Het verbeteren van probleemoplossend vermogen met betrekking tot metacognitieve vaardigheden

Verslag van Onderzoek voor Onderwijs 10 EC

RENSKE PIJNENBURG

Universiteit Twente. Faculteit Behavioural, Management and Social Sciences.
Opleiding Educatie en Communicatie in de bètawetenschappen Wiskunde.

Begeleider: Mark Timmer, Tweede Beoordelaar: Tom Coenen

SAMENVATTING In dit onderzoek is een theoretische lessenserie, gebaseerd op literatuur, ontworpen met als doel het probleemoplossend vermogen van leerlingen te verbeteren. De lessenserie is gefocust op het verbeteren van metacognitieve vaardigheden bij een testgroep. De lessenserie is ontworpen bij Hoofdstuk 6 van Getal en Ruimte, Differentiaalrekening, en is uitgetest in een 4e klas VWO wiskunde B. Een formatieve toets heeft naderhand het verschil in probleemoplossend vermogen van de leerlingen in de testgroep en een controlegroep in kaart gebracht en uit deze resultaten is geconcludeerd dat er geen significant verschil was tussen beide groepen. Twee leerlingen uit de controle groep en twee leerlingen uit de testgroep hebben dezelfde formatieve toets in een hardop-denksessie afzonderlijk van elkaar gemaakt om de metacognitieve vaardigheden van de leerlingen te kunnen vergelijken. Ook hieruit is geen duidelijk verschil te concluderen.

1 Inleiding

Het onderwijsdebat heeft zich onder meer gericht op de vraag welke kennis en vaardigheden van belang zijn om leerlingen voor te bereiden op een snel veranderende maatschappij. Deze vaardigheden worden vaak samengevat onder de term '21e-eeuwse vaardigheden'. SLO benadrukt dat er een steeds groter beroep op de beheersing van deze vaardigheden gedaan zal worden en het dus belangrijk is deze in het onderwijs op te nemen. Onder deze 21e-eeuwse vaardigheden valt onder andere 'probleemoplossend denken en handelen.' (Thijs et al., 2014). Om een beeld te krijgen: in de klaspraktijk ziet men het probleemoplossend denken en handelen vooral terugkomen bij 'inzicht'-vragen. Opdrachten die de leerlingen maken zijn in drie categorieën te verdelen: De 'leer'-opgaven, die vaak door leerling snel beantwoord kunnen worden, de 'reproductie'-opgaven, waar een leerling wel even over na moet denken maar die eigenlijk vooral toepassingen zijn die ze tijdens het huiswerk al een keer tegen zijn gekomen, en de 'inzicht'-opgaven, waarbij de leerlingen de stof op een creatieve manier moeten toepassen en vaak meerdere denkstappen nodig zijn. Doordat de leerlingen de toepassing van stof in de inzichtvragen nog niet eerder gezien hebben, lopen ze vaker vast. Vooral zwakkere en gemiddelde leerlingen hebben moeite met deze vragen en weten vaak bij het lezen van de vraag al niet waar ze moeten beginnen. Hierdoor raken ze in de stress (zo een vraag is vaak ook veel punten waard) en wordt de opgave bijvoorbeeld al opgegeven onder het mom van 'dit is veel te moeilijk, dit lukt mij nooit, ik ben helemaal niet zo goed in wiskunde'. Om deze leerlingen te helpen zijn er (naar eigen ervaring) echter alleen wat sturende vragen nodig zoals 'Wat is gegeven?', 'Waar wil je naartoe?', 'Wat heb je daarvoor nodig?' of 'Wat zijn de eigenschappen ook alweer van . . . , dus hoe zou dat je kunnen helpen?' om hen verder de vraag zelf op te laten lossen. Dit onderzoek focust zich dan ook op de vraag of en hoe er handvatten geboden kunnen worden aan deze leerlingen, om de kennis die ze al hebben naar boven te halen, zodat ze deze inzichtvragen helemáál zelf op kunnen lossen. Het onderwerp van dit onderzoek is daarom het probleemoplossend vermogen van leerlingen.

Het begrip 'probleemoplossend vermogen' moet eerst verder gespecificeerd worden. Volgens Schoenfeld zou ieder onderzoek over probleemoplossend vermogen een omschrijving van de gehanteerde definitie moeten bevatten aangezien het begrip 'probleemoplossend vermogen' te algemeen is geworden en vaak als een overkoepelende term wordt gebruikt: ". . . the field needs much greater clarity of the meaning of the term 'problem solving'. The term has served as an umberella under which radically different types of research have been conducted." (Schoenfeld and Grouws, 2992). De definitie die in dit onderzoek gehanteerd zal worden is de definitie die SLO stelt: "Probleemoplossend denken en handelen is het vermogen op een probleem te (h)erkennen en tot een plan te komen om het probleem op te lossen." (SLO, 2020*b*). Voor het startpunt van onderzoek naar probleemoplossend vermogen in de wiskunde wordt vaak verwezen naar het werk van George Polya. In zijn boek How to Solve it (Polya, 1945), stelt hij dat er vier fases zijn waar iemand doorheen moet gaan om een probleem op te lossen: 1. Het probleem begrijpen, 2. Een plan opstellen om het probleem op te lossen, 3. Het plan uitvoeren en 4. Terugkijken naar de oplossing. Polya was ervan overtuigd dat er daarnaast algemene probleemoplosstrategieën waren, heuristieken, die je kan onderwijzen. Heuristieken zijn algemene vuistregels of raadgevingen die geen betrekking hebben tot één stuk leerstof. Hierbij moet men denken aan: een figuur of tabel maken, de elementen uit de opgave structureren, het probleem versimpelen etc. Schoenfeld onderscheidt, naast heuristieken, nog vier andere aspecten die van belang zijn bij het oplossen van problemen: domeinspecifieke kennis, metacognitieve vaardigheden, houding tot wiskunde en oefening. Hoewel niet iedereen eens is over de mate van belang van de vijf aspecten van Schoenfeld, vangen ze wel de verschillende onderzoekvelden binnen 'probleemoplossend vermogen'. Met domeinspecifieke kennis wordt de kennis bedoeld van definities, eigenschappen en (reken)technieken, maar ook inzicht in de leerstof. Metacognitieve vaardigheden zijn vaardigheden die het leerproces aansturen. Hierbij moet men denken aan plannen, analyseren, vergelijken, relaties leggen, logisch denken en reflecteren. Houding tot wiskunde heeft betrekking tot het zelfvertrouwen dat de leerling heeft tijdens het beoefenen van wiskunde, maar ook de vooroordelen die een leerling heeft. Ten slotte spreekt oefening voor zich. Merk op dat deze aspecten enigszins overlap hebben, domeinspecifieke kennis zal bijvoorbeeld beter blijven hangen door enige oefening.

Terugkijkend op de helpende vragen aan de leerlingen van eerder, valt het weten van de antwoorden op de vragen 'Wat heb je daarvoor nodig [om bij je eindantwoord te komen]?' en 'Wat zijn de eigenschappen ookalweer van. . . , dus hoe zou dat je kunnen helpen?' onder domeinspecifieke kennis en het überhaupt stellen van deze, en de andere vragen, aan zichzelf onder metacognitieve vaardigheden. De helpende vragen vullen dus vooral het metacognitieve deel in voor de leerlingen. Wanneer ze zichzelf deze vragen hadden gesteld, waren ze er ook gekomen. Echter is, zoals eerder al laten vallen, niet iedereen het eens over de mate van het belang van metacognitieve vaardigheden (en de andere vijf aspecten van Schoenfeld) in het probleemoplossen. Barton zegt in zijn boek (Barton, 2018) dat probleemoplossen geen vaardigheid is maar dat leerlingen, om succesvol problemen op te kunnen lossen, domeinspecifieke kennis moeten hebben. Hij noemt in zijn boek wel dat het bewezen is dat metacognitieve vaardigheden belangrijk zijn, maar gaat hier niet verder op in (echter zegt hij in een later interview dat hij het belang van metacognitieve vaardigheden welliswaar is gaan inzien (Timmer and Caspers, 2022)). De andere 5 aspecten van Schoenfeld noemt hij helemaal niet, hoewel hij oefening wel noemt om domeinspecifieke kennis eigen te maken. Heuristieken ziet hij vooral níét als toegevoegde waarde. Wat betreft metacognitieve vaardigheden is inderdaad wel degelijk gebleken dat het uitvoeren van bepaalde denkactiviteiten tijdens het leren, positieve invloed heeft op leerprestaties. van Hout-Wolters (2011) verwijst in haar afscheidscollege hiervoor naar verschillende onderzoeken en overzichtsstudies. Barton's mening over het belang van domeinspecieke kennis en nutteloze heuristieken deelt hij met Tricot and Sweller (2014). Het artikel Domain Specific knowledge and Why Teaching Generic Skills Does Not work houden zij een betoog met dezelfde insteek. Daarnaast schrijft ook Greg Ashman in zijn blog dat heuristieken niet helpen bij het oplossen van problemen want: "Hoe zou je bijvoorbeeld een probleem simpeler maken, als je de onderliggende structuur niet ziet? Die moet hetzelfde zijn, anders heb je er niks aan. Echter, als je die al ziet, waarom zou je dan het probleem makkelijker moeten maken?" (Ashman, 2017). In een kort literatuuronderzoek laten Sweller et al. (2010) weten dat het mogelijk is om scholieren generieke oplosmethode aan te leren zoals Polya suggereert, waarbij er verwezen wordt naar een onderzoek van Schoenfeld, maar dat dit niet genoeg is. Er zou namelijk geen onderzoek zijn, gebaseerd op gerandomiseerd onderzoek met controlegroep, dat concludeert dat zulk onderwijs daadwerkelijk tot betere probleemoplossers leidt. Er zou daarentegen wél onderzoek zijn dat concludeert dat wiskundigen goede probleemoplossers kunnen worden door grote hoeveelheden domeinspecifieke schema's te onthouden waarbij verwezen wordt naar een onderzoek over amateur- en meesterschakers). Een onderzoek uit China over de Wiskunde Olympiade beaamt dat Polya's methode van het aanleren van algemene heuristieken oké is, maar dat het meer kan helpen om domeinspecifieke heuristieken te onthouden/ domeinspecifieke kennis te gebruiken (Pak-Hong, 2012).

