhalen		Huiswerk volgende les: volgens de planner.
	Test: Probleemoplossend vermogen (30 minuten)		

PLANNING

Les 1

Guided reinvention
Gegeven theorie

Tijd	Wat		Activiteit docent	Activiteit leerlingen	
5	Inloop en introductie van de les		Begroeten van de leerlingen, benoemen van de leerdoelen, planning presenteren,	Spullen erbij pakken, oriënteren op de les,	
5	Op het bord: $P(A B)$ betekent: De kans op A onder voorwaarde B. Voorbeeld: $P(\text{kleurenblind} \text{jongen})$: De kans dat een jongen kleurenblind is. (De voorwaarde is hier dat de leerling een jongen is.) Docent legt uit hoe je gebeurtenissen noteert Voorbeeld: Re betekent dat het wel regent, Re betekent dat de gebeurtenis regen niet optreedt: het regent niet.		Uitleg voorwaardelijke kans en notatie gebeurtenissen. Uitdelen werkbladen	Luisteren naar de uitleg, werkbladen voor zich nemen.	
20	Maken werkblad (on)afhankelijke gebeurtenissen Versie guided reinvention opgave 1 t/m 7	Maken werkblad (on)afhankelijke gebeurtenissen Versie gegeven theorie opgave 1 t/m 6	De docent loopt rond, beantwoordt vragen, controleert of de leerlingen aan het werk zijn en of ze vastlopen. De docent geeft zo nodig aanwijzingen. Hierbij te gebruiken: docentenhandleiding	Maken werkblad guided reinvention opgave 1 t/m 7 In tweetallen of individueel (naar eigen voorkeur)	Maken werkblad gegeven theorie opgave 1 t/m 6 In tweetallen of individueel (naar eigen voorkeur)
10	Maken werkblad Productregel bij onafhankelijke gebeurtenissen	Maken werkblad Productregel bij onafhankelijke gebeurtenissen	De docent loopt rond, beantwoordt vragen, controleert of de leerlingen aan het werk zijn en of ze vastlopen. De docent geeft zo nodig aanwijzingen.	Maken werkblad guided reinvention overige opgaven	Maken werkblad gegeven theorie overige opgaven

	Versie guided reinvention overige opgaven	Versie gegeven theorie overige opgaven	Hierbij te gebruiken: docentenhandleiding.	In tweetallen of individueel (naar eigen voorkeur) Klaar? Opgaven van de planner maken.	In tweetallen of individueel (naar eigen voorkeur) Klaar? Opgaven van de planner maken.
10	Zelfstandig werken		Docent beantwoordt eventuele vragen	Opgaven 31 en 32 maken uit Getal en Ruimte	
-	Als er tijd over is: werken aan de overige huiswerkopgaven.		Docent beantwoordt eventuele vragen	Huiswerk: opgave 31, 32, 35 en 39 maken	
2	Afsluiting les		-	-	

Les 2

Guided reinvention
Gegeven theorie

Tijd	Wat	Activiteit docent	Activiteit leerlingen
5	Inloop en introductie van de les	Begroeten van de leerlingen, benoemen van de leerdoelen, planning presenteren	Spullen erbij pakken, oriënteren op de les
35	Test: probleemoplossend vermogen	Surveilleren, toetsmateriaal voorbereiden	Maken van de testopgaven
10	Uitloop. Einde onderzoek.		Eventueel extra tijd voor leerlingen die hier recht op hebben. Mogelijkheid tot het maken van huiswerkopgaven, een discussie over wat de leerlingen hebben geleerd of extra uitleg.

WERKBLAD

VERSIE GR(2)

Onderweg naar school komt Tim langs twee stoplichten. Tijdens het fietsen let hij op twee dingen: wel/geen regen en groen/rood licht bij de stoplichten. We duiden deze gebeurtenissen aan met **Re**, **Re**, **Gr**, **Gr**.

Tim fietst eerst langs een stoplicht in Lonneker. Tim houdt bij hoe vaak het regent en hoe vaak het stoplicht op groen of op rood staat. In totaal rijdt hij 500 keer langs hetzelfde stoplicht. De resultaten zijn als volgt:

Stoplicht 1 (Lonneker)	Groen licht bij aankomst (Gr)	Rood licht bij aankomst (Gr)	
Regen (Re)	25	75	100
Geen regen (Re)	100	300	400
	125	375	500

1. Wat is de kans op groen licht bij aankomst? Schrijf dit op als $P(\text{Gr})=...$

.....

.....

.....

2. Wat is de kans op groen licht bij aankomst, gegeven dat het regent? Schrijf dit op als $P(\text{Gr} | \text{Re})=$

.....

.....

.....

Verderop Tim's reis naar school komt hij langs nog een stoplicht in Oldenzaal. Bij dit stoplicht hangt een bordje met daarop de tekst: 'Bij regen vaker groen'. Gemiddeld staat het stoplicht even vaak op groen als het eerste stoplicht in Lonneker. We gaan onderzoeken wat dit bordje betekent voor de kansen.



