

Computational thinking

Dynamisch modelleren in 5 vwo

ONDERZOEK VAN ONDERWIJS - WISKUNDE

ROOS DE LANGE (S1683039)

UT BEGELEIDER: DR. IR. MARK TIMMER

AFSTUDEERDCOMMISSIE: DR. IR. MARK TIMMER & W. VAN DER MEULEN

Samenvatting

Als gevolg van digitalisering is de samenleving de afgelopen jaren in een buitengewoon tempo veranderd. Op de huidige arbeidsmarkt worden studenten geacht te beschikken over verscheidene digitale vaardigheden, vaardigheden die op school al aangeleerd moeten worden. Een belangrijke set vaardigheden laat zich samenvatten onder de noemer computational thinking. In dit ontwerponderzoek bekijken we hoe een lesmodule over dynamisch modelleren vijfdejaars vwo-leerlingen die wiskunde B volgen kan aanzetten tot het ontwikkelen van computational thinking. Voor deze lesmodule zijn ontwerpeisen opgesteld die gebaseerd zijn op literatuur over computational thinking en dynamisch modelleren, en geschikte didactiek om dit te onderwijzen. Aan de hand van deze ontwerpeisen is een lesmodule ontwikkeld over dynamisch modelleren. Deze lesmodule is voorgelegd aan een expertpanel en uitgevoerd door vier leerlingen. Het lesmateriaal is geanalyseerd door de inhoud te koppelen aan computational thinking vaardigheden, de feedback van het expertpanel te bespreken, resultaten bij het leerlingenwerk te bepalen en leerlingeninterviews af te nemen. We concluderen dat de lesmodule vijfdejaars vwo-leerlingen die wiskunde B volgen kan aanzetten tot het ontwikkelen van enkele aspecten van computational thinking en dat dynamisch modelleren hier een geschikt onderwerp bij is. Verder wordt een aantal aanbevelingen gedaan om de lesmodule te verbeteren.

Inhoudsopgave

1. Inleiding.....	4
1.1 Aanleiding	4
1.2 Onderzoeksvraag	5
1.3 Leeswijzer.....	5
2. Theoretisch kader	6
2.1 Computational thinking	6
2.1.1 Didactische uitgangspunten.....	8
2.1.2 Verwant werk.....	9
2.2 Dynamisch modelleren	11
2.2.1 Didactische uitgangspunten.....	12
2.3 Algemene didactische uitgangspunten.....	13
3. Ontwerpeisen.....	15
4. Methode.....	18
4.1 Onderzoekopzet	18
4.2 Respondenten	18
4.3 Dataverzameling en - analyse	19
5. Resultaten	22
5.1 Ontwerp	22
5.1.1 Overzicht	22
5.1.2 Verantwoording	23
5.2 Feedback ervaringsdeskundigen.....	42
5.3 Uitvoering.....	44
6. Conclusie	52
6.1 Conclusies en discussie	52
6.1.1 Eerste onderzoeksfase	52
6.1.2 Tweede onderzoeksfase	53
6.1.3 Beperkingen en implicaties.....	57
6.2 Aanbevelingen	58
Literatuurlijst.....	60
A. Ontwerp.....	62
A.1 Lesmodule.....	62
A.2 Handleiding MATLAB Simulink	78
A.3 Werkblad	80
A.4 Correctievoorschrift.....	83

B. Feedback	88
B.1 Feedbackformulier	88
B.2 Expertpanel	90
C. Observatie	95
C.1 Observatieschema (leeg)	95
C.2 Observatieschema (ingevuld)	96
D. Interviews	98
D.1 Interviewleidraad	98
D.2 Transcripties	99
E. Ethiek	105
E.1 Ethiekaanvraag.....	105
E.2 Brief aan ouder(s)-verzorger(s).....	112

1. Inleiding

1.1 Aanleiding

De informatica heeft in een buitengewoon tempo verbazingwekkende technologie voortgebracht die de wetenschap, maar ook ons dagelijks leven, drastisch heeft veranderd. Bovendien hebben we de afgelopen jaren ingezien dat informatica niet alleen nuttige software en hardware biedt, maar ook een intellectueel denkkader dat 'computational thinking' wordt genoemd. Jeannette Wing, een van de grondleggers van dit concept, definieert computational thinking in 2014 als volgt: "The thought processes involved in formulating a problem and expressing its solution(s) in such a way that a computer – human or machine – can effectively carry out [1]." Computational thinking is dus breder dan programmeren en richt zich op de vraag óf en hoe een probleem geautomatiseerd kan worden opgelost [2,3].

De invloed van computational thinking op de wetenschap was destijds al zichtbaar in alle wetenschappelijke disciplines. Daar waar dit jaren geleden is begonnen met het gebruik van computationele methoden en modellen, is bijvoorbeeld het gebruik van datamining en machine learning niet meer weg te denken in de biologie [1] en evenzo het gebruik van nano- en kwantumcomputing in respectievelijk de scheikunde en de natuurkunde [2]. In 2013 werd voorspeld dat tegen deze tijd in de Verenigde Staten een op de twee banen in de wetenschap, technologie, engineering en wiskunde gericht zou zijn op informatica [4], wat het verschil in banenaanbod van nu en een aantal jaar geleden illustreert. De voorspelling is zelfs dat meer banen in de Verenigde Staten de komende jaren onder druk staan van de digitalisering [5]. Studenten van tegenwoordig worden dus geacht te beschikken over verscheidene digitale vaardigheden en deze vaardigheden moeten al op school aangeleerd worden.

Jeannette Wing pleitte in 2006 dat computational thinking fundamentele vaardigheden biedt die beschouwd zouden moeten worden als gemeengoed en riep het primair en voortgezet onderwijs op hier aandacht aan te besteden [2]. Aan deze oproep is gehoor gegeven. In 2012 verscheen een rapport van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (KNAW), waarin werd geconcludeerd dat digitale geletterdheid in de 21^{ste} eeuw behoort tot de basisvaardigheden van de ontwikkelende mens en een voorwaarde is om te kunnen functioneren in de informatiemaatschappij [6]. Mede naar aanleiding van de conclusies van de KNAW geeft het nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling (SLO) in een rapport in 2014 aan dat 21^{ste}-eeuwse vaardigheden, zoals digitale geletterdheid, aandacht moeten krijgen in het funderend onderwijs [7]. Een van de vier domeinen van digitale geletterdheid is computational thinking [8]. Hieruit kan geconcludeerd worden dat computational thinking een groter wordende rol in het Nederlands onderwijs gaat spelen.

Hoewel computational thinking in eerste instantie onder het vakgebied informatica wordt geschaard, leent het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs zich ook om leerlingen hierin te onderwijzen. Dat dit het geval is blijkt bijvoorbeeld uit het rapport van een ontwikkelteam van curriculum.nu dat voorstellen heeft geleverd voor de herziening van het curriculum voor het vak wiskunde [9]. Zij bespreken enkele essentiële veranderingen om het curriculum meer te laten aansluiten bij huidige en toekomstige ontwikkelingen. Te denken is hierbij onder andere aan het gebruik van wiskundegereedschappen en technologie, waarbij leerlingen dit verantwoord leren gebruiken en de wiskunde erachter gaan begrijpen. Verder moet er aandacht besteed worden aan wiskundige denk- en werkwijzen, wat met vaardigheden als probleemoplossen, abstraheren, representeren en communiceren, en algoritmisch denken veel overeenkomsten biedt met computational thinking. Bovendien passen onderwijsactiviteiten gericht op computational thinking al in het huidige wiskundecurriculum van havo en vwo gezien deze aansluiten op het thema 'wiskundige denkactiviteiten' dat een uitgangspunt vormt van het examenprogramma [3].

Op dit moment wordt door het Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek nog onderzocht hoe computational thinking concreet geïntegreerd kan worden in het wiskundecurriculum [10], maar zoals Timmer & Tolboom goed verwoorden: “het ligt voor de hand dat wiskundeleraars over een jaar of tien geacht worden hun leerlingen computationeel te prikkelen” [3]. Een onderwerp dat hierbij kan passen is differentiaalvergelijkingen. Ondanks dat differentiaalvergelijkingen in het reguliere curriculum van wiskunde B niet voorkomen, kan hun toepassing: het modelleren van een dynamisch systeem, wel een mogelijkheid tot het ontwikkelen van computational thinking bieden. Om dynamisch modelleren in te zetten bij het oplossen van een probleem is het namelijk essentieel om passende variabelen en relaties te kiezen zodat de computer hiermee uit de voeten kan. Gezien er nog weinig lesmateriaal ontwikkeld is om computational thinking toe te passen in de wiskundeles, willen we met dit onderzoek nagaan of dynamisch modelleren hier toekomstperspectief voor biedt.

1.2 Onderzoeksvraag

In dit ontwerp onderzoek proberen we de volgende onderzoeksvraag te beantwoorden: “Hoe kan een lesmodule over dynamisch modelleren voor vijfdejaars vwo-leerlingen die wiskunde B volgen aanzetten tot het ontwikkelen van computational thinking?”

De volgende deelvragen komen aan bod in het beantwoorden van de hoofdvraag:

Deelvragen onderzoeksfase 1

- Hoe wordt computational thinking gedefinieerd?
- Welk lesmateriaal bestaat er al met betrekking tot computational thinking en welke elementen hieruit kunnen bijdragen aan de ontwikkeling van nieuw materiaal?
- Op welke manier kan dynamisch modelleren onderwezen worden aan vijfdejaars vwo-leerlingen met wiskunde B?

Deelvragen onderzoeksfase 2

- Hoe kan een ontwerp over dynamisch modelleren voor vijfdejaars vwo-leerlingen met wiskunde B eruit zien en hoe kan computational thinking hierin verwerkt worden?
- In hoeverre voldoet het ontwerp aan de opgestelde ontwerpeisen en op welke manier moet het ontwerp aangepast worden?

1.3 Leeswijzer

Dit onderzoek heeft de volgende opbouw. In Hoofdstuk 2 bespreken we literatuur omtrent computational thinking en dynamisch modelleren. We bespreken bestaande lesontwerpen waarin computational thinking aangeleerd wordt en gaan in op verschillende didactische uitgangspunten in het onderwijzen van zowel computational thinking als dynamisch modelleren. Hieruit volgen de eisen waar het ontwerp van onze lesmodule aan moet voldoen, die besproken worden in Hoofdstuk 3. Vervolgens is een lesmodule over dynamisch modelleren ontworpen, waarbij de leerlingen computational thinking ontwikkelen. In Hoofdstuk 4 bespreken we hoe het lesmateriaal tot stand is gekomen en geanalyseerd kan worden met betrekking tot de ontwerpeisen. De resultaten hiervan zullen besproken worden in Hoofdstuk 5. Tot slot vatten we onze bevindingen samen en beantwoorden we de onderzoeksvraag in Hoofdstuk 6.

2. Theoretisch kader

Dit hoofdstuk geeft een theoretisch kader rondom computational thinking en dynamisch modelleren. Er wordt ingegaan op de definitie van computational thinking, hoe dit onderwezen kan worden en hoe verwant werk is opgezet. Daarna wordt besproken wat dynamisch modelleren inhoudt en hoe dit onderwezen kan worden. Vervolgens komen enkele algemene didactische uitgangspunten aan de orde.

2.1 Computational thinking

De term 'computational thinking' kreeg bekendheid na een invloedrijk artikel van Jeannette Wing in 2006, waarin zij betoogde dat computational thinking gezien moet worden als een algemene vaardigheid [6]. Volgens haar hoort computational thinking thuis in het rijtje basisvaardigheden: lezen, schrijven en rekenen, die elk kind aangeleerd krijgt. Historisch gezien kwam de term 'computational thinking' echter voor het eerst naar voren in het werk van Seymour Papert in 1980 [11]. Hoewel de term slechts eenmalig en passant werd gebruikt, is het de moeite waard om ook de visie van Papert op het gebruik van technologie in het onderwijs te bespreken. Papert betoogt dat technologie niet alleen ingezet moet worden als leermiddel en informatiebron, maar dat leerlingen juist moeten leren hiermee om te gaan en dit in te zetten bij het oplossen van verschillende (wiskundige) vraagstukken [11,12]. Hij schrijft dat de computer hierin veel mogelijkheden biedt, maar dat dit pas echt resultaten oplevert als ook de achterliggende concepten toegepast worden [12], waarmee hij doelt op het denkproces voorafgaand aan het programmeren. Juist in deze gedachte zie je de gelijkenis in de visie van Papert op het gebruik van technologie en de visie van Wing op het integreren van computational thinking in het onderwijs.

Papert gaf in zijn werk geen beschrijving bij de term 'computational thinking'. Wing deed dit daarentegen wel en zag computational thinking als een fundamentele houding bij het oplossen van problemen [2]. Ze beschrijft computational thinking als het herformuleren van een schijnbaar moeilijk probleem tot een probleem waarvan bekend is hoe het opgelost moet worden. Hierbij benoemde ze het belang van het kunnen herkennen van complexiteit, recursief denken, het gebruik van abstractie en reductie en het kunnen introduceren van heuristieken. Later formuleerde Wing de volgende definitie bij de term computational thinking: "The thought processes involved in formulating a problem and expressing its solution(s) in such a way that a computer – human or machine – can effectively carry out [1]." Aan de hand van deze beschrijving en definitie zijn velen gaan overdenken welke probleemoplossende vaardigheden onder computational thinking vallen.

Weintrop et al. voegen de verschillende inzichten uit de literatuur samen en ontwerpen aan de hand van vijf stappen een taxonomie bij computational thinking [13]. De eerste stap in hun proces was het analyseren van bestaande literatuur. Het doel hierbij was het in kaart brengen van de vaardigheden en technieken die bij het beoefenen van computational thinking centraal stonden. Uiteindelijk leverde dit een voorlopige set van tien vaardigheden op die behoren tot computational thinking:

1. Om kunnen gaan met problemen met een open einde,
2. Doorzettingsvermogen bij het oplossen van uitdagende problemen,
3. Vertrouwd zijn met complexiteit,
4. Representeren van ideeën op een computationeel zinvolle manier,
5. Grote problemen op kunnen splitsen in kleinere problemen,
6. Abstraheren van aspecten van een probleem,
7. Herformuleren van een probleem in een herkenbaar probleem,
8. Vaststellen van de sterkte-/zwaktepunten van computationele representaties,
9. Genereren van algoritmische oplossingsmethoden,
10. Herkennen en aanpakken van dubbelzinnigheid in algoritmen.

Deze vaardigheden zijn echter vaak breed of niet toegespitst op toepassing in de wiskunde of andere wetenschappelijke kennis. Om deze reden analyseerden Weintrop et al. vervolgens bestaand lesmateriaal ontworpen om computational thinking te introduceren in de les op het voortgezet onderwijs. Op basis van de bovengenoemde vaardigheden en elementen uit het lesmateriaal werd een taxonomie bij computational thinking ontwikkeld. Deze taxonomie wordt weergegeven in Figuur 1.

Data Practices	Modeling & Simulation Practices	Computational Problem Solving Practices	Systems Thinking Practices
Collecting Data	Using Computational Models to Understand a Concept	Preparing Problems for Computational Solutions	Investigating a Complex System as a Whole
Creating Data	Using Computational Models to Find and Test Solutions	Programming	Understanding the Relationships within a System
Manipulating Data	Assessing Computational Models	Choosing Effective Computational Tools	Thinking in Levels
Analyzing Data	Designing Computational Models	Assessing Different Approaches/Solutions to a Problem	Communicating Information about a System
Visualizing Data	Constructing Computational Models	Developing Modular Computational Solutions	Defining Systems and Managing Complexity
		Creating Computational Abstractions	
		Troubleshooting and Debugging	

Figuur 1: Taxonomie van Weintrop et al. bij computational thinking [13].

De taxonomie van Weintrop et al. bestaat uit vier categorieën: data, modelleren en simuleren, computationeel probleemoplossen en systeembdenken [13]. *Data* vormt de kern van veel onderzoek in de bètawetenschap. Vanwege de vele vormen die data aanneemt en de verschillende rollen die het heeft bij het uitvoeren van wetenschappelijk onderzoek, is het cruciaal dat het kunnen omgaan met data behoort tot computational thinking. *Modellen en simulaties* maken wetenschappelijke concepten toegankelijker en spelen hierom een centrale rol in wetenschappelijk onderzoek. Om deze reden is het kunnen maken, verbeteren en gebruiken van modellen ook een belangrijk onderdeel van computational thinking. Dat *computationeel probleemoplossen* tot computational thinking behoort klinkt als vanzelfsprekend. Binnen deze categorie komen, meer dan in de andere categorieën, denkprocessen vanuit de informatica naar voren. Het ontleden van het probleem om hier patronen in te herkennen er belangrijke informatie uit te filteren valt bijvoorbeeld onder deze categorie, evenals het bedenken en uitproberen van verschillende oplossingen om de passende oplossing te automatiseren. De laatste categorie die tot computational thinking behoort is *systeembdenken*. Veel van de vraagstukken waarmee we tegenwoordig worden geconfronteerd zijn complex, omvatten meerdere variabelen en bestaan uit verschillende onderling afhankelijke delen. Om deze reden is het belangrijk om naast de analyse van losse onderdelen ook te richten op het systeem als geheel. Volgens Weintrop et al. vormen deze categorieën tezamen de basis van computational thinking.

Aan ieder van deze categorieën worden praktijken gekoppeld. De praktijken benoemd bij de categorieën bestaan zowel uit vaardigheden als uit elementen van kennis, waarmee Weintrop et al. benadrukken dat computational thinking meer is dan een aan te leren vaardigheid [13]. Het is ook belangrijk om te begrijpen waarom en wanneer bepaalde technieken ingezet kunnen worden, gezien het idee blijft om de meest efficiënte manier een oplossing te vinden. Op deze manier wordt onderwijs met betrekking tot computational thinking gericht op relationeel begrip in plaats van instrumenteel begrip [14], wat didactisch gezien een belangrijk uitgangspunt is in het wiskundeonderwijs. Hier wordt bij de algemene didactische uitgangspunten op teruggekeken.

2.1.1 Didactische uitgangspunten

Het onderwijzen van computational thinking als losstaand vak waarbij leerlingen opdrachten krijgen die los staan van echte problemen of toepassingen is waarschijnlijk geen succes [13]. De wetenschap biedt een zinvolle context en een hele reeks problemen waarbinnen computational thinking kan worden toegepast. Juist de koppeling naar echte problemen en toepassingen kan de interesse van leerlingen wekken en hen motiveren. Motivatie wordt dan ook gezien als een van de vijf dimensies van leren en een bevorderlijke factor hierbij is het ontwikkelen van authentieke leertaken [15]. Om leerlingen aan te zetten tot het ontwikkelen van computational thinking, is het dus belangrijk een zinvolle context te gebruiken. Uit onderzoek naar de integratie van computational thinking in de bètavakken blijken contexten uit de biologie, gevolgd door de natuurkunde, veelgebruikt [16].

Verder zijn er verschillende benaderingen om computational thinking te integreren in de les. Ogegbo & Ramnarain onderscheidden op basis van literatuur de volgende categorieën [16]:

- *Onderzoekend leren* is gericht op actief leren door middel van probleemverkenning, formulering en oplossen, waarbij begrip van het probleem een uitgangspunt is.
- *Project leren* stelt leerlingen in staat om relatief autonoom te werken aan uitdagende vraagstukken, waarbij leerlingen onderzoeken, ontwerpen of probleemoplossen.
- *Ontwerpend leren* is een combinatie van de vorige benaderingen.
- *Spel-gebaseerd leren* is leren aan de hand van spelelementen, zoals het implementeren van doelen. Leerlingen leren dan door de herhaling en aan de hand van gemaakte fouten.
- *Probleemgestuurd leren* is het leren over een specifiek onderwerp, concept of principe aan de hand van open problemen, waar leerlingen in groepen aan werken.
- *Modellerend leren* is leren aan de hand van modellen en modelleren om verschillende componenten rondom een probleem in kaart te brengen en te begrijpen.

Uit het onderzoek van Ogegbo & Ramnarain blijkt modellerend leren, gevolgd door ontwerpend leren, de meestgebruikte benadering is om computational thinking te integreren in de les [16]. Dit is passend, gezien een model de mogelijkheid biedt een probleem te verkennen en formuleren, dusdanig dat de computer de oplossing genereert. Daarentegen kan de conclusie van Ogegbo & Ramnarain licht vertekend zijn, gezien modelleren in de Verenigde Staten erkend wordt als een manier om begrip van wetenschappelijke processen te vergroten [17]. Bij deze benadering wordt dus wel gebruikgemaakt van een computer, daar waar computational thinking ook zonder computer onderwezen kan worden. Verder willen we nog benoemen dat ieder van de bovengenoemde benaderingen leerlinggericht is [16]. Dit geeft voldoende reden om aan te nemen dat het belangrijk is dat leerlingen bij het aanleren van computational thinking zelf, ofwel individueel of in groepen, aan de slag moeten met de desbetreffende stof.

Een concreet voorbeeld van een manier om computational thinking te onderwijzen is het Use-Modify-Create schema. Het Use-Modify-Create schema werd geconceptualiseerd door Lee et al. na het observeren van leerlingen die deelnamen aan verschillende cursussen gericht op het inzetten van computational thinking [18]. Hun schema is gebaseerd op de veronderstelling dat scaffolding [19] de ontwikkeling van computational thinking zal bevorderen, gezien hiermee de juiste ondersteuning wordt geboden in het ontwikkelen van een vaardigheid. Het Use-Modify-Create schema bestaat uit drie fases die leerlingen achter elkaar doorlopen. In eerste instantie gebruiken leerlingen een bestaand model (*use*), waarmee ze bepaalde experimenten uitvoeren of opgaven oplossen. Vervolgens maken ze kleine aanpassingen aan het model (*modify*). Het modificeren van het model vereist begrip van op zijn minst een deel van het model. Door het uitvoeren van deze modificaties ontwikkelen leerlingen nieuwe inzichten en naarmate het proces vordert, ontwikkelen ze een model van zichzelf dat ingezet kan worden bij een andersoortig probleem (*create*). Lee et al. concludeerde dat het bij het doorlopen van deze drie fasen van belang is om een gepast niveau aan uitdaging te creëren zodat de leerlingen gemotiveerd blijven, maar niet afschikken [18]. Dit sluit goed aan bij Vygotsky's theorie over leren; de zone van naaste ontwikkeling, waarin hij aangeeft dat

een kind zich het best kan ontwikkelen door een taak van net boven zijn/haar kunnen uit te voeren [19]. Bij het ontwerpen van wiskundeopgaven wordt echter wel geadviseerd om de leerlingen te laten starten met een instapopgave, zodat zij met vertrouwen beginnen aan de taak [20].

2.1.2 Verwant werk

In de afgelopen jaren hebben enkele andere onderzoekers lesmateriaal ontwikkeld om computational thinking toe te passen in de wiskundeles op het voortgezet onderwijs in Nederland. Hieronder bespreken we het werk en de aanbevelingen van deze onderzoekers.

Branch and Bound

Joris van der Meulen ontwierp een werkmiddag voor vijfdejaars vwo-leerlingen die wiskunde B volgen over het algoritme-ontwerp-paradigma Branch and Bound [21]. Branch and Bound wordt gebruikt voor het efficiënt oplossen van optimalisatieproblemen door complete enumeratie te combineren met het slim wegstrepen van verzamelingen van oplossingen. Tijdens de werkmiddag werken de leerlingen aan algoritmisch denken en daarmee samenhangende concepten als computationele complexiteit en heuristisch redeneren, beiden belangrijke aspecten van computational thinking. Het algoritme van Branch and Bound wordt in stappen aan de leerlingen geïntroduceerd, waarbij ze veel zelf moeten onderzoeken. Hierbij ligt de nadruk op de theorie rondom guided reinvention en relationeel begrip. Deze theorie zal in Hoofdstuk 2.3 uitgebreid besproken worden. Van der Meulen concludeert dat leerlingen relatief eenvoudig een intuïtief begrip van computationele complexiteit kunnen krijgen. Daarnaast merkt Van der Meulen op dat de introductie van heuristieken moeizaam verloopt. Hij geeft aan dat het hierbij belangrijk is een duidelijke uitleg te geven en dit op te bouwen in kleine stappen.

Als we kijken naar de conclusies en aanbevelingen van dit onderzoek, zullen de volgende punten meegenomen worden in de ontwikkeling van ons lesmateriaal:

- De theorie rondom guided reinvention en relationeel begrip bieden mogelijkheden in het onderwijzen van computational thinking.
- Er wordt aanbevolen een controlemoment te verwerken in het lesmateriaal. Dit biedt een docent de mogelijkheid leerlingen waar nodig te corrigeren of op weg te helpen.

K-means-algoritme

Neeft ontwierp een werkmiddag over het K-means-algoritme voor vijfdejaars vwo-leerlingen die wiskunde A volgen [22]. Het K-means-algoritme is een bekend, populair en simpel algoritme dat gebruikt wordt voor clusteranalyse. Tijdens de werkmiddag maken de leerlingen een aanbevelingssysteem voor Netflix met behulp van het K-means-algoritme. Met dit onderwerp wordt ingezet op een realistische context, die goed aansluit op de leefwereld van de leerlingen. In het ontwerp zijn de opdrachten gekoppeld aan de vier categorieën uit de taxonomie van Weintrop et al. die computational thinking definiëren [13]. De werkmiddag is daarmee gericht op data, modelleren & simuleren, computationeel probleemoplossen en systeemdenken. Daarnaast is in het ontwerp rekening gehouden met de ontwikkeling van operationeel begrip naar structureel begrip, ofwel reïficatie [23]. Net als Van der Meulen concludeert Neeft dat het aanleren van computational thinking bij een specifiek onderwerp mogelijk lijkt, hoewel niet alle leerdoelen worden behaald.

Als we kijken naar de conclusies en aanbevelingen van dit onderzoek, zullen de volgende punten meegenomen worden in de ontwikkeling van ons lesmateriaal:

- Het gebruik van een realistische context is binnen dit onderzoek bevallen en is aangeraden.
- Er wordt adviseert een bewuste afweging te maken voor het wel of niet geven van klassikale uitleg. Enerzijds kan dit de leerlingen helpen op gang te komen en vervolgens niet vast te lopen, anderzijds doet dit af aan het onderzoekend karakter van een werkmiddag.
- Ook wordt geadviseerd een werkblad te gebruiken om de opgaven te ondersteunen.

Algoritmisch denken

Den Hartogh ontwierp lesactiviteiten voor verschillende jaarlagen in de bovenbouw van het vwo om een viertal vaardigheden passend bij computational thinking te leren beheersen, namelijk het kunnen lezen van een algoritme, herformuleren van een probleem, opstellen van een algoritme en begrijpen van een algoritme [24]. Daarmee was haar onderzoek gericht op het aanleren van algoritmisch denken. Den Hartogh toont aan dat vaardigheden op het gebied van algoritmisch denken aangeleerd kunnen worden aan de hand van zowel wiskundige als niet-wiskundige contexten. Voor de ontworpen lesactiviteiten worden eerst alledaagse contexten gebruikt die dicht bij de leerlingen staan, zoals het klaarmaken van aardbeien om deze te eten of het maken van huiswerk. Hier is bewust voor gekozen, zodat de leerlingen een gevoel kunnen krijgen bij het concept algoritme. Het gebruik van stroomdiagrammen hierbij lijkt te leiden tot meer begrip. Al adviseert Den Hartogh wel duidelijke instructie te geven voor het gebruik van stroomdiagrammen, gezien een aantal leerlingen hier fundamentele fouten bij maakten. Vervolgens verschuift de focus van de lesactiviteiten naar wiskundige contexten, zoals de methode van Newton-Raphson om de nulpunten van een differentieerbare functie te bepalen. De lesactiviteiten eindigen met programmeren op de grafische rekenmachine of in Excel.

Als we kijken naar de conclusies en aanbevelingen van dit onderzoek, zal het volgende punt meegenomen worden in de ontwikkeling van ons lesmateriaal:

- De lesactiviteiten waren opgebouwd van niet-wiskundig contextrijk naar wiskundig 'contextarm'. Deze opbouw leek leerlingen te helpen bij hun begrip van nieuwe concepten en is aangeraden.

Dynamisch programmeren

Slager ontwierp een werkmiddag voor vwo-leerlingen in de bovenbouw over dynamisch programmeren [25]. Het fundamentele idee van dynamisch programmeren is dat complexe problemen kunnen worden opgelost door ze op te splitsen in kleine, eenvoudige problemen en de oplossingen hiervan te combineren. Deze vaardigheid wordt beschouwd als onderdeel van computational thinking en om deze reden kan dynamisch programmeren gebruikt worden om aspecten van computational thinking aan te leren. Tijdens de werkmiddag maken de leerlingen kennis met dynamisch programmeren aan de hand van een spel, vervolgens passen ze de theorie rondom dynamisch programmeren toe bij simpele kortste-routeproblemen en breiden dit uit naar complexere kortste-routeproblemen waarbij ze Excel gebruiken. De werkmiddag was erop gericht leerlingen te enthousiasmeren over dynamisch programmeren en computational thinking en hun wiskundige kennis en vaardigheden op dit gebied te verbeteren. Slager concludeert dat beide doelen zijn behaald.

Als we kijken naar de conclusies en aanbevelingen van dit onderzoek, zal het volgende punt meegenomen worden in de ontwikkeling van ons lesmateriaal:

- Het wordt aangeraden om een werkmiddag op te delen in drie onderdelen, zodat het als lessenserie gegeven kan worden. Hierbij kan namelijk onderzocht worden in hoeverre de stof beklijft en de leerlingen de concepten van de voorgaande lessen kunnen gebruiken.

Dijkstra's algoritme

Slager suggereert naar aanleiding van zijn eigen onderzoek dat grafentheorie een geschikt onderwerp zou moeten zijn voor het aanleren van aspecten van computational thinking [25]. Naar aanleiding hiervan ontwierp Wisse van der Meulen een werkmiddag voor vijfdejaars vwo-leerlingen die wiskunde B volgen over grafentheorie, of specifiek over Dijkstra's algoritme [26]. Het algoritme van Dijkstra wordt gebruikt om een kortste route van een startpunt naar een eindpunt te berekenen. Tijdens de werkmiddag werken de leerlingen aan opdrachten waarbij concepten als computationele complexiteit en heuristisch redeneren aan bod komen. Leerlingen kregen aan de hand van de

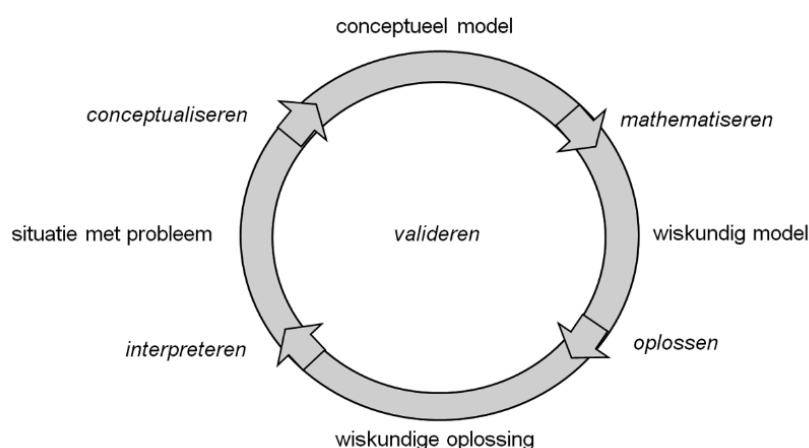
werkdag een intuïtief begrip van computationele complexiteit en konden omschrijven wat een heuristiek is, inclusief de voor- en nadelen. Echter, Van der Meulen geeft aan dat leerlingen dit nog niet goed kunnen extrapoleren naar andere contexten dan kortste-routeproblemen. Binnen de lessenserie is voor het aanleren van bepaalde concepten gebruik gemaakt van guided reinvention en Van der Meulen concludeert dat dit een geschikte didactische aanpak is om computational thinking aan te leren.

Als we kijken naar de conclusies en aanbevelingen van dit onderzoek, zullen de volgende punten meegenomen worden in de ontwikkeling van ons lesmateriaal:

- Het gebruik van guided reinvention lijkt geschikt om computational thinking aan te leren.
- Met behulp van de vormgeving van een lessenserie kan structuur aangebracht worden. Daarnaast kan een aantrekkelijke vormgeving de motivatie van leerlingen verhogen. Er wordt aangeraden aandacht te besteden aan de vormgeving van lesmateriaal.

2.2 Dynamisch modelleren

Voor we ingaan op dynamisch modelleren bespreken we kort de betekenis van de term modelleren binnen de wiskunde. Modelleren behoort tezamen met algebraïseren tot een van de zes zogeheten wiskundige denkactiviteiten, waar binnen het huidige curriculum aandacht aan wordt besteed [28]. Modelleren wordt hierbij omschreven als een praktisch en creatief proces waarbij realistische problemen in wiskundige vorm worden vertaald. Een belangrijk onderdeel hiervan is het algebraïseren, wat omschreven wordt als het mathematiseren van een situatie door een formule of vergelijking op te stellen. Aan de hand van bovenstaande definitie schrijft Drijvers dat modelleren eigenlijk neer komt op van een probleem algebra maken [29]. Daarnaast schrijft Drijvers echter dat in internationale onderzoeksliteratuur modelleren vaak onderverdeeld wordt in (1) het vertalen van het probleem in wiskundige termen, (2) het oplossen van het wiskundige probleem, (3) het terugvertalen van de modeloplossing naar het praktijkprobleem en (4) het nagaan of het oorspronkelijke probleem inderdaad is opgelost. In dit opzicht is modelleren dus een vertaalproces tussen werkelijkheid en wiskunde. Spandaw en Zwaneveld opwierpen op basis hiervan een modelleercyclus [30], zoals weergegeven in Figuur 2. De cyclus bestaat uit verschillende activiteiten die doorlopen worden, waaronder conceptualiseren (vereenvoudigen van de situatie), mathematiseren, oplossen, interpreteren en valideren. Het algebraïseren dat bij de vorige interpretatie centraal stond, is hier onderdeel van het gehele proces en valt onder het mathematiseren.



Figuur 2: Modelleercyclus van Spandaw en Zwaneveld [30].

Een model wordt in de natuurwetenschap gebruikt als hulpmiddel bij het beschrijven, verklaren en voorspellen van natuurverschijnselen. Een dynamisch model beschrijft hoe een bepaalde situatie onder invloed van verschillende factoren verandert in de loop van de tijd en wordt dan ook vaak gebruikt om een voorspelling te doen. Bij dynamisch modelleren bestaat het model uit

differentiaalvergelijkingen. Het gaat hierbij dus om het opstellen en doorrekenen van differentiaalvergelijkingen, die ontstaan door aannames te maken over het verband tussen grootte en groei, ofwel tussen functie en bijbehorende afgeleide functie. Gezien het doorrekenen van een dynamisch model met daarvoor geschikte software gedaan kan worden, ligt de nadruk hierbij in termen van de modelleercyclus meer op het conceptualiseren, mathematiseren en interpreteren dan op het oplossen [29].

2.2.1 Didactische uitgangspunten

Ondanks dat modelleren en algebraïseren een van de wiskundige denkactiviteiten is waar binnen het huidige curriculum aandacht aan wordt besteed, behoort dynamisch modelleren niet tot het reguliere wiskunde B curriculum. Om docenten van verschillende vakken te helpen bij het bedenken en uitvoeren van modelleeronderwijs, is een handreiking van het SLO tot stand gekomen met suggesties en didactische adviezen [31]. Hierin wordt beschreven dat vier modelleerniveaus worden onderscheiden die op elkaar voortbouwen: visueel modelleren, beschrijvend modelleren, causaal modelleren en dynamisch modelleren. Visuele modellen zijn visueel van aard en over het algemeen een vereenvoudigde weergave van de fysieke werkelijkheid. Dit soort modellen kennen leerlingen ogenschijnlijk al en van hieruit zullen zij kennis moeten maken met de volgende modelsoorten. Door actief in te zetten op het ophalen van voorkennis kunnen de leerlingen de nieuwe stof hierop aansluiten [33]. Beschrijvende modellen bestaan uit variabelen met verbanden daartussen, weergegeven in de vorm van tabellen of grafieken. Causale modellen verklaren een proces met behulp van wiskundige functies en formules. Dynamische modellen zijn causale modellen waarin de tijd een belangrijke rol speelt en welke gewoonlijk niet analytisch uitgewerkt kunnen worden. In de stap van visueel modelleren naar de volgende modelleerniveau, wordt de stap van 'model van' naar 'model voor' gemaakt [31]. Dat wil zeggen dat leerlingen een formule bijvoorbeeld niet alleen zien als een model van een specifieke situatie, maar juist als een model dat zich leent voor wiskundig redeneren in iedere andere situatie. De stap van 'model van' naar 'model voor' moet expliciet aandacht aan worden besteed. Treagust et al. ondersteunen deze bevinding [32]. Zij suggereren dat leerlingen ervaring hebben met visuele modellen, maar niet eerder modellen op een kwantitatieve of interpretatieve manier hebben gebruikt. Om de vier modelleerniveaus te doorlopen lijkt het passend leerlingen kennis te laten maken met verschillende modellen die in de maatschappij veel gebruikt worden. Bij visuele en beschrijvende modellen komt dit neer op schaalmodellen en grafieken. Bij causale en dynamische modellen gaat het om een procesbeschrijving en vervolgens verklaring of voorspelling, voorbeelden hiervan zijn een model dat bevolkingsgroei weergeeft en een model dat het weer voorspelt.

In de handreiking van het SLO wordt verder benadrukt dat er in modelleeronderwijs aandacht besteed moet worden aan drie doelen: leren over modellen, leren modelleren en leren van het gemodelleerde [31]. Leren over modellen houdt in dat leerlingen kennis hebben over de rol en functie van modellen in de wetenschap, wat aansluit bij het didactische uitgangspunt uit voorgaande alinea. Leren modelleren houdt in dat leerlingen kennis en vaardigheden hebben om modellen op te stellen, en leren van het gemodelleerde houdt vervolgens in dat leerlingen modelresultaten kunnen koppelen aan de werkelijkheid. Als je dit vergelijkt met andere literatuur betekent dit dat leerlingen de eerdergenoemde modelleercyclus van Spandaw en Zwaneveld moeten leren doorlopen. Modelleeronderwijs zal dus aandacht moeten besteden aan conceptualiseren, mathematiseren, oplossen en interpreteren. Aansluitend hierop, betoogt Savelsbergh dat onderwijs over dynamisch modelleren verschijnselen moet behandelen waarbij leerlingen voldoende beeld hebben van het werkingsmechanisme om dit te kunnen formuleren, en voldoende beeld hebben van het fenomeen om de modeluitkomsten kritisch te kunnen beoordelen [34]. Leerlingen hebben dus voldoende begrijpelijke contexten nodig om hun proces in iedere stap van de modelleercyclus te kunnen valideren.

Om een dynamisch model op te stellen, zullen differentiaalvergelijkingen opgesteld moeten worden die de desbetreffende situatie beschrijven. Differentiaalvergelijkingen komen in het reguliere curriculum van wiskunde B niet voor, wat betekent dat differentiaalvergelijkingen aan de leerlingen geïntroduceerd moeten worden. Bestaand lesmateriaal over dynamisch modelleren doet suggereren om differentiaalvergelijkingen te introduceren aan de hand van differentievergelijkingen [35,36]. Door een differentievergelijking om te schrijven tot een differentiequotiënt en de tijdstap te laten naderen tot nul, wordt een differentiaalvergelijking verkregen. Het volgen van deze stappen kan vijfdejaars vwo-leerlingen met wiskunde B bekend voorkomen, gezien de afgeleide functie op een soortgelijke wijze aan hen is geïntroduceerd [37,38]. Dit maakt dat bovengenoemde introductie van differentiaalvergelijkingen passend lijkt voor dit onderzoek. Zodra een dynamisch model opgesteld is, dient deze opgelost te worden. Traditioneel onderwijs is hierbij gericht op het toepassen van algebraïsche of analytische methoden, waarbij oplossen betekent dat een uitdrukking van de onbekende functie wordt gevonden [39]. Echter geeft dit leerlingen slechts de mogelijkheid om enkele soorten vergelijkingen op te lossen. Het gebruik van grafische of numerieke oplossingsmethoden biedt hierin, tot op zekere hoogte, een uitkomst [39]. Denk hierbij bijvoorbeeld aan het gebruik van een richtingsveld, een grafische oplossing of een generalisatie van toenemend of afnemend gedrag van de oplossing. Onze verwachting is dat grafische oplossingsmethoden leerlingen meer aanspreken dan traditionele oplossingsmethoden.

Bij het vinden van een geschikt modelleerprogramma moet volgens Löhner et al. rekening gehouden worden met hoe de eigenschappen van het programma van invloed zijn op het modelleergedrag van leerlingen [40]. Hierin maken Löhner et al. onderscheid tussen enerzijds een grafische omgeving, waarin leerlingen alleen kwalitatief het verband tussen de variabelen kunnen aangeven, en anderzijds een tekstuele omgeving, waarin leerlingen zelf kwantitatieve formules in kunnen voeren. Löhner et al. concluderen dat leerlingen die met de grafische representatie werken, betere modellen maken, maar vaak weinig systematisch werken en weinig diepgang in hun redeneringen hebben. Daarentegen biedt werken met tekstuele representatie mogelijkheden voor meer diepgang, maar blijkt dat leerlingen in deze omgeving vaak vastlopen en gefrustreerd raken. Een combinatie van beide omgevingen lijkt noodzakelijk.

2.3 Algemene didactische uitgangspunten

Naast de eerdergenoemde onderwerpspecifieke didactische uitgangspunten zijn er enkele algemene didactische uitgangspunten die ten grondslag liggen aan het te ontwerpen lesmateriaal. Deze uitgangspunten komen voort uit eerdere bevindingen in het theoretisch kader.

