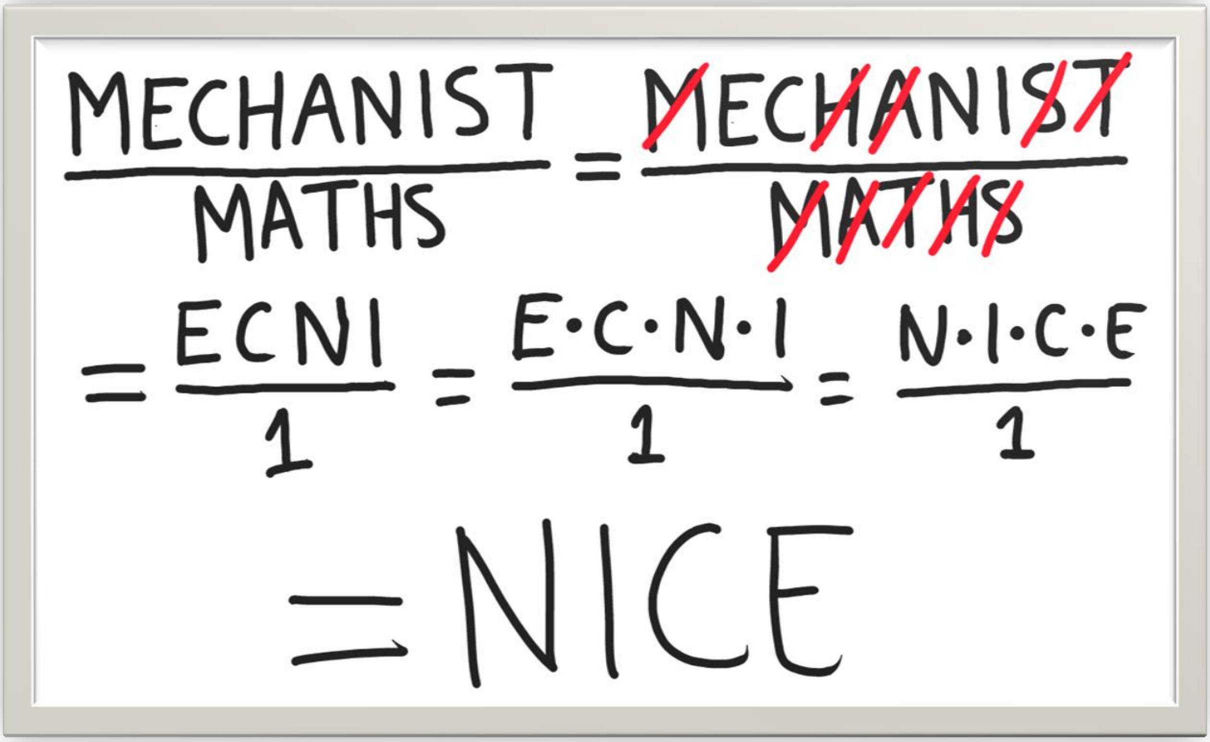
Universiteit Twente

Educatie en Communicatie in de Bètawetenschappen (ECB)

Het Verbeteren van Algebraïsche Vaardigheden bij 4Havo Wiskunde A



Verslag van Onderzoek van Onderwijs (10EC) van Ruben Liebe

Vak: Wiskunde

Begeleiders:

dr.ir. T.J.M. Coenen (eerste begeleider),

dr.ir. M. Timmer (tweede begeleider),

Berthil Dijkstra (vak-coach van stage-/onderzoeksschool).

Samenvatting

Bij dit onderzoek is er gekeken naar de algebraïsche vaardigheden, van leerlingen uit 4Havo wiskunde A, die vanuit de eerste fase van de Havo als aanwezig worden verondersteld, en of deze vaardigheden verbeterd konden worden aan de hand van een oefenmodule. Het grootste gedeelte van deze oefenmodule is rechtstreeks afkomstig uit een oefenmodule die in het verleden is gemaakt voor SLO[1], waarbij de enige aanpassingen zijn dat er een selectie is gemaakt van de onderwerpen, zodat enkel de algebraïsche vaardigheden uit de eerste fase van de Havo aan bod komen, en dat er een aantal voorbeelden/opgaven zijn toegevoegd, veranderd of geschrapt. De algebraïsche vaardigheden zijn in dit onderzoek getoetst met behulp van een tweetal diagnostische toetsen, die precies dezelfde vaardigheden toetsen en van eenzelfde moeilijkheidsgraad zijn. De 4Havo klassen die deelnamen aan dit onderzoek zijn grotendeels samengesteld uit leerlingen die óf uit 4Mavo zijn gekomen óf uit 3Havo. Vanwege de aanwezigheid van deze twee groepen in de klassen is ook gekeken naar verschillen in reeds aanwezige algebraïsche vaardigheden en het verbeteren van deze vaardigheden tussen de groepen. Uit dit onderzoek zijn een aantal conclusies gekomen. Een eerste conclusie is dat leerlingen die uit 4Mavo komen significant minder goed zijn in algebraïsche vaardigheden dan leerlingen die uit 3Havo komen. Een tweede conclusie is dat het behandelen van de oefenmodule voor een significante verbetering heeft gezorgd in de algebraïsche vaardigheden van de 4Havo leerlingen, ongeacht bij welke van de twee groepen ze horen. Wel lijkt het zo te zijn dat leerlingen die uit 3Havo zijn gekomen aan de huidige vorm van het behandelen van de oefenmodule meer hadden qua verbetering van algebraïsche vaardigheden dan leerlingen die uit 4Mavo zijn gekomen, ook al kon deze conclusie significant gezien niet worden aangetoond.

1 Inleiding

In de lente van 2021 zijn er door mij extra lessen wiskunde gegeven aan leerlingen uit 5Havo van het Stedelijk Lyceum College Zuid. Het doel van deze lessen was om leerlingen met een wiskundige achterstand (stonden gemiddeld een onvoldoende voor de schoolexamens) beter voor te bereiden op hun centrale eindexamens. De school heeft deze extra lessen wiskunde opgezet omdat zij dachten dat er door Covid-19 een grote achterstand opgebouwd was.

Tijdens het geven van deze extra lessen werd al gauw duidelijk dat veel leerlingen grote moeite hadden met algebraïsche basisvaardigheden. Het leek hierbij alsof leerlingen niet eens toe kwamen aan het denkwerk dat de kern vormde van ingewikkelde probleemstukken omdat zij al niet beschikten over de parate algebraïsche vaardigheden die werden verondersteld aanwezig te zijn. Verder leek het zo te zijn dat leerlingen die eerder in hun schoolloopbaan op de Mavo hadden gezeten hier nog erger last van hadden. Hierover is vervolgens met de afdelingsleider gesproken en zij noemde dat dit een zeer interessante waarneming was en dat de school deze informatie wellicht in de toekomst zou gaan gebruiken. Dit is echter het jaar erop (schooljaar 2021-2022) niet gebeurd. Vervolgens bleek dat in dit schooljaar de cijfers van de centrale examens wiskunde lager waren dan het jaar ervoor. De school wist op dat moment niet hoe zij gericht het probleem van de wiskundige achterstand konden oplossen.

Toen door mij geopperd werd om mijn onderzoek over het bekijken van de achterstand in algebraïsche basisvaardigheden te doen en hoe dit verholpen kon worden werd het idee meteen geaccepteerd door de school. Aangezien algebraïsche vaardigheden veelal terugkomen op de schoolexamens en centrale eindexamens is het in kaart brengen ervan een grote prioriteit wanneer je (ondermaatse) wiskundige resultaten wilt verklaren. Hiermee vormde zich dus een duidelijke probleemstelling voor mijn onderzoek, waarbij er gekeken zal worden naar de algebraïsche vaardigheden van leerlingen in de tweede fase van de Havo en hoe deze vaardigheden verbeterd kunnen worden. In de literatuur wordt hierover door Bert Zwaneveld gesteld dat: “op een wetenschappelijke manier is gebleken dat de algebraïsche bekwaamheden van [Havo en Vwo] leerlingen teleurstellend zijn en dat een oplossing kan worden gevonden door meer aandacht te besteden aan het ontwikkelen van conceptuele bekwaamheden”[2]. Hierbij wordt in hetzelfde artikel gesteld dat “Het bevorderen van de conceptuele bekwaamheden, houdt onder meer in dat er algebraïsche activiteiten plaatsvinden los van de inhoud”[2].

Het plan om deze algebraïsche vaardigheden te verbeteren berust op het behandelen van een eerder gecreëerde oefenmodule die gaat over algebraïsche vaardigheden en is bedoeld voor afgestudeerde Havisten[1], waarbij deze iets zal worden aangepast zodat hij enkel focust op de vaardigheden die al in de eerste fase behandeld zijn en in de tweede fase als basiskennis worden verondersteld. De redenen dat een oefenmodule gebruikt wordt zal in de latere onderdelen van dit verslag beschreven worden. Verder zal dit onderzoek worden uitgevoerd aan het begin van het schooljaar bij een 4Havo wiskunde A klas, waarbij deze leerlingen dus net uit de onderbouw komen waar deze algebraïsche basisvaardigheden al behandeld zouden zijn.

Met deze probleemstelling en dit plan in gedachte is de hoofdvraag van dit onderzoek:

“Wat is het effect van het behandelen van een oefenmodule op de algebraïsche vaardigheden van 4Havo wiskunde A leerlingen?”

Het doel van dit onderzoek is om te kijken of een oefenmodule effectief is in het verbeteren van algebraïsche basisvaardigheden aan het begin van de tweede fase van de Havo. Dit zou ervoor zorgen dat leerlingen beter voorbereid zijn op de rest van de tweede fase voor het vak wiskunde.

2 Theoretisch Kader

In dit gedeelte van het verslag zal een theoretische basis worden gelegd voor het onderzoek. Hierbij zullen definities en uitleg bij de kernbegrippen van dit onderzoek gegeven worden, ook zal eerder uitgegeven literatuur die nuttig is voor dit onderzoek weergegeven worden en wordt er uitgebouwd op de onderzoeksvraag en doel van dit onderzoek.

2.1 Het belang van algebraïsche vaardigheden

Allereerst zal beschreven worden waarom het paraat hebben algebraïsche basisvaardigheden überhaupt zo belangrijk is in de tweede fase van het voortgezet onderwijs op de Havo (en op het Vwo). De reden hiervoor bestaat uit vier verschillende onderdelen.

Ten eerste wordt bij het centraal eindexamen ervan uitgegaan dat kandidaten bekend zijn met een groot aantal vereiste algebraïsche vaardigheden[3]. Een overzicht van de vereiste algebraïsche vaardigheden is te vinden in de syllabus (van een bepaald jaar). Deze syllabus is opgesteld door het College voor Toetsen en Examens (CvTE). In deze syllabus staat dat een deel van de specifieke algebraïsche vaardigheden (soms enkel in de grondvorm) reeds bekend wordt verondersteld vanuit de onderbouw. Er wordt ook genoemd dat hierbij bijvoorbeeld gedacht kan worden aan de voorrangsregels, het werken met haakjes, eenvoudige breuken, wortels en machten[3]. In een ander document van SLO zijn de onderbouwdoelen te zien[4], de onderwerpen die hierin staan met betrekking op algebraïsche vaardigheden komen overeen met de doelen die in de syllabus van de Havo bovenbouw (vanuit de onderbouw als reeds bekend) worden verondersteld.

In de syllabus wordt genoemd dat algebraïsche vaardigheden geen doel op zichzelf zijn (ze zijn dan ook opgenomen in de bijlage van de syllabus in plaats van in een van de domeinen/subdomeinen), maar dat ze onderdeel zijn van wiskundige activiteiten. Om deze reden moeten de vaardigheden in samenhang worden gelezen met het programma dat in de diverse domeinen wordt besproken. Door deze vaardigheden toe te passen op algebraïsche uitdrukkingen kan bijvoorbeeld rekenwerk vereenvoudigd worden, correctheid van beweringen worden aangetoond, of vergelijkingen herschreven worden zodat ze exact op te lossen zijn. Algebraïsche vaardigheden zijn verdeeld over twee verschillende groepen, de specifieke en algemene algebraïsche vaardigheden[3]. Bij specifieke algebraïsche vaardigheden staat parate kennis en het vlot kunnen gebruiken van bijbehorende vaardigheden op verschillende algebraïsche uitdrukkingen centraal[3]. Deze vaardigheden hebben betrekking op algebraïsch rekenen en algebraïsch werken en hierbij gaat het bijvoorbeeld om het gebruik van rekenregels, het werken met haakjes, het invullen van getallen of variabelen in een uitdrukking en het gebruik van bepaalde standaard methoden om een vergelijking op te lossen. Bij algemene algebraïsche vaardigheden daarentegen staan onderdelen als aanpak, globale strategie, doelgerichtheid en het herkennen van structuren en methoden centraal. De leerlingen moeten de structuur van een expressie kunnen herkennen, kwalitatief kunnen redeneren bij het zien van een formule, verbanden zien tussen diverse weergaven van een functie, kunnen wisselen tussen 'betekenisloos manipuleren' en een betekenis geven aan bepaalde variabelen en parameters, en daarnaast ook een formule kunnen opstellen door het generaliseren van een getallenvoorbeeld, of door het combineren van reeds bekende formules[3]. Hiermee lijkt het begrip algemene algebraïsche vaardigheden een synoniem te zijn van het begrip 'symbol sense'[5][6], waarbij beide begrippen een vrijwel identieke definitie hebben. Voor Paul Drijvers bestaat het wiskundige begrip 'symbol sense' namelijk uit drie kernonderdelen: strategische vaardigheden om een geschikte probleemaanpak te kiezen, het vermogen om globaal te kijken naar expressies en formules en het vermogen tot algebraïsch redeneren[5].

Het onderscheid tussen deze twee verschillende groepen algebraïsche vaardigheden geeft ons meteen de mogelijkheid om nog twee redenen te geven waarom (de combinatie van specifieke en algemene) algebraïsche vaardigheden belangrijk zijn in de tweede fase van het voortgezet onderwijs. Om op een correct antwoord uit te komen van een gevorderd probleemstuk bij verscheidene wiskundige onderwerpen (denk hierbij bijvoorbeeld aan meetkundige problemen, problemen bij het oplossen van vergelijkingen of formules in een andere vorm schrijven) zijn specifieke algebraïsche vaardigheden nodig. Ook al weet een leerling globaal hoe hij een bepaald probleemstuk moet oplossen, wanneer specifieke algebraïsche vaardigheden niet beheerst worden kan hij niet op een correct antwoord uitkomen en zal de leerling overbodig veel tijd kwijt zijn aan iets waar hij de oplossing niet van gaat vinden, omdat hij standaard bewerkingen niet correct kan toepassen. Om deze reden is het beheersen van (specifieke) algebraïsche vaardigheden zeer belangrijk tijdens de tweede fase van de Havo (en het Vwo).

Een derde reden dat algebraïsche vaardigheden belangrijk zijn heeft te maken met algemene algebraïsche vaardigheden. Algemene algebraïsche vaardigheden, zoals eerder gedefinieerd, dragen bij aan het beter begrijpen van een wiskundig onderwerp of probleemstelling. Dit heeft ermee te maken dat wanneer leerlingen beschikken over algemene algebraïsche vaardigheden zij een beter overzicht op kunnen doen van bepaalde wiskundige probleemstellingen en onderwerpen. Het beter begrijpen van een wiskundig onderwerp of probleemstelling is iets wat nodig is om relationeel begrip op te bouwen[7]. Relationeel begrip houdt in dat er niet alleen wordt begrepen hoe een bepaalde wiskundige strategie/bewerking werkt (instrumenteel begrip[7]), maar ook waarom deze strategie/bewerking in die situatie werkt. Relationeel begrip is bevorderlijk omdat een leerling hierdoor een bepaalde wiskundige strategie beter zal onthouden en daarnaast ook de strategie gemakkelijker zal kunnen toepassen wanneer probleemstukken ingewikkelder worden en net iets anders zijn dan voorheen[7]. Dit is anders wanneer een leerling enkel instrumenteel begrip heeft rondom een bepaald wiskundig onderwerp, waarbij de leerling hierdoor minder adaptief zal zijn dan een leerling met relationeel begrip. Het beter onthouden van wiskundige strategieën en het kunnen toepassen ervan in ingewikkeldere situaties vormt de laatste reden dat (algemene) algebraïsche vaardigheden zo belangrijk zijn in de tweede fase van de Havo en Vwo.

Samengevat zijn de specifieke algebraïsche vaardigheden de vaardigheden waarvan wordt verwacht dat een leerling deze snel en geroutineerd kan uitvoeren, terwijl voor de algemene algebraïsche vaardigheden een leerling gebruik moet kunnen maken van inzicht en vooruit denken om zo handelingen bij diverse probleemstukken uit te voeren.

Een laatste reden dat algebraïsche vaardigheden belangrijk zijn in de tweede fase van het voortgezet onderwijs is dat het beheersen van deze vaardigheden leerlingen helpt om klassikale instructie beter te begrijpen[8]. Wanneer een leerling weet wat voor bewerkingen de docent uitvoert om bij een bepaald antwoord te komen is de instructie beter te volgen en zal de uitwerking die wordt uitgevoerd van een probleemstelling logischer zijn. Vervolgens is het plausibel dat een vergelijkbare uitwerking nu ook gemakkelijker te (re-)produceren zal zijn door de leerling zelf. Dit zorgt ervoor dat algebraïsche vaardigheden een cruciaal onderdeel zijn van het wiskundige leerproces en daarmee van wiskunde in de tweede fase van de Havo en Vwo. In figuur |1| zijn de vier redenen in een tabel schematisch weergegeven waarom het paraat hebben algebraïsche basisvaardigheden zo belangrijk is in de tweede fase van het voortgezet onderwijs op de Havo (en op het Vwo).

	Vier redenen waarom algebraïsche vaardigheden belangrijk zijn in de tweede fase van het voortgezet onderwijs.
1	Verwachting over de beheersing van algebraïsche vaardigheden wordt verondersteld in de syllabus.
2	Specifieke algebraïsche vaardigheden zijn belangrijk bij het vinden van oplossingen voor (gevorderde) probleemstukken.
3	Algemene algebraïsche vaardigheden dragen bij aan de opbouw van relationeel begrip bij leerlingen.
4	Het beheersen van algebraïsche vaardigheden helpt leerlingen om klassikale instructie beter te begrijpen.

Figuur |1|: Tabel met daarin een schematische weergave van vier redenen waarom algebraïsche vaardigheden belangrijk zijn in de tweede fase van het voortgezet onderwijs.

In de syllabus wordt weergegeven dat er een verschil bestaat tussen de algebraïsche vaardigheden die leerlingen uit de verschillende groepen: Havo wiskunde A, Havo wiskunde B, Vwo wiskunde A en Vwo wiskunde B, moeten beheersen. Omdat dit verschil best groot is hebben we er voor dit onderzoek voor gekozen om het onderzoek alleen plaats te laten vinden bij de groep Havo wiskunde A. Op deze manier hoeft er in dit onderzoek alleen gefocust te worden op de onderwerpen met betrekking op algebraïsche vaardigheden die voor deze groep (in de syllabus) aan de orde komen.

2.2 Eerder behandelde algebraïsche vaardigheden

Zoals eerder genoemd, voordat algemene algebraïsche vaardigheden rondom ingewikkelde probleemstukken uit de tweede fase kunnen vormen, zullen eerst de diverse vaardigheden uit de onderbouw beheerst moeten worden. Om deze reden moet er als eerst worden gekeken naar welke algebraïsche vaardigheden reeds in de onderbouw behandeld zijn en die leerlingen in 4Havo in ieder geval moeten beheersen. Aangezien op de school waar het onderzoek plaats zal vinden gebruik gemaakt wordt van de methode Getal en Ruimte zal deze methode onder de loep worden genomen. Deze methode houdt rekening met de kerndoelen en tussendoelen zoals deze voor de onderbouw worden beschreven[4], en deze onderwerpen zullen daarom ook als leidraad worden gebruikt voor de onderbouw onderwerpen die leerlingen moeten beheersen in de bovenbouw.

Havo	Aantal hoofdstukken	Hoofdstuktitels
1Havo(/Vwo)	4	Hoofdstuk 2: Getallen en formules Hoofdstuk 3: Assenstelsel en grafieken Hoofdstuk 6: Formules en letters Hoofdstuk 8: Herleiden en machten
2Havo(/Vwo)	3	Hoofdstuk 1: Rekenen met letters Hoofdstuk 3: Lineaire formules en vergelijkingen Hoofdstuk 4: Kwadraten en wortels
3Havo(/Vwo)	2	Hoofdstuk 1: Lineaire problemen Hoofdstuk 6: Vaardigheden en vergelijkingen
Totaal	9	

Figuur |2|: Hoofdstukken die betrekking hebben op algebraïsche vaardigheden in de onderbouw van de Havo. In deze tabel is er voor 3Havo(/Vwo) vanuit gegaan dat er een 3Vwo boek wordt gebruikt. De reden hiervoor is dat de onderzoeksschool alleen maar 3Havo/Vwo klassen heeft (waarbij 3Havo en 3Vwo niet gescheiden zijn) en dat deze klassen gebruik maken van het 3Vwo boek.

Bij Getal en Ruimte zijn er in 1Havo/Vwo 4 hoofdstukken die betrekking heb op algebraïsche vaardigheden[9]. In 2Havo/Vwo zijn er 3 hoofdstukken die direct te maken hebben met algebraïsche vaardigheden[10] en in 3Havo/Vwo zijn het er 2[11](de exacte hoofdstukken zijn te zien in figuur |2|). De onderwerpen die hierbij behandeld worden zijn het rekenen met voorrangsregels, haakjes, letters, breuken, machten, wortels en lineaire vergelijkingen. Dit zijn dus ook de onderdelen die een 4Havo leerling tot op zekere hoogte moet beheersen en dus waarmee geoefend dient te worden wanneer een leerling deze vaardigheden nog niet beheerst.

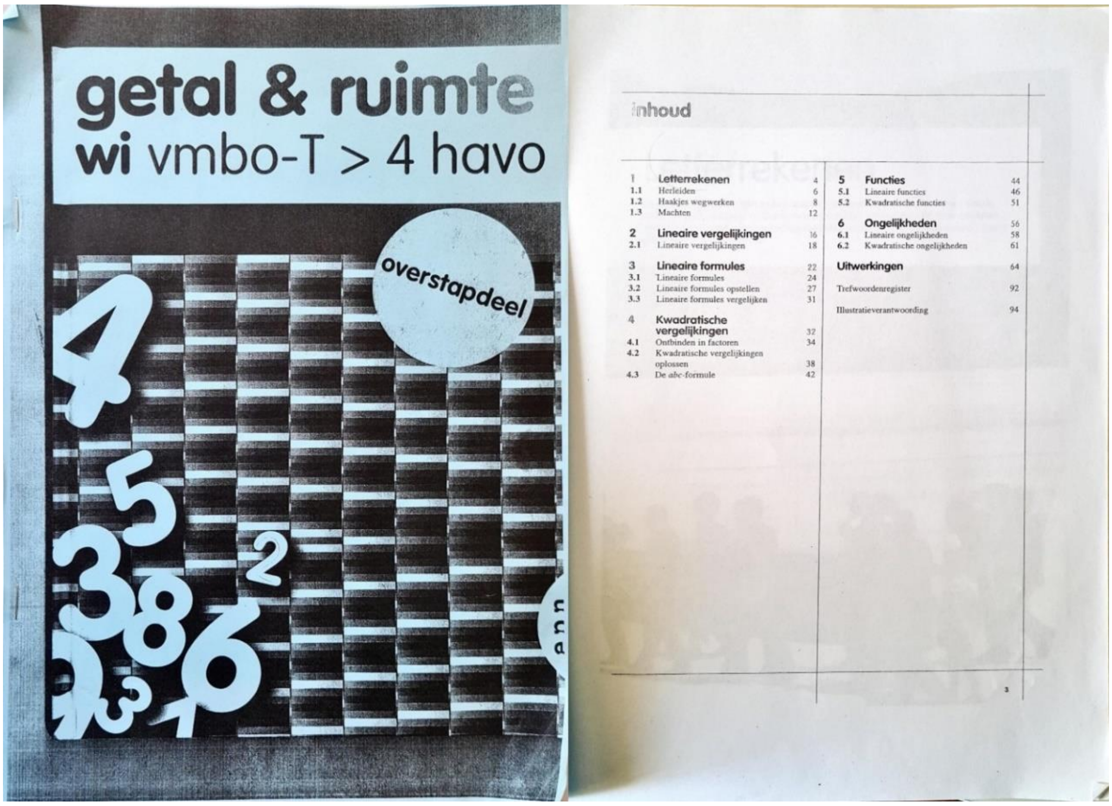
Echter zijn de leerlingen die in 4Havo terecht komen niet alleen leerlingen die hun hele schoolloopbaan op de Havo hebben gezeten. Het is namelijk zo dat naast de 3Havo leerlingen die in 4Havo terecht komen er ook 4Mavo leerlingen zijn die, na het halen van hun Mavo diploma, in 4Havo terecht komen. Om te bepalen of deze leerlingen dezelfde algebraïsche vaardigheden in hun schoolloopbaan zijn tegengekomen (of niet), en daarmee of zij in theorie dezelfde algebraïsche vaardigheden zouden moeten beheersen, kunnen we kijken naar de behandelde hoofdstukken die betrekking hebben op algebraïsche vaardigheden in de klassen 1Mavo(/Havo) tot en met 4Mavo.