3. Bekijk het bordje op bovenstaande afbeelding. Wat betekent dit voor de kans op groen licht? Leg uit.
-
-
-

Ook van het stoplicht in Oldenzaal houdt Tim informatie bij tijdens de 500 keer dat hij hier langs fietst. We vergelijken het stoplicht in Lonneker (stoplicht 1) met het stoplicht in Oldenzaal (stoplicht 2). De gegevens van stoplicht 2 staan in onderstaande kruistabel:

Stoplicht 2 (Oldenzaal)	Groen licht bij aankomst (Gr)	Rood licht bij aankomst (Gr̄)	
Regen (Re)	40	60	100
Geen regen (Rē)	85	315	400
	125	375	500

4. Wat is de kans op groen licht bij aankomst bij stoplicht 2? Schrijf dit op als $P(\mathbf{Gr}) =$
-
-
-

5. Wat is de kans op groen licht bij aankomst bij stoplicht 2, gegeven dat het regent? $P(\mathbf{Gr} \mid \mathbf{Re}) =$

.....

.....

.....

.....

Als gebeurtenissen elkaar beïnvloeden, spreken we van **afhankelijke gebeurtenissen**. Als dit niet zo is spreken we van **onafhankelijke gebeurtenissen**.

6. a. Vul je antwoorden van vraag 1,2,4 en 5 in de tabel hieronder. Vergelijk je antwoord op vraag 1 met je antwoord op vraag 2 en je antwoord op vraag 4 met je antwoord op vraag 5. Komen deze overeen of verschillen ze? Leg uit hoe dit komt.

.....

.....

.....

b. Omcirkel in de laatste rij ook of de gebeurtenissen **Re** en **Gr** afhankelijke of onafhankelijke gebeurtenissen zijn.

Stoplicht 1	Stoplicht 2
Vraag 1. $P(\mathbf{Gr}) =$	Vraag 4. $P(\mathbf{Gr}) =$
Vraag 2. $P(\mathbf{Gr} \mid \mathbf{Re}) =$	Vraag 5. $P(\mathbf{Gr} \mid \mathbf{Re}) =$
Re en Gr onafhankelijk/afhankelijk	Re en Gr onafhankelijk/afhankelijk

7. Vul in:

Voor onafhankelijke gebeurtenissen **A** en **B** geldt:
 $P(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) \dots P(\mathbf{A})$

Voor afhankelijke gebeurtenissen **A** en **B** geldt:
 $P(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) \dots P(\mathbf{A})$

8. Bereken aan de hand van de kruistabellen van de stoplichten de gevraagde kansen in onderstaande tabel.

Stoplicht 1 (Lonneker)	Stoplicht 2 (Oldenzaal)
$P(\mathbf{Re})=$	$P(\mathbf{Re})=$
$P(\mathbf{Re} \text{ en } \mathbf{Gr})=$	$P(\mathbf{Re} \text{ en } \mathbf{Gr})=$

9. Gebruik je antwoorden van vraag 8 en je antwoord van vraag 1.
Kleur het juiste rondje in:

Voor stoplicht 1 (Lonneker) geldt:

- ☐ $P(\mathbf{Re} \text{ en } \mathbf{Gr}) = P(\mathbf{Re})P(\mathbf{Gr})$
☐ $P(\mathbf{Re} \text{ en } \mathbf{Gr}) \neq P(\mathbf{Re})P(\mathbf{Gr})$

10. Gebruik je antwoorden van vraag 8 en je antwoord van vraag 4 Kleur het juiste rondje in:

Voor het stoplicht 2 (Oldenzaal) geldt:

- ☐ $P(\mathbf{Re} \text{ en } \mathbf{Gr}) = P(\mathbf{Re})P(\mathbf{Gr})$
☐ $P(\mathbf{Re} \text{ en } \mathbf{Gr}) \neq P(\mathbf{Re})P(\mathbf{Gr})$

11. Vul in:

Bij onafhankelijke gebeurtenissen A en B kan ik de productregel toepassen: $P(\mathbf{A} \text{ en } \mathbf{B}) \dots\dots P(\mathbf{A}) \cdot P(\mathbf{B})$ Bij afhankelijke gebeurtenissen A en B kan ik de productregel toepassen: $P(\mathbf{A} \text{ en } \mathbf{B}) \dots\dots P(\mathbf{A}) \cdot P(\mathbf{B})$

De theorie die je in opgave 11 hebt opgeschreven is **de productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen**.

Klaar? Maak de huiswerkopgaven die op de planner staan.

WERKBLAD

VERSIE GT(1)

Onderweg naar school komt Tim langs twee stoplichten. Tijdens het fietsen let hij op twee dingen: wel/geen regen en groen/rood licht bij de stoplichten. We duiden deze gebeurtenissen aan met **Re**, **Re**, **Gr**, **Gr**.

Tim fietst eerst langs een stoplicht in Lonneker. Tim houdt bij hoe vaak het regent en hoe vaak het stoplicht op groen of op rood staat. In totaal rijdt hij 500 keer langs hetzelfde stoplicht. De resultaten zijn als volgt:

Stoplicht 1 (Lonneker)	Groen licht bij aankomst (Gr)	Rood licht bij aankomst (Gr)	
Regen (Re)	25	75	100
Geen regen (Re)	100	300	400
	125	375	500

1. Wat is de kans op groen licht bij aankomst? Schrijf dit op als $P(\text{Gr})=...$

.....

.....

.....

2. Wat is de kans op groen licht bij aankomst, gegeven dat het regent? Schrijf dit op als $P(\text{Gr} | \text{Re})=$

.....

.....

.....