Al met al zijn er verschillende meningen over wat de effectiefste manier is van het verbeteren van probleemoplossend vermogen van leerlingen. Omdat de literatuur vooral verwijst naar domeinspecifieke kennis wanneer er gezocht wordt naar probleemoplossend vermogen, maar de vragen uit de inleiding vooral duiden op metacognitieve vaardigheden, zal er op deze twee aspecten gefocust worden in dit onderzoek. Het hoofddoel van dit onderzoek is om een lessenserie te ontwerpen bij een hoofdstuk naar aanleiding van literatuur om zo het probleemoplossend vermogen van leerlingen te verbeteren. De lessenserie zal getest worden in een vierde klas VWO wiskunde B om de effectiviteit van de lessenserie vast te stellen. Eerder is ook te lezen dat veel leerlingen een opdracht al snel opgeven onder het mom van '... ik ben helemaal niet zo goed in wiskunde'. Hier lijkt het aspect 'houding tot wiskunde' dus ook overduidelijk een grote rol te spelen. Uiteraard zal daarom de houding tot wiskunde (en de aspecten heuristieken en oefening) waarschijnlijk doorschemeren in het onderzoek. Echter, zoals aangegeven, zal hier niet de focus van dit onderzoek liggen. De reden hiervoor is de beperkte looptijd.

Eerst zullen de onderzoeksvragen geformuleerd worden, waarna de methode gespecificeerd wordt. Dit wordt gevolgd door een literatuurstudie (deze inleiding en de literatuurstudie omvatten meteen het theoretisch kader), waarna de materialen voor de lessenserie besproken worden. Hierna zullen de resultaten aan bod komen. De interpretatie van de resultaten worden besproken in de discussie, evenals de beperkingen van dit onderzoek. Het rapport sluit af met aanbevelingen en een conclusie.

2 Onderzoeksvragen

De hoofdvraag voor mijn onderzoek is:

- Waar moet een lessenserie aan voldoen om leerlingen te ondersteunen in het verbeteren van hun probleemoplossend vermogen?

Om mijn hoofdvraag te beantwoorden zijn de volgende deelvragen opgesteld:

- Waar moeten opdrachten aan voldoen om probleemoplossend vermogen te verbeteren?

- Welke rol moet de docent aannemen om leerlingen te ondersteunen in het verbeteren van hun probleemoplossend vermogen?

3 Methode

3.1 Procedure

Om de hoofd- en deelvragen te beantwoorden, is er eerst een kleine literatuurstudie gedaan. Hier zijn aanknopingspunten uitgekomen, waar de lessenserie theoretisch gezien aan zou moet voldoen om het probleemoplossend vermogen van leerlingen te verbeteren. De theoretische lessenserie is ontworpen en daarna in de praktijk getest om te kijken of deze inderdaad werkt om het probleemoplossend vermogen van leerlingen te verbeteren. Hieronder wordt per onderdeel de procedure behandeld.

3.1.1 Literatuurstudie

Tijdens de literatuurstudie zijn de onderzoeksvragen naar aanleiding van literatuur beantwoord. Hier zijn aanknopingspunten uitgekomen waar de lessenserie naar ontworpen is.

3.1.2 Ontwerp lessenserie en formatieve toets

Na de literatuurstudie is eerst kritisch gekeken naar het methodeboek dat de leerlingen momenteel gebruiken. Er is geanalyseerd of de manier van het aanleren van domeinspecifieke kennis in lijn staat met de literatuur. In de lessen zelf is niet specifiek gefocust op mogelijke aanvullingen die uit de analyse kwamen. Echter hebben deze aanvullingen wel als beginpunt gediend voor het ontwerp van inzichtopgaven. Deze opdrachten (gekozen en aangepast uit het methodeboek of zelf ontworpen) hebben gediend om het begrip probleemoplossend vermogen te introduceren, eventueel te verbeteren en te testen. Deze opdrachten zijn individueel, in tweetallen of in kleine groepjes gemaakt en dienden vooral om de metacognitieve vaardigheden aan te leren. Per paragraaf is één inzichtopdracht behandeld. De aanvullingen die kwamen uit de analyse op de methode hebben als beginpunt gediend voor het ontwerp van deze opdrachten aangezien ze aspecten bevatten waar de leerlingen waarschijnlijk bepaalde koppelingen tussen de theorie nog niet hebben gelegd. De opdrachten zijn dus 'nieuw' voor de leerlingen en nieuwe opdrachten met meerdere stappen zijn nodig om wiskundige denkactiviteit te starten. Dit soort opdrachten, met veel wiskundige denkactiviteit en meerdere stappen (zie Sectie 4 Literatuurstudie punten B22 en B27), zijn nodig om leerlingen metacognitieve vaardigheden te laten gebruiken. Wanneer de leerlingen de gewenste oplosmethode meteen al zouden weten, zouden ze deze metacognitieve vragen immers niet nodig hebben. Om het probleemoplossend vermogen van de leerlingen naderhand te testen, is een formatieve toets opgesteld. De formatieve toets bestaat opnieuw uit inzichtopgaven (die niet in de lessenserie behandeld zijn).

De uitkomst van het ontwerp is dus:

- Een analyse (met eventuele correcties en aanvullingen) van het methodeboek voor het desbetreffende hoofdstuk. Dit heeft als beginpunt gediend voor het ontwerp van de inzichtopgaven
- Inzichtopgaven met uitwerking en onderbouwing gebaseerd op literatuur.
- Een formatieve toets bestaande uit 2 of 3 inzichtopgaven om het probleemoplossend vermogen van leerlingen te testen.

Merk op dat het oefenen met uitgebreide leerstof er ook voor kan zorgen dat de leerlingen betere domeinspecifieke kennis ontwikkelen. Ze zouden dus door deze verbetering in domeinspecifieke kennis, i.p.v. door de verbetering in metacognitieve vaardigheden, al een verbeterd probleemoplossend vermogen kunnen laten zien. Volgens literatuur is domeinspecifieke kennis namelijk ook een van de hoofdsleutels tot een goed probleemoplossend vermogen (zie Sectie 1 Inleiding). Echter schuilt hier mogelijk een paradox: betere metacognitieve vaardigheden kunnen zorgen voor betere domeinspecifieke kennis en betere domeinspecifieke kennis kan zorgen voor het beter toepassen van metacognitieve vaardigheden. Dit mogelijke probleem in foutief interpreteren van onderzoeksresultaten en de oplossing hiervoor wordt behandeld in Sectie 3.4 Methode-Analyse.

3.1.3 Uitvoering lessenserie en formatieve toets

De lessenserie is ontworpen bij 4 VWO wiskunde B, hoofdstuk 6. Het onderwerp van het hoofdstuk is differentiaalrekening (Dijkhuis et al., 2020). De uitvoering was in één klas, de auteur's stageklas, aangezien er geen parallelklas beschikbaar was. Om toch een controlegroep ter beschikking te hebben is de klas opgesplitst in 2 groepen: De testgroep en de controlegroep. Beide groepen hebben over het algemeen de lessen gekregen zoals de auteur's vakcoach en de auteur die normaal ook geven. Één les per paragraaf heeft de auteur's vakcoach de controlegroep les geven zoals normaal en heeft de testgroep van de auteur een interventieles gekregen. In deze interventieles is de nieuwe stof behandeld die ook in de controlegroep behandeld is én probleemoplossend gericht gewerkt. In deze interventieles is de inzichtopdracht van die paragraaf aan bod gekomen zoals hierboven besproken.

Tijdens de uitvoering zijn alle leerlingen in het begin ingelicht over het onderzoek. Zo kon tijdens het onderzoek aan de testgroep uitgelegd worden wáárom ze bijvoorbeeld echt bepaalde huiswerkopgaven moesten maken, en wáárom ze bijvoorbeeld niet het huiswerk met het antwoordenboek ernaast mochten maken. Dit zorgde er hopelijk voor dat de leerlingen het nut ervan inzagen en daadwerkelijk meewerkten. Dit was vooral van belang omdat de leerlingen zelf de metacognitieve vaardigheden moesten gaan toepassen. Hoewel er verschillende meningen zijn over wanéér in het leerproces probleemoplossen zou moeten plaatsvinden (zie Sectie 4.2.2), is er gekozen om de ontworpen inzichtvragen aan het eind van elke paragraaf aan bod te laten komen als herhaling van die paragraaf. Hiervoor is gekozen zodat de leerlingen van de test- en controlegroep beide op eenzelfde manier de nieuwe theorie gedoceerd krijgen en geen van beide groepen zich hierdoor benadeeld zou voelen bij de hoofdstuktoets. De lessen zagen er, buiten de behandeling van de inzichtopdracht in de herhaling om, verder hetzelfde uit zoals de auteur's normale lessen: Eerst een stukje klassikale uitleg met herhaling en nieuwe theorie, daarna zelfstandig werken. Zo waren er niet té veel variabelen. Het is daarnaast belangrijk dat de leerlingen van de testgroep wel genoeg tijd kregen om aan huiswerk te werken, zodat ze niet méér tijd thuis besteedden aan wiskunde dan de andere leerlingen.