Bij Getal en Ruimte zijn er in 1Mavo/Havo 4 hoofdstukken die betrekking hebben op algebraïsche vaardigheden[12]. In 2Mavo/Havo zijn er ook 4 hoofdstukken die gaan over algebraïsche vaardigheden[13]. In 3Mavo is er 1 hoofdstuk dat voor een deel gaat over algebraïsche vaardigheden[14] en tot slot is er in 4Mavo ook 1 hoofdstuk dat (voor een klein deel) gaat over algebraïsche vaardigheden[15] (de exacte hoofdstukken zijn te zien in figuur |3|). De hoofdstukken en paragrafen die in figuur |3| zijn gegeven met een sterretje(*) zijn hoofdstukken/paragrafen die anders zijn dan de andere hoofdstukken, in de zin van dat ze eigenlijk alleen voor Havo leerlingen bedoeld zijn. Echter, omdat er op de onderzoeksschool enkel Mavo/Havo klassen zijn, is er een aantal hoofdstukken hiervan dat wel behandeld wordt en een aantal niet. Zo worden in de eerste klas de Havo hoofdstukken en onderdelen met alle Mavo/Havo leerlingen behandeld. In de tweede wordt het eerste hoofdstuk dat gaat over rekenen met letters wel behandeld, maar de rest van dit schooljaar worden de Havo opdrachten/onderdelen/hoofdstukken overgeslagen, waarbij door de docent benoemd wordt dat het wel handig is dat leerlingen die in de derde naar de Havo willen zelfstandig naar deze onderdelen kijken.

Mavo	Aantal hoofdstukken	Hoofdstuktitels
1Mavo(/Havo)	4*, 3	Hoofdstuk 2: Getallen Hoofdstuk 3: Assenstelsel en grafieken Hoofdstuk 7: Kwadraten Hoofdstuk 9*: Herleiden en machten
2Mavo(/Havo)	4*, 2	Hoofdstuk 1*: Rekenen met letters Hoofdstuk 3: Formules en vergelijkingen Hoofdstuk 5: Machten, wortels* en verbanden Hoofdstuk 7*: Kwadratische vergelijkingen
3Mavo	1	Hoofdstuk 9: Grafieken en vergelijkingen (gaat voor een deel over algebraïsche vaardigheden)
4Mavo	1	Hoofdstuk 4 Grafieken en vergelijkingen (gaat voor een klein deel over algebraïsche vaardigheden)
Totaal	10*, 7	

Figuur |3|: Hoofdstukken die betrekking hebben op algebraïsche vaardigheden op de Mavo. Met de sterretjes (*) is aangegeven welke hoofdstukken eigenlijk alleen voor Havo leerlingen bedoeld zijn.

Al met al is het zo dat in de Mavo hoofdstukken minder diepgang omtrent algebraïsche vaardigheden plaatsvindt dan in de Havo hoofdstukken. Sommige onderdelen, zoals bijvoorbeeld het herleiden van wortels, worden in de Mavo zelfs helemaal niet behandeld. Verder is het zo dat in de laatste twee jaar van de Mavo nog maar amper algebraïsche vaardigheden aan bod komen. Dit zou in theorie ervoor kunnen zorgen dat wanneer Mavo leerlingen na het halen van hun diploma in 4Havo terechtkomen het grootste gedeelte van hun algebraïsche vaardigheden is weggezakt. Dit is zeer problematisch voor de tweede fase van de Havo, omdat hier ervan uit wordt gegaan dat leerlingen deze vaardigheden wel beheersen. Dit zorgt dus in potentie voor een mismatch van vaardigheden tussen de leerlingen afkomstig van de verschillende niveaus.



Figuur |4|: Voorkant en inhoudsopgave van het overstapboekje van Mavo (Vmbo-T) naar 4Havo.

Op sommige andere scholen is het zo dat er instroomlessen voor het vak wiskunde plaatsvinden die bedoeld zijn voor leerlingen die van 4Mavo naar 4Havo gaan[16]. In deze lessen wordt er aandacht besteed aan onderwerpen die op de Mavo minder/niet aan bod komen en in de Havo onderbouw wel. Door één van de scholen die dit aanbiedt wordt gezegd dat het volgen van deze lessen de kans op slagen voor de Havo aanzienlijk groter maakt[16]. Oefenen met algebraïsche vaardigheden en het herhalen van rekenregels is iets wat in van dit soort instaplessen behandeld kan worden. Eerder (een aantal jaar terug) was het zo dat de onderzoeksschool extra lessen wiskunde vóór de zomervakantie aanbood aan leerlingen die geslaagd waren voor hun Mavo en naar 4Havo zouden gaan. Echter bleek op een bepaald moment dat geen van de geslaagde leerlingen nog naar deze lessen ging en de school kon deze lessen ook niet verplichten. Vandaar dat deze lessen uiteindelijk zijn geschrapt. Tijdens deze extra lessen wiskunde kregen de geslaagde Mavo leerlingen een boekje met daarin het overstapdeel voor Mavo naar Havo. In dit boekje stonden alle wiskundige onderdelen die in de Mavo minder aan bod waren gekomen, maar welke de leerlingen wel nodig zouden hebben op de Havo. Dit boekje behandelde veel algebraïsche vaardigheden en rekenregels en was daarom zeer belangrijk. In figuur |4| zijn de voorkant en de inhoudsopgave van dit overstapboekje te zien. Nadat de extra lessen wiskunde zijn geschrapt is het boekje nog een aantal jaar uitgedeeld. Toen leerlingen op een gegeven moment zeiden dat ze toch niet in dit boekje keken is ook het uitdelen van het boekje geschrapt, dit is inmiddels twee jaar geleden (vanaf 2020). Oftewel op dit moment is er bij de onderzoeksschool geen wiskundige hulp meer voor leerlingen die de overstap maken van Mavo naar 4Havo.

2.3 Oefenmodule over algebraïsche vaardigheden

In het verleden is er een oefenmodule over algebraïsche vaardigheden gemaakt door Lysbeth van de Zee voor leerlingen die zijn afgestudeerd van de Havo met wiskunde A en die nog moeite hadden met deze vaardigheden[1]. Deze module had als doel leerlingen beter voor te bereiden op een economische of technische hbo-opleiding. De ontwikkelaars van deze module zeggen dat de doelstelling van deze module het verbeteren van algebraïsche/rekenkundige vaardigheden is, en dat hiermee parate kennis van leerlingen bij het werken met algebraïsche uitdrukkingen wordt versterkt. Deze doelstelling heeft ook consequenties voor de vorm van het leerlingenmateriaal. Zo wordt gezegd dat de meeste oefeningen “kale” oefeningen zijn. Hierbij wordt gezegd dat de leerling zich hierdoor helemaal kan richten op het opfrissen van vaardigheden[1], in plaats van afgeleid te worden door allemaal randzaken. Deze oefenmodule omvat onder andere alle algebraïsche vaardigheden die al in de onderbouw van de Havo zijn behandeld. Verder bevat de module ook een aantal onderwerpen die ook nog weer uitgebreid aan bod komen in de bovenbouw van de Havo (opstellen van lineaire formules) en onderdelen die in de tweede fase van de Havo voor wiskunde A helemaal niet voorkomen (zoals tweedegraadsvergelijkingen[3]). Het opfrissen van vaardigheden is precies wat wij in dit onderzoek ook willen bereiken, ook al gaat het hierbij om het opfrissen van algebraïsche vaardigheden uit de onderbouw van de Havo. Omdat een deel van deze oefenmodule ook deze onderbouwvaardigheden betreft is dit een nuttige bron om inspiratie uit te halen voor de oefenmodule die voor dit onderzoek ontwikkeld zal worden.

De korte en “kale” opgaven zoals ze voorkomen in bovengenoemde oefenmodule zijn voordelig voor het oefenen met algebraïsche vaardigheden, omdat het bijdraagt aan de transparantie van leerdoelen[8](een leerling ziet meteen wat hij moet/moest kunnen om een opgave op te lossen) en het geeft korte termijn waarderingsgevoel wanneer zo’n opgave wordt opgelost, zonder dat daarvoor een lange tijdsinvestering nodig is[8]. Dit oefenen met deze algebraïsche vaardigheden is nodig om de vaardigheden uit de onderbouw weer op te frissen en vandaar dat het behandelen van vergelijkbare korte opgaves hierbij voordelig is.

In de oefenmodule zijn bij ieder onderdeel als eerst een aantal voorbeelden te zien. Deze voorbeelden komen in de vorm van uitgewerkte opgaven zodat leerlingen alvast kunnen zien hoe zij een bepaalde algebraïsche rekenregel/strategie kunnen toepassen voordat ze deze zelf moeten gebruiken in een opgave. Daar waar uitgelegde theorie voornamelijk inspeelt op relationeel begrip bij leerlingen[7], dient het laten zien van opgaven die al gemaakt zijn ertoe dat leerlingen begrijpen hoe ze praktische gezien met de opgaven uit de voeten kunnen, wat daarmee voornamelijk inspeelt op instrumenteel begrip[7]. Door deze opgaven te laten zien kunnen leerlingen de oplossingsmethoden eerst analyseren, wat de leerlingen in staat stelt koppelingen te leggen tussen de theorie en de opgaves. Hierdoor kunnen leerlingen vervolgens gemakkelijker concepten, strategieën, redengeving voor waarom een bepaalde methode juist is en algebraïsche structuur beter begrijpen[17], waarbij dit vervolgens toegepast kan worden bij andere opgaven die gaan over ditzelfde algebraïsche onderwerp (opgaven die er net iets anders uitzien waardoor de voorbeelduitwerking vaak niet rechtstreeks gekopieerd kan worden). Dit proces in zijn geheel is voordelig voor hun kennis van de werking van de behandelde algebraïsche vaardigheden[17].

2.4 Het toetsen van algebraïsche vaardigheden

Om te analyseren in hoeverre een leerling algebraïsche vaardigheden beheerst en hoe groot het verschil is in deze vaardigheden tussen verschillende leerlingen is het belangrijk om 'de eisen van een goede toets'[18] te gebruiken wanneer een toets wordt opgesteld om deze vaardigheden onder de loep te nemen. Voor een goede toets geldt dat hij een juiste moeilijkheidsgraad moet hebben en onderscheid kan maken tussen goede en slechte leerlingen. Zo moet er voldoende spreiding zijn tussen goede en slechte resultaten en moeten de vragen (naar puntenaantal) gelijkmatig over de stof verdeeld zijn, zodat niet één aspect onevenredig veel gewicht krijgt. In dit onderzoek kan deze puntenverdeling vooral benut worden om het verschil in algebraïsche vaardigheden tussen verschillende leerlingen dat in de loop van de voorgaande schooljaren is ontstaan in kaart te brengen. Om ervoor te zorgen dat er voldoende spreiding in scores aanwezig gaat zijn in bijvoorbeeld een diagnostische toets kan er gebruik worden gemaakt van het laten voorkomen van opgaves die verschillende vaardigheden combineren, instinkers of opgaves die meer denkwerk vereisen, als aanvulling op de instapopgaves en eenvoudige opgaves (waarvoor slechts één enkele vaardigheid vereist is)[19] die ook in zo'n toets aanwezig zullen zijn. Door gebruik te maken van een scala aan opgaves met verschillende moeilijkheidsgraad kan worden gekeken naar welke leerlingen algebraïsche vaardigheden écht onder de knie hebben en leerlingen die hier nog mee moeten oefenen om op niveau te komen. Leerlingen die de vaardigheden nog niet zo goed beheersen zullen bij zo'n diagnostische toets in ieder geval de kans hebben om de eenvoudige (maar voor hen toch uitdagende) opgaves te doen, terwijl gevorderde leerlingen voornamelijk uitgedaagd zullen worden door de lastigere opgaves. Door dus gebruik te maken van opgaven van verschillende moeilijkheidsgraden, bij bijvoorbeeld een diagnostische toets, kan het niveau en verschil in algebraïsche vaardigheden van leerlingen in de tweede fase van de Havo in kaart worden gebracht.

Zoals gezegd is het dus zo dat algebraïsche vaardigheden belangrijk zijn voor wiskunde in de tweede fase van het voortgezet onderwijs en dat het opfrissen van deze vaardigheden uit de onderbouw aan het begin van de tweede fase, indien deze onvoldoende aanwezig zijn, als belangrijk doel gezien moet worden. Het opfrissen van deze vaardigheden kan zoals in het verleden ook is gebeurd door middel van een oefenmodule. Aangezien we te maken hebben met het opfrissen van vaardigheden is het belangrijk dat vooral gewerkt wordt met korte opgaves[8], die puur de (combinatie van) vaardigheden zonder al te veel verdere context toetsen. Verder is belangrijk om in deze oefenmodule te werken met voorbeelden of reeds uitgewerkte opgaves, omdat dit als aanvulling op de theorie leerlingen een goed beeld geeft van de vaardigheden die zij uiteindelijk zelf moeten beheersen. Tot slot kunnen algebraïsche vaardigheden getoetst worden door gebruik te maken van een reeks aan opgaven van verschillende moeilijkheidsgraden. Aan de hand hiervan kan in kaart worden gebracht welke leerlingen algebraïsche vaardigheden al wel goed beheersen en welke leerlingen (nog) niet. Dit zijn de theoretische aspecten die in de rest van dit onderzoek gebruikt zullen worden.

3 Onderzoeksvragen

Na het geven van een inleiding en het leggen van een theoretische basis, kan er worden gekeken welke vragen we in dit onderzoek precies proberen te beantwoorden. Deze vragen zijn nauw verwant aan het hoofddoel van dit onderzoek, namelijk om te kijken of een oefenmodule (een lichtelijk aangepaste versie van[1]) effectief is in het verbeteren van algebraïsche vaardigheden aan het begin van de tweede fase van de Havo. Allereerst staat hierbij de volgende hoofdvraag centraal:

"Wat is het effect van het behandelen van een oefenmodule op de algebraïsche vaardigheden van 4Havo wiskunde A leerlingen?"

Om deze hoofdvraag te kunnen beantwoorden wordt eerst antwoord gegeven op een tweetal deelvragen. In het theoretisch kader is beschreven dat er duidelijk twee stromen leerlingen zijn die in 4Havo terecht komen: de leerlingen die uit 3Havo komen en die uit 4Mavo komen. Omdat dit een vrij concreet verschil is dat effect zou kunnen hebben op de algebraïsche vaardigheden van leerlingen en we graag willen onderzoeken of dit inderdaad een verschil maakt hierbij, is de eerste deelvraag van dit onderzoek:

"Bestaat er een verschil tussen de reeds beheerste algebraïsche vaardigheden van leerlingen die van de Mavo komen ten opzichte van de leerlingen die van de Havo komen?"

Op basis van eigen ervaring uit het verleden is mijn hypothese voor deze deelvraag dat er wel een verschil zal zitten tussen deze groepen leerlingen. De reden voor deze hypothese is dat, tijdens de extra lessen wiskunde die door mij in 2021 zijn gegeven, dit door mij zelf is waargenomen. Hierbij leken destijds leerlingen die uit 4Mavo kwamen een stuk minder goed in algebraïsche vaardigheden dan leerlingen die uit 3Havo kwamen. Hieraan valt toe te voegen dat het niveau algebraïsche vaardigheden voor het grootste gedeelte van de leerlingen in de tweede fase van de Havo waarschijnlijk, ongeacht de schoolloopbaan van de leerling, onvoldoende zal zijn. Zo noemt Bert Zwaneveld in de literatuur dat algebraïsche vaardigheden in de tweede fase "teleurstellend" zijn[2].

Wanneer er geoefend wordt met algebraïsche vaardigheden bij een oefenmodule zal dit op elke leerling een ander effect hebben. Om precies te bepalen hoe groot het verschil is in het effect van deze oefenmodule op de algebraïsche vaardigheden van leerlingen, waarbij specifiek de twee verschillende stromen waar 4Havo leerlingen vandaan komen tegen elkaar worden uitgezet, is de tweede deelvraag van dit onderzoek:

"Zit er een verschil in het effect van het behandelen van de oefenmodule op de algebraïsche vaardigheden tussen leerlingen die van de Mavo komen ten opzichte van de leerlingen die van de Havo komen?"

Bij deze vraag zou als hypothese bedacht kunnen worden dat leerlingen die van de Mavo komen minder bekend zijn met de onderbouw (Havo) algebraïsche vaardigheden en daardoor meer baat zullen hebben bij instructie hierover en oefening hiermee. Een reden hiervoor zou kunnen zijn dat oud Mavo leerlingen eerder nog niet bekend waren met deze vaardigheden, maar door de oefenmodule dit wel worden, en vervolgens als resultaat verder vooruitgaan in hun algebraïsche vaardigheden dan leerlingen die van de Havo komen.

Al met al zouden de antwoorden op deze deelvragen helpen om een verduidelijking te geven aan bij wie het probleem in algebraïsche vaardigheden precies zit en voor wie het nuttig is om via een oefenmodule extra aandacht hieraan te besteden. Op deze manier kan eventueel kracht worden bijgezet aan het antwoord op de hoofdvraag, in de zin dat het antwoord hierop hierdoor meer gespecificeerd kan worden.

4 Methode

Zoals benoemd in de vorige delen van dit onderzoeksverslag is er bij dit onderzoek gekeken naar het effect van een oefenmodule op de algebraïsche vaardigheden van 4Havo leerlingen. Voor het maken van deze oefenmodule is veel inspiratie opgedaan uit de oefenmodule algebraïsche vaardigheden die al is opgesteld door Lysbeth van de Zee[1]. Deze oefenmodule zal behandeld worden met behulp van een stencil (een geprinte versie van de theorie en opgaven uit de oefenmodule). De reden dat een oefenmodule nuttig is, is dat, doordat leerlingen actief bezig zijn met het oefenen van opgaven uit het stencil die betrekking hebben op algebraïsche vaardigheden, het verbeteren van algebraïsche/rekenkundige vaardigheden wordt gestimuleerd en dat hiermee parate kennis van leerlingen bij het werken met algebraïsche uitdrukkingen wordt versterkt[1]. Dit zorgt er uiteindelijk voor dat wanneer leerlingen diverse algebraïsche bewerkingen of uitdrukkingen tegen zullen komen bij een wiskundig onderwerp, zij beter zullen weten hoe ze hiermee uit de voeten kunnen. Ook Bert Zwaneveld stelt dat het besteden van aandacht aan algebraïsche en conceptuele bekwaamheid een goede bijdrage kan leveren aan het verhelpen van de achterstand in algebraïsche vaardigheden in de tweede fase van het voortgezet onderwijs[2]. Voor de precieze vorm van de oefenmodule, waarbij veel “kale” en korte opgaven en voorbeelden worden gebruikt, is in het theoretisch kader reeds een onderbouwing gegeven. Voor de precieze volgorde van de onderwerpen is de structuur van de eerder gemaakte oefenmodule aangehouden. Wel is hierbij een selectie van onderwerpen gemaakt zodat enkel de onderwerpen die leerlingen vanuit de (Havo) onderbouw zouden moeten kennen aan bod komen. De onderwerpen die behandeld worden zijn: terminologie en rekenregels, rekenen met letters, werken met haakjes, breuken, machten, wortels en lineaire vergelijkingen.

4.1 Procedure

Nu de manier van het verbeteren van algebraïsche vaardigheden besproken is, is het belangrijk om het te hebben over de procedure van dit onderzoek. Om te toetsen hoe algebraïsche vaardigheden ervoor staan bij de leerlingen en of deze verbeterd kunnen worden met behulp van deze oefenmodule zal gebruik gemaakt worden van diagnostische toetsen. Een diagnostische toets dient ertoe om verschillen in vaardigheden tussen diverse leerlingen in kaart te brengen. Een diagnostische toets kan in het algemeen gebruikt worden om een score te koppelen aan een oordeel en plaatsing ten aanzien van vaardigheden[20], waarbij het in dit geval gaat over een oordeel in hoeverre leerlingen algebraïsche vaardigheden beheersen en hun plaatsing in niveau hierbij ten opzichte van andere leerlingen uit 4Havo. Natuurlijk moet om zo’n oordeel te kunnen vestigen de diagnostische toets wel op een correcte manier zijn opgebouwd. De validiteit en betrouwbaarheid van de diagnostische toetsen zal later in dit verslag besproken worden.

Het is belangrijk om te bespreken hoe dit onderzoek zal plaatsvinden. Bij dit onderzoek zullen twee 4Havo klassen betrokken zijn. Bij één klas zullen we als eerst een diagnostische toets afnemen om te controleren hoe algebraïsche vaardigheden er vanuit de basis voor staan. Vervolgens zal met dezelfde klas de oefenmodule doorgewerkt worden. Hierbij is ruimte voor één les aan instructie over de inhoud van het stencil dat hoort bij de oefenmodule, om vervolgens de leerlingen zelfstandig met de inhoud van de oefenmodule (het stencil) bezig te laten gaan. Nadat leerlingen hier gepaste tijd, één week, voor hebben gekregen zal controle plaatsvinden of de leerlingen daadwerkelijk voldoende bezig zijn geweest met de oefenmodule. Hierbij is het namelijk zo dat wanneer leerlingen niet bezig gaan met de oefenmodule er ook niet gekeken kan worden naar het precieze effect van deze oefenmodule. Na afloop van deze controle en het eventueel afmaken van werken aan de oefenmodule zal een tweede diagnostische toets afgenomen worden, die van een zeer vergelijkbare vorm is als de eerste diagnostische toets. Vanwege het niet bespreken van de eerste diagnostische toets is puur het behandelen van de oefenmodule van invloed op eventuele verbetering van algebraïsche vaardigheden op het moment van de tweede diagnostische toets. Om beter in staat te zijn om een vergelijking te doen met een groep die de oefenmodule niet heeft behandeld wordt deze tweede diagnostische toets ook afgenomen bij een tweede klas. Dit vormt de nulmeting. De reden dat de tweede klas niet ook de eerste diagnostische toets maakt, waarbij in dat geval de twee klassen dezelfde procedure doorlopen (het maken van de eerste en tweede diagnostische toets) en enkel bij de eerste klas de oefenmodule behandeld wordt, zodat er een vergelijking kan worden gedaan of het wel of niet behandelen van de oefenmodule voor een verschil in de verandering van scores tussen de eerste en tweede diagnostische toets zorgt, is dat er in de planning van de docent van de tweede klas geen ruimte was om meerdere lessen aan dit onderzoek te besteden. Om toch na te gaan of simpelweg het kort herhalen van algebraïsche vaardigheden niet evenveel effect heeft als het bezig gaan met de oefenmodule, zal in de les voor deze diagnostische toets bij de klas van de nulmeting algebraïsche vaardigheden kort benoemd worden en wordt ook uitgelegd wat het betekent om een bepaalde uitdrukking te herleiden of een vergelijking op te lossen (in circa 15 minuten van de voorafgaande les). Dit is de methode die in dit onderzoek gehanteerd zal worden om te kijken naar de algebraïsche vaardigheden van 4Havo leerlingen (zie figuur |5|).

Klas 1 (4Havo wiskunde A): Oefenmodule	Maakt de eerste diagnostische toets (13 september 10:45-11:30)	Behandelt de oefenmodule	Maakte de tweede diagnostische toets (20 september 10:45-11:30)
Klas 2 (4 Havo wiskunde A): Nulmeting	-	Korte herhaling van algebraïsche vaardigheden en herleiden	Maakt de tweede diagnostische toets (22 september 12:45-13:30)

Figuur |5|: Tabel met daarin de methode hoe het effect van het behandelen van de ontworpen oefenmodule op de algebraïsche vaardigheden van 4Havo leerlingen onderzocht wordt.

Allebei de diagnostische toetsen hebben 39 punten als maximumscore, en de score van de leerlingen en de klas waar zij het jaar ervoor in hebben gezeten zal als data voor dit onderzoek gebruikt worden. Deze data is verzameld door leerlingen de toets te laten maken, te benoemen dat het belangrijk is voor de leerlingen dat zij hun best hierbij doen (zodat duidelijk wordt "hoe wij hen beter kunnen helpen") en leerlingen de klas waar zij vorig jaar in hebben gezeten op hun opgavenblaadje te laten schrijven.