Er geldt dus bij stoplicht 1 (Lonneker): $P(\text{Gr} | \text{Re}) = P(\text{Gr})$

Theorie: Als gebeurtenissen elkaar beïnvloeden, spreken we van **afhankelijke gebeurtenissen**. Als dit niet zo is spreken we van **onafhankelijke gebeurtenissen**.

Voor onafhankelijke gebeurtenissen **A** en **B** geldt: $P(A | B) = P(A)$
 Voor afhankelijke gebeurtenissen **A** en **B** geldt dit niet

Verderop Tim's reis naar school komt hij langs een stoplicht in Oldenzaal. Bij dit stoplicht hangt een bordje met daarop de tekst: 'Bij regen vaker groen'. Gemiddeld staat het stoplicht even vaak op groen als het eerste stoplicht in Lonneker. De gebeurtenissen regen en groen licht zijn nu **afhankelijke gebeurtenissen**.



3. Bekijk het bordje op bovenstaande afbeelding. Wat betekent dit voor de kans op groen licht? Leg uit.

.....

.....

.....

Ook van het stoplicht in Oldenzaal houdt Tim informatie bij tijdens de 500 keer dat hij hier langs fietst. We vergelijken het stoplicht in Lonneker (stoplicht 1) met het stoplicht in Oldenzaal (stoplicht 2). De gegevens van stoplicht 2 staan in onderstaande kruistabel:

Stoplicht 2 (Oldenzaal)	Groen licht bij aankomst (Gr)	Rood licht bij aankomst (Gr)	
Regen (Re)	40	60	100
Geen regen (Re)	85	315	400
	125	375	500

4. Wat is de kans op groen licht bij aankomst bij stoplicht 2? Schrijf dit op als $P(\text{Gr})=$

.....

.....

.....

5. Wat is de kans op groen licht bij aankomst bij stoplicht 2, gegeven dat het regent? Schrijf dit op als $P(\text{Gr} | \text{Re})=$

.....

.....

.....

6. Laat zien dat de gebeurtenissen 'groen licht' en 'regen' bij stoplicht 2 afhankelijke gebeurtenissen zijn

.....

.....

.....

7. Bereken voor zowel stoplicht 1 (Lonneker), als voor stoplicht 2 (Oldenzaal) de kans op regen. Schrijf je antwoord in onderstaande tabel:

Stoplicht 1 (Lonneker)	Stoplicht 2 (Oldenzaal)
$P(\text{Re})=$	$P(\text{Re})=$

Theorie: Productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen
 Bij onafhankelijke gebeurtenissen **A** en **B** kan ik de productregel toepassen:

$$P(\mathbf{A} \text{ en } \mathbf{B}) = P(\mathbf{A}) * P(\mathbf{B})$$

Bij afhankelijke gebeurtenissen kan dit niet

8. Gebruik de theorie (productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen) op de vorige pagina. Laat met een berekening zien dat de productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen kan worden gebruikt bij stoplicht 1.

.....

.....

.....

9. Gebruik de theorie 'productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen'. Laat met een berekening zien dat de productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen niet kan worden gebruikt bij stoplicht 2 (Oldenzaal)

.....

.....

.....

Klaar? Maak de huiswerkopgaven die op de planner staan.

BIJLAGE III - LERARENHANDLEIDING

Lerarenhandleiding werkblad - versie GR

De docent fungeert als coach tijdens het maken van het werkblad. De leerlingen zullen af en toe vastlopen. Het is de bedoeling dat de docent de leerling verder helpt, maar het is belangrijk dat hierbij het antwoord of de strategie niet letterlijk gegeven wordt. In deze handleiding staan per vraag gegeven mogelijkheden voor de docent om de leerlingen op weg te helpen, zonder het antwoord of de strategie voor te schotelen.

Vraag	Mogelijk struikelpunt	Mogelijke hulp
1	Leerling weet niet meer hoe kansen uit te rekenen. Leerling heeft moeite met de notatie.	Docent verwijst naar vorige hoofdstuk: Kijk naar het aantal gunstige uitkomsten, wijs het juiste vakje aan en deel deze door het totaal. Docent legt notatie uit. Met (eventueel zelf bedacht) voorbeeld.
2	Leerling weet niet meer hoe voorwaardelijke kansen uit te rekenen. Leerling heeft moeite met de notatie.	Docent verwijst naar vorige hoofdstuk: Kijk naar het aantal gunstige uitkomsten, wijs het juiste vakje aan en deel door het totaal. Heb je hier te maken met een deelgroep/ voorwaarde? Docent legt notatie uit. Met (eventueel zelf bedacht) voorbeeld.
3	Leerling twijfelt over volledigheid antwoord. Leerling begrijpt context niet.	Docent vraagt wat de leerling al heeft. Docent vraagt de leerling in eigen woorden uit te leggen wat de consequenties zijn van het bord. Docent vraagt aan de leerling of de kans op groen licht toeneemt als het regent, en als het niet regent.
4	Zie vraag 1	Zie vraag 1
5	Zie vraag 2	Zie vraag 2
6	Leerling snapt niet waarom de linker kolom gelijk is en de rechter kolom niet	Vraag aan de leerling wat ze bij vraag 3 hadden. Er is dus een verschil tussen de stoplichten en blijkbaar kun je dat zien aan de kansen. Vraag de leerling om uit te leggen wat de uitgerekenen kansen betekenen. Voorbeeld van wat de leerling zegt : $P(\text{Gr} \text{Re})$: het regent en ik ga kijken wat de kans op groen licht is. Vraag de leerling waarom het logisch is dat dit niet gelijk is aan $P(\text{GR})$.