Het eerste uitgangspunt is gerelateerd aan de theorie van Skemp. Skemp schrijft in zijn werk over twee soorten begrip: instrumenteel en relationeel begrip [14]. Instrumenteel begrip komt neer op het kennen en kunnen uitvoeren van wiskundige regels. Bij relationeel begrip is daarnaast ook weet van waarom deze wiskundige regels toegepast kunnen worden. Bij het ontwerpen van lesmateriaal moet gekozen worden naar welk soort begrip gestreefd wordt, gezien beide soorten begrip voordelen biedt. Instrumenteel begrip is makkelijk te verkrijgen en biedt op korte termijn direct zichtbare resultaten. Relationeel begrip daarentegen laat zich flexibeler inzetten en maakt het onthouden van de kennis en vaardigheden op lange termijn makkelijker. Het te ontwerpen lesmateriaal heeft betrekking op het aanleren van computational thinking. Eerder is al beschreven dat computational thinking gericht is op het ontleden, abstraheren en herformuleren van een probleem om vervolgens algoritmische oplossingsmethoden te genereren. Leerlingen moeten dus beschikken over het vermogen om te begrijpen waarom, en daarmee wanneer, bepaalde technieken ingezet kunnen worden om een probleem op te lossen. Hiervoor lijkt relationeel begrip essentieel. Daarnaast ontwikkelen leerlingen computational thinking met het doel dat zij dit bij hun vervolgonderwijs en carrière in kunnen zetten. Dit maakt dat begrip op lange termijn beschikbaar moet blijven en suggereert dat het lesmateriaal gericht moet zijn op relationeel begrip.

Aansluitend op de theorie van Skemp over begrip, is de theorie van Sfard. Sfard gaat in op de dualiteit van wiskundige concepten, waarbij zij in begrip onderscheid maakt tussen operationele en structurele conceptie [23]. Er is sprake van operationele conceptie als er gerefereerd wordt naar wiskundige concepten als een dynamisch proces. Van structurele conceptie is sprake als er gerefereerd wordt naar wiskundige concepten als een opzichzelfstaand geheel, dat gemanipuleerd kan worden. Operationele en structurele conceptie zijn complementair, al vindt vaak eerst operationele conceptie plaats voor structurele conceptie ontstaat. In de lesmodule zullen de leerlingen kennismaken met differentiaalvergelijkingen. Dit betekent dat het vanuit didactisch oogpunt verstandig is om de introductie hiervan in eerste instantie te richten op operationele conceptie. Sfard geeft aan dat in de ontwikkeling van operationeel begrip naar tevens structureel begrip drie fases te herkennen zijn: verinnerlijking, condensatie en reïficatie. In eerste instantie wordt het proces eigen gemaakt. Vervolgens wordt het proces geleidelijk aan gezien als geheel, waarna het proces in de laatste fase instantaan beschouwd wordt als eenheid. Om een dynamisch systeem te kunnen beschrijven met een differentiaalvergelijking is het essentieel om een differentiaalvergelijking te zien als eenheid. Dit maakt dat het lesmateriaal de leerlingen moet begeleiden in de ontwikkeling van operationeel begrip naar tevens structureel begrip.

Als laatste bespreken we twee aanpakken die in het wiskundeonderwijs toegepast worden om leerlingen te begeleiden. De eerste hiervan is guided reinvention, een aanpak afkomstig van Freudenthal [41]. Freudenthal geeft aan dat je leerlingen niet moet beschouwen als passieve ontvangers van kant-en-klare wiskunde, maar dat ze de kans moeten hebben om zelf wiskunde te ontdekken. Door te onderzoeken krijgen leerlingen meer inzicht in de stof en blijft het geleerde beter hangen. Bij guided reinvention herontdekken leerlingen de wiskunde zelf, maar worden ze aangestuurd door logisch opvolgende vragen van de docent. De tweede aanpak komt voort uit de sociaal-culturele leertheorie van Vygotsky [19]. Deze theorie stelt dat leren gebeurt in de zone van naaste ontwikkeling, het bereik tussen de werkelijke ontwikkeling en de potentiële ontwikkeling onder begeleiding. Deze zone kan bereikt worden door als docent de leerling precies zoveel hulp te bieden dat hij/zij zelf de volgende stap kan zetten. Hierbij is het belangrijk om ook precies te weten wat het ontwikkelniveau van de leerling is, ofwel waar de leerling nu staat. Deze manier van begeleiding wordt scaffolding genoemd. Er wordt verondersteld dat scaffolding de ontwikkeling van computational thinking kan bevorderen [18]. Beide aanpakken geven inzicht in het leren van leerlingen en de manier waarop hierbij ondersteuning geboden kan worden. Ook zijn beide aanpakken te gebruiken bij het ontwikkelen van relationeel begrip en kunnen zij van pas komen bij de ontwikkeling van operationeel begrip naar tevens structureel begrip. Om deze redenen zullen deze aanpakken als uitgangspunt gebruikt worden bij de opzet van het te ontwerpen lesmateriaal en de begeleiding hiervan.

3. Ontwerpeisen

In dit hoofdstuk beschrijven we de ontwerpeisen waaraan het uiteindelijke ontwerp moet voldoen. Deze ontwerpeisen zijn gebaseerd op en vinden aansluiting met de vier categorieën die door Van der Donk en Van Lanen genoemd worden: kenmerken van de doelgroep, kenmerken van de docent, organisatorische kenmerken en pedagogische, (vak)didactische en inhoudelijke kenmerken [42].

Ontwerpeis 1: De lesmodule kan als werkmiddag van 180 minuten gebruikt worden.

Deze ontwerpeis betreft een organisatorisch kenmerk. Wegens logistieke argumenten is ervoor gekozen niet in te gaan op het advies van Slager [25] en de lesmodule als werkmiddag te geven in plaats van als lessenserie. Het doel is dat de lesmodule een duur van 180 minuten heeft. De lesmodule wordt niet opgenomen in een schoolrooster, waardoor deze niet compatibel hoeft te zijn met de duur van de lesuren of de begin- en eindtijden. Echter vinden we het wel belangrijk dat de leerlingen gedurende de werkmiddag een moment van pauze hebben, dus hier moet de nodige tijd voor worden gemaakt. Verder kwam in het verwante werk naar voren dat veel leerlingen niet alle opgaven van de lesmodule binnen de tijd afkregen [21,22,26], wat benadrukt hoe belangrijk het is de lesmodule niet te uitgebreid te maken.

Ontwerpeis 2: De lesmodule heeft een duidelijke structuur en een verzorgde lay-out.

Deze ontwerpeis betreft een didactisch kenmerk. In het verwante werk dat bestudeerd is, kwam naar voren dat de ontworpen materialen amper waren vormgegeven. Dit staat in contrast met de wiskundemethodes die in de les gebruikt worden. Wisse van der Meulen, de onderzoeker van het meest recente werk, heeft hier wel aandacht aan besteed [26]. Hij nam enkele aanbevelingen op het gebied van tekstverwerking aan waarmee de leesbaarheid van leerlingen bevorderd wordt [27]. Deze aanbevelingen nemen wij over voor deze lesmodule. Ook maakte Van der Meulen gebruik van de vormgeving om structuur aan te brengen. Een duidelijke structuur en een verzorgde lay-out kunnen daarbij bevorderlijk zijn voor de motivatie van leerlingen [15]. Dit geeft genoeg reden om bij het ontwerpen van de lesmodule rekening te houden met de vormgeving van het materiaal. De lesmodule moet aan de volgende voorwaarden voldoen:

- De lesmodule bestaat uit verschillende onderdelen, zoals theorie, voorbeelden en opdrachten. Deze onderdelen moeten in de tekst duidelijk gescheiden weergegeven worden.
- Belangrijke begrippen zijn vetgedrukt weergegeven in de tekst.
- De kolombreedte van de tekst moet smaller zijn dan een hele pagina en het liefst zelfs minder dan 70 tekens. De kolombreedte mag overigens niet smaller zijn dan 50 tekens [27].
- Tussen opvolgende alinea's zit een witregel [27].
- Het lettertype heeft 12 als lettergrootte [27].

Ontwerpeis 3: De opgaven uit de lesmodule sluiten aan op het niveau van vijfdejaars vwo-leerlingen die wiskunde B volgen.

Deze ontwerpeis betreft een kenmerk van de doelgroep. De doelgroep van deze lesmodule bestaat uit vijfdejaars vwo-leerlingen die wiskunde B volgen. De lesmodule introduceert een onderwerp dat bij de leerlingen nog niet bekend is; differentiaalvergelijkingen, en richt zich verder op een toepassing hiervan; dynamisch modelleren. Dit is gelijk de reden dat gekozen is voor de huidige doelgroep. Het onderwerp differentiaalvergelijkingen sluit namelijk beter aan bij de leerlijn van wiskunde B dan bij de leerlijn van wiskunde A. Daarnaast wordt het concept afgeleide als voorkennis beschouwd en vijfdejaars leerlingen dit met zekerheid gehad. Gezien de stof nieuw is, is het wel belangrijk om het aan te laten sluiten bij het niveau van de leerlingen. Om deze reden moet de lesmodule aan de volgende voorwaarden voldoen:

- De eerste opgave moet een instapopgave zijn die leerlingen als makkelijk beschouwen, zodat de leerlingen met vertrouwen beginnen aan de lesmodule [20].
- De opgaven moeten de leerlingen uitdagen, maar niet ontmoedigen. Hiermee blijven de leerlingen in de zone van naaste ontwikkeling, wat het leren bevordert [19].

- De leerlingen kunnen in tweetallen werken, wat hen de mogelijkheid biedt elkaar te helpen.
- De opgaven moeten waar nodig ondersteund worden met een werkblad [22].

Ontwerpeis 4: De opgaven komen voort uit een zinvolle context die aansluit bij de belevingswereld van de leerlingen.

Deze ontwerpeis betreft een didactisch kenmerk. Het gebruik van zinvolle contexten die aansluiten bij de belevingswereld van de leerlingen stimuleert leerlingen en is daarmee bevorderlijk voor hun motivatie [15]. Met de lesmodule willen wij leerlingen zo veel mogelijk motiveren voor dynamisch modelleren en daarmee voor het ontwikkelen van computational thinking. Buiten dit wordt geadviseerd computational thinking te onderwijzen aan de hand van echte problemen of toepassingen [13]. Ditzelfde lijkt van toepassing te zijn voor het aanleren van het concept differentiaalvergelijkingen [34]. Om deze redenen wordt bij het ontwerpen van de lesmodule gewerkt vanuit zinvolle context die aansluit bij de belevingswereld van de leerlingen. Aansluitend hierop raadt Den Hartogh aan de lesmodule niet-wiskundig contextrijk te beginnen, om dit vervolgens op te bouwen wat betreft de wiskundige aard [24]. In haar onderzoek bleek dit de leerlingen te helpen bij hun begrip van nieuwe concepten.

Ontwerpeis 5: Om de lesmodule te volgen is beperkte sturing van de docent nodig.

Deze ontwerpeis betreft een kenmerk van de docent. De lesmodule is erop gericht dat leerlingen zelf de inhoudelijke leerdoelen kunnen behalen. Leerlingen moeten hiervoor op hun eigen tempo door opgaven heen kunnen werken. Om deze reden is er bewust voor gekozen geen klassikale elementen aan de les toe te voegen. Om toch op het advies van Joris van der Meulen [21] en Neeft [22] in te gaan, is ervoor gekozen meerdere controlemomenten toe te voegen aan de lesmodule. Tijdens deze controlemomenten krijgen de leerlingen de mogelijkheid hun werk voor te leggen aan de docent en kunnen zowel de leerlingen als de docent vragen hierover stellen. Al met al moet de lesmodule dan voldoen aan de volgende voorwaarden:

- De theorie, voorbeelden en opgaven moeten duidelijk verwoord worden in het lesmateriaal.
- De opbouw van het lesmateriaal geeft leerlingen de mogelijkheid zelf de inhoudelijke leerdoelen te behalen. Hierbij wordt het principe van guided reinvention gebruikt om sturing te geven [41].
- De lesmodule bevat meerdere controlemomenten om waar nodig de leerlingen te corrigeren of op weg te helpen. In overeenstemming met het werk van Wisse van der Meulen noemen we deze momenten checkpoints [26].
- De aanwezige docent past scaffolding toe bij het bieden van hulp [19].

Ontwerpeis 6: De inhoudelijke leerdoelen worden door de leerlingen behaald.

Deze ontwerpeis betreft een inhoudelijk kenmerk. In de lesmodule moeten verschillende aspecten van computational thinking en dynamisch modelleren aan bod komen. Weintrop et al. hebben een taxonomie bij computational thinking ontwikkeld en de praktijken uit deze taxonomie lijken een dieper begrip van computational thinking na te streven [13]. Twee van de categorieën in deze taxonomie, modelleren en simuleren, en computationeel probleemoplossen, sluiten aan bij het onderwerp dynamisch modelleren. Om deze reden hebben we aan de hand van de praktijken uit deze categorieën drie vaardigheden geformuleerd waar we binnen de lesmodule aandacht aan willen besteden. Deze vaardigheden zijn: (1) representeren van ideeën op een computationeel zinvolle manier, (2) ontwerpen en ontwikkeling van een computationeel model en (3) gebruiken van een computationeel model om een situatie te begrijpen.

Buiten dat we aandacht willen besteden aan enkele aspecten van computational thinking, zal de lesmodule erop gericht zijn leerlingen te leren dynamisch modelleren. Om een dynamisch numeriek model te verkrijgen bij een specifieke situatie en deze te gebruiken in het oplossen van een probleem, zullen leerlingen de modelleercyclus van Spandaw en Zwaneveld moeten doorlopen [30].

Dit maakt dat we ervoor hebben gekozen de inhoudelijke leerdoelen bij de lesmodule te baseren op de stappen in de modelleercyclus. De volgende inhoudelijke leerdoelen zijn hierbij opgesteld:

Leerdoel 1: De leerling herkent een probleem dat opgelost kan worden met een dynamisch numeriek model.

De lesmodule zal erop gericht zijn leerlingen te leren dynamisch modelleren. De leerlingen zullen leren een dynamisch numeriek model te verkrijgen bij een specifieke situatie en deze in te zetten bij het oplossen van een probleem. Hierbij is het echter belangrijk dat de leerlingen weten wat een dynamisch numeriek model is en in welke gevallen een dergelijk model ingezet kan worden. Door hierop in te gaan leren de leerlingen een probleem te herkennen dat opgelost kan worden met een dynamisch numeriek model. Daarbij zou je kunnen zeggen dat het herkennen van een probleem dat opgelost kan worden met een dynamisch numeriek model onderdeel is van de modelleercyclus van Spandaw en Zwaneveld, gezien dit van toegevoegde waarde is in het conceptualiseren en mathematiseren van het probleem.

Leerdoel 2: De leerling kan een dynamisch systeem modelleren door passende variabelen en relaties te kiezen.

Zoals gezegd, zullen de leerlingen in het doorlopen van de modelleercyclus van Spandaw en Zwaneveld een bepaalde situatie moeten conceptualiseren en mathematiseren [30]. Dit houdt in dat de leerlingen de situatie moeten analyseren om te bepalen welke variabelen hierin een rol spelen en hoe deze elkaar beïnvloeden. Door passende relaties te kiezen kunnen ze de situatie vertalen tot een wiskundig model, wat bestaat uit een begintoestand en een differentiaalvergelijking. Vervolgens kunnen zij deze informatie invoeren in de computer om een oplossing te vinden. Uiteindelijk hopen we dat de leerlingen zelfstandig een dynamisch numeriek model kunnen inzetten om een vraagstuk op te lossen en dit leerdoel draagt hier dus aan bij. Voorwaardelijk voor het behalen van dit leerdoel is dat de leerlingen ideeën op een computationeel zinvolle manier kunnen representeren en een computationeel model ontwerpen en ontwikkelen. Door aan dit leerdoel te werken, ontwikkelen de leerlingen dus ook computational thinking.

Leerdoel 3: De leerling kan het modelgedrag relateren aan de werkelijkheid.

Zodra leerlingen een dynamisch numeriek model hebben verkregen, is de volgende stap om deze in te zetten om een bepaald probleem op te lossen. Hierbij is het noodzakelijk dat de leerlingen het modelgedrag kunnen relateren aan de werkelijkheid. Dit sluit aan op de laatste stap in de modelleercyclus van Spandaw en Zwaneveld, namelijk het interpreteren van de oplossing met betrekking tot de originele situatie [30]. In zekere zin maken de leerlingen hier gebruik van een computationeel model om een situatie te begrijpen, waarmee ze zich dus ook ontwikkelen in een computational thinking vaardigheid.

4. Methode

In dit hoofdstuk beschrijven we de onderzoeksmethode die is toegepast tijdens dit onderzoek. Eerst bespreken we de onderzoeksopzet. Vervolgens worden de respondenten besproken die mee hebben gewerkt aan het onderzoek. Tot slot komt het proces van dataverzameling aan de orde, waarbij ingegaan wordt op de gebruikte instrumenten en de analysemethode.

4.1 Onderzoeksopzet

De opzet van dit onderzoek is ontwerpgericht. In de eerste onderzoeksfase zijn we begonnen met het verkennen van de probleemsituatie in de vorm van een literatuurstudie. Op basis van dit vooronderzoek zijn ontwerpeisen opgesteld, waarna in de tweede onderzoeksfase de lesmodule dynamisch modelleren is ontworpen. Dit ontwerp is tijdens het proces van ontwerpen meerdere keren voorgelegd aan twee ervaringsdeskundigen op het gebied van wiskundeonderwijs en computational thinking. De hieruit resulterende lesmodule met bijbehorend correctievoorschrift is te vinden in Appendix A.

De lesmodule is hierna nogmaals voorgelegd aan andere ervaringsdeskundigen op het gebied van (wiskunde)onderwijs. Zij hebben feedback gegeven aan de hand van een vooropgesteld feedbackformulier, welke te vinden is in Appendix B. Het doel hiervan was om vast te stellen dat het ontwerp aan de ontwerpeisen voldoet, wat ook betekent dat de leerdoelen behaald kunnen worden. Daarnaast is de lesmodule in uitvoering gebracht in de vorm van een werkochtend op de locatie Kottenpark van Het Stedelijk Lyceum in Enschede. Deze werkochtend was aangeboden aan vijfdejaars vwo-leerlingen ter verrijking van het reguliere curriculum. De uitvoering van de lesmodule is met video opgenomen, welke dient als naslagwerk. Het werk van de leerlingen is nagekeken en geanalyseerd met een toets- en itemanalyse. Ook werden de leerlingen tijdens de werkochtend geobserveerd en na de werkochtend geïnterviewd over hun ervaringen. Hierbij is zowel een observatieschema als een interviewleidraad gebruikt, welke te vinden zijn in respectievelijk Appendix C en Appendix D. De interviews zijn met een recorder opgenomen en de audio is getranscribeerd. De interviews waren semigestructureerd om alle leerlingen in eerste instantie dezelfde vragen te stellen, maar ook de mogelijkheid te bieden om door te vragen en zo extra informatie in te winnen. De verkregen resultaten in deze fase van het onderzoek zijn de feedback van de ervaringsdeskundigen, de observaties, een toets- en itemanalyse van het geleverde werk van de leerlingen en de interviews. Aan de hand hiervan wordt de lesmodule geanalyseerd met betrekking tot de ontwerpeisen.

De onderzoeksopzet is goedgekeurd door de facultaire BMS Ethiek Commissie van de Universiteit Twente naar aanleiding van een ethiekaanvraag onder het nummer 220581. Appendix E.1 bevat de goedgekeurde ethiekaanvraag.

4.2 Respondenten

De respondenten in dit onderzoek zijn de volgende:

1. Ervaringsdeskundigen op het gebied van wiskundeonderwijs en computational thinking: Mark Timmer en Wisse van der Meulen. Zowel Mark Timmer als Wisse van der Meulen zijn eerstegraadsdocent wiskunde en daarnaast vakdidacticus wiskunde aan de UT. Beide hebben veel ervaring met het thema computational thinking.
2. Een expertpanel bestaande uit:
 - a. Een ervaringsdeskundige op het gebied van wiskundeonderwijs: Jos de Lange. Jos de Lange is tweedegraadsdocent wiskunde en heeft al 40 jaar ervaring in dit vak.
 - b. Ervaringsdeskundigen op het gebied van onderwijs: Kay Dijs en Tessa Voerman. Kay Dijs heeft de opleiding Educatie en Communicatie in de Bètawetenschappen richting natuurkunde gevolgd aan de UT en is recent afgestudeerd. Tessa Voerman heeft de

- opleiding Onderwijskunde gevolgd aan de UT en werkt momenteel als onderwijskundig ontwerper.
- c. Een ervaringsdeskundige op het gebied van dynamisch modelleren: Bas Schilder. Bas Schilder is masterstudent Technische Geneeskunde aan de UT. Binnen zijn opleiding wordt veel aandacht aan dynamisch modelleren in MATLAB Simulink.
3. Vijfdejaars vwo-leerlingen die wiskunde B volgen de locatie Kottenpark van Het Stedelijk Lyceum in Enschede en interesse hebben getoond in het volgen van de lesmodule. Vier leerlingen wilden deelnemen aan het onderzoek. Deze leerlingen hebben een informed consent getekend en hun ouder(s)-verzorger(s) hebben een informatiebrief ontvangen om hen hiervan op de hoogte te stellen, welke te vinden is in Appendix E.2.

4.3 Dataverzameling en -analyse

Om data op eenduidige wijze te verzamelen kunnen instrumenten ingezet worden [42]. De volgende instrumenten zijn tijdens dit onderzoek ingezet: een feedbackformulier, de lesmodule, een observatieschema en een interviewleidraad. Hieronder bespreken we met welk doel de gebruikte instrumenten zijn ontworpen en hoe deze bijdragen aan de analyse van de lesmodule, en daarmee aan beantwoording van de onderzoeksvraag. Verder is het goed om te vermelden dat er in het vooronderzoek ook data is verzameld middels een literatuurstudie, maar dat hier geen instrument bij gebruikt is. De literatuurstudie was gericht op het in kaart brengen van het praktijkprobleem en het schetsen van een theoretisch kader. De literatuurstudie heeft geresulteerd in respectievelijk de onderzoeksvraag en de ontwerpeisen. Ook is de beschikbare literatuur geraadpleegd tijdens het ontwerpproces ter ondersteuning en verantwoording van het ontwerp.

Feedbackformulier

Het feedbackformulier is ingezet om de feedback op de lesmodule te structureren. Bij het ontwerpen van het feedbackformulier is gekozen deze op te delen in onderdelen: algemene ontwerpeisen, inhoudelijke leerdoelen en algemene feedback. De ontwerpeisen, die bestaan uit de algemene ontwerpeisen en de inhoudelijke leerdoelen, staan vermeld op het feedbackformulier. Aan de hand hiervan konden de ervaringsdeskundigen van het expertpanel suggesties doen om de lesmodule beter aan te sluiten bij de ontwerpeisen. Bij de algemene feedback kregen zij de ruimte om suggesties te doen op de lesmodule die geen betrekking hebben op de algemene ontwerpeisen en inhoudelijke leerdoelen. Voorbeelden hiervan zijn opmerkingen op wiskundige correctheid of feedback op de opbouw van de lesmodule. Het feedbackformulier is te vinden in Appendix B.

De ingevulde feedbackformulieren van het expertpanel zijn doorlopen. De tekstuele fouten zijn direct gecontroleerd en aangepast in het ontwerp. De verdere opmerkingen en suggesties zijn naast elkaar gelegd en vergeleken. Enkele overeenkomende suggesties konden direct verwerkt worden. De overige opmerkingen en suggesties zijn in overweging genomen en vervolgens verwerkt of niet. Aan de hand van de verkregen feedback is het lesmateriaal verbeterd. Daarbij is nagegaan of de lesmodule voldoende voldoet aan de ontwerpeisen en of deze wiskundig correct is.

Lesmodule

De lesmodule is enerzijds het eindproduct van dit onderzoek, maar anderzijds een instrument om te achterhalen of de leerlingen de inhoudelijke leerdoelen hebben behaald. Om hier inzicht van te krijgen, hebben we de antwoorden van de leerlingen op de opgaven vergeleken met het correctievoorschrift. Op basis van de mate van correctheid, kunnen we aannemen dat zij aan zich hebben ontwikkeld wat betreft de leerdoelen. Appendix A bevat de lesmodule en het correctievoorschrift.

Het nagekeken werk is geanalyseerd met behulp van een toets- en itemanalyse, waarbij we de p' -waardes hebben berekend bij elke opgave [43]. De p' -waarde is een percentage tussen 0 en 100 dat de moeilijkheidsgraad van een opgave en/of de vaardigheid van de leerlingen weergeeft. Gezien de groep leerlingen, bestaande uit twee tweetallen, binnen deze toets- en itemanalyse klein is, kan geen directe conclusie uit de verkregen p' -waardes getrokken worden. Wel zijn wij van mening dat de verkregen p' -waardes alsnog een idee geven in hoeverre de opgaven aansluiten op het niveau van vijfdejaars vwo-leerlingen die wiskunde B volgen. Normaliter worden bij een toets- en itemanalyse ook de r_{it} -waardes bij elke opgave berekend [43]. De r_{it} -waarde geeft dan aan in hoeverre men er met de geselecteerde opgave in geslaagd is te differentiëren tussen leerlingen met een hoge en lage totaalscore. Dit was in ons geval echter niet mogelijk, omdat in de berekening van de r_{it} -waardes gedeeld wordt door de standaarddeviatie [44], en deze bij onze data veelvuldig gelijk is aan nul.

Observatieschema

Het observatieschema is gebruikt om informatie te verzamelen over een aantal van de ontwerpeisen bij de lesmodule. Een van deze eisen stelt dat de lesmodule als werkmiddag van 180 minuten gebruikt kan worden. Hierover wordt informatie verzameld door bij te houden hoe lang de leerlingen bezig zijn met de lesmodule. Verder zijn voor het ontwerp de eisen gesteld dat de lesmodule te volgen is met beperkte sturing van de docent en aansluit op het niveau van vijfdejaars vwo-leerlingen. Om hier informatie over te verzamelen is gekozen voor een gestructureerde en minder gestructureerde observatiemogelijkheid [42]. Tijdens de uitvoering wordt genoteerd hoeveel vragen leerlingen stellen tijdens het doorwerken van het materiaal om een beeld te krijgen van de hoeveelheid sturing die de leerlingen nodig hebben. Hierbij wordt gebruikt gemaakt van een codering om meer inzicht te krijgen in welk onderdeel van het lesmateriaal voor moeilijkheden zorgt. De volgende soorten vragen worden onderscheiden: algemeen, tekstueel en inhoudelijk, waarbij voor de laatste categorie de deelvraag genoteerd wordt waar de vraag over wordt gesteld. Deze codering is gelijk aan de codering die Wisse van der Meulen in zijn onderzoek toevoegde [26]. Daarnaast krijgt de onderzoeker de mogelijkheid losse opmerkingen gericht op de gedachtegangen van de leerlingen op te schrijven om de aansluiting op het niveau van de leerlingen duidelijker in beeld te krijgen. Het uiteindelijke observatieschema is te vinden in Appendix C.1.

Bij de analyse van het observatieschema is eerst gekeken naar hoe lang de leerlingen bezig zijn geweest met de lesmodule. Vervolgens is gekeken naar de hoeveelheid en verschillende soorten vragen die gesteld zijn. De algemene vragen waren niet relevant voor de analyse en de tekstuele vragen waren een indicatie voor het verduidelijken van stukken tekst in het lesmateriaal. Van de inhoudelijke vragen is het aantal vragen per opgave genoteerd. Daarnaast is de minder gestructureerde observatie gebruikt om de aanleiding van de inhoudelijke vragen te achterhalen. Op basis hiervan zijn verdere conclusies getrokken.

Interviewleidraad

De interviewleidraad is ingezet om informatie te verzamelen over de ontwerpeisen en de inhoudelijke leerdoelen bij de lesmodule. De opzet is een semigestructureerd interview. Op advies van Van der Donk en Van Laren is het interview opgedeeld in verschillende delen [42]. Tijdens de inleiding wordt informatie gegeven over het doel en de duur van het interview. Daarbij wordt toestemming gevraagd aan de leerling om het interview op te nemen. Vervolgens worden een aantal vragen gesteld met als doel informatie te verzamelen over de eerste vijf ontwerpeisen. Hierna volgt een kort pauzemoment, zodat de leerling de gelegenheid krijgt het eerste deel van het interview te overdenken. In het volgende deel van het interview staan de inhoudelijke leerdoelen centraal. Samen met het vorige deel vormt dit de kern van het interview. Tijdens het slot van het interview wordt de leerling bedankt voor het gesprek. Appendix D.1 bevat de interviewleidraad.

Het afnemen van de interviews is verlopen volgens de structuur van de interviewleidraad. Wel is er ruimte geweest om door te vragen op enkele antwoorden, passend bij een semigestructureerd interview. De leerlingen zijn in de tweetallen geïnterviewd zoals deze al eerder gevormd waren voor de uitvoering van de lesmodule. Dit leverde twee interviews op. Aan de hand van de audio-opname zijn de interviews getranscribeerd. Gezien de interviews semigestructureerd waren, was het vervolgens makkelijk om de belangrijkste opmerkingen per ontwerpeis en leerdoel te verzamelen. Dat wil zeggen dat de transcripties handmatig geanalyseerd zijn. De belangrijkste opmerkingen per ontwerpeis en leerdoel zijn vervolgens gebruikt in de resultaten.

5. Resultaten

In dit hoofdstuk beschrijven we de resultaten. Dit houdt in dat we het ontwerp toelichten, de feedback hierop van het expertpanel bespreken, en de resultaten van de uitvoering en de semigestructureerde interviews inzetten om het ontwerp verder te analyseren.

5.1 Ontwerp

Het ontwerp bestaat uit een lesmodule en een bijbehorend correctievoorschrift. De lesmodule en het correctievoorschrift zijn te vinden in Appendix A. Hieronder geven we een overzicht van de opzet van de lesmodule, waarbij tevens wordt besproken hoe de opgaven zich verhouden tot de leerdoelen en aspecten van computational thinking. Vervolgens geven we een gedetailleerde verantwoording bij het ontwerp.

5.1.1 Overzicht

De lesmodule is opgedeeld in drie delen: een introductie op het onderwerp, uitleg en opgaven bij de verschillende fases die je doorloopt om een dynamisch numeriek model te ontwikkelen bij een beschreven situatie, en vervolgens enkele vraagstukken waarbij een dynamisch numeriek model ingezet moet worden om deze op te lossen. In de lesmodule zijn de drie delen respectievelijk 'Introductie', 'Modelleren' en 'Vraagstukken' genoemd.

In het eerste deel van de lesmodule wordt aandacht besteed aan het begrip model en wordt uitgelegd wat een numeriek en vervolgens dynamisch numeriek model is. Tevens wordt ingehaakt op het nut hiervan. Tijdens dit deel van de lesmodule werken de leerlingen voornamelijk aan leerdoel 1: de leerling herkent een probleem dat opgelost kan worden met een dynamisch numeriek model. De leerlingen zullen hier de rest van de lesmodule aan blijven werken, doordat zij bij verschillende situaties een dynamisch numeriek model zullen maken en hier een probleem mee oplossen. Dit maakt dat herkenning van een ander dergelijk probleem makkelijker wordt. In het tweede deel van de lesmodule leren de leerlingen een dynamisch numeriek model te maken bij een concrete situatie. Hiermee werken de leerlingen vooral aan leerdoel 2: de leerling kan een dynamisch systeem modelleren door passende variabelen en relaties te kiezen. Zodra de leerlingen het dynamisch numeriek model hebben gemaakt en hier de oplossing bij hebben gevonden, wordt hen gevraagd deze af te leggen tegen de werkelijkheid. Hiermee besteden de leerlingen ook aandacht aan leerdoel 3: de leerling kan het modelgedrag relateren aan de werkelijkheid. In het laatste deel van de lesmodule zullen de leerlingen, zoals eerder benoemt, zelf enkele vraagstukken oplossen waarbij een dynamisch numeriek model ingezet wordt. In dit deel van de lesmodule werken de leerlingen dus aan alle drie de leerdoelen. In Tabel 1 wordt weergegeven bij welke opgaven de leerlingen aan welke leerdoelen werken.

Tabel 1: Verwerking van leerdoelen in het ontwerp van de lesmodule.

Leerdoelen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Herkennen probleem dat opgelost kan worden met een dynamisch numeriek model	x	x	x	x	x				x					x	x
Dynamisch systeem modelleren door passende variabelen en relaties te kiezen					x	x	x		x	x	x	x	x	x	x
Modelgedrag relateren aan de werkelijkheid								x				x	x	x	x

Naast dat de lesmodule erop gericht is dat de leerlingen de leerdoelen behalen, is deze er ook op gericht leerlingen te ondersteunen in het ontwikkelen van vaardigheden die behoren tot computational thinking [2,13]. Bij de ontwerpeisen is vastgesteld dat er aandacht besteed wordt aan de volgende vaardigheden: (1) representeren van ideeën op een computationeel zinvolle manier, (2) ontwerpen en ontwikkeling van een computationeel model en (3) gebruiken van een computationeel model om een situatie te begrijpen. Ieder van deze vaardigheden is verwerkt in de lesmodule. In Tabel 2 wordt weergegeven bij welke opgaven de leerlingen aan welke vaardigheden werken. In aanvulling hierop zijn er nog drie aspecten van computational thinking die kort aan bod komen in de lesmodule, maar waar de leerlingen niet expliciet aan zullen werken. Deze aspecten zijn: abstraheren van aspecten van een probleem, genereren van algoritmische oplossingsmethoden en inzicht in computationele complexiteit. De koppeling tussen de opgaven en de verschillende vaardigheden en aspecten die behoren tot computational thinking wordt bij de verantwoording van het ontwerp werden uitgelicht.

Tabel 2: Verwerking van vaardigheden die behoren tot computational thinking in het ontwerp van de lesmodule.

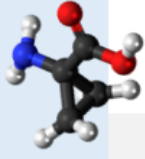
Computational thinking	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Representeren van ideeën op een computationeel zinvolle manier					x	x	x		x				x	x	x
Ontwerpen en ontwikkeling van een computationeel model										x	x	x	x	x	x
Gebruiken van een computationeel model om een situatie te begrijpen								x					x	x	x

5.1.2 Verantwoording

Hieronder bespreken we het ontwerp van de lesmodule. We gaan in op zowel de tekst als de opgaven door telkens een stuk van het ontwerp van de lesmodule af te beelden en hier vervolgens toelichting op te geven.

Introductie

In dit deel van de lesmodule maken de leerlingen kennis met verschillende soorten modellen. Aansluitend op het advies van SLO komen voorbeelden van visuele modellen, beschrijvende modellen, causale modellen en dynamische modellen aan bod [31]. Dit zodat de leerlingen een omvangrijke kijk krijgen op het begrip 'model'.



Deel 1: Introductie

Het woord model zal iedereen bekend zijn en waarschijnlijk ben je modellen al vaker tegengekomen. In ieder gebouw dat je bezoekt wordt bijvoorbeeld een plattegrond afgebeeld waarop de vluchtroutes staan aangegeven die je moet gebruiken in geval van nood. Heb je met jouw familie Madurodam in Den Haag al eens bezocht? Of is jou het schaalmodel van een molecuul wel eens opgevallen in het scheikundelokaal? Dit zijn alle drie voorbeelden van modellen.

Opgave 1
Noem nog een voorbeeld van een model en beschrijf waarvoor dit model wordt gebruikt.

In de natuurwetenschap worden modellen gebruikt om situaties te beschrijven, te verklaren of te voorspellen. Zo kunnen verschillende typen kustverdediging, zoals een duin, een golfbreker of een stormvloedkering, getest worden in een watertank met gesimuleerde golven. Aan de hand hiervan kan geconcludeerd worden of de kustverdediging voldoende bescherming zal bieden. Een ander voorbeeld is dat de veiligheid van auto's wordt onderzocht door botsproeven uit te voeren. Door auto's met inzittende poppen te laten botsen tegen verschillende obstakels of betonnen blokken, kan nagegaan worden hoe het met mensen zou gaan als die in de auto zitten.



Om de aandacht van de leerlingen tot het onderwerp te trekken, beginnen we de lesmodule met een aantal voorbeelden van modellen zoals de leerlingen die in het dagelijks leven tegenkomen. We proberen de voorbeelden aan te laten sluiten op de beleavingswereld van de leerlingen, passend bij ontwerpeis 4. Vervolgens vragen we de leerlingen bij opgave 1 zelf een voorbeeld te noemen en te beschrijven waarvoor het model in dit voorbeeld gebruikt wordt. Aan de hand van deze opgave laten we de leerlingen actief nadenken over de voorkennis die zij bij het begrip 'model' hebben. Het ophalen van voorkennis maakt dat nieuwe stof hierop kan aansluiten en dit vergemakkelijkt het verwerkings- en opslagproces in de hersenen. De leerlingen zullen de nieuwe stof beter kunnen plaatsen en hiermee effectief leren [33]. Verder is er gekozen om de lesmodule met een eenvoudige opgave te beginnen zodat de leerlingen niet ontmoedigd raken en met vertrouwen aan de lesmodule beginnen [20]. Dit maakt opgave 1 een instapopgave en hiermee sluiten we aan op ontwerpeis 3.

Zoals gezegd hebben de leerlingen bij de opgave nagedacht over het nut van het een model in hun voorbeeld. In de tekst onder de opgave bespreken we vervolgens waarvoor modellen in de natuurwetenschappen worden gebruikt. Door de leerlingen mee te nemen in het nut van modellen, willen we enige betekenis geven aan de leerstof in deze lesmodule. Als de leerlingen de lesmodule als waardevol en relevant ervaren, zal dit ten goede komen aan hun motivatie [15]. Daarnaast maken we hiermee ook een start aan leerdoel 1: de leerling herkent een probleem dat opgelost kan worden met een dynamisch numeriek model. Het is belangrijk dat een leerling begrijpt wat het nut is van een model om te herkennen welke problemen zij hiermee kunnen oplossen.

Tot slot geven we hier vast een toelichting op de opmaak van de lesmodule. In overeenkomst met ontwerpeis 2 is geprobeerd structuur aan te brengen in de lesmodule. De opgaven zijn genummerd en worden onderscheiden van de theorie en voorbeelden doordat deze grijs gekaderd zijn. Onderscheid tussen de theorie en voorbeelden is niet erg duidelijk gemaakt, gezien dit in de lesmodule verweven is in elkaar. Daarbij zullen belangrijke woorden bij een eerste vermelding dikgedrukt zijn om hier kort een accent op te leggen. Om verder te voldoen aan ontwerpeis 2 is de kolombreedte van de pagina tussen de 50 en 70 tekens, worden er witregels tussen opvolgende alinea's gebruikt en is heeft het lettertype 12 als lettergrootte.

Fysiek vs. Numeriek

De voorgenoemde voorbeelden zijn **fysieke modellen**, maar tegenwoordig worden er steeds vaker ook **numerieke modellen** gebruikt. Met behulp van een numeriek model kan een simulatie op de computer uitgevoerd worden. Hiervoor moeten de (wiskundige) relaties tussen de variabelen wel bekend zijn. Een voorbeeld hiervan is het model dat het RIVM gebruikte om het verwachte aantal coronabesmettingen te bepalen op basis van het huidige aantal geïnfecteerden en het reproductiegetal.

Opgave 2

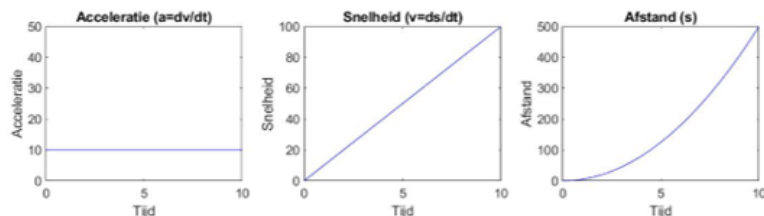
Beargumenteer waarom het handig/voordelig is een simulatie op de computer uit te voeren in plaats van een fysieke test.

Om verder toe te spitsen op het type model waar we in deze lesmodule aandacht aan besteden, maken we hier onderscheid tussen fysieke en numerieke modellen. De eerdergenoemde voorbeelden van fysieke modellen en in deze tekst volgt een voorbeeld van een numeriek model. Het gebruik van voorbeelden bij het onderwijzen van wiskundige begrippen helpt leerlingen bij het afbakenen van de definities van de begrippen [45]. In opgave 2 worden de leerlingen vervolgens gevraagd na te denken wat de voordelen van een numeriek model ten opzichte van een fysiek model zijn. Door hier correct antwoord op te geven laten de leerlingen zien dat zij het verschil tussen fysieke en numerieke modellen weten en begrijpen waarom numerieke modellen nuttig zijn. Hiermee besteden we weer aandacht aan de relevantie van deze lesmodule en vervolgen we de start aan leerdoel 1. Doordat de leerlingen begrijpen wat het nut van een numeriek model, zullen zij gemakkelijker herkennen welke problemen hiermee opgelost kunnen worden.

Statisch vs. Dynamisch

Er zijn twee soorten numerieke modellen waar we onderscheid tussen maken: **statische modellen** en **dynamische modellen**. Een model is statisch als de waarden van de variabelen in het model niet afhangen van de tijd en een model is dynamisch als ten minste een variabele in het model afhankelijk is van de tijd.

Om het verschil tussen beide soorten modellen te illustreren gebruiken we een natuurkundig voorbeeld. Uit de tweede wet van Newton blijkt: als er een constante kracht wordt uitgeoefend op een voorwerp met een zekere massa, dan krijgt dit voorwerp een constante versnelling. De versnelling kan dan berekend worden door de formule $F = m \cdot a$ om te schrijven, wat de versnelling afhankelijk maakt van de kracht en de massa. Deze beide variabelen zijn onafhankelijk van de tijd, dus een model van de versnelling is statisch. Echter, als gevolg van de constante versnelling, zal de snelheid van het voorwerp lineair toenemen met de tijd en de afstand die het voorwerp aflegt kwadratisch toenemen met de tijd. Een model van de snelheid of de afgelegde afstand zijn dus afhankelijk van de tijd en daarmee dynamisch. Hieronder worden de versnelling, snelheid en afgelegde afstand weergegeven ten opzichte van de tijd.



Het soort numerieke model waar we verder op in willen gaan is het dynamisch numeriek model. Hier wordt onderscheid gemaakt tussen statische en dynamische numerieke modellen. Het is belangrijk dat leerlingen het verschil hiertussen kennen, zodat zij in het vervolg weten voor welke situaties een dynamisch numeriek model gemaakt kan worden. Dit sluit wederom aan bij leerdoel 1. Naast dat de

definities voor een statisch en dynamisch model gegeven worden, wordt weer een voorbeeld gegeven waarin het verschil tussen beide begrippen duidelijk wordt. Dit voorbeeld is natuurkundig van aard. Echter, de leerlingen zijn het wiskundige verband tussen acceleratie, snelheid en afstand eerder tegengekomen bij het vak wiskunde op school [37,38]. Om deze reden zijn wij van mening dat ook leerlingen die geen natuurkunde volgen op school, zich een voorstelling kunnen doen bij de situatie. Daarnaast is ervoor gekozen de bijbehorende grafieken toe te voegen om een visueel beeld te geven bij het voorbeeld.