Deze data is vervolgens geanonimiseerd door de namen van de leerlingen in geen enkel bestand te verwerken. Aan elke leerling zal een nummer gekoppeld worden en dit is vervolgens hoe de data verwerkt zal worden bij dit onderzoek. Oftewel ieder nummer heeft dus een bepaalde score per diagnostische toets (voor de eerste klas voor beide diagnostische toetsen en voor de tweede klas alleen voor de tweede diagnostische toets) en een bepaalde jaarlaag/niveau waar zij vorig jaar vandaan zijn gekomen (bijvoorbeeld 3Havo of 4Mavo). Het aanvraagnummer voor dit onderzoek bij de ethiekcommissie is: 221000. Aangezien we te maken hebben met een geanonimiseerd onderzoek is het gebruik van een "passive informed consent"-brief aan de ouders/verzorgers van de leerlingen voldoende voor dit onderzoek. Deze brief is net iets langer dan een week van te voren uitgedeeld aan alle leerlingen die deelnemen aan dit onderzoek, waarbij verzocht is dit aan hun ouders te geven. De precieze brief die is opgesteld voor dit onderzoek is te zien in bijlage 1.

4.2 Respondenten

Wat betreft de respondenten van dit onderzoek gaat het om 4Havo leerlingen. De leerlingen die deelnemen aan dit onderzoek zijn zowel jongens als meiden, zijn voornamelijk van de leeftijden 15 tot en met 17 jaar en volgen allemaal het vak wiskunde A (dit zijn de klassen waarbij dit onderzoek plaatsvindt, bij wiskunde B vindt geen onderzoek plaats, omdat dit ook niet deel uitmaakt van de hoofdvraag van dit onderzoek). De doorlopen leerlijnen van deze leerlingen, en daarmee de ervaring die zij hebben opgedaan, is heel verschillend. Zo komen de meeste leerlingen of uit 3Havo of uit 4Mavo, maar er zijn ook een aantal leerlingen die het jaar ervoor zijn blijven zitten in 4Havo, een enkeling die eerder Realschuhle heeft gedaan en een andere enkeling die het jaar ervoor in 4Vwo zat. Aan dit onderzoek hebben in totaal 40 leerlingen als respondenten meegedaan (21 in de eerste klas en 19 in de tweede klas). De leerlingen die in deze klassen zaten zijn geselecteerd voor dit onderzoek omdat het onderzoek plaats moest vinden aan het begin van de tweede fase van de Havo en de docenten van de twee wiskunde A klassen, die in dit onderzoek zijn meegenomen, degenen waren die er open voor stonden om dit onderzoek in hun klas plaats te laten vinden. Al met al was er één leerling die heeft aangegeven niet mee te willen doen aan het onderzoek, deze leerling hoort daarom ook niet bij de 40 respondenten van dit onderzoek en is daarmee ook niet meegenomen in dit aantal. Omdat dit enkel één leerling was zal het naar alle waarschijnlijkheid minimale invloed hebben op dit onderzoek.

4.3 Instrumenten

Wat nu volgt is de precieze beschrijving van de instrumenten die gebruikt zijn bij dit onderzoek. Hieronder vallen het stencil dat hoort bij deze oefenmodule en de twee diagnostische toetsen die voor dit onderzoek zijn opgesteld.

Allereerst het stencil, zoals benoemd is hierbij hevige inspiratie ontleend aan de oefenmodule van Lysbeth van de Zee voor het SLO[1]. Echter is er, naast de eerder genoemde selectie van onderwerpen die aan bod komen voor de ontwikkelde oefenmodule, ook nog een andere aanpassing geweest voor dit stencil ten opzichte van het originele stencil die hoort bij de SLO oefenmodule. Deze aanpassing is dat er in deze nieuwe oefenmodule een deel van de opgaven is geschrapt, met als reden de tijd die leerlingen kwijt zullen zijn aan het behandelen van het stencil. De opdrachten die allemaal in de eerdere module voorkwamen waren te veel om bij leerlingen vanuit te gaan dat zij deze in een week tijd zelfstandig zouden maken. Om deze reden is voor dit stencil een selectie van opgaven gemaakt, waarin zowel instapopgaves als meer gevorderde opgaven voorkomen, die ervoor zorgen dat leerlingen voldoende oefening krijgen met de bedoelde algebraïsche vaardigheden, maar daarnaast niet overladen worden door een gigantisch aantal opgaven. Ook is er nog een verdere aanpassing gedaan die te maken heeft met het rekenen met haakjes. Op pagina 12 van de originele oefenmodule wordt bij het rekenen met letters meteen een voorbeeld gebruikt dat betrekking heeft op haakjes[1]. Er is voor onze oefenmodule gekozen om deze voorbeelden te verwerken in het gedeelte van het stencil dat gaat over haakjes, zodat het logischer is waar de stappen van deze berekening vandaan komen. Tevens is er bij het onderdeel rekenen met letters ook een (zelfbedacht) voorbeeld weergegeven die wel directe betrekking heeft op het theorieblok dat erboven staat. Dit is gedaan omdat er door het verplaatsen van de eerder genoemde voorbeeldopgaven anders geen voorbeeld meer overbleef die betrekking had tot het herleiden van optellingen van letters. De laatste grote aanpassing die is gedaan, naast een aantal opmaak verandering en herformuleringen, is dat er nog een aantal afsluitende opgaven zijn toegevoegd aan de oefenmodule. Deze afsluitende opgaven combineren diverse onderwerpen die in dit stencil aan bod zijn gekomen (breuken en machten, en lineaire vergelijkingen en haakjes). Bij deze opgaven wordt dus de koppeling gelegd tussen de verschillende onderwerpen en hiermee is dit ook een voorbereiding op hoe algebraïsche vaardigheden veelal zullen voorkomen in de tweede fase van de Havo (waarbij ze deze vaardigheden eigenlijk ook al zouden moeten beheersen vanuit de onderbouw). Het exacte stencil dat is bedoeld voor deze oefenmodule en gemaakt is specifiek voor dit onderzoek is te zien in bijlage 2.

Dan volgt nu de bespreking van de twee diagnostische toetsen voor dit onderzoek. Voor het ontwerpen van deze twee diagnostische toetsen is de handleiding gebruikt zoals die is weergegeven in het handboek van wiskundedidactiek[21]. Aangezien we met deze diagnostische toetsen erachter willen komen hoe leerlingen presteren met kijk op algebraïsche basisvaardigheden kunnen we gebruik maken van korte reproductievragen ("Weten dat"). De diagnostische toetsen die horen bij dit onderzoek zullen in de vorm zijn van een schriftelijke overhoring, omdat hierbij alle uitwerkingen van de leerlingen van de opgaven vastliggen en dat via het nakijken van deze uitwerkingen uitgekomen kan worden op een concrete score (behaald aantal punten). Tevens stelt de vorm van een schriftelijke overhoring ons goed in staat om reproductievragen te toetsen[21].

Wat betreft het toetsplan dat hoort bij deze diagnostische toetsen is dat we hiermee onderzoek willen doen naar algebraïsche vaardigheden van leerlingen. Het is dan dus ook belangrijk dat voor het correct uitwerken van de toets opgaven het beheersen van diverse algebraïsche vaardigheden vereist is. Hierdoor kan uiteindelijk op basis van de uitwerkingen van leerlingen bepaald worden wie welke vaardigheden al wel en nog niet beheersen.

Voor een goede toets dienen er ook leerdoelen opgesteld te worden. Hierbij geldt voor onze diagnostische toetsen dat wij willen kijken of leerlingen de diverse algebraïsche vaardigheden uit de onderbouw beheersen, en deze ook in combinatie met elkaar kunnen gebruiken. De onderwerpen die in deze diagnostische toets aan bod zullen komen zijn: rekenen met letters, werken met haakjes, rekenen met breuken, rekenen met machten en lineaire vergelijkingen. Hiermee omvat deze diagnostische toets het grootste deel van de algebraïsche vaardigheden uit de onderbouw. Echter is hierbij wel een duidelijke keuze gemaakt. Dit is de keuze om wortels niet in de diagnostische toets te verwerken. De reden hiervoor is dat wortels in de onderbouw van de Havo niet heel uitgebreid behandeld zijn, waarbij een groot deel van de theorieblokken uit Getal en Ruimte die gingen over het rekenen met wortels voornamelijk plusblokken waren[22](oftewel blokken die in de onderbouw niet persé behandeld hoeven te worden, en vaak ook niet op de toetsen terugkomen). Enkel de twee hoofdregels van het rekenen met wortels waren hierin geen plusblokken (het vermenigvuldigen en delen van wortels) en om deze reden zijn deze onderdelen wel in de oefenmodule verwerkt, ook al komen ze niet voor in de diagnostische toets. Verder komt het rekenen met wortels ook niet heel uitgebreid meer aan bod in de tweede fase van de Havo bij wiskunde A[3] en zijn er, ook zonder het rekenen met wortels, al heel wat onderwerpen die nu wel getoetst dienen te worden in de diagnostische toets. Vandaar dat ervoor gekozen is dit onderwerp niet in de diagnostische toets te omvatten.

Wat betreft de vorm van vragen in de diagnostische toets is gekozen voor open vragen. Wanneer er meerkeuzevragen worden gesteld hoeven leerlingen niet persé hun algebraïsche vaardigheden te laten zien en kunnen zij simpelweg kiezen voor één van de mogelijke antwoorden. Aangezien wij juist inzicht willen krijgen in hoe deze algebraïsche vaardigheden ervoor staan is het belangrijk dat ook de diverse denkstappen van leerlingen in beeld worden gebracht (zodat wellicht een deel van de punten voor een opgave, ondanks een fout eindantwoord alsnog gegeven kunnen worden). Open vragen lenen zich heel mooi voor het in beeld brengen van deze denkstappen en vandaar dat wij voor deze vorm van vragen hebben gekozen bij de diagnostische toetsen. Meerkeuzevragen kunnen tevens ook de validiteit van de diagnostische toets in de weg zitten, omdat leerling hierbij mogelijk het correcte antwoord zouden kunnen geven zonder dat zij beschikken over de benodigde vaardigheden om de opgave op te lossen wanneer zij simpelweg het correcte antwoord juist gokken. Dit is dan ook de voornaamste reden dat wij meerkeuzevragen vermijden.

Kijkend naar het ontwerpen van de toets vragen zullen wij vooral gebruik maken van opgaven die de specifieke algebraïsche basisvaardigheden toetsen, omdat dit in zijn geheel de leerdoelen voorstelt die wij met deze diagnostische toets willen controleren. Dit betekent dan ook dat wij in deze diagnostische toets geen inzichtrijke of toepassingsgerichte opgaven verwerken, omdat het het doel van deze diagnostische toets en dit onderzoek niet is om deze gevorderde vaardigheden te testen.

Wat betreft het ontwerpen van de toets proberen we een zo logisch mogelijke opbouw te hanteren. Bij deze logische opbouw hebben we aan het begin van de toets als eerst een aantal opgaven die losstaande basisvaardigheden testen (het rekenen met breuken met getallen, het rekenen met machten, en het herleiden van uitdrukkingen met haakjes). Deze opgaven zijn puur niveau 1 opgaven[21], oftewel reproductievragen (waarbij minder diepgaand denken vereist is), omdat bij deze opgaven enkel van de leerling wordt gevraagd om rekenregels te herinneren en te gebruiken. Dit is waar de eerste 3 onderdelen van de toets op ingaan. Voor al deze opdrachten zijn er twee punten per opdracht te behalen, waarvan één punt voor het gebruiken van een correcte rekenregel en één punt voor het geven van het juiste eindantwoord. De laatste 2 onderdelen van de toets (afgezien van de eerste opgave van het laatste onderdeel dat alleen een simpele lineaire vergelijking bevat en daarmee duidelijk van niveau 1 is) bestaan uit opgaven die basisvaardigheden met elkaar combineren (het rekenen met breuken wordt gecombineerd met het rekenen letters en machten, en het oplossen van lineaire vergelijkingen wordt gecombineerd met het herleiden haakjes of het omgaan met breuken). Dit maakt deze opgaven iets meer van niveau 2[21], omdat leerlingen hierbij zelf wat meer moeten nagaan wat de rekenregels, afkomstig uit de verschillen onderwerpen, zijn die zij kunnen toepassen om tot een correct antwoord te komen. Om deze reden leveren deze opdrachten elk drie punten op, één voor het toepassen van een correcte rekenregel, nog één voor het toepassen van een andere correcte rekenregel en één voor het geven van het juiste eindantwoord. Deze toets omvat daarmee dan ook geen enkele niveau 3 opgave. Dit is logisch omdat we enkel basisvaardigheden willen toetsen.

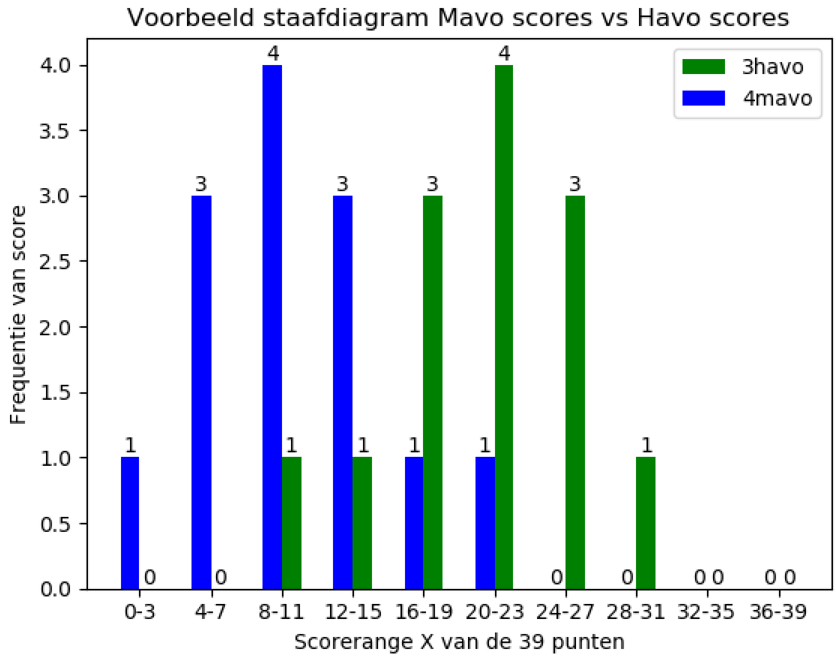
Om de bespreking van het ontwerpen van de diagnostische toetsen af te sluiten zullen we het nog hebben over de validiteit en betrouwbaarheid van deze diagnostische toetsen. Zoals eerder besproken is op de validiteit gelet door de toets te laten bestaan uit open vragen, waarbij leerlingen niet via een omweg (en zonder de juiste vaardigheden te beheersen) bij het correcte eindantwoord te komen. Hierbij is rekening gehouden de getallen en uitdrukkingen zo in te richten dat veelgemaakte fouten (zoals bijvoorbeeld het optellen van tellers en noemers bij het optellen van breuken, wat natuurlijk verkeerd is) niet tot het juiste antwoord kunnen leiden. Ook dat we geen contextvragen in deze diagnostische toets hebben gebruikt helpt mee de validiteit te vergroten, omdat leerlingen nu niet vast zullen komen te zitten in een context die hen ze niet begrijpen of die hen niet aanspreekt. Om de validiteit van de toets resultaten verder te versterken (scores die beter representatief zijn voor de werkelijkheid) is ervoor gekozen om het nakijken van de diagnostische toetsen per vraag plaats te laten vinden (in plaats van per leerling), waardoor de uitwerking van dezelfde vraag op eenzelfde manier is nagekeken. Tevens is bij deze nakijkmethode ook ervoor gekozen om bij de vijf leerlingen waarvan een opgave als eerst is nagekeken, na afloop van het nakijken van deze opdracht voor alle leerlingen, opnieuw te kijken naar het nakijkwerk bij deze eerste vijf leerlingen. Dit is gedaan om te voorkomen dat het nakijken bij deze eerste paar leerlingen eventueel (binnen het nakijkmodel) anders gebeurt dan bij de rest van de leerlingen, en hiermee wordt de validiteit van de resultaten van de toets versterkt.

Wat betreft de betrouwbaarheid van deze diagnostische toetsen is erop gelet dat leerlingen in ieder geval genoeg tijd hebben om alle opgaven te maken (hierbij is gebruikt dat de tijd die voor mij nodig is om de toets te maken keer 5 de tijd is die de leerlingen ongeveer nodig hebben). Hierbij is de toets ingericht om in ieder geval in circa 30 minuten gemaakt te kunnen worden door leerlingen (wanneer leerlingen de juiste vaardigheden kennen). Aangezien leerlingen voor deze toets ongeveer 40 minuten de tijd hebben (de lessen duren 45 minuten en er wordt 5 minuten gerekend voor het uitleggen van de toets en het uitdelen van de toets- en opgaveblaadjes), is er dus naar alle waarschijnlijkheid voldoende tijd voor alle leerlingen om de diagnostische toets op tijd af te krijgen. Tevens wordt de betrouwbaarheid van de toets versterkt doordat de toets begint met een niet al te moeilijke instapvraag, waarbij leerlingen hierdoor niet door de eerste vraag ontmoedigd worden voor de rest van de toets[21]. Wel is er nadrukkelijk voor gekozen om voornamelijk de “lastigere” opgaven aan het eind van de toets te stoppen, omdat deze opgaven eerdere vaardigheden met elkaar combineren, en het daarom niet logisch zou zijn om deze opgaven te plaatsen voordat de individuele vaardigheden zijn beproefd. Tot slot is de betrouwbaarheid van de diagnostische toetsen ook versterkt door het taalgebruik dat is toegepast in deze opgaven duidelijk te laten zijn (bij het herleiden van breuken is bijvoorbeeld expliciet gezet dat ze de uitdrukking moeten omschrijven naar één breuk) en daarnaast driedubbel te controleren op taalfouten. Het eindproduct van al deze aandacht aan het ontwerpproces is te zien in de bijlagen van dit onderzoeksverslag. Hierbij zijn ook de uitwerkingen van beide diagnostische toetsen verwerkt (die natuurlijk niet aan de leerlingen zijn gegeven). In bijlage 3 is de eerste diagnostische toets te zien en in bijlage 4 is de tweede diagnostische toets te zien. Beide diagnostische toetsen bevatten opgaven waarin precies dezelfde vaardigheden worden getoetst en daarnaast is de complexheid van de getallen (de lastigheid van de getallen) waarmee gewerkt wordt ook in beide diagnostische toetsen zeer vergelijkbaar.

4.4 Analyse

Het laatste punt dat in dit onderdeel van het onderzoeksverslag besproken zal worden is hoe de data voor dit onderzoek geanalyseerd zal worden. Eerder is al besproken dat enkel de geanonimiseerde (maar wel genummerde) scores voor de diagnostische toetsen en het niveau en leerjaar waar de leerlingen het schooljaar ervoor vandaan kwamen als data voor dit onderzoek gebruikt wordt. Dit is hiermee ook alle data die voor dit onderzoek geanalyseerd kan worden.

Zodra de diagnostische toetsen zijn nagekeken zullen de scores en het niveau en leerjaar van het vorige schooljaar per nummer (geanonimiseerd) in een Excel bestand gezet worden. De nummering zal hierbij voor klas 1 gaan op basis van de hoogste score voor de eerste diagnostische toets en voor klas 2 op basis van de hoogste score voor de tweede diagnostische toets. Nadat al deze data in het Excel bestand is gezet kan de data omgezet worden in een grafiek. Om duidelijk de scores van de leerlingen die uit 3Havo komen te scheiden van de leerlingen die uit 4Mavo komen is gekozen voor een staafdiagram. Hierbij staat dan op de x-as de scorerange die behaald is en op de y-as de frequentie waarin deze scorerange voorkomt. Er is hierbij gekozen om in de staafdiagram gebruik te maken van een klassenindeling (via verschillende scoreranges), omdat bij aparte puntscores de staafdiagram te groot was geworden, en het gebruik van een klassenindeling daarentegen een mooi overzicht geeft van de hoeveelheid (frequentie) leerlingen die qua score dicht bij elkaar zit. Met de groene balken zijn in de staafdiagrammen de leerlingen die uit 3Havo komen weergegeven en met de blauwe balken de leerlingen die uit 4Mavo komen. Een voorbeeld van zo’n grafiek is in figuur |6| te zien. De data die hier in deze staafdiagram staat is puur fictioneel, maar wel is hierin weergegeven wat onze verwachting is dat ongeveer de vorm zal zijn van de scores voor de initiële diagnostische toets (volgens mijn eerdere hypothese). Merk opnieuw op dat er in totaal 39 punten voor de diagnostische toetsen te behalen zijn en dat elke staaf een scorerange van 4 punten bevat.



Figuur |6|: Voorbeeldweergave van een staafdiagram (met fictieve data) zoals die straks ook gebruikt zal worden bij de analyse van de daadwerkelijke data.

Zo'n staafdiagram zal gemaakt worden voor zowel de scores van klas 1 op de eerste diagnostische toets, voor de scores van klas 1 op de tweede diagnostische toets en voor de scores van klas 2 op de tweede diagnostische toets. Tevens zal er ook een staafdiagram worden gemaakt met daarin de verandering van de scores van leerlingen uit klas 1 tussen de eerste en tweede diagnostische toets (positieve verandering staat gelijk aan een verbetering van algebraïsche vaardigheden).

Met behulp van deze staafdiagrammen worden de resultaten van de diagnostische toetsen op een overzichtelijke manier weergegeven en kunnen vervolgens vermoedens worden opgedaan over hoe leerlingen de toetsen hebben gemaakt en hoe hun algebraïsche vaardigheden ervoor staan, het eventuele verschil in scores tussen leerlingen die uit 3Havo komen ten opzichte van leerlingen die uit 4Mavo komen, de verandering in score van leerlingen vóór en ná het behandelen van de oefenmodule, en het eventuele verschil in de verandering van de score tussen leerlingen die uit 3Havo en 4Mavo komen. Deze resultaten zouden ons daarmee, in combinatie met verdere analysemethoden, kunnen helpen om de deelvragen en de hoofdvraag van dit onderzoek te beantwoorden.

Een andere manier waarop de data ook geanalyseerd zal worden is via het bepalen van het gemiddelde van elke serie aan scores. Zo zal voor klas 1 voor de eerste diagnostische toets het gemiddelde van de hele klas, het gemiddelde van de leerlingen die van de Mavo komen en het gemiddelde van de leerlingen die van de Havo komen worden bepaald. Hetzelfde zal voor klas 1 ook bepaald worden bij de tweede diagnostische toets en tot slot zal hetzelfde ook bepaald worden voor klas 2 bij de tweede diagnostische toets. Ook zullen dezelfde gemiddelden berekend worden voor de verandering van klas 1 tussen de eerste en de tweede diagnostische toets. Hierbij zal de verandering in de score tussen de eerste en tweede diagnostische toets berekend worden met behulp van de volgende formule:

$$Scoreverschil\ tussen\ toets\ 1\ en\ 2 = Score\ toets\ 2 - Score\ toets\ 1 \qquad (1)$$

Aan de hand van deze gemiddelden in de verandering kan worden gekeken of het behandelen van de oefenmodule voor een verbetering in algebraïsche vaardigheden heeft gezorgd, en kunnen tevens de deelvragen ook kwantitatief beantwoord worden.

Aangezien we willen bepalen in welke mate verandering, tussen de scores die door klas 1 behaald worden voor de eerste en tweede diagnostische toets, heeft plaatsgevonden zullen we gebruik gaan maken van de effectgrootte als statistische maat. Onder effectgrootte verstaan we de maat voor de sterkte van het effect van een statistisch significant verschil tussen twee behandelingen of methoden[23]. Als bijvoorbeeld een nieuwe methode met een statistische toets wordt vergeleken met een bestaande methode, kan een significant resultaat er weliswaar op duiden dat de nieuwe methode beter is dan de oude, maar zou het effect zo gering kunnen zijn dat het niet loont de nieuwe methode in te voeren. De effectgrootte zal dan aangeven hoe groot het effect daadwerkelijk is. Aan de hand van deze maat kunnen we dus bepalen op er sprake is van een significant verschil tussen de behaalde scores op de eerste en tweede diagnostische toets voor klas 1, en aan de hand daarvan kunnen we onze hoofdvraag beter beantwoorden.

De formule die we gaan gebruiken om de effectgrootte te berekenen is de volgende:

$$E = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_1} \tag{2}$$

Deze formule komt voort uit de definitie van de 'standardized mean difference'[24].