7	Leerling weet niet wat een algemene regel is. Leerling weet niet hoe met A en B om te gaan. Leerling ziet niet welk stoplicht onafhankelijk of afhankelijk gebeurtenissen genereert. Leerling ziet verband met vraag 6 niet.	Wijs de leerling erop dat ze hun antwoord bij deze vraag moeten baseren op het antwoord bij vraag 6. Het gaat over onafhankelijke gebeurtenissen. Welke van de twee stoplichten genereerde onafhankelijke gebeurtenissen? (stoplicht 1) Aan de leerling aangeven dat er nu in plaats van Re en Gr, A en B staan zodat we het algemeen maken. De leerling uitleggen dat we nu als het ware de theorie zelf formuleren zoals het boek dat normaal voor ons doet. Leerlingen erop wijzen dat $=$ of $\neq$ moeten invullen.
8	Zie vraag 1. Leerling weet niet meer hoe met $P(A \text{ en } B)$ om te gaan	Docent legt uit dat dit de kans is op regen en groen licht. Dat betekent dat je van te voren niet weet of het gaat regenen en ook niet weet of je groen licht hebt bij aankomst. Hebben we hier te maken met een deelgroep? (nee) Waar deel ik mijn geschikte uitkomsten dus door? (door het totaal aantal uitkomsten, dus door 500)
9	Leerling snapt notatie niet. Leerling linkt de opgave niet aan opgave 9.	Docent legt notatie uit. Met (eventueel zelf bedacht) voorbeeld. Benoemen dat de leerling ook opgave 9 moet gebruiken.
10	Leerling snapt notatie niet. Leerling linkt de opgave niet aan opgave 9.	Docent legt notatie uit. Met (eventueel zelf bedacht) voorbeeld. Benoemen dat de leerling ook opgave 9 moet gebruiken.
11	Zie vraag 7 Leerling ziet niet welk stoplicht onafhankelijk of afhankelijk gebeurtenissen genereert. Leerling ziet verband niet met vraag 10	Vraag de leerling opnieuw te benoemen welk van de twee stoplichten voor onafhankelijke en welke voor afhankelijk gebeurtenissen zorgde. Vraag de leerling om Re en Gr te vervangen voor A en B. Vraag de leerling om nu te vergelijken met het antwoord in vraag 10.

Lerarenhandleiding werkblad -versie GT

De docent fungeert als coach tijdens het maken van het werkblad. De leerlingen zullen af en toe vastlopen. Het is de bedoeling dat de docent de leerling verder helpt, maar het is belangrijk dat hierbij het antwoord of de strategie niet letterlijk gegeven wordt. In deze handleiding staan per vraag gegeven mogelijkheden voor de docent om de leerlingen op weg te helpen, zonder het antwoord of de strategie voor te schotelen.

Vraag	Mogelijk struikelpunt	Mogelijke hulp
1	Leerling weet niet meer hoe kansen uit te rekenen. Leerling heeft moeite met de notatie.	Docent verwijst naar vorige hoofdstuk: Kijk naar het aantal gunstige uitkomsten, wijs het juiste vakje aan en deel deze door het totaal. Docent legt notatie uit. Met eventueel zelf bedacht voorbeeld.
2	Leerling weet niet meer hoe voorwaardelijke kansen uit te rekenen. Leerling heeft moeite met de notatie.	Docent verwijst naar vorige hoofdstuk: Kijk naar het aantal gunstige uitkomsten, wijs het juiste vakje aan en deel door het totaal. Heb je hier te maken met een deelgroep/ voorwaarde? Docent legt notatie uit. Met eventueel zelf bedacht voorbeeld.
3	Leerling twijfelt over volledigheid antwoord. Leerling begrijpt context niet.	Docent vraagt wat de leerling al heeft. Docent vraagt de leerling in eigen woorden uit te leggen wat de consequenties zijn van het bord. Docent vraagt aan de leerling of de kans op groen licht toeneemt als het regent, en als het niet regent.
4	Zie vraag 1	Zie vraag 1
5	Zie vraag 2	Zie vraag 2
6	Leerling ziet niet aan welke theorie de vraag gekoppeld is. Leerling vindt het lastig om vanuit theorie een strategie voor de opgave te bepalen. Leerling weet niet welke kansen uit te rekenen om hier tot een antwoord te komen	Wijs de leerling op het theorieblok. Hoe kun je deze theorie gebruiken? (je kunt A en B vervangen door Re en Gr) Vraag de leerlingen wat de juiste kansen zijn en of ze deze al uitgerekend hebben. Vraag de leerling of hij/zij deze kans uit kan rekenen. De leerling heeft de kansen uitgerekend: Laat de leerling opnieuw vergelijken met de theorie en hier een conclusie uit trekken: de berekende kansen zijn niet gelijk dus volgens de theorie zijn de gebeurtenissen dan afhankelijk.