Aan het einde van de lessenserie is bij beide groepen de formatieve toets afgenomen, bestaande uit drie inzichtopgaven. De leerlingen is gevraagd zo veel mogelijk op te schrijven van wat ze weten. Omdat het metacognitieve aspect niet schriftelijk te testen is, zijn hier twee leerlingen van iedere groep voor uitgekozen. Deze leerlingen hebben met de auteur erbij, apart van elkaar, de formatieve toets gemaakt waarbij ze hun denkproces moesten verwoorden. Zo is er een beeld verkregen van de ontwikkeling van hun gebruik van metacognitieve vaardigheden. Tijdens de hardop-denksessie heeft de auteur zo min mogelijk gezegd. Wanneer de auteur wél zou vragen naar hun denkwijze, zou dit er namelijk voor kunnen zorgen dat de leerlingen gedachten hierdoor automatisch wat logischer op rijtje zetten, terwijl dit juist uit henzelf moest komen. Het op een rijtje zetten van gegevens is immers een metacognitieve vaardigheid. Door omstandigheden konden leerlingen 1 maar vijfentwintig minuten over de hardopdenksessie doen, terwijl leerlingen 2 hier, zoals de rest van de klas, dertig minuten over mochten doen. (Zie Sectie 3.2 Methode-Respondenten voor definiëring 'leerlingen 1' en 'leerlingen 2'.)

De cijfers voor de formatieve toets hebben niet meegeteld zodat geen van de twee groepen benadeeld wordt. Om ervoor te zorgen dat de leerlingen wél bij zouden zijn met de stof, en de toets dus naar eigen kunnen zo goed mogelijk zouden maken, heeft de formatieve toets na hun meetellende hoofdstuktoets plaatsgevonden. Zo hadden de leerlingen de stof wel al zo goed mogelijk geleerd. Om ervoor te zorgen dat geen groep benadeeld wordt door het verschil in lesgeven, is de toets van het hoofdstuk gegaan over de stof die in de gezamenlijke lessen behandeld werd. Daarnaast zijn daarvoor toetsvragen van de methode gebruikt.

Alle leerlingen en ouders hebben voorafgaande aan het onderzoek een brief ontvangen ter informatie van het onderzoek en het geven van passief consent. Deze is te vinden in Bijlage A.1. De leerlingen geselecteerd voor de hardop-denksessie is om actief consent gevraagd voorafgaande aan de hardop-denksessie, deze brief is te vinden in Bijlage A.2. Voor de leerlingen onder de 16 jaar geselecteerd voor de hardop-denksessie is ook de ouders gevraagd om actief consent te geven, deze brief is te vinden in Bijlage A.3. Bovenstaande is goedgekeurd door de ethiekcommissie, met ethiekaanvraagnummer 230682.

3.2 Respondenten

De klas bestaat uit vijftien leerlingen van 15 en 16 jaar oud, waarvan zeven vrouw en acht man. De verdeling van de klas in test- en controlegroep is gebaseerd op de cijfers van de leerlingen: Per leerling is er een verdelingscijfer ($cijfer_{verdeling}$) uitgerekend met Formule 1, waarbij hun gemiddelde rapportcijfer ($cijfer_{rapport}$) twee keer mee telt en het cijfer dat ze hebben gescoord voor een soortgelijk hoofdstuk een keer mee telt ($cijfer_{H2}$). Deze wegingsfactor is toegevoegd omdat de toets voor hoofdstuk 2 wel meegenomen moest worden in de groepsverdeling (wanneer een leerling goede voorkennis heeft, heeft deze al een rijk cognitief schema in zijn hoofd waardoor het makkelijker is hierop voort te bouwen met nieuwe stof (Drijvers et al., 2012*a*)), maar niet té zwaar moest wegen aangezien deze toets een momentopname is. Het rapportcijfer geeft een globaler beeld van het kunnen van de leerling.

$$cijfer_{verdeling} = \frac{2 \cdot cijfer_{rapport} + cijfer_{H2}}{3} \tag{1}$$

De verdelingscijfers zijn op volgorde gezet en de bijbehorende leerlingen zijn om en om aan de testgroep (mét interventielessen) en controlegroep (alleen 'normale' lessen) toegewezen. De formatieve toets is gemaakt door alle leerlingen behalve één leerling uit de testgroep. Dit zou ervoor kunnen zorgen dat de groepen niet meer helemaal representatief zijn, doordat deze leerling niet bij de middenmoot van de groep hoorde. Er is voor gekozen de data van deze leerling uit de testgroep, en van een vergelijkbare leerling (vergelijkbaar gebaseerd op verdelingscijfer) uit de controlegroep buiten beschouwing te laten zodat de groepen beter overeenkomen. De binnen beschouwing genomen testgroep bestaat uit 7 leerlingen, waarvan 3 vrouw en 4 man, en de controlegroep uit 6 leerlingen, waarvan 2 vrouw en 4 man. Merk op dat het oneven aantal leerlingen ervoor zorgt dat de gemiddeldes van de twee groepen dichter bij elkaar liggen, omdat de sterke en zwakke leerlingen elkaar zo beter uitdempen. In Tabel 1 is te zien wat per groep de gemiddelde cijfers zijn per onderdeel van Formule 1.

	$\boldsymbol{cijfer_{H2}}$	$\boldsymbol{cijfer_{rapport}}$	$\boldsymbol{cijfer_{verdeling}}$
testgroep	6.3	5.6	5.8
controlegroep	5.7	5.6	5.6

Tabel 1: Gemiddelde cijfers per groep.

De leerlingen voor de hardop-denksessie zijn ook met behulp van deze verderlingscijfers gekozen: twee leerlingen uit de middenmoot van de totale groep (vrouw en vrouw, verder in dit onderzoek 'leerlingen 1' genoemd) en twee sterke leerlingen, hoewel niet met het allerhoogste cijfer (man en man, verder in dit onderzoek 'leerlingen 2' genoemd). In Tabel 2 is te zien wat de gemiddelde cijfers per onderdeel van Formule 1 zijn voor deze leerlingen. Merk op dat de leerling van de controlegroep het hoogste verdelingscijfer heeft voor leerlingen 1 en de leerling uit de testgroep voor leerlingen 2.

	cijfer_{H2}	$\mathit{cijfer}_{rapport}$	$\mathit{cijfer}_{verdeling}$
leerling 1 testgroep	6.5	5.8	6.0
leerling 1 controlegroep	6.5	6.6	6.6
leerling 2 testgroep	7.7	7.1	7.3
leerling 2 controlegroep	7.3	7.0	7.1

Tabel 2: Gemiddelde cijfers van de leerlingen uit de middenmoot, 1, van de test- en controlegroep en van de sterke leerlingen, 2, van de test- en controlegroep.

3.3 Instrumenten

De instrumenten die tijdens dit onderzoek gebruikt zijn, zijn de lessenserie met inzichtopdrachten en de formatieve toets. Aangezien deze beide in dit onderzoek ontwikkeld worden, hier later meer over in Sectie 5 Ontwikkelde Materialen.

3.4 Analyse

Voor de formatieve toets hebben de leerlingen punten gekregen per vraag voor iedere denkstap. Het gemiddelde totale aantal punten per groep is vergeleken met elkaar. Dit is gedaan door middel van een t-toets. De t-toets is ongepaard en er wordt een eenzijdig verdeelde t-toets gebruikt omdat, hoewel in de sociale wetenschappen meestal een tweezijdige toets wordt gedaan, wiskundig gezien een eenzijdige toets logisch is voor een eenzijdige alternatieve hypothese (Cho and Abe, 2013): H_0 is in dit geval dat er géén verschil is tussen de test- en controlegroep en H_1 dat de testgroep beter zal scoren op de formatieve toets. Daarnaast is er voor de t-toets bepaald of er aangenomen mag worden dat de varianties gelijk zijn of niet door middel van een F-toets. Voor beide toetsen wordt een significantieniveau van 0.05 aangehouden.

Tijdens de hardop-denksessie is er gekeken naar de aanpak van de leerlingen van de opdrachten, en hoe eventuele metacognitieve vaardigheden hen hierin verder hebben geholpen. Het gebruik van metacognitieve vaardigheden zal vergeleken worden.

De paradox uit Sectie 3.1.2 wordt door het analyseren van de formatieve toets én hardop-denksessie óók deels voorkomen. Wanneer de testgroep de toets beter maakt, maar in de hardop-denksessie geen verandering in het gebruik van metacognitieve vaardigheden laat zien, zal de verbetering waarschijnlijk komen door een verbetering in domeinspecifieke kennis.