- Hierbij staat E voor de effectgrootte, waarbij een waarde tussen de $0,2$ en de $0,5$ staat voor een klein verschil, een waarde tussen de $0,5$ en $0,8$ staat voor een medium verschil en een waarde groter dan $0,8$ staat voor een groot verschil[24].
- μ_2 staat voor de gemiddelde score die behaald is voor de tweede diagnostische toets.
- μ_1 staat voor de gemiddelde score die behaald is voor de eerste diagnostische toets.
- σ_1 staat voor de standaarddeviatie die hoort bij de eerste diagnostische toets.

Deze effectgrootte zullen we berekenen voor zowel de verandering in de scores van de gehele klas 1, als van de leerlingen die van de Mavo komen, als van de leerlingen die van de Havo komen. Telkens is het zo dat de gemiddelden en standaarddeviatie hierbij worden berekend voor de specifieke groep waarop zij van toepassing zijn.

De standaarddeviatie, die gebruikt wordt in formule (2) en in de rest van dit onderzoek, volgt uit de reguliere definitie ervan. Wel dient hierbij opgemerkt te worden dat, aangezien we voor dit onderzoek een schatting maken van het daadwerkelijke gemiddelde door het nemen van het gemiddelde van de gevonden data, we gebruik maken van de "sample standard deviation"[25], waarbij we bij de som van de kwadraten die gebruikt wordt om de standaarddeviatie te berekenen we delen door $N - 1$ (met N het aantal scores in de groep).

Een andere statistische maat die we gaan gebruiken om te bepalen of we te maken hebben met een statistisch significant scoreverschil is de t-toets. Wat we voor dit onderzoek hiermee willen doen is toetsen of de gemiddelden van beide populaties (de scores voor de eerste en tweede diagnostische toetsen) significant van elkaar afwijken. We hebben hierbij te maken met zogenaamd gepaarde steekproeven. Om te toetsen of er wel of niet een significant verschil tussen de gemiddelden van de steekproeven zit maken we gebruik van de T-toets, met als leidende uitdrukking formule (3)[26], die te zien is op de volgende pagina.

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \quad (3)$$

- Hierbij is T de toetsingsgrootheid voor gepaarde steekproeven.
- $\bar{X}$ is het gemiddelde scoreverschil (van de twee steekproeven) tussen de eerste en tweede diagnostische toets voor een bepaalde groep.
- μ_0 is het verwachte gemiddelde van de nulhypothese.
- S is de steekproefstandaardafwijking van het scoreverschil.
- n is de omvang van de steekproef (het aantal leerlingen dat meedeed aan het onderzoek waarvoor het scoreverschil bepaald kan worden).

Wanneer we nu als nulhypothese stellen dat $H_0: \mu_0 = 0$, wat zou betekenen dat het gemiddelde scoreverschil gelijk is aan nul (oftewel de leerlingen hebben de eerste diagnostische toets gemiddeld gezien net zo goed gemaakt als de tweede diagnostische toets), dan kunnen we de waarde van t berekenen (berekend met de formule voor T) met behulp van de uit het onderzoek bepaalde waarden voor $\bar{X}$, S en n. We kunnen hiermee stellen dat de nulhypothese verworpen wordt bij te grote waarden voor t, waarbij het zo is dat de waarde van t te groot is wanneer de kans te klein wordt dat zowel op deze waarde van t wordt uitgekomen als dat de nulhypothese klopt. Deze kans valt te bepalen door met behulp van de waarde van t de (rechter)overschrijdingskans te bepalen. Aangezien we bij dit onderzoek te maken hebben met $n-1$ vrijheidsgraden kunnen we gebruikmaken van de waarden uit de tabel met de t-verdeling bij $n-1$ vrijheidsgraden[27]. Kijkend naar deze rij met waarden en de bepaalde t-waarde kan de kans p bepaald worden om uit te komen op deze t-waarde, die gelijk is aan:

$$P(T \geq t; H_0) = P(T(n-1) \geq t) = p \quad (4)$$

Een alternatieve hypothese is: $H_1: \mu_0 > 0$. Als de waarde van p die uit de formule komt kleiner is dan $\alpha = 5\%$ (een grenswaarde die volgt uit de literatuur[26]) kan de nulhypothese verworpen worden en wordt aangenomen dat het gemiddelde scoreverschil significant positief is (en H_1 geldt). Hierbij hebben we dus te maken met eenzijdig hypothesetoetsen, omdat de verwachting is dat het gemiddelde scoreverschil positief is (indien dit niet zo kan de alternatieve hypothese nog worden bijgesteld).

Ook kan de t-toets voor nog een doeleinde dienen. Dit doeleinde heeft te maken met het kijken naar het scoreverschil tussen leerlingen die uit 4Mavo komen ten opzichte van leerlingen die uit 3Havo komen. De reden dat we de t-toets ook op dit verschil toepassen is dat we uiteindelijk willen kijken naar of er een verschil bestaat in de algebraïsche vaardigheden tussen deze twee groepen leerlingen. In dit geval hebben we te maken met ongepaarde steekproeven[26]. Omdat we te maken hebben met ongepaarde steekproeven zullen we ook een andere formule moeten gebruiken voor de toetsingsgrootheid, waarbij we specifiek zullen kijken naar het verschil in gemiddelde scores tussen leerlingen die uit 3Havo en 4Mavo komen voor de eerste diagnostische toets. De specifieke formule voor ongepaarde steekproeven die gebruikt wordt voor dit onderzoek is te zien in formule (5)[26].

$$T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \quad (5)$$

- Hierbij is T de toetsingsgrootheid voor ongepaarde steekproeven.
- $\bar{X}$ is het steekproefgemiddelde voor de eerste diagnostische toets van leerlingen die uit 4Mavo komen.
- $\bar{Y}$ is het steekproefgemiddelde voor de eerste diagnostische toets van leerlingen die uit 3Havo komen.
- S^2 (die ons S geeft) is de zogenoemde gepoolde variantie[26], die gedefinieerd wordt door formule (6).
- n is de omvang van de steekproef bij de groep leerlingen die uit 4Mavo komen.
- m is de omvang van de steekproef bij de groep leerlingen die uit 3Havo komen.

$$S^2 = \frac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{n+m-2} \quad (6)$$

- Hierbij zijn S, n en m hetzelfde als hierboven.
- S_X is de afzonderlijke steekproefvariantie van de scores van de leerlingen die uit 4Mavo komen van klas 1 voor de eerste diagnostische toets.
- S_Y is de afzonderlijke steekproefvariantie van de scores van de leerlingen die uit 3Havo komen van klas 1 voor de eerste diagnostische toets.

Er is dus sprake van twee onafhankelijke steekproeven. Er wordt aangenomen dat beide steekproeven afkomstig zijn uit normale verdelingen met gelijke varianties, en verwachtingswaarden (of dit daadwerkelijk het geval is wordt in de discussie besproken), respectievelijk μ_X en μ_Y (μ_X is hierbij de verwachtingswaarde van de score voor leerlingen die uit 4Mavo komen en μ_Y de verwachtingswaarde voor leerlingen die uit 3Mavo komen).

Wat we nu toetsen zijn de volgende hypothesen: $H_0: \mu_X = \mu_Y$ tegen $H_1: \mu_X < \mu_Y$. De t-waarde die met behulp van formule (5) wordt berekend kan opnieuw worden gebruikt om uit de studentverdelingstabel[27] de juiste waarde van de kans p af te lezen (lettend op linker overschrijdingskans), waarbij het aantal vrijheidsgraden gelijk is aan $n + m - 2$. Als blijkt dat p kleiner is dan $\alpha = 5\%$, kunnen we de nulhypothese weerleggen en als in dit geval de gemiddelde score die de leerlingen uit 3Havo hebben behaald op de eerste diagnostische toets hoger is dan de gemiddelde score van de leerlingen uit 4Mavo (wat er in eerste instantie voor zorgt dat we een eenzijdige hypothese toetsing kunnen benutten) dan kunnen we concluderen dat $\mu_X < \mu_Y$.

Ook kan de ongepaarde t-toets gebruikt worden om de significantie van het verschil in gemiddelde scoren tussen klas 1 en klas 2 voor de tweede diagnostische toets te laten zien. Bij deze t-toets kunnen opnieuw formules (5) en (6) gebruikt worden, maar nu wordt voor $\bar{X}$ het steekproefgemiddelde van de toets score van de gehele klas 2 voor de tweede diagnostische toets genomen, voor $\bar{Y}$ wordt het steekproefgemiddelde van de toets score van de gehele klas 1 voor de tweede diagnostische toets genomen, n is de omvang van de steekproef bij de groep leerlingen uit klas 2, m is de omvang van de steekproef bij de groep leerlingen uit klas 1, S_X is de afzonderlijke steekproefvariantie van de scores van de leerlingen uit klas 2 voor de tweede diagnostische toets en S_Y is de afzonderlijke steekproefvariantie van de scores van de leerlingen uit klas 1 voor de tweede diagnostische toets.

Wat we hierbij toetsen zijn opnieuw de hypothesen: $H_0: \mu_X = \mu_Y$ tegen $H_1: \mu_X < \mu_Y$. Echter is hierbij μ_X de verwachtingswaarde van de score van klas 2 en μ_Y is de verwachtingswaarde van de score van klas 1. Op eenzelfde manier als hierboven reeds beschreven kan opnieuw de waarde van p worden bepaald, en als blijkt dat deze waarde kleiner is dan 5% kan ook hier de nulhypothese weerlegd worden, wat ons zou leiden tot de conclusie (indien de gemiddelde score van klas 1 hoger is dan die van klas 2 voor de tweede diagnostische toets) dat $\mu_X < \mu_Y$.

Tot slot kan de ongepaarde t-toets ook nog gebruikt worden om het eventuele verschil in gemiddelde scoren tussen klas 1 voor de eerste diagnostische toets en klas 2 voor de tweede diagnostische toets te bekijken. Bij deze t-toets worden weer de formules (5) en (6) gebruikt, maar is $\bar{X}$ het steekproefgemiddelde van de toets score van de gehele klas 1 voor de eerste diagnostische toets genomen, $\bar{Y}$ het steekproefgemiddelde van de toets score van de gehele klas 2 voor de tweede diagnostische toets, n de omvang van de steekproef bij de groep leerlingen uit klas 1, m de omvang van de steekproef bij de groep leerlingen uit klas 2, S_X de afzonderlijke steekproefvariantie van de scores van de leerlingen uit klas 1 voor de eerste diagnostische toets en S_Y de afzonderlijke steekproefvariantie van de scores van de leerlingen uit klas 2 voor de tweede diagnostische toets.

Aangezien de behaalde scores die horen bij de steekproeven van deze t-toets staan voor de eerste keer dat de klassen in aanraking komen met een diagnostische toets over algebraïsche vaardigheden bij dit onderzoek kunnen de van nature aanwezige algebraïsche vaardigheden van de klassen hiermee met elkaar vergeleken worden. Hierbij gaan we er in eerste instantie vanuit dat klas 2 hoger scoort op hun diagnostische toets dan klas 1 op de eerste diagnostische toets, omdat bij klas 2 algebraïsche vaardigheden kort voor de tijd zullen zijn behandeld en bij klas 1 voor de eerste diagnostische toets niet. Natuurlijk hoeft dit niet het geval te zijn en in dat geval kunnen we de alternatieve H_1 hypothese ook bij stellen. We hebben dus in eerste instantie: H_0: $\mu_X = \mu_Y$ tegen H_1: $\mu_X < \mu_Y$, waarbij μ_X de verwachtingswaarde is van de score van klas 1 voor de eerste diagnostische toets en μ_Y is de verwachtingswaarde van de score van klas 2 voor de tweede (hun enige) diagnostische toets. Opnieuw kan op eenzelfde manier p berekend worden en zo kan, als blijkt dat deze waarde kleiner is dan 5%, ook hier de nulhypothese weerlegd worden. Dit zou ons dan tot de conclusie dat $\mu_X < \mu_Y$ leiden.

Dit was de beschrijving van de methode die voor dit onderzoek gebruikt gaat worden. De volgende stap is dat het onderzoek zo plaats zal vinden zoals hiervoor is beschreven en vervolgens worden de resultaten hiervan in het volgende onderdeel van dit onderzoeksverslag verwerkt.

5 Resultaten

In dit onderdeel van het onderzoeksverslag zal beschreven worden wat de resultaten waren van het onderzoek. In dit gedeelte van het verslag zullen we als eerst benoemen hoe het onderzoek zelf in de klas is verlopen, vervolgens zullen de scores van de diagnostische toetsen worden weergegeven in de vorm van een Excel tabel en staafdiagrammen, hierna zal het verschil in score bij klas 1 tussen de eerste en de tweede diagnostische toets worden weergegeven in een staafdiagram, daarna zullen de gemiddelde scores per groep worden weergegeven, dan zal de gemiddelde verandering bij klas 1 tussen de eerste en tweede diagnostische toets per groep worden weergegeven, vervolgens zullen de effectgroottes die bij deze veranderingen horen besproken worden tot slot zullen de diverse t-toetsen besproken worden.

5.1 Verloop van het onderzoek

Allereerst hebben de leerlingen van beide klassen een “passive informed consent”-brief ontvangen. Naar aanleiding daarvan is één leerling (uit klas 1) uitgesloten van het onderzoek

Vervolgens is een week na het uitdelen van deze brief het onderzoek dus in klas 1 begonnen. Bij deze sessie is aan klas 1 verteld wat de bedoeling was met de diagnostische toets en het onderzoek (nadat ze dit ook al de week ervoor hadden gehoord van hun docent), waarna er veel vragen kwamen. Deze vragen waren “Telt het cijfer dat we hiervoor krijgen niet mee voor ons rapport?”, “Wat nou als ik helemaal geen enkele van deze vragen kan beantwoorden?”, “Krijgt onze docent straks wel onze cijfers te zien?” en “Mogen we samenwerken bij deze toets?” Op al deze vragen is vervolgens antwoord gegeven met (wat eigenlijk een herhaling was) dat de diagnostische toets niet meetelt voor een cijfer en dat er geen consequenties aan vast zitten als de toets wel of niet goed wordt gemaakt, dat de resultaten anoniem zijn en dat de docent van de klas dus ook niet te weten zal komen wie welke score heeft behaald, dat samenwerken bij de toets niet toegestaan is omdat we van iedereen de persoonlijke algebraïsche vaardigheden wilden testen en dat het dan ook belangrijk is voor het onderzoek en voor het eigen inzicht van de leerlingen dat zij proberen ze diagnostische toets zo goed mogelijk te maken. Tot slot is ook nog gezegd dat het gebruik van een rekenmachine niet was toegestaan en dat het belangrijk was dat alle leerlingen hun naam en klas waar ze vorig jaar in hadden gezeten op het uitwerkingsblaadje zouden schrijven.

Hierna zijn de toets- en uitwerkingsblaadjes uitgedeeld en zijn de leerlingen aan de toets begonnen. Een deel van de leerlingen was al vrij snel klaar te zien was dat deze leerlingen bij veel opgaven kruizen of vraagtekens op hun uitwerkingsblaadje hadden gezet. Andere leerlingen waren 30 tot 35 minuten bezig, maar uiteindelijk was iedereen klaar met de diagnostische toets voordat de bel ging.

De volgende wiskundeles die deze leerlingen van klas 1 hadden is opnieuw besteed aan het onderzoek. In deze les zijn de stencils uitgedeeld voor de oefenmodule algebraïsche vaardigheden. Tijdens dit lesuur is er instructie gegeven over de inhoud van de oefenmodule en is er als huiswerk opgegeven dat de leerlingen de week erop alle opgaven van het stencil af zouden hebben, waarbij benoemd is dat dit dan ook gecontroleerd zou worden. Vervolgens heeft de docent dit huiswerk ook op Som gezet (hierin wordt het huiswerk bijgehouden dat leerlingen moeten maken). Echter bleek na deze controle les dat de leerlingen amper waren bezig geweest met de opgaven. Om die reden had de docent van klas 1 tijdens die les gezegd dat leerlingen er de rest van de les en de volgende les nog aan konden werken, waardoor de klas uiteindelijk drie lessen bezig is geweest met de oefenmodule. Aangezien het op dat moment voor het onderzoek beter was dat leerlingen in ieder geval wel bezig zouden zijn geweest met de oefenmodule was dit op dat moment het beste alternatief. Voor nu was het door deze extra lessen in ieder geval wel zo dat leerlingen redelijk wat geoefend hadden met de opgaven uit het stencil. Echter vond deze derde les plaats op dezelfde dag als dat uiteindelijk ook de tweede diagnostische toets plaatsvond (de klas had die dag twee lesuren), waardoor geen controle meer plaats heeft gevonden of de leerlingen uiteindelijk wel alle opgaven af hadden en het is hierdoor aan leerlingen ook niet opgelegd om persé alle opgaven af te hebben. Dit zorgt ervoor dat er nu niet met zekerheid gezegd kan worden dat alle leerlingen van klas 1 de gehele oefenmodule doorgewerkt hebben (maar waarschijnlijk de overgrote meerderheid wel, waarbij de docent van klas 1 aangaf dit te hebben gezien bij een korte check).

Vervolgens is de tweede diagnostische toets bij klas 1 afgenomen. Het leek tijdens dit toets uur dat de meeste leerlingen langer bezig waren met de diagnostische toets dan bij de eerste diagnostische toets. Dit leek voornamelijk te gelden voor de leerlingen die de eerste diagnostische toets al vrij snel ingeleverd hadden. Toch waren opnieuw alle leerlingen binnen 40 minuten klaar met de diagnostische toets en hadden ze dus opnieuw voldoende tijd om de opgaven te maken. Na afloop van deze diagnostische toets gaf de docent van klas 1 aan dat een aantal leerlingen uit deze klas feedback had gegeven op de inhoud van het stencil en de oefenmodule. De precieze feedback die gegeven is zal worden besproken in het reflectie onderdeel van dit onderzoeksverslag.

Twee dagen later is deze tweede diagnostische toets ook afgenomen bij klas 2. Bij deze klas is hetzelfde verhaal verteld als bij klas 1 is verteld over het onderzoek en de diagnostische toets (behalve dat hierbij werd gezegd dat deze klas dus maar één diagnostische toets zou maken). Ook hier was iedereen binnen 40 minuten klaar met de diagnostische toets.

5.2 Overzicht van de scores

Nadat alle uitwerkingsblaadjes van de diagnostische toetsen waren ingeleverd, is het nakijken van de toetsen begonnen. Voor het nakijken is de methode gehanteerd die in het vorige onderdeel van dit onderzoeksverslag beschreven stond. Nadat alle toetsen waren nagekeken zijn de scores, en niveau en leerjaar waar de leerling vandaan kwam in een Excel bestand gezet, waarbij een nummering is gebruikt (op basis van de hoogste score naar de laagste score) in plaats van de leerling namen. Ook is hierbij voor klas 1 het verschil berekend tussen hun score bij de eerste diagnostische toets ten opzichte van de tweede diagnostische toets volgens formule (1) uit de methode.

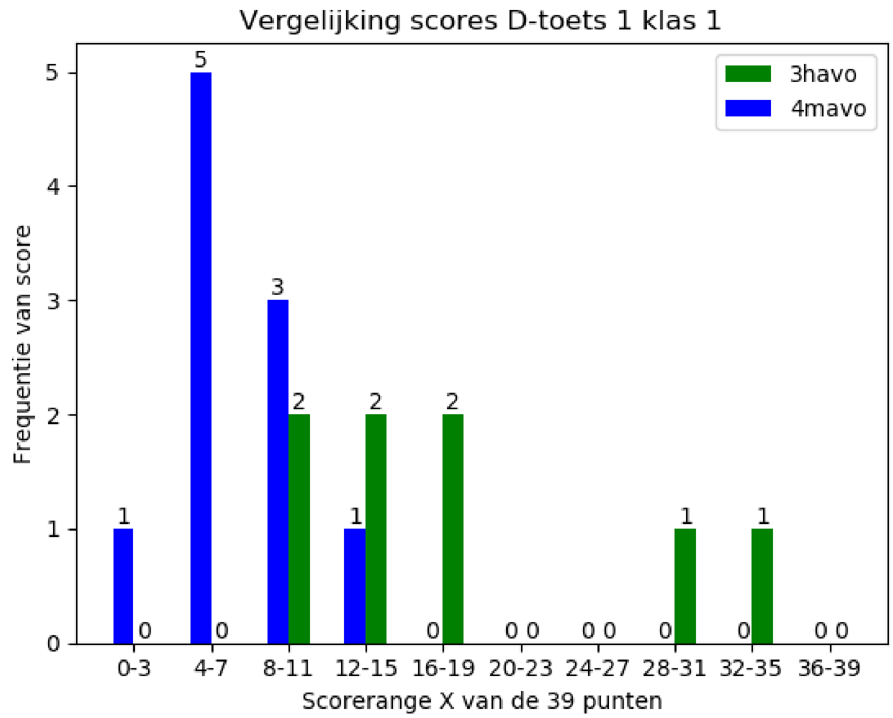
Bij het verschil in score tussen toets 1 en 2 heeft elke range scoreverschil een specifieke kleur in het Excel bestand gekregen, waardoor duidelijker te zien is welke leerlingen de tweede diagnostische toets veel beter, redelijk wat beter, iets beter, hetzelfde of iets slechter hebben gemaakt. Een afbeelding van het gemaakte Excel bestand is in figuur |7| te zien.

Nummer	Niveau Jaar Ervoor	Score Toets 1 max39	Score Toets 2 max39	Verschil Toets 1 en 2
1	3Havo/Vwo	33	34	1
2	3Havo/Vwo	31	31	0
3	Realschuhle	27	32	5
4	3Havo/Vwo	17	30	13
5	3Havo/Vwo	17	28	11
6	4Vwo	16	27	11
7	3Havo/Vwo	15	23	8
8	4Mavo	12	25	13
9	3Havo/Vwo	12	18	6
10	3Havo/Vwo	11	30	19
11	3Havo/Vwo	10	24	14
12	4Mavo	10	14	4
13	4Mavo	8	8	0
14	4Mavo	8	18	10
15	4Mavo	7	7	0
16	4Mavo	6	17	11
17	4Mavo	6	10	4
18	4Mavo	5	11	6
19	4Mavo	5	4	-1
20	4Mavo	2	1	-1
21	4Havo Z	0	2	2
22	3Havo/Vwo		29	
23	4Havo Z		26	
24	3Havo/Vwo		24	
25	3Havo/Vwo		23	
26	3Havo/Vwo		23	
27	3Havo/Vwo		20	
28	3Havo/Vwo		19	
29	3Havo/Vwo		18	
30	4Mavo		17	
31	3Havo/Vwo		17	
32	3Havo/Vwo		16	
33	3Havo/Vwo		14	
34	3Havo/Vwo		14	
35	4Mavo		12	
36	4Mavo		10	
37	3Havo/Vwo		10	
38	4Mavo		7	
39	4Mavo		7	
40	4Havo Z		4	

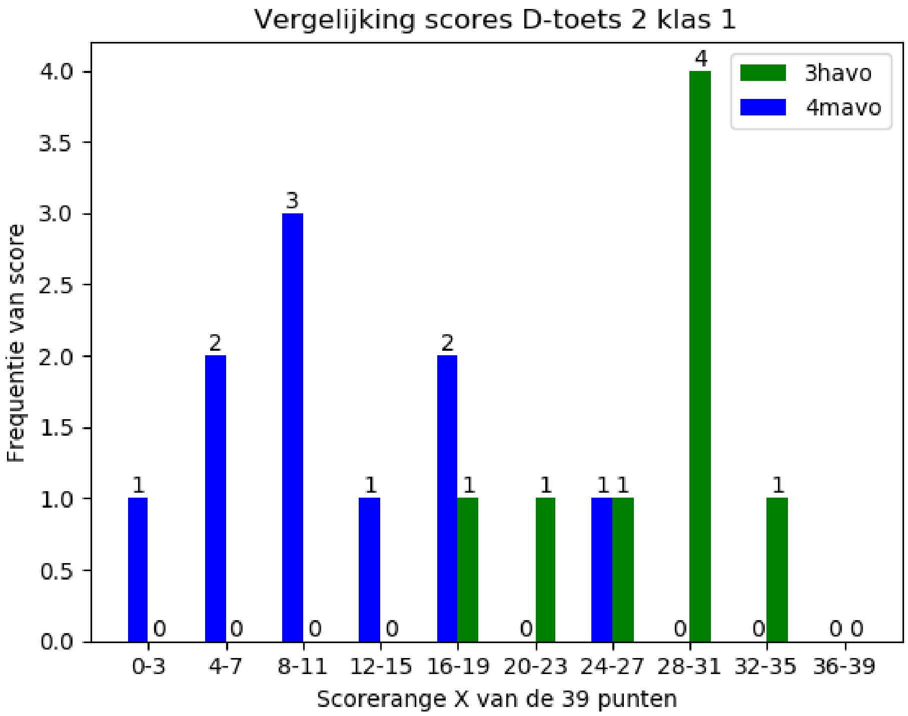
Figuur |7|: Schermafbeelding van het Excel bestand waarin de scores en het scoreverschil van/tussen de twee diagnostische toetsen voor klas 1 en de scores van klas 2 voor de tweede diagnostische toets te zien zijn. Merk opnieuw op dat de derde klas van de Havo op de stageschool alleen bestaat in de vorm van een 3Havo/Vwo klas. Merk daarnaast ook op dat 4Havo Z staat voor een leerling die in 4Havo is blijven zitten.