7	Zie vraag 1.	Zie vraag 1
8	Leerling heeft nog niet $P(\text{Re en Gr})$ uitgerekend. Leerling weet niet hoe de theorie gekoppeld is aan deze praktijkopgave. De leerling heeft zijn informatie wel verzameld maar ziet het verband er niet tussen.	Vraag leerlingen wat er nodig is om de vraag op te lossen. Laat de leerling hierbij de theorie gebruiken. Vraag de leerling welke kansen je dus moet gebruiken. Vraag de leerling of hij/zij deze kansen al heeft uitgerekend. Laat de leerling naar de theorie kijken en A en B vergelijken met Re en Gr bij stoplicht 1. Vraag de leerling of er bij stoplicht 1 sprake is van onafhankelijke gebeurtenissen.
9	Leerling heeft nog niet $P(\text{Re en Gr})$ uitgerekend. Leerling weet niet hoe de theorie gekoppeld is aan deze praktijkopgave. De leerling heeft zijn informatie wel verzameld maar ziet het verband er niet tussen.	Vraag leerlingen wat er nodig is om de vraag op te lossen. Laat de leerling hierbij de theorie gebruiken. Vraag de leerling welke kansen je dus moet gebruiken. Vraag de leerling of hij/zij deze kansen al heeft uitgerekend. Laat de leerling naar de theorie kijken en A en B vergelijken met Re en Gr bij stoplicht 2. Vraag de leerling of er bij stoplicht 2 sprake is van afhankelijke gebeurtenissen en waarom.

BIJLAGE IV - TOETS

Opgave 1.

Onderstaande tabel geeft informatie over een groep van 90 leerlingen.

	Blond haar	Andere haarkleur	
Meisje	28	14	42
Jongen	32	16	48
	60	30	90

Toon aan dat de gebeurtenissen 'leerling heeft blond haar' en 'leerling is een meisje' onafhankelijke gebeurtenissen zijn. Onderbouw met uitleg en berekening.

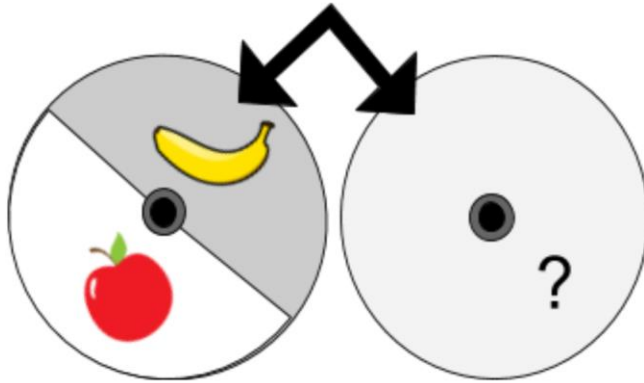
Opgave 2.

(De getallen in deze opgaven zijn fictief en komen dus niet overeen met de werkelijkheid)

Er solliciteren jaarlijks 100 mannen en 300 vrouwen voor een opleiding geneeskunde. Er worden jaarlijks 180 mensen aangenomen. Het blijkt dat $P(\text{'sollicitant wordt aangenomen' en 'de sollicitant is een vrouw'}) = 3/10$

- Onderbouw met een uitleg en berekening waarom 'de sollicitant wordt aangenomen' en 'de sollicitant is een vrouw' afhankelijke gebeurtenissen zijn.
- Hoeveel meer vrouwen in plaats van mannen zouden er aangenomen moeten worden zodat de gebeurtenissen 'de sollicitant wordt aangenomen' en 'de sollicitant is een vrouw' wel onafhankelijk zijn? Onderbouw met uitleg en berekening.

LET OP, DE TOETS GAAT VERDER OP DE ACHTERKANT!

Opgave 3

Er wordt met twee schijven gedraaid (zie bovenstaande afbeelding). Deze twee schijven draaien los van elkaar. Op beide schijven zijn stukken fruit getekend. Van de eerste schijf is bekend hoe deze eruit ziet, van de tweede schijf niet.

Stel: de kans op een banaan bij de eerste schijf is 0,5. Verder: de kans op eerst een banaan bij de eerste schijf en dan een appel bij de tweede schijf is 0,1. Wat is bij de tweede schijf de kans op een appel? Schrijf je berekening op.

Opgave 4

Bij het kiezen van activiteiten op een studiedag op school kiezen leerlingen steeds een activiteit in de ochtend, pauze en middag. Je ziet in de tabel welk deel van de leerlingen voor welke activiteit kiest. We nemen aan dat de keuze voor een activiteit in een bepaald dagdeel niet afhangt van de keuze in een ander dagdeel.

Ochtend		Pauze		Middag	
Cursus portrettekenen	0,3	Pauzewandeling	0,3	Cursus pottenbakken	0,5
Cursus programmeren	0,3	Zelf brood bakken	0,7	Theatervaardigheden	0,5
Kookcursus	0,4				

- Bereken de kans dat een leerling voor portrettekenen, zelf brood bakken en pottenbakken kiest. Schrijf je berekening op.
- Het blijkt achteraf toch dat leerlingen die portrettekenen kiezen, een grotere voorkeur hebben voor pottenbakken dan andere leerlingen. **De voorkeur van de middagactiviteit hangt nog steeds niet af van de keuze voor pottenbakken.** Stel: Je wilt nu de kans berekenen dat een leerling die portrettekenen gekozen heeft, ook zelf brood bakken en pottenbakken kiest. Neem over zoals het hieronder staat en vul de juiste gebeurtenissen in op de stippellijnen. Onderbouw je antwoord.