Merk op dat het verbeteren van het probleemoplossend vermogen van leerlingen echter tijd nodig heeft (zie ook Sectie 4 Literatuurstudie punt E9). Daarom is het onwaarschijnlijk dat de testgroep na deze lessenserie bij één hoofdstuk ineens véél betere probleemoplossers zijn. In dit onderzoek wordt dan ook gehoopt kleine veranderingen in denkprocessen waar te nemen, waardoor leerlingen iets verder komen in een inzichtopgave dan waar ze eerst zouden vastlopen, en hier conclusies uit te trekken. Merk daarnaast op dat tijdens de interventielessen niet altijd alle leerlingen van de testgroep aanwezig waren door bijvoorbeeld ziekte. Dit kan als resultaat hebben dat de groepen qua resultaten óók dichter bij elkaar zullen liggen.

4 Literatuurstudie

In deze literatuurstudie zal eerst een overzicht gegeven worden van de verschillende overlappende concepten bij het begrip 'probleemoplossend vermogen'. Dit is nodig om in kaart te brengen binnen welke termen op wat voor manier gezocht kan worden om de onderzoeksvragen te beantwoorden. Hierna zal er per deelonderzoeksvraag gezocht worden binnen de literatuur naar antwoorden. Om het verwijzen naar de specifieke tips/ antwoorden uit de literatuur later in dit onderzoek te verduidelijken, zullen deze punten genummerd worden.

4.1 Probleemoplossend vermogen en andere overlappende termen

In Sectie 1 Inleiding is te lezen dat er in verschillende onderzoeken verschillende definities gehanteerd worden voor probleemoplossend vermogen. Andersom geldt echter hetzelfde, er zijn veel verschillende termen die veel overlap hebben met probleemoplossend vermogen. Naast probleemoplossend vermogen, staat bijvoorbeeld computational thinking ook in het rijtje van 21e-eeuwse vaardigheden op de site van SLO. Computational thinking wordt in een conceptueel kader van SLO als volgt gedefinieerd (Thijs et al., 2014): *"Denkprocessen waarbij probleemformulering, gegevensorganisatie, -analyse en -representatie worden gebruikt voor het oplossen van problemen met behulp van ICT-technieken en gereedschappen."* Volgens deze publicatie zou het in ieder geval uit de volgende (letterlijk overgenomen) vaardigheden bestaan:

- Het formuleren van problemen zodanig dat het mogelijk is de computer en andere digitale toepassingen te gebruiken om de problemen op te lossen.
- Het logisch ordenen en analyseren van de data, het op abstract niveau representeren van de data door middel van bijvoorbeeld modellen en simulaties en algoritmisch denken toepassen om oplossingen te genereren.
- Het analyseren van de mogelijke oplossingen en een keuze maken voor de meest effectieve en efficiënte stappen en bronnen om tot een uiteindelijke oplossing te komen.
- Het generaliseren van het proces om problemen op te lossen zodat het ook bij andere problemen toegepast kan worden.

In een publicatie van Kennisnet (Kennisnet is de publieke organisatie voor onderwijs en ICT, ze zorgen voor een landelijke ICT-basisinfrastructuur, adviseren de sectorraden en delen hun kennis met het PO, VO en MBO) wordt benadrukt dat computational thinking niet als het leren van programmeren gezien moet worden. In plaats daarvan is de bedoeling juist om het creatieve, oplossingsgerichte vermogen van kinderen aan te scherpen, en hun kennis van digitale systemen te vergroten (van Bruggen et al., 2016).

In de verkorte versie van zijn inaugurele rede praat van Streun (2002) niet over probleemoplossend vermogen van leerlingen, maar over de verschillende typen kennis: weten dat, weten hoe, weten waarom en weten over weten. Weten dat gaat over de kennis van feiten en begrippen en het reproduceren, dit type kennis is goed te toetsen met traditionele pen-en-papier-toetsen. Weten hoe gaat over de analyse van een probleem en het opstellen van een probleemaanpak, het toepassen van feiten en begrippen en het controleren. Dit wordt zichtbaar door de aanpak van problemen, open vraagstellingen en zelfstandig onderzoek. Weten waarom gaat over principes, abstracties, de samenhang van begrippen en rijke cognitieve schema's. De toetsing vereist vragen naar samenhang. Tot slot gaat weten over weten over reflecteren, monitoren en kennis over je eigen weten en aanpak, maar ook over bekwaamheid om je eigen inzicht en denken te beoordelen. Toetsing hiervan vraagt om rapportage van de leerlingen zelf over hun werkwijze en zelfkennis, maar ook om observatie door bijvoorbeeld de docent. In termen van dit onderzoek zouden weten dat, weten hoe en weten waarom dus onder domeinspecifieke kennis vallen, en weten over weten onder metacognitieve vaardigheden. Van Streun zegt dat in het onderwijs in de wiskunde de nadruk niet voornamelijk op 'weten dat' moet liggen, maar veel meer op 'weten hoe', 'weten waarom', en 'weten over weten', wat dus vertaald kan worden naar het belang van domeinspecifieke kennis en metacognitieve vaardigheden. Daarnaast zegt hij dat transfer, in zijn artikel gedefinieerd als: *"het toepassen van kennis, begrippen en methoden uit het ene gebied op een ander terrein"*, niet vanzelfsprekend is (van Streun, 2002). Met andere woorden, van gefragmenteerde kennis wordt niet vanzelfsprekend een samenhangend cognitief schema gemaakt.

Verschillende onderzoeken en artikelen, maar ook SLO (SLO, 2020*a*), hebben het ook over wiskundige denkactiviteit. De twee termen probleemoplossend vermogen en wiskundige denkactiviteit lijken veel met elkaar gemeen, maar net een andere invalshoek, te hebben: probleemoplossend vermogen doelt op alle benodigdheden sámen die nodig zijn om een opdracht op te lossen, terwijl denkactiviteiten alle benodigdheden zijn die je tijdens een opdracht tegen kán komen om het probleem op te oplossen. SLO verwijst hierbij naar een citaat van het cTWO (dat in 2012 is opgehouden met bestaan als uitgebreide vernieuwingscommissie wiskunde en de regie over het invoeringstraject neergelegd heeft bij SLO (cTWO, 2012)): *"Bij wiskunde nemen twee soorten kennis en vaardigheid een belangrijke plaats in. De eerste betreft procedurele kennis en vaardigheid, zoals bijvoorbeeld het automatiseren van het oplossen van vergelijkingen of het uitwerken van haakjes. De tweede is conceptuele kennis en behelst inzicht in de onderliggende wiskundige concepten, vermogen om problemen te overzien en vervolgens geschikte oplossingsstrategieën te kiezen. Om de balans tussen de twee typen kennis en vaardigheid te waarborgen heeft cTWO in haar visiedocument zes wiskundige denkactiviteiten benoemd die de kernconcepten uit de schoolwiskunde (getal, formule, functie, verandering, ruimte en toeval) met elkaar verbinden."* De conceptuele kennis die inzicht behelst in de onderliggende wiskundige concepten, vermogen om problemen te overzien en vervolgens geschikte oplossingsstrategieën te kiezen, is dus een groot onderdeel van het probleemoplossend vermogen van leerlingen. Een opgave die doelt om het probleemoplossend vermogen van leerlingen te testen, zou dus wiskundige denkactiviteiten bevatten. SLO onderscheidt de volgende denkactiviteiten (met uitleg uit het artikel van Drijvers (2011) letterlijk overgenomen):

- Modelleren en algebraïseren: Het vertalen van een probleem in wiskundige termen, bijvoorbeeld door het opstellen van formules en vergelijkingen.
- Ordenen en structureren: Het ordenen van de probleemsituatie en aanbrengen van structuur, bijvoorbeeld door objecten op kenmerken te classificeren.
- Analytisch denken en probleemoplossen: Het kiezen van een probleem aanpak, de vaardigheid om wiskundige problemen te formuleren, te representeren en oplossingsstrategieën te vinden.
- Formules manipuleren: Hier gaat het zowel om handmatige vaardigheden in het herleiden van formules, als om inzicht in de structuur van de formule en in het te volgen oplossingsproces als geheel.
- Abstraheren: Bij abstractie gaat het erom dat de wereld van wiskundige objecten voor leerlingen in toenemende mate concreet wordt.
- Logische redeneren en bewijzen: Het vermogen om heldere redeneringen en bewijzen op te zetten en deze zorgvuldig te formuleren.

Drijvers benoemt daarbij dat het belangrijk is jezelf te realiseren dat denkactiviteit relatief is. Het beroep dat een opgave doet op denkactiviteiten hangt namelijk af van de voorkennis van de leerling: *"Een opgave die nieuw is voor een leerling of een originele combinatie van stappen vraagt en daarmee denkactief is, kan vervolgens worden geoefend en daarmee veranderen in een routine-opgave."* (Drijvers, 2011). Wanneer het een routine-opgave is geworden, en dus geen inzichtvraag meer is, is er ook een stuk minder oplossend vermogen nodig bij de leerling.