Opgave 3
 Gaat het in de volgende situaties om een statisch of dynamisch model?
 Leg uit waarom dit het geval is.

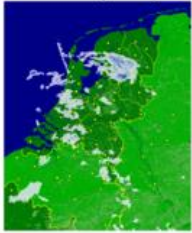
- Een model dat de positie van de Aarde ten opzichte van Mars weergeeft.
- Een model om kosten te berekenen voor de bouw van een huis.
- Een model dat de oppervlakte van een cirkel berekent aan de hand van de uitdrukking πr^2 .
- Een model van de verwachte temperatuur in Rotterdam.

Zoals eerder gezegd worden modellen gebruikt om de wereld om ons heen te beschrijven. In veel van deze gevallen is het reëel en voor de hand liggend dat de situatie, beschreven door het model, over de tijd verandert. Dit maakt dat dynamische modellen vaker gebruikt worden dan statische modellen.

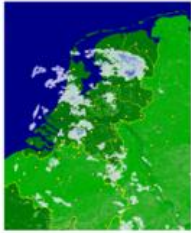
Wiskundige kennis wordt over het algemeen beter gevormd als de leerling zelf actief is in het leerproces [45]. Om deze reden is ervoor gekozen de leerlingen bij opgave 3 een aantal voorbeelden te laten classificeren. Doordat de leerlingen verschillende situaties classificeren werken zij aan leerdoel 1: de leerling herkent een probleem dat opgelost kan worden met een dynamisch numeriek model.

Dynamisch numeriek model
 Een dynamisch numeriek model beschrijft hoe een bepaalde situatie onder invloed van verschillende factoren verandert in de loop van de tijd en wordt dan ook vaak gebruikt om een voorspelling te doen.

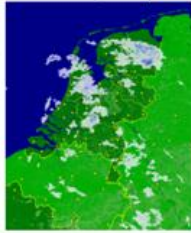
10:30 (-1 uur)



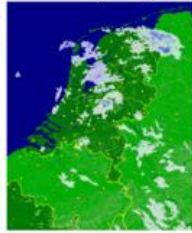
11:30



12:30 (+1 uur)



13:30 (+2 uur)



Een voorbeeld van een dynamisch numeriek model dat door veel Nederlanders wordt gebruikt is Buienradar. Buienradar geeft weer waar in Nederland neerslag verwacht wordt. Hierboven worden enkele recente beelden van Buienradar weergegeven. Op de beelden is eerst de neerslag van het afgelopen uur zichtbaar en vervolgens de prognose voor de komende drie uur.

Eerder hebben we al behandeld waar een model in de natuurwetenschap voor gebruikt kan worden, maar hebben we dit niet gespecificeerd voor een dynamisch numeriek model. Dat doen we hier. Door specifiek in te gaan op de functie van een dynamisch numeriek model, proberen we een start te maken in de stap van 'model van' naar 'model voor'. Een dynamisch numeriek model is een model geschikt voor het doen van voorspellingen. Deze stap kost tijd en vindt alleen plaats als er expliciet aandacht gevestigd wordt op de wiskundige relaties die binnen een dergelijk model een rol spelen. In het volgende deel van de lesmodule zullen we hier expliciet aandacht aan besteden. Voor we

hieraan beginnen, behandelen we nog een herkenbaar voorbeeld van een dynamisch numeriek model dat gebruikt wordt om voorspellingen te doen, namelijk Buienradar. Dit voorbeeld is wederom passend bij ontwerp 4, want iedere leerling heeft wel eens een app gebruikt die de neerslag voorspeld.

	Opgave 4 Bekijk de beelden van het afgelopen uur en de beelden van de 3-uursverwachting online (https://www.buienradar.nl/). Mocht er geen regen verwacht worden, bekijk dan de beelden hierboven nogmaals. a. Om te berekenen waar een regenbui zich op een bepaald moment bevindt, moet je weten waar de regenbui zich vlak daarvoor bevond. Hoe zie je dit gegeven terug in de beelden van het afgelopen uur en de 3-uursverwachting? b. Welk verschil zie je tussen de beelden van het afgelopen uur en de 3-uursverwachting? c. De buien van de 3-uursverwachting bewegen over het scherm. Welke informatie gebruikt de computer om deze voorspelling te doen?
	Dit voorbeeld illustreert de manier waarop binnen een dynamisch numeriek model gerekend wordt. Allereerst moet er een begintoestand bekend zijn. Daarnaast is bekend welke factoren invloed hebben op de verandering van de situatie. Op basis van de invloed van de factoren kan vervolgens bepaald worden hoe de begintoestand verandert.
	Checkpoint: Laat bovenstaande opgave aftekenen bij de docent om verder te mogen naar de volgende pagina.

Het voorbeeld Buienradar wordt verder uitgewerkt in opgave 4. De leerlingen worden gevraagd Buienradar-beelden van het afgelopen uur te vergelijken met beelden van de 3-uursverwachting. Aan de hand van sturende vragen krijgen ze een idee van de manier waarop binnen een dynamisch numeriek model wordt gerekend. Ze zien dat de buien in de beelden van de 3-uursverwachting voortvloeien uit de buien in de beelden van het afgelopen uur, wat de leerlingen doet realiseren dat er een begintoestand bekend moet zijn om een voorspelling te kunnen doen. Daarnaast zien ze dat er in de beelden van het afgelopen uur buien ontstaan of oplossen, wat de werkelijke situatie op dat moment weergeeft. Echter is dit niet het geval in de beelden van de 3-uursverwachting, daarin veranderen de buien slechts van vorm. Hierbij denken de leerlingen na over de verschillende factoren die de vorm en richting van de buien in de voorspelling kunnen beïnvloeden. Tezamen geeft dit het instinctieve beeld dat een voorspelling gemaakt wordt op basis van een begintoestand en het effect van factoren die hier invloed op uitoefenen. Onze verwachting is dat dit beeld de leerlingen in het verdere verloop van de lesmodule zal helpen.

Om te controleren of de leerlingen dit instinctieve beeld hebben gevormd, is besloten hier een checkpoint toe te voegen. Dit betekent dat de leerlingen de opdracht moeten laten aftekenen bij de docent. Dit geeft de docent de mogelijkheid om met de leerlingen in discussie te gaan over hun redeneringen en hen zo nodig bij te sturen. Het gebruik van checkpoint is een aspect van ontwerp 5.

Als laatste is het goed om te noemen dat we deze lesmodule op advies van Den Hartogh niet-wiskundig contextrijk zijn begonnen, om dit hierna op te bouwen wat betreft de wiskundige aard [24]. De voorbeelden en de bijbehorende opgaven in dit deel van de lesmodule zijn niet-wiskundig contextrijk. In het volgende deel van de lesmodule zal de wiskundige aarde van de opgaven opbouwen. De opgaven zullen niet contextarm worden, gezien de koppeling van wiskunde aan 'echte' problemen en toepassingen de interesse van leerlingen kan wekken en hen kan motiveren [15]. Daarnaast zal computational thinking een toenemend rol spelen in de rest van de lesmodule en

wordt geadviseerd dit te onderwijzen aan de hand van zinvolle wetenschappelijke contexten [13,16]. Met het bovenstaande sluiten we aan op ontwerpeis 4.

Modelleren

Nu de leerlingen weten wat een dynamisch numeriek model is, gaan we ons verdiepen in de verschillende fases die je doorloopt bij het ontwikkelen van een dergelijk model. Hiermee werken de leerlingen in dit deel van de lesmodule voornamelijk aan leerdoel 2: de leerling kan een dynamisch systeem modelleren door passende variabelen en relaties te kiezen.

	Deel 2: Modelleren
	We weten wat een dynamisch numeriek model is. In dit deel van de lesmodule leren we een dynamisch numeriek model te maken.
	Conceptueel en wiskundig model Ondertussen hebben we een idee van hoe er gerekend wordt binnen een dynamisch numeriek model. Aan de hand van een volgend voorbeeld zullen we dit concreet maken. In een zwembad zit 1000 m^3 water en de chloorconcentratie is op een gegeven moment 1 liter/m^3 . Deze concentratie is te hoog en daarom wordt het water verversd. We gaan een model maken van de chloorconcentratie in het zwembad over de tijd.



De leerlingen hebben vanuit het vorige deel van de lesmodule al een gevoel gekregen bij hoe er binnen een dynamisch numeriek model gerekend wordt. Dit gaan we aan de hand van een nieuw voorbeeld concretiseren. Dit voorbeeld is zo gekozen dat de leerlingen zich een voorstelling kunnen doen van de situatie.

	Opgave 5 Allereerst beginnen we met het analyseren van de situatie. We brengen de verschillende variabelen en relaties hiertussen in kaart om een opzet voor het model te maken. - Het model heeft een toestandsvariabele. Dit is de afhankelijke variabele in het model, de variabele waarvan we het verloop in de tijd willen bepalen. Wat is in dit geval de toestandsvariabele? - De toestandsvariabele heeft een begintoestand vanwaar het model zal beginnen met rekenen. Wat is de begintoestand? - Doordat het water in het zwembad verversd wordt, verandert de chloorconcentratie over tijd. Neemt de chloorconcentratie hierdoor toe of af? - Waarom is het verder nog belangrijk om de hoeveelheid water die in het zwembad past als constante mee te nemen in het model?
	Voor het gemak nemen we aan dat er elk uur 60 m^3 water wordt vervangen door 60 m^3 schoon water en dat dit in één moment gebeurt. Dat wil zeggen dat we inbeelden dat iemand in een keer met een enorme emmer 60 m^3 water uit het zwembad haalt en hier 60 m^3 schoon water voor teruggeeft. Dit nemen we aan zodat we weten hoeveel chloor er precies verdwijnt in een uur. Telkens als het schone water in het zwembad wordt gegooid, mengt het schone water zich direct met het badwater, waardoor de concentratie in het zwembad overal steeds gelijk is.
	Door de situatie versimpeld weer te geven hebben we een conceptueel model van de chloorconcentratie in het zwembad gemaakt. Dit is een denkmodel dat ons handvatten geeft om te gaan rekenen. Zonder de gedane aannames was dit niet gelukt.

Om een model te ontwikkelen bij de eerdergenoemde situatie, doorlopen we met de leerlingen de modelleercyclus van Spandaw en Zwaneveld [30]. De eerste stap hierbij is het conceptualiseren van

de situatie. Dit is grotendeels al gedaan bij de beschrijving van de situatie, maar we leren de leerlingen aan dat ze dit zelf altijd ook zullen moeten doen om een volledig beeld bij de situatie te krijgen. We vragen hen de toestandsvariabele en begintoestand te formuleren en vervolgens aan te geven of de toestandsvariabele zal toenemen of afnemen als gevolg van de verandering. Dit laatste geeft de leerlingen een beeld om op terug te vallen zodra zij de oplossing van het model hebben gevonden.

In de tekst onder opgave 5 wordt beschreven dat we de situatie versimpelen om hier vervolgens gemakkelijk mee te kunnen rekenen. Bij een eerder ontwerp werden de leerlingen direct gevraagd aan de situatie te rekenen, zonder uit te leggen welke aannames zij hiervoor moesten doen. Echter gezien het versimpelen van de situatie cruciaal is om hier op dit moment mee te kunnen rekenen, is op advies van de ervaringsdeskundigen besloten hier expliciet aandacht aan te besteden. Het is overigens sowieso goed dit expliciet te benoemen om de leerlingen erop te wijzen dat dit een handige vaardigheid is die in de wiskunde vaak gebruikt wordt. Het versimpelen van de situatie valt daarnaast onder computational thinking, gezien het geschaard kan worden onder het abstraheren van aspecten van een probleem en het representeren van ideeën op een computationeel zinvolle manier [13]. Dit maakt dat de leerlingen ook kort aandacht besteden aan computational thinking.

	Opgave 6 Met behulp van ons conceptueel model kunnen we berekenen wat de chloorconcentratie na het eerste en na het tweede uur zal zijn. - Hoeveel chloor verdwijnt er in het eerste uur uit het water? En wat wordt de chloorconcentratie na een uur? - Hoeveel chloor verdwijnt er in het tweede uur uit het water? En wat wordt de chloorconcentratie na twee uur? - Hoeveel procent vermindert de chloorconcentratie ieder uur?
--	--

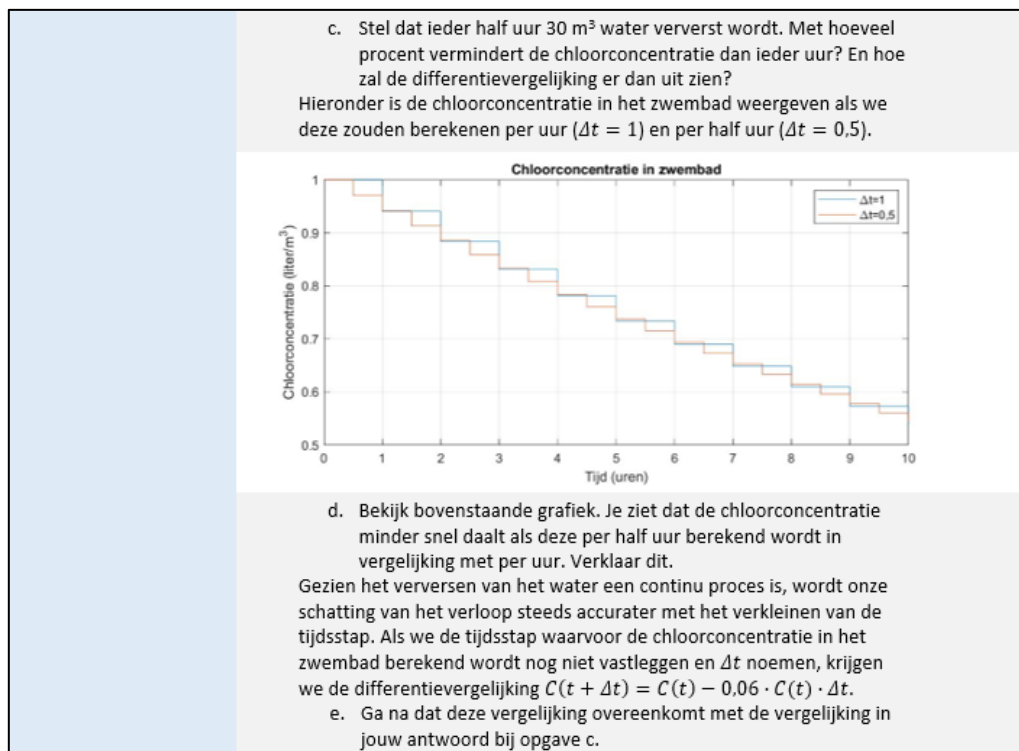
Met behulp van het conceptueel model kunnen we rekenen aan de situatie. Bij opgave 6 worden de leerlingen gevraagd dit te doen. Doordat de leerlingen tweemaal een stap vooruit rekenen, beginnen ze met het genereren van een algoritmische oplossingsmethode, wat valt onder computational thinking [13]. Daarbij doen de leerlingen de ontdekking dat de chloorconcentratie onder de huidige aannames ieder uur procentueel afneemt.

	Opgave 7 Aan de hand van deze ontdekking kunnen we een wiskundig model bij ons conceptueel model maken. Dat wil zeggen dat we een vertaalslag maken naar wiskundige uitdrukkingen waarmee we de chloorconcentratie in het zwembad kunnen bepalen. - De vergelijking $C(t + 1) = C(t) - 0,06 \cdot C(t)$, met het gegeven dat $C(0) = 1$, beschrijft de chloorconcentratie in het zwembad. Licht dit toe. Deze vergelijking noemen we een differentievergelijking. Bij een differentievergelijking is een volgende functiewaarde uitgedrukt in een huidige functiewaarde. - Bij het opstellen van het conceptueel model hebben we aangenomen dat het water in het zwembad ieder uur in één moment ververst werd. Is dit in de werkelijkheid ook het geval? Licht jouw antwoord toe. Bovenstaande differentievergelijking hanteert de tijdsstap $\Delta t = 1$, gezien de chloorconcentratie per uur berekend wordt. Om het wiskundig model beter overeen te laten komen met de werkelijkheid, moet de tijdsstap verkleind worden.
--	--

Bij een conceptueel model kunnen we een wiskundig model maken door te mathematiseren [30]. Gegeven dat de chloorconcentratie ieder uur procentueel afneemt, is een differentievergelijking opgesteld. De leerlingen hoeven deze vergelijking niet zelf op te stellen, omdat dit waarschijnlijk de

eerste keer is dat zij met een dergelijke vergelijking te maken hebben. Wel schatten wij in dat de leerlingen voldoende inzicht hebben om zelf te achterhalen dat deze vergelijking passend is. Door dit te achterhalen werken leerlingen aan de computational thinking vaardigheid om een algoritmische oplossingsmethode te genereren [13]. Met het behandelen van de differentievergelijking hebben we een eerste model bij de situatie. Echter blijkt deze niet passend bij de werkelijkheid. Bij opgave 7b bedenken de leerlingen waarom dit niet het geval is. Het is belangrijk dat de leerlingen hier over nadenken, zodat zij begrijpen waarom we hierna onze aannames zullen bijstellen. Met deze vraag richten we ons dus op relationeel begrip [14].

Er is overwogen om deze opgave te starten met de exponentiele vergelijking $C(t) = 0,94^t$ en deze te koppelen aan de vergelijking $C(t + 1) = 0,94 \cdot C(t)$ en vervolgens aan de vergelijking $C(t + 1) = C(t) - 0,06 \cdot C(t)$, omdat op deze manier aangesloten kan worden bij de voorkennis van de leerlingen. Echter geeft dit later in de lesmodule een misleidend beeld. In het vervolg van de opgave zal namelijk de stap van discreet naar continu, ofwel van differentievergelijking naar differentiaalvergelijking, gemaakt worden. Vervolgens wordt de oplossing van de differentiaalvergelijking onderzocht, en deze oplossing is niet gelijk aan bovengenoemde exponentiele vergelijking. Om deze reden is besloten hier geen koppeling te maken met de voorkennis van de leerlingen.



We stellen onze aannames bij door een tijdsstap van een half uur te nemen in plaats van een tijdsstap van een uur. Op basis hiervan worden de leerlingen gevraagd een nieuwe differentievergelijking op te stellen. Om de leerlingen een idee te geven van wat er gebeurt als de tijdsstap in de differentievergelijking kleiner wordt gemaakt, is de figuur toegevoegd. De leerlingen krijgen de opdracht om beide grafieken te vergelijken en te verklaren waarom de grafiek bij de kleinere tijdsstap minder snel daalt. We voegen hier vervolgens aan toe dat de schatting van het verloop van de grafiek steeds accurater wordt met het verkleinen van de tijdsstap. Om de tijdsstap straks kleiner te kunnen maken veralgemeniseren we de differentievergelijking en vragen we de leerlingen na te gaan dat deze veralgemenisering correct is.

Bovenstaande deelopgaven maakten in een eerder ontwerp geen deel uit van de lesmodule. In dat ontwerp vonden de leerlingen de differentievergelijking bij de versimpelde situatie en werd vastgesteld dat dit dichterbij de werkelijkheid gebracht kan worden door de tijdsstap te verkleinen. Naar aanleiding van deze conclusie werd direct besloten de tijdsstap tot nul te laten naderen. Echter hebben de leerlingen dan geen inzicht in welk effect het verkleinen van de tijdsstap heeft. Gezien de lesmodule gericht is op relationeel begrip, is op advies van de ervaringsdeskundigen besloten het ontwerp hierop bij te stellen en bovenstaande deelopgaven toe te voegen. Op basis van de feedback van de ervaringsdeskundigen heeft dit deel van de lesmodule dus meer diepgang gekregen.

Om de concentratie in het zwembad zo correct mogelijk te weergeven, zal Δt naar nul moeten naderen. Als we dit doen, krijgen we een nieuwe vergelijking die de chloorconcentratie in het zwembad het meest accuraat beschrijft. Eerst schrijven we de differentievergelijking om naar een differentiaalquotiënt.

f. Schrijf over en vul aan $C(t + \Delta t) - C(t) = \dots$

g. Ga ervanuit dat Δt niet gelijk is aan nul. Deel dan beide zijden van de vergelijking door Δt en schrijf het resultaat op.

Zoals gezegd is Δt niet gelijk is aan nul, maar om de chloorconcentratie in het zwembad op ieder moment in de tijd te kunnen bepalen, zal Δt naar nul naderen. Passen we dit toe, dan volgt hieruit dat

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{\Delta t} = -0,06 \cdot C(t).$$

h. Welke wiskundige functie herkennen we aan de linkerzijde van deze vergelijking?

De vergelijking $C'(t) = -0,06 \cdot C(t)$ noemen we een **differentiaalvergelijking**. Bij een differentiaalvergelijking is de afgeleide functie uitgedrukt in zijn originele functie. In dit geval geldt dus dat de snelheid (liter/m³/uur) waarmee de chloorconcentratie daalt op ieder moment $0,06 \cdot C(t)$ is. Naarmate de chloorconcentratie verder daalt, zal de snelheid afnemen. Dit zullen we bij de volgende opgave terugzien.

We hebben nu de wiskundige beschrijving van ons dynamisch numerieke model gevonden. Het wiskundig model bestaat uit de begintoestand van de toestandsvariabele en de gevonden differentiaalvergelijking.

Checkpoint: Laat bovenstaande opgave aftekenen bij de docent om verder te mogen naar de volgende pagina.

Het vervolg van opgave 7 is erop gericht dat de leerlingen zelf tot de differentiaalvergelijking komen door de differentievergelijking om te schrijven tot een differentiequotiënt en de tijdsstap te laten naderen tot nul. Door de leerlingen deze stappen zelf te laten zetten, proberen we relationeel begrip te creëren bij hoe men tot een differentiaalvergelijking komt [14]. Ook leggen we vervolgens uit wat een differentiaalvergelijking inhoudt, waar we bij opgave 8 weer op terug zullen komen. Om te controleren of de leerlingen de juiste (denk)stappen hebben gezet in het verkrijgen van de differentiaalvergelijking, is besloten hier een checkpoint toe te voegen.

In dit deel van de opgave, maar eigenlijk ook bij de voorgaande delen van opgave 7, komt het principe van guided reinvention naar voren [41]. Door sturende, logisch opvolgende vragen te stellen zetten we de leerlingen aan tot het actief zelf ontdekken van de differentie- en differentiaalvergelijking in deze situatie en het verband hiertussen. Het gebruik van het principe van guided reinvention sluit aan bij ontwerppeis 5.

Verder zijn de leerlingen aan de hand van opgave 7 bezig met het representeren van de situatie op een computationeel zinvolle manier, wat wil zeggen dat de leerlingen zich bezighouden met computational thinking [13]. In de tekst onder de opgave wordt dan ook aangegeven dat de leerlingen de benodigde informatie voor het wiskundig model hebben geformuleerd.

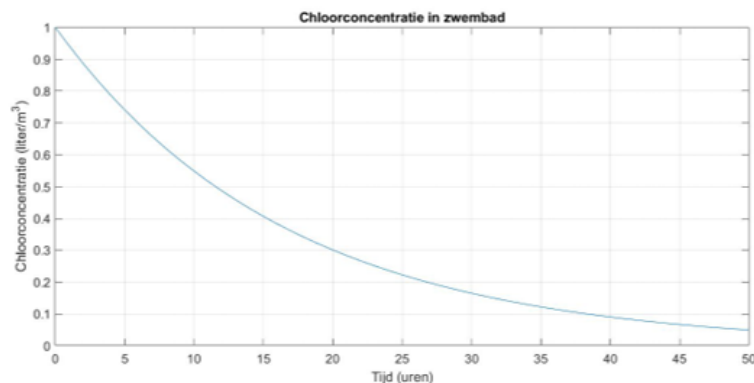
Nu we het wiskundig model hebben geformuleerd, kunnen de oplossing bepalen. De oplossing is het verloop van de chloorconcentratie in het zwembad over tijd, ofwel de grafiek van $C(t)$. Het bepalen van de oplossing van het wiskundig model is met de hand niet eenvoudig. Daarnaast is de oplossing vaak een speciale exponentiële functie die pas later dit jaar bij wiskunde aan bod komt. Om deze redenen zullen we de computer inzetten om de oplossing te vinden.

De derde stap van de modelleercyclus van Spandaw en Zwaneveld is het oplossen van het model [30]. In bovenstaande tekst wordt uitgelegd wat we verstaan onder de oplossing van het dynamisch numeriek model. We geven aan dat het vinden van een oplossing met de hand niet eenvoudig is en pleiten voor het gebruik van de computer. De reden dat we in de lesmodule niet ingaan op het traditioneel oplossen van een differentiaalvergelijking, is dat de doelgroep van deze lesmodule nog niet bekend is met de betekenis en eigenschappen van de functie $f(x) = e^x$. Daarnaast is deze lesmodule gericht op dynamisch modelleren en biedt dit de mogelijkheid grafische oplossingen te verkrijgen [39], wat het traditioneel oplossen van een differentiaalvergelijking voor deze lesmodule overbodig maakt.

Opgave 8

De oplossing van de differentiaalvergelijking $C'(t) = -0,06 \cdot C(t)$, gegeven dat $C(0) = 1$, is een verloop van $C(t)$ dat voor elke waarde van t voldoet aan de differentiaalvergelijking. Hieronder wordt de oplossing weergegeven.

- De snelheid waarmee de chloorconcentratie daalt (liter/m³/uur) neemt af naarmate de concentratie zelf daalt. Hoe zien we dit terug in de differentiaalvergelijking? En hoe zien we dit terug in de grafiek?
- Controleer voor twee punten op de grafiek of deze voldoen aan de differentiaalvergelijking. Schrijf de stappen op die je maakt. Tip: maak hierbij gebruik van een raaklijn.
- Nu blijkt dat het zwembad een chloorconcentratie van 0.1 liter/m³ moet hebben. Hoelang duurt het ongeveer tot deze concentratie is bereikt?
- Dit duurt de eigenaar van het zwembad te lang. Noem een manier waarop het proces versneld kan worden.



Gezien het volgende onderdeel van de lesmodule uitgebreid aandacht besteedt aan het vinden van de oplossing bij een wiskundig model, slaan we deze stap hier over. In plaats daarvan wordt een grafische oplossing van het wiskundig model gegeven. Om de leerlingen te laten zien dat dit

inderdaad de oplossing van het wiskundig model is, vragen we hen bij opgave 8a een verband te leggen tussen de differentiaalvergelijking en de grafiek. Eerder hadden we al aangegeven dat de snelheid waarmee de chloorconcentratie daalt afneemt naarmate de concentratie zelf daalt. De leerlingen staan hier nogmaals bij stil door na te gaan hoe we dit terugzien in de vergelijking en in de grafiek. Vervolgens worden de leerlingen gevraagd om voor twee punten op de grafiek te controleren of daar de differentiaalvergelijking voldoet. We laten de leerlingen deze controle uitvoeren, zodat zij een idee krijgen van wat de oplossing bij een differentiaalvergelijking inhoudt zonder gebruik te maken van het functievoorschrift van deze oplossing. Bij de controle moeten de leerlingen onder andere de afgeleiden in twee gekozen punten bepalen. Hierdoor halen de leerlingen actief hun voorkennis over de afgeleide op. Dit is gunstig, gezien zij deze kennis in een volgend deel van de lesmodule bij opgave 10 nodig hebben. De laatste twee deelopgaven zijn gericht op het interpreteren van de oplossing, de laatste stap in de modelleercyclus van Spandaw en Zwaneveld [30]. Met deze opgave werken de leerlingen dus aan leerdoel 3: de leerling kan het modelgedrag relateren aan de werkelijkheid. Daar waar de leerlingen het modelgedrag vergelijken met de werkelijk, gebruiken zij een computationeel model om een situatie te begrijpen. Hiermee ontwikkelen de leerlingen zich in computationeel thinking [13].

	Je hebt nu bij een situatie in de werkelijkheid een conceptueel model gemaakt, waarin je alle relevante variabelen en relaties hebt vastgesteld. Vervolgens heb je hierbij een wiskundig model gemaakt en als laatste heb je de oplossing van dit model geanalyseerd. Al met al heb je bijna alle stappen doorlopen om een dynamisch numeriek model te maken. De enige stap die nog gemaakt moet worden is het maken van een computermodel bij het wiskundig model om hier de oplossing mee te vinden.
--	--

Aan de hand van de afgelopen opgaven hebben de leerlingen de modelleercyclus van Spandaw en Zwaneveld, op het maken van het computermodel na, volledig doorlopen. De verschillende stappen van de modelleercyclus zullen in de rest van de lesmodule blijven terugkomen.

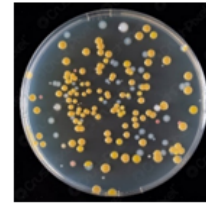
Verder is het goed om te noemen dat in de afgelopen opgaven de overgang van operationele conceptie naar structurele conceptie heeft plaatsgevonden. Nadat de situatie bij de chloorconcentratie in het zwembad werd voorgelegd, werd van de leerlingen verwacht hier vanuit een operationele conceptie naar te kijken. Dit past bij de bevinding van Sfard dat operationele conceptie vaak eerder plaats vindt dan structurele conceptie [23]. Bij opgave 6 hebben de leerlingen gerekend aan het proces en bij opgave 7a werd het proces als wiskundige vergelijking weergegeven. Door de leerlingen te vragen de differentievergelijking te verklaren, hebben zij enige ruimte om het proces eigen te maken. Vervolgens wordt er vrij snel van de leerlingen verwacht dat zij een meer structurele conceptie van de situatie krijgen, gezien de differentievergelijking wordt gemanipuleerd en een differentiaalvergelijking wordt verkregen. Zodra vervolgens bij opgave 8 de oplossing van de differentiaalvergelijking wordt besproken, is het van belang dat de leerlingen een differentiaalvergelijking als eenheid zien en dus structureel begrip hiervan hebben. Sfard beschrijft dat leerlingen begeleid moeten worden in de ontwikkeling van operationeel begrip naar tevens structureel begrip [23]. Deze begeleiding proberen we te bieden door middel van sturende vragen en het feit dat de vragen gericht zijn op relationeel begrip, waardoor de overgang hopelijk logisch en soepel aanvoelt.

Bij ontwerp 1 is vastgesteld dat het belangrijk is dat de leerlingen gedurende de lesmodule een moment van pauze moeten hebben. De verwachting is dat de leerlingen tot ongeveer hier de lesmodule door hebben gewerkt zodra de pauze ingelast wordt.

Computermodel

Aan de hand van een volgend voorbeeld herhalen we de stappen bij het maken van een dynamisch numeriek model en maken we kennis met het maken van een computermodel.

Een aantal laboranten observeren een celcultuur waarop bacteriën worden gekweekt. Gezien de omstandigheden gunstig zijn, zal het aantal bacteriën groeien. De kolonie bestaat momenteel uit 330 bacteriën. De laboranten vragen jou een model te maken van de groei van het aantal bacteriën B op de celcultuur van de komende dagen. Uit eerder onderzoek weten de laboranten dat de groeisnelheid toeneemt naarmate de kolonie groter wordt. Als er bijvoorbeeld 100 bacteriën zijn, dan neemt het aantal toe met 35 bacteriën per dag. En als er 200 bacteriën zijn, dan neemt het aantal toe met 70 bacteriën per dag. Doordat het aantal bacteriën continu groeit, verandert de groeisnelheid (aantal/dag) dus voortdurend volgens de relatie $0,35 \cdot B(t)$.



Opgave 9

Allereerst beginnen we weer met het analyseren van de situatie, om hier een conceptueel en vervolgens wiskundig model bij op te stellen.

- a. Formuleer het conceptueel model:
 - Wat is de toestandsvariabele van het model?
 - Wat is de begintoestand van de toestandsvariabele?
 - Onder invloed van welke factor verandert de situatie? Zorg dat deze factor voor toename of afname van de toestandsvariabele?
- b. Formuleer het wiskundig model, bestaande uit de bijbehorende differentiaalvergelijking en de begintoestand.

De volgende stap is het maken van een computermodel bij het wiskundig model.

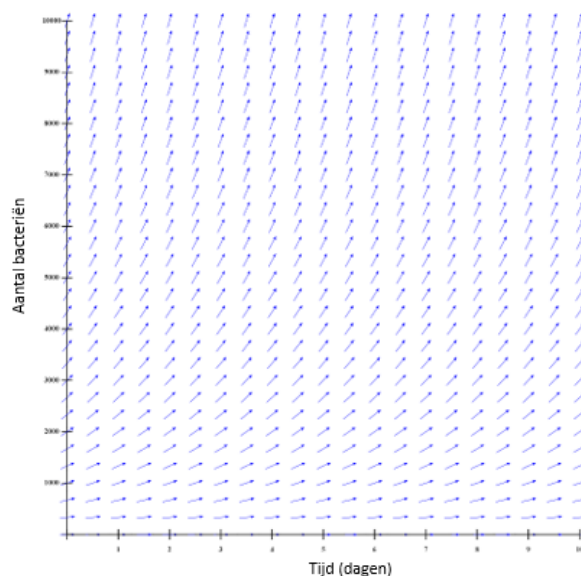
In dit deel van de lesmodule gaan we meer aandacht besteden aan het ontwikkelen van een computermodel. Hiervoor beginnen we met een nieuw voorbeeld, dat wederom zo gekozen is dat de leerlingen zich een voorstelling kunnen doen van de situatie. In de beschrijving van de situatie wordt duidelijk ingegaan op de relatie tussen de groeisnelheid van het aantal bacteriën en de koloniegrootte. In een eerder ontwerp werd hier niet op ingegaan, maar werd beschreven dat de kolonie dagelijks met een bepaald percentage groeide. De ervaringsdeskundigen merkten destijds op dat deze tekstuele beschrijving, net als die van volgende voorbeelden, niet overeenkwam met de differentiaalvergelijking die vervolgens opgesteld werd. In dit eerdere ontwerp stelden de leerlingen namelijk een differentievergelijking op bij de situatie, en hieruit konden zij net als eerder de differentiaalvergelijking afleiden. De differentievergelijking sluit dan aan bij situatieschets, maar de differentiaalvergelijking niet. Als we zeggen dat de kolonie dagelijks met een bepaald percentage groeit, spreken we namelijk over een bepaalde procentuele groei per dag, wat beschreven kan worden met een exponentiële formule van de vorm $N = b \cdot g^t$ of met een passende differentievergelijking. Bij het afleiden van de differentiaalvergelijking uit de differentievergelijking spreken we echter over een bepaalde procentuele groei per moment. Om de situatieschets aan te laten sluiten op de differentiaalvergelijking moeten we daarom spreken van een groeiend aantal bacteriën waarvan de groeisnelheid ieder moment gelijk is aan een bepaald percentage van de koloniegrootte. Daarbij is het ook niet relevant om eerst een differentievergelijking te bepalen, maar kan gelijk de differentiaalvergelijking bepaald worden. In het huidige ontwerp is dit om deze reden aangepast, zowel bij deze als volgende situatieschetsen. Bij de eerdere situatieschets over de dalende chloorconcentratie in het zwembad kon de differentiaalvergelijking wel bepaald worden aan de hand van de differentievergelijking, omdat we de situatie expliciet hebben versimpeld bij het bepalen van de differentievergelijking en dit herstellen met het afleiden van de differentiaalvergelijking.

Bij de nieuwe situatie gaan we een dynamisch numeriek model maken. Zoals eerder gezegd, herhalen we de te doorlopen stappen van de modelleercyclus van Spandaw en Zwaneveld. In opgave 9 formuleren de leerlingen het conceptuele en wiskundig model, waarbij de leerlingen de situatie representeren op een computationeel zinvolle manier. De leerlingen trainen deze vaardigheid en zijn dus bezig met het ontwikkelen van computational thinking [13]. De ondersteuning die de leerlingen hierbij krijgen is verminderd ten opzichte van de vorige keer dat de leerlingen hier mee bezig waren. De leerlingen moeten nu zelf de differentiaalvergelijking opstellen aan de hand van de beschrijving van de situatie. In de beschrijving wordt duidelijk aangegeven wat de groeisnelheid van de kolonie bacteriën op ieder moment is. Gezien de leerlingen het verband tussen snelheid en de afgeleide kennen en hier eerder in een opgave ook aandacht aan hebben besteed, verwachten wij dat de leerlingen zelf de differentiaalvergelijking op kunnen stellen. Hiermee proberen we de leerlingen aan te zetten actief hun geleerde kennis en vaardigheden op te halen, om het leerproces te bevorderen [33,45]. Mocht het nodig zijn, dan kunnen zij altijd terugbladeren naar de eerdere opgaven die ze gemaakt hebben om daar voorbeelden in terug te zoeken.

Opgave 10

Het computermodel volgt een algoritme dat gebaseerd is op het wiskundig model om een schatting te geven van het aantal bacteriën op de celcultuur over de tijd. Met behulp van de differentiaalvergelijking kan de computer voor ieder mogelijke waarde de bijbehorende afgeleide bepalen. De computer krijgt dan een soort overzicht als de afbeelding hieronder. De pijlen geven aan in welke richting een grafiek zou lopen mocht deze door dit punt gaan.

- Stel we bekijken het punt (3; 1000). Wat is de afgeleide in dit punt mocht de grafiek hier doorheen lopen? Tip: gebruik de differentiaalvergelijking.
 - De richting van de pijl in het punt (3; 1000) komt overeen met de afgeleide in dit punt. Controleer dit.
 - Ga voor nog een punt (met een ander aantal bacteriën) na dat de pijl juist is getekend. Schrijf de stappen op die je maakt.
- Aan de hand van dit overzicht kan een verwacht verloop van het aantal bacteriën op de celcultuur over de tijd gegeven worden.
- Welk gegeven is nodig om de oplossing te tekenen?
 - Teken hoe jij denkt dat de oplossing van ons model eruit zal zien op het werkblad.



Checkpoint: Laat bovenstaande opgave aftekenen bij de docent om verder te mogen naar de volgende pagina.

De leerlingen zijn er inmiddels van op de hoogte dat de computer het wiskundig model nodig heeft om een oplossing te vinden, maar hoe de computer dit doet is nog niet besproken. Bij een eerder ontwerp werd hier ook geen aandacht aan besteedt. Ervaringsdeskundigen merkte echter op dat dit wel bevorderlijk zou zijn voor het begrip. Naar aanleiding hiervan is besloten hier expliciet aandacht aan te besteden met behulp van opgave 10.

Lozada et al. geven aan dat grafische oplossingsmethoden steeds meer geïntegreerd worden in onderwijs over differentiaalvergelijkingen [39], en deze kunnen leerlingen een goed beeld geven bij hoe een computer de oplossing van een wiskundig model vindt. Om deze reden is besloten een richtingsveld te gebruiken om te demonstreren hoe de computer het wiskundig model oplost. De leerlingen worden bij opgave 10 gevraagd om voor twee pijlen te controleren of deze juist zijn getekend, zodat zij begrijpen hoe de computer de richting van deze pijlen vaststelt. Hierbij hebben ze hun voorkennis over de afgeleide nogmaals nodig. Bij opgave 10c zullen de leerlingen zich moeten realiseren dat de oplossing niet gevonden kan worden zonder de begintoestand. Dit is al meermaals naar voren gekomen bij eerdere opgaven, wat ons doet verwachten dat deze realisatie snel zal komen. Uiteindelijk mogen de leerlingen zelf de oplossing tekenen door te starten bij de begintoestand en de richting van de pijlen te volgen. Met deze opdracht proberen we relationeel begrip te creëren bij hoe een wiskundig model opgelost wordt [14]. Daarnaast krijgen leerlingen aan de hand van deze opdracht een intuïtief beeld bij de computationele complexiteit in het oplossen van een wiskundig model, wat onderdeel is van computational thinking [2,13].

We vinden het belangrijk dat de leerlingen begrijpen hoe de computer een wiskundig model oplost, gezien we de computer hier in het vervolg van de lesmodule meermaals voor inzetten. Om te controleren of de leerlingen hier een goed beeld bij hebben, is besloten hier een checkpoint toe te voegen.

De computer kan dus aan de hand van de begintoestand en de afgeleide in het bijbehorende punt een volgende waarde bepalen. Het programma dat we hiervoor gaan gebruiken is MATLAB Simulink. In Simulink programmeer je een model als een blokdiagram.



Het belangrijkste blok in een blokdiagram bij een dynamisch numeriek model is het **integrator-blok**. Hiernaast is afgebeeld hoe het integrator-blok er in Simulink uit ziet. Het blok heeft een ingang en een uitgang, welke afgebeeld zijn als pijlen. De informatie die het blok binnenkomt of uit gaat, noemen we respectievelijk de input en de output. De input van het integrator-blok is de afgeleide functie en de output van het blok is de originele functie. Binnen dit blok berekent de computer op soortgelijke manier als hierboven de oplossing van het model. Zoals gezegd moet hiervoor de begintoestand bekend zijn. De begintoestand kan je invullen in het integrator-blok. Daarnaast heeft de computer de differentiaalvergelijking nodig. Deze geven we mee aan het integrator-blok door het blokdiagram verder af te maken, wat we nu zullen doen.

Nu de leerlingen een idee hebben bij hoe de computer het wiskundig model oplost, gaan we hen aanleren hoe we het wiskundig model kunnen programmeren. Zoals besproken in het theoretisch kader, moet de ideale modelleromgeving zowel grafische als tekstuele representatie van een model kunnen weergeven [40]. MATLAB Simulink biedt deze combinatie, gezien het een grafische representatie van een model geeft waarin kwantitatieve formules verwerkt kunnen worden. Vijfdejaars vwo-leerlingen met wiskunde B zijn naar alle waarschijnlijkheid niet eerder met MATLAB Simulink in aanraking gekomen, maar onze verwachting is dat dit geen probleem vormt en leerlingen met gerichte ondersteuning met dit modellerprogramma uit de voeten kunnen. Om deze redenen is besloten MATLAB Simulink als modelleromgeving te gebruiken.