$P(\text{'zelf brood bakken' en 'cursus pottenbakken' | 'cursus portrettekenen'}) =$

$P(\dots) \cdot P(\dots | \dots)$

***Rood gemarkeerde zin is tijdens begin van de toets mondeling verbeterd in: "De voorkeur van de pauzeactiviteit hangt nog steeds niet af van de keuze voor portrettekenen"**

BIJLAGE V - NAKIJKMODEL TOETS

Elke bullet geeft een mogelijke uitwerking aan.

Opgave 1. (Totaal 4 punten)

Onderstaande tabel geeft informatie over een groep van 90 leerlingen.

	Blond haar	Andere haarkleur	
Meisje	28	14	42
Jongen	32	16	48
	60	30	90

Toon aan dat de gebeurtenissen 'leerling heeft blond haar' en 'leerling is een meisje' onafhankelijke gebeurtenissen zijn.

Correct berekenen van de kansen, op een van deze manieren: **(2 punten)**

- $P(\text{'leerling heeft blond haar' | 'leerling is een meisje'}) = 28/42 = 2/3$ **(1)**
 $P(\text{'leerling heeft blond haar'}) = 60/90 = 2/3$ **(1)**
- $P(\text{'leerling is een meisje' | 'leerling heeft blond haar'}) = 28/60 = 7/15$ **(1)**
 $P(\text{'leerling is een meisje'}) = 42/90 = 7/15$ **(1)**
- $P(\text{'leerling heeft blond haar'}) = 60/90 = 2/3$ en $P(\text{'leerling is een meisje'}) = 42/90 = 7/15$ **(1)**
 $P(\text{'leerling is een meisje' en 'leerling heeft blond haar'}) = 28/90$ **(1)**
- $P(\text{'leerling heeft blond haar' | 'leerling is een meisje'}) = 28/42$
 $P(\text{'leerling heeft blond haar' | 'leerling is geen meisje'}) = 32/48$

Conclusie op een van de volgende bijbehorende manieren: **(2 punten)**

- $P(\text{'leerling heeft blond haar' | 'leerling is een meisje'}) = P(\text{'leerling heeft blond haar'})$ **(1)**, dus de gebeurtenissen zijn onafhankelijke gebeurtenissen **(1)**
- $P(\text{'leerling is een meisje' | 'leerling heeft blond haar'}) = P(\text{'leerling is een meisje'})$ **(1)**, dus de gebeurtenissen zijn onafhankelijke gebeurtenissen **(1)**
- Door middel van productregel: $P(\text{'leerling is een meisje'}) \cdot P(\text{'leerling heeft blond haar'}) = P(\text{'leerling is een meisje' en 'leerling heeft blond haar'})$ **(1)**, dus de gebeurtenissen zijn onafhankelijke gebeurtenissen **(1)**
- $P(\text{'leerling heeft blond haar' | 'leerling is een meisje'}) = P(\text{'leerling heeft blond haar' | 'leerling is geen meisje'})$ **(1)**, dus de gebeurtenissen zijn onafhankelijke gebeurtenissen **(1)**

Opgave 2. (Totaal 7 punten)

(De getallen in deze opgaven zijn fictief en komen dus niet overeen met de werkelijkheid)

Er solliciteren jaarlijks 100 mannen en 300 vrouwen voor een opleiding geneeskunde. Er worden jaarlijks 180 mensen aangenomen. Het blijkt dat **P('sollicitant wordt aangenomen' en 'de sollicitant is een vrouw') = 3/10**

- a. Onderbouw met een uitleg en berekening waarom 'de sollicitant wordt aangenomen' en 'de sollicitant is een vrouw' afhankelijke gebeurtenissen zijn. **(punten)**

Een correcte onderbouwde uitleg op een van de volgende manieren:

- $3/10 * 400 = 120$, dus er worden 120 vrouwen wel aangenomen **(1 punt)**
 $P(\text{'sollicitant wordt aangenomen' l 'sollicitant is een vrouw'}) = 120/300 = 0.4$ **(1 punt)**
 $P(\text{'sollicitant wordt aangenomen'}) = 180/400 = 0.45$ **(1 punt)**
 $P(\text{'sollicitant wordt aangenomen' l 'sollicitant is een vrouw'}) \neq P(\text{'sollicitant wordt aangenomen'})$ **(1 punt)**
 Dus de gebeurtenissen zijn afhankelijk van elkaar
- $3/10 * 400 = 120$, dus er worden 120 vrouwen wel aangenomen **(1 punt)**
 $P(\text{'sollicitant wordt aangenomen' l 'sollicitant is een vrouw'}) = 120/300 = 0.4$ **(1 punt)**
 Er worden dus $180 - 120 = 60$ mannen aangenomen
 $P(\text{'sollicitant wordt aangenomen' l 'sollicitant is geen vrouw'}) = 60/100 = 0.6$ **(1 punt)**
 $P(\text{'sollicitant wordt aangenomen' l 'sollicitant is een vrouw'}) \neq P(\text{'sollicitant wordt aangenomen' l 'sollicitant is geen vrouw'})$ **(1 punt)**
 Dus de kans om aangenomen te worden hangt af van het geslacht van de sollicitant. Aangezien dit zo is zijn de gebeurtenissen afhankelijk van elkaar.
- De leerling heeft zijn gegevens in een kruistabel gezet in plaats van uitgerekend onder elkaar:

	Wel aangenomen	Niet aangenomen	
Man	60	40	100
Vrouw	120	180	300
	180	220	400

Met een soortgelijke conclusie als hierboven genoemd.