5.3 Staafdiagrammen

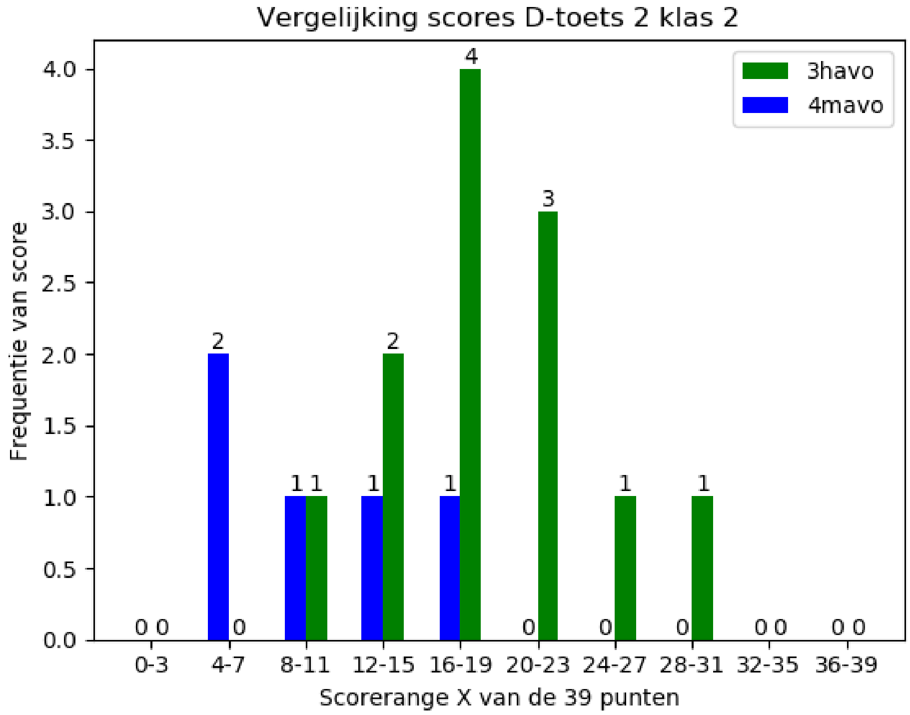
Aangezien deze gegevens verwerkt worden in een staafdiagram waarbij aparte staven bestaan voor leerlingen die vanuit 4Mavo of 3Havo(/Vwo) in 4Havo terecht zijn gekomen, worden de leerlingen die het jaar ervoor Realschuhle, 4Vwo of al 4Havo hebben gedaan, niet in de staafdiagram meegenomen. In deze staafdiagrammen is het telkens zo dat er per range van vier scorepunten één staaf (voor zowel de leerlingen die uit 4Mavo als uit 3Havo zijn gekomen) is weergegeven. De staafdiagram die hoort bij de scores van klas 1 voor de eerste diagnostische toets is te zien in figuur |8|. De staafdiagram die hoort bij de scores van klas 1 voor de tweede diagnostische toets is te zien in figuur |9|. En tot slot is de staafdiagram die hoort bij de scores van klas 2 voor de tweede diagnostische toets te zien in figuur |10|.



Figuur |8|: Staafdiagram die hoort bij de scores van klas 1 voor de eerste diagnostische toets, waarbij de blauwe staven horen bij de scores van de leerlingen die uit 4Mavo komen en de groene staven bij de scores van de leerlingen die uit 3Havo komen.



Figuur |9|: Staafdiagram die hoort bij de scores van klas 1 voor de tweede diagnostische toets, waarbij de blauwe staven horen bij de scores van de leerlingen die uit 4Mavo komen en de groene staven bij de scores van de leerlingen die uit 3Havo komen.

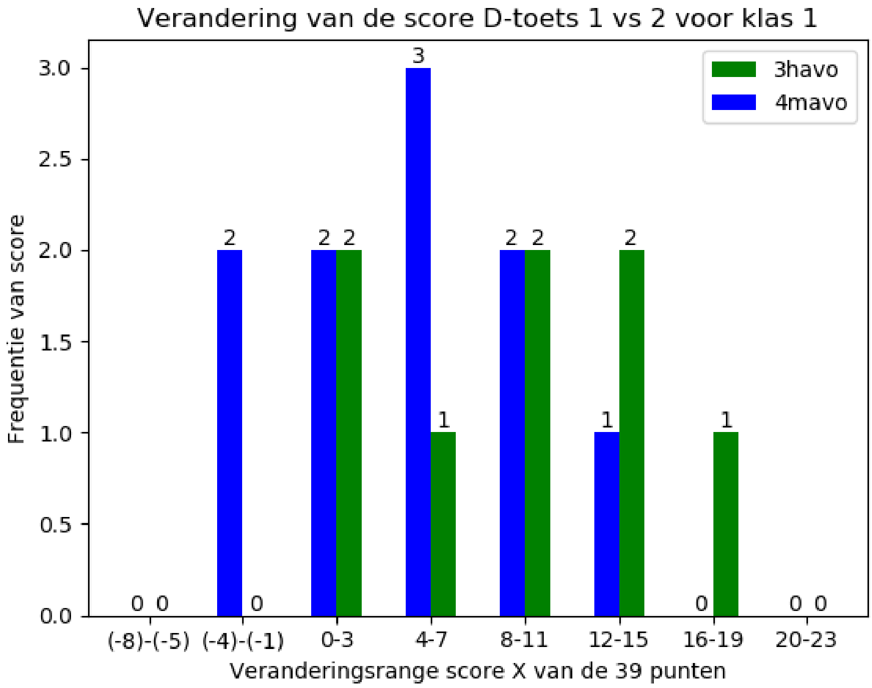


Figuur |10|: Staafdiagram die hoort bij de scores van klas 2 voor de tweede diagnostische toets, waarbij de blauwe staven horen bij de scores van de leerlingen die uit 4Mavo komen en de groene staven bij de scores van de leerlingen die uit 3Havo komen.

Een aspect dat aan deze grafieken kwalitatief meteen opvalt is dat gemiddeld gezien leerlingen die uit 4Mavo komen op de diagnostische toetsen lager scoren dan leerlingen die uit 3Havo komen. Hierbij is te zien dat scores hoger dan 28 punten (van de 39) niet behaald worden door leerlingen die uit 4Mavo komen en dat scores die lager zijn dan 8 punten niet behaald worden door leerlingen die uit 3Havo komen.

Naast de drie zojuist weergegeven staafdiagrammen is er nog een staafdiagram die ook nog getoond kan worden. Dit is de staafdiagram die betrekking heeft tot het scoreverschil bij klas 1 tussen de eerste diagnostische toets en de tweede. Merk op dat er in dit staafdiagram ook negatieve verschillen zijn weergegeven. Voor de rest is het hierbij nog steeds zo dat een range voor een specifieke staaf bestaat uit 4 scorepunten (in dit geval scoreverschil). Het staafdiagram met daarin de scoreverschillen van klas 1 is te zien in figuur |11|.

Uit figuur |11| wordt duidelijk dat een groot deel van de leerlingen voor de tweede diagnostische toets aanzienlijk meer punten hebben gescoord dan voor de eerste diagnostische toets. Ook valt te zien dat de leerlingen die uit 3Havo komen bijna allemaal een positief scoreverschil hebben (enkel één leerling is niet vooruit gegaan, maar deze leerling had ook voor de eerste diagnostische toets al 31 punten). Voor de leerlingen die uit 4Mavo komen is gemiddeld ook een duidelijke toename in score te zien die voor de tweede toets is behaald ten opzichte van de eerste toets. Echter zijn er voor deze groep ook een aantal leerlingen waarvan de behaalde score van de tweede diagnostische toets hetzelfde is als voor de eerste, en daarnaast zelfs een paar leerlingen waarvoor hun resultaat bij de tweede toets slechter is dan dat bij de eerste (bij beide leerlingen verschilt het 1 punt, maar toch is dit een afname in de score). Al met al zijn dit duidelijke, maar toch nog redelijk kwalitatieve en individuele (per leerling) waarnemingen. Om ook nog wat meer kwantitatieve resultaten van dit onderzoek voor de verschillende en gehele groep weer te kunnen geven zijn in de volgende alinea een aantal gemiddelden berekend.



Figuur |11|: Staafdiagram die hoort bij het scoreverschil van klas 1 tussen de eerste diagnostische toets en de tweede diagnostische toets dat met formule (1) is berekend, en waarbij de blauwe staven horen bij de scores van de leerlingen die uit 4Mavo komen en de groene staven bij de scores van de leerlingen die uit 3Havo komen.

5.4 Gemiddelde scores en scoreverschillen

Het berekenen van een gemiddelde geeft ons een goede kwantitatieve weergave van de scores en scoreverschillen die voor deze toets behaald zijn door de verschillende groepen en de gehele klas. Er zijn bij dit onderzoek twaalf gemiddelde scores/scoreverschillen berekend.

Allereerst kijken we hierbij naar de gemiddelde scores van klas 1 op de eerste diagnostische toets. Het gemiddeld aantal behaalde scorepunten van de gehele klas is (waarbij de leerlingen die niet in de staafdiagram staan wel zijn meegenomen) hierbij: $\frac{258}{21} \approx 12{,}3$ scorepunten. Het gemiddeld aantal behaalde scorepunten van de leerlingen die uit 4Mavo komen is: $\frac{69}{10} = 6{,}9$ scorepunten. Het gemiddelde aantal behaalde scorepunten van de leerlingen die uit 3Havo komen is: $\frac{146}{8} \approx 18{,}3$ scorepunten.

Nu kijken we naar de gemiddelde scores van klas 1 op de tweede diagnostische toets. Het gemiddeld aantal behaalde punten hierbij van de gehele klas is: $\frac{394}{21} \approx 18{,}8$ punten. Het gemiddeld aantal behaalde punten van de leerlingen die uit 4Mavo komen is: $\frac{115}{10} = 11{,}5$ punten. Het gemiddeld aantal behaalde punten van de leerlingen die uit 3Havo komen is: $\frac{218}{8} \approx 27{,}3$ punten.

Nog drie gemiddelden van het aantal behaalde scorepunten berekenen we voor klas 2 op de tweede diagnostische toets. Het gemiddeld aantal scorepunten van de gehele klas is hierbij: $\frac{310}{19} \approx 16{,}3$ scorepunten. Het gemiddeld aantal scorepunten van de leerlingen die uit 4Mavo zijn gekomen is:

$\frac{53}{5} = 10{,}6$ scorepunten. Het gemiddelde aantal scorepunten van de leerlingen die uit 3Havo zijn gekomen is: $\frac{227}{12} \approx 18{,}9$ scorepunten.

De drie gemiddelden van de scoreverschillen tussen de eerste diagnostische toets en de tweede diagnostische toets zijn bepaald voor klas 1. Het gemiddelde scoreverschil van de gehele klas is hierbij: $\frac{136}{21} \approx +6{,}5$ scorepunten. Het gemiddelde scoreverschil voor leerlingen die uit 4Mavo zijn gekomen is: $\frac{46}{10} = +4{,}6$ scorepunten. Het gemiddelde scoreverschil voor leerlingen die uit 3Havo komen is: $\frac{72}{8} = +9{,}0$ scorepunten.

Overzicht gemiddelde scores/scoreverschillen (totaal scorepunten 39)	Gemiddelde van de hele klas	Gemiddelde van de leerlingen uit 4Mavo	Gemiddelde van de leerlingen uit 3Havo
Klas 1, eerste diagnostische toets	$12{,}3$	$6{,}9$	$18{,}3$
Klas 1, tweede diagnostische toets	$18{,}8$	$11{,}5$	$27{,}3$
Klas 2, tweede diagnostische toets	$16{,}3$	$10{,}6$	$18{,}9$
Scoreverschil klas 1 tussen eerste en tweede toets	$+6{,}5$	$+4{,}6$	$+9{,}0$

Figuur |12|: Overzicht van de gemiddelde scores die behaald zijn voor de diagnostische toetsen per klas en per groep, en van het gemiddelde scoreverschil van klas 1 tussen de eerste en tweede diagnostische toets voor de klas en per groep.

Aan deze gemiddelden is duidelijk te zien dat leerlingen die uit 4Mavo zijn gekomen gemiddeld structureel gezien minder scorepunten behalen, voor deze diagnostische toetsen over algebraïsche vaardigheden, dan leerlingen die uit 3Havo zijn gekomen. Verder valt ook te zien dat het scoreverschil gemiddeld gezien positief is. Tot slot valt er tevens te zien dat het scoreverschil tussen de twee diagnostische toetsen voor leerlingen die uit 4Mavo zijn gekomen minder hoog ligt dan het scoreverschil voor leerlingen die uit 3Havo zijn gekomen, ook al is het verschil hierbij tussen deze groepen niet heel groot.

5.5 De effectgrootte

Aangezien we willen bepalen hoe groot het verschil was tussen scores bij de eerste en tweede diagnostische toets voor klas 1, maken we gebruik van formule (2) uit de methode. Deze formule geeft ons een waarde voor de effectgrootte (‘standardized mean difference’) en aan de hand hiervan kunnen we bepalen hoe groot de verandering daadwerkelijk is. De gemiddelde waarden zelf zijn hiervoor al bepaald, echter moeten ook de standaarddeviaties nog bepaald worden.

Deze standaarddeviatie wordt voor de eerste diagnostische toets bepaald voor de gehele klas 1, voor de leerlingen die van de Mavo komen en de leerlingen die van de Havo komen. Door dit te doen komen we op de volgende standaarddeviaties: voor de gehele klas 1 vinden we een waarde van $\sigma_1 = 8{,}889$, voor de leerlingen die uit 4Mavo komen een waarde van $\sigma_1 = 2{,}807$, en voor de leerlingen die uit 3Havo komen een waarde van $\sigma_1 = 8{,}892$.

Met deze waarden kan formule (2) worden ingevuld om de effectgrootten van de verschillen tussen de eerste en tweede diagnostische toets bij klas 1 te vinden. Voor de gehele klas 1 vinden we hierbij een waarde van $E = 0{,}729$. Voor de leerlingen die uit 4Mavo komen vinden we een waarde $E =$

1,639. Voor de leerlingen die uit 3Havo komen vinden we een waarde $E = 1{,}012$. De waarden die gebruikt zijn voor de berekeningen om op deze eindantwoorden uit te komen zijn te vinden in bijlage 5 (echter enkel de getallen, en niet een precieze beschrijving van de bewerkingen die gedaan zijn om hierop uit te komen, omdat deze logischerwijs volgen uit formule (2) en de bepaling van een standaarddeviatie). Een overzicht van de standaarddeviaties en effectgrootten is in figuur |13| zichtbaar.

	Heel klas 1	Leerlingen uit 4Mavo	Leerlingen uit 4Havo
Standaarddeviatie σ_1	8,889	2,807	8,892
Effectgrootte E	0,729	1,639	1,012

Figuur |13|: Standaarddeviatie van de scores voor de eerste diagnostische toets en de effectgrootte voor de groepen: de gehele klas 1, de leerlingen die uit 4Mavo zijn gekomen en de leerlingen die uit 4Havo zijn gekomen.

Met behulp van deze effectgrootten kunnen we zeggen dat het scoreverschil tussen de eerste en tweede diagnostische toets voor de gehele klas 1 een medium verandering voorstelt, voor de leerlingen die uit 4Mavo komen een grote verandering voorstelt en voor de leerlingen die uit 3Havo komen ook een grote verandering voorstelt. De reden dat de effectgrootte van het verschil van de gehele klas 1 minder groot is dan de effectgrootten van de leerlingen die uit 4Mavo en 3Havo komen apart, is dat het verschil in gemiddelde voor de gehele klas medium is (ten opzichte van het gemiddeld kleinere verschil voor leerlingen die uit 4Mavo komen en het gemiddeld grotere verschil voor leerlingen die uit 3Havo komen) en de standaarddeviatie van de scores op de eerste diagnostische toets voor de gehele klas 1 hoog ligt (veel hoger dan de standaarddeviatie van de scores van leerlingen die van de Mavo komen, wiens scores dichter bij elkaar zaten, en ongeveer even hoog als de standaarddeviatie van de scores van de leerlingen die van de Havo komen), wat resulteert in een lagere effectgrootte dan voor het verschil tussen de eerste en tweede diagnostische toetsen van de aparte groepen.

5.6 De t-toets

Om de significantie van het scoreverschil te onderzoeken kunnen we zoals gezegd in de methode van dit onderzoeksverslag kijken naar de t-toets van het gemiddelde scoreverschil. Zoals ook gesteld in de methode hadden we de waarden $\bar{X}$, S en n (zoals daar gedefinieerd) nodig om te bepalen of de nulhypothese, dat het gemiddelde scoreverschil gelijk is aan nul, verworpen kan worden. Aangezien we deze waarden nu kunnen berekenen met behulp van de onderzoeksresultaten gaan we aan de hand van de formules (3) en (4) bepalen of de nulhypothese wel of niet verworpen kan worden.

Voor de gehele klas 1 kijkend naar het scoreverschil tussen de eerste en tweede diagnostische toets vinden we voor $\bar{X}$ een waarde: $\bar{X} = 6{,}476$, voor S vinden we hierbij een waarde: $S = 6{,}236$ en voor n geldt hierbij dat $n = 21$. Door deze waarden in te vullen in formule (3) vinden we dat $t = 4{,}759$. Wanneer we nu gebruikmaken van het aantal vrijheidsgraden: $n - 1 = 20$. Vinden we dat de kans p dat we op deze waarde voor t uitkomen binnen de nulhypothese ongeveer gelijk is aan $p = 0{,}00006 \approx 0{,}01\%$ (berekend met behulp van een "T distribution calculator"[28], omdat de gevonden t-waarde niet in de eerder geciteerde tabel[27] stond, waarbij het aantal vrijheidsgraden en de bepaalde t-waarde worden ingevuld om de kans p te berekenen). Aangezien deze kans kleiner is dan $\alpha = 5\%$ kunnen we hiermee concluderen dat de nulhypothese voor de gehele klas 1 als groep verworpen kan worden en dat het gemiddelde scoreverschil over de gehele klas 1 gezien significant positief is. De waarden die gebruikt zijn om deze berekeningen, en de berekeningen in de vijf alinea's die hierop volgen, te doen zijn te vinden in bijlage 5.

Voor de leerlingen die uit 4Mavo komen uit klas 1 kijkend naar het scoreverschil tussen de eerste en tweede diagnostische toets vinden we voor $\bar{X}$ een waarde: $\bar{X} = 4{,}600$, voor S vinden we hierbij een waarde: $S = 5{,}254$ en voor n geldt hierbij dat $n = 10$. Hierbij vinden we dat $t = 2{,}769$. Wanneer we nu gebruikmaken van het aantal vrijheidsgraden 9, vinden we dat $p = 0{,}01089 \approx 1{,}09\%$. Aangezien ook deze kans kleiner is dan 5% kunnen we hiermee concluderen dat ook de nulhypothese voor de leerlingen die uit 4Mavo komen als groep verworpen kan worden en dat het gemiddelde scoreverschil tussen de twee diagnostische toetsen voor deze groep ook significant positief is.

Voor de leerlingen die uit 3Havo komen uit klas 1 kijkend naar het scoreverschil tussen de eerste en tweede diagnostische toets vinden we voor $\bar{X}$ een waarde: $\bar{X} = 9$, voor S vinden we hierbij een waarde: $S = 6{,}547$ en voor n geldt hierbij dat $n = 8$. Hierbij vinden we dat $t = 3{,}888$. Wanneer we nu gebruikmaken van het aantal vrijheidsgraden: 7, vinden we dat $p = 0{,}003 = 0{,}30\%$. Aangezien ook deze kans kleiner is dan 5% kunnen we hiermee concluderen dat ook de nulhypothese voor de leerlingen die uit 3Havo komen als groep verworpen kan worden en dat het gemiddelde scoreverschil tussen de twee diagnostische toetsen voor deze groep ook significant positief is.

Om ook te bepalen of het verschil in de gemiddelde scores tussen de leerlingen die uit 4Mavo en 3Havo komen (uit klas 1) voor de eerste diagnostische toets significant is, kunnen we de ongepaarde t-toets uitvoeren. Wanneer formule (6) wordt gebruikt vinden we dat, zoals in deze formule gedefinieerd, $S = 6{,}247$. Vervolgens kunnen we met behulp van formule (5) de toetsingsgrootheid berekenen, die uitkomt op $t = -3{,}830$. Tot slot kunnen we de kans p berekenen (met $n + m - 2 = 16$ vrijheidsgraden) die uitkomt op $p = 0{,}00074 \approx 0{,}07\%$. Aangezien de kans hier kleiner is dan 5% kunnen we hierdoor concluderen dat de nulhypothese verworpen kan worden en aangezien het scoregemiddelde van de leerlingen die uit 3Havo komen hoger ligt dan dat van de leerlingen die uit 4Mavo vinden we dat $\mu_X < \mu_Y$, wat in dit geval een significant kloppend resultaat is.

Om vervolgens te bepalen of het verschil in gemiddelde scores tussen klas 1 en klas 2 voor de tweede diagnostische toets significant is kunnen we opnieuw de ongepaarde t-toets uitvoeren. Hierbij vinden we dat $S = 9{,}093$ en $t = -0{,}850$. Hiermee vinden we dat voor de kans: $p = 0{,}20032 \approx 20{,}03\%$. Aangezien de kans hier groter is dan 5% kunnen we niet concluderen dat de nulhypothese zomaar verworpen kan worden, wat ervoor zorgt dat significant gezien niet kunnen concluderen dat $\mu_X < \mu_Y$, oftewel de daadwerkelijke verwachtingswaarde van de scores uit klas 2 hoeft significant gezien niet persé lager te liggen dan dat van klas 1.

Om tot slot te bepalen of het verschil in gemiddelde scores tussen klas 1 voor de eerste diagnostische toets en klas 2 voor de tweede diagnostische toets significant gebruiken we opnieuw de ongepaarde t-toets. Hierbij vinden we dat $S = 8{,}017$ en dat $t = -1{,}588$. Nu vinden we met $n + m - 2 = 38$, dat $p = 0{,}06029 \approx 6{,}03\%$. Aangezien de kans hier groter is dan 5% kunnen we niet concluderen dat de nulhypothese zomaar verworpen kan worden, wat ervoor zorgt dat we niet kunnen concluderen dat $\mu_X < \mu_Y$, oftewel de daadwerkelijke verwachtingswaarde van de scores uit klas 1 voor de eerste diagnostische toets hoeft significant gezien niet persé lager te liggen dan de verwachtingswaarde van de scores uit klas 2 voor de tweede diagnostische toets.

Aan de hand van de hierboven genoemde resultaten kunnen conclusies getrokken worden met betrekking tot de deelvragen en hoofdvragen van dit onderzoek. Echter dient er als eerst een discussie plaats te vinden over de gevonden resultaten en of deze wel representatief waren. Dit is wat in het volgende onderdeel van dit onderzoeksverslag besproken zal worden.

6 Discussie

Tijdens het onderzoek zijn er een aantal aannames gedaan die ervoor zorgden dat het onderzoek in de huidige vorm kon plaatsvinden, is er iets wat beter had gekund met betrekking tot de methode bij dit onderzoek en ook heeft zich een situatie voorgedaan die in eerste instantie niet deel uitmaakte van het eigenlijke onderzoeksplan. Deze gevallen zullen in dit gedeelte van het verslag worden besproken. Tevens zal ook worden besproken wat voor invloed deze dingen hadden op de resultaten van het onderzoek.