Daarnaast is er ook nog Bloom's begrip over de term probleemoplossend vermogen (Bloom, 1956). Hoewel hij dit ook probleemoplossend vermogen noemt, lijkt hij een iets algemenere versie te bedoelen van het begrip dan gebruikt in dit onderzoek. Gezien de bekendheid van zijn werk, en de eventuele bruikbaarheid in dit onderzoek, wordt zijn werk hier ook besproken. Bloom zegt dan ook dat het belangrijkste doel van zijn taxonomie van leerdoelen het vergemakkelijken is van de communicatie tussen onderwijsonderzoekkers en/of leerplanontwikkelaars. Hij zegt zijn taxonomie te gebruiken als hulpmiddel bij het ontwikkelen van een precieze definitie en classificatie van vaag gedefinieerde termen als 'denken' en 'probleemoplossing'. Daarnaast zegt hij te hopen dat de taxonomie de verkenning van nieuwe onderwijsmethoden voor het oplossen van problemen op hoog niveau vergemakkelijkt en daarnaast helpt hij het evalueren van deze methoden. In zijn taxonomie onderscheidt hij zes verschillende leerdoelen (vertaald): kennis, begrip, applicatie, analyse, synthese en evaluatie. Probleemoplossen zou binnen al deze aspecten voorkomen, maar in een andere complexiteit. In de herziene versie van Anderson and Krathwohl (2001) zijn er wat aanpassingen gedaan. Zo is een van de belangrijkste veranderingen dat de eendimensionale variant is vervangen door een tweedimensionale waarbij het leerdoel nu wordt benaderd vanuit zelfstandige naamwoorden die de soorten kennis aangeven (feiten, concepten, procedures en metacognitie) en vanuit werkwoorden die gaan over de denkvaardigheden (onthouden, begrijpen, toepassen, analyseren, evalueren en creëren). Daarnaast zijn de elementen in de indeling iets veranderd: Niet alleen worden niveau vijf en zes verwisseld, het woord synthese wordt vervangen door creëren. Later zijn aan de eerste drie denkvaardigheden de term 'lage order denken' gekoppeld, en aan de laatste drie 'hoge orde denken'. In de definitie van dit onderzoek van probleemoplossend vermogen wordt er dus vooral gedoeld op de hogere orde denkvaardigheden. Kaur (2023) wijst in zijn artikel ook op het volgende: *"As mathematicians, we see mathematics as a living and breathing subject, involving the upper layers of Bloom's Taxonomy: create, evaluate, analyze, apply, and understand. We construct examples, formulate theories, and develop conjectures. We create definitions, and use them as handles to create theorems. We evaluate expressions and justify theorems through rigorous mathematical proofs. Mathematical problem solving intrinsically requires finding patterns, building models, and creative thinking. It requires careful organizing, examining and analyzing information, and drawing connections with other fields of study. However, to most people, mathematics just means crunching numbers and remembering and following rules — the lowermost layer of Bloom's taxonomy."* Merk echter op dat over de hiërarchische interpretatie van de originele taxonomie discussie is. Dit is bijvoorbeeld te lezen in het artikel van Lucassen (2018). Voor dit onderzoek is het echter niet van belang verder op deze discussie in te gaan.

4.2 Welke rol moet de docent aannemen om leerlingen te ondersteunen in het verbeteren van probleemoplossend vermogen?

In het werk van Polya (1945) staan al algemene tips voor een docent om het probleemoplossend vermogen van leerlingen te verbeteren. Hij noemt onder meer de volgende aspecten (vrij vertaald):

- A1 Een leraar moet een leerling helpen, maar niet te veel en niet te weinig. De leerling dient namelijk zoveel mogelijk ervaring op te doen met zelfstandig werken, maar als hij alleen wordt gelaten met zijn probleem zonder enige hulp of met onvoldoende hulp, kan het zijn dat hij helemaal geen vooruitgang boekt. Als de leraar te veel helpt, wordt er niets aan de leerling overgelaten.

- A2 Wanneer de leerling nog niet veel zelfstandig kan, moet de leraar hem op zijn minst de illusie van onafhankelijk werk geven. Het beste is om de leerling op natuurlijke wijze te helpen. De leraar moet zich in de leerling verplaatsen, hij moet proberen te begrijpen wat er in de geest van de leerling omgaat, en een vraag stellen of een stap aangeven die de leerling zelf had kunnen bedenken.

- A3 Om een leerling op een natuurlijke manier te helpen, moet de leraar steeds dezelfde vragen stellen en steeds dezelfde stappen aangeven. (Hierbij doelt Polya op het stellen van metacognitieve vragen.)

Een artikel van Bor and Drijvers (2015), over een onderzoek van verschillende docenten naar wiskundig denken, geeft daarnaast een overzicht van hun top tien tips voor de algemene ideale denkactiverende docent. Deze staan in Figuur 1. Het artikel is een samenvatting van hun praktijkgericht onderzoek. Uit het onderzoek is ook een uitgebreidere handreiking geschreven genaamd Handreiking Denkactiverende wiskundelessen (de Vries and Drijvers, 2015). Hierin staan verder nog de volgende tips (letterlijk overgenomen) voor de rol van de docent bij denkactieve wiskundelessen:

De ideale denkactiverende wiskundedocent:
— B1 geeft geen antwoorden, maar stelt vragen;
— B2 geeft leerlingen denktijd;
— B3 vraagt door op reacties van leerlingen;
— B4 heeft zelf plezier in wiskundig denken;
— B5 bedenkt bij het voorbereiden van de les op welke manier hij het denken kan activeren;
— B6 besteedt aandacht aan het oplossingsproces;
— B7 reflecteert met de hele klas op de gebruikte strategieën;
— B8 bouwt de hoeveelheid hulp in de loop van de tijd af;
— B9 geeft het wiskundig denken ook een plaats in de toets;
—B10 is doorlopend alert op kansen om leerlingen aan te zetten tot wiskundig denken.

Figuur 1: Kader uit een artikel van Bor and Drijvers (2015).

B11 Creëer een klassenklimaat waar gelijk hebben niet het hoogste doel is, geef hen het gevoel dat elke gedachte waard is om naar te luisteren.

B12 Maak duidelijk dat wiskunde geen kant-en-klare doos vol trucjes is, maar een vak waarin wordt nagedacht.

B13 Stuur erop aan dat leerlingen denkstappen en strategieën expliciet verwoorden. Vraag naar het hoe en waarom in plaats van naar het wat. Waardeer vooral de methode en aanpak van leerlingen boven de uitkomst of het antwoord.

B14 In samenhang met het vorige punt (B13): moedig leerlingen aan om zelf greep te houden op het oplossingsproces, op de grote lijn, en om zelf de voortgang te monitoren.

B15 Laat dus ook aan de leerlingen zien hoe je zelf over een probleem nadenkt en daarmee aan de slag gaat.

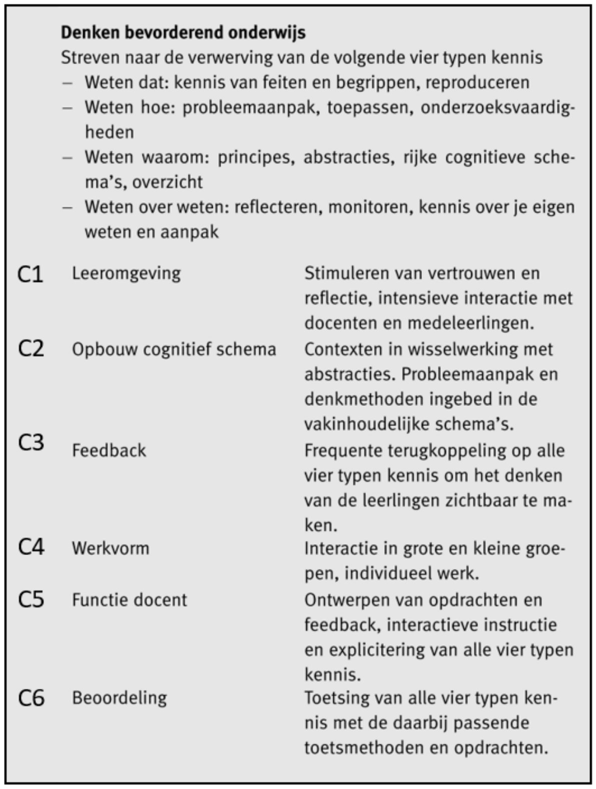
B16 Denk na over de samenstelling van groepjes.

In Figuur 2 is een overzicht te zien hoe van Streun op zijn beurt denkt dat zijn vier typen kennis het best verweven kunnen worden (en dus in termen van dit onderzoek domeinspecifieke kennis en metacognitieve vaardigheden geoefend kunnen worden).

In een online meet-up van Roorda (2023), hoewel niet open voor publiek, wordt daarnaast verwezen naar het rapport van Lester and Cai (2016). In de online meet-up worden de ondervindingen van het rapport samengevat als (letterlijk overgenomen):

D1 Behandel probleemoplossen niet als apart onderwerp maar als onderdeel van het leren wiskunde.

D2 Kies goede taken en organiseer klassengesprekken.



Denken bevorderend onderwijs
Streven naar de verwerving van de volgende vier typen kennis
– Weten dat: kennis van feiten en begrippen, reproduceren
– Weten hoe: probleemaanpak, toepassen, onderzoeksvaardigheden
– Weten waarom: principes, abstracties, rijke cognitieve schema's, overzicht
– Weten over weten: reflecteren, monitoren, kennis over je eigen weten en aanpak

C1	Leeromgeving	Stimuleren van vertrouwen en reflectie, intensieve interactie met docenten en medeleerlingen.
C2	Opbouw cognitief schema	Contexten in wisselwerking met abstracties. Probleemaanpak en denkmethoden ingebed in de vakinhoudelijke schema's.
C3	Feedback	Frequente terugkoppeling op alle vier typen kennis om het denken van de leerlingen zichtbaar te maken.
C4	Werkvorm	Interactie in grote en kleine groepen, individueel werk.
C5	Functie docent	Ontwerpen van opdrachten en feedback, interactieve instructie en explicitering van alle vier typen kennis.
C6	Beoordeling	Toetsing van alle vier typen kennis met de daarbij passende toetsmethoden en opdrachten.