- Bij onafhankelijkheid zou $\frac{3}{4}$ van de 180 aangenomen mensen vrouw zijn. Want $\frac{3}{4}$ van de sollicitanten is vrouw **(1 punt)** $\frac{3}{4} * 180 = 135$ **(1 punt)**. $135/400 = 0.3375 \neq 0.3$. **(1 punt)** Dit is niet gelijk aan de kans uit de opgave dus de gebeurtenissen zijn afhankelijk. **(1 punt)**
- Bij onafhankelijkheid zou de productregel gelden. Dus bij afhankelijke gebeurtenissen geldt de productregel niet. **(1 punt)** Dan zou $P(\text{'sollicitant wordt aangenomen'}) * P(\text{'sollicitant is een vrouw'}) \neq P(\text{'sollicitant wordt aangenomen' en 'sollicitant is een vrouw'})$. **(1 punt)** Dan zou er dus gelden $180/400 * \frac{3}{4} \neq 3/10$. Dit uitrekenen: $540/1600 \neq 3/10$ **(1 punt)** Klopt! Dus de gebeurtenissen zijn afhankelijk van elkaar. **(1 punt)**
- b. Hoeveel meer vrouwen in plaats van mannen zouden er aangenomen moeten worden zodat de gebeurtenissen 'de sollicitant wordt aangenomen' en 'de sollicitant is een vrouw' wel onafhankelijk zijn? Onderbouw met uitleg en berekening. **(3 punten)**

Een correcte onderbouwde uitleg op een van de volgende manieren:

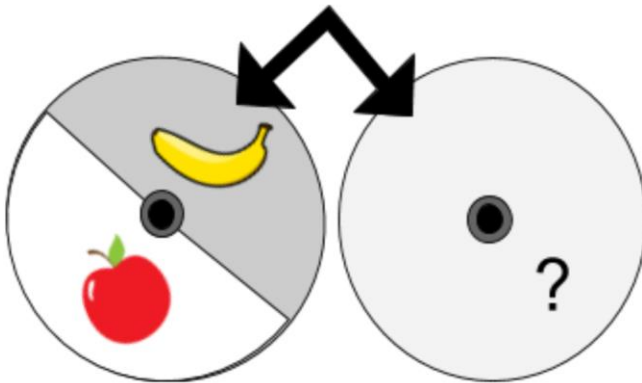
- De kans om aangenomen te worden hangt nu niet af van het geslacht van de sollicitant.
 $P(\text{'sollicitant wordt aangenomen' l 'sollicitant is een vrouw'}) = P(\text{'sollicitant wordt aangenomen'})$ **(1 punt)**
 $P(\text{'sollicitant wordt aangenomen'}) = 180/400 = 0.45$, dus $P(\text{'sollicitant wordt aangenomen' l 'sollicitant is een vrouw'}) = 0.45$. Er solliciteren 300 vrouwen. $300 * 0.45 = 135$. Dus er moeten 135 vrouwen worden aangenomen. **(1 punt)**
 Er worden nu 120 vrouwen en 60 mannen aangenomen. Om 135 vrouwen aan te nemen moeten er dus $135 - 120 = 15$ meer vrouwen in plaats van mannen aangenomen worden. **(1 punt)**
- Als in vraag a al uitgerekend hoeveel vrouwen eruit aangenomen zouden moeten worden en dit wordt opnieuw gebruikt: Nu spreken we wel van onafhankelijkheid dus zou $\frac{3}{4}$ van de 180

aangenomen mensen vrouw zijn. Want $\frac{3}{4}$ van de sollicitanten is vrouw **(1 punt)** $\frac{3}{4} * 180 = 135$ **(1 punt)**

Er worden nu 120 vrouwen en 60 mannen aangenomen. Om 135 vrouwen aan te nemen moeten er dus $135 - 120 = 15$ meer vrouwen in plaats van mannen aangenomen worden. **(1 punt)**

- Dan zou de productregel wel moeten kunnen worden toegepast. Dat betekent dat $P(\text{'sollicitant wordt aangenomen'}) * P(\text{'sollicitant is een vrouw'}) = P(\text{'sollicitant wordt aangenomen' en 'sollicitant is een vrouw'})$. De eerste twee staan vast dus $P(\text{'sollicitant wordt aangenomen' en 'sollicitant is een vrouw'}) = 540/1600$ (zo uitgerekend als bij vraag a) **(1 punt)**. $540/1600 * 400 = 135$. **(1 punt)** Dus er worden dan $135 - 120 = 15$ meer vrouwen in plaats van mannen aangenomen. **(1 punt)**

Opgave 3 (Totaal 2 punten)



Er wordt met twee schijven gedraaid (zie bovenstaande afbeelding). Deze twee schijven draaien los van elkaar. Op beide schijven zijn stukken fruit getekend. Van de eerste schijf is bekend hoe deze eruit ziet, van de tweede schijf niet.