In Simulink programmeer je een model als een blokdiagram en in bovenstaande tekst wordt het eerste blok geïntroduceerd. In totaliteit zullen er vijf blokken worden geïntroduceerd. Van ieder van deze blokken zal de functie gegeven of achterhaald worden. Het integrator-blok bespreken we hier expliciet, gezien de functie van dit blok niet intuïtief is, zoals het bij de andere wel zal zijn. Om de leerlingen toch enige vorm van vastigheid te geven, koppelen we de functie van het integrator-blok aan de grafische oplossingsmethode zoals behandeld bij opgave 10. De rest van het blokdiagram wordt hierna rond het integrator-blok opgesteld.

Opgave 11
 Hieronder wordt het blokdiagram weergegeven van het wiskundig model voor het aantal bacteriën op de celcultuur. De input van het integrator-blok is $B'(t)$ en de output van het integrator-blok is $B(t)$. De differentiaalvergelijking $B'(t) = 0.35 \cdot B(t)$ is dusdanig verwerkt in het blokdiagram, dat het integrator-blok de juiste informatie krijgt.

- De output van het integrator-blok is tevens de input van een volgend blok. Hoe zie je dit in het model?
- Het **product-blok** heeft meerdere ingangen en een uitgang en wordt gekenmerkt door het kruis dat erop staat. Wat is de functie van dit blok?
- Wat is de output van het product-blok?
- De output van het product-blok is weer de input van het integrator-blok. Ga na dat deze input gelijk is aan de afgeleide functie $B'(t)$.

Het blok dat we nog niet specifiek hebben benoemd is het **constant-blok**. Dit blok heeft alleen een uitgang, en de output is het getal dat je in het constant-blok opgeeft.

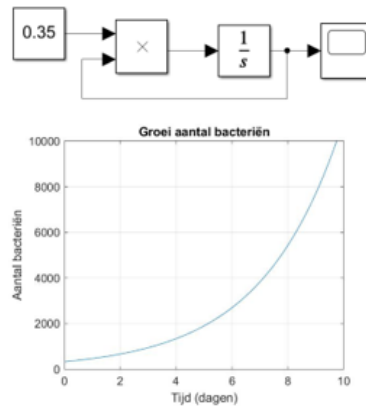
```

graph LR
    C[0.35] --> P[×]
    P -- "B'(t)" --> I[1/s]
    I -- "B(t)" --> P
    
```

Bij opgave 11 wordt het blokdiagram weergegeven van het wiskundig model bij het huidige voorbeeld. De differentiaalvergelijking bij het voorbeeld wordt herhaald en de leerlingen worden nogmaals gewezen op de functie van het integrator-blok. Zoals gezegd, is de rest van het blokdiagram rond het integrator-blok opgesteld, dusdanig dat deze de juiste informatie krijgt. Aan de hand van een aantal sturende vragen ontdekken de leerlingen de functies van de andere blokken in het blokdiagram en onderzoeken zij de relatie tussen de differentiaalvergelijking en het blokdiagram. Passend bij ontwerpeis 5, is in deze opgave het principe van guided reinvention verwerkt [41]. Verder maken leerlingen in deze opgave een begin aan het ontwerpen van computationele modellen, wat binnen de taxonomie van Weintrop et al. valt onder computational thinking [13].

Na opgave 11 wordt van de leerlingen verwacht het blokdiagram en de differentiaalvergelijking als twee van hetzelfde te zien. Dit maakt dat een structurele conceptie noodzakelijk is [23]. Juist door de leerlingen zelf de relatie tussen de differentiaalvergelijking en het blokdiagram te laten onderzoeken, hopen we de juiste begeleiding te bieden in het ontwikkelen van dit structurele begrip.

We hebben nu een computermodel om het wiskundig model mee op te lossen. De oplossing is een verloop van de groei van het aantal bacteriën over de tijd. Dit betekent dat we $B(t)$ willen weten. Om een grafiek van $B(t)$ te krijgen gebruiken we het **scope-blok**. Dit blok heeft alleen een ingang en plot vervolgens de input. Hieronder zie je het scope-blok in het blokdiagram, en de grafiek van $B(t)$, ofwel de oplossing bij ons model.



Opgave 12

Vraag de docent naar de handleiding MATLAB Simulink en lees deze zorgvuldig door.

- Maak het computermodel in MATLAB Simulink en controleer de gevonden oplossing voor het model.
- Vergelijk de gevonden oplossing met de geschetste oplossing bij opgave 10. Komen jouw schets en de figuur hierboven overeen?

Checkpoint: Laat bovenstaande opgave aftekenen bij de docent om verder te mogen naar de volgende pagina.

Om een oplossing bij het model te verkrijgen, moet er een scope-blok toegevoegd worden aan het blokdiagram. De leerlingen krijgen te zien hoe het blokdiagram er dan uit ziet en de oplossing wordt gegeven. Hierop volgend wordt de leerlingen bij opgave 12 gevraagd het model na te maken in MATLAB Simulink en te controleren of zij dezelfde oplossing kunnen vinden. Bij deze opgave zijn de leerlingen dus bezig om met het ontwikkelen van computationele modellen, wat binnen de taxonomie van Weintrop et al. valt onder computational thinking [13]. Om hen te helpen met het maken van het blokdiagram in MATLAB Simulink is een handleiding opgesteld waarin verschillende stappen uiteen zijn gezet. De handleiding is te vinden in Appendix A.2.

In het theoretisch kader is besproken dat het Use-Modify-Create schema een manier is om computational thinking te onderwijzen [18]. Passend bij dit schema zijn deze en de volgende opgaven van de lesmodule opgezet. In de eerste fase die de leerlingen doorlopen gebruiken zij een bestaand model (use). Dit was het geval voor de combinatie van opgave 11 en 12. Vervolgens maken de leerlingen aanpassingen aan dit bestaande model (modify), wat het geval zal zijn bij opgave 13. Naarmate dit proces vordert zullen de leerlingen zich ontwikkelen en vervolgens de vaardigheden hebben om eigen modellen te maken (create). Deze laatste fase zal plaatsvinden in het laatste deel van de lesmodule bij opgave 14 en 15.

Opgave 13

De laboranten bekijken de oplossing van jouw model en realiseren zich dat deze nog verbeterd kan worden. De groei van het aantal bacteriën kan namelijk niet onbeperkt stijgen. Op een gegeven moment zal er voedsel- en ruimtegebrek optreden. De laboranten verwachten dat er plek is voor 3000 bacteriën op de celcultuur. Zodra de bacteriekolonie deze omvang nadert, zal deze niet (snel) meer groeien.

- De laboranten stellen voor om de volgende differentiaalvergelijking te gebruiken voor het model:
 $B'(t) = c \cdot B(t) \cdot (3000 - B(t))$. Welk effect heeft de toevoeging van de term $(3000 - B(t))$ aan de vergelijking?
- Zoals gezegd weten de laboranten dat de groeisnelheid (aantal/dag) bij de start van het experiment gelijk is aan $0,35 \cdot B(t)$. Bereken op basis van deze kennis de waarde van c in 5 decimalen. Schrijf de stappen op die je maakt.
- Waarom mag de waarde van c afgerond worden?

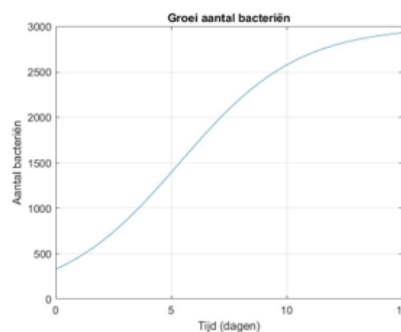
Het model dat we eerder hebben gemaakt sluit niet goed aan op de werkelijkheid, gezien dit model doet verwachten dat de groei onbeperkt doorgaat en dit niet het geval kan zijn. Door hierop in te gaan wordt de leerlingen bijgebracht dat het belangrijk is om het model te valideren. Hiermee werken de leerlingen aan leerdoel 3: de leerling kan het modelgedrag relateren aan de werkelijkheid, en ontwikkelen zij computational thinking gezien zij een concept proberen te begrijpen met behulp van een computationeel model [13]. Naar aanleiding van de validatie, gaan de leerlingen het model aanpassen. In dit deel van opgave 13 komen de leerlingen tot een differentiaalvergelijking die beter past bij de werkelijkheid. Bij opgave 13c haken we ook kort in op het besef dat we een model maken dat een voorspelling doet, wat betekent dat constanten of factoren altijd geschat zijn. Dit besef vinden we belangrijk in verband met leerdoel 2: de leerling kan een dynamisch systeem modelleren door passende variabelen en relaties te kiezen. De gekozen variabelen en relaties zullen nooit exact gelijk zijn aan de werkelijkheid, maar kunnen deze vervolgens wel nabootsen.

Hieronder staat een deel van het nieuwe computermodel getekend. Het product-blok heeft in dit model drie ingangen. Verder is het sum-blok toegevoegd. Dit is het rondje met daarin een plus- en een minteken.

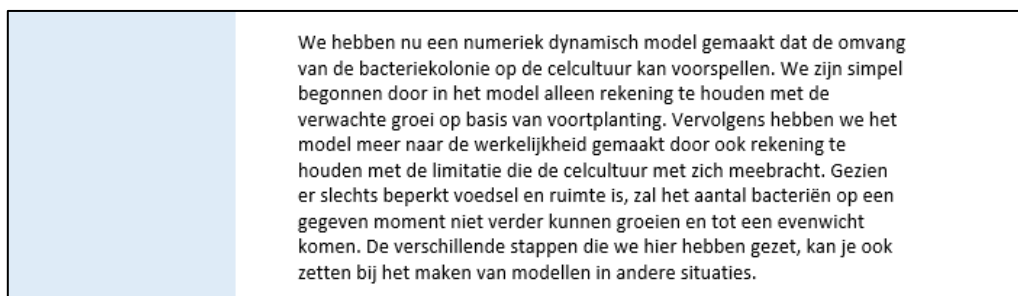
- Wat is in dit model de functie van het sum-blok?
- Maak het computermodel af op het werkblad door de constanten in de blokken te schrijven en de juiste pijlen te tekenen.



- Pas het computermodel in MATLAB Simulink aan en controleer de nieuwe gevonden oplossing van het model.
- Heeft de grafiek het verloop dat jij had verwacht? Licht jouw antwoord toe.



Na het opstellen van een nieuwe differentiaalvergelijking, kan het computermodel hierop aangepast worden. Het blokdiagram dat bij de nieuwe differentiaalvergelijking hoort, wordt hier deels weergegeven in plaats van volledig zoals bij de vorige opgave. Het is aan de leerlingen om de constanten in te vullen en de juiste pijlen te tekenen. Hiermee ontwikkelen de leerlingen zich in het ontwerpen van computationele modellen. Vervolgens wordt de leerlingen gevraagd het model in MATLAB Simulink aan te passen, waarmee ze zich ontwikkelen in het maken van computationele modellen. Bij opgave 13g worden de leerlingen ook gevraagd om het modelgedrag te vergelijken met de werkelijkheid. Alle drie de vaardigheden vallen volgens de taxonomie van Weintrop et al. onder computational thinking [13]. Daarnaast werken de leerlingen met opgave 13g aan leerdoel 3: de leerling kan het modelgedrag relateren aan de werkelijkheid.



Aan de hand van de afgelopen opgaven hebben de leerlingen de modelleercyclus van Spandaw en Zwaneveld tweemaal doorlopen. Bovenstaande tekst vat dit proces samen om dit deel van de lesmodule mee af te sluiten.

Vraagstukken

In het laatste deel van de lesmodule volgen enkele vraagstukken waarbij een dynamisch numeriek model ingezet moet worden om deze op te lossen. De onderwerpen van de vraagstukken zijn zo gekozen dat deze relevant zijn en aansluiten op de beleavingswereld van de leerlingen, passend bij ontwerpeis 4. Door met de vraagstukken aan de slag te gaan werken de leerlingen aan leerdoel 1: de leerling herkent een probleem dat opgelost kan worden met een dynamisch numeriek model. Om de vraagstukken te beantwoorden zullen de leerlingen de modelleercyclus van Spandaw en Zwaneveld moeten doorlopen, zoals ze dit bij de eerdere voorbeelden ook hebben gedaan. Echter is het verschil met de vorige voorbeelden dat de leerlingen dit nu zelf zullen doen en er amper ondersteuning wordt geboden. Wederom proberen we hiermee de leerlingen aan te zetten om actief hun geleerde kennis en vaardigheden op te halen, om het leerproces te bevorderen [33,45]. Onze verwachting is dat de leerlingen dit kunnen. Daarbij kunnen de leerlingen met behulp van deze vraagstukken zelf ervaren hoe veel ze hebben geleerd tijdens de lesmodule.

In het doorlopen van de modelleercyclus ontwikkelen de leerlingen zich in verschillende vaardigheden die vallen onder computational thinking. Bij het opstellen van het conceptuele en wiskundig model representeren de leerlingen de situatie op een computationeel zinvolle manier, wat valt onder computational thinking [13]. Daarnaast werken de leerlingen hiermee aan leerdoel 2: de leerling kan een dynamisch systeem modelleren door passende variabelen en relaties te kiezen. Bij het opstellen van het computermodel, oefenen de leerlingen in het ontwerpen en ontwikkelen van een computationeel model. Ook hiermee ontwikkelen de leerlingen computational thinking [13]. Tot slot worden de leerlingen bij beide vraagstukken gevraagd hun oplossing te relateren aan de werkelijkheid en op basis hiervan conclusies te trekken of hun model aan te passen. Dit maakt dat de leerlingen bezig zijn met leerdoel 3: de leerling kan het modelgedrag relateren aan de werkelijkheid, en hiermee ook computational thinking ontwikkelen [13].

Deel 3: Vraagstukken

Hieronder volgen een aantal vraagstukken, waarbij een dynamisch numeriek model een oplossing kan bieden. Aan jou de vraag om deze modellen te maken en de vraagstukken te beantwoorden.



Opgave 14

Op jouw achttiende verjaardag besluit je een bedrag van €5000 te beleggen op de beurs. Je koopt enkele aandelen bij een aandelenindex van een verzameling van de grootste Amerikaanse bedrijven. Als de waarde van deze bedrijven hoger in wordt geschat, dan worden jouw aandelen meer waard. Je maakt een model dat de waarde van jouw aandelen W de komende jaren beschrijft, om te bepalen wanneer deze een miljoen euro waard zullen zijn. De winst ten opzichte van het startbedrag wordt het rendement genoemd, en naarmate jouw aandelen meer waard worden neemt het rendement toe. De beurs is de laatste jaren positief en de snelheid (€/jaar) waarmee de waarde van jouw aandelen stijgt wordt geschat op $0,118 \cdot W(t)$.

- Formuleer het conceptueel model.
- Formuleer het wiskundig model.
- Maak het computermodel in MATLAB Simulink. Teken het computermodel na op papier.
- Na ongeveer hoeveel jaar zijn jouw aandelen een miljoen euro waard?
- Op welke manier kan jij ervoor zorgen dat jij sneller miljonair wordt? En op welke manier zou de beurs ervoor kunnen zorgen dat jij sneller miljonair wordt?

Opgave 15

Een farmaciebedrijf ontwikkelt een nieuw medicijn. Dit medicijn wordt via het infuus gegeven en de dagelijks aanbevolen hoeveelheid is 1500 mg. Het lichaam verwijdt het medicijn uit het lichaam door uitscheiding. Hoe meer medicijn er in het lichaam zit hoe harder het zal werken aan de uitscheiding hiervan. Bij dagelijks gebruik voor een langdurige periode ontstaat er een evenwicht tussen inname en uitscheiding, wat betekent dat de hoeveelheid medicijn in het lichaam op een gegeven moment gelijk blijft over tijd. Deze hoeveelheid mag niet te hoog zijn, gezien dit juist schadelijk kan zijn voor de mens. Het bedrijf wil daarom simuleren wat de hoeveelheid medicijn in het lichaam M zal zijn in meerdere dagen. De snelheid (mg/dag) waarmee het medicijn in het lichaam opgenomen wordt is 1500. De snelheid (mg/dag) waarmee het lichaam het medicijn uitscheidt is altijd gelijk aan $0,25 \cdot M(t)$.

- Formuleer het conceptueel model. Welke aannames doe je hierbij?
- Formuleer het wiskundig model.
- Maak het computermodel in MATLAB Simulink. Teken het model na op papier.
- Hoeveel mg medicijn blijft er uiteindelijk aanwezig in het lichaam bij langdurig gebruik, ofwel zodra het evenwicht is opgetreden?
- Hoe kan je dit afleiden uit de differentiaalvergelijking in het wiskundig model?

De eerder genoemde aanbevolen dagelijkse hoeveelheid geldt voor volwassenen. Het farmaciebedrijf wil het medicijn ook beschikbaar stellen voor kinderen. De nierfunctie van kinderen is echter nog niet zo goed ontwikkeld als die van volwassenen, waardoor kinderen het medicijn minder makkelijk uitscheiden.

- Wat verandert er aan het model als dit een kind betreft?
- Voer deze verandering door. Wat is het gevolg hiervan?
- Welk advies geef jij het farmaciebedrijf mee voor het medicijngebruik door kinderen?



Naast de bovengenoemde punten is het nog goed te benoemen dat we hebben overwogen een grote eindopdracht aan het eind van de lesmodule te hebben. Er is bijvoorbeeld nagedacht over het modelleren van het hart of een hormoonstelsel en hier een relevant vraagstuk aan te koppelen. Echter werd al snel duidelijk dat dit te complex zou worden gezien de leerlingen niet bekend zijn met de fysiologie achter deze concepten en nog niet de vaardigheden hebben om deze modellen te maken. Om deze reden is besloten hiervan af te zien.

5.2 Feedback ervaringsdeskundigen

In deze sectie bespreken we de belangrijkste punten die naar voren kwamen uit de feedback van het expertpanel. We bespreken de feedback van het expertpanel om het huidige ontwerp van de lesmodule te verbeteren. Dat wil zeggen dat de feedback niet heeft bijgedragen aan het eerder besproken ontwerp van de lesmodule. Bij de bespreking van de feedback houden we de volgorde van het feedbackformulier aan. De ingevulde feedbackformulieren van de ervaringsdeskundigen in het expertpanel zijn te vinden in Appendix B.2.

Ontwerpeisen

Allereerst is het expertpanel gevraagd te kijken naar de eerste vijf ontwerpeisen, namelijk de duur, de lay-out en het niveau van de lesmodule, als mede de gebruikte contexten en de hoeveelheid sturing die de leerlingen nodig zullen hebben. Uit de feedback komen geen brandende opmerkingen naar voren, wat doet geloven dat de eerste vijf ontwerpeisen redelijk in de lesmodule zijn verwerkt. Hieronder bespreken we per ontwerp-eis de belangrijkste feedback:

1. De ervaringsdeskundigen vinden het lastig in te schatten wat de duur van de lesmodule zal zijn. De lesmodule bevat voldoende stof, maar volgens hen is de duur vervolgens afhankelijk van hoe vlug de docent de checkpoints af kan handelen en hoe gemakkelijk de leerlingen zich wegwijs maken in MATLAB Simulink. Om deze reden adviseert een van de ervaringsdeskundigen te concretiseren hoe lang de leerlingen over ieder van de delen van de lesmodule zullen doen, zodat een realistisch beeld van de duur van de lesmodule ontstaat.
2. De ervaringsdeskundigen zijn het erover eens dat de lesmodule een duidelijke structuur en een verzorgde lay-out heeft. Enig punt van feedback is dat de lijnen in de figuren dikker en de bijbehorende as-titels groter mogen zijn, zodat de figuren beter af te lezen zijn.
3. De ervaringsdeskundigen verwachten dat de lesmodule aansluit op het niveau van vijfdejaars vwo-leerlingen die wiskunde B volgen. Wel merken ze op dat dit niveau verschilt per leerling. De sterke leerling zal de lesmodule met meer gemak doorlopen dan de zwakke leerling. Een van de ervaringsdeskundigen geeft aan dat hier mogelijk rekening mee gehouden kan worden in het vaststellen van de groepen. Een sterke en een zwakke leerling kunnen dan samen een groep vormen en elkaar aanvullen. Daarnaast merkt een andere ervaringsdeskundige op dat ondanks dat de lesmodule aansluit op het niveau van de leerlingen de opgaven tot het laatste deel van de lesmodule redelijk afgebakend zijn, waar een vijfdejaars vwo-leerling mogelijk meer zelfstandigheid en -redzaamheid aan zou kunnen.
4. De ervaringsdeskundigen zijn van mening dat de opgaven voortkomen uit zinvolle contexten die aansluiten bij de beleevingswereld van de leerlingen. Daarbij benoemen ze specifiek het leuk te vinden dat de opgaven verschillende onderwerpen raken en aansluiten op toepassingen in de natuurkunde, biologie en economie.
5. De ervaringsdeskundigen geven enerzijds aan dat de lesmodule dusdanig is opgebouwd dat deze alle benodigde informatie bevat om de opgaven te maken. De leerlingen kunnen dus zelfstandig met de lesmodule aan de slag. Anderzijds wordt verwacht dat de leerlingen bij de laatste helft van de opgaven enige sturing nodig zullen hebben. Momenteel is een beperkte vorm van sturing verwerkt in de lesmodule in de vorm van de checkpoints. Een van de ervaringsdeskundigen vindt de checkpoints een goede toevoeging, maar waarschuwt wel voor het risico dat de leerlingen langer moeten wachten voor zij verder mogen als de docent

nog bij een ander groepje bezig is. Om dit te verbeteren suggereert een andere ervaringsdeskundige om een signaaltabel te gebruiken in plaats van checkpoints. Dit is een tabel op het bord waarin de leerlingen per deel van de lesmodule aan kunnen geven of zij geen hulp, mogelijk hulp of zeker hulp nodig hebben. Hiermee kan een beroep gedaan worden op de autonomie van de leerlingen.

Inhoudelijke leerdoelen

De tweede vraag die aan het expertpanel is voorgelegd is of de inhoudelijke leerdoelen bereikt kunnen worden met behulp van de lesmodule. Uit de feedback van het expertpanel komt naar voren dat alle drie de leerdoelen goed verwerkt zijn in de lesmodule. Hieronder bespreken we per leerdoel de belangrijkste feedback:

1. De ervaringsdeskundigen verwachten dat de leerlingen zich ontwikkelen in het herkennen van een probleem dat opgelost kan worden met een dynamisch numeriek model. In de lesmodule komen verscheidene voorbeelden aan bod waarin een dynamisch numeriek model gebruikt wordt bij het oplossen van een probleem. Twee ervaringsdeskundigen geven echter aan dat de lesmodule niet direct gericht is op het herkennen van deze problemen. De lesmodule is hierin meer gericht op dat de leerlingen inzicht krijgen in het nut van dynamisch modelleren.
2. De ervaringsdeskundigen zijn het erover eens dat de leerlingen met behulp van deze lesmodule een dynamisch systeem kunnen modelleren door passende variabelen en relaties te kiezen. De laatste twee opgaven van de lesmodule geven hier een beeld van. Een van de ervaringsdeskundigen vraagt zich echter af of zich hier een verschil in zal voordoen tussen de sterke en de zwakke leerling.
3. De ervaringsdeskundigen zijn van mening dat de leerlingen met behulp van deze lesmodule het modelgedrag van een dynamisch numeriek model kunnen relateren aan de werkelijkheid. Ze geven aan dat dit op meerdere plekken in de lesmodule terugkomt.

Algemene feedback

Tot slot heeft het expertpanel de ruimte gekregen algemene feedback te geven op het ontwerp. De belangrijkste punten die hierbij naar voren kwamen bespreken we hieronder:

- Bij de inleiding van de lesmodule wordt aangegeven dat de groepen leerlingen onderling niet mogen overleggen, maar de docent wel om hulp mogen vragen. De reden hiervoor is dat het resultaat van een groep leerlingen dan te relateren is aan hun eigen ontwikkelingen met betrekking tot de leerdoelen, en zij elkaar geen onjuistheden kunnen vertellen. Twee ervaringsdeskundigen geven echter aan dat onderling overleg tussen de leerlingen juist bevorderlijk kan zijn voor hun denkproces, en daarmee ook hun ontwikkeling. Een van deze ervaringsdeskundigen oppert leerlingen elkaar alleen te laten helpen als zij denken de stof grotendeels te begrijpen, zodat zij samen het begrip kunnen verdiepen. Mochten leerlingen de stof niet begrijpen, dan is het alsnog de taak aan de docent om langs deze groepen te gaan en hen te ondersteunen.
- Tevens wordt bij de inleiding van de lesmodule aangegeven dat de duur van de lesmodule 180 minuten zal zijn. In de feedback bij ontwerp 1 werd al geadviseerd te concretiseren hoe lang de leerlingen over ieder van de delen van de lesmodule zullen doen, en aansluitend hierop adviseert een ervaringsdeskundige een meer concrete tijdsindicatie mee te geven aan de leerlingen bij de inleiding. Op deze manier kunnen de leerlingen zelf hun voortgang managen en wordt meer beroep gedaan op de autonomie van de leerlingen.
- In het eerste deel van de lesmodule wordt het begrip model geïntroduceerd. Een van de ervaringsdeskundigen merkt op dat een korte omschrijving van de begrip mist en adviseert dit toe te voegen.
- In het tweede deel van de lesmodule worden de begrippen toestandsvariabele en begintoestand gedefinieerd in de vraagstelling. Dit gebeurt bij meer begrippen die in de

lesmodule worden geïntroduceerd. Een ervaringsdeskundige geeft aan dat het overzichtelijker zou zijn om deze begrippen in een stuk tekst te definiëren en in de deelopgave slechts de vraagstelling te beslaan.

- Twee ervaringsdeskundigen complimenteren de didactische opzet van opgave 7, waarbij de leerlingen de stap van differentievergelijking naar differentiaalvergelijking maken. Ze benoemen dat het mooi is dat de leerlingen zelf nadenken over een realistisch tijdbeeld en aan de hand hiervan de tijdseenheid gaan verkleinen, waarna zij zelfs de limiet van deze tijdseenheid naar nul nemen. Echter vragen de ervaringsdeskundigen zich af in hoeverre de leerlingen deze deductie zullen begrijpen, in acht nemend dat zij al meerdere nieuwe begrippen hebben geleerd in en rond deze opgave. Hierbij geven de ervaringsdeskundigen alleen geen advies hoe dit verbeterd zou kunnen worden.

5.3 Uitvoering

De lesmodule is op 16 november 2022 uitgevoerd als werkdag op de locatie Kottenpark van Het Stedelijk Lyceum in Enschede. Twee tweetallen vijfdejaars vwo-leerlingen die wiskunde B volgen hebben de lesmodule doorgewerkt. Met behulp van de uitwerkingen van de leerlingen, de observaties tijdens de uitvoering en de interviews van de leerlingen, bekijken we of de lesmodule voldoet aan de ontwerpeisen. De getranscribeerde interviews zijn te vinden in Appendix D.2.

Ontwerpeis 1: De lesmodule kan als werkdag van 180 minuten gebruikt worden.

Tijdens de uitvoering van de lesmodule is bijgehouden hoe lang de leerlingen hier mee bezig waren. De werkdag duurde van 08:15 tot 11:30 met een korte pauze van 09:45 tot 10:00. Een van de twee groepen heeft de lesmodule binnen de tijd afgerond en was om 11:15 klaar. De andere groep heeft de lesmodule niet afgerond, maar mocht rond deze tijd stoppen, gezien het hen niet meer lukte om geconcentreerd aan het werk te blijven. Beide groepen gaven echter aan dat zij tegen het eind van de lesmodule hun concentratie verloren en mogelijk om deze reden de tijd niet hebben volbracht. Zie Tabel 3 voor de reactie van de leerlingen op vragen over de duur van de lesmodule.

Tabel 3: De reactie van de leerlingen op vragen over de duur van de lesmodule.

	Leerlingenreacties
Groep 1	Ja, we hebben alles afgekregen. (...) We moesten niet per se haasten, maar we waren bij het eind wat slordig. Dan stond er iets en we konden het wel beter verwoorden, maar dan hadden we het een beetje afgeraffeld.
Groep 2	Nee, we hebben de laatste opdracht niet gemaakt. (...) ons werktempo vertraagde naarmate we verder kwamen. Het lukt op een gegeven moment niet echt meer. (...) we hadden niet zoveel zin meer.

Aan de hand van de video-opname die tijdens de uitvoering is gemaakt, kunnen we aangeven hoe lang de leerlingen ongeveer met de verschillende delen van de lesmodule bezig zijn geweest. De resultaten hiervan zijn weergegeven in tabel 4. De tijd dat de leerlingen bezig zijn geweest met het laatste deel van de lesmodule is echter vertekend, gezien een van de groepen dit deel niet af heeft gemaakt en de andere groep aangaf dit afgeraffeld te hebben. Dit doet verwachten dat deze duur hoger hoort te zijn.

Tabel 4: Tijdsindicatie (minuten) per deel van de lesmodule.

	Deel 1	Deel 2			Deel 3
Opgaven	1-4	5-8	9-11	12-13	14-15
Groep 1	± 20	± 70	± 20	± 25	± 30*
Groep 2	± 20	± 65	± 30	± 25	

*Duur niet accuraat.

Al met al lijkt de lesmodule te voldoen aan de eerste ontwerpeis. De lesmodule kan binnen 180 minuten gemaakt worden. Echter voegen we hier het advies aan toe om de lesmodule niet als werkmiddag te geven, maar op te splitsen in twee of drie momenten met een totaal van 180 minuten. Dit om te voorkomen dat de leerlingen hun concentratie verliezen. Uit de interviews kwam naar voren dat ook de leerlingen achter dit voorstel staan.

Ontwerpeis 2: De lesmodule heeft een duidelijke structuur en een verzorgde lay-out.

Om na te gaan of de lesmodule aan deze ontwerpeis voldoet, bekijken we de opmerkingen van de leerlingen tijdens de interviews. In Tabel 5 zijn de belangrijkste opmerkingen weergegeven.

Tabel 5: De reacties van de leerlingen op vragen over de structuur en de lay-out van de lesmodule.

	Leerlingenreacties
Groep 1	Ja, dat vond ik nice (<i>over de lay-out</i>). Leuk, handig boekje. (...) Ook duidelijk elke keer de opdrachten tussendoor en dan een stukje tekst. Elke keer een andere kleur, wel over nagedacht (<i>over de structuur</i>).
Groep 2	Het was wel duidelijk (<i>over de structuur</i>). De vragen waren duidelijk, we wisten wat we moesten doen. (...) De enige aanmerking die ik erop had, al is het ook niet echt een aanmerking: het zag er een beetje saai uit. Maar dat hoeft ook niet heel uitbundig te zijn hoor. (...) Ja, het ziet eruit als wiskunde.

De leerlingen vonden dat de lesmodule een duidelijke structuur had. Een van de groepen benoemde hierbij ook terecht de inzet van de gekleurde vlakken welke gebruikt werden om de tekst, opgaven en checkpoints van elkaar te onderscheiden. Over de lay-out waren de meningen verdeeld. De ene groep was positief over de lay-out van de lesmodule en de andere groep concludeerde dat de lay-out redelijk saai was, maar dat deze wel voldoet voor het feit dat het een wiskundemodule is. Hier kunnen wij ons wel in vinden. De lay-out van de lesmodule is niet erg aantrekkelijk, maar deze is juist zo gekozen zodat de leerlingen hier niet van afgeleid worden. Samenvattend lijkt de lesmodule te voldoen aan deze ontwerpeis.

Daarnaast is het gelukt om een aantal vooraf vastgestelde regels aan te houden, zoals het cursief aangeven van belangrijke begrippen, de smalle kolombreedte, de witregel tussen opvolgende alinea's en de lettergrootte.

Ontwerpeis 3: De opgaven uit de lesmodule sluiten aan op het niveau van vijfdejaars vwo-leerlingen die wiskunde B volgen.

Om na te gaan of de lesmodule aansluit op het niveau van de leerlingen, bekijken we allereerst de uitwerkingen van de leerlingen. De uitwerkingen van de leerlingen zijn nagekeken aan de hand van het correctievoorschrift en met behulp van een toets- en itemanalyse zijn de p' -waardes per opgave berekend. Gezien de groep leerlingen, bestaande uit twee tweetallen, in deze toets- en itemanalyse klein is, kunnen geen directe conclusies uit de verkregen p' -waardes getrokken worden. Wel zijn wij van mening dat de verkregen p' -waardes alsnog een waardevol beeld kunnen schetsen. Tabel 6 geeft de verkregen p' -waardes per opgave in het eerste deel van de lesmodule weer. We zien dat het grootste deel van de opgaven een gemiddelde of hoge p' -waarde heeft, wat het beeld schetst dat de leerlingen deze opgaven makkelijk vonden. Dit komt overeen met de intentie om de lesmodule makkelijk te beginnen, zoals besproken bij de ontwerpeisen. Een opgave heeft een lage p' -waarde. De reden hiervoor kunnen we achterhalen aan de hand van de minder gestructureerde observatie. Bij opgave 4b moesten de leerlingen het verschil vinden tussen de Buienradar beelden van het afgelopen uur en de 3-uursverwachting. Dit verschil konden zij echter niet vinden, waarna de onderzoeker het verschil heeft gedemonstreerd.

Tabel 6: Opgaven in het eerste deel van de lesmodule met bijbehorende p' -waardes.

Opgave	1	2	3a	3b	3c	3d	4a	4b	4c
p' -waarde	100	100	100	50	100	100	100	0	100
Groep 1	100	100	100	100	100	100	100	0	100
Groep 2	100	100	100	0	100	100	100	0	100

Tabel 7 geeft de verkregen p' -waardes per opgave in het tweede deel van de lesmodule weer. Bij dit deel van de lesmodule zien we een meer gevarieerd beeld wat betreft de verkregen p' -waardes. Wel valt op dat de p' -waardes bij opgave 11 allemaal erg hoog zijn. Uit de minder gestructureerde observatie komt naar voren dat de leerlingen binnen deze opgave veel herhaling ervaren, wat het mogelijk een makkelijke opgave maakt. Verder valt op dat opgave 7 bij meerdere deelopgaven lage p' -waardes heeft. De lage p' -waardes kunnen samenhangen met het feit dat de leerlingen bij deze opgave kennismaken met differentie- en differentiaalvergelijkingen en zelf onderzoeken wat deze concepten inhouden en hoe ze aan elkaar gerelateerd zijn. Dit vraagt de leerlingen logisch te redeneren en verbanden te leggen, wat hogere denkactiviteiten zijn. Naast de lage p' -waardes bij opgave 7, vallen ook de lage p' -waardes bij de eerste deelopgaven van opgave 8 op. Om deze deelopgaven te kunnen maken, wordt er van de leerlingen verwacht dat zij structureel begrip hebben van de afgeleide. Er wordt van de leerlingen verwacht dat zij begrijpen dat het concept groeisnelheid gelijk staat aan het concept afgeleide, en dat de afgeleide in een punt vervolgens gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan dat punt. Uit de minder gestructureerde observaties kwam naar voren dat dit niet tot de voorkennis van ieder van de leerlingen behoorde. Dit doet verwachten dat opgave 8a en 8b moeilijk zijn als de voorkennis van de leerlingen niet op orde is.

Tabel 7: Opgaven in het tweede deel van de lesmodule met bijbehorende p' -waardes.

Opgave	5a	5b	5c	5d	6a	6b	6c	7a	7b	7c	7d	7e	7f	7g	7h
p' -waarde	100	100	50	100	100	50	100	50	100	50	0	0	50	50	0
Groep 1	100	100	100	100	100	100	100	50	100	33	0	0	0	0	0
Groep 2	100	100	0	100	100	0	100	50	100	67	0	0	100	100	0

Opgave	8a	8b	8c	8d	9a	9b	10a	10b	10c	10d	10e	11a	11b	11c	11d
p' -waarde	25	25	100	100	100	50	50	50	100	100	100	100	100	100	100
Groep 1	50	50	100	100	100	50	100	100	100	100	100	100	100	100	100
Groep 2	0	0	100	100	100	50	0	0	100	100	100	100	100	100	100

Opgave	12a	12b	13a	13b	13c	13d	13e	13f	13g
p' -waarde	100	100	50	0	100	50	100	100	100
Groep 1	100	100	0	0	100	100	100	100	100
Groep 2	100	100	100	0	100	0	100	100	100

Tabel 8 geeft de verkregen p' -waardes per opgave in het laatste deel van de lesmodule weer. Noemenswaardig hierbij is dat opgave 15 slechts door één van de twee groepen leerlingen is gemaakt en de uitwerkingen van deze groep dus direct de p' -waardes bepalen. Bij dit deel van de lesmodule zien we eveneens een gevarieerd beeld wat betreft de verkregen p' -waardes. Slechts een van de opgaven heeft een lage p' -waarde. Bij opgave 15e moeten de leerlingen aan de hand van de differentiaalvergelijking verklaren dat er een evenwicht optreedt in de oplossing van het model. Ook hier wordt van de leerlingen verwacht dat zij terugvallen op hun voorkennis over de toepassingen van de afgeleide. Als de leerlingen zich dit niet realiseren, kan deze opgave moeilijk zijn.

Tabel 8: Opgaven in het laatste deel van de lesmodule met bijbehorende p' -waarden.

Opgave	14a	14b	14c	14d	14e	15a	15b	15c	15d	15e	15f	15g	15h
p' -waarde	33	75	100	100	100	33*	50*	50*	100*	0*	100*	100*	100*
Groep 1	33	50	100	100	100	33	50	50	100	0	100	100	100
Groep 2	33	100	100	100	100	-	-	-	-	-	-	-	-

* p' -waardes berekent aan de hand van uitwerkingen van één groep

Uit voorgaande analyse komt naar voren dat de leerlingen enkele opgaven in de lesmodule niet zelfstandig konden maken omdat hun voorkennis niet aansloot op onze verwachtingen. Aan de hand van de minder gestructureerde observatie weten we dat de leerlingen deze opgaven wel konden maken met een aantal sturende vragen van de onderzoeker. Om deze reden zien wij dit niet als een probleem. Daarnaast hebben de leerlingen vanwege de coronapandemie drie zware jaren achter de rug, waarin ook hun onderwijs heeft geleden. Dit kan een reden zijn dat de voorkennis van de leerlingen niet op peil is. Echter, dit probleem wordt niet voorzien voor toekomstige leerlingen.

Naast de uitwerkingen van de leerlingen, kunnen we om na te gaan of de lesmodule aansluit op het niveau van de leerlingen ook terugvallen op de interviews. In Tabel 9 zijn de belangrijkste opmerkingen weergegeven. Het algemene beeld uit de interviews is dat het niveau van de lesmodule goed was. De leerlingen gaven aan dat een aantal opgaven lastig waren, maar dat ze er verder goed tot gemakkelijk doorheen konden komen. Een van de twee groepen leerlingen geeft concreet aan dat de opgaven over de chloorconcentratie in het zwembad (opgaven 5-8) de lastige opgaven waren. Dit beeld komt redelijk overeen met de bevindingen uit de toets- en itemanalyse en is daarnaast waarschijnlijk te verklaren door het zelfontdekkende karakter van deze opgaven. Bij opgaven 5-8 maken de leerlingen namelijk kennis met de verschillende stappen uit de modelleercyclus en onderzoeken zij de samenhang hierin. De nadruk ligt binnen deze opgaven op het wiskundig model. De leerlingen bestuderen een differentievergelijking en leiden hier zelf een differentiaalvergelijking uit af, waarvan zij vervolgens de oplossing van analyseren.

Tabel 9: De reacties van de leerlingen op vragen over het niveau van de lesmodule.

	Leerlingenreacties
Groep 1	Jawel, <i>(de lesmodule sloot aan op ons niveau,)</i> behalve dan dat limiet. Dat wisten we niet meer. Maar verder vond ik het eigenlijk wel makkelijk. Sommige dingen kwamen we niet uit, maar dan was de oplossing best simpel. Vooral het einde was goed te doen. (...) Ik vond sommige dingen wel lastig. Vooral het begin, dat je eigenlijk nog helemaal geen idee hebt van die dingen. Bijvoorbeeld die opdracht met het chloor vond ik best wel moeilijk.
Groep 2	We hebben het <i>(de stof)</i> nog nooit gehad, maar we konden het wel maken. Ik bedoel: het was niet te moeilijk. (...) Je leert iets nieuws en iets nieuws leren is altijd pittig, maar... <i>(het was goed te doen)</i> . (...) Het zit er tussenin <i>(tussen moeilijk en makkelijk)</i> . Sommige dingen waren iets moeilijker om te begrijpen, maar andere dingen konden we zo doen. (...) De delen die worden verwacht dat je kent om het te snappen, dat wisten we denk ik wel.

Samenvattend lijkt de lesmodule aan te sluiten op het niveau van de leerlingen, en wordt hiermee aan de derde ontwerpeis voldaan. Bovendien is het gelukt om de leerlingen in tweetallen te laten werken, de lesmodule te starten met een instapopgave en de opgaven waar nodig te ondersteunen met een werkblad, punten die ook onder deze ontwerpeis vielen.

Ontwerpeis 4: De opgaven komen voort uit een zinvolle context die aansluit bij de beleavingswereld van de leerlingen.

Om na te gaan of de lesmodule aan deze ontwerpeis voldoet, bekijken we de opmerkingen van de leerlingen tijdens de interviews. In Tabel 10 zijn de belangrijkste opmerkingen weergegeven.

Tabel 10: De reacties van de leerlingen op vragen over het onderwerp van de opgaven.

	Leerlingenreacties
Groep 1	Ik vond het wel leuk. (...) Ik vond de onderwerpen (<i>van de opgaven</i>) wat minder interessant, maar dat maakt ook niet per se uit. Het gaat vooral om de opdracht en niet per se om hoe het in vormgegeven qua details.
Groep 2	Ik vond de onderwerpen (<i>van de opgaven</i>) prima. (...) De onderwerpen (<i>van de opgaven</i>) waren best interessant.

De leerlingen hadden een verdeelde mening over de onderwerpen van de opgaven. Drie van de vier leerlingen vonden de onderwerpen van de opgaven interessant, ten opzichte van een leerling die deze niet interessant vond. De leerling die de onderwerpen van de opgaven niet interessant vond, voegde hier echter wel aan toe dat dit voor hem niet zo veel uitmaakte zolang het onderwerp van de lesmodule op zich wel interessant was, wat volgens deze leerling wel het geval was. Dit gezegd hebbende, lijkt de lesmodule aan de vierde ontwerpeis te voldoen.

Ontwerpeis 5: Om de lesmodule te volgen is beperkte sturing van de docent nodig.