Figuur 2: Van Streun's vier typen kennis en zijn interpretatie hoe deze het best verweven kunnen worden in de klas. (van Streun, 2002)

D3 Zorg dat leerlingen betrokken zijn in een variëteit aan probleemoplosactiviteiten: meerdere oplossingen vinden, exploreren van wiskundige problemen, onderbouwen van oplossingen en generalisaties maken.

In de volgende twee Secties zal nu de ideale docent beschreven worden m.b.t. het aanleren van metacognitieve vaardigheden en het aanleren van domeinspecifieke kennis.

4.2.1 ... met betrekking tot metacognitieve vaardigheden in het specifiek

Er zijn verschillende soorten metacognitieve denkactiviteiten te onderscheiden. De voorbeelden die van Hout-Wolters (2011) noemt in een afscheidscollege aan de Universiteit van Amsterdam zijn: oriënteren, plannen, jezelf bewaken (monitoren), bijsturen, evalueren en reflecteren. Ze noemt echter dat er nog véél meer te onderscheiden zijn, maar voor dit onderzoek zullen deze als hoofdactiviteiten beschouwd worden.

Van Houten-Wolters zegt dat alleen bij expliciete instructie van denkvaardigheden er een toename is van de leerresultaten na een paar weken [E1]. Hierbij verwijst ze naar een onderzoek van Kistner et al. (2010). Het is dus erg belangrijk om ook daadwerkelijk te zéggen dat denkvaardigheden belangrijk zijn voor het vak. Daarnaast geeft ze algemene aanbevelingen zie ze vaak terugzag in literatuur (letterlijk overgenomen):

E2 Stimuleer leerlingen om na te denken over hun eigen denkactiviteiten en de effecten daarvan (dus stimuleer reflectie hierop).

E3 Overtuig leerlingen van het nut van het leren van denkvaardigheden

E4 Richt het onderwijs op wat de verschillende denkvaardigheden inhouden, en hoe, wanneer en waarom ze te gebruiken.

E5 Demonstreer het gebruik van een denkvaardigheid, bijvoorbeeld door de verschillende denkstappen hardop denkend voor te doen.

E6 Zorg dat de denkvaardigheden intensief geoefend worden. Begeleid leerlingen daarbij en geef constructieve feedback.

E7 Stimuleer interactie, discussie en samenwerking tussen leerlingen. Leer leerlingen kiezen uit denkactiviteiten. Ze moeten leren zelf te kiezen wat een effectieve aanpak is.

Ook geeft ze aan welke aanbevelingen voorál belangrijk zijn, gebaseerd op een onderzoek van Dignath and Büttner (2008) (letterlijk overgenomen):

E8 De effecten waren het grootst als er veel aandacht was voor metacognitieve reflectie op de eigen vaardigheden van de leerling (dus punt E2 uit de vorige lijst) Leerlingen in het voortgezet onderwijs beschikken immers al over bepaalde denkvaardigheden. Laat ze vooral nadenken over wanneer welke aanpak handig is en hoe die verbeterd kan worden.

E9 De effecten hingen ook heel duidelijk samen met het aantal lessen (punt E6 uit de vorige lijst). Hoe meer lessen des te grotere effecten. Er moet gewoon veel geoefend worden om denkvaardigheden te leren.

E10 De effecten van de trainingen in het voortgezet onderwijs waren ook groter als er interactie, discussie en samenwerking tussen leerlingen was (punt E7 uit de vorige lijst). Dat stimuleert ook de leerlingen die denken dat ze het allemaal al kunnen. Zij kunnen hun aanpak met de andere leerlingen uitwisselen en daar leren ze zelf ook van.

E11 Een laatste toch wel opvallend punt: de effecten waren groter als de trainingen gegeven waren door de onderzoekers, dan als zij door de eigen docenten waren gegeven. Voor reguliere vakdocenten is het kennelijk niet eenvoudig om leerlingen denkvaardigheden aan te leren.

Een 'guidance rapport' van Quigley et al. (2018) geeft de volgende tips voor docenten om metacognitieve vaardigheden aan te leren aan leerlingen (vrij vertaald):

F1 Zelf voldoende kennis hebben over de ontwikkeling van metacognitieve vaardigheden

F2 Leer leerlingen expliciet metacognitieve strategieën, inclusief het plannen, monitoren en evalueren van hun leren.

F3 Modelleer je eigen denken om leerlingen te helpen hun metacognitieve en cognitieve vaardigheden te ontwikkelen

F4 Stel een passend niveau van uitdaging in om de zelfregulatie en metacognitie van leerlingen te ontwikkelen

F5 Bevorder en ontwikkel metacognitieve discussies in de klas

F6 Leer leerlingen expliciet hoe ze hun leerproces zelfstandig kunnen organiseren en effectief kunnen managen

F7 Scholen moeten leraren ondersteunen om hun kennis van deze aanpakken te ontwikkelen en verwachten dat ze op de juiste manier worden toegepast

Bartons zegt in zijn boek (Barton, 2018), wat over een onderzoek van Lester et al. (1989). Zij vatten hun bevindingen volgens hem als volgt samen (letterlijk overgenomen):

G1 Metacognitieve instructie is effectiever wanneer deze plaatsvindt in een domeinspecifieke context

G2 Metacognitieve instructie is hoogstwaarschijnlijk effectiever wanneer deze aangeboden wordt op een systematisch georganiseerde manier, onder leiding van een leraar

G3 Het is ingewikkeld om als leraar de rollen van monitoren, faciliteren en modelleren te behouden binnen de realiteit van het klaslokaal, zeker wanneer leerlingen moeite hebben met de basisstof.

4.2.2 ... met betrekking tot domeinspecifieke kennis in het specifiek

Barton vertelt in zijn boek dat hij het 3-fasenmodel gebruikt om domeinspecifieke kennis aan te leren [G4]: éérst inflexibele kennis opdoen door expliciete instructie, daarna gerelateerde problemen zorgvuldig bij elkaar zetten en ten slotte deze problemen geïsoleerd aanbieden door middel van gespreid oefenen (Barton, 2018). Hij stelt dus dat probleemoplossen pas aan het einde van het leerproces gedaan moet worden. Dit is in tegenstelling tot de inhoud van het boek van Takahashi (2021) (hoewel niet publiekelijk toegankelijk, dus naar een verwijzing binnen het gelijkgestemde rapport van Roorda et al. (2023)), die stelt dat leraren nieuwe wiskundige concepten juist effectief zouden kunnen introduceren door leerlingen problemen te geven [H1]. Een soortgelijke tegenstrijdigheid is vaker te vinden. Zo wordt enerzijds gesteld dat directe instructie leidt tot betere leerresultaten [I1](zie bijvoorbeeld het artikel Leraar24 (n.d.)) en anderzijds dat er juist kritiek op is [J1] (zie bijvoorbeeld de verwijzingen in het artikel van van der Vegt and Kramer (2020) onder het kopje 'Kritiek op DI'). In de laatst genoemde wordt ook verwezen naar metastudies die erop wijzen dat de combinatie juist succesvol is [J2].

Het leercentrum van de universiteit van North Carolina raadt leerlingen aan Blooms Taxonomy te gebruiken en zichzelf vragen te stellen van alle domeinen om hun begrip dieper en zinvoller te maken (The learning center, University of North Carolina a Chapel Hill, n.d.). Een docent zou hier dus ook al in de lessen aandacht aan kunnen besteden door vragen uit alle domeinen te stellen aan zijn leerlingen. [K1]

Wat betreft het aanleren van domeinspecifieke kennis met betrekking tot differentiëren, zal bij de analyse van de methode per paragraaf naar literatuur verwezen worden. Dit hangt namelijk erg af van wat er precíés onderwezen wordt in de paragraaf.

4.3 Waar moet een opdracht aan voldoen om probleemoplossend vermogen te verbeteren?

Het eerder genoemde artikel Wiskundig Denken: A Way of Life in vakblad Euclides door Bor and Drijvers (2015) geeft ook een overzicht van hun top tien tips voor de ideale denkactiverende wiskunde opgave. Deze staan in Figuur 3. Hetzelfde artikel gaf naast deze lijst bijvoorbeeld ook het idee om tijdens een opgave de deelvragen weg te laten, of juist noodzakelijke gegevens weg te laten en leerlingen in groepjes te laten bespreken welke gegevens ze zouden willen hebben. [B29 (deze nummering komt in Sectie 5 Ontwikkelde materialen handiger uit)]
In hun handreiking staan verder nog onder meer de volgende kenmerken van opgave die aanzetten tot wiskundig denken (de Vries and Drijvers, 2015):

B27 De opgave doet beroep op de verschillende aspecten van wiskundig denken.

B28 De opgave zet leerlingen aan de kern uit gegevens te halen.

5 Ontwikkelde materialen

In deze sectie zal het ontwerp van de theoretische lessenserie, met als doel het verbeteren van het probleemoplossend vermogen van de leerlingen uit de testgroep, evenals de afsluitende formatieve toets,

De ideale denkactiverende wiskundeopgave:
—B17 gaat over hoe én waarom;
—B18 is een aansprekend probleem voor de leerling;
—B19 heeft iets te bieden voor zowel de sterke als de zwakke leerling;
—B20 kan op verschillende manieren worden aangepakt;
—B21 is origineel of verrassend;
—B22 vereist meerdere denkstappen;
—B23 is open en niet te sturend;
—B24 leent zich voor discussie tussen leerlingen of in de hele klas;
—B25 zet aan tot terugkijken en reflectie;
—B26 nodigt uit tot verder denken en vervolgvragen.