Stel: de kans op een banaan bij de eerste schijf is 0,5. Verder: de kans op eerst een banaan bij de eerste schijf en dan een appel bij de tweede schijf is 0,1. Wat is bij de tweede schijf de kans op een appel? Schrijf je berekening op.

Een correct antwoord inclusief berekening:

De schijven draaien onafhankelijk van elkaar dus de productregel kan worden toegepast. Er geldt dus $P(1e \text{ schijf draait banaan}) * P(2e \text{ schijf draait appel}) = 0,1$ **(1 punt)**

$0,5 * P(2e \text{ schijf draait appel}) = 0,1$, dus $P(2e \text{ schijf draait appel}) = 0,1/0,5 = 0,2$ **(1 punt)**

Opgave 4 (Totaal 4 punten)

Bij het kiezen van activiteiten op een studiedag op school kiezen leerlingen steeds een activiteit in de ochtend, pauze en middag. Je ziet in de tabel welk deel van de leerlingen voor welke activiteit kiest. We nemen aan dat de keuze voor een activiteit in een bepaald dagdeel niet afhangt van de keuze in een ander dagdeel.

Ochtend		Pauze		Middag	
Cursus portrettekenen	0,3	Pauzewandeling	0,3	Cursus pottenbakken	0,5
Cursus programmeren	0,3	Zelf brood bakken	0,7	Theatervaardigheden	0,5
Kookcursus	0,4				

- a. Bereken de kans dat een leerling voor portrettekenen, zelf brood bakken en pottenbakken kiest. Schrijf je berekening op. **(2 punten)**

Een correcte berekening op de volgende manier:

$P(\text{'leerling kies portrettekenen'}) \cdot P(\text{'leerling kiest zelf brood bakken'}) \cdot P(\text{'leerling kiest pottenbakken'}) = 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,5 = 0,105$ (Eventueel afgerond naar 0,11) **(1 punt voor de volledige berekening en 1 punt voor het correcte antwoord)**

- b. Het blijkt achteraf toch dat leerlingen die portrettekenen kiezen, een grotere voorkeur hebben voor pottenbakken dan andere leerlingen. **De voorkeur van de middagactiviteit hangt nog steeds niet af van de keuze voor pottenbakken.** Stel: Je wilt nu de kans berekenen dat een leerling die portrettekenen gekozen heeft, ook zelf brood bakken en pottenbakken kiest. Neem over zoals het hieronder staat en vul de juiste gebeurtenissen in op de stippellijnen. Onderbouw je antwoord. **(2 punten)**

$P(\text{'zelf brood bakken' en 'cursus pottenbakken' l 'cursus portrettekenen'}) =$
 $P(\dots) \cdot P(\dots)$

***Rood gemarkeerde zin is tijdens begin van de toets mondeling verbeterd in: "De voorkeur van de pauzeactiviteit hangt nog steeds niet af van de keuze voor portrettekenen"**

Correct ingevuld:

$P(\text{'zelf brood bakken' en 'cursus pottenbakken' l 'cursus portrettekenen'}) =$

$P(\text{'zelf brood bakken'}) \cdot P(\text{'cursus pottenbakken' l 'cursus portrettekenen'})$
(1 punt)

Correcte onderbouwing op een van de volgende manieren:

- De kans op pottenbakken is niet meer onafhankelijk van de kans op portrettekenen, dus moet je nu voorwaardelijke kansen gebruiken **(1 punt)**
- Het portrettekenen heeft alleen invloed op het pottenbakken en niet op het zelf brood bakken. Hierom hoeft je alleen bij het pottenbakken de voorwaardelijke kans te gebruiken. **(1 punt)**
- Je mag nu niet meer de productregel gebruiken omdat er nu afhankelijke gebeurtenissen zijn. Je moet dus een voorwaardelijke kans gebruiken. **(1 punt)**

BIJLAGE VI - RESULTATEN

GT(1)/GR(2)	Score 1	Score 2a	Score 2b	Score 3	Score 4a	Score 4b
2	1	1	2	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
2	3	1	0	2	0	1
2	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0
2	1	0	0	2	2	0
2	0	0	0	2	2	0
2	0	2	0	0	0	0
2	2	1	0	2	2	0
2	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	2	0
2	2	1	0	2	2	0
2	0	0	0	2	0	0
2	1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	0	0.5
2	1	0	0	2	2	0
2	1	2	0	1	2	0
2	1	1	0	0	2	1
2	4	1	1	2	2	0
2	1	0	0	0	0	0
2	4	3	1	2	2	0
2	1	0	1	2	2	2
2	3	1	1	0	0	0
2	1	0	0	2	2	0
2	1	0	2	2	0	0
2	1	0	2	0	2	0.5
1	1	0.5	0	2	2	0
1	4	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
1	4	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	2	0
1	1	0	1	2	4	1
1	1	0	0	0	2	0
1	1	1	0	2	2	0
1	3	0	0	0	0	0
1	3	2	0	0	2	0
1	4	1	0	2	2	0.5
1	1	0	0	0	2	0
1	1	0	0	2	2	0
1	1	0	1	2	2	0
1	1	1	0	2	2	1
1	1	0	0	2	2	0
1	2	0	0	0	0	0
1	1	0	0	2	2	0
1	3	4	0	0	0	0.5
1	4	4	0	0	0	0
1	1	1	0	2	0	2
1	3	1	0	2	2	0