Om te toetsen of de lesmodule aan deze ontwerpeis voldoet, hebben we tijdens de uitvoering per opgave bijgehouden waar de leerlingen vragen over stelden, zie Appendix C.2. Een overzicht van het aantal inhoudelijke vragen per opgave is weergegeven in Tabel 11.

Tabel 11: Het aantal inhoudelijke vragen per opdracht.

Opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Aantal vragen	0	0	0	2	1	0	6	2	1	1	0	0	3	2	2

In dit overzicht is te zien dat opgave 7 de meeste vragen bij de leerlingen heeft opgeroepen. Dit sluit aan op het beeld dat geschetst is naar aanleiding van de lage p' -waardes bij opgave 7. Zoals eerder gezegd, maken de leerlingen bij opgave 7 kennis met differentie- en differentiaalvergelijkingen en onderzoeken zelf wat deze concepten inhouden en hoe ze aan elkaar gerelateerd zijn. Dit kunnen de leerlingen moeilijk vinden en kan dus vragen opwekken. Om te controleren of de leerlingen hebben begrepen wat zij hebben onderzocht, wordt opgave 7 gevolgd door een checkpoint. Bij de toets- en itemanalyse viel opgave 7 ook negatief op, gezien de leerlingen hier relatief slecht op scoorden. Dit doet ons vermoeden dat de leerlingen enige ondersteuning nodig hebben om deze opgave succesvol te maken. Verder zijn er tijdens de lesmodule niet opvallend veel vragen gesteld. Tegen het eind van de lesmodule liep het aantal vragen wel iets op, maar dit kan samenhangen met het feit dat de leerlingen hun concentratie verloren. Op basis hiervan lijkt de lesmodule te volgen met beperkte sturing van de docent.

Tabel 12: De reacties van de leerlingen op vragen over de benodigde hoeveelheid hulp tijdens de lesmodule.

	Leerlingenreacties
Groep 1	Een paar keer wel (<i>hulp nodig gehad van de docent</i>). (...) En ik denk ook wel .. als je normaal les zou krijgen, dan krijg je een onderwerp en dan leggen ze alles uit en dan moet je het gaan doen. Nu krijg je eigenlijk alleen het boekje, dus dan valt het in verhouding wel mee hoeveel vragen we stellen. (...) We hebben vaker om jouw hulp

	gevraagd dan het nodig was. Ik denk dat het zelfstandig ook had gekund, maar dan had het wel wat langer geduurd.
Groep 2	Ik denk wel, zeker als ik vergeleken met de anderen kijk, dat wij meer vragen hadden. (...) Maar ik vraag eigenlijk in de les meer, dus dan valt het ook wel weer mee. We kwamen er zelf ook wel uit, maar op een gegeven moment waren we niet meer gemotiveerd om er zelf uit te komen. (...) Voor iets dat we nog nooit hebben gedaan, vond ik het wel goed.

Als we kijken naar de opmerkingen van de leerlingen in Tabel 12, dan zien we dat hun beeld lijkt te kloppen met bovenstaande bevindingen. De leerlingen hadden op een aantal momenten wel hulp nodig, maar geen van de leerlingen vond dat te vaak. Hierbij moet wel opgemerkt worden dat de verhouding groepen leerlingen en docent bij deze uitvoering 2:1 was. Mocht de lesmodule aan een gehele klas worden gegeven, dan krijgen de leerlingen minder de mogelijkheid om vragen te stellen, gezien er meer leerlingen met vragen zullen zijn. Een van de leerlingen geeft echter aan dat zij de lesmodule waarschijnlijk met minder hulp hadden kunnen volbrengen, maar de hulp nu gemakkelijk te krijgen was. Om deze reden verwachten wij dat de lesmodule ook in een andere setting met beperkte sturing van de docent te volgen is.

Ontwerpeis 6: De inhoudelijke leerdoelen worden door de leerlingen behaald.

Om na te gaan of de inhoudelijke leerdoelen behaald worden, bekijken we allereerst de p' -waardes van bepaalde opgaven uit de lesmodule. De p' -waardes zullen we ondersteunen met enkele bevindingen uit de minder gestructureerde observatie. Daarnaast bekijken we de opmerkingen van de leerlingen tijdens de interviews met betrekking tot vragen over de leerdoelen.

Leerdoel 1: De leerling herkent een probleem dat opgelost kan worden met een dynamisch numeriek model.

Een groot deel van de opgaven uit de lesmodule sluiten aan op dit leerdoel. In het eerste deel van de lesmodule wordt aandacht besteed aan het begrip model en wordt uitgelegd wat een numeriek en vervolgens dynamisch numeriek model is. Bij opgave 3 slagen de leerlingen erin om onderscheid te maken tussen statische en dynamische numerieke modellen, zie Tabel 6. Dit duidt erop dat de leerlingen begrijpen wat een dynamisch numeriek model beschrijft. Dit beeld komt overeen met het beeld uit de interviews. In Tabel 13 worden de antwoorden van de leerlingen op de vraag wat dynamisch modelleren is weergegeven. Beide groepen geven aan dat het hierbij gaat om het maken van een model dat het gedrag van een systeem over de tijd beschrijft.

Tabel 13: De reacties van de leerlingen op de vraag wat dynamisch modelleren is.

	Leerlingenreacties
Groep 1	Je hebt statisch en dynamisch, en het is dynamisch als de tijd een factor speelt. Bij dynamisch modelleren maak je dan een model waarin tijd een variabele is.
Groep 2	Het is het tegenovergestelde van statisch, dus het hangt af van de tijd. (...) Dus je maakt een model van een situatie die afhangt van de tijd.

Vervolgens komen in de rest van de lesmodule verscheidene voorbeelden aan bod waarin een dynamisch numeriek model gebruikt wordt bij het oplossen van een probleem. Echter, zoals ervaringsdeskundigen van het expertpanel opmerkten, is de lesmodule niet direct gericht op het herkennen van problemen die met een dynamisch numeriek model opgelost kunnen worden. De lesmodule is eerder gericht op dat de leerlingen inzicht krijgen in het nut van dynamisch modelleren. Dit laatste komt ook naar voren in de interviews. Tabel 14 geeft de antwoorden van de leerlingen op de vraag waar dynamisch modelleren voor wordt gebruikt weer. Beide groepen leerlingen geven aan dat dynamisch modelleren gebruikt wordt om voorspellingen te doen.

Tabel 14: De reacties van de leerlingen op de vraag waar dynamisch modelleren voor wordt gebruikt.

	Leerlingenreacties
Groep 1	Voorspellingen, dat vooral. We hebben bijvoorbeeld die opdracht gehad over het voorspellen van de chloorconcentratie en de groei van bacteriën, en over Buienradar.
Groep 2	Voor onderzoek, bijvoorbeeld voor weersverwachtingen. (...) Ja, want je kan verwachte waarden berekenen in verschillende situaties.

Doordat de leerlingen meerdere opgaven maken waarbij een dynamisch numeriek model gebruikt wordt om een probleem op te lossen, denken wij dat de leerlingen het nut van dynamisch modelleren inzien en zich tevens ontwikkelen in het herkennen van dergelijke problemen. Echter verwachten we dus dat dit leerdoel niet in zijn volledigheid wordt behaald.

Leerdoel 2: De leerling kan een dynamisch systeem modelleren door passende variabelen en relaties te kiezen.

Om na te gaan of de leerlingen dit leerdoel behalen, bekijken we de opgaven in het tweede en derde deel van de lesmodule. In deze opgaven formuleren de leerlingen een conceptueel model, bepalen de leerlingen een wiskundig model, en maken zij een computermodel. Bij ieder van deze stappen besteden de leerlingen aandacht aan dit leerdoel. Bij opgave 5 formuleren de leerlingen voor het eerst een conceptueel model, en de verkregen p' -waardes in Tabel 7 doen verwachten dat dit hen goed afgaat. Ook later in de lesmodule lukt het de leerlingen een conceptueel model bij een nieuwe situatie te formuleren. Echter scoren zij hier tegen het eind van de lesmodule bij opgave 14a en 15a niet meer de volledige punten voor. Uit de minder gestructureerde observatie komt naar voren dat de leerlingen tegen het eind van de lesmodule niet meer goed voor zich hadden uit welke onderdelen een conceptueel model ook alweer bestaat; een toestandsvariabele met begintoestand en een verwachte verandering (stijging of daling). Als de docent deze onderdelen met de leerlingen langsging, konden zij wel correct antwoorden. Dit doet geloven dat er geen sprake was van onkunde, en dat de leerlingen wel degelijk een conceptueel model kunnen formuleren.

Een wiskundig model bestaat uit een begintoestand van de toestandsvariabele en een differentiaalvergelijking. Bij opgave 7 besteden de leerlingen voor het eerst aandacht aan het bepalen van een differentiaalvergelijking. Op basis van de lage p' -waardes bij deze opgave, weergegeven in Tabel 7, wordt het beeld geschetst dat de leerlingen dit niet makkelijk vonden. Ook bij het bepalen van een wiskundig model bij een nieuwe situatie bij opgave 9b, lijken de leerlingen moeite te hebben met het opstellen van de differentiaalvergelijking. Uit de minder gestructureerde observatie blijkt dat het geven van de begintoestand lukt, maar dat de leerlingen het verband tussen de groeisnelheid en de afgeleide niet zien, waardoor het opstellen van de differentiaalvergelijking niet lukt. Op basis hiervan concluderen we dat de lesmodule de leerlingen onvoldoende ondersteunt om na een korte uitleg over differentiaalvergelijkingen bij opgave 7 direct zelf een differentiaalvergelijking op te stellen bij opgave 9b. Tegen het eind van de lesmodule slagen beide groepen leerlingen er bij opgave 14b in om zelfstandig het wiskundig model te bepalen. Dit doet suggereren dat de leerlingen hierin zijn gegroeid. Bij het voorleggen van een voorbeeldopgave tijdens de interviews met de leerlingen kregen we hetzelfde idee, gezien de leerlingen bij deze opgave correct het wiskundig model konden formuleren. Echter moeten we hieraan toevoegen dat de differentiaalvergelijkingen in de voorgenoemde opgaven ieder op elkaar leken. Slechts een van de twee groepen leerlingen heeft opgave 15 nog gemaakt. In deze opgave had een differentiaalvergelijking opgesteld moeten worden die verschilt van de andere opgaven, gezien hierin een som voorkomt in plaats van een product. Het lukte de leerlingen niet om deze differentiaalvergelijking zonder de hulp van de docent op te stellen, al kan dit ook te wijten zijn aan het feit dat dit de laatste opgave was en de leerlingen hun concentratie kwijt waren.

Tot slot behoort het maken van een computermodel ook tot dit leerdoel. Om een computermodel te kunnen maken, wordt bij opgaven 10 en 11 aandacht besteed aan respectievelijk hoe een computermodel tot een oplossing komt en hoe een computermodel opgebouwd is in MATLAB Simulink. Uit de verkregen p' -waardes in Tabel 7 blijkt dat de leerlingen deze opgaven goed gemaakt hebben. Aansluitend hierop maken de leerlingen bij opgave 12 hun eerste computermodel in MATLAB Simulink door een bestaand model na te maken. In de minder gestructureerde observaties wordt opgemerkt hoe gemakkelijk de leerlingen zich wegwijs maken in de nieuwe omgeving. Het namaken van het model gaat de leerlingen dan ook makkelijk af. In de rest van de lesmodule moeten de leerlingen zelf het computermodel bij het wiskundig model ontwerpen en ontwikkelen. De gemiddeld tot hoge p' -waardes bij opgave 13e, 14c en 15c in tabel 7 scheppen het beeld dat dit de leerlingen goed afgaat. In de minder gestructureerde observaties wordt daarentegen opgemerkt dat een van de groepen leerlingen nog moeite heeft met het ontwikkelen van het computermodel. Deze leerlingen vonden het lastig om een differentiaalvergelijking uit te werken in de vorm van een blokschema, ofwel om de gelijkenis tussen een wiskundig model en computermodel te zien. Hier zou in de lesmodule meer aandacht aan besteed kunnen worden.

Samenvattend denken wij dat de leerlingen met het volgen van de lesmodule kennis en vaardigheden hebben opgedaan om een dynamisch systeem te kunnen modelleren. Echter is dit aangeleerd in een beperkte context en zijn er meerdere tekenen dat het relationeel begrip bij de leerlingen nog vergroot kan worden. Om deze redenen denken wij dat dit leerdoel wel wordt behaald, maar dat er ook ruimte tot verbetering is.

Leerdoel 3: De leerling kan het modelgedrag relateren aan de werkelijkheid.

Bij meerdere opgaven in de lesmodule worden de leerlingen gevraagd modelgedrag te relateren aan de werkelijkheid. Dit houdt in dat de leerlingen met behulp van de verkregen oplossing bij een computermodel een vraag over de situatie moeten beantwoorden of aan moeten geven hoe het model verandert als de werkelijkheid anders blijkt te zijn. De leerlingen zijn hier mee bezig bij opgaven 8c, 8d, 13a, 13g, 14d, 14e, 15d, 15f, 15g en 15h. De voornamelijk hoge p' -waardes bij deze opgaven in Tabel 7 en 8 scheppen het beeld dat dit de leerlingen goed afgaat. Daarnaast blijkt uit de gestructureerde observatie dat de leerlingen bij deze opgaven geen inhoudelijke vragen hebben gesteld. Bij het voorleggen van een voorbeeldopgave tijdens de interviews met de leerlingen bleek eveneens dat de leerlingen modelgedrag konden relateren aan de werkelijkheid. Tabel 15 geeft de antwoorden van de leerlingen weer op de vraag wat er vergeten mee te nemen is in een model dat ongehinderde groei van een zonnebloem afbeeldt. Beide groepen leerlingen kwamen met logische suggesties. Een van de groepen kon vervolgens zelfs vertellen hoe dit in het wiskundig model aangepast kon worden. Al met al, zijn wij van mening dat de leerlingen dit leerdoel hebben behaald.

Tabel 15: De reacties van de leerlingen op de vraag wat er vergeten mee te nemen is in een model dat ongehinderde groei van een zonnebloem afbeeldt.

	Leerlingenreacties
Groep 1	Ik denk dat die op een gegeven moment afnemend moet groeien, omdat die bijvoorbeeld niet genoeg grondstoffen heeft om te blijven groeien. Dit gaat ervanuit dat die oneindig kan groeien, maar dat kan niet.
Groep 2	Nou, er is toch niet altijd genoeg licht of water ofzo, misschien moeten ze dat nog meenemen. (...) Ja, en soms gaat die ook gewoon stuk, dan waait het te hard of wordt de groei belemmerd door iets anders.

6. Conclusie

In dit hoofdstuk proberen we de onderzoeksvraag van dit ontwerponderzoek te beantwoorden. Deze onderzoeksvraag was: “Hoe kan een lesmodule over dynamisch modelleren voor vijfdejaars vwo-leerlingen die wiskunde B volgen aanzetten tot het ontwikkelen van computational thinking?”

In het beantwoorden van de onderzoeksvraag hebben we twee onderzoeksfases doorlopen. In de eerste onderzoeksfase hebben we ons verdiept in computational thinking en dynamisch modelleren, en hebben we gekeken naar geschikte didactiek om beiden te onderwijzen. Ook eerder ontworpen lesmateriaal dat gebruikt is om aspecten van computational thinking aan te leren is hierbij aan bod gekomen. Het resultaat van deze onderzoeksfase heeft geresulteerd in zes ontwerpeisen die besproken zijn in Hoofdstuk 3. In de tweede onderzoeksfase hebben we een lesmodule ontworpen aan de hand van de eerdergenoemde ontwerpeisen. De lesmodule en het bijbehorende correctievoorschrift zijn de eerste resultaten van dit onderzoek. De lesmodule is voorgelegd aan een expertpanel en uitgevoerd door vier leerlingen van de locatie Kottenpark van Het Stedelijk Lyceum in Enschede. De verkregen feedback en de analyse van de uitvoering zijn besproken in Hoofdstuk 5. Op basis van de genoemde resultaten zullen we de onderzoeksvraag zo goed mogelijk proberen te beantwoorden. Vervolgens geven we enkele aanbevelingen voor de verbetering van de lesmodule en verder onderzoek.

6.1 Conclusies en discussie

De conclusies van dit onderzoek zijn op te delen in de twee onderzoeksfases zoals hiervoor besproken. Hieronder bespreken we voor beide fases de belangrijkste conclusies en discussiepunten. Als laatst zullen we dieper ingaan op de discussiepunten en daarmee de beperkingen van dit onderzoek bespreken.

6.1.1 Eerste onderzoeksfase

In de eerste onderzoeksfase hebben we ons verdiept in computational thinking en dynamisch modelleren. We hebben een drietal deelvragen beantwoord, waarvan de beantwoording bij heeft gedragen aan het formuleren van de ontwerpeisen.

Om de eerste deelvraag te beantwoorden hebben we gekeken naar de definitie van computational thinking. Jeanette Wing, de grondlegger van computational thinking, biedt hierin de meest omvangrijke definitie. Zij definieert computational thinking als de denkprocessen die betrokken zijn bij het formuleren van een probleem en het uitdrukken van de oplossing(en) op een manier dat een computer – mens of machine – ze effectief kan uitvoeren [1]. Aan de hand van deze definitie zijn velen gaan overdenken welke vaardigheden onder computational thinking vallen. Weintrop et al. geven een overzicht van deze vaardigheden en komen met een taxonomie bij computational thinking. Twee van de categorieën in deze taxonomie, modelleren en simuleren, en computationeel probleemoplossen, sluiten aan bij het onderwerp dynamisch modelleren. Om deze reden hebben we aan de hand van de praktijken uit deze categorieën drie vaardigheden geformuleerd waar binnen de lesmodule aandacht aan besteed wordt. Deze vaardigheden zijn verwerkt in ontwerpeis 6.

Voor de tweede deelvraag hebben we gekeken naar het werk van Joris van der Meulen [21], Neeft [22], Den Hartogh [24], Slager [25] en Wisse van der Meulen [26]. Het ontwikkelde lesmateriaal van deze onderzoekers en hun aanbevelingen hebben op verschillende manieren bijgedragen aan onze ontwerpeisen. Slager adviseert bijvoorbeeld in plaats van een werkmiddag een lessenserie te ontwerpen. Ondanks dat deze aanbeveling ter harte is genomen, is vanwege logistieke argumenten toch gekozen voor een werkochtend zoals beschreven bij ontwerpeis 1. Wisse van der Meulen benadrukt het belang van een duidelijke vormgeving welke bijdraagt aan de structuur van de lesmodule. Dit heeft ertoe geleid dat ontwerpeis 2 is opgesteld. Verder is in alle vier de onderzoeken

gekeken naar realistische contexten om het aanleren van vaardigheden met betrekking tot computational thinking te ondersteunen. Hierbij adviseert Den Hartogh de opgaven in de lesmodule op te bouwen wat betreft de wiskundige aard. Ontwerpeis 4 laat zien dat ook binnen dit onderzoek gezocht wordt naar realistische contexten en het advies van Den Hartogh hierin meegenomen wordt. Joris van der Meulen adviseert daarnaast een controlemoment te verwerken in de lesmodule om leerlingen waar nodig te corrigeren of op weg te helpen. Aansluitend hierop adviseert Neeft een bewuste afweging te maken voor het wel of niet geven van klassikale uitleg om dezelfde reden. Aan de hand van deze adviezen is besloten de checkpoints toe te voegen, zoals vermeld bij ontwerpeis 5. Tot slot adviseert Wisse van der Meulen guided reinvention in te zetten om computational thinking aan te leren. Deze didactische aanpak is ook bij de andere onderzoekers al naar voren gekomen, wat maakt dat dit advies verwerkt is in ontwerpeis 5.

De derde deelvraag betreft dynamisch modelleren en de manier waarop dit onderwezen kan worden. Modelleren wordt binnen de wiskunde omschreven als een praktisch en creatief proces waarbij realistische problemen in wiskundige vorm worden vertaald [28]. In internationale onderzoeksliteratuur wordt hier de terugvertaaltap aan toegevoegd, om na te gaan of de modeloplossing inderdaad het praktijkprobleem oplost [29]. Spandaw en Zwaneveld hebben aan de hand hiervan een modelleercyclus ontworpen [30], welke de basis kan vormen voor modelleeronderwijs. De cyclus bestaat uit verschillende activiteiten die doorlopen worden, waaronder conceptualiseren, mathematiseren, oplossen, interpreteren en valideren. Deze activiteiten blijken uiteindelijk ook gekoppeld te kunnen worden aan de eerdergenoemde computational thinking vaardigheden waar binnen de lesmodule aandacht aan besteed wordt.

6.1.2 Tweede onderzoeksfase

In de tweede fase van het onderzoek kwam een tweetal deelvragen aan bod. De eerste deelvraag betreft het ontwerp van de lesmodule en de manier waarop computational thinking hierin is verwerkt. Het uiteindelijke ontwerp en het bijbehorende correctievoorschrift zijn te vinden in Appendix A. Computational thinking is in de lesmodule verwerkt door aandacht te besteden aan drie vaardigheden. Deze vaardigheden zijn: (1) representeren van ideeën op een computationeel zinvolle manier, (2) ontwerpen en ontwikkeling van een computationeel model en (3) gebruiken van een computationeel model om een situatie te begrijpen. Ieder van deze vaardigheden is verwerkt in de lesmodule. Een gedetailleerde verantwoording hierbij is te vinden in Hoofdstuk 5.

Om de tweede deelvraag van deze onderzoeksfase te beantwoorden, analyseren we het ontwerp met betrekking tot de opgestelde ontwerpeisen. Hierbij blikken we terug op de feedback van het expertpanel, en de analyse van de uitvoering inclusief de leerlingeninterviews. Hieronder zullen we per ontwerpeis kort beschrijven of deze naar onze mening behaald is.

Ontwerpeis 1: De lesmodule kan als werkmiddag van 180 minuten gebruikt worden.

- Expertpanel: De ervaringsdeskundigen geven aan dat zij het lastig vinden om in te schatten wat de duur van de lesmodule zal zijn. De duur van de lesmodule is volgens hen namelijk afhankelijk van hoe vlug de docent de checkpoints af kan handelen en hoe gemakkelijk de leerlingen zich wegwijzen maken in MATLAB Simulink.
- Observatieschema: Een van de twee groepen leerlingen heeft de lesmodule binnen de tijd afgerond. De andere groep is voor het eind van de lesmodule gestopt, maar had tijd over.
- Interviews: Beide groepen leerlingen gaven aan dat zij tegen het eind van de lesmodule hun concentratie verloren en mogelijk om deze reden de tijd niet hebben volbracht.

Uit de verkregen resultaten blijkt dat vijfdejaars vwo-leerlingen in staat zijn de lesmodule binnen de beoogde tijd af te ronden, waarmee de lesmodule aan de eerste ontwerpeis voldoet.

Als we echter kritisch kijken naar deze ontwerpeis, dan zien we twee punten van discussie. Allereerst is de lesmodule uitgevoerd in een kleine setting, waardoor de docent de checkpoints vlug kon afhandelen en waar nodig de leerlingen direct kon helpen. Zoals het expertpanel aangeeft is de duur van de lesmodule mogelijk afhankelijk van hoeveel ruimte de docent heeft. Als de lesmodule wordt gegeven aan een volledige klas, dan kan het zijn dat de leerlingen langer moeten wachten tot zij voorbij een checkpoint mogen of hun vraag beantwoord krijgen. Hiermee zou de duur van de lesmodule kunnen oplopen. Verder moet opgemerkt worden dat de leerlingen de lesmodule op vrije basis hebben gemaakt, wat wil zeggen dat er geen cijfermatige consequentie aan de uitvoering hing. Dit kan ervoor hebben gezorgd dat de leerlingen minder hard hun best hebben gedaan. Mocht er een cijfermatige consequentie toegevoegd worden aan de lesmodule, dan kan de duur van de lesmodule juist lager uitvallen.

Ontwerpeis 2: De lesmodule heeft een duidelijke structuur en een verzorgde lay-out.

- Expertpanel: De ervaringsdeskundigen zijn het erover eens dat de lesmodule een duidelijke structuur en een verzorgde lay-out heeft.
- Interviews: De leerlingen vonden dat de lesmodule een duidelijke structuur had. Een van de groepen benoemde hierbij ook terecht de inzet van de gekleurde vlakken welke gebruikt werden om de tekst, opgaven en checkpoints van elkaar te onderscheiden. Over de lay-out waren de meningen verdeeld, maar uiteindelijk wel positief.

Het algemene beeld is dat de lesmodule aan deze ontwerpeis voldoet. Daarnaast kunnen we concluderen dat het gelukt is om de vooraf vastgestelde regels met betrekking tot de lay-out aan te houden in het ontwerp. Hiermee bedoelen we het cursief aangeven van belangrijke begrippen, de smalle kolombreedte, de witregel tussen opvolgende alinea's en de lettergrootte.

Ontwerpeis 3: De opgaven uit de lesmodule sluiten aan op het niveau van vijfdejaars vwo-leerlingen die wiskunde B volgen.

- Expertpanel: De ervaringsdeskundigen verwachten dat de lesmodule aansluit op het niveau van vijfdejaars vwo-leerlingen die wiskunde B volgen. Wel merken zij op dat de opgaven tot het laatste deel van de lesmodule redelijk afgebakend zijn, waar een vijfdejaars vwo-leerling mogelijk meer zelfstandigheid en -redzaamheid aan zou kunnen.
- Toets- en itemanalyse: De verkregen p' -waardes per opgave kunnen een beeld schetsen bij het niveau van de opgaven, maar hier kunnen geen directe conclusies uit getrokken worden wegens het kleine aantal leerlingen. Over het algemeen zagen we een gevarieerd beeld in de verkregen p' -waardes. Enkele opgaven leverden een lage p' -waarde op, wat een indicatie kan zijn dat deze opgaven te moeilijk zijn. Dit betreft opgaven 4b, 7d, 7e, 7h, 8a, 8b, 13b en 15e. Daarnaast leverde opgave 11 opvallend veel hoge p' -waardes op, wat een indicatie kan zijn dat deze opgave te makkelijk is.
- Interviews: Het algemene beeld uit de interviews is dat het niveau van de lesmodule goed was. De leerlingen gaven aan dat een aantal opgaven lastig was, maar dat ze er verder goed tot gemakkelijk doorheen konden komen. Een van de groepen leerlingen gaf aan dat opgave 5-8 de lastige opgaven van de lesmodule waren, wat overeenkomt met de resultaten van de toets- en itemanalyse. Dit suggereert overigens het tegengestelde van de opmerking van het expertpanel, de leerlingen hebben geen behoefte aan meer zelfstandigheid en -redzaamheid in dit deel van de lesmodule.

Uit de verkregen resultaten blijkt dat de leerlingen goed in staat zijn de lesmodule succesvol af te ronden, waarmee aan de derde ontwerpeis wordt voldaan. Wel kunnen er enkele verbeteringen gedaan worden om het niveau van de lesmodule beter aan te laten sluiten. Deze suggesties worden bij de aanbevelingen besproken. Verder kunnen we concluderen dat we ons in de lesmodule hebben gehouden aan de andere vier voorwaarden die onder deze ontwerpeis vallen. De lesmodule begint met enkele instapopgaven, want de p' -waardes van deze opgaven zijn hoog. Uit de interviews kan opgemaakt worden dat de leerlingen door middel van de lesmodule wel uitgedaagd werden, maar

dat het niveau van de opgaven hen niet ontmoedigden. Ook hebben de leerlingen in tweetallen aan de lesmodule gewerkt en worden de opgaven in de lesmodule waar nodig ondersteunt met een werkblad.

Als we kritisch kijken naar deze ontwerpeis, dan zien we wel een punt van discussie. Binnen dit onderzoek is de lesmodule namelijk uitgevoerd door slechts vier vijfdejaars vwo-leerlingen en op basis van deze uitvoering lijkt de lesmodule aan te sluiten op het niveau van de doelgroep. Echter, om hier een volledig beeld bij te vormen, zal de lesmodule nogmaals uitgevoerd moeten worden door meerdere leerlingen uit de doelgroep. Dit zal de analysemogelijkheid vergroten, en daarmee een betrouwbaardere conclusie verschaffen.

Ontwerpeis 4: De opgaven komen voort uit een zinvolle context die aansluit bij de belevingswereld van de leerlingen.

- Expertpanel: De ervaringsdeskundigen zijn van mening dat de opgaven voortkomen uit zinvolle contexten die aansluiten bij de belevingswereld van de leerlingen.
- Interviews: De leerlingen hadden een verdeelde mening over de onderwerpen van de opgaven. Drie van de vier leerlingen vonden de onderwerpen van de opgaven interessant, ten opzichte van een leerling die deze niet interessant vond.

Uit de verkregen resultaten blijken de opgaven voort te komen uit zinvolle contexten. Daarnaast sluiten de opgaven in het algemeen ook aan op verschillende vakken binnen school, en daarmee op de belevingswereld van de leerlingen. Verder werd met betrekking tot deze ontwerpeis geadviseerd om de lesmodule niet-wiskundig contextrijk te beginnen, om dit vervolgens op te bouwen wat betreft de wiskundige aard. Dit advies is verwerkt in de lesmodule.

Ontwerpeis 5: Om de lesmodule te volgen is beperkte sturing van de docent nodig.

- Expertpanel: De ervaringsdeskundigen geven enerzijds aan dat de lesmodule dusdanig is opgebouwd dat deze alle benodigde informatie bevat om de opgaven te maken. Anderzijds wordt verwacht dat de leerlingen bij de laatste helft van de opgaven enige sturing nodig zullen hebben.
- Observatieschema: Er zijn tijdens de lesmodule niet opvallend veel vragen gesteld. Opgave 7 heeft de meeste vragen bij de leerlingen opgeroepen, wat laat zien dat de leerling bij deze opgave enige ondersteuning van de docent nodig hebben. Tegen het eind van de lesmodule werden daarnaast ook wat meer vragen gesteld, maar dit kan samenhangen met het feit dat de leerlingen hun concentratie verloren.
- Interviews: De leerlingen geven aan dat zij op een aantal momenten wel hulp nodig hadden, maar geen van de leerlingen vond dat te vaak. Een van de leerlingen geeft daarbij ook aan dat zij de lesmodule waarschijnlijk met minder hulp hadden kunnen volbrengen.

Op basis van de verkregen resultaten blijkt de lesmodule te voldoen aan deze ontwerpeis. Hier kunnen we aan toevoegen dat de drie voorwaarden die onder deze ontwerpeis vallen verwerkt zijn in de lesmodule. De theorie, voorbeelden en opgaven zijn duidelijk verwoord, binnen de opbouw van de lesmodule is gebruik geprobeerd te maken van het principe van guided reinvention, en de lesmodule bevat meerdere controlemomenten om te leerlingen enige sturing te bieden.

Echter, ook hierbij een kanttekening. De leerlingen hebben de lesmodule op vrije basis gemaakt, wat wil zeggen dat er geen cijfermatige consequentie aan de uitvoering hing. Dit kan ervoor hebben gezorgd dat de leerlingen minder hard hun best hebben gedaan en als gevolg daarvan minder vragen hebben gesteld. Mocht er een cijfermatige consequentie toegevoegd worden aan de lesmodule, dan kan het zijn dat het aantal vragen, en daarmee de benodigde sturing, toeneemt.

Ontwerpeis 6: De inhoudelijke leerdoelen worden door de leerlingen behaald.

In de beantwoording van de vorige deelvraag hebben we al aangegeven dat enkele vaardigheden met betrekking tot computational thinking verwerkt zijn in de lesmodule. Naast het ontwikkelen van deze vaardigheden, is de lesmodule er ook op gericht dat de leerlingen drie inhoudelijke leerdoelen met betrekking tot dynamisch modelleren behalen. Hieronder beschrijven we of de leerlingen deze leerdoelen hebben behaald.

Leerdoel 1: De leerling herkent een probleem dat opgelost kan worden met een dynamisch numeriek model.

Het eerste leerdoel wordt deels behaald door de leerlingen. Aan de hand van de leerlingeninterviews kan geconcludeerd worden dat de leerlingen inzicht hebben in het nut van dynamisch modelleren, wat een eerste stap is in het behalen van dit leerdoel. Echter, zoals ervaringsdeskundigen van het expertpanel terecht opmerkten, is de lesmodule niet direct gericht op het herkennen van problemen die met een dynamisch numeriek model opgelost kunnen worden. De leerlingen behandelen wel meerdere voorbeelden van problemen die opgelost worden met een dynamisch numeriek model, maar ze worden niet gevraagd een dergelijk probleem te herkennen in een nieuwe situatie. Toch zijn wij van mening dat de leerlingen zich hiermee wel ontwikkelen in het herkennen van een probleem dat opgelost kan worden met een dynamisch numeriek model, want de voorbeelden geven de leerlingen de mogelijkheid om een dergelijk probleem in het vervolg makkelijker te herkennen.

Leerdoel 2: De leerling kan een dynamisch systeem modelleren door passende variabelen en relaties te kiezen.

Om te bepalen of de leerlingen dit leerdoel hebben behaald, gaan we na of de leerlingen een conceptueel model kunnen formuleren, een wiskundig model kunnen bepalen en een computermodel kunnen maken. Tijdens de uitvoering blijkt dat het formuleren van een conceptueel model de leerlingen goed afgaat. Het bepalen van een wiskundig model, en dan specifiek het opstellen van de differentiaalvergelijking, vinden de leerlingen in eerste instantie moeilijk. De reden hiervoor is waarschijnlijk dat zij het verband tussen de groeisnelheid en de afgeleide niet zien, en hier binnen de lesmodule onvoldoende ondersteuning in wordt geboden. Bij de aanbevelingen wordt een suggestie gedaan om dit te verbeteren. Toch slagen de leerlingen er tegen het eind van de lesmodule en tijdens de leerlingeninterviews in om zelfstandig een wiskundig model te bepalen. Hier moeten we echter aan toevoegen dat de differentiaalvergelijkingen van dezelfde soort waren als die de leerlingen eerder in de lesmodule hadden gezien. Dit maakt het lastig te onderscheiden in hoeverre de leerlingen begrijpen wat zij doen. Het maken van een computermodel lijkt de leerlingen goed af te gaan. Hoewel ook hierbij wordt opgemerkt dat de leerlingen de gelijkenis tussen een wiskundig model en computermodel niet direct zien, en daarom hier en daar hulp nodig hebben bij het ontwerpen van het blokschema. Al met al, zouden we zeggen dat de leerlingen het tweede leerdoel wel hebben behaald, maar dat er ook ruimte tot verbetering is.

Leerdoel 3: De leerling kan het modelgedrag relateren aan de werkelijkheid.

Tot slot blijkt dat de leerlingen zeer goed in staat zijn modelgedrag te relateren aan de werkelijkheid, waarmee de leerlingen dit leerdoel behalen. Zowel bij de toets- en itemanalyse als de leerlingeninterviews komt naar voren dat de leerlingen met behulp van de verkregen oplossing bij een computermodel een vraag over de werkelijke situatie kunnen beantwoorden of aan kunnen geven hoe het model verandert als de werkelijkheid anders blijkt te zijn.

Voorwaardelijk voor het behalen van het tweede leerdoel is dat de leerlingen ideeën op een computationeel zinvolle manier kunnen representeren en een computationeel model kunnen ontwerpen en ontwikkelen. Verder geldt dat de leerlingen in het behalen van het derde leerdoel eigenlijk ook gebruik maken van een computationeel model om een situatie te begrijpen. Dit

betekent dat de leerlingen zich bij het doorwerken van de lesmodule ook ontwikkelen in enkele aspecten van computational thinking. Als we nu kijken naar de oorspronkelijke onderzoeksvraag, dan kunnen we concluderen dat de lesmodule over dynamisch modelleren in Appendix A vijfdejaars vwo-leerlingen die wiskunde B volgen aanzet tot het ontwikkelen van computational thinking. Uit dit onderzoek blijkt dat dynamisch modelleren goed aansluit op de bovengenoemde aspecten van computational thinking. Daarnaast biedt het gebruik van zinvolle contexten leerlingen de mogelijkheid relationeel begrip hierbij te ontwikkelen.

6.1.3 Beperkingen en implicaties

In deze sectie beschrijven we de beperkingen van dit onderzoek en bekijken we mogelijke implicaties van dit onderzoek op de onderwijspraktijk.

Binnen dit onderzoek is de lesmodule uitgevoerd door vier vijfdejaars vwo-leerlingen, wat slechts twee uitwerkingen van het materiaal heeft opgeleverd. Hoewel een analyse van deze uitwerkingen voor ons gevoel voldoende data heeft opgeleverd om een beeld te schetsen van waaruit de onderzoeksvragen beantwoord konden worden, had een groter aantal leerlingen meer en gedetailleerdere informatie kunnen opleveren. Binnen de toets- en itemanalyse kan dit bijvoorbeeld betekenen dat er naast de p' -waardes ook r_{it} -waardes berekend konden worden, welke samen een duidelijker beeld kunnen schetsen van het niveau van de opgaven, en dus het niveau van de lesmodule. Buiten dat een groter aantal leerlingen meer en gedetailleerdere informatie had kunnen opleveren, had dit ook de setting van de uitvoering veranderd. Onze verwachting is dat de duur van de lesmodule en de hoeveelheid vragen die de leerlingen stellen voor een deel afhankelijk zijn van de hoeveelheid ruimte die de docent heeft. In de huidige uitvoering kon de docent de checkpoints vlug afhandelen en de leerlingen direct hulp bieden als zij dit nodig hadden. Wordt de lesmodule gegeven aan een volledige klas, dan kan dit anders lopen. Hiermee had waarschijnlijk een beter beeld ontstaan van de duur van de lesmodule en de benodigde hoeveelheid sturing. Verder hadden meer ervaringen van de leerlingen ook bij de andere ontwerpeisen een vollediger beeld geschetst.

Een tweede punt dat de dataverzameling rondom de uitvoering mogelijk heeft beïnvloed is het feit dat de lesmodule is afgenomen op vrije basis, ofwel zonder een cijfermatige consequentie voor de leerlingen. Een cijfermatige consequentie kan zorgen voor extrinsieke motivatie [33], wat kan betekenen dat de leerlingen in de huidige uitvoering deze motivatie niet hebben gehad en hierdoor minder hard hun best hebben gedaan. Dit kan allereerst invloed hebben gehad op de duur van de lesmodule. De tijdsindicaties uit Tabel 4 zouden mogelijk hoger zijn uitgevallen als de lesmodule een cijfermatige consequentie had, gezien meer gemotiveerde leerlingen langer doorwerken voor een goed resultaat. Daarnaast zou deze externe motivator invloed gehad kunnen hebben op de benodigde hoeveelheid sturing bij de lesmodule, omdat meer gemotiveerde leerlingen meer vragen stellen. Hiermee kunnen ook de resultaten over het niveau van de lesmodule anders uitvallen, gezien de leerlingen beter zullen presteren naarmate meer van hun vragen zijn beantwoord. Aan de andere kant zou deze prestatiedruk ook een negatief effect gehad kunnen hebben op enkele leerlingen. Om deze reden is het lastig duidelijke gevolgen te benoemen bij deze beperking.

Tot slot bespreken we kort twee beperkingen binnen het lesmateriaal. De lesmodule is er op gericht leerlingen aan te zetten in het ontwikkelen van computational thinking en eerder hebben we geconcludeerd dat de lesmodule hier ook daadwerkelijk in slaagt. Het is echter goed om nogmaals te benoemen dat deze conclusie betrekking heeft op drie vaardigheden, terwijl computational thinking meer vaardigheden omvat. Aan de hand van onze lesmodule zullen leerlingen dus niet een volledig spectrum aan computational thinking vaardigheden ontwikkelen, hoewel dit binnen de omvang van dit ontwerp onderzoek ook niet de intentie was. Daarnaast wordt de leerlingen met de lesmodule geleerd te modelleren in MATLAB Simulink. Om dit programma te gebruiken moet een licentie aangevraagd worden. MATLAB biedt de mogelijkheid gebruik te maken van een gratis 30-dagen

licentie, welke passend is voor de strekking van deze lesmodule, maar voor gebruik op lange termijn zal een betaalde licentie aangevraagd moeten worden. Docenten zullen hier rekening mee moeten houden mochten zij de lesmodule in hun lessen willen gebruiken.

Naast de hierboven genoemde beperkingen heeft het onderzoek ook een aantal zaken opgeleverd die waardevol zijn voor de onderwijspraktijk. Sinds enkele jaren moet er in het funderend onderwijs aandacht besteed worden aan 21^{ste}-eeuwse vaardigheden, zoals digitale geletterdheid [7]. Een van de vier domeinen van digitale geletterdheid is computational thinking [8]. Gezien computational thinking een toenemende rol binnen het onderwijs gaat innemen, is het ontwikkelen van lesmateriaal rond dit thema belangrijk. Op dit moment wordt door het Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek nog onderzocht hoe computational thinking concreet geïntegreerd kan worden in het wiskundecurriculum [10], maar verschillende onderzoekers hebben al lesmateriaal ontwikkeld om hier een beeld bij te krijgen. Ook dit onderzoek draagt hieraan bij en laat zien dat dynamisch modelleren een geschikt onderwerp is voor lesmateriaal gericht op het ontwikkelen van enkele aspecten van computational thinking. Nieuw lesmateriaal met deze focus kan voortbouwen op de verkregen resultaten en conclusies binnen dit onderzoek. Daarnaast lijkt de door ons ontwikkelde lesmodule geschikt om te gebruiken bij het vak wiskunde B in de vijfde klas van het vwo. Docenten met ruimte in hun planning zouden enkele lessen kunnen gebruiken om de lesmodule te behandelen. Hiermee zetten zij hun leerlingen aan tot het ontwikkelen van computational thinking en introduceren zij dynamisch modelleren als interessante toepassing binnen de wiskunde. Verder wordt aan de hand van de lesmodule een eerste stap gezet in het verantwoord gebruiken van technologie om problemen op te lossen en de wiskunde hierachter te begrijpen. Uit een rapport van het ontwikkelteam 'Rekenen en wiskunde' van curriculum.nu bleken dit essentiële punten om het wiskundecurriculum meer te laten aansluiten bij huidige en toekomstige ontwikkelingen [9]. Dit onderzoek laat daarmee zien dat het mogelijk is deze focus te verwerken in nieuw lesmateriaal.