Een eerste aanname die voor dit onderzoek is gedaan, specifiek omtrent de statistische maten (effectgrootte en t-toets), is dat er vanuit is gegaan dat de scorefrequenties (en scoreverschilfrequenties) Gaussisch(/normaal) verdeeld zijn. Echter hoeft deze aanname niet automatisch correct te zijn, omdat we bij de scoreverdeling te maken hebben met een onbekende verdeling, die niet persé Gaussisch verdeeld hoeft. Sterker nog, omdat we te maken hebben met een maximale en minimale score (en daarmee ook een maximaal positief of negatief verschil) is de verdeling die we hebben automatisch niet Gaussisch verdeeld. De reden dat we deze aanname over de verdeling toch wel hebben gedaan is dat het benutten van de twee gebruikte statistische maten ervoor zorgt dat we beter conclusies kunnen trekken over de onderzochte data, waarbij we anders, kijkend naar de statistische maten gebruikt in dit onderzoek, alleen gemiddelde waarden hadden kunnen gebruiken. Deze gemiddelde waarden geven geen duidelijkheid over statistische significantie en vandaar dat wij de aanname hebben gedaan dat we te maken hebben met een normale verdeling, zodat we wel uitspraken zouden kunnen doen over statistische significantie. Aangezien we bij de t-toets, die de uiteindelijke statistische significantie van hypothesen kan weergeven, dermate kleine kansen hebben gevonden kan worden gesteld dat ook al is de verdeling niet geheel Gaussisch, de getrokken conclusies alsnog naar alle waarschijnlijkheid correct zullen zijn.

Een andere aanname voor dit onderzoek is geweest dat de klas die leerlingen als voorgaande klas hebben aangegeven (de klas waar zij het schooljaar ervoor hebben gezeten) als leidend is gezien. Echter is door aan leerlingen te vragen in welke klas zij het jaar ervoor hebben gezeten niet het hele leertraject zichtbaar. Zo zou een leerling die de gehele onderbouw op Havo/Vwo heeft gezeten (1Havo/Vwo → 2Havo/Vwo → 3Havo/Vwo) ná de onderbouw naar 4Mavo kunnen zijn gegaan (bijvoorbeeld doordat deze leerlingen te lage cijfers had gehaald om over te gaan naar 4Havo), en vervolgens, nadat de leerlingen zijn/haar 4Mavo examens had gehaald, toch via deze weg naar 4Havo zijn gegaan. Via dit traject heeft de leerling eigenlijk de gehele Havo onderbouw aan algebraïsche vaardigheden meegekregen, maar uiteindelijk wordt deze leerling toch bestempeld als een 4Mavo leerlingen, omdat hij/zij het vorig jaar in deze klas zat. Dit is een afweging die voor dit onderzoek is gedaan, omdat het voor leerlingen veel werk zou zijn geweest om hun gehele schooltraject op het uitwerkingsblaadje te zetten. Tevens zou dit de leerlingen in te veel groepen onderverdelen, waardoor concrete resultaten en conclusies per groep lastiger zouden worden (omdat groepen leerlingen met hetzelfde leertraject nu veel kleiner zouden worden). Deze afweging zou voor individuele leerlingen wellicht invloed hebben, maar voor de gemiddelde waarden zal het niet al grote verschillen teweeg brengen, omdat het overgrote deel 4Havo leerlingen die uit 4Mavo komen wel het gehele Mavo onderbouwtraject hebben gevolgd (deze informatie is in het digitale schoolprogramma te vinden, maar is voor dit onderzoek niet gebruikt of gedocumenteerd).

Nog een aanname van dit onderzoek is dat alle leerlingen hun best hebben gedaan tijdens het maken van de diagnostische toetsen. Om ervoor te zorgen dat dit beter gebeurde is er duidelijk tegen de leerlingen gezegd dat het onderzoek geen consequenties zal geven voor hen (bijvoorbeeld in de vorm van een cijfer), dat de resultaten per leerling niet zouden worden doorgegeven aan de docent van de klas en dat het doel van dit onderzoek was om de leerlingen in de toekomst te helpen bij het halen van hun eindexamens (dit klopt, want betere algebraïsche vaardigheden betekent beter kunnen voldoen aan de syllabus van de tweede fase[3] van de Havo). Dit lijken wellicht juist tegenargumenten waarom leerlingen minder hun best zouden doen, maar dit is niet wat er speelt. De reden dat leerlingen beter hun best deden door aan te geven dat er geen consequenties waren was dat zij realiseerden dat het doel van het onderzoek was om hen te helpen, terwijl wanneer er wel een consequentie gekoppeld was geweest aan hun score voor de diagnostische toets zij hun hakken expres in het zand hadden gestoken en hun best niet hadden gedaan met het idee, "wij doen hier niet aan mee omdat wij het niet vinden kunnen dat we hiervoor een beoordeling krijgen voor een vrijwillig onderzoek". Met dit in acht genomen, en de uitwerkingen die van leerlingen zijn ontvangen was bij het nakijken wel te zien dat de overgrote meerderheid van de leerlingen hun best heeft gedaan bij de diagnostische toetsen van dit onderzoek, waardoor de resultaten met het oog hierop representatief zullen zijn.

Een onderdeel van de methode die eigenlijk niet optimaal was, was dat er bij klas 2 alleen de tweede diagnostische toets is afgenomen. Wanneer ook in deze klas de eerste diagnostische toets was afgenomen hadden de beide klassen over het gehele proces met elkaar vergeleken kunnen worden, waarbij met klas 1 de oefenmodule wel behandeld was geweest en met klas 2 niet. Dit had ons in staat gesteld om een echte vergelijking met de nulmeting (klas 2) te kunnen doen, die ons een sterkere conclusie had kunnen geven over de effectiviteit van de oefenmodule, waardoor bijvoorbeeld uitgesloten had kunnen worden dat opgaveherkenning ("deze opgave heb ik eerder gezien en in de tussentijd heb ik me bedacht hoe ik deze wel zou kunnen oplossen") een rol speelde bij de verbetering van scores tussen de eerste en tweede diagnostische toets in plaats van de oefenmodule. Echter was dit niet mogelijk voor dit onderzoek omdat de docent van klas 2 hier geen ruimte voor had in de planning. Dit had dus voornamelijk de onderzoeksresultaten verandert in de zin dat er dan betere conclusies getrokken hadden kunnen worden omdat er dan een directe vergelijking tussen de onderzoeksgroep en de nulmeting had kunnen plaatsvinden.

Tot slot heeft zich tijdens dit onderzoek nog iets voorgedaan wat in eerste instantie niet deel uitmaakte van het onderzoeksplan. Vanwege het feit dat leerlingen bij de controle van de uitwerkingen van de oefenmodule opdrachten (bijna) allemaal nog niet alle opdrachten af hadden, is er een tweetal extra lessen gewijd aan het bezig gaan met deze opdrachten. Aangezien de laatste les van deze twee op dezelfde dag plaatsvond als de tweede diagnostische toets (voor klas 1), heeft er geen uiteindelijke controle van de opdrachten meer plaats kunnen vinden. Dit heeft als gevolg dat het niet duidelijk is geworden of alle leerlingen de gehele oefenmodule hebben behandeld. Hoewel een groot gedeelte van de leerlingen dit, volgens de docent van de klas, wel heeft gedaan weten we dus niet zeker of het effect van bezig gaan met de oefenmodule bij alle scores van de tweede diagnostische toets te zien is. De docent van klas 1 heeft hierover gezegd dat er ook een kleine groep leerlingen (specifiek een aantal dat van de Mavo is gekomen) was die eigenlijk amper met de opdrachten van de oefenmodule bezig is geweest tijdens de lessen. Het zou kunnen dat deze groep leerlingen precies samenvalt met de groep leerlingen die minder (of helemaal niet) vooruit zijn gegaan qua score op de tweede diagnostische toets ten opzichte van de eerste diagnostische toets. Echter valt dit niet met zekerheid te zeggen. Het niet hebben kunnen plaatsvinden van een controlemoment kan zeker invloed hebben gehad op de resultaten van dit onderzoek, waarbij het zo zou kunnen zijn dat wanneer controle wel had plaatsgevonden leerlingen nog meer bezig waren geweest met de oefenmodule. Dit had de resultaten met betrekking op het effect van de oefenmodule accurater kunnen maken. Toch is, volgens de docent van klas 1, de overgrote meerderheid wel bezig geweest met de oefenmodule en zullen de resultaten van het onderzoek hierdoor voor het grootste deel wel representatief zijn.

7 Conclusie

Uit de onderzoeksresultaten, die zijn weergegeven in het onderdeel resultaten van dit onderzoeksverslag, zijn een aantal belangrijke uitkomsten gekomen. De belangrijkste resultaten hiervan zijn de volgende drie:

- Leerlingen die uit 4Mavo komen scoren gemiddeld gezien lager dan leerlingen die uit 3Havo komen op de eerste diagnostische toets bij klas 1. Uit de gemiddelde scores lijkt hetzelfde te gelden voor klas 1 én klas 2 op de tweede diagnostische toets, echter is voor deze gevallen niet gekeken of dit een significant correcte waarneming is.

- Klas 1 lijkt een hogere gemiddelde score behaald te hebben dan klas 2 voor de tweede diagnostische toets. Echter valt, nadat er een t-toets is losgelaten op deze onderzoeksresultaten, significant gezien niet de conclusie te trekken dat de verwachtingswaarde van de toets score voor klas 2 lager zal liggen dan de verwachtingswaarde van de toets score voor klas 1.

- Klas 1 heeft voor de tweede diagnostische toets gemiddeld gezien een hogere score behaald dan voor de eerste diagnostische toets. Dit geldt voor zowel de gehele klas, de groep leerlingen die vanuit 4Mavo zijn gekomen en de groep leerlingen die vanuit 3Havo zijn gekomen. Kijkend naar het gemiddelde scoreverschil per groep lijkt het zo te zijn dat leerlingen die uit 3Havo komen een groter positief verschil hebben behaald tussen de eerste en tweede diagnostische toets dan leerlingen die uit 4Mavo komen.

Aan de hand van deze resultaten kunnen een aantal conclusies getrokken worden die ons in staat stellen om antwoord te geven op de deelvragen en hoofdvraag van dit onderzoek.

Allereerst kan uit het resultaat dat leerlingen die uit 4Mavo komen op de eerste diagnostische toets lager scoren dan leerlingen die uit 3Havo komen (en dat deze trend doorgezet lijkt te worden voor de tweede diagnostische toets bij zowel klas 1 als 2), geconcludeerd worden dat leerlingen die van de Mavo komen gemiddeld gezien minder goed zijn in algebraïsche vaardigheden dan leerlingen die van de Havo komen. Aangezien deze diagnostische toetsen betrekking hadden op (combinaties van) algebraïsche vaardigheden is door deze resultaten te zien dat leerlingen die van de Mavo komen meer dienen te oefenen met algebraïsche vaardigheden dan leerlingen die van de Havo komen, om naar een niveau te komen dat als voldoende wordt gezien in de syllabus van de tweede fase van de Havo[3]. Met deze conclusie is er ook antwoord gegeven op de eerste deelvraag van dit onderzoek.

Ten tweede kan uit het resultaat dat klas 1 een hogere gemiddelde score voor de tweede diagnostische toets heeft behaald dan klas 2 geen definitieve conclusie worden getrokken. De reden hiervoor is dat de t-toets geen significantie kan aantonen ten aanzien van de conclusie voor een verwachtingswaarde. Het niet bestaan van een significant verschil tussen de gemiddelde scores van deze twee klassen zou drie mogelijke redenen kunnen hebben. De eerste hiervan is dat de oefenmodule te weinig effect zou hebben op de algebraïsche vaardigheden van leerlingen. In verband met het derde resultaat van dit onderzoek (dat hierna zal worden besproken) blijkt dit niet het geval te zijn, waardoor deze reden niet een correcte reden is. Een andere reden zou kunnen zijn dat de steekproef te klein was om een conclusie te trekken. Aangezien de steekproef met veertig leerlingen in totaal niet persé heel klein is (zeker niet in vergelijking met andere steekproefgrootten die besproken zijn in dit verslag), is dit ook geen goede reden. Een laatste reden zou kunnen zijn dat klas 2 simpelweg van nature sterker is in algebraïsche vaardigheden (deze klas heeft dan ook een hogere gemiddelde score behaald op de tweede diagnostische toets, dan klas 1 op de eerste diagnostische toets, waarbij deze twee toetsen vrijwel identiek zijn qua moeilijkheidsgraad). Dit zou bijvoorbeeld te maken kunnen hebben met dat een groter aandeel van klas 2 van de Havo komt, ten opzichte van klas 1 (waar juist een groter aandeel van de Mavo komt). Dit zou een logische reden zijn in verband met de eerste conclusie van dit onderzoek, die hierboven is getrokken, die luidt dat leerlingen die van de Havo komen beter zijn in algebraïsche vaardigheden dan leerlingen die van de Mavo komen. De t-toets die gedaan moet worden om dit aan te tonen (in de aanname dat beide toetsen geheel identiek zijn qua moeilijkheidsgraad en dat beide omstandigheden waarin de toetsen zijn afgenomen ook geheel identiek waren) is voor dit onderzoek ook gedaan en helaas was het hierbij zo dat de conclusie dat klas 1 gemiddeld lager heeft gescoord op de eerste diagnostische toets dan klas 2 op de tweede diagnostische niet aantoonbaar is (ook al scheelde het niet veel, omdat hiervoor $p = 6{,}03\%$ en dit is net iets groter dan de grens van 5%).

Als derde kan uit het resultaat dat klas 1 voor de tweede diagnostische gemiddeld gezien een hogere score heeft behaald dan voor de eerste diagnostische toets de conclusie worden getrokken dat er een verbetering heeft plaatsgevonden in de algebraïsche vaardigheden van de leerlingen tussen de eerste en tweede diagnostische toets. Aangezien de uitwerkingen en correcte oplossingen van de eerste diagnostische toets niet zijn besproken, komt deze verbetering voornamelijk doordat de leerlingen bezig zijn geweest met het oefenen van algebraïsche vaardigheden via de oefenmodule, in de vorm van het uitgedeelde stencil. Helaas kan, zoals in de discussie besproken is, opgaveherkenning niet worden uitgesloten bij het bijdragen aan de verbeterde scores voor de tweede diagnostische toets. Bij deze eventuele opgaveherkenning zal er echter wel een denkproces moeten plaatsvinden tussen de eerste en tweede diagnostische toets om ervoor te zorgen dat een opgave, die bepaalde vaardigheden vereist, als eerst niet correct uit te kunnen werken en op de tweede toets wel, waarbij dit denkproces voornamelijk alleen plaats zal vinden tijdens het bezig zijn met de oefenmodule.

Hoewel het in principe zo is dat gericht oefenen met een wiskundig onderdeel sowieso bijdraagt aan beter worden in dit onderdeel[29], is uit dit onderzoek gebleken dat algebraïsche vaardigheden bij leerlingen door het behandelen van deze oefenmodule in één week tijd significant verbeterd kunnen worden, onafhankelijk van het niveau waar zij vandaan komen. Wel lijkt het erop dat op de manier waarop de oefenmodule voor dit onderzoek is behandeld (1 instructie les en 2 lessen om te oefenen met de opdrachten), de leerlingen die van de Havo komen meer vooruitgang boeken, kijkend naar het gemiddelde scoreverschil van deze groep tussen de eerste en tweede diagnostische toets, dan de leerlingen die van de Mavo komen. Hierbij zijn in ieder geval twee mogelijke verklaringen te geven. De eerste hiervan is dat specifiek een deel van leerlingen, die van de Mavo komen, niet effectief bezig is geweest met de oefenmodule, zoals ook gesteld is door de docent van klas 1. Een deel van de leerlingen dat niet bezig is met de oefenmodule kan invloed hebben gehad op de resultaten van dit onderzoek. Dit is al helemaal voor de hand liggend als de leerlingen die niet bezig zijn geweest met de oefenmodule bij één specifieke classificatie groep van dit onderzoek hoort (oftewel de leerlingen die van de Mavo zijn gekomen). Een andere mogelijke verklaring voor het verschil in vooruitgang in gemiddelde score voor de tweede diagnostische toets ten opzichte van de eerste is dat leerlingen die van de Mavo komen minder bekend zijn met de oefenmodule stof dan leerlingen die van de Havo komen. De reden hiervoor is, zoals in het theoretisch kader besproken, dat er bij de Mavo minder aandacht wordt besteed aan algebraïsche vaardigheden dan in de onderbouw van de Havo. Sommige onderdelen die op de Havo wel worden besproken komen zelfs überhaupt niet aan bod op de Mavo. Dit kan als gevolg hebben dat de oefenmodule voor leerlingen die van de Havo komen voornamelijk dient als opfrisser, terwijl leerlingen die van de Mavo komen echt nieuwe stof aan het leren zijn. Het opfrissen van stof gaat gemakkelijker dan nieuwe stof aanleren en vandaar dat in de relatief korte tijd die wij voor dit onderzoek hebben besteed aan de oefenmodule, de leerlingen die van de Havo komen hier wellicht meer profijt van hebben gehad. Hoewel de conclusie dat leerlingen afkomstig uit

3Havo meer profijt hebben van de oefenmodule, ten opzichte van leerlingen afkomstig uit 4Mavo, niet op significantie is gecontroleerd, ligt het voor de hand dat dit wel het geval is aangezien er een duidelijk verschil tussen de groepen leerlingen te zien is kijkend naar de gemiddelde scoreverschillen tussen de eerste en tweede diagnostische toets. Dit is daarmee ook het antwoord op de tweede deelvraag van dit onderzoek.

Tot slot vormt de conclusie die in de alinea hierboven is getrokken over de verbetering van algebraïsche vaardigheden tussen de eerste en tweede diagnostische toets, met als oorzaak dat de leerlingen bezig zijn geweest met de oefenmodule, antwoord op de hoofdvraag van dit onderzoek. Kennelijk is dus het effect van het behandelen van een oefenmodule, zoals in dit onderzoekverslag beschreven is, dat de algebraïsche vaardigheden van 4Havo wiskunde A leerlingen verbeterd worden.

Hiermee zijn we toegekomen aan de suggesties voor vervolgonderzoek en suggesties aan de school, waar dit onderzoek heeft plaatsgevonden, over wat zij met deze onderzoeksresultaten kunnen doen. Deze aspecten zullen in de alinea's hieronder beschreven worden.

Allereerst zou het wat betreft vervolgonderzoek wellicht interessant kunnen zijn om een onderzoek van dezelfde vorm op een andere school plaats te laten vinden. De reden dat dit interessant zou kunnen zijn is dat andere scholen een andere aanpak hanteren bij de overgang van 4Mavo naar 4Havo en dat andere scholen tevens ook meer of minder algebraïsche vaardigheden in de onderbouw van de Mavo zouden kunnen behandelen. Het laatste hiervan heeft te maken met dat een deel van de algebraïsche vaardigheden die op de huidige onderzoeksschool in de Mavo behandeld wordt, enkel is behandeld omdat de eerste twee klassen combinatieklassen Mavo/Havo zijn, die ook een aantal Havo hoofdstukken moeten behandelen. Zoals besproken in het theoretisch kader zijn er andere scholen die speciale overgangslessen organiseren voor leerlingen die van 4Mavo naar 4Havo gaan, waarbij ook gelet wordt op algebraïsche vaardigheden. Met deze twee variabelen in het hoofd is het logisch dat eenzelfde onderzoek op een andere school wellicht andere resultaten zou geven, wat het een interessante suggestie voor vervolgonderzoek maakt.

Een andere suggestie voor vervolgverzoek is om dezelfde vragen te stellen als die bij dit onderzoek gesteld zijn, maar ze in dit geval niet betrekken op algebraïsche vaardigheden, maar op een ander wiskundig onderwerp zoals bijvoorbeeld meetkunde of procent rekenen. Dit zou eventueel een interessant vervolgonderzoek kunnen zijn omdat je je zou kunnen afvragen of dezelfde conclusies gelden voor deze onderwerpen, of dat hierbij bijvoorbeeld opeens wellicht geldt dat leerlingen die van de Mavo komen beter zijn in meetkunde dan leerlingen die van de Havo komen. Door het combineren van dit potentiële onderzoek met het huidige onderzoek kan wellicht de oefenmodule uitgebreid worden om diverse onderwerpen waar leerlingen aan het begin van de tweede fase van de Havo moeite mee hebben allemaal te omvatten. Als de oefenmodule vervolgens op deze manier geheel dekkend zou zijn als bijspijker cursus voor Havo bovenbouw leerlingen omtrent de stof uit de onderbouw van de Havo dan zou dit zeer handig zijn.

Dan zal nu mijn suggestie aan de school waar dit onderzoek heeft plaatsgevonden besproken worden. Uit dit onderzoek is gebleken dat leerlingen die van de Mavo komen minder goed zijn in algebraïsche vaardigheden dan leerlingen die van de Havo komen. Het is zelfs zo dat deze leerlingen ver onvoldoende scoren op een diagnostische toets die enkel vaardigheden vereist die vanuit de onderbouw verondersteld worden. Vanwege deze veronderstelling van algebraïsche vaardigheden, maar tegelijk ook het onderpresteren van leerlingen hierbij, lijkt het mij handig dat de school extra lessen in gaat voeren voor leerlingen die van de Mavo komen die betrekking hebben op in ieder geval algebraïsche vaardigheden. Door deze extra lessen te faciliteren aan het begin van het schooljaar (zodra de leerlingen die van de Mavo komen instromen in 4Havo) kunnen algebraïsche vaardigheden op peil worden gebracht en zal dit vervolgens in de rest van de tweede fase voor deze leerlingen een minder groot probleem geven. Het is echter wel belangrijk dat bij deze extra lessen duidelijke doelen worden gezet, en daarmee een aantal vaste onderwerpen besproken zullen worden. Hierbij kan bijvoorbeeld gekeken worden naar de oefenmodule die gemaakt is voor dit onderzoek, omdat leerlingen op deze onderdelen duidelijk (uit dit onderzoek gebleken) hierbij onder presteerden. Het zou kunnen dat deze extra lessen wiskunde ook breder getrokken kunnen worden om zo ook leerlingen die van de Havo komen maar alsnog moeite hebben met algebraïsche vaardigheden erin te betrekken. Echter zou in zo'n geval waarschijnlijk gewerkt moeten worden met een instaptoets, en vervolgens moeten leerlingen op basis hiervan bij extra lessen wiskunde ingeroosterd worden, iets wat praktisch iets moeilijker te realiseren valt. Het herhalen van onderbouw algebraïsche vaardigheden wat in de loop van de tweede fase zal gebeuren (bij het bespreken van andere hoofdstukken) zou er bij leerlingen die uit 3Havo komen voor kunnen zorgen dat deze vaardigheden weer op peil worden gebracht, net zoals het behandelen van de oefenmodule nu ook heeft laten zien. Echter zien we dat algebraïsche vaardigheden bij leerlingen uit 4Mavo komen achterblijven, zelfs na het kort bespreken(/herhalen) hiervan, omdat dit voor hen voor een groot deel nieuwe of meer gevorderde stof is dan waar zij eerder mee te maken hebben gehad, waardoor het de vaardigheden van deze leerlingen niet direct op peil brengt. Dit benadrukt het belang van extra lessen voornamelijk bij leerlingen die van de Mavo komen, ook al wordt er bij leerlingen die van de Havo komen een duidelijkere verbetering waargenomen na oefenen met deze oefenmodule. Oftewel samenvattend, mijn suggestie voor de school waar dit onderzoek heeft plaatsgevonden is om extra lessen wiskunde voor leerlingen die van 4Mavo naar 4Havo gaan te faciliteren, die voornamelijk betrekking hebben op algebraïsche vaardigheden, zodat de achterstand ten aanzien van dit wiskundige onderwerp verholpen kan worden.

8 Reflectie

Na afloop van de diverse onderdelen van dit onderzoek zijn er door anderen een aantal aspecten benoemd die eventueel in het vervolg beter zouden kunnen. Deze opmerkingen hadden voornamelijk betrekking op de oefenmodule zelf en hoe deze beter in elkaar gezet kan worden.

Een eerste punt van feedback dat aan mij is gegeven, is ontvangen via de docent van klas 1 van dit onderzoek. Deze docent benoemde dat de leerlingen feedback hadden gegeven over de oefenmodule (het stencil), waarbij het specifiek ging over het taalgebruik in het stencil. Zij benoemden dat het taalgebruik te hoog gegrepen was voor hen. Oftewel het was moeilijk om de langere stukken tekst die in het stencil stonden goed te begrijpen. Bij nader inzien klopt dit inderdaad, waarbij dit voor een deel te maken heeft met de doelgroep van het originele stencil. Zo was de doelgroep van het originele stencil namelijk reeds afgestudeerde Havisten. Deze afgestudeerde beschikken naar alle waarschijnlijk over net wat betere vocabulaire en inzicht in de Nederlandse taal, waardoor zij beter in staat zijn om het stencil goed te begrijpen. Indien er in de toekomst nog een nieuwe iteratie van het stencil wordt gemaakt zal het versimpelen van het taalgebruik daarin worden meegenomen.

Een tweede punt van feedback kwam van de eerste begeleider van dit onderzoek. Zo stelde hij dat in het stencil bij de opdrachten nergens het woord “herleid” voorkomt. Het woord “herleid” is een veelvoorkomend werkwoord bij algebraïsche vaardigheden en vandaar dat het onlogisch is dat dit woord vermeden wordt bij de opdrachten. Dit was niet de bedoeling en bij een eventuele volgende iteratie van het stencil zal dit dan ook worden meegenomen, waarbij voor een deel van de opdrachten het woord “herleid” gebruikt zal worden.