Figuur 3: Kader uit een artikel van Bor and Drijvers (2015).

met als doel het testen tussen het verschil in probleemoplossend vermogen van de leerlingen uit de test- en controlegroep, besproken worden. De lessenserie en formatieve toets zijn grotendeels gebaseerd op de ondervindingen uit de literatuurstudie waarnaar telkens terug verwezen zal worden door de letter cijfer combinatie te gebruiken uit de literatuurstudie. De keuzes met betrekking tot domeinspecifieke kennis in het specifiek zijn echter gebaseerd op literatuur waarnaar verwezen wordt bij de paragrafen zelf, aangezien deze keuzes minder algemeen zijn en af hangen van de precieze te onderwijzen stof (zoals eerder benoemd in Sectie 4.2.2 van de literatuurstudie). De ontwikkelde materialen zullen besproken worden in chronologische volgorde van gebruik in de lessen. Eerst zal besproken worden hoe de toelichting van het onderzoek aan bod zal komen in de les en hierna wat algemene zaken die vóór iedere opdracht en tijdens de opdracht belangrijk zijn/ verteld moeten worden. Hierna volgt per paragraaf een analyse van de behandelde domeinspecifieke kennis, wat als beginpunt dient voor de bijbehorende ontwikkelde inzichtopdracht. In de analyse en bij het ontwerp van de inzichtopgaven zal de onderbouwing d.m.v. literatuur schuingedrukt staan voor leesbaarheid. Ten slotte wordt het ontwerp van de formatieve toets met bijbehorend nakijkmodel toegelicht.

5.1 Toelichting van het onderzoek

Voorafgaande aan de eerste interventieles zal tijdens een gezamenlijke les het onderzoek worden ingeleid. Dit zal gedaan worden door eerst te noemen dat inzichtvragen in een toets vaak slecht gemaakt worden, en in het onderzoek onderzocht zal worden of hier iets aan gedaan kan worden. Op het begrip 'inzicht'-vragen wordt iets verder ingegaan: Hier wordt de 'tunnelmetaphor', waarnaar verwezen wordt in het artikel van Timmer and Caspers (2022), gebruikt zodat leerlingen zien dat dit soort vragen niet meteen opgegeven hoeven te worden wanneer ze in het begin de oplosmethode nog niet weten. Het is namelijk belangrijk dat het duidelijk wordt dat wiskunde geen kant-en-klare doos vol trucjes is, maar een vak waarin wordt nagedacht (B12).

Tijdens de eerste interventieles zal voorafgaande aan de opdracht iets meer uitleg gegeven worden over wat het onderzoek precies in zal houden voor de leerlingen. Daarnaast wordt er uitleg gegeven over wát metacognitieve vaardigheden nou eigenlijk zijn en waarom deze nuttig zijn om te leren (E1, E3, E4, F2 en G2). Uit de literatuurstudie kwam ook dat de effecten van het aanleren van cognitieve vaardigheden groter waren wanneer de trainingen waren gegeven door onderzoekers (E11). Om dit enigszins na te bootsen, zullen de onderzoeken dan ook genoemd worden in de les. De introducerende slides voor de eerste interventieles zijn te vinden in de bijlage B. Daarnaast zal tijdens de eerste interventieles gevraagd worden aan de leerlingen hun huiswerk niet met het antwoordenboek te maken. Het belang hiervan zal ook worden uitgelegd: wanneer je het antwoordenboek erbij pakt tijdens het maken van de vraag, sla je veel metacognitieve stappen over. Terwijl we net hebben geleerd dat deze juist zo belangrijk zijn voor het leerproces. Waarschijnlijk leg je zo ook minder connecties in de leerstof en zal ook domeinspecifieke kennis minder goed opgebouwd worden.

5.2 Voorbespreking en tijdens de opdrachten

Eenmaal bij de opdracht aangekomen, zal de leerlingen verteld worden dat ze alles mogen gebruiken wat ze willen, behalve internet om delen van de vraag op te zoeken. Dit zorgt ervoor dat de leerlingen de vraag op verschillende manieren kunnen gaan aanpakken, wat later de groepsdiscussie zal stimuleren (B20). Daarna wordt verteld hoe ze de opdracht moeten maken: individueel, in duo's of in groepjes (B16, C4, E7 en E10). De docent zal de vraag eerst voorlezen en daarna benoemen dat het de bedoeling is om terug te vallen op de fases van oriënteren, plannen, monitoren, bijsturen, evalueren en reflecteren. In de literatuurstudie is immers te lezen dat het belangrijk is om de leerlingen te stimuleren na te denken over hun eigen denkactiviteiten en deze expliciet te onderwijzen (B14, E1, E2 en F2). Wanneer leerlingen eerder klaar zijn, moeten ze achter ieder van deze stappen terug denken wat ze gedaan hebben, en voor zichzelf na gaan hoe of waarom ze er zeker van zijn ze het goede antwoord hebben (B13). Wanneer de leerlingen de stappen niet nodig dachten te hebben, is het namelijk wél goed om de leerlingen bij zichzelf na te laten gaan of ze ze niet toch stiekem uit zichzelf al gebruikt hebben. Zo zien ook leerlingen die de vaardigheden zelf al toegepast hebben, het nut voor eventuele volgende opdrachten (E3). Wanneer leerlingen er niet uit komen, zal de docent eerst vragen hoever ze zijn gekomen, en dan sturende, metacognitieve, vragen stellen (A2, A3, B1, B3). Hierbij zal de docent verwijzen naar de vragen die op het bord staan, zodat de leerlingen het nut van het zichzelf de vragen van het bord stellen gaan inzien (E3). In de eerste lessen zullen de metacognitieve vaardigheden met mogelijke vragen op het bord erbij staan, tijdens latere opdrachten niet meer. Het beginnen met veel ondersteuning en het later afbouwen hiervan staat ook in lijn met de ondervindingen uit de literatuurstudie (B8).

Er kan voor gekozen worden om de opdrachten al iéts meer sturend te maken om zo in de vraag leerlingen al te verplichten om metacognitieve vaardigheden te gebruiken (denk bijvoorbeeld aan toevoeging van de zin "... en schrijf op wat je hebt geleerd van deze vraag."). Echter zou dit er mogelijk voor zorgen dat de leerlingen hier juist op gaan leunen, dit niet doen als het er niet bij staat en dus de vaardigheden zelf niet aanleren.

Na iedere opdracht, (en na de uitleg van de nieuwe theorie) zal de docent ook een vraag uit de nieuwe leerstof behandelen op eenzelfde manier (D1 en G1). De docent zal ook bij deze opdracht terug vragen naar de metacognitieve vragen. Daarnaast kan de docent eens in de zoveel tijd een vraag hardop denkend voordoen, ook gebruikmakend van de metacognitieve vragen die op het bord staan. Dit staat in lijn met de theorie uit Sectie 4 (E5 en F3) en zorgt ervoor dat de leerlingen bij de huiswerkopdracht weten wat er ongeveer van ze verwacht wordt.

5.3 Analyse van het hoofdstuk met ontworpen opdrachten

Hoofdstuk 6 Differentiaalrekening van Getal & Ruimte (verder afgekort met G&R), is het vervolg op hoofdstuk 2 Afgeleide functie in G&R. Om deze reden zal eerst kort de inhoud van Hoofdstuk 2 besproken worden, zodat er een goed beeld geschetst kan worden van de voorkennis van de leerlingen. Hierna zal in detail de inhoud van hoofdstuk 6 besproken worden, waar een kritische analyse toegevoegd wordt met eventuele aanvullingen en verbeteringen naar aanleiding van literatuur. Hieruit volgt een goed overzicht van de domeinspecifieke kennis van de leerlingen. Dit zal als beginpunt dienen voor het ontwerpen van de inzichtopgaven.

Hoofdstuk 2 begint met de voorkennisparagraaf, waar de leerlingen herhalen hoe ze de gemiddelde snelheid uitrekenen uit een verhaaltjessom. Paragraaf 1 gaat daarna over verschillende soorten van stijgen en dalen (toenemend en afnemend), de differentiequotiënt uitrekenen n.a.v. een grafiek en een functievoorschrift, en de gemiddelde snelheid berekenen op één moment. In paragraaf 2 leren de leerlingen over de raaklijn, die wat zegt over de richtingscoëffiënt en de helling van de grafiek, en leren ze om een hellingsgrafiek te schetsen. Paragraaf 3 gaat over de afgeleide functie en verschillende differentieerregels (voor $f(x) = a, f(x) = ax, f(x) = ax^n, f(x) = c \cdot g(x)$ en $s(x) = f(x) + g(x)$). Tot slot begint Paragraaf 4 met de product- en quotiëntregel, waarna het verband van de raaklijn met de afgeleide en richtingscoëfficiënt behandeld wordt en eindigt deze met het berekenen van de snelheid door middel van de afgeleide.