6.2 Aanbevelingen

Hoewel de lesmodule geschikt lijkt om leerlingen kennis te laten maken met dynamisch modelleren zijn er een aantal aspecten aan het ontwerp die verbeterd kunnen worden:

- Het eerste leerdoel van de lesmodule wordt slechts deels behaald. De leerlingen laten zien inzicht te hebben in het nut van dynamisch modelleren, en kunnen aan de hand van de lesmodule enkele problemen opnoemen die opgelost kunnen worden met een dynamisch numeriek model. De lesmodule is er echter niet direct op gericht dat leerlingen dergelijke problemen ook kunnen herkennen. Om de aansluiting van de lesmodule op het leerdoel te verbeteren, is het een optie om opgaven toe te voegen waarin leerlingen leren problemen te herkennen die door middel van dynamisch modelleren opgelost kunnen worden. Naar ons idee zou dit de duur van de lesmodule echter dusdanig verlengen, dat het ons beter lijkt het eerste leerdoel aan te passen naar: de leerlingen heeft inzicht in het nut van dynamisch modelleren. Dit leerdoel sluit namelijk goed aan op de lesmodule, en op basis van de huidige uitvoering kunnen we al concluderen dat de leerlingen dit kunnen behalen.
- Uit de toets- en itemanalyse van de uitwerkingen van de leerlingen komt naar voren dat de leerlingen opgave 7 niet makkelijk vinden. Bij deze opgave maken de leerlingen kennis met differentie- en differentiaalvergelijkingen en onderzoeken zij zelf wat deze concepten inhouden en hoe ze aan elkaar gerelateerd zijn. Om binnen deze opgave meer structuur te bieden adviseren we de opgave op te splitsen en enkele stappen beter te benadrukken. In de huidige opgave wordt bijvoorbeeld van de leerlingen gevraagd zelf uit te zoeken hoe een differentievergelijking werkt. Om de leerlingen hierin te ondersteunen kan hen gevraagd worden de vergelijking eens in te vullen en ermee te rekenen. In de keuze om de tijdsstap van de differentievergelijking te verkleinen kan meer benadrukt worden dat we hierin onze aannames aanpassen. Daarnaast zouden de laatste drie deelopgaven een afzonderlijke opgave kunnen worden, zodat uiteindelijk de aandacht gericht wordt op wat een

differentiaalvergelijking inhoudt. Hierbij is het belangrijk te benadrukken dat deze vergelijking een verband weergeeft tussen de afgeleide functie en de originele functie, ofwel een verband tussen de afgeleide in een punt en de functiewaarde van dit punt.

- Aan de hand van de minder gestructureerde observatie werd daarnaast duidelijk dat de leerlingen enige verwachte voorkennis met betrekking tot het concept afgeleide misten. Dit had tot gevolg dat de leerlingen niet direct begrepen dat het concept groeisnelheid gelijk staat aan het concept afgeleide. Hier moet binnen de lesmodule kort aandacht aan besteed worden. Ons voorstel is om dit aansluitend op opgave 7 te doen, waar eerder is aanbevolen om meer aandacht te besteden aan wat een differentiaalvergelijking inhoudt. Het moet de leerlingen duidelijk worden dat de groeisnelheid, ofwel de helling van een grafiek, toe- of afneemt afhankelijk van de functiewaarden. Verder was het de leerlingen niet duidelijk dat de afgeleide in een punt gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in dat punt. Dit leidde ertoe dat de leerlingen moeite hadden met opgave 8. Bij opgave 10 wordt tevens van deze voorkennis uitgegaan. Om deze reden kan overwogen worden om de tip bij opgave 8 uit te breiden zodat direct duidelijk is wat de leerlingen moeten doen. Een andere optie is om enkele stappen uit te schrijven zodat de leerlingen op gang worden geholpen, zoals bij opgave 10 wel is gedaan. Tot slot verwachten wij dat het checkpoint na opgave 10 verwijderd kan worden als bij de opgaven daarvoor, zoals geadviseerd, expliciet aandacht besteed wordt aan wat een differentiaalvergelijking inhoudt.
- De toets- en itemanalyse liet verder zien dat de leerlingen opgave 11 makkelijk vonden. De leerlingen scoorde hoog en bij de minder gestructureerde observatie komt naar voren dat de leerlingen binnen deze opgave veel herhaling ervoeren. Interessant is echter dat later in de lesmodule duidelijk wordt dat de leerlingen moeite hebben met het ontwerpen van een blokdiagram op basis van een differentiaalvergelijking. Opgave 11 had de relatie tussen de differentiaalvergelijking en het blokdiagram moeten illustreren, maar blijkbaar is dit niet binnengekomen bij de leerlingen. Om dit te verbeteren raden we aan de leerlingen bij opgave 11 zelf de wiskundige uitdrukkingen bij de in- en output van de verschillende blokken te laten zetten. De verwachting is dat de leerlingen op deze manier een duidelijk verband gaan zien tussen de wiskundige uitdrukking, die uiteindelijk leiden tot de differentiaalvergelijking, en het blokdiagram.

Naast aanbevelingen met betrekking tot het ontwerp, hebben we ook enkele suggesties voor verder onderzoek bij deze lesmodule. Naar aanleiding van de besproken beperkingen van dit ontwerponderzoek, adviseren wij de lesmodule nogmaals uit te voeren bij enkele volledige klassen om een volledig beeld te krijgen van de lesmodule met betrekking tot de ontwerpseisen. Daarbij adviseren we de lesmodule niet als werkochtend of -middag uit te voeren, maar verdeeld over meerdere lessen te behandelen. Hiermee wordt voorkomen dat leerlingen tegen het eind van de lesmodule hun concentratie verliezen en niet meer presteren. Verder zouden we docenten die de lesmodule op vrije basis bij de leerlingen gaan afnemen een keuze willen geven tussen het gebruik van de checkpoints en de signaaltabel, welke is besproken bij de feedback van de ervaringsdeskundigen. Zowel de checkpoints als de signaaltabel geven de docent de mogelijkheid om de leerlingen waar nodig te corrigeren of vooruit te helpen. Echter kunnen we ons voorstellen dat iedere docent een voorkeur heeft voor een van beide.

Literatuurlijst

- [1] Wing, J.M. (2014). *Computational thinking benefits society*, 40th Anniversary Blog of Social Issues in Computing. Geraadpleegd van <http://socialissues.cs.toronto.edu/index.html%3Fp=279.html> op 19-03-2022.
- [2] Wing, J.M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, 49(3), 33–35.
- [3] Timmer, M. & Tolboom, J. (2019). Computational thinking – een vooruitblik op het wiskundeonderwijs van de toekomst. *Nieuwe Archief voor Wiskunde*, 5/20(1), 42–45.
- [4] Association for Computing Machinery (2014). *Rebooting the Pathway to Success – Preparing Students for Computing Workforce Needs in the United States* (Rapport). New York: Auteur.
- [5] Frey, C.B. & Osborne, M.A. (2017). The future of employment: How susceptible are jobs to computerisation? *Technological forecasting and social change*, 114, 254–280.
- [6] Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (2012). *Digitale geletterdheid in het voortgezet onderwijs* (Rapport). Amsterdam: Auteur.
- [7] Thijs, A., Fisser, P. & Van der Hoeven, M. (2014). *21e eeuwse vaardigheden in het curriculum van het funderend onderwijs* (Rapport). Enschede: SLO.
- [8] Curriculum.nu (2019). *Digitale geletterdheid*. Geraadpleegd van <https://www.curriculum.nu/voorstellen/digitale-geletterdheid/> op 23-03-2022.
- [9] Curriculum.nu (2019). *Rekenen & Wiskunde*. Geraadpleegd van <https://www.curriculum.nu/voorstellen/rekenen-wiskunde/> op 25-03-2022.
- [10] NRO. *Computational thinking and mathematical thinking: digital literacy in mathematics curricula*. Geraadpleegd van <https://www.nro.nl/onderzoeksprojecten/computational-thinking-and-mathematical-thinking-digital-literacy-mathematics> op 25-03-2022.
- [11] Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. New York: Basic Books.
- [12] Papert, S. (1972). Teaching Children Thinking. *Programmed Learning and Educational Technology*, 9(5), 245–255.
- [13] Weintrop, D., Beheshti, E., Horn, M., Orton, K., Jona, K., Trouille, L., & Wilensky, U. (2016). Defining Computational Thinking for Mathematics and Science Classrooms. *Journal of Science Education and Technology*, 25, 127–147.
- [14] Skemp, R.R. (2016). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 12(2), 88–95.
- [15] Marzano, R.J., Miedema, W. (2018). *Leren in vijf dimensie: moderne didactiek voor het voortgezet onderwijs* (7de druk). Assen: Koninklijke van Gorcum B.V.
- [16] Ogegbo, A.A., & Ramnarain, U. (2021). A systematic review of computational thinking in science classrooms. *Studies in Science Education*, 1–28.
- [17] Next Generation Science Standard Lead States (2013). *Next-Generation Science Standards: For States, By States* (Rapport). Washington, DC: National Academies Press.
- [18] Lee, I., Martin, F., Denner, J., Coulter, B., Allan, W., Erickson, J., Malyn-Smith, J., & Werner, L. (2011). Computational thinking for youth in practice. *ACM Inroads*, 2(1), 32–37.
- [19] Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
- [20] Dekker, T., Vos, P. & Lagerwaard, K. (2019). Wiskundetoetsen – Ontwerpen van wiskundeopgaven. In Drijvers, P., Streun, A. van, & Zwaneveld, G., *Handboek wiskundendidactiek* (7de druk, p. 299–338). Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- [21] Van der Meulen, J. (2017). *Computational thinking in een praktische opdracht voor 5 vwo wiskunde b* (Masterscriptie). Universiteit Twente, Enschede.
- [22] Neeft, J.M. (2019). *Computationeel denken bij vwo wiskunde A* (Masterscriptie). Universiteit Twente, Enschede.
- [23] Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36.
- [24] Den Hartogh, J. (2020). *Supporting students' computational thinking and mathematical thinking in the mathematics classroom* (Masterscriptie). Universiteit Utrecht, Utrecht.

- [25] Slager, J. (2021). *Dynamic programming in dutch secondary school education* (Masterscriptie). Universiteit Twente, Enschede.
- [26] Van der Meulen, W. (2022). *Computationeel denken in de bovenbouw: Grafentheorie en Dijkstra's algoritme in 4/5 vwo* (Masterscriptie). Universiteit Twente, Enschede.
- [27] Rello, L. en Baeza-Yates, R. (2017). How to present more readable text for people with dyslexia. *Universal Access in the Information Society*, 16(1), 29–49.
- [28] cTWO (2012). *Denken & doen – wiskunde op havo en vwo per 2015* (Rapport). Utrecht: Auteur.
- [29] Drijvers, P. (2012). Wat bedoelen ze toch met ... modelleren? *Nieuwe Wiskrant*, 31(4), 34–37.
- [30] Spandaw, J. & Zwaneveld, B. (2019). Modelleren – Van wekelijkheid naar wiskunde en weer terug. In Drijvers, P., Streun, A. van, & Zwaneveld, G., *Handboek wiskundendidactiek* (7de editie, p. 235–264). Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- [31] SLO (2020). *Modelleren en modelgebruik* (Handreiking). Amersfoort: Auteur.
- [32] Teagust, D.F., Chittleborough, G. & Mamiala, T.L. (2002). Students' understanding of the role of scientific models in learning science. *International Journal of Science Education*, 24(4), 357-368.
- [33] Van Ast, M., De Loor, O. & Spijkerboer, L. (2021). *Effectief leren: de docent als regisseur* (5de druk). Groningen: Noordhoff.
- [34] Savelsbergh, E. (2007). Dynamisch modelleren, een aanzet tot een curriculum. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/8(3), 206-213.
- [35] Hooyman, K. (2012). *Dynamische modellen VWO – Een lesmodule voor Wiskunde en Natuur, Leven & Technologie* (Lesmateriaal). Enschede: SLO.
- [36] TU/e (datum onbekend). *Dynamische modellen (in biologie, scheikunde en natuurkunde)* (Lesmateriaal). Eindhoven: Auteur.
- [37] Dijkhuis, J.H. (2022). *Getal & Ruimte leerboek vwo B* (12de editie). Groningen: Noordhoff.
- [38] Bakker, H. (2022). *Moderne Wiskunde leerboek vwo B* (12de editie). Groningen: Noordhoff.
- [39] Lozada, E., Guerrero-Ortiz, C., Coronel, A. & Medina, R. (2021). Classroom Methodologies for Teaching and Learning Ordinary Differential Equations: A Systemic Literature Review and Bibliometric Analysis. *Mathematics*, 9(745), 1-40.
- [40] Löhner, S., Savelsbergh, E. & Van Joolingen, W. (2003). De invloed van representaties op het modelleergedrag van leerlingen. *Tijdschrift voor Didactiek der β -wetenschappen*, 20(1), 48-72.
- [41] Freudenthal, H. (2002). *Revisiting Mathematics Education - China Lectures*. Dordrecht: Kluwer academic publishers.
- [42] Van der Donk, C. & Van Lanen, B. (2009). *Praktijkonderzoek in de school*. Coutinho, Bussum.
- [43] Goldebeld, P. (1992). *TOETS- EN ITEMANALYSE MET TIA*. Arnhem: CITO.
- [44] Microsoft (datum onbekend). *CORRELATIE, functie*. Geraadpleegd van <https://support.microsoft.com/nl-nl/office/correlatie-functie-995dcef7-0c0a-4bed-a3fb-239d7b68ca92> op 24-11-2022.
- [45] Technische Universitaire Lerarenopleiding (2007). *Handleiding Vakdidactiek 1 Wiskunde*. Delft/Eindhoven/Enschede: Auteur.

A. Ontwerp

A.1 Lesmodule

Dynamisch Modelleren

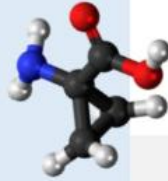
Het onderwerp van deze lesmodule is dynamisch modelleren. Wat dit inhoudt wordt gedurende de lesmodule duidelijk; we zullen ons bezighouden met verschillende situaties die door de computer met een model te beschrijven of te voorspellen zijn.

De lesmodule bestaat uit drie delen: een introductie op het onderwerp, uitleg en opgaven bij de verschillende fases die je doorloopt om een dynamisch numeriek model te maken bij een beschreven situatie, en vervolgens enkele vraagstukken waarbij jij een dynamisch numeriek model gaat gebruiken om deze op te lossen.

Enkele praktische punten:

- Je maakt de lesmodule in tweetallen.
- Overleg tussen groepjes is niet toegestaan, maar je kan de docent wel om hulp vragen.
- Deel de opgaven niet op binnen jouw tweetal, want je zult samen alle opgaven moeten behandelen om de lesmodule te volbrengen.
- De lesmodule duurt 180 minuten en halverwege zullen we een pauze nemen.

Veel plezier en succes!



Deel 1: Introductie

Het woord model zal iedereen bekend zijn en waarschijnlijk ben je modellen al vaker tegengekomen. In ieder gebouw dat je bezoekt wordt bijvoorbeeld een plattegrond afgebeeld waarop de vluchtroutes staan aangegeven die je moet gebruiken in geval van nood. Heb je met jouw familie Madurodam in Den Haag al eens bezocht? Of is jou het schaalmodel van een molecuul wel eens opgevallen in het scheikundelokaal? Dit zijn alle drie voorbeelden van modellen.

Opgave 1

Noem nog een voorbeeld van een model en beschrijf waarvoor dit model wordt gebruikt.

In de natuurwetenschap worden modellen gebruikt om situaties te beschrijven, te verklaren of te voorspellen. Zo kunnen verschillende typen kustverdediging, zoals een duin, een golfbreker of een stormvloedkering, getest worden in een watertank met gesimuleerde golven. Aan de hand hiervan kan geconcludeerd worden of de kustverdediging voldoende bescherming zal bieden. Een ander voorbeeld is dat de veiligheid van auto's wordt onderzocht door botsproeven uit te voeren. Door auto's met inzittende poppen te laten botsen tegen verschillende obstakels of betonnen blokken, kan nagegaan worden hoe het met mensen zou gaan als die in de auto zitten.



Fysiek vs. Numeriek

De voorgenoemde voorbeelden zijn **fysieke modellen**, maar tegenwoordig worden er steeds vaker ook **numerieke modellen** gebruikt. Met behulp van een numeriek model kan een simulatie op de computer uitgevoerd worden. Hiervoor moeten de (wiskundige) relaties tussen de variabelen wel bekend zijn. Een voorbeeld hiervan is het model dat het RIVM gebruikte om het verwachte aantal coronabesmettingen te bepalen op basis van het huidige aantal geïnfecteerden en het reproductiegetal.

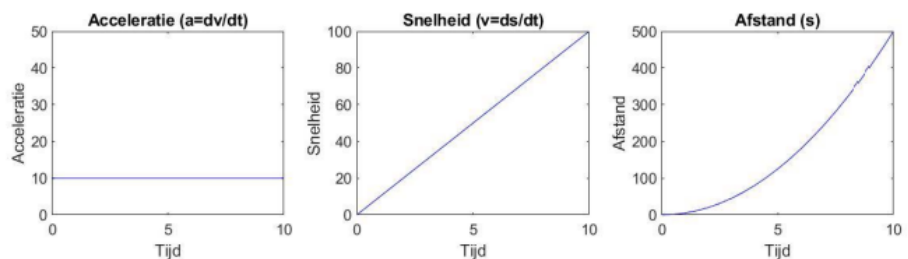
Opgave 2

Beargumenteer waarom het handig/voordelig is een simulatie op de computer uit te voeren in plaats van een fysieke test.

Statisch vs. Dynamisch

Er zijn twee soorten numerieke modellen waar we onderscheid tussen maken: **statische modellen** en **dynamische modellen**. Een model is statisch als de waarden van de variabelen in het model niet afhangen van de tijd en een model is dynamisch als ten minste een variabele in het model afhankelijk is van de tijd.

Om het verschil tussen beide soorten modellen te illustreren gebruiken we een natuurkundig voorbeeld. Uit de tweede wet van Newton blijkt: als er een constante kracht wordt uitgeoefend op een voorwerp met een zekere massa, dan krijgt dit voorwerp een constante versnelling. De versnelling kan dan berekend worden door de formule $F = m \cdot a$ om te schrijven, wat de versnelling afhankelijk maakt van de kracht en de massa. Deze beide variabelen zijn onafhankelijk van de tijd, dus een model van de versnelling is statisch. Echter, als gevolg van de constante versnelling, zal de snelheid van het voorwerp lineair toenemen met de tijd en de afstand die het voorwerp aflegt kwadratisch toenemen met de tijd. Een model van de snelheid of de afgelegde afstand zijn dus afhankelijk van de tijd en daarmee dynamisch. Hieronder worden de versnelling, snelheid en afgelegde afstand weergegeven ten opzichte van de tijd.



Opgave 3

Gaat het in de volgende situaties om een statisch of dynamisch model?

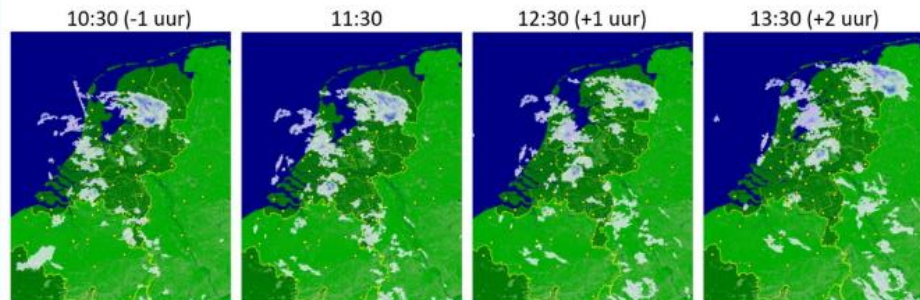
Leg uit waarom dit het geval is.

- Een model dat de positie van de Aarde ten opzichte van Mars weergeeft.
- Een model om kosten te berekenen voor de bouw van een huis.
- Een model dat de oppervlakte van een cirkel berekent aan de hand van de uitdrukking πr^2 .
- Een model van de verwachte temperatuur in Rotterdam.

Zoals eerder gezegd worden modellen gebruikt om de wereld om ons heen te beschrijven. In veel van deze gevallen is het reëel en voor de hand liggend dat de situatie, beschreven door het model, over de tijd verandert. Dit maakt dat dynamische modellen vaker gebruikt worden dan statische modellen.

Dynamisch numeriek model

Een dynamisch numeriek model beschrijft hoe een bepaalde situatie onder invloed van verschillende factoren verandert in de loop van de tijd en wordt dan ook vaak gebruikt om een voorspelling te doen.



Een voorbeeld van een dynamisch numeriek model dat door veel Nederlanders wordt gebruikt is Buienradar. Buienradar geeft weer waar in Nederland neerslag verwacht wordt. Hierboven worden enkele recente beelden van Buienradar weergegeven. Op de beelden is eerst de neerslag van het afgelopen uur zichtbaar en vervolgens de prognose voor de komende drie uur.

Opgave 4

Bekijk de beelden van het afgelopen uur en de beelden van de 3-uursverwachting online (<https://www.buienradar.nl/>). Mocht er geen regen verwacht worden, bekijk dan de beelden hierboven nogmaals.

- Om te berekenen waar een regenbui zich op een bepaald moment bevindt, moet je weten waar de regenbui zich vlak daarvoor bevond. Hoe zie je dit gegeven terug in de beelden van het afgelopen uur en de 3-uursverwachting?
- Welk verschil zie je tussen de beelden van het afgelopen uur en de 3-uursverwachting?
- De buien van de 3-uursverwachting bewegen over het scherm. Welke informatie gebruikt de computer om deze voorspelling te doen?

Dit voorbeeld illustreert de manier waarop binnen een dynamisch numeriek model gerekend wordt. Allereerst moet er een begintoestand bekend zijn. Daarnaast is bekend welke factoren invloed hebben op de verandering van de situatie. Op basis van de invloed van de factoren kan vervolgens bepaald worden hoe de begintoestand verandert.

Checkpoint: Laat bovenstaande opgave aftekenen bij de docent om verder te mogen naar de volgende pagina.

Deel 2: Modelleren

We weten wat een dynamisch numeriek model is. In dit deel van de lesmodule leren we een dynamisch numeriek model te maken.

Conceptueel en wiskundig model

Ondertussen hebben we een idee van hoe er gerekend wordt binnen een dynamisch numeriek model. Aan de hand van een volgend voorbeeld zullen we dit concreet maken.

In een zwembad zit 1000 m^3 water en de chloorconcentratie is op een gegeven moment 1 liter/m^3 . Deze concentratie is te hoog en daarom wordt het water verversd. We gaan een model maken van de chloorconcentratie in het zwembad over de tijd.



Opgave 5

Allereerst beginnen we met het analyseren van de situatie. We brengen de verschillende variabelen en relaties hiertussen in kaart om een opzet voor het model te maken.

- Het model heeft een **toestandsvariabele**. Dit is de afhankelijke variabele in het model, de variabele waarvan we het verloop in de tijd willen bepalen. Wat is in dit geval de toestandsvariabele?
- De toestandsvariabele heeft een **begintoestand** vanwaar het model zal beginnen met rekenen. Wat is de begintoestand?
- Doordat het water in het zwembad verversd wordt, verandert de chloorconcentratie over tijd. Neemt de chloorconcentratie hierdoor toe of af?
- Waarom is het verder nog belangrijk om de hoeveelheid water die in het zwembad past als constante mee te nemen in het model?

Voor het gemak nemen we aan dat er elk uur 60 m^3 water wordt vervangen door 60 m^3 schoon water en dat dit in één moment gebeurt. Dat wil zeggen dat we inbeelden dat iemand in een keer met een enorme emmer 60 m^3 water uit het zwembad haalt en hier 60 m^3 schoon water voor teruggeeft. Dit nemen we aan zodat we weten hoeveel chloor er precies verdwijnt in een uur. Telkens als het schone water in het zwembad wordt gegooid, mengt het schone water zich direct met het badwater, waardoor de concentratie in het zwembad overal steeds gelijk is.

Door de situatie versimpeld weer te geven hebben we een **conceptueel model** van de chloorconcentratie in het zwembad gemaakt. Dit is een denkmodel dat ons handvatten geeft om te gaan rekenen. Zonder de gedane aannames was dit niet gelukt.

Opgave 6

Met behulp van ons conceptueel model kunnen we berekenen wat de chloorconcentratie na het eerste en na het tweede uur zal zijn.

- Hoeveel chloor verdwijnt er in het eerste uur uit het water? En wat wordt de chloorconcentratie na een uur?
- Hoeveel chloor verdwijnt er in het tweede uur uit het water? En wat wordt de chloorconcentratie na twee uur?
- Hoeveel procent vermindert de chloorconcentratie ieder uur?

Opgave 7

Aan de hand van deze ontdekking kunnen we een **wiskundig model** bij ons conceptueel model maken. Dat wil zeggen dat we een vertaalslag maken naar wiskundige uitdrukkingen waarmee we de chloorconcentratie in het zwembad kunnen bepalen.

- De vergelijking $C(t + 1) = C(t) - 0,06 \cdot C(t)$, met het gegeven dat $C(0) = 1$, beschrijft de chloorconcentratie in het zwembad. Licht dit toe.

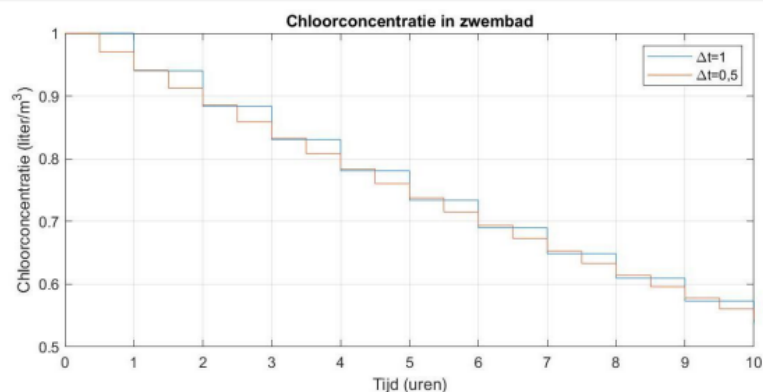
Deze vergelijking noemen we een **differentievergelijking**. Bij een differentievergelijking is een volgende functiewaarde uitgedrukt in een huidige functiewaarde.

- Bij het opstellen van het conceptueel model hebben we aangenomen dat het water in het zwembad ieder uur in één moment ververst werd. Is dit in de werkelijkheid ook het geval? Licht jouw antwoord toe.

Bovenstaande differentievergelijking hanteert de tijdsstap $\Delta t = 1$, gezien de chloorconcentratie per uur berekend wordt. Om het wiskundig model beter overeen te laten komen met de werkelijkheid, moet de tijdsstap verkleind worden.

- Stel dat ieder half uur 30 m^3 water ververst wordt. Met hoeveel procent vermindert de chloorconcentratie dan ieder half uur? En hoe zal de differentievergelijking er dan uit zien?

Hieronder is de chloorconcentratie in het zwembad weergegeven als we deze zouden berekenen per uur ($\Delta t = 1$) en per half uur ($\Delta t = 0,5$).



- d. Bekijk bovenstaande grafiek. Je ziet dat de chloorconcentratie minder snel daalt als deze per half uur berekend wordt in vergelijking met per uur. Verklaar dit.

Gezien het verversen van het water een continu proces is, wordt onze schatting van het verloop steeds accurater met het verkleinen van de tijdsstap. Als we de tijdsstap waarvoor de chloorconcentratie in het zwembad berekend wordt nog niet vastleggen en Δt noemen, krijgen we de differentievergelijking $C(t + \Delta t) = C(t) - 0,06 \cdot C(t) \cdot \Delta t$.

- e. Ga na dat deze vergelijking overeenkomt met de vergelijking in jouw antwoord bij opgave c.

Om de concentratie in het zwembad zo correct mogelijk te weergeven, zal Δt naar nul moeten naderen. Als we dit doen, krijgen we een nieuwe vergelijking die de chloorconcentratie in het zwembad het meest accuraat beschrijft. Eerst schrijven we de differentievergelijking om naar een differentiaalquotiënt.

- f. Schrijf over en vul aan $C(t + \Delta t) - C(t) = \dots$

- g. Ga ervanuit dat Δt niet gelijk is aan nul. Deel dan beide zijden van de vergelijking door Δt en schrijf het resultaat op.

Zoals gezegd is Δt niet gelijk is aan nul, maar om de chloorconcentratie in het zwembad op ieder moment in de tijd te kunnen bepalen, zal Δt naar nul naderen. Passen we dit toe, dan volgt hieruit dat

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{\Delta t} = -0,06 \cdot C(t).$$

- h. Welke wiskundige functie herkennen we aan de linkerkant van deze vergelijking?

De vergelijking $C'(t) = -0,06 \cdot C(t)$ noemen we een **differentiaalvergelijking**. Bij een differentiaalvergelijking is de afgeleide functie uitgedrukt in zijn originele functie. In dit geval geldt dus dat de snelheid (liter/m³/uur) waarmee de chloorconcentratie daalt op ieder moment $0,06 \cdot C(t)$ is. Naarmate de chloorconcentratie verder daalt, zal de snelheid afnemen. Dit zullen we bij de volgende opgave terugzien.

We hebben nu de wiskundige beschrijving van ons dynamisch numerieke model gevonden. Het wiskundig model bestaat uit de begintoestand van de toestandsvariabele en de gevonden differentiaalvergelijking.

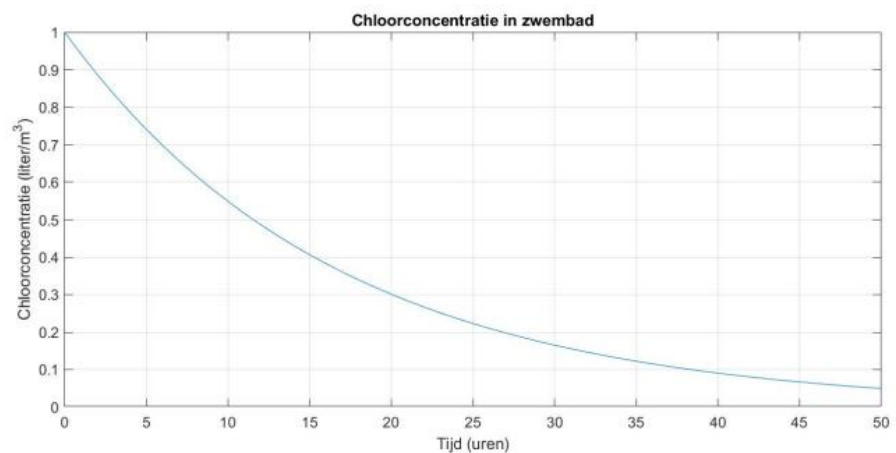
Checkpoint: Laat bovenstaande opgave aftekenen bij de docent om verder te mogen naar de volgende pagina.

Nu we het wiskundig model hebben geformuleerd, kunnen de oplossing bepalen. De oplossing is het verloop van de chloorconcentratie in het zwembad over tijd, ofwel de grafiek van $C(t)$. Het bepalen van de oplossing van het wiskundig model is met de hand niet eenvoudig. Daarnaast is de oplossing vaak een speciale exponentiële functie die pas later dit jaar bij wiskunde aan bod komt. Om deze redenen zullen we de computer inzetten om de oplossing te vinden.

Opgave 8

De oplossing van de differentiaalvergelijking $C'(t) = -0,06 \cdot C(t)$, gegeven dat $C(0) = 1$, is een verloop van $C(t)$ dat voor elke waarde van t voldoet aan de differentiaalvergelijking. Hieronder wordt de oplossing weergegeven.

- De snelheid waarmee de chloorconcentratie daalt (liter/m³/uur) neemt af naarmate de concentratie zelf daalt. Hoe zien we dit terug in de differentiaalvergelijking? En hoe zien we dit terug in de grafiek?
- Controleer voor twee punten op de grafiek of deze voldoen aan de differentiaalvergelijking. Schrijf de stappen op die je maakt. Tip: maak hierbij gebruik van een raaklijn.
- Nu blijkt dat het zwembad een chloorconcentratie van 0.1 liter/m³ moet hebben. Hoelang duurt het ongeveer tot deze concentratie is bereikt?
- Dit duurt de eigenaar van het zwembad te lang. Noem een manier waarop het proces versneld kan worden.

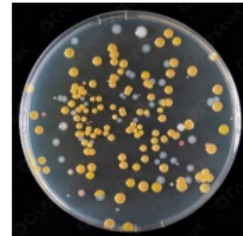


Je hebt nu bij een situatie in de werkelijkheid een conceptueel model gemaakt, waarin je alle relevante variabelen en relaties hebt vastgesteld. Vervolgens heb je hierbij een wiskundig model gemaakt en als laatste heb je de oplossing van dit model geanalyseerd. Al met al heb je bijna alle stappen doorlopen om een dynamisch numeriek model te maken. De enige stap die nog gemaakt moet worden is het maken van een **computermodel** bij het wiskundig model om hier de oplossing mee te vinden.

Computermodel

Aan de hand van een volgend voorbeeld herhalen we de stappen bij het maken van een dynamisch numeriek model en maken we kennis met het maken van een computermodel.

Een aantal laboranten observeren een celcultuur waarop bacteriën worden gekweekt. Gezien de omstandigheden gunstig zijn, zal het aantal bacteriën groeien. De kolonie bestaat momenteel uit 330 bacteriën. De laboranten vragen jou een model te maken van de groei van het aantal bacteriën B op de celcultuur van de komende dagen. Uit eerder onderzoek weten de laboranten dat de groeisnelheid toeneemt naarmate de kolonie groter wordt. Als er bijvoorbeeld 100 bacteriën zijn, dan neemt het aantal toe met 35 bacteriën per dag. En als er 200 bacteriën zijn, dan neemt het aantal toe met 70 bacteriën per dag. Doordat het aantal bacteriën continu groeit, verandert de groeisnelheid (aantal/dag) dus voortdurend volgens de relatie $0,35 \cdot B(t)$.



Opgave 9

Allereerst beginnen we weer met het analyseren van de situatie, om hier een conceptueel en vervolgens wiskundig model bij op te stellen.

- a. Formuleer het conceptueel model:
 - Wat is de toestandsvariabele van het model?
 - Wat is de begintoestand van de toestandsvariabele?
 - Onder invloed van welke factor verandert de situatie? Zorg dat deze factor voor toename of afname van de toestandsvariabele?
- b. Formuleer het wiskundig model, bestaande uit de bijbehorende differentiaalvergelijking en de begintoestand.

De volgende stap is het maken van een computermodel bij het wiskundig model.

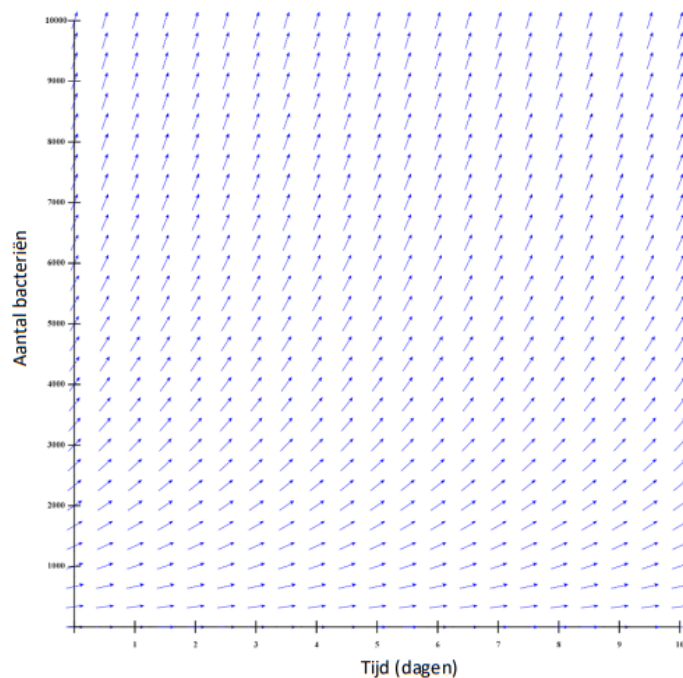
Opgave 10

Het computermodel volgt een algoritme dat gebaseerd is op het wiskundig model om een schatting te geven van het aantal bacteriën op de celcultuur over de tijd. Met behulp van de differentiaalvergelijking kan de computer voor ieder mogelijke waarde de bijbehorende afgeleide bepalen. De computer krijgt dan een soort overzicht als de afbeelding hieronder. De pijlen geven aan in welke richting een grafiek zou lopen mocht deze door dit punt gaan.

- Stel we bekijken het punt $(3; 1000)$. Wat is de afgeleide in dit punt mocht de grafiek hier doorheen lopen? Tip: gebruik de differentiaalvergelijking.
- De richting van de pijl in het punt $(3; 1000)$ komt overeen met de afgeleide in dit punt. Controleer dit.
- Ga voor nog een punt (met een ander aantal bacteriën) na dat de pijl juist is getekend. Schrijf de stappen op die je maakt.

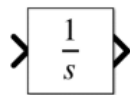
Aan de hand van dit overzicht kan een verwacht verloop van het aantal bacteriën op de celcultuur over de tijd gegeven worden.

- Welk gegeven is nodig om de oplossing te tekenen?
- Teken hoe jij denkt dat de oplossing van ons model eruit zal zien op het werkblad.



Checkpoint: Laat bovenstaande opgave aftekenen bij de docent om verder te mogen naar de volgende pagina.

De computer kan dus aan de hand van de begintoestand en de afgeleide in het bijbehorende punt een volgende waarde bepalen. Het programma dat we hiervoor gaan gebruiken is MATLAB Simulink. In Simulink programmeer je een model als een blokdiagram.



Het belangrijkste blok in een blokdiagram bij een dynamisch numeriek model is het **integrator-blok**. Hiernaast is afgebeeld hoe het integrator-blok er in Simulink uit ziet. Het blok heeft een ingang en een uitgang, welke afgebeeld zijn als pijlen. De informatie die het blok binnenkomt of uitgaat, noemen we respectievelijk de input en de output. De input van het integrator-blok is de afgeleide functie en de output van het blok is de originele functie. Binnen dit blok berekent de computer op soortgelijke manier als hierboven de oplossing van het model. Zoals gezegd moet hiervoor de begintoestand bekend zijn. De begintoestand kan je invullen in het integrator-blok. Daarnaast heeft de computer de differentiaalvergelijking nodig. Deze geven we mee aan het integrator-blok door het blokdiagram verder af te maken, wat we nu zullen doen.

Opgave 11

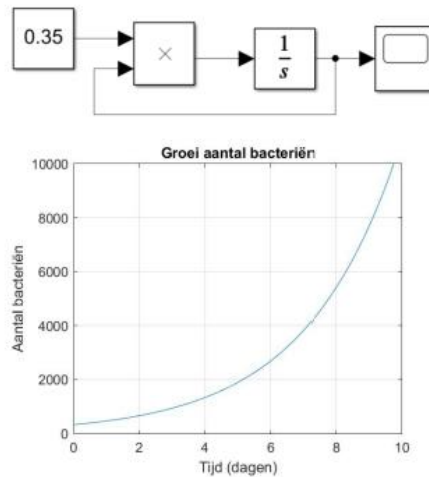
Hieronder wordt het blokdiagram weergegeven van het wiskundig model voor het aantal bacteriën op de celcultuur. De input van het integrator-blok is $B'(t)$ en de output van het integrator-blok is $B(t)$. De differentiaalvergelijking $B'(t) = 0.35 \cdot B(t)$ is dusdanig verwerkt in het blokdiagram, dat het integrator-blok de juiste informatie krijgt.

- De output van het integrator-blok is tevens de input van een volgend blok. Hoe zie je dit in het model?
- Het **product-blok** heeft meerdere ingangen en een uitgang en wordt gekenmerkt door het kruis dat erop staat. Wat is de functie van dit blok?
- Wat is de output van het product-blok?
- De output van het product-blok is weer de input van het integrator-blok. Ga na dat deze input gelijk is aan de afgeleide functie $B'(t)$.

Het blok dat we nog niet specifiek hebben benoemd is het **constant-blok**. Dit blok heeft alleen een uitgang, en de output is het getal dat je in het constant-blok opgeeft.



We hebben nu een computermodel om het wiskundig model mee op te lossen. De oplossing is een verloop van de groei van het aantal bacteriën over de tijd. Dit betekent dat we $B(t)$ willen weten. Om een grafiek van $B(t)$ te krijgen gebruiken we het **scope-blok**. Dit blok heeft alleen een ingang en plot vervolgens de input. Hieronder zie je het scope-blok in het blokdiagram, en de grafiek van $B(t)$, ofwel de oplossing bij ons model.



Opgave 12

Vraag de docent naar de handleiding MATLAB Simulink en lees deze zorgvuldig door.

- Maak het computermodel in MATLAB Simulink en controleer de gevonden oplossing voor het model.
- Vergelijk de gevonden oplossing met de geschetste oplossing bij opgave 10. Komen jouw schets en de figuur hierboven overeen?

Checkpoint: Laat bovenstaande opgave aftekenen bij de docent om verder te mogen naar de volgende pagina.

Opgave 13

De laboranten bekijken de oplossing van jouw model en realiseren zich dat deze nog verbeterd kan worden. De groei van het aantal bacteriën kan namelijk niet onbeperkt stijgen. Op een gegeven moment zal er voedsel- en ruimtegebrek optreden. De laboranten verwachten dat er plek is voor 3000 bacteriën op de celcultuur. Zodra de bacteriekolonie deze omvang nadert, zal deze niet (snel) meer groeien.

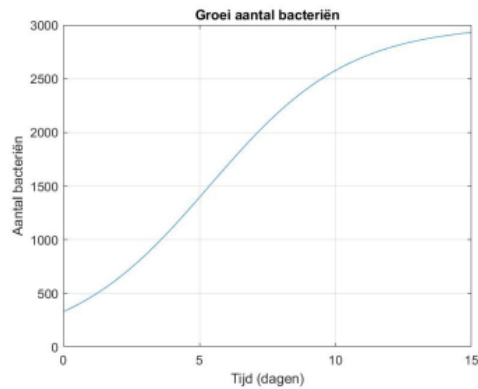
- De laboranten stellen voor om de volgende differentiaalvergelijking te gebruiken voor het model:
 $B'(t) = c \cdot B(t) \cdot (3000 - B(t))$. Welk effect heeft de toevoeging van de term $(3000 - B(t))$ aan de vergelijking?
- Zoals gezegd weten de laboranten dat de groeisnelheid (aantal/dag) bij de start van het experiment gelijk is aan $0,35 \cdot B(t)$. Bereken op basis van deze kennis de waarde van c in 5 decimalen. Schrijf de stappen op die je maakt.
- Waarom mag de waarde van c afgerond worden?