In dit onderzoek zijn een aantal concrete conclusies getrokken met betrekking op algebraïsche vaardigheden aan het begin van de tweede fase van de Havo bij wiskunde A, en dit is daarom naar mijn mening een prima resultaat voor dit onderzoek.

Referenties

[1] L. van de Zee, “Oefenen met algebraïsche vaardigheden voor wiskunde A leerlingen havo,” Enschede, 2012. [Online]. Available: https://slo.nl/publish/pages/2825/oefenen-met-algebraische-vaardigheden-voor-wiskunde-a-leerlingen-havo.pdf.

[2] B. Zwaneveld, “Bespreking van ‘The Development of Algebraic Proficiency,’” *Tijdschr. voor Didact. der Beta-wetenschappen*, no. 30, pp. 63–72, 2013, [Online]. Available: http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/2013_5_zwaneveld.pdf.

[3] CvTE, “Wiskunde A Havo Syllabus Centraal Examen 2022,” Utrecht, 2020. [Online]. Available: https://www.examenblad.nl/examenstof/syllabus-2022-wiskunde-a-havo/2022/havo/f=/wiskunde A_havo_2_versie_ 2022.pdf.

[4] SLO, “Voorbeeldmatige uitwerking: havo (onderbouw) - Rekenen en wiskunde.” [Online]. Available: https://leerplaninbeeld.slo.nl/regulier-onderwijs/5ca732b3-3ec2-4b13-9f08-d55b8739fe31/sub-targets?subject=fdd97fff-f5e5-4b82-b937-9ab302666c50.

[5] P. Drijvers, “Wat bedoelen ze toch met... symbol sense?,” *Nieuwe Wiskrant*, pp. 39–42, 2012, [Online]. Available: http://www.fisme.science.uu.nl/wiskrant/artikelen/313/313maart_drijvers.pdf.

[6] A. Arcavi, “Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics,” *Learn. Math.*, vol. 14, no. 3, 1994, [Online]. Available: https://flm-journal.org/Articles/BFBFB3A8A2A03CF606513A05A22B.pdf.

[7] R. R. Skemp, “Relational Understanding and Instrumental Understanding,” *Math. Teach. Middle Sch.*, vol. 12, no. 2, pp. 88–95, 2006, [Online]. Available: https://www-jstor-org.ezproxy2.utwente.nl/stable/41182357?seq=1#metadata_info_tab_contents.

[8] A. Friedlander and A. Arcavi, “How to Practice It? An integrated approach to algebraic skills,” *Math. Teach.*, vol. 105, no. 8, pp. 608–614, 2012, [Online]. Available: http://isdde.org/wp-content/uploads/2018/05/isdde09_friedlander_arcavi.pdf.

[9] J. H. Dijkhuis, *Getal & Ruimte 1Havo/Vwo*, 12th ed. Groningen: Noordhoff Uitgevers, 2016.

[10] J. H. Dijkhuis, *Getal & Ruimte 2Havo(Vwo)*, 12th ed. Groningen: Noordhoff Uitgevers, 2018.

[11] J. H. Dijkhuis, *Getal & Ruimte 3Vwo*, 12th ed. Groningen: Noordhoff Uitgevers, 2019.

[12] C. J. Admiraal, *Getal & Ruimte 1 vmbo-t/havo*, 12th ed. Groningen: Noordhoff Uitgevers, 2017.

[13] C. J. Admiraal, *Getal & Ruimte 2 vmbo-t/havo*, 12th ed. Groningen: Noordhoff Uitgevers, 2019.

[14] C. J. Admiraal, *Getal & Ruimte 3 vmbo-kgt*, 12th ed. Groningen: Noordhoff, 2020.

[15] C. J. Admiraal, *Getal & Ruimte 4 vmbo-kgt*, 12th ed. Groningen: Noordhoff, 2021.

[16] T. De Moel, “De Overstap 4 vmbo naar 4 havo,” Krommenie, 2021. [Online]. Available: https://www.bertrand.nl/komjeook/wp-content/uploads/2021/02/I-H4-2021289-Overstapboekje-vmbo-havo-2021-2022.pdf.

[17] J. R. Star, A. Foegen, M. Larson, W. McCallum, J. Porath, and R. M. Zbiek, “Teaching Strategies for Improving Algebra Knowledge in Middle and High School Students,” 2015. [Online]. Available: https://ies.ed.gov/ncee/wwc/docs/practiceguide/wwc_algebra_040715.pdf.

[18] SLO, “Eisen van een goede toets,” 2019.

https://www.slo.nl/handreikingen/vmbo/handreiking-se-gesch-vmbo/toetsen-schoolexamen/eisen-goede-toets/ (accessed Nov. 11, 2022).

[19] B. Johnson, "How to Design Better Tests for Students," *Edutopia*, 2009. https://www.edutopia.org/better-tests-differentiate (accessed Sep. 05, 2022).

[20] J. Gorin, "Cognitive Diagnostic Assessment for Education: Theory and Applications," Cambridge: Cambridge University Press, 2007, pp. 173–202.

[21] P. Drijvers, A. Van Streun, and B. Zwaneveld, *Handboek wiskundedidactiek*, 7th ed. Amsterdam: Epsilon Uitgaven, 2019.

[22] J. H. Dijkhuis, *Getal & Ruimte 3Havo*, 12th ed. Groningen: Noordhoff Uitgevers, 2019.

[23] Lymantria, "Wikipedia Effectgrootte," 2010. https://nl.wikipedia.org/wiki/Effectgrootte (accessed Nov. 04, 2022).

[24] Trontonian, "Wikipedia Effectsize," 2004. https://en.wikipedia.org/wiki/Effect_size (accessed Nov. 04, 2022).

[25] John the Math Guy, "Standard deviation - why the n and n-1?," 2014. http://johnthemathguy.blogspot.com/2014/07/standard-deviation-why-n-and-n-1.html#:~:text=It all comes down to,and divide by n-1. (accessed Nov. 11, 2022).

[26] J. Lapère, "Wikipedia t-toets," 2003. https://nl.wikipedia.org/wiki/T-toets (accessed Nov. 14, 2022).

[27] Nijdam, "Wikipedia Studentverdeling," 2004. https://nl.wikipedia.org/wiki/Studentverdeling (accessed Nov. 14, 2022).

[28] H. B. Berman, "T Distribution Calculator." https://stattrek.com/online-calculator/t-distribution (accessed Nov. 15, 2022).

[29] B. Rittle-Johnson, "Developing Mathematics Knowledge," *Child Dev. Perspect.*, vol. 11, no. 3, pp. 184–190, 2017, [Online]. Available: https://srcd-onlinelibrary-wiley-com.ezproxy2.utwente.nl/doi/10.1111/cdep.12229.

Bijlage 1: "Informed passive consent"-brief

Beste ouder(s)/verzorger(s),

In voorgaande schooljaren heeft uw zoon/dochter bij wiskunde vaak les gehad over algebraïsche vaardigheden. Algebraïsche vaardigheden zijn een belangrijk wiskundig onderwerp voor de tweede fase van het voortgezet onderwijs, omdat ze in zeer veel Havo wiskunde A hoofdstukken aan bod zullen komen.

Dit jaar wil onze collega Ruben Liebe (eerstegraads docent wiskunde in opleiding), in het kader van zijn afstudeeronderzoek, twee diagnostische toetsen tijdens de les afnemen om zo te kijken hoe goed deze algebraïsche vaardigheden vanuit eerdere leerjaren onthouden zijn door de 4Havo leerlingen. Tussen deze diagnostische toetsen zal er een moment zijn waarop leerlingen kunnen oefenen met algebraïsche vaardigheden zodat we kunnen zien of dit oefenen effect heeft op de resultaten van de tweede diagnostische toets. Deze resultaten zullen vervolgens verwerkt worden om zo een advies te kunnen geven over of het zinvol is om algebraïsche vaardigheden op te frissen aan het begin van de bovenbouw van de Havo. Verder zullen we ook vragen aan de leerlingen om in te vullen in welke klas/niveau ze het schooljaar ervoor hebben gezeten zodat eventuele verschillen in de behandeling van algebraïsche vaardigheden op school tussen de voorgaande leerjaren in kaart gebracht kunnen worden. Vanzelfsprekend hebben de resultaten die de leerlingen halen voor deze diagnostische toetsen geen invloed op hun beoordeling of cijfers voor het vak en worden alle resultaten van de diagnostische toetsen enkel anoniem en vertrouwelijk verwerkt.

Als u akkoord gaat met het gebruik van de resultaten van deze diagnostische toetsen voor onderzoek naar het verbeteren van algebraïsche vaardigheden in de tweede fase van de Havo, dan hoeft u niets te doen. Mocht u hier wel bezwaren tegen hebben, dan kunt u dat kenbaar maken via een e-mail aan mij (t.j.m.coenen@utwente.nl), het liefst uiterlijk op vrijdag 9 september. U kunt uw bezwaren ook kenbaar maken door onderstaand strookje door uw zoon/dochter bij de docent wiskunde van uw zoon/dochter te laten inleveren, het liefst uiterlijk op vrijdag 9 september. Uiteraard kan uw zoon/dochter zelf nog op ieder moment beslissen niet aan het onderzoek te willen deelnemen.

Ik hoop u hiermee voldoende te hebben geïnformeerd. Voor vragen kunt u contact opnemen via het bovengenoemde e-mailadres.

Met vriendelijke groet,
Tom Coenen, vakdidacticus en docent wiskunde

Ik geef **geen** toestemming voor ………………………………………………… uit klas ………… dat de resultaten van twee diagnostische toetsen gebruikt worden ten behoeve van het genoemde onderzoek.

Naam: ……………………………………………

Handtekening: ……………………………………………

Bijlage 2: Stencil algebraïsche vaardigheden (de oefenmodule)

Zie volgende bladzijde. Let op dat de paginanummering hier niet klopt, en in het eigenlijke bestand anders was.

Oefenmodule Algebraïsche Vaardigheden

4 Havo Wiskunde A

In deze oefenmodule zullen algebraïsche vaardigheden behandeld worden die eigenlijk al in de onderbouw (van de Havo) behandeld zouden moeten zijn. In de bovenbouw van de Havo wordt ervan uit gegaan dat deze vaardigheden beheerst worden en daarom is het belangrijk dat hiermee geoefend wordt zodat dit inderdaad het geval is. Voor deze oefenmodule is het gebruik van een rekenmachine niet toegestaan. De theoretische blokken kunnen gebruikt worden om de voorbeelden en opgaven beter te begrijpen.

---

1 Terminologie en Rekenregels

De uitkomst van een optelling noemen we de **som**, de uitkomst van een aftrekking het **verschil**. De getallen die opgeteld of van elkaar worden afgetrokken zijn de **termen**.

Voorbeelden:

1. $3 + 4 = 7$, 3 en 4 zijn de termen, 7 is de som.

2. $4 - 3 = 1$, 4 en 3 zijn de termen, 1 is het verschil.

De uitkomst van een vermenigvuldiging noemen we het **product**, de uitkomst van een deling het **quotiënt**. De getallen die vermenigvuldigd of gedeeld worden zijn de **factoren**.

Voorbeelden:

1. $3 \cdot 4 = 12$, 3 en 4 zijn de factoren, 12 is het product.

2. $3 : 4 = \frac{3}{4}$, 3 en 4 zijn de factoren, $\frac{3}{4}$ is het quotiënt.

De volgorde van de bewerkingen (**rekenvolgorde**) is:

Machtsverheffen/worteltrekken, vermenigvuldigen/delen, optellen/aftrekken

De volgorde tussen machtsverheffen en worteltrekken is dat de bewerking van links naar rechts wordt uitgevoerd. Dit geldt ook voor vermenigvuldigen en delen en voor optellen en aftrekken.

Voorbeelden:

1. $4 : 2 \cdot 3 = 6$

2. $6 \cdot 5 : 2 = 15$

Wil je de volgorde veranderen, dan gebruik je **haakjes.** De bewerking binnen de haakjes gaat voor.

Voorbeelden:

1. $4 : (2 \cdot 3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

2. $6 \cdot (5 : 2) = 6 \cdot 2{,}5 = 15$

Zijn er meerdere haakjes, dan werk je van binnen naar buiten.

Voorbeelden:

1. $4 - \big(3 - (7 - 2)\big) = 4 - (3 - 5) = 4 - (-2) = 4 + 2 = 6$

2. $6 - \big(2 + 3(14 - 9)\big) = 6 - (2 + 3 \cdot 5) = 6 - (2 + 15) = 6 - 17 = -11$

De volgende **tekenregels** gelden. Een even aantal minnen achter elkaar geeft een plus, een oneven aantal minnen achter elkaar geeft een min.

Voorbeelden bij optellen en aftrekken

$12 - (-7) = 12 + 7 = 19$ $\qquad$ $12 - 7 = 5$

$-12 - (-7) = -12 + 7 = -5$ $\qquad$ $-12 - 7 = -19$

Voorbeelden bij vermenigvuldigen en delen

$-7 \cdot 7 = -49$ $\quad$ $-7 \cdot -7 = 49$

$-49 : 7 = -7$ $\quad$ $49 : -7 = -7$

2 Rekenen met Letters

Alle rekenregels gelden ook bij het rekenen met letters. Bij het rekenen met letters kan het bij een vermenigvuldiging zo zijn dat het vermenigvuldigingsteken tussen de cijfers en letters wordt weggelaten. Dus: $a \cdot b = ab$ en $a + a + a = 3 \cdot a = 3a$

Voorbeelden:

1. $a + b + 2a + 3b + 4 = 3a + 4b + 4$
2. Bereken $ab + c - 4a$ voor $a = -2$, $b = 6$ en $c = 3$

   Dit geeft : $-2 \cdot 6 + 3 - 4 \cdot (-2) = -12 + 3 + 8 = -1$

Volgorde van optellen

Bij het optellen van twee of meer getallen doet de volgorde van die getallen in de optelling er niet toe: $a + b = b + a$

Volgorde van vermenigvuldigen

Bij het vermenigvuldigen van twee of meer getallen doet de volgorde van die getallen in de vermenigvuldiging er niet toe: $a \cdot b = b \cdot a$

3 Werken met Haakjes

$$\boxed{a(b + c) = ab + bc}$$

Voorbeeld:

$2(5 + 7) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 10 + 14 = 24$ (via deze regel)

$2(5 + 7) = 2 \cdot 12 = 24$ (direct)

$$\boxed{-a(b + c) = -ab - bc}$$

Voorbeelden:

1. $-3(5 + 7) = -3 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = -15 - 21 = -36$ (via deze regel)

   $-3(5 + 7) = -3 \cdot 12 = -36$ (direct)
2. $a - \big(3 - (2 + a)\big) =$

   $a - (3 - 2 - a) =$

   $a - (1 - a) =$

   $a - 1 + a =$

   $2a - 1$

3. $a + 2(a - (1 - 2a)) =$

$a + 2(a - 1 + 2a) =$

$a + 2(3a - 1) =$

$a + 6a - 2 =$

$7a - 2$

$$\boxed{(a + p)(b + q) = ab + aq + pb + pq}$$

Voorbeeld:

$(a + 2)(b + 1) = ab + a + 2b + 2$

$$\boxed{(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Voorbeeld:

$(c + 2)^2 = c^2 + 2 \cdot 2 \cdot c + 2^2 = c^2 + 4c + 4$

$$\boxed{(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Voorbeeld:

$(a - 4)^2 = a^2 + 2 \cdot -4 \cdot a + (-4)^2 = a^2 - 8a + 16$

$$\boxed{(a - b)(a + b) = a^2 - b^2}$$

Voorbeeld:

$(b - 4)(b + 4) = b^2 - 4^2 = b^2 - 16$

Opgaven:

1. Werk de haakjes weg en vereenvoudig zo ver mogelijk:

a. $a + b + (c - 4d) + 5e - 3c$

b. $5x + 6y - (2x - y)$

c. $3x + 2y - (4y + (3y - 1))$

d. $10a - 7b - (13a - 6b(5a - 3b))$

e. $6(5 + 2b) - 3(a - 3)$

2. Schrijf als tweeterm of drieterm (werk de haakjes weg):

a. $(4+a)(-6+a)$

b. $(x+4)(2x-4)$

c. $(a-10)(a+10)$

d. $(5x+2)^2$

e. $(2-3x)^2$

4 Breuken

$\frac{p}{q}$ noemen we een **breuk**, p is de **teller**, q is de **noemer**.

Voor een breuk geldt dat de noemer ongelijk aan nul moet zijn.

Voor het minteken voor de breuk geldt: $-\frac{p}{q} = \frac{-p}{q} = \frac{p}{-q}$

Voorbeelden:

$-\frac{1}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}$

$-\frac{49}{7} = -7$ $\qquad$ $-\frac{-49}{-7} = -7$

Rekenregels voor breuken

$$\frac{p}{p} = 1$$

Vereenvoudigen

$$\frac{pc}{qc} = \frac{p}{q}$$

Een breuk verandert niet als je teller en noemer door hetzelfde getal deelt of met hetzelfde getal vermenigvuldigt.

Voorbeelden:

1. $\frac{6}{12} = \frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 6} = \frac{1}{2}$

2. $\frac{2p+2}{4} = \frac{2(p+1)}{4} = \frac{p+1}{2}$

Optellen en aftrekken van breuken

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{q} = \frac{p+r}{q} \quad , \quad \frac{p}{q} - \frac{r}{q} = \frac{p-r}{q}$$

Als van twee breuken de **noemers gelijk zijn** kun je de twee breuken onder één noemer brengen. Het bij elkaar optellen of aftrekken van de breuken doe je door de noemer te laten staan en de tellers op te tellen of af te trekken.

Voorbeelden:

1. $\frac{4}{7}+\frac{1}{7}=\frac{5}{7}$

2. $\frac{4}{7}-\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$

3. $\frac{3}{p}+\frac{2}{p}=\frac{5}{p}$

4. $\frac{q}{4}-\frac{1}{4}=\frac{q-1}{4}$

Als de **noemers niet gelijk** zijn, kun je breuken bij elkaar optellen of aftrekken door eerst de noemers gelijk te maken. We zeggen dan dat we de breuken **gelijknamig maken**. Hierbij maken we gebruik van de eigenschap van een breuk dat die niet verandert als je teller en noemer door hetzelfde getal deelt of met hetzelfde getal vermenigvuldigt.

$$\boxed{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{p\cdot s}{q\cdot s}+\frac{r\cdot q}{s\cdot q}=\frac{ps}{qs}+\frac{qr}{qs}=\frac{ps+qr}{qs}}$$

Net zoals eerder wordt bij het vermenigvuldigen van letters het maalteken vaak weggelaten.

Voorbeelden:

1. $\frac{4}{7}+\frac{2}{5}=\frac{4\cdot5}{7\cdot5}+\frac{2\cdot7}{5\cdot7}=\frac{20}{35}+\frac{14}{35}=\frac{20+14}{35}=\frac{34}{35}$

2. $\frac{3}{p}+\frac{6}{11}=\frac{3\cdot11}{11p}+\frac{6p}{11p}=\frac{33+6p}{11p}$

3. $\frac{2}{a+1}+\frac{3}{4}=\frac{2\cdot4}{4(a+1)}+\frac{3(a+1)}{4(a+1)}=\frac{8}{4(a+1)}+\frac{3a+3}{4(a+1)}=\frac{8+3a+3}{4(a+1)}=\frac{11+3a}{4(a+1)}$

4. $\frac{p}{4}+\frac{p+2}{8}=\frac{2p}{8}+\frac{p+2}{8}=\frac{2p+p+2}{8}=\frac{3p+2}{8}$

5. $\frac{2}{b+1}-\frac{3}{4}=\frac{2\cdot4}{4(b+1)}-\frac{3(b+1)}{4(b+1)}=\frac{8-3(b+1)}{4(b+1)}=\frac{8-3b-3}{4(b+1)}=\frac{5-3b}{4(b+1)}$

Vermenigvuldigen van breuken

$$\boxed{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=\frac{pr}{qs}}$$

Voor het vermenigvuldigen van breuken geldt: teller maal teller en noemer maal noemer. Bij het vermenigvuldigen van breuken hoef je de breuken niet eerst gelijknamig te maken.

Voorbeelden:

1. $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot5}{8\cdot7}=\frac{15}{56}$

2. $\frac{p}{2}\cdot\frac{3}{q}=\frac{3p}{2q}$

Delen van breuken

$$\boxed{\frac{p}{q}:\frac{r}{s}=\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{r}=\frac{ps}{qr}}$$

Delen door een breuk is hetzelfde als het vermenigvuldigen met het omgekeerde van de breuk.

Voorbeelden:

1. $\frac{7}{2} : \frac{3}{4} = \frac{7}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{7 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$

2. $\frac{3}{p} : \frac{5}{2} = \frac{3}{p} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5p} = \frac{6}{5p}$

Let op! **Delen door nul is niet toegestaan!**

$\frac{12}{2} = 6$, waarom? Omdat $2 \cdot 6 = 12$. Maar wat is nu $\frac{4}{0}$?

Wat is het antwoord? Misschien nul? Nee, want $0 \cdot 0$ is niet 4. Misschien 4? Nee, want $0 \cdot 4$ is niet 4. Er is geen getal te vinden waarvoor geldt: 0 keer dat getal is 4. Je kunt dus niet delen door nul.

Opgaven:

3. Vereenvoudig zo ver mogelijk:

a. $\frac{12a}{2}$

b. $\frac{4x+2}{12x+4}$

c. $\frac{15ab}{3ab}$

d. $\frac{x^2+4x}{x}$

e. $\frac{5ab}{30ac}$

4. Maak gelijknamig en breng onder één noemer(schrijf als één breuk):

a. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$

b. $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$

c. $\frac{3}{13} - \frac{-1}{2}$

5. Maak gelijknamig, breng onder één noemer en vereenvoudig zover mogelijk:

a. $\frac{2a}{2} + \frac{5a}{3}$

b. $\frac{3a}{bc} - \frac{a}{c}$

c. $\frac{5y}{3z} - \frac{2y}{3c}$

d. $\frac{4}{7} + \frac{3}{a}$

e. $\frac{6}{a} - \frac{1}{3b}$

6. Schrijf als één breuk:

a. $\frac{7}{8} \cdot \frac{2}{5}$

b. $\frac{5}{2} : \frac{1}{2}$

c. $\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} : \frac{3}{4}$

d. $2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}$

e. $3\frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{4}$

7. Schrijf als één breuk en vereenvoudig indien mogelijk:

a. $\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{3}$

b. $\frac{b}{a} : \frac{b}{a}$

c. $\frac{4}{7} : \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b}$

d. $\frac{3a}{5} : \frac{2}{9}$

e. $\frac{a}{2b} : \frac{b}{3}$

8. Breng onder één noemer:

a. $\frac{5}{a+3} + \frac{3}{2}$

b. $\frac{p}{3} + \frac{p}{q+1}$

c. $\frac{1}{a} - \frac{4}{a+1}$

5 Machten

5^3 noemen we een **macht**, 5 is het **grondtal**, 3 is de **exponent**.

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$

De exponent 3 zegt dat de macht 5^3 een vermenigvuldiging is van 3 vijven (ook wel 3 factoren van 5). Zo is $5 = 5^1$. Het getal 5 staat er slechts eenmaal. Bij de rekenregels voor de machten nemen we het grondtal positief. De reden daarvoor volgt wanneer gebroken exponenten worden behandeld.

Rekenregels voor machten

We gaan uit van $a > 0$. Dan:

$$\boxed{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$$

Twee machten met **hetzelfde grondtal** met elkaar vermenigvuldigen, doe je door het grondtal te laten staan en de exponenten bij elkaar op te tellen.

Voorbeelden:

1. $5^2 \cdot 5^4 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 5^{2+4}$
2. $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$
3. $a^3 \cdot a^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^5 = a^{3+2}$
4. $a^6 \cdot a^2 = a^{6+2} = a^8$

$$\boxed{a^p : a^q = a^{p-q}}$$

Twee machten met **hetzelfde grondtal** op elkaar delen, doe je door het grondtal te laten staan en de exponenten van elkaar af te trekken.

Voorbeelden:

1. $\frac{3^6}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{1} = 3^4 = 3^{6-2}$
2. $\frac{2^7}{2^3} = 2^{7-3} = 2^4$
3. $\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = \frac{a \cdot a \cdot a}{1} = a^3 = a^{5-2}$
4. $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$

Als we de rekenregel voor delen van machten gebruiken in het geval dat de exponenten in de teller en noemer gelijk zijn, krijgen we $1 = \frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = a^0$. Dus:

$$\boxed{a^0 = 1}$$

$$\boxed{(a^p)^q = a^{p \cdot q}}$$

De macht van een macht krijg je door het grondtal te laten staan en de exponenten met elkaar te vermenigvuldigen.