Hieronder staat een deel van het nieuwe computermodel getekend. Het product-blok heeft in dit model drie ingangen. Verder is het **sum-blok** toegevoegd. Dit is het rondje met daarin een plus- en een minteken.

- Wat is in dit model de functie van het sum-blok?
- Maak het computermodel af op het werkblad door de constanten in de blokken te schrijven en de juiste pijlen te tekenen.



- f. Pas het computermodel in MATLAB Simulink aan en controleer de nieuwe gevonden oplossing van het model.
- g. Heeft de grafiek het verloop dat jij had verwacht? Licht jouw antwoord toe.



We hebben nu een numeriek dynamisch model gemaakt dat de omvang van de bacteriekolonie op de celcultuur kan voorspellen. We zijn simpel begonnen door in het model alleen rekening te houden met de verwachte groei op basis van voortplanting. Vervolgens hebben we het model meer naar de werkelijkheid gemaakt door ook rekening te houden met de limitatie die de celcultuur met zich meebracht. Gezien er slechts beperkt voedsel en ruimte is, zal het aantal bacteriën op een gegeven moment niet verder kunnen groeien en tot een evenwicht komen. De verschillende stappen die we hier hebben gezet, kan je ook zetten bij het maken van modellen in andere situaties.



Deel 3: Vraagstukken

Hieronder volgen een aantal vraagstukken, waarbij een dynamisch numeriek model een oplossing kan bieden. Aan jou de vraag om deze modellen te maken en de vraagstukken te beantwoorden.

Opgave 14

Op jouw achttiende verjaardag besluit je een bedrag van €5000 te beleggen op de beurs. Je koopt enkele aandelen bij een aandelenindex van een verzameling van de grootste Amerikaanse bedrijven. Als de waarde van deze bedrijven hoger in wordt geschat, dan worden jouw aandelen meer waard. Je maakt een model dat de waarde van jouw aandelen W de komende jaren beschrijft, om te bepalen wanneer deze een miljoen euro waard zullen zijn. De winst ten opzichte van het startbedrag wordt het rendement genoemd, en naarmate jouw aandelen meer waard worden neemt het rendement toe. De beurs is de laatste jaren positief en de snelheid (€/jaar) waarmee de waarde van jouw aandelen stijgt wordt geschat op $0,118 \cdot W(t)$.

- Formuleer het conceptueel model.
- Formuleer het wiskundig model.
- Maak het computermodel in MATLAB Simulink. Teken het computermodel na op papier.
- Na ongeveer hoeveel jaar zijn jouw aandelen een miljoen euro waard?
- Op welke manier kan jij ervoor zorgen dat jij sneller miljonair wordt? En op welke manier zou de beurs ervoor kunnen zorgen dat jij sneller miljonair wordt?

Opgave 15

Een farmaciebedrijf ontwikkelt een nieuw medicijn. Dit medicijn wordt via het infuus gegeven en de dagelijks aanbevolen hoeveelheid is 1500 mg. Het lichaam verwijdert het medicijn uit het lichaam door uitscheiding. Hoe meer medicijn er in het lichaam zit hoe harder het zal werken aan de uitscheiding hiervan. Bij dagelijks gebruik voor een langdurige periode ontstaat er een evenwicht tussen inname en uitscheiding, wat betekent dat de hoeveelheid medicijn in het lichaam op een gegeven moment gelijk blijft over tijd. Deze hoeveelheid mag niet te hoog zijn, gezien dit juist schadelijk kan zijn voor de mens. Het bedrijf wil daarom simuleren wat de hoeveelheid medicijn in het lichaam M zal zijn in meerdere dagen. De snelheid (mg/dag) waarmee het medicijn in het lichaam opgenomen wordt is 1500. De snelheid (mg/dag) waarmee het lichaam het medicijn uitscheidt is altijd gelijk aan $0,25 \cdot M(t)$.

- Formuleer het conceptueel model. Welke aannames doe je hierbij?
- Formuleer het wiskundig model.

- c. Maak het computermodeel in MATLAB Simulink. Teken het computermodeel na op papier.
- d. Hoeveel mg medicijn blijft er uiteindelijk aanwezig in het lichaam bij langdurig gebruik, ofwel zodra het evenwicht is opgetreden?
- e. Hoe kan je dit afleiden uit de differentiaalvergelijking in het wiskundig model?

De eerdergenoemde aanbevolen dagelijkse hoeveelheid geldt voor volwassenen. Het farmaciebedrijf wil het medicijn ook beschikbaar stellen voor kinderen. De nierfunctie van kinderen is echter nog niet zo goed ontwikkeld als die van volwassenen, waardoor kinderen het medicijn minder makkelijk uitscheiden.

- f. Wat verandert er aan het model als dit een kind betreft?
- g. Voer deze verandering door. Wat is het gevolg hiervan?
- h. Welk advies geef jij het farmaciebedrijf mee voor het medicijngebruik door kinderen?



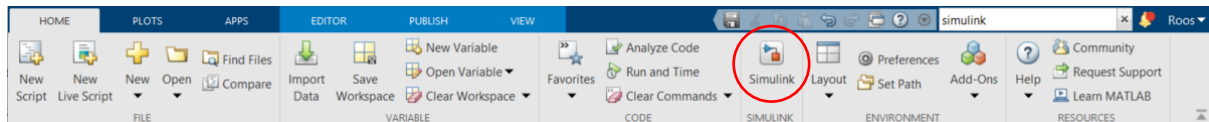
A.2 Handleiding MATLAB Simulink

In deze handleiding vind je de nodige informatie om een computermodel te maken in MATLAB Simulink.

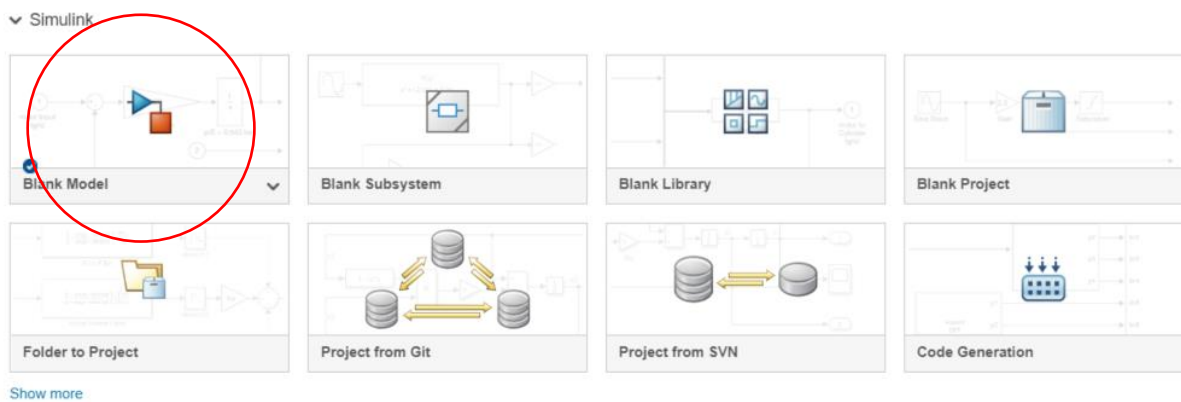
Openen MATLAB Simulink

Volg de volgende twee stappen om MATLAB Simulink te openen.

- 1) Open MATLAB en klik op het icoon boven in de balk genaamd Simulink.

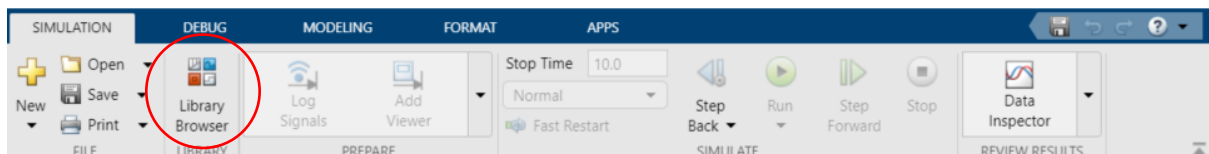


- 2) Klik op 'Blank model'.



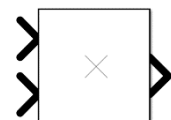
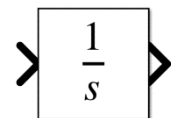
Blokkendiagram

Om blokken toe te voegen open je de blokkenbibliotheek. Op de pagina die opent staan al de verschillende blokken die voor in de lesmodule nodig zijn.

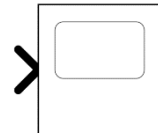
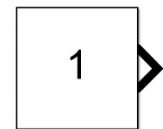
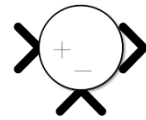


Om een blok toe te voegen, klik en sleep je dit blok naar de Simulink pagina. De volgende blokken zal je nodig hebben:

- Het *integrator*-blok heeft een ingang en een uitgang. De input is de afgeleide functie en de output is de originele functie. In het integrator-blok vul je de begintoestand van het model in. Dit doe je door dubbel op het blok te klikken en een waarde in te vullen bij 'Initial condition'.
- Het *product*-blok heeft meerdere ingangen en een uitgang. De output is een vermenigvuldiging van de inputs. De hoeveelheid ingangen kan je aanpassen door dubbel op het blok te klikken en de gewenste hoeveelheid in te vullen bij 'Number of inputs'.



- Het *sum*-blok heeft meerdere ingangen en een uitgang. De output is een som van de inputs. Door dubbel te klikken op het blok te klikken kan je bij 'List of signs' de hoeveelheid ingangen en het teken hiervan aanpassen. ++ betekent dat beide inputs bij elkaar opgeteld worden. -+ betekent dat de eerste input vermenigvuldigd wordt met -1 en de tweede input hierbij opgeteld wordt.
- Het *constant*-blok heeft slechts een uitgang en de output is een constante waarde. Deze waarde geef je in het blok op door hier dubbel op te klikken en een getal in te vullen bij 'Constant value'. Als je een decimaal getal in wil voeren, gebruik je een punt als decimaal in plaats van een komma (anderhalf voer je bijvoorbeeld in als 1.5).
- Het *scope*-blok heeft alleen een ingang en plot vervolgens de input. Je kan de plot zien door dubbel op het blok te klikken.



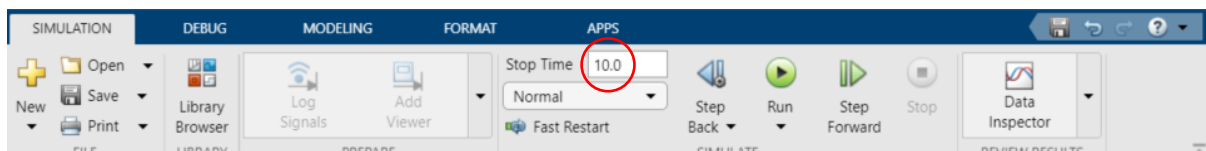
Je kan blokken met elkaar verbinden door middel van de pijlen. Klik op een pijl bij een in- of uitgang en versleep deze naar de volgende in- of uitgang.

Om een blok of pijl te verwijderen, klik je op het desbetreffende blok of de desbetreffende pijl en druk je vervolgens op 'Delete' op het toetsenbord.

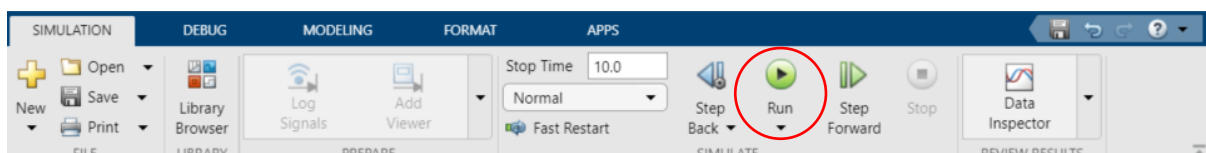
Modelleren

Zodra het blokkendiagram opgebouwd is, kan je de computer aan het werk zetten. Volg hiervoor de volgende stappen:

- 1) Bedenk tot hoe ver in de tijd de computer moet doorrekenen. Spreken we over dagen en wil je dat de computer tot 10 dagen doorrekend, vul dan 10 in bij 'Stop Time'. Spreken we over jaren en wil je dat de computer tot honderd jaar doorrekend, vul dan 100 in bij 'Stop Time'.



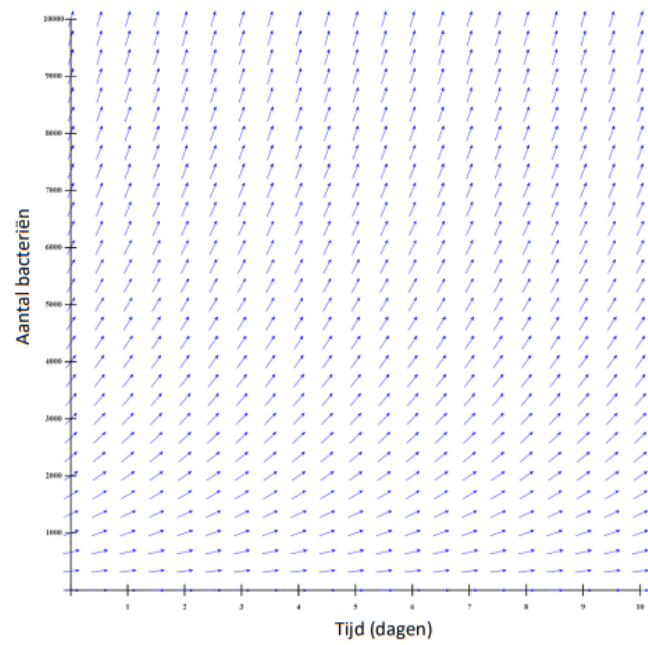
- 2) Klik op 'Run' en wacht een moment. Als je het geluid van de laptop aan hebt staan, geeft de laptop een geluidje zodra de computer klaar is.



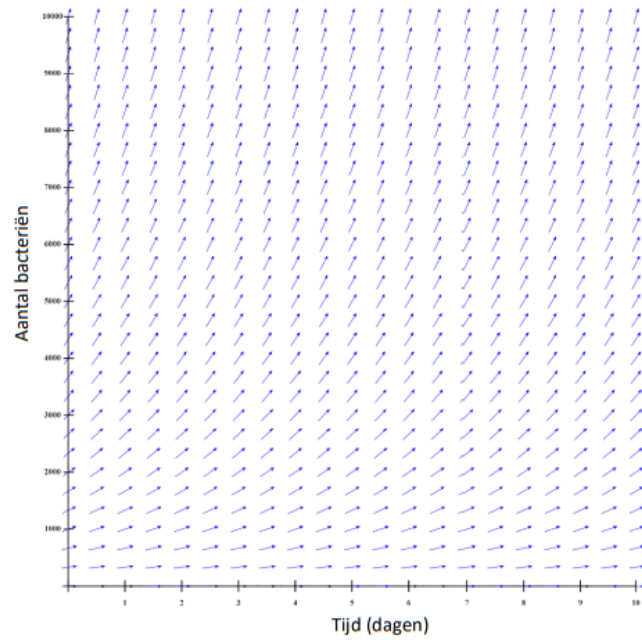
- 3) Bekijk de gevonden oplossing van het model door dubbel te klikken op het scope-blok.

A.3 Werkblad

Werkblad opgave 10abc



Werkblad opgave 10e



Werkblad opgave 13e



A.4 Correctievoorschrift

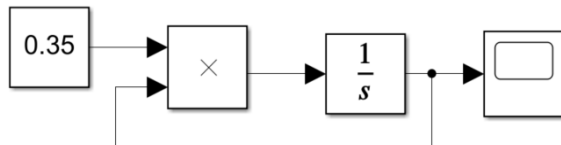
- 1) Maximumscore 2**
- Noem een voorbeeld van een model. 1
 - Geef een passende beschrijving van waarvoor dit model gebruikt wordt. 1
- 2) Maximumscore 1**
- Noem een van de volgende elementen: 1
- Gemakkelijk te wijzigen en effect wijziging direct zichtbaar
 - Geen fysiek model nodig, dus tijds- en kosteninvestering lager
 - Mogelijkheid tot simuleren gevaarlijke situaties of experimenten
- 3) Maximumscore 4**
- a. Dynamisch model 1
 - b. Statisch model 1
 - c. Statisch model 1
 - d. Dynamisch model 1
- 4) Maximumscore 3**
- a. De beelden vloeien voort in elkaar. 1
 - b. In de beelden van het afgelopen uur ontstaan er buien of lossen deze op. In de beelden van de 3-uursverwachting veranderen de buien slechts van vorm. 1
 - c. Noem een van de volgende factoren: 1
 - Sterkte van de wind
 - Richting van de wind
 - Temperatuur
- 5) Maximumscore 4**
- a. De toestandsvariabele is de chloorconcentratie (liter/m³) in het zwembad. 1
 - b. De begintoestand is 1 liter/m³. 1
 - c. De chloorconcentratie neemt af als gevolg van het verversingsproces. 1
 - d. Dit is nodig om de chloorconcentratie tijdens het verversingsproces te bepalen. 1
- 6) Maximumscore 6**
- a. Doorloop de volgende stappen:
 - Er zit 1000 m³ water met een chloorconcentratie van 1 liter/m³ in het zwembad,
 - Dus er zit 1000 liter chloor in het zwembad. 1
 - 60 m³ water wordt ververs met een chloorconcentratie van 1 liter/m³,
 - Dus er verdwijnt 60 liter chloor in het eerste uur. 1
 - 940 liter chloor blijft over in 1000 m³ water,
 - Dus de chloorconcentratie na het eerste uur is 0,94 liter/m³. 1
 - b. Doorloop de volgende stappen:
 - 60 m³ water wordt ververs met een chloorconcentratie van 0,94 liter/m³,
 - Dus er verdwijnt 56,4 liter chloor in het tweede uur. 1
 - 883,6 liter chloor blijft over in 1000 m³ water,
 - Dus de chloorconcentratie na het tweede uur is 0,8836 liter/m³. 1
 - c. Ieder uur verminderd de chloorconcentratie met 6%. 1

- 7) Maximumscore 12**
- Uitleg dat de chloorconcentratie op een bepaald moment $C(t)$ is en de chloorconcentratie een uur daarna $C(t + 1)$ is. 1
 - Uitleg dat $C(t + 1)$ bepaald kan worden door 6% van $C(t)$ af te halen. *Uitleg hierover kan eventueel aan de hand van een voorbeeld.* 1
 - Nee, in werkelijkheid is het verversen van het water een doorlopend proces. Dit wordt waarschijnlijk met behulp van een continue werkende pomp gedaan. 1
 - Doorloop de volgende stappen:
 - Dus ieder half uur verminderd de chloorconcentratie met 3%. 1
 - De differentievergelijking is dan: $C(t + 0,5) = C(t) - 0,03 \cdot C(t)$. 2
1 punt voor aanpassen van de tijdsstap en 1 punt voor aanpassen van het percentage.
 - Uitleg dat twee keer een daling van 3% niet gelijk is aan een keer een daling van 6%. *Uitleg hierover kan eventueel aan de hand van een voorbeeld.* 1
 - Doorloop de volgende stappen:
 - Ieder half uur verversen geeft tijdsstap $\Delta t = 0,5$. 1
 - Deze invullen in de gegeven differentievergelijking geeft: 1
 $C(t + 0,5) = C(t) - 0,06 \cdot C(t) \cdot 0,5 = C(t) - 0,03 \cdot C(t)$.
 - Vergelijk dit met de bedachte differentievergelijking bij opgave c.
 - $C(t + \Delta t) - C(t) = -0,06 \cdot C(t) \cdot \Delta t$ 1
 - $\frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} = -0,06 \cdot C(t)$ 1
 - De linkerzijde van de vergelijking is de afgeleide functie. 1
- 8) Maximumscore 8**
- Differentiaalvergelijking: de afgeleide wordt kleiner naarmate de chloorconcentratie lager wordt, dus de snelheid neemt af. 1
 - Grafiek: de grafiek loopt afnemend dalend, dus de snelheid neemt af. 1
 - Doorloop voor twee gekozen punten de volgende stappen:
 - Teken een raaklijn aan het gekozen punt.
 - Bereken hier de richtingscoëfficiënt van. 2
 - De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is de afgeleide in het gekozen punt.
 - Vul dit en de functiewaarde in in de differentiaalvergelijking. 2
 - Controleer de correctheid.*2 punten voor een correcte berekening per gekozen punt.*
 - Dit zal ongeveer 38 uur duren. 1
 - Het verversingsproces zal versneld moeten worden, dus er zal meer water per tijdseenheid verversen moeten worden. 1
- 9) Maximumscore 5**
- Het conceptueel model is als volgt:
 - De toestandsvariabele is het aantal bacteriën op de celcultuur. 1
 - De begintoestand is 330 bacteriën. 1
 - Als gevolg van voortplanting neemt de toestandsvariabele toe. 1
 - Het wiskundig model bestaat uit:
 - De differentiaalvergelijking $B'(t) = 0,35 \cdot B(t)$. 1
 - De begintoestand $B(0) = 330$. 1

- 10) Maximumscore 9**
- Volgens de differentiaalvergelijking geldt: $B'(t) = 0,35 \cdot B(t)$, dus de afgeleide in het punt is $0,35 \cdot 1000 = 350$. 1
 - Doorloop de volgende stappen:
 - Teken een lijn door de pijl in het punt. 1
 - Bepaal de richtingscoëfficiënt van de lijn. 1
 - Ga na dat deze overeenkomt met de afgeleide in het punt. 1
 - Doorloop voor het gekozen punt de volgende stappen:
 - Bepaal de afgeleide in het gekozen punt met behulp van de differentiaalvergelijking. 1
 - Teken een lijn door de pijl in het gekozen punt. 1
 - Bepaal de richtingscoëfficiënt van de lijn. 1
 - Ga na dat deze overeenkomt met de afgeleide in het gekozen punt. 1
 - De begintoestand is nodig om de oplossing te tekenen. 1
 - Teken de oplossing. 2
- 1 punt aftrek indien de grafiek niet start in het punt (0;330) en 1 punt aftrek indien de grafiek de richting van de pijlen niet volgt, ofwel als de grafiek niet toenemend stijgend loopt.*

- 11) Maximumscore 4**
- De pijl bij de uitgang van het integrator-blok is verbonden met de ingang van het volgende blok. 1
 - Het product-blok vermenigvuldigt zijn ingangen met elkaar. 1
 - De output van het product-blok is $0,35 \cdot B(t)$. 1
 - Zoals gezegd is de input van het integrator-blok $0,35 \cdot B(t)$ en vanuit het wiskundig model weten we dat $0,35 \cdot B(t) = B'(t)$. 1

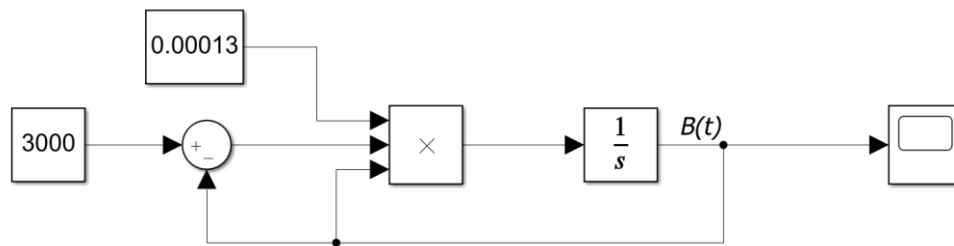
- 12) Maximumscore 3**
- Het volgende computermodel is gemaakt en de oplossing is verkregen. 2



- 1 punt voor het toevoegen van de blokken en 1 punt voor het verbinden van de blokken.*
- Vergelijk de gevonden oplossing en de schets bij opgave 10. 1

- 13) Maximumscore 10**
- Zodra de omvang van de bacteriekolonie nadert naar 3000, zal deze term naderen naar nul. 1
 - Dit betekent dat de groei stagneert. 1
 - Doorloop de volgende stappen:
 - De groeisnelheid is bij de start gelijk aan $0,35 \cdot B(t)$, 1
 - Dus bij de start geldt: $0,35 \cdot B(t) = c \cdot B(t) \cdot (3000 - B(t))$. 1
 - De begintoestand is ongewijzigd, dus bij de start geldt $B(0) = 330$. 1
 - Invullen, afleiden en afronden geeft dat $c = 0,00013$. 1
 - We doen een voorspelling van de toekomst, en deze zal nooit exact gelijk zal aan de werkelijkheid. Om deze reden kunnen we de waarde van c ook schatten, ofwel afronden. 1
 - Het sum-blok trekt de input bij het minteken van de input bij het plusteken af. 1

- e. Het volgende computermodel is getekend. 2

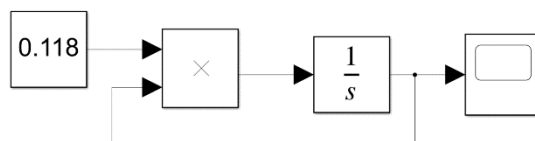


1 punt voor invullen van de waardes bij de constant-blokken en 1 punt voor het verbinden van de blokken.

- f. Bovenstaand computermodel is gemaakt en de oplossing is verkregen. 1
g. Het aantal bacteriën neemt zoals verwacht in het begin toenemend stijgend en vervolgens afnemend stijgend toe tot een grens van 3000 bacteriën. 1

14) Maximumscore 10

- a. Het conceptueel model is als volgt: 1
 o De toestandsvariabele is de waarde van de aandelen in €. 1
 o De begintoestand is €5000. 1
 o Als gevolg van waardeinstijging/rendement neemt de toestandsvariabele toe. 1
 b. Het wiskundig model bestaat uit: 1
 o De differentiaalvergelijking $B'(t) = 0,35 \cdot B(t)$. 1
 o De begintoestand $B(0) = 330$. 1
 c. Het volgende computermodel is gemaakt en de oplossing is verkregen. 2



1 punt voor het toevoegen van de blokken en 1 punt voor het verbinden van de blokken.

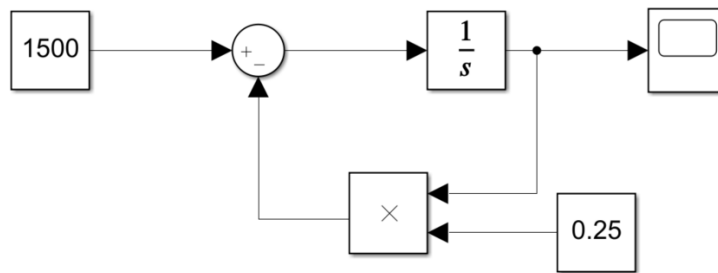
- d. De aandelen zijn na ongeveer 45 jaar een miljoen euro waard. 1
e. 1
 o Ik kan sneller miljonair worden door mijn inleg te verhogen. 1
 o Ik kan sneller miljonair zijn als de beurs positiever uitvalt, en het rendement dus hoger is. 1

15) Maximumscore 13

- a. Het conceptueel model is als volgt: 1
 o De toestandsvariabele is de hoeveelheid medicijn in het lichaam. 1
 o De begintoestand is 0 mg. 1
 o Als gevolg van medicijnname neemt de toestandsvariabele toe en als gevolg van uitscheiding neemt de toestandsvariabele af. 1
 b. Het wiskundig model bestaat uit: 1
 o De differentiaalvergelijking $M'(t) = 1500 - 0,25M(t)$. 1
 o De begintoestand $M(0) = 0$. 1

- c. Het volgende computermodel is gemaakt en de oplossing is verkregen.

2



1 punt voor het toevoegen van de blokken en 1 punt voor het verbinden van de blokken.

- d. Bij langdurig gebruik blijft er uiteindelijk 6000 mg in het lichaam aanwezig. 1
- e. ☐ In het evenwicht dat ontstaat, is de afgeleide gelijk aan nul. 1
- ☐ Door de afgeleide in de differentiaalvergelijking gelijk te stellen aan nul, kan je dus bepalen hoeveel mg medicijn er uiteindelijk in het lichaam aanwezig blijft. 1
- f. Het percentage van het medicijn dat uit het lichaam verdwijnt als gevolg van uitscheiding is lager. 1
- g. De hoeveelheid medicijn die na langdurig gebruik aanwezig blijft in het lichaam is hoger. 1
- h. De dagelijks aanbevolen hoeveelheid moet verlaagd worden. 1

B. Feedback

B.1 Feedbackformulier

Beschrijving onderzoek

Leerlingen van tegenwoordig worden, wegens het digitale tijdperk waarin wij leven, geacht te beschikken over verscheidene digitale vaardigheden. Deze vaardigheden moeten al op school aangeleerd worden. Een belangrijk onderdeel hiervan is computational thinking (CT), gedefinieerd als de denkprocessen betrokken bij het formuleren en oplossen van een probleem dusdanig dat een computer dit effectief kan uitvoeren. Hoewel CT in eerste instantie onder het vakgebied informatica wordt geschaald, leent het vak wiskunde zich ook om leerlingen hierin te onderwijzen. Gezien lesmateriaal op dit gebied schaars is, willen we met dit onderzoek nagaan of dynamisch modelleren aan de hand van differentiaalvergelijkingen hier toekomstperspectief voor biedt. Het doel is om te leren of deze lesmodule kan bijdragen aan het ontwikkelen van aspecten van CT bij deze doelgroep.

De lesmodule is ontworpen aan de hand van de volgende ontwerpeisen:

1. De lesmodule kan als werkmiddag van 180 minuten gebruikt worden.
2. De lesmodule heeft een duidelijke structuur en een verzorgde lay-out.
3. De opgaven uit de lesmodule sluiten aan op het niveau van vijfdejaars vwo-leerlingen die wiskunde B volgen.
4. De opgaven komen voort uit een zinvolle context die aansluit bij de belevingswereld van de leerlingen.
5. Om de lesmodule te volgen is beperkte sturing van de docent nodig.
6. De inhoudelijke leerdoelen worden door de leerlingen behaald.

De lesmodule is gericht op dynamisch modelleren en hierbij komen verschillende aspecten van computational thinking aan bod. De inhoudelijke leerdoelen zijn verder als volgt:

- a. De leerling herkent een probleem dat opgelost kan worden met een dynamisch numeriek model.
- b. De leerling kan een dynamisch systeem modelleren door passende variabelen en relaties te kiezen.
- c. De leerling kan het modelgedrag relateren aan de werkelijkheid.

Feedbackformulier

Algemene ontwerpeisen – In hoeverre voldoet de lesmodule aan de ontwerpeisen 1 t/m 5? Heeft u suggesties om de lesmodule wat dit betreft te verbeteren?

Inhoudelijke leerdoelen – Kunnen de drie leerdoelen met de lesmodule behaald worden? Heeft u suggesties om de lesmodule wat dit betreft te verbeteren?

Algemene feedback – Heeft u nog andere punten van feedback?

B.2 Expertpanel

Feedbackformulier

Ervaringsdeskundige 1

Algemene ontwerpeisen – In hoeverre voldoet de lesmodule aan de ontwerpeisen 1 t/m 5? Heeft u suggesties om de lesmodule wat dit betreft te verbeteren?

1. Er is voldoende stof voor 180 minuten.
2. Zeer goed verzorgd! Taalgebruik is uitstekend en lay-out idem.
3. Mijn verwachting is dat de stof goed aansluit op het niveau van de leerlingen.
4. Ja, goed genoeg.
5. Met behulp van de checkpoints wordt er nog best veel sturing geboden. Zie hieronder.

In de module zijn checkpoint ingebouwd en ik denk dat deze er voor zorgen dat veel leerlingen stil gaan zitten en wachten op de docent. De checkpoints zijn volgens mij niet echt nodig. De autonomie van de leerling is op deze manier klein. Meer montessoriaans is dat de leerlingen zelf het tempo bepalen en om hulp vragen wanneer dat nodig is. Een voorstel vanuit mij: verdeel de leerlingen in groepen en teken een schema op het bord met verticaal de groepen en horizontaal in blokken de inhoud van de lesmodule. De groepen gaan aan het werk en noteren telkens of ze hulp nodig hebben bij de blokken inhoud. De notatie kan als volgt: 0 staat voor makkelijk en geen hulp nodig, = staat voor gemiddeld en we denken het te begrijpen, en ! staat voor moeilijk en we hebben hulp nodig. Zo kan je iedere groep gepersonaliseerde hulp bieden. Je kan hierbij ook overwegen om de leerlingen die = invullen hulp te laten vragen bij leerlingen die 0 invullen. Op deze manier helpen de leerlingen die het grotendeels begrijpen elkaar en kunnen zij even hun benen strekken. De docent kan dan langsgaan bij de groepen die ! hebben ingevuld.

Inhoudelijke leerdoelen – Kunnen de drie leerdoelen met de lesmodule behaald worden? Heeft u suggesties om de lesmodule wat dit betreft te verbeteren?

Ik denk dat alle drie de leerdoelen behaald kunnen worden. Als de leerlingen de principes van modelleren begrijpen, dan is de lesmodule geslaagd. Wel vraag ik mij af of leerlingen in staat zijn 180 minuten geconcentreerd te blijven. Als dit niet lukt wordt het behalen van de leerdoelen moeilijker.

Algemene feedback – Heeft u nog andere punten van feedback?

In het begin van de lesmodule mist een korte omschrijving van het begrip model. Een voorbeeld zou kunnen zijn: een vereenvoudigde weergave van de werkelijkheid/het proces.

Mogelijk wil je een meer precieze tijdsindicatie toevoegen. Hoe lang mogen de leerlingen over een bepaalde set opgaven doen?

Algemene ontwerpeisen – In hoeverre voldoet de lesmodule aan de ontwerpeisen 1 t/m 5? Heeft u suggesties om de lesmodule wat dit betreft te verbeteren?

1. Moeilijk inschatten, ik denk ook voor jou, maar de volgende op- en/of aanmerkingen:
 - a. Hoelang denk je dat ze nodig hebben voor opgaven 1-6? En 7-10?
 - b. Hoelang hebben ze vervolgens om zich wegwijs te maken in Simulink? Leren ze Matlab/simulink goed genoeg om zelf iets te kunnen modelleren (zonder opzetjes) en te voldoen aan inhoudelijk leerdoel b? Is Matlab/simulink überhaupt nodig om inhoudelijk leerdoel b te behalen?
 - c. Hoeveel tijd wil je dat ze (kunnen) besteden aan 'grote eindopdrachten' 14+15?
 - d. Ik denk dat je de antwoorden op bovenstaande wel op een rijtje hebt eigenlijk, want de checkpoints zijn goed: deze geven je overzicht waar leerlingen ongeveer zouden moeten zijn op de opdracht in redelijke tijd af te krijgen.
 - e. Is het de bedoeling dat iedereen de modules in 180 minuten af kan krijgen of de gemiddelde leerling? Wat doe je met de snelle leerling?
 2. Ja, duidelijk. Opdrachten in andere kleur, checkpoints, leuk!
 - a. Zelfgeproduceerde matlab-plotjes: wellicht lijnen iets dikker en as-tekst groter, matchend met de lesmodule?
 3. Qua inhoud weet jij dat beter dan ik. Tot opdracht 14 is het wel een afgebakende opdracht, waar 5VWO misschien iets meer zelfstandigheid en -redzaamheid aan zou kunnen? Zie opmerking 1e: sluit het aan op elke 5VWO'er? Is er wel genoeg uitdaging voor de informatica-leerling die houdt van het maken van dit soort simulink-schema's?
 4. Absoluut, hulde! Leuk dat er een beetje natuurkunde, (scheikunde,) biologie en economie in terugkomt.
 5. Voor mij als feedback-gever zit de moeilijkheid 'm hier in de bewoording van de ontwerpeis. Wat bedoel je precies met beperkte sturing en eigenlijk sturing in het algemeen?
 - a. Als je bedoelt dat leerlingen met geringe fysieke hulp in die 180 minuten de lesmodule door kunnen komen en de docent tijd heeft voor andere zaken, dan denk ik wel dat dat moet lukken.
 - b. De lesmodule neemt de leerling van begin tot eind aan de hand door de stof: dat oogt als veel sturing. Mocht je dit willen beperken, kun je informatieve stukjes weglaten en de leerling zelf op internet laten zoeken naar termen en begrippen als numeriek, toestandsvariabele, etc., of überhaupt het woord model.
- Niet goed/slecht, maar dus net afhankelijk van wat je doel is qua (beperkte) sturing!

Inhoudelijke leerdoelen – Kunnen de drie leerdoelen met de lesmodule behaald worden? Heeft u suggesties om de lesmodule wat dit betreft te verbeteren?

- a. Veel verscheidene voorbeelden, al vraag ik mij af of leerlingen echt in staat is om bij een gegeven situatie een dynamisch model te herkennen.
- b. Mooi, opdracht 14 en 15 laten dat zien, maar zie eerdere opmerkingen over sterke/zwakke leerlingen. Denk je dat een zwakke leerling die t/m opdracht 13 komt ook alle doelen heeft behaald? Daag je de sterke leerling voldoende uit?
- c. Ja, mooi. Geen suggesties: veel verscheidene voorbeelden.

Algemene feedback – Heeft u nog andere punten van feedback?

Punten om over na te denken en vragen die je bij de verdediging zou kunnen krijgen:

- “Overleg tussen groepjes is niet toegestaan, maar je kan de docent wel om hulp vragen”, zonder oordeel: waarom?
- Wat wordt de rol van de docent in die 180 minuten en hoe zie je dat terug in de lesmodule?
- Didactisch is het mooi om een limiet te nemen van Δt naar 0, maar bij hoeveel leerlingen valt dat kwartje (als ze ook al nieuwe begrippen krijgen en überhaupt flabbergasted zijn van differentiaalvergelijkingen)? (Ik twijfel ook of ik dit goed kan inschatten met mijn natuurkunde-getinte geest)

Overig:

- Had een paar spel(lings)foutjes gespot. Mocht je nog iemand zoeken om de laatste versie door te lezen: laat maar weten.

Algemene ontwerpeisen – In hoeverre voldoet de lesmodule aan de ontwerpeisen 1 t/m 5? Heeft u suggesties om de lesmodule wat dit betreft te verbeteren?

1. Denk het wel, mits docent vlug langs de checkpoints kan en kan ook afhankelijk zijn van hoe snel ze matlab eigen maken
2. Ja! Paar spellingsfoutjes, verder mooi
3. Dat kan ik enkel gokken van wel.
4. Ja, eenvoudig voor te stellen casuïstiek. Heel leuk dat de casuïstiek zoveel verschillende onderwerpen raakt, zo zien leerlingen dat wiskunde op veel verschillende manieren toegepast kan worden.
5. Eens, al worden er herhaaldelijk checkpoints verwacht van een docent. Het risico is hier dat 1) docenten te veel willen evalueren/helpen bij de interactie met een tweetal (bijv. wanneer er foutjes zijn gemaakt) en dat daardoor 2) andere tweetallen langer 'vast' zitten voor ze verder mogen.

Inhoudelijke leerdoelen – Kunnen de drie leerdoelen met de lesmodule behaald worden? Heeft u suggesties om de lesmodule wat dit betreft te verbeteren?

Lijkt mij behaald te kunnen worden. Door combinatie van sterke woordelijke beschrijvingen, realistische voorbeelden en scaffolding-opzet van de opgaven lijkt mij dat leerlingen hier veel van leren.

Kleine toevoeging met betrekking tot leerdoel 1. De leerlingen krijgen veel voorbeelden waarbij een dynamisch numeriek model handig gebruikt kan worden, maar de lesmodule is niet direct gericht op het herkennen van deze problemen. Ik denk dat de leerlingen hier dus wel in groeien, maar het leerdoel misschien niet volledig behalen.

Algemene feedback – Heeft u nog andere punten van feedback?

Leuk de checkpoints, die ga ik stelen ;)

De definitie van toestandsvariabele staat nu in de vraagstelling. Het zou beter zijn als de vraag alleen de vraagstelling beslaat en de definitie al eerder aan bod is gekomen, bijv. in het stukje tekst waar ook begintoestand als begrip voor het eerst wordt genoemd.

Mooi trechteren van eerst per uur dan zelf nadenken over realistisch tijdbeeld en dan met kleinere tijdeenheid werken.

Ik ben benieuwd hoe het voor leerlingen is, of ze het volledig kunnen volgen of soms niet. Bijv. ik als leek begreep de denksprongen niet meer bij 7g, waar ik de rest tot nu toe wel kon volgen door de woordelijke uitleg er telkens bij.

Algemene ontwerpeisen – In hoeverre voldoet de lesmodule aan de ontwerpeisen 1 t/m 5? Heeft u suggesties om de lesmodule wat dit betreft te verbeteren?

Eis 1: 15 opgaven in 180 minuten, met ook vaak a t/m e. Dat komt neer op ongeveer 2 tot 3 minuten per vraag. Is dit realistisch? Ook gegeven het feit dat in een onbekende omgeving (Matlab, Simulink) wordt gewerkt?

Eis 2: Structuur en figuren zijn prachtig. Kan me niet herinneren dat ik ooit zoiets heb gehad.

Eis 3: Ik denk dat de gemiddelde leerling deze vragen te doen vindt, de gevorderde leerling zal het makkelijker vinden, en de leerling die wat achterstandig is zal niet alle vragen begrijpen. Bij vorming van groepjes kan worden nagedacht over het matchen van leerlingen aan de hand van hoe goed ze zijn in wiskunde.

Eis 4: het zijn allemaal tastbare onderwerpen. Ik denk dat dat een goed aspect is van deze lesmodule.

Eis 5: Ik denk dat de leerlingen best wat sturing nodig zouden kunnen hebben. Niet bij alle vragen, met name vraag 7, 8, 11, 12, 13 en 15.

Inhoudelijke leerdoelen – Kunnen de drie leerdoelen met de lesmodule behaald worden? Heeft u suggesties om de lesmodule wat dit betreft te verbeteren?

Ik denk dat ze allemaal kunnen worden behaald. Bij 3 zou je nog kunnen uitweiden dat dit slechts voorspellende modellen zijn, dus dat er soms meer variabelen spelen dat je modelleert. En dat daarom je model dus fout zit. Een vraag als: 'De werkelijkheid laat uitkomst a zien, maar het model voorspelt b, hoe komt dit?' zou nog van toegevoegde waarde kunnen zijn.

Algemene feedback – Heeft u nog andere punten van feedback?

Mooie opmaak, weinig tot geen spelfouten, illustratieve afbeeldingen. Ziet er als document goed verzorgd uit!