Voorbeelden:

1. $(5^3)^2 = 5^3 \cdot 5^3 = 5^{3+3} = 5^6 = 5^{2 \cdot 3}$
2. $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$
3. $(b^2)^4 = b^2 \cdot b^2 \cdot b^2 \cdot b^2 = b^{2+2+2+2} = b^8 = b^{2 \cdot 4}$
4. $(b^5)^3 = b^{5 \cdot 3} = b^{15}$

$$\boxed{(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p}$$

Voorbeelden:

1. $(4 \cdot 3)^2 = (4 \cdot 3)(4 \cdot 3) = 4^2 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144$

   Of eerst uitrekenen wat tussen de haakjes staat: $(4 \cdot 3)^2 = 12^2 = 144$

2. $(5 \cdot a)^3 = (5 \cdot a)(5 \cdot a)(5 \cdot a) = 5^3 \cdot a^3 = 125 \cdot a^3 = 125a^3$

3. $(a \cdot c)^3 = a^3 \cdot c^3 = a^3c^3$

4. $(2 \cdot b)^a = 2^a \cdot b^a$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}}$$

Voorbeelden:

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

2. $\left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{7^2}{8^2} = \frac{49}{64}$

3. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a \cdot a}{b \cdot b} = \frac{a^2}{b^2}$

4. $\left(\frac{3}{b}\right)^4 = \frac{3^4}{b^4} = \frac{81}{b^4}$

Opgaven:

9. Vereenvoudig:

   a. $\frac{a^5b}{a^2}$

   b. $\left(\frac{b}{4}\right)^2$

   c. $4 \cdot b^7 \cdot b^5$

   d. $(7 \cdot a^3 \cdot b^4)^2$

   e. $\frac{9a^7b^4}{6a^2b^2}$

De rekenregels gelden ook als de exponent negatief of gebroken is. (Als de exponent een breuk is, noemen we de exponent gebroken.)

6 Wortels

Voor het rekenen met wortels gelden ook rekenregels. Een aantal is hieronder te zien.

$$\boxed{\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}}$$

Voorbeeld:

$\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$ (met deze regel)

$\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{36} = 6$ (of direct)

$$\boxed{\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}}$$

Voorbeeld:

$\sqrt{\frac{144}{9}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{9}} = \frac{12}{3} = 4$ (met deze regel)

$\sqrt{\frac{144}{9}} = \sqrt{16} = 4$ (of direct)

7 Lineaire vergelijkingen

$2x + 6 = 8$ is een **eerstegraadsvergelijking** (of **lineaire vergelijking**).

Eerstegraads, omdat de hoogste macht van de onbekende x één is (in de term $2x$).

Vergelijking, omdat via het " $=$ " teken $2x + 6$ en 8 aan elkaar gelijk worden gesteld. Of: met elkaar worden vergeleken.

Zo wordt $x^2 + 4x + 4 = 5$ een tweedegraads vergelijking genoemd. De hoogste macht van x die in de vergelijking voorkomt is twee (in de term x^2).

De eerstegraads vergelijking $2x = 8$ is een bewering die waar is als $x = 4$. Het vinden van de waarde $x = 4$ wordt het **oplossen van de vergelijking** genoemd.

Bij eerstegraadsvergelijkingen met als onbekende x is de **standaardmethode** voor het vinden van de waarde van x die de vergelijking kloppend maakt de volgende:

1. Alle termen met x naar een kant van het " = " teken te brengen.

2. Alle overige termen naar de andere kant van het " = " teken brengen.

3. De onbekende x vrijmaken, dat wil zeggen herschrijven in de vorm van $x =$ .... .

Deze stappen werken via de **balansmethode**, oftewel, wat je aan de ene kant van het " = " teken doet moet je ook aan de andere kant doen.

In algemene vorm:

$$\boxed{ax + b = 0 \quad \leftrightarrow \quad ax = -b \quad \leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{a}}$$

Met $a \neq 0$. (a is niet gelijk aan nul)

Voorbeeld:

$3x + 4 = 2 - x$	$\leftrightarrow$	Tel aan beide kanten x op en trek van beide kanten 4 af
$3x + x = 2 - 4$	$\leftrightarrow$	Herleiden
$4x = -2$	$\leftrightarrow$	Deel beide kanten door 4
$x = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$		

Staan er **haakjes in de vergelijking**, dan worden die eerst weggewerkt.

Voorbeeld:

$2(x+5)+3x=6-(x-1)$ ↔ Werk de haakjes weg

$2x+10+3x=6-x+1$ ↔ Tel aan beide kanten x op en trek aan beide kanten 10 af

$2x+3x+x=6+1-10$ ↔ Herleid

$6x=-3$ ↔ Deel beide kanten door 6

$x=-\frac{1}{2}$

Staan er **breuken in de vergelijking**, dan kan het verstandig zijn om deze eerst weg te werken.

Voorbeeld:

$x+\frac{1}{3}x+1=\frac{1}{2}(x+4)$ ↔

Om de noemers 2 en 3 weg te werken moet je in dit geval alles (het rechter- en linkerlid) met 6 vermenigvuldigen. Dit geeft:

$6x+2x+6=3(x+4)$ ↔ Werk de haakjes weg

$6x+2x+6=3x+12$ ↔ Trek van beide kanten $3x$ en 6 af

$6x+2x-3x=12-6$ ↔ Herleid

$5x=6$ ↔ Deel beide kanten door 5

$x=\frac{6}{5}$

Opgaven:

10. Los de volgende vergelijkingen op:

a. $4x+6=x+21$

b. $7x-4=3x-28$

c. $-4x+23=3x-5$

d. $-(x+4)+6(x-3)=x+2$

e. $-2(2-3x)+(x-3)=-3(5x-1)+34$

11. Los de volgende vergelijkingen op (werk eerst de breuken weg):

a. $\frac{1}{2}(x+9)+4=\frac{1}{3}(x-2)$

b. $\frac{1}{7}(5x+4)=\frac{1}{2}(4-x)$

c. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=1+\frac{1}{5}x$

Afsluitende Opgaven:

12. Herleid volledig:

a. $\frac{3x^{12}y^7z^6}{6x^5y^5z^7}$

b. $5x^8y^3 \cdot 6x^5y^3 - 11x^7y \cdot 4x^6y^5$

c. $\frac{20a^7b^9}{4a^4b^4} + \frac{3a^{10}b^7}{a^7b^2}$

13. Schrijf als één breuk:

a. $\frac{5y^2}{3x} + \frac{4x^2}{y}$

b. $\frac{2y^3}{x} : \frac{x}{5y^7}$

c. $\frac{6y^5}{x^4} \cdot \frac{4x}{3y^7}$

d. $\frac{5xy}{6x^3} : \frac{3xy}{5x^3} - \frac{4x^2y}{2y^4} \cdot \frac{3y^3}{9x^2}$

14. Los op voor x en herleid volledig:

a. $\frac{11}{2}x - 2 = \frac{9}{5}x + 1$

b. $3(x + 2) + 4x = \frac{9}{2}(x - 3)$

c. $(8 - 2x)(5 - 9x) + 8x = 3x(6x + 8) - 9$

Antwoorden

Opgave 1

a) $a + b - 2c - 4d + 5e$

b) $3x + 7y$

c) $3x - 5y + 1$

d) $-3a - 7b + 30ab - 18b^2$

e) $39 - 3a + 12b$

Opgave 2

a) $-24 - 2a + a^2$

b) $2x^2 + 4x - 16$

c) $a^2 - 100$

d) $25x^2 + 20x + 4$

e) $4 - 12x + 9x^2$

Opgave 3

a) $6a$

b) $\frac{2x+1}{6x+2}$

c) 5

d) $x + 4$

e) $\frac{b}{6c}$

Opgave 4

a) $\frac{7}{10}$

b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{19}{26}$

Opgave 5

a) $\frac{8a}{3} = 2\frac{2}{3}a$

b) $\frac{3a-ab}{bc}$

c) $\frac{5cy-2yz}{3cz}$

d) $\frac{4a+21}{7a}$

e) $\frac{18b-a}{3ab}$

Opgave 6

a) $\frac{7}{20}$

b) 5

c) $\frac{7}{12}$

d) $\frac{5}{14}$

e) $\frac{65}{6} = 10\frac{5}{6}$

Opgave 7

a) $\frac{bc}{3a}$

b) 1

c) $\frac{8a}{7b}$

d) $\frac{27a}{10} = 2\frac{7}{10}a$

e) $\frac{3a}{2b^2}$

Opgave 8

a) $\frac{3a+19}{2a+6}$

b) $\frac{4p+pq}{3q+3}$

c) $\frac{1-3a}{a+a^2}$

Opgave 9

a) a^3b

b) $\frac{b^2}{16}$

c) $4b^{12}$

d) $49a^6b^8$

e) $\frac{3a^5b^2}{2} = \frac{3}{2}a^5b^2$

Opgave 10

a) $x = 5$

b) $x = -6$

c) $x = 4$

d) $x = 6$

e) $x = 2$

Opgave 11

a) $x = -31$

b) $x = \frac{20}{17} = 1\frac{3}{17}$

c) $x = \frac{30}{19} = 1\frac{11}{19}$

Opgave 12

a) $\frac{x^7y^2}{2z}$

b) $-14x^{13}y^6$

c) $8a^3b^5$

Opgave 13

a) $\frac{5y^3+12x^3}{3xy}$

b) $\frac{10y^{10}}{x^2}$

c) $\frac{8}{x^3y^2}$

d) $\frac{13}{18}$

Opgave 14

a) $x = \frac{30}{37}$

b) $x = -\frac{39}{5} = -7\frac{4}{5}$

c) $x = \frac{1}{2}$

Bijlage 3: Diagnostische toets 1 (met uitwerkingen)

Diagnostische Toets Algebraïsche Vaardigheden

4 Havo Wiskunde A

Voordat je begint met de diagnostische toets, schrijf als eerst je naam op je blaadje en ook het niveau en leerjaar wat je vorig jaar hebt gedaan (bijvoorbeeld 4 Mavo of 3 Havo). Bij het maken van deze diagnostische toets is het gebruik van een rekenmachine niet toegestaan.

Er zijn op deze toets in totaal 39 punten te behalen.

---

1) Herleid volledig (2pt per deel-opgave):

a)

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

b)

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{9}$$

c)

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$$

2) Herleid volledig (2pt per deel-opgave):

a)

$$x^3 \cdot x^8$$

b)

$$\frac{x^5}{x^5}$$

c)

$$2x^6y^2 \cdot 5x^5y^3 - 3x^7y \cdot 4x^4y^4$$

d)

$$\frac{2a^9b^5}{4a^3b^2}$$

Z.o.z.

3) Herleid volledig (2pt per deel-opgave):

a)

$$(2x+7)(3x+8)-5$$

b)

$$(4x+2)(5x-4)-x(5x+3)$$

4) Schrijf als 1 breuk en herleid volledig (3pt per deel-opgave):

a)

$$\frac{3y}{x}+\frac{5y}{2x}$$

b)

$$\frac{2x}{y}+\frac{3y^2}{2x}$$

c)

$$\frac{2x^2}{y}:\frac{y}{5x^5}$$

d)

$$\frac{2y}{3x}:\frac{3y}{5x}-\frac{4x^2}{y^3}\cdot\frac{2y^3}{9x^2}$$

5) Los op voor x en herleid volledig (3pt per deel-opgave):

a)

$$5+3x=9+x$$

b)

$$\frac{5}{3}x-6=\frac{9}{4}x+2$$

c)

$$2x(6x+3)-5=(2-3x)(5-4x)+5x$$

Einde diagnostische toets. Vergeet niet je naam en het niveau en leerjaar wat je vorig jaar hebt gedaan op je blaadje te schrijven!

Uitwerkingen

1) A) $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$

B) $\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{9}=\frac{2\cdot 7}{5\cdot 9}=\frac{14}{45}$

C) $\frac{3}{4}:\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 2}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$

2) A) $x^3\cdot x^8=x^{3+8}=x^{11}$

B) $\frac{x^5}{x^5}=x^{5-5}=x^0=1\ (=\frac{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}=1)$

C) $2x^6y^2\cdot 5x^5y^3-3x^7y\cdot 4x^4y^4=10x^{11}y^5-12x^{11}y^5=-2x^{11}y^5$

D) $\frac{2a^9b^5}{4a^3b^2}=\frac{a^6b^3}{2}$

3) A) $(2x+7)(3x+8)-5=6x^2+16x+21x+56-5=6x^2+37x+51$

B)

$(4x+2)(5x-4)-x(5x+3)=20x^2-16x+10x-8-5x^2-3x=15x^2-9x-8$

4) A) $\frac{3y}{x}+\frac{5y}{2x}=\frac{6y}{2x}+\frac{5y}{2x}=\frac{11y}{2x}$

B) $\frac{2x}{y}+\frac{3y^2}{2x}=\frac{4x^2}{2xy}+\frac{3y^3}{2xy}=\frac{4x^2+3y^3}{2xy}$

C) $\frac{2x^2}{y}:\frac{y}{5x^5}=\frac{2x^2}{y}\cdot\frac{5x^5}{y}=\frac{10x^7}{y^2}$

D) $\frac{2y}{3x}:\frac{3y}{5x}-\frac{4x^2}{y^3}\cdot\frac{2y^3}{9x^2}=\frac{2y}{3x}\cdot\frac{5x}{3y}-\frac{8x^2y^3}{9x^2y^3}=\frac{10xy}{9xy}-\frac{8}{9}=\frac{10}{9}-\frac{8}{9}=\frac{2}{9}$

5) A)

$$5+3x=9+x$$

$$3x-x=9-5$$

$$2x=4$$

$$x=\frac{4}{2}=2$$

B)

$$\frac{5}{3}x-6=\frac{9}{4}x+2$$

$$\frac{5}{3}x-\frac{9}{4}x=2+6$$

$$\frac{20}{12}x-\frac{27}{12}x=8$$

$$-\frac{7}{12}x=8$$

$$x = \frac{-8 \cdot 12}{7} = \frac{-96}{7} = -13\frac{5}{7}$$

5)

C)

$$2x(6x+3) - 5 = (2-3x)(5-4x) + 5x$$

$$12x^2 + 6x - 5 = 10 - 8x - 15x + 12x^2 + 5x$$

$$12x^2 - 12x^2 + 6x - 5 = 10 - 18x$$

$$6x - 5 = 10 - 18x$$

$$6x + 18x = 10 + 5$$

$$24x = 15$$

$$x = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

Bijlage 4: Diagnostische toets 2 (met uitwerkingen)

Diagnostische Toets Algebraïsche Vaardigheden

4 Havo Wiskunde A

Voordat je begint met de diagnostische toets, schrijf als eerst je naam op je blaadje en ook het niveau en leerjaar wat je vorig jaar hebt gedaan (bijvoorbeeld 4 Mavo of 3 Havo). Bij het maken van deze diagnostische toets is het gebruik van een rekenmachine niet toegestaan.

Er zijn op deze toets in totaal 39 punten te behalen.

---

1) Herleid volledig (2pt per deel-opgave):

a)

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$$

b)

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{6}{11}$$

c)

$$\frac{5}{4}:\frac{2}{7}$$

2) Herleid volledig (2pt per deel-opgave):

a)

$$y^7 \cdot y^5$$

b)

$$\frac{x^6}{x^6}$$

c)

$$3x^8y^3 \cdot 5x^5y^3 - 4x^7y \cdot 4x^6y^5$$

d)

$$\frac{2a^{10}b^9}{10a^3b^5}$$

Z.o.z.

3) Herleid volledig (2pt per deel-opgave):

a)

$$(4x+9)(2x+3)-6$$

b)

$$(6x+3)(4x-5)-2x(3x+7)$$

4) Schrijf als 1 breuk en herleid volledig (3pt per deel-opgave):

a)

$$\frac{4x}{y}+\frac{7x}{3y}$$

b)

$$\frac{4x^2}{3y}+\frac{5y^2}{x}$$

c)

$$\frac{x}{7y^7}:\frac{3y^3}{x}$$

d)

$$\frac{x^3y}{6y^3}\cdot\frac{7y^2}{2x^3}-\frac{5xy^5}{3x^2}:\frac{4y^5}{x}$$

5) Los op voor x en herleid volledig (3pt per deel-opgave):

a)

$$5+5x=x+21$$

b)

$$2+\frac{3}{5}x=\frac{5}{4}x+5$$

c)

$$3x(6x+4)-5=(5-2x)(3-9x)+3x$$

Einde diagnostische toets. Vergeet niet je naam en het niveau en leerjaar wat je vorig jaar hebt gedaan op je blaadje te schrijven!

Uitwerkingen

1) A) $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{5}{20}+\frac{4}{20}=\frac{9}{20}$

B) $\frac{3}{7}\cdot\frac{6}{11}=\frac{3\cdot 6}{7\cdot 11}=\frac{18}{77}$

C) $\frac{5}{4}:\frac{2}{7}=\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{2}=\frac{5\cdot 7}{4\cdot 2}=\frac{35}{8}=4\frac{3}{8}$

2) A) $y^7\cdot y^5=y^{7+5}=y^{12}$

B) $\frac{x^6}{x^6}=x^{6-6}=x^0=1\ (=\frac{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}=1)$

C)

$$3x^8y^3\cdot 5x^5y^3-4x^7y\cdot 4x^6y^5=15x^{13}y^6-16x^{13}y^6=-1x^{13}y^6=-x^{13}y^6$$

D)

$$\frac{2a^{10}b^9}{10a^3b^5}=\frac{a^7b^4}{5}$$

3) A) $(4x+9)(2x+3)-6=8x^2+12x+18x+27-6=8x^2+30x+21$

B)

$$(6x+3)(4x-5)-2x(3x+7)=24x^2-30x+12x-15-6x^2-14x=18x^2-32x-15$$

4) A) $\frac{4x}{y}+\frac{7x}{3y}=\frac{12x}{3y}+\frac{7x}{3y}=\frac{19x}{3y}$

B) $\frac{4x^2}{3y}+\frac{5y^2}{x}=\frac{4x^3}{3xy}+\frac{15y^3}{3xy}=\frac{4x^3+15y^3}{3xy}$

C) $\frac{x}{7y^7}:\frac{3y^3}{x}=\frac{x}{7y^7}\cdot\frac{x}{3y^3}=\frac{x^2}{21y^{10}}$

D) $\frac{x^3y}{6y^3}\cdot\frac{7y^2}{2x^3}-\frac{5xy^5}{3x^2}:\frac{4y^5}{x}=\frac{x^3y}{6y^3}\cdot\frac{7y^2}{2x^3}-\frac{5xy^5}{3x^2}\cdot\frac{x}{4y^5}=\frac{7x^3y^3}{12x^3y^3}-\frac{5x^2y^5}{12x^2y^5}=\frac{7}{12}-\frac{5}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

5) A)

$$5+5x=x+21$$

$$5x-x=21-5$$

$$4x=16$$

$$x=\frac{16}{4}=4$$

B)

$$2+\frac{3}{5}x=\frac{5}{4}x+5$$

$$\frac{3}{5}x-\frac{5}{4}x=3$$

$$12x-25x=60$$

$$-13x = 60$$

$$x = -\frac{60}{13} = -4\frac{8}{13}$$

5)

C)

$$3x(6x+4) - 5 = (5-2x)(3-9x) + 3x$$

$$18x^2 + 12x - 5 = 15 - 45x - 6x + 18x^2 + 3x$$

$$18x^2 - 18x^2 + 12x - 5 = 15 - 48x$$

$$12x - 5 = 15 - 48x$$

$$12x + 48x = 15 + 5$$

$$60x = 20$$

$$x = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

Bijlage 5: Waarden die gebruikt zijn om de standaarddeviatie en effectgrootte per groep te berekenen

Hele klas 1		20,71429	429,0818102	
		18,71429	350,2246502	
		14,71429	216,5103302	
		4,71429	22,2245302	
		4,71429	22,2245302	
	12,2857	3,71429	13,7959502	1580,29
		2,71429	7,367370204	
		-0,28571	0,081630204	79,0143
		-0,28571	0,081630204	
		-1,28571	1,653050204	8,889
		-2,28571	5,224470204	
		-2,28571	5,224470204	
		-4,28571	18,3673102	
		-4,28571	18,3673102	
		-5,28571	27,9387302	
		-6,28571	39,5101502	
		-6,28571	39,5101502	
		-7,28571	53,0815702	
		-7,28571	53,0815702	
		-10,28571	105,7958302	
		-12,28571	150,9386702	
	18,7619	0,72856		

4Mavo								
	12	6,9	5,1	26,01		25	11,5	1,63891
	10		3,1	9,61		14		
	8		1,1	1,21	70,9	8		
	8		1,1	1,21		18		
	7		0,1	0,01	7,87778	7		
	6		-0,9	0,81		17		
	6		-0,9	0,81	2,80674	10		
	5		-1,9	3,61		11		
	5		-1,9	3,61		4		
	2		-4,9	24,01		1		

3Havo								
	33	18,25	14,75	217,563		34	27,25	1,01212
	31		12,75	162,563		31		
	17		-1,25	1,5625	553,5	30		
	17		-1,25	1,5625	79,0714	28		
	15		-3,25	10,5625	8,89221	23		
	12		-6,25	39,0625		18		
	11		-7,25	52,5625		30		
	10		-8,25	68,0625		24		

Hele klas 1	1		-5,476190476	29,9887	777,773
	0		-6,476190476	41,941	38,8887
	5		-1,476190476	2,17914	6,23608
	13		6,523809524	42,5601	
	11	6,47619	11	121	
	11		4,523809524	20,4649	
	8		1,523809524	2,322	
	13		6,523809524	42,5601	4,75902
	6		-0,476190476	0,22676	
	19		12,52380952	156,846	
	14		7,523809524	56,6077	
	4		-2,476190476	6,13152	
	0		-6,476190476	41,941	
	10		3,523809524	12,4172	
	0		-6,476190476	41,941	
	11		4,523809524	20,4649	
	4		-2,476190476	6,13152	
	6		-0,476190476	0,22676	
	-1		-7,476190476	55,8934	
	-1		-7,476190476	55,8934	
	2		-4,476190476	20,0363	

4Mavo					
	13		8,4	70,56	248,4
	4		-0,6	0,36	27,6
	0	4,6	-4,6	21,16	5,25357
	10		5,4	29,16	
	0		-4,6	21,16	
	11		6,4	40,96	2,76887
	4		-0,6	0,36	
	6		1,4	1,96	
	-1		-5,6	31,36	
	-1		-5,6	31,36	

3Havo					
	1	9	-8	64	300
	0		-9	81	42,8571
	13		4	16	6,54654
	11		2	4	
	8		-1	1	3,88844
	6		-3	9	
	19		10	100	
	14		5	25	

Ongepaarde t-toets diagnostische toets 1	
2,80674	6,9
8,89221	18,25
6,247	
-3,8303	

Ongepaarde t-toets diagnostische toets 2

			2279,81				862,105	
			113,99				47,8947	
34		18,7619	10,6766	29		16,3158	6,9206	9,09296
31				26				-0,8496
32				24				
30	15,23809524		232,2	23	12,68421053		160,889	
28	12,23809524		149,771	23	9,684210526		93,7839	
27	13,23809524		175,247	20	7,684210526		59,0471	
23	11,23809524		126,295	19	6,684210526		44,6787	
25	9,238095238		85,3424	18	6,684210526		44,6787	
18	8,238095238		67,8662	17	3,684210526		13,5734	
30	4,238095238		17,9615	17	2,684210526		7,20499	
24	6,238095238		38,9138	16	1,684210526		2,83657	
14	-0,761904762		0,5805	14	0,684210526		0,46814	
8	11,23809524		126,295	14	0,684210526		0,46814	
18	5,238095238		27,4376	12	-0,315789474		0,09972	
7	-4,761904762		22,6757	10	-2,315789474		5,36288	
17	-10,76190476		115,819	10	-2,315789474		5,36288	
10	-0,761904762		0,5805	7	-4,315789474		18,626	
11	-11,76190476		138,342	7	-6,315789474		39,8892	
4	-1,761904762		3,10431	4	-6,315789474		39,8892	
1	-8,761904762		76,771		-9,315789474		86,7839	
2	-7,761904762		60,2472		-9,315789474		86,7839	
	-14,76190476		217,914		-12,31578947		151,679	
	-17,76190476		315,485					
	-16,76190476		280,961					

Ongepaarde t-toets klas 1 D-toets 1 en klas 2 D-toets 2

6,9206		16,3158		19
8,889		12,2857		21
8,01707				
-1,5876				