C. Observatie

C.1 Observatieschema (leeg)

Gestructureerde observatie:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Eindtijd
Groep 1																
Groep 2																

G = algemene vraag

T = tekstuele vraag

a = inhoudelijke vraag bij opgave a

b = inhoudelijke vraag bij opgave b etc.

Minder gestructureerd

C.2 Observatieschema (ingevuld)

Gestructureerde observatie:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Eindtijd
Groep 1			T	b			cgh	b					d		bc	11:15
Groep 2				b	b	G	cgh	b	b	c		T	ce	bc	*	

G = algemene vraag

T = tekstuele vraag

a = inhoudelijke vraag bij opgave a

b = inhoudelijke vraag bij opgave b etc.

* = opgave niet gemaakt

Minder gestructureerde observatie:

3c -> Een model om kosten te berekenen voor de bouw van een huis wordt in het correctievoorschrift geschaald onder statisch, maar de leerlingen merken terecht op dat het model dynamisch is als de salarisstijging van de bouwmedewerkers over de jaren heen mee wordt genomen.

4b -> Het verschil tussen de beelden van het afgelopen uur en de 3-uursverwachting is moeilijk te zien. Zodra de docent de leerlingen het verschil geeft, kunnen de leerlingen het wel terugzien in de beelden.

6b -> Groep 1 had al direct door dat de concentratie ieder uur met 6% afneemt, dus deze antwoordoptie moet in het correctievoorschrift toegevoegd worden. Groep 2 berekende de concentratie na het tweede uur verkeerd doordat ze over het hoofd zagen dat de hoeveelheid chloor dit het tweede uur verdwijnt lager is dan bij het eerste uur. Deelopgave 6 maakte ze vervolgens wel goed.

7 -> De leerlingen vinden het moeilijk om de werking van de differentievergelijking uit te leggen, misschien goed als hier een stap tussendoor komt met het invullen van de vergelijking. Het is de leerlingen vervolgens niet helemaal duidelijk dat we de aanname gaan aanpassen door de tijdsstap kleiner te maken. Dit moet explicieter vermeld worden. Het doorlopen van de stappen om de differentiaalvergelijking te krijgen loopt moeizaam, al lijkt dit te komen doordat de leerlingen te moeilijk denken in plaats van simpelweg te herleiden. Interessant is dat de leerlingen proberen Δt weg te delen, terwijl dit binnen de functie staat en dus niet kan. Uiteindelijk moet de docent de leerlingen het antwoord op deelopgave h geven, dit is toch te lang geleden voor ze.

8ab -> De leerlingen zien niet het verband tussen de afgeleide en de groeisnelheid. Om deze reden moet misschien meer aandacht besteed worden aan de definitie van de differentiaalvergelijking. Verder is groep 2 er niet geheel van op de hoogte dat de afgeleide in een punt hetzelfde is als de richtingscoëfficiënt van een raaklijn aan dit punt. De docent moet de leerlingen helpen dit in te zien. Ook begrijpen de leerlingen vervolgens niet dat ze de bepaalde richtingscoëfficiënt/afgeleide en de y-waarde van het punt samen in moeten vullen in de differentiaalvergelijking om te controleren of de differentiaalvergelijking klopt.

9b -> Ook hier zie je terug dat de leerlingen niet het verband tussen de afgeleide en de groeisnelheid zien, want ze hebben hulp nodig bij het formuleren van de differentiaalvergelijking.

10ab -> Hier moeten de leerlingen weer een richtingscoëfficiënt van een raaklijn berekenen om de afgeleide in een punt te vinden. Dit verloopt al soepeler, maar niet vlekkeloos. Vooral groep 2 heeft niet nog hulp van de docent bij nodig.

11 -> De leerlingen ervaren te veel herhaling binnen deze opgave. Ze hebben het idee dat ze bij iedere deelopgave hetzelfde in moeten vullen. Mogelijk moet deze opgave anders.

12 -> Het namaken van het model gaat de leerlingen makkelijker af dan gedacht. Ze maken zich snel wegwijs binnen MATLAB Simulink en gebruiken de handleiding als naslagwerk.

13e -> Groep 2 heeft hulp nodig met het trekken van de pijlen binnen het blokschema. Hierbij wordt duidelijk dat de leerlingen de koppeling tussen de differentiaalvergelijking en het blokschema nog niet volledig begrijpen. Dit zien we terug bij groep 1 als zij opgave 15c maken. Hier moet mogelijk dus meer aandacht aan besteed worden.

14a/15a -> De leerlingen van beide groepen weten even niet meer waar een conceptueel model uit bestaat. Als de docent instrueert om terug te bladeren en de losse onderdelen met de leerlingen langs loopt, kunnen de leerlingen dit wel correct benoemen.

15 -> De leerlingen raken hun concentratie kwijt. Dat wat ze lezen komt niet geheel meer binnen. Groep 1 heeft de toestemming gekregen om te stoppen, want het lukt hen niet meer om zelfstandig door de opgave heen te komen. Groep 2 maakt nog snel deze opgave af, maar het gaat wat vlug. Ze weten niet wat de bij deelopgave e moeten doen, dus de docent heeft hier (succesvol) hints bij gegeven.

Naast de gestelde vragen zoals vastgelegd bij de gestructureerde observatie, heeft de docent ook rondgelopen en hier en daar een tip gegeven bij het modelleren in MATLAB Simulink.

Verder lijkt het goed om aan het begin van de lesmodule aan te geven dat een rekenmachine gebruikt mag worden, en de lesmodule een werkblad heeft.

D. Interviews

D.1 Interviewleidraad

Dit document bevat een leidraad voor de semigestructureerde interviews met de leerlingen. De interviews worden opgenomen, achteraf uitgeschreven en anoniem opgeslagen totdat het project afgelopen is. De verwachting is dat een interview ongeveer 15 minuten duurt en het doel van de interviews is om de lesmodule te verbeteren.

Algemeen

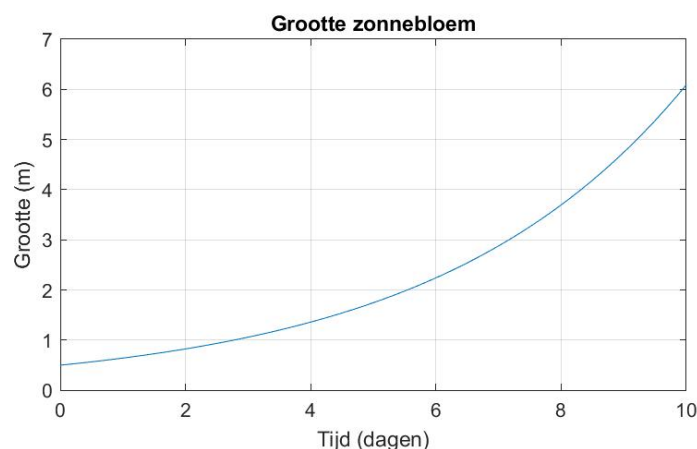
Wat vond je van de lesmodule?

Ontwerpeisen

- 1) Is het gelukt om alles af te krijgen?
 - Zo ja: Heb je daarvoor moeten haasten?
 - Zo nee: Tot hoever ben je gekomen? Kan je aangegeven waaraan dit lag?
- 2) Wat vond je van de vormgeving van de lesmodule?
 - Zag het er mooi/lelijk uit?
 - Was het duidelijk wanneer er een uitleg/voorbeeld gegeven werd en wanneer je een opgave moest maken?
- 3) Heb je het gevoel dat de lesmodule aansloot op jouw niveau?
 - Vond je het moeilijk of makkelijk? Waarom?
- 4) Vond je het onderwerp en de opgaven interessant?
- 5) Hoe vaak had je de hulp van de docent nodig?
 - Vond je dit (te) vaak?

Leerdoelen

- 1) Kan je mij vertellen wat dynamisch modelleren is en waarvoor dit gebruikt wordt?
- 2) Formuleer hardop het wiskundig model bij de volgende situatie. Er wordt onderzoek gedaan naar het groeiproces van een zonnebloem. Onderzoekers concluderen dat de groeisnelheid (cm/dag) van een zonnebloem afhankelijk is van zijn grootte. De onderzoekers verwachten dat de groeisnelheid altijd gelijk is aan $0,25 \cdot G(t)$. Ze willen dat jij een model maakt van de grootte van een zonnebloem G over tijd vanaf het moment dat deze een halve meter groot is.
- 3) Bekijk de oplossing van dit model. Wat is er vergeten mee te nemen in het model?
 - Extra: Hoe kan dit opgelost worden?



D.2 Transcripties

Groep 1

Interviewer	Wat vonden jullie in het algemeen van de lesmodule?
Leerling 1	Ik vond het wel leuk.
Leerling 2	Ik vond het wel, uh, een keer wat anders. Sommige dingen waren nog wel lastig, maar het was wel een keer wat anders dan normaal sommetjes maken.
Interviewer	En zou je andere leerlingen adviseren om zoiets als dit een keer te doen?
Leerling 1	Ja, beter dan gewoon wiskunde.
Leerling 2	Ja, voor de afwisseling is het wel een keer leuk. Ik weet niet of het heel veel helpt bij toetsen voor ons nu, maar het is wel leuk om te doen.
Interviewer	Dat klopt inderdaad. Het was bedoeld om eens op een andere manier met wiskunde bezig te zijn en een geheel ander onderwerp te belichten. Is het jullie gelukt om alles af te krijgen?
Leerling 1	Ja, we hebben alles afgekregen.
Interviewer	Hebben jullie daarvoor moeten haasten?
Leerling 1	We moesten niet per se haasten, maar we waren bij het eind wat slordig. Dan stond er iets en we konden het wel beter verwoorden, maar dan hadden we het een beetje afgeraffeld.
Interviewer	Ah, ja. Vonden jullie 3 uur hieraan werken dan veel?
Leerling 2	Hoe bedoelt u?
Interviewer	Nou, jullie zeggen dat je aan het eind de opgaven een beetje afraffelde. Waren jullie tegen het eind moe?
Leerling 2	Ja, het duurde wel net iets te lang. Ja, eigenlijk wel een beetje. Als het iets korter zou zijn, dan zou het al beter zijn.
Leerling 1	Dat wel ja, maar ik weet ook niet wat je dan weg kan laten. Het had wel een goede opbouw zeg maar.
Interviewer	Zou het dan beter zijn om de lesmodule in tweeën op te delen en twee momenten hiervoor te plannen?
Leerling 2	Ja, dat zou fijn zijn.
Leerling 1	Of in drieën in plaats van tweeën.
Interviewer	Dat kan zeker ook, want de lesmodule had ook drie delen. Wat vonden jullie van de vormgeving van de lesmodule?
Leerling 1	Ja, dat vond ik nice. Leuk, handig boekje.
Leerling 2	Ja. Ook duidelijk elke keer de opdrachten tussendoor en dan een stukje tekst. Elke keer een andere kleur, wel over nagedacht.
Interviewer	Dat was inderdaad mijn volgende vraag, of je dat kon herkennen. Maar dat is goed. Hebben jullie verder het idee dat het aansloot bij de kennis die jullie nu al hadden?
Leerling 1	Jawel, behalve dan dat limiet. Dat wisten we niet meer.
Leerling 2	Haha, terwijl dat eigenlijk juist kennis is die we moeten hebben.
Leerling 1	Maar verder vond ik het eigenlijk wel makkelijk. Sommige dingen kwamen we niet uit, maar dan was de oplossing best simpel. Vooral het einde was goed te doen.
Interviewer	En voor jou?
Leerling 2	Ik weet het niet. Ik vond sommige dingen wel lastig. Vooral het begin, dat je eigenlijk nog helemaal geen idee hebt van die dingen. Bijvoorbeeld die opdracht met het chloor vond ik best wel moeilijk.
Interviewer	Kan je ook vertellen waar dat aan lag?

Leerling 2	Nou, ik maakt heel vaak een fout met die tijdeenheden, dat die kan veranderen. Alleen dat is juist dat hele stuk. Je werkt toe naar een afgeleide en dat had ik nog niet helemaal door toen.
Interviewer	Had je het fijn gevonden om te weten dat je naar de afgeleide toewerkte?
Leerling 2	Dat zou het voor mij wel duidelijker gemaakt hebben ja.
Leerling 1	Maar dat maakt het misschien juist ingewikkelder. Want nu ben je ergens mee bezig en zoekt je zelf een oplossing en daarna krijg je pas te horen van: hé, we zijn bezig met een afgeleide, had je dat door? Op deze manier laat je ons wel op een andere manier nadenken dan dat je het voorgeprogrammeerd hebt. Dus ik vind het juist wel nice op deze manier.
Interviewer	Dat is waar. Mijn bedoeling was om dit een onderzoekende lesmodule te laten zijn, dus dat jullie zelf achter dingen zouden komen. Maar het is goed om dit te weten. Uhm, en wat vonden jullie van het onderwerp en de opgaven? Waren deze interessant?
Leerling 2	Uhm, ik vond het wel leuk. Zeker dat je tussendoor ook met de computer kon. Je was natuurlijk een hele tijd op een blaadje aan het werk, dus even wat anders. Dat vond ik echt wel leuk, met die blokjes ook. Beetje flowchart achtig denken, zoals we met informatica hebben.
Interviewer	Had je ook wat aan jouw informatica-kennis of niet?
Leerling 2	Dat wel, qua flowchart zeker en hoe je met blokjes moet denken en met product enzo. Dat scheelt wel.
Leerling 1	Ik vond de onderwerpen wat minder interessant, maar dat maakt ook niet per se uit. Het gaat vooral om de opdracht en niet per se om hoe het in vormgegeven qua details.
Interviewer	Goed dat je daar zo doorheen kan kijken. Laatste vraag hierbij: hebben jullie vaak mijn hulp nodig gehad?
Leerling 2	Een paar keer wel.
Leerling 1	We hebben vaker om jouw hulp gevraagd dan het nodig was.
Leerling 2	En ik denk ook wel .. als je normaal les zou krijgen, dan krijg je een onderwerp en dan leggen ze alles uit en dan moet je het gaan doen. Nu krijg je eigenlijk alleen het boekje, dus dan valt het in verhouding wel mee hoeveel vragen we stellen.
Leerling 1	Ik vind dit veel fijner, want dan krijg je alleen de uitleg extra die je nodig hebt en niet alle uitleg.
Interviewer	Dat klopt.
Leerling 1	Maar dit kan niet in een klassetting, omdat je dan veel meer mensen hebt.
Interviewer	Dan zou je misschien net wat langer zelf na moeten denken. Want je zegt, je hebt mij vaker om hulp gevraagd dan nodig was. Dus als je een paar minuten extra zelf na had moeten denken, denk je dan dat je eruit was gekomen?
Leerling 1	Ik denk het wel. Ik denk dat het zelfstandig ook had gekund, maar dan had het wel wat langer geduurd. En het is ook een beetje validatie die je zoekt, van heb ik het wel goed gedaan.
Interviewer	Dat kan ik me voorstellen. Daarvoor had ik die checkpoint ook verwerkt in de lesmodule, zodat je op sommige momenten even zeker weet dat je op de goede weg bent.
Leerling 1	Ja.
Interviewer	Goed, dan had ik nog een paar vragen over de inhoud van de stof. Kunnen jullie mij vertellen wat dynamisch modelleren is en waarvoor dit gebruikt wordt?
Leerling 2	Uhm, dynamisch modelleren...
Leerling 1	Je hebt statisch en dynamisch, en het is dynamisch als de tijd een factor speelt. Bij dynamisch modelleren maak je dan een model waarin tijd een variabele is.

Leerling 2	Je hebt ook verschillende manieren waarop je het kunt doen. Je kunt het wiskundig doen, dan maak je gebruik van zo'n formule.
Interviewer	Je bedoelt een differentiaalvergelijking?
Leerling 2	Ja, inderdaad. En je kunt het in van die blokjes zetten, wat we gedaan hebben op de computer. Dan krijg je een mooie grafiek bij het model.
Leerling 1	Maar dat is eigenlijk ook gewoon wiskunde. Dat is dan de computer die de oplossing voor jou maakt.
Interviewer	Heel goed, en waarvoor wordt het dan gebruikt? Waarvoor kunnen we dynamisch modelleren gebruiken?
Leerling 2	Voorspellingen, dat vooral. We hebben bijvoorbeeld die opdracht gehad over het voorspellen van de chloorconcentratie en de groei van bacteriën, en over Buienradar. Ja, dat.
Interviewer	Inderdaad, het wordt voornamelijk gebruikt om voorspellingen te doen. Als volgende heb ik een korte situatieschets en ik wil graag dat jullie hardop het wiskundig model bij de situatie formuleren.
Leerlingen	*Lezen de situatieschets*
Leerling 1	Dus hij groeit met 25% elke dag, of ... lees ik dat verkeerd? Ja.
Leerling 2	Je begint in ieder geval bij een halve meter.
Interviewer	Laten we beginnen met: waar bestond het wiskundig model ook alweer uit?
Leerling 1	We hebben de vergelijking $G'(t) = 0,25 \cdot G(t)$.
Interviewer	Ja, dat is de differentiaalvergelijking inderdaad.
Leerling 2	En dan plus 0,5 die je al had, toch?
Leerling 1	Nee, die vulde we in bij dat blok.
Leerling 2	Ohja, dat doe ik telkens verkeerd. Dat is de beginwaarde.
Interviewer	Inderdaad, dus dan heb je de differentiaalvergelijking en de begintoestand.
Leerling 2	Ja, dat is het toch gewoon?
Interviewer	Dat klopt, dat is het wiskundig model. Kunnen jullie mij ook vertellen wat $G'(t)$ is?
Leerling 1	De richtingscoëfficiënt, want dat is de afgeleide van $G(t)$.
Interviewer	Het is inderdaad de afgeleide en die weergeeft de groeisnelheid. Goed, dan heb ik de oplossing van het model afgebeeld. Bekijk de oplossing even. Wat is er vergeten mee te nemen in het model? Wat klopt er nu niet aan de oplossing in vergelijking met de werkelijkheid?
Leerlingen	*Bekijken de oplossing*
Leerling 1	Ik denk dat die op een gegeven moment afnemend moet groeien, omdat die bijvoorbeeld niet genoeg grondstoffen heeft om te blijven groeien. Dit gaat ervanuit dat die oneindig kan groeien, maar dat kan niet.
Interviewer	Ja, precies, daar moet je nog rekening mee houden. Hebben jullie een idee hoe we dat kunnen verbeteren? Iets soortgelijks hebben we al bij een van de opgaven gedaan.
Leerling 2	Dan kan je die $(G(t) - 3000)$ toevoegen, want als $G(t)$ dan 3000 is, dan stopt de groei. Of nouja, het wordt nu iets anders dan 3000. Nu wordt het misschien 5.
Interviewer	Je hebt hem bijna goed inderdaad, de factor is net omgekeerd. Je voegt dan de factor $(5 - G(t))$ toe aan de differentiaalvergelijking.
Leerling 1	En dan moest je die 0,25 in de vergelijking ook opnieuw uitrekenen.
Interviewer	Ja, dat klopt. Hiermee ronden we het interview af en wil ik jullie heel erg bedanken.

Groep 2

Interviewer	Wat vonden jullie in het algemeen van de lesmodule?
Leerling 1	Ik vond het in het begin best wel leuk, maar op een gegeven moment duurde het te lang. Het werd veel en als je de vragen dan las, kwam niet alles meer binnen. Maar ik bedoel, ik vond het niet vreselijk om te doen haha.
Leerling 2	Beetje hetzelfde voor mij. Op zich... Het was niet vreselijk, maar wiskunde in het algemeen vind ik niet heel interessant, dus dan krijg je dat al wel sneller. Het is niet dat ik het heel stom vond ofzo, want je was wel continue bezig. En het was ook niet zo moeilijk dat je denkt van: dit kan ik niet, ik ga wel achterover hangen. Je bleef wel bezig.
Leerling 1	Ja, maar halverwege had ik geen zin meer. Ik denk dat concentratie hier ook wel een rol speelde, wat die verloor ik een beetje.
Interviewer	Oké, dus als ik het goed begrijp vonden jullie de lesmodule te lang duren?
Leerling 1	Ja, eigenlijk wel. Misschien kan je het in twee delen opsplitsen.
Interviewer	En dan zou je denken dat je meer...?
Leerling 1	Ja, dan zou ik er meer moeite voor doen, want dan blijft mijn concentratie beter. Dan denk je oké, 6 opdrachten en dan nog 7/8 opdrachten, dat is te doen.
Interviewer	Dan is het dus meer behapbaar?
Leerling 1	Ja.
Leerling 2	Ja.
Interviewer	Jullie zeggen dat jullie wiskunde in het algemeen niet zo leuk vinden. Is deze lesmodule dat wel een leuke afwisseling of vervanging van de wiskundeles? Of zou je toch liever gewoon wiskunde hebben?
Leerling 1	Nou, bij wiskunde denk ik gewoon: ik doe gewoon wat ik moet doen en dan haal ik een cijfer ermee. Dus, ik weet niet, als ik hier een cijfer voor kan halen, dan zou ik het met alle liefde doen.
Leerling 2	Dat heb ik ook inderdaad.
Interviewer	Dan zou jullie dan meer motivatie geven?
Leerling 2	Ja, dan werk je naar iets toe. Iets waar je zelf ook wat aan hebt zegmaar. We hebben nu dit gedaan, maar we hebben er niet direct wat aan bij onze hoofdstukken van wiskunde.
Interviewer	Het onderwerp van de lesmodule stond inderdaad wel los van jullie hoofdstukken bij wiskunde.
Leerling 1	Daardoor weten we niet zo goed waarvoor we dit doen.
Interviewer	Oké, duidelijk. Is het jullie gelukt om de lesmodule af te krijgen?
Leerling 1	Nee, we hebben de laatste opdracht niet gemaakt.
Interviewer	Kunnen jullie aangeven waarom dit niet is gelukt?
Leerling 1	We gingen wat langzamer werken en zagen hoe veel we nog moesten, en we hadden niet zoveel zin meer.
Leerling 2	Ja, ons werktempo vertraagde naarmate we verder kwamen. Het lukt op een gegeven moment niet echt meer.
Interviewer	Goed, volgende vraag: wat vonden jullie van de vormgeving/de opmaak van de lesmodule?
Leerling 1	Het was wel duidelijk.
Interviewer	Kan je omschrijven wat je hiermee bedoeld?
Leerling 1	De vragen waren duidelijk, we wisten wat we moesten doen. De handleiding was ook handig.
Leerling 2	De enige aanmerking die ik erop had, al is het ook niet echt een aanmerking, maar het zag er een beetje saai uit. Maar dat hoeft ook niet heel uitbundig te zijn hoor.
Leerling 1	Ja, het ziet eruit als wiskunde. Ik bedoel, je kan er ook niet veel aan veranderen.

Interviewer	Oké, dus je zou zeggen dat het niet heel aantrekkelijk is, maar wel voldoet voor het feit dat het een lesmodule wiskunde is?
Leerling 2	Ja precies.
Interviewer	Wat het voor jullie duidelijk wanneer er een opgave kwam en wanneer er stukjes tekst gelezen moesten worden?
Leerling 1	Ja.
Interviewer	Top. Uhm, vonden jullie dat de lesmodule aansloot op jullie voorkennis en dus op jullie niveau?
Leerling 1	We hebben het nog nooit gehad, maar we konden het wel maken. Ik bedoel: het was niet te moeilijk.
Leerling 2	De delen die worden verwacht dat je kent om het te snappen, dat wisten we denk ik wel.
Interviewer	Goed, en vonden jullie het in algemene zin dan moeilijk of makkelijk?
Leerling 2	Je leert iets nieuws en iets nieuws leren is altijd pittig, maar...
Leerling 1	Het zit er tussenin. Sommige dingen waren iets moeilijker om te begrijpen, maar andere dingen konden we zo doen. Dus ja, het zat er tussenin.
Leerling 2	Stel ik zou over een week weer zo'n opdracht krijgen, dan zou ik denk ik wel al veel beter begrijpen wat ik moet doen.
Interviewer	Dat is fijn. Dat was natuurlijk ook wel wat we wouden bereiken. Dan, vonden jullie het onderwerp van de opgaven verder interessant?
Leerling 2	Ik vond de onderwerpen prima.
Leerling 1	Ik vond het op zich wel leuk om het in te voeren en te kijken welke grafieken eruit kwamen, maar... *bladdert door de lesmodule* Chloor, ja dat is op zich wel handig om te weten. Het ging wel heel lang door over bacteriën.
Leerling 2	Ja, dat wel. Maar op zich, de onderwerpen waren best interessant.
Leerling 1	Ja, het zag er ook wel gewoon goed uit.
Interviewer	Oké. Dan de laatste vraag hierover: hebben jullie vaak mijn hulp nodig gehad?
Leerling 2	Ik denk wel, zeker als ik vergeleken met de anderen kijk, dat wij meer vragen hadden.
Leerling 1	Maar ik vraag eigenlijk in de les meer, dus dan valt het ook wel weer mee. We kwamen er zelf ook wel uit, maar op een gegeven moment waren we niet meer gemotiveerd om er zelf uit te komen.
Leerling 2	Ja, tegen het eind dachten we: we vragen het wel.
Interviewer	Vonden jullie de hoeveelheid vragen die jullie mij hebben gesteld dan ook te veel?
Leerling 2	Nee, dat niet.
Leerling 1	Voor iets dat we nog nooit hebben gedaan, vond ik het wel goed.
Interviewer	Dat was het laatste hierover. Dan heb ik nog drie inhoudelijke vragen. Kunnen jullie mij vertellen wat dynamisch modelleren is en waarvoor dit gebruikt wordt?
Leerling 1	Het is het tegenovergestelde van statisch, dus het hangt af van de tijd.
Leerling 2	Dus je maakt een model van een situatie die afhangt van de tijd.
Leerling 1	Ja, dat kan op papier of op de computer, en de computer geeft een grafiek bij het model.
Interviewer	Goed, en waarvoor kan je het model of de grafiek dan gebruiken?
Leerling 1	Voor onderzoek, bijvoorbeeld voor weersverwachtingen.
Leerling 2	Ja, want je kan verwachte waarden berekenen in verschillende situaties.
Interviewer	Dat is inderdaad een goed voorbeeld. In de algemene zin kan je zeggen dat dynamisch modelleren ingezet wordt om voorspellingen te doen, of zoals jij het zei, om verwachte waarden te berekenen.
Leerling 2	Ja.

Interviewer	Oké, als volgende heb ik een korte situatieschets en ik wil graag dat jullie hardop het wiskundig model bij de situatie formuleren.
Leerlingen	*Lezen de situatieschets*
Leerling 1	Dan zoeken we de afgeleide, dus $G'(t) = 0,25 \cdot G(t)$.
Interviewer	Ja, en wat is dan de begintoestand hierbij?
Leerling 2	We beginnen bij een halve meter.
Interviewer	Inderdaad. Kunnen jullie mij ook vertellen wat $G'(t)$ beschrijft?
Leerling 1	Uhm, de groei.
Interviewer	Inderdaad, en nog preciezer beschrijft het de groeisnelheid. Bij in het begin groeit de zonnebloem nog niet zo snel, want hij is ook niet zo groot. Maar naarmate de zonnebloem groter wordt...
Leerling 1	Groeit die ook sneller.
Leerling 2	Ah ja, zo.
Interviewer	Goed, dan mijn laatste vraag hierover. Ik heb de oplossing van het model afgebeeld. Bekijk de grafiek even. Als je dit vergelijkt met de werkelijkheid, zijn de onderzoekers dan wat vergeten mee te nemen in het model?
Leerlingen	*Bekijken de oplossing*
Leerling 1	Nou, er is toch niet altijd genoeg licht of water ofzo, misschien moeten ze dat nog meenemen.
Leerling 2	Ja, en soms gaat die ook gewoon stuk, dan waait het te hard of wordt de groei belemmerd door iets anders.
Interviewer	Er zijn inderdaad meer factoren waar ze nog rekening mee kunnen houden, goede gedachten. Dit waren mijn vragen voor jullie. Ik wil jullie heel erg bedanken.

E. Ethiek

E.1 Ethiekaanvraag

UNIVERSITY OF TWENTE.

FACULTY BMS

220581 REQUEST FOR ETHICAL REVIEW

Request nr: 220581
Researcher: Lange, R. de
Supervisor: Timmer, M.
Reviewer: Walma van der Molen, J.H.
Status: Approved by commission
Version: 2

1. START

A. TITLE AND CONTEXT OF THE RESEARCH PROJECT

1. What is the title of the research project? (max. 100 characters)

Ontwikkelen van computational thinking aan de hand van dynamisch modelleren bij wiskunde B

2. In which context will you conduct this research?

Master's Thesis

3. Date of the application

01-05-2022

5. Is this research project closely connected to a research project previously assessed by the BMS Ethics Committee?

No/Unknown

B. CONTACT INFORMATION

6. Contact information for the lead researcher

6a. Initials:

R.

6b. Surname:

de Lange

6c. Education/Department (if applicable):

M-TM

6d. Staff or Student number:

1683039

6e. Email address:

r.delange@student.utwente.nl

6f. Telephone number (during the research project):

2022-05-12 13:33:06

1/6

+31649700413

6g. If additional researchers (students and/or staff) will be involved in carrying out this research, please name them:

-

6h. Have you completed a PhD degree?

No

7. Contact information for the BMS Supervisor

7a. Initials:

M.

7b. Surname:

Timmer

7c. Department:

BMS-ELAN

7d. Email address:

m.timmer@utwente.nl

7e. Telephone number (during the research project):

+31534893557

8. Is one of the ethics committee reviewers involved in your research? Note: not everyone is a reviewer.

No

C. RESEARCH PROJECT DESCRIPTION

9a. Please provide a brief description (150 words max.) of the background and aim(s) of your research project in non-expert language.

Leerlingen van tegenwoordig worden, wegens het digitale tijdperk waarin wij leven, geacht te beschikken over verscheidene digitale vaardigheden. Deze vaardigheden moeten al op school aangeleerd worden. Een belangrijk onderdeel hiervan is computational thinking (CT), gedefinieerd als de denkprocessen betrokken bij het formuleren en oplossen van een probleem dusdanig dat een computer dit effectief kan uitvoeren. Hoewel CT in eerste instantie onder het vakgebied informatica wordt geschaald, leent het vak wiskunde zich ook om leerlingen hierin te onderwijzen. Gezien lesmateriaal op dit gebied schaars is, willen we met dit onderzoek nagaan of dynamisch modelleren aan de hand van differentiaalvergelijkingen hier toekomstperspectief voor biedt. Hiervoor ontwerpen we een lessenserie van ongeveer 3 uur die als werkmiddag gegeven wordt aan leerlingen in 5 vwo met wiskunde B. Het doel is om te leren of deze lessenserie kan bijdragen aan het ontwikkelen van aspecten van CT bij deze doelgroep.

9b. Approximate starting date/end date of data collection:

Starting date: 2022-05-31

End date: 2022-07-30

9c. If applicable: indicate which external organization(s) has/have commissioned and/or provided funding for your research.

Commissioning organization(s):

Not applicable

Funding organization(s):

Not applicable

2. TYPE OF STUDY

Please select the type of study you plan to conduct:

I will be collecting new data from individuals acting as respondents, interviewees, participants or informants.

4. RESEARCH INVOLVING THE COLLECTION OF NEW DATA

A: RESEARCH POPULATION

20. Please provide a brief description of the intended research population(s):

Leerlingen in 5 vwo met wiskunde B.

21. How many individuals will be involved in your research?

Er zullen 4 tot 6 leerlingen geïnccludeerd worden.

22. Which characteristics must participants/sources possess in order to be included in your research?

1) De leerlingen zitten in het vijfde leerjaar vwo op het voorgezet onderwijs. 2) De leerlingen volgen het vak wiskunde B.

23. Does this research specifically target minors (<16 years), people with cognitive impairments, people under institutional care (e.g. hospitals, nursing homes, prisons), specific ethnic groups, people in another country or any other special group that may be more vulnerable than the general population?

No

24. Are you planning to recruit participants for your research through the BMS test subject pool, SONA

No

B. METHODS OF DATA COLLECTION

25. What is the best description of your research?

- Observation research
 - By researcher in person
 - By photo, video or audio recording
- Interview research
- Other

(please provide a brief description of the methods used to generate and/or collect data):

Het werk dat de leerlingen leveren tijdens de werkmiddag wordt ook meegenomen voor de resultaten van het onderzoek.

26. Please provide a brief yet sufficiently detailed overview of activities, as you would in the Procedure

2022-05-12 13:33:06

3/6

section of your thesis or paper. Among other things, please provide information about the information given to your research population, the manipulations (if applicable), the measures you use (at construct level), etc. in a way that is understandable for a relative lay person.

- 1) Feedback: de lessenserrie wordt voorgelegd aan een aantal ervaringsdeskundigen voordat de leerlingen hiermee aan de slag gaan.
- 2) Werkmiddag: de leerlingen werken aan opdrachten in het lesmateriaal, hierbij worden zij geobserveerd en kunnen zij vragen stellen en feedback krijgen van de docent (onderzoeker).
- 3) Interviews: de leerlingen worden na de werkmiddag geïnterviewd over hun ervaringen, de interviews zijn semi-gestructureerd.

How much time will each participant spend (mention the number of sessions/meetings in which they will participate and the time per session/meeting)?

60 minuten voor de feedback (ervaringsdeskundigen), 180 minuten voor de werkmiddag (leerlingen) en 20 minuten voor een interview (leerlingen)

C: BURDEN AND RISKS OF PARTICIPATION

27. Please provide a brief description of these burdens and/or risks and how you plan to minimize them:

Er zijn weinig risico's aan de deelname verbonden. Leerlingen kunnen namelijk zelf bepalen of zij mee willen werken aan dit project of niet. Daarbij wordt de geïnvesteerde tijd in zekere zin gecompenseerd. Als de leerlingen deelnemen aan het project hoeven zij een dag minder deel te nemen aan de profielwerkstukdagen die de school aan het eind van het schooljaar organiseert.

28. Can the participants benefit from the research and/or their participation in any way?

Yes

Please Explain:

De hoop is dat de werkmiddag bijdraagt aan het ontwikkelen van aspecten van CT, die leerlingen bij hun verdere studie in kunnen zetten. Daarnaast is het onderwerp van de werkmiddag dynamisch modelleren, waarbij de basis van differentiaalvergelijkingen wordt behandeld. Dit is een onderwerp dat bij een technische vervolgopleiding aan bod komt en waar de leerlingen dan dus al kennis mee hebben gemaakt. Verder kunnen de leerlingen de opgedane kennis meenemen bij een hierop aansluitend profielwerkstuk.

29. Will the study expose the researcher to any risks (e.g. when collecting data in potentially dangerous environments or through dangerous activities, when dealing with sensitive or distressing topics, or when working in a setting that may pose 'lone worker' risks)?

No

D. INFORMED CONSENT

30. Will you inform potential research participants (and/or their legal representative(s), in case of non-competent participants) about the aims, activities, burdens and risks of the research before they decide

whether to take part in the research?

Yes

Briefly clarify how:

1) De leerlingen krijgen een korte introductie op de werkmiddag en de daaropvolgende interviews. 2) De ouders van de leerlingen ontvangen hierover een brief.

32. How will you obtain the voluntary, informed consent of the research participants (or their legal representatives in case of non-competent participants)?

Other

De leerlingen geven informed consent. De ouders van de leerlingen ontvangen een informatiebrief om hen op de hoogte te stellen, daarbij geven zij passive/tacit consent.

33. Will you clearly inform research participants that they can withdraw from the research at any time without explanation/justification?

Yes

34. Are the research participants somehow dependent on or in a subordinate position to the researcher(s) (e.g. students or relatives)?

No

35. Will participants receive any rewards, incentives or payments for participating in the research?

• No

36. In the interest of transparency, it is a good practice to inform participants about what will happen after their participation is completed. How will you inform participants about what will happen after their participation is concluded?

- Participants will receive the researcher's contact details, so that they can contact the researcher if they have questions/would like to know more.

E. CONFIDENTIALITY AND ANONYMITY

37. Does the data collected contain personal identifiable information that can be traced back to specific individuals/organizations?

No

39. Will you make use of audio or video recording?

Yes

- What steps have you taken to ensure safe audio/video data storage?

De les wordt opgenomen met een video-kit van Iris Connect en de beelden zijn alleen binnen de beveiligde omgeving te bekijken.

- At what point in the research will tapes/digital recordings/files be destroyed?

De beelden worden uiterlijk 30 september 2022 verwijderd.

5. DATA MANAGEMENT

- I have read the UT Data policy.
- I am aware of my responsibilities for the proper handling of data, regarding working with personal data, storage of data, sharing and presentation/publication of data.

6. OTHER POTENTIAL ETHICAL ISSUES/CONFLICTS OF INTEREST

40. Do you anticipate any other ethical issues/conflicts of interest in your research project that have not been previously noted in this application? Please state any issues and explain how you propose to deal with them. Additionally, if known indicate the purpose your results have (i.e. the results are used for e.g. policy, management, strategic or societal purposes).

De resultaten die uit het onderzoek volgen kunnen gebruikt worden om de lessenserie te verbeteren.

7. ATTACHMENTS

-

8. COMMENTS

-

9. CONCLUSION

Status: Approved by commission

The BMS ethical committee / Domain Humanities & Social Sciences has assessed the ethical aspects of your research project. On the basis of the information you provided, the committee does not have any ethical concerns regarding this research project. It is your responsibility to ensure that the research is carried out in line with the information provided in the application you submitted for ethical review. If you make changes to the proposal that affect the approach to research on humans, you must resubmit the changed project or grant agreement to the ethical committee with these changes highlighted.

Moreover, novel ethical issues may emerge while carrying out your research. It is important that you reconsider and discuss the ethical aspects and implications of your research regularly, and that you proceed as a responsible scientist.

Finally, your research is subject to regulations such as the EU General Data Protection Regulation (GDPR), the Code of Conduct for the use of personal data in Scientific Research by VSNU (the Association of Universities in the Netherlands), further codes of conduct that are applicable in your field, and the obligation to report a security incident (data breach or otherwise) at the UT.

Mailcorrespondentie aanpassing onderzoeksopzet

Beste Lyan,

Mijn afstudeerder Roos de Lange is met een OVO-onderzoek bezig voor de master ECB, en heeft daarvoor lesmateriaal ontwikkeld voor 5 vwo Wiskunde B. Ze wil dit graag uitproberen door leerlingen hier een paar uur mee aan de slag te zetten. Dit zou afgelopen jaar gebeuren toen ze nog stageliep op een school, maar door omstandigheden is het later geworden. Dit maakt het lastiger om nu respondenten te vinden. Het plan is nu om wat rond te vragen op scholen, bijvoorbeeld op de school waar ikzelf ook lesgeef. Voor leerlingen is het echter extra werk (een paar uur), waar ze niet per se op dit moment iets aan hebben (hoewel het wel mooi een stapje voor is als ze later een technische opleiding gaan doen).

Om de leerlingen wat tegemoet te komen hebben we nu bedacht om een cadeaubon van 15 euro pp aan te bieden, ter compensatie van de tijd die leerlingen hieraan besteden (vergelijkbaar met het verloten van een cadeaubon als er een vragenlijst wordt uitgezet).

Ik begreep van Cindy Poortman dat het netjes is om jou dit even voor te leggen, aangezien de ethische aanvraag (nr 220581) al eerder gedaan en goedgekeurd is (en daar stonden die cadeaubonnen nog niet in vermeld omdat dat toen nog niet het plan was). De uitvoering is al op korte termijn, en het is slechts een kleine aanpassing op de onderzoeksopzet. Is het akkoord als we dit zo uitvoeren?

Met vriendelijke groet,
Mark Timmer

Hallo Mark en Roos,

Het is prima om de leerlingen een vergoeding te geven als jullie daar de financiële middelen voor hebben in het project. Ik dacht even dat ik het wel wat hoog vond, maar 5€ per uur mag inderdaad als vergoeding worden gegeven, ik zag al dat het een vrij omvangrijke tijdsinvestering is in de originele aanvraag, rond de 4,5 uur, dus 15€ lijkt mij redelijk. Ik archiveer dit bij aanvraag 220581.

Succes met de uitvoer en het vinden van leerlingen die deel willen nemen.

Groet,
Lyan Kamphuis-Blikman

E.2 Brief aan ouder(s)-verzorger(s)

Beste ouder(s)/verzorger(s),

Uw zoon/dochter volgt het vak wiskunde B op school. Voor dit vak heeft uw kind aangegeven interesse te hebben in een werkdag/middag om zo op een andere manier met het vak bezig te zijn. In overleg met uw kind wordt deze werkdag/middag ingepland en als dank voor zijn/haar deelname zal uw kind een cadeaubon ontvangen.

De afgelopen maanden heb ik, Roos de Lange (eerstegraads docent wiskunde in opleiding), voor mijn afstudeeropdracht een lesmodule ontworpen voor het vak wiskunde B. Hierin leert uw kind de beginselen van dynamisch modelleren.

Voor dit onderzoek zou ik graag het werk van de leerlingen bekijken en na afloop de leerlingen interviewen over hun ervaringen met de opdrachten. Om de werkdag zo goed mogelijk te kunnen evalueren zullen tijdens de werkdag videobeelden gemaakt worden. Deze beelden worden in een beveiligde omgeving bewaard (Iris Connect) en zullen na weergave verwijderd worden (de beelden worden alleen door mij bekeken). Verder worden de interviews opgenomen (audio) om deze later te transcriberen. Zowel het werk van de leerlingen, als de antwoorden van leerlingen tijdens de interviews hebben geen effect op hun resultaten voor het vak wiskunde B. De transcripties zullen geanonimiseerd worden opgeslagen. Ook eventuele interessante resultaten uit de verslagen zullen anoniem worden verwerkt in het onderzoek.

Als u akkoord gaat met het gebruik van het werk van uw kind voor het verder verbeteren van het lesmateriaal, en met de mogelijkheid dat uw kind geïnterviewd wordt, dan hoeft u niets te doen. Mocht u hier wel bezwaren tegen hebben, dan kunt u dat kenbaar maken via een e-mail aan mij (r.delange@student.utwente.nl). Uiteraard kan uw zoon/dochter zelf nog op ieder moment beslissen niet aan het onderzoek te willen deelnemen.

Ik hoop u hiermee voldoende te hebben geïnformeerd. Voor vragen kunt u contact opnemen via het bovengenoemde e-mailadres.

Met vriendelijke groet,

Roos de Lange, eerstegraads docent wiskunde in opleiding