5.3.1 Voorkennis paragraaf

Theorieblokken voorkennisparagraaf

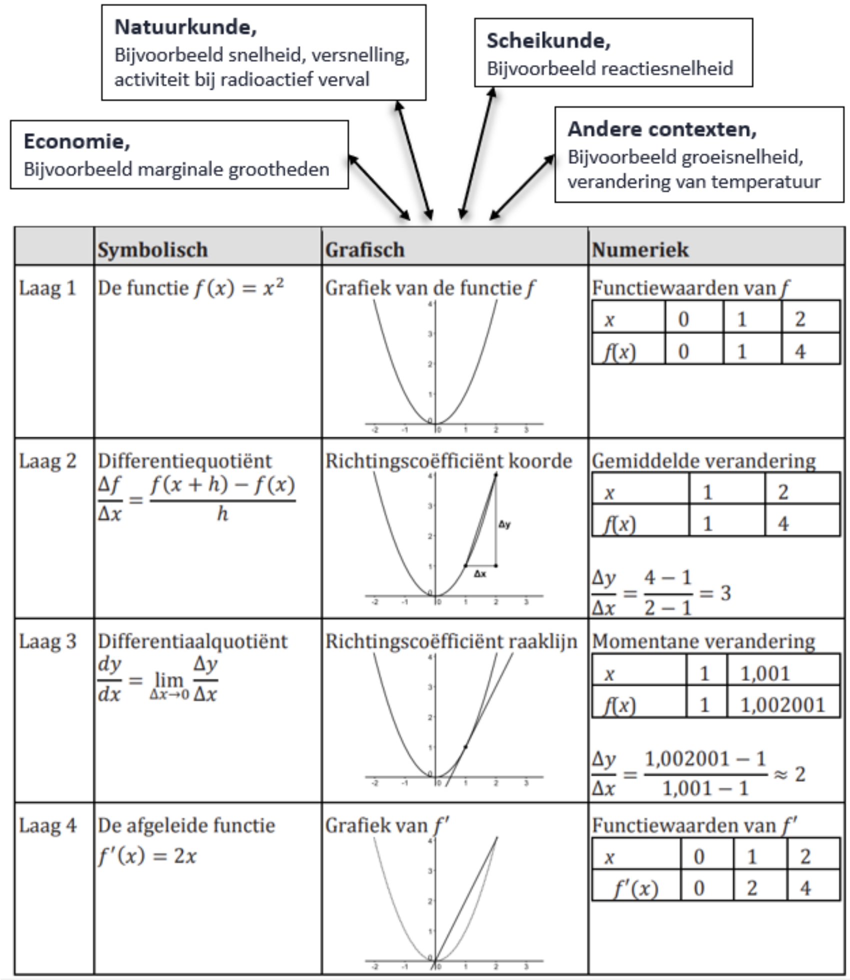
Hoofdstuk 6 begint met een voorkennisparagraaf. Deze richt zich op het herhalen van de belangrijkste geleerde concepten uit hoofdstuk 2: de formele definitie van de afgeleide (genoteerd als $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$), de rekenregels voor differentiëren (uit paragraaf 2.3 en de verschil-, product- en quotiëntregel) en de verhouding van de afgeleide tot richtingscoëfficiënten, helling, snelheid waarmee de grafiek verandert en raaklijnen. In het laatste theorieblok wordt daarnaast besproken hoe en waarom ook alweer gerekend kan worden met de afgeleide.

*Het terugkomen van de formele definitie zorgt ervoor dat de leerlingen eraan herinnerd worden wat de afgeleide ook alweer voorstelt: de afgeleide is een functie die voor elke x-waarde binnen het domein vertelt wat de helling van de grafiek van f is bij die x-waarde. (De leerlingen weten hoe ze de helling berekenen bij een lineaire functie, en herinneren zich hopelijk dat dit op één punt berekend wordt door de kleine verandering.) Door deze definitie, in plaats van alleen de rekenregel $f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$ te geven, zorgt dit er dus voor dat het relationeel begrip van de leerlingen weer opgehaald wordt, in plaats van alleen het instrumentele begrip van de uitvoering van differentiëren. Volgens Skemp (2006) zou relationeel begrip over een onderwerp ervoor zorgen dat men beter in staat is om de regels/stappen omtrent dit onderwerp logisch te vinden en daardoor te onthouden. Relationeel begrip maakt de kennis dus betekenisvol. Het rijke, betekenisvolle cognitieve schema dat de leerlingen in hoofdstuk 2 hadden opgebouwd, wordt hiermee afgestoft waardoor het voor leerlingen makkelijker wordt om nieuwe kennis hieraan toe te voegen later het hoofdstuk (Drijvers et al., 2012*a*).*

*Daarnaast behandelt de paragraaf verschillende lagen uit Figuur 4. Voor een goed begrip voor het concept afgeleide, moeten deze verschillende lagen immers onderdeel zijn van een cognitief schema van de afgeleide (Drijvers et al., 2012*b*). Bij de overgang van laag naar laag, is het nodig dat de leerlingen de voorgaande laag zowel op 'object'-niveau als op 'proces'-niveau begrijpen. De symbolische representatie van de definitie van de afgeleide neemt bijvoorbeeld de symbolische representaties van laag 2, 3 en 4 uit het figuur samen. Dit is belangrijk voor een goede gelaagdheid zodat de leerlingen herinneren waar de afgeleide vandaag komt. Echter wordt alleen de grafische weergave van laag 3 weergeven en helemaal geen numerieke weergave. Het is begrijpelijk dat niet álle lagen zo gedetailleerd terug kunnen komen in het boek, door tijd- en ruimtegebrek. Echter zou een grafiek van de afgeleide functie wel een goede toevoeging zijn (grafische weergave laag 4) aangezien leerlingen grafische aspecten graag gebruiken in redeneringen (Goorda, 2012). Het is dus belangrijk om het relationele begrip hiervoor terug te krijgen voor een rijk cognitief schema waar het verdere hoofdstuk op voort kan bouwen.*

De opsomming van de rekenregels zorgt vooral voor terugkomst van instrumenteel begrip. In dit geval is dat goed genoeg omdat de leerlingen deze waarschijnlijk al geautomatiseerd hebben en wanneer ze iedere keer terug moeten denken aan de achterliggende gedachte hun werkgeheugen te vol zal raken, hetgeen niet gewenst is (Skemp, 2006). De gegeven symbolische definitie zorgt er hopelijk voor dat de leerlingen weer weten hoe ze het ook alweer af zouden moeten leiden mochten ze dat willen.

Het tweede theorieblok wordt erg instrumenteel uitgelegd. Het is mogelijk dat de leerlingen inderdaad



Figuur 4: Overzicht van aspecten van de afgeleide (uit Handboek Wiskunde Didactiek van Drijvers et al. (2012*b*), gebaseerd op het proefschrift Ontwikkeling in Verandering van Goorda (2012)).

snappen wat er bedoeld wordt, maar om er zeker van te zijn dat de leerlingen daadwerkelijk voor zich kunnen zien wat er berekend wordt, en waarom dat werkt, zou een grafische weergave op zijn plaats zijn.

Opdrachten voorkennisparagraaf

De voorkennis heeft 3 opdrachten, één na theorieblok A en twee na theorieblok B. In deze opdrachten wordt de theorie uit het theorieblok toegepast. De opdrachten bevatten geen verrassingen en zijn bijna identiek aan de voorbeelden uit de theorie.

Aangezien de voorkennisparagraaf als doel heeft de benodigde theorie weer op te halen, is het niet erg dat de opdrachten niet erg uitdagend zijn.

Conclusie voorkennisparagraaf

Door tijdsgebrek en planning moeilijkheden zal er geen interventieles zijn naar aanleiding van de voorkennis paragraaf.

5.3.2 Paragraaf 1

Theorieblokken paragraaf 1

In paragraaf 6.1 wordt aandacht besteed aan toppen en buigpunten. In theorieblok A wordt besproken hoe men met de afgeleide algebraïsch de extreme waarden van een grafiek berekent, en waarom dit werkt. Daarna wordt hier een werkschema voor gegeven. In het theorieblok wordt ook genoemd waarom het maken van een schets belangrijk is: afgeleide gelijk stellen aan nul hoeft namelijk niet altijd een top te geven. Hier staat een plaatje bij van een grafiek waarvoor dat het geval is. In theorieblok B gebeurt als het ware het omgekeerde: Hier wordt een werkschema gegeven waarmee kan worden aangetoond dat een functie een extreme waarde heeft voor een bepaalde x-coördinaat. Theorieblok C gaat over het vinden van de coördinaten van de buigpunten van een grafiek. Hier wordt uitgelegd dat bij de buigpunten een maximale helling hoort en dat zich dat in de hellinggrafiek uit tot een top. In deze context van buigpunten vinden, wordt de tweede afgeleide geïntroduceerd. Ook in dit theorieblok wordt een werkschema gegeven, deze gericht op het vinden van de buigpunten door de tweede afgeleide gelijk aan nul te stellen.

In theorieblokken A en B worden twee basistoepassingen van de afgeleide vrij uitvoerig en instrumenteel aan de hand van een werkschema uitgelegd. Echter wordt in de eerste alinea van beide theorieblokken in een paar zinnen uitgelegd wáárom de methode werkt (relationeel begrip) en wanneer er dus voldoende tijd aan het ophalen van het begrip afgeleide en wat deze voorstelt wordt besteed, zijn de instrumentele werkschema's eigenlijk overbodig. Wanneer een leerling relationeel begrip heeft, zal hij deze werkschema's zelf al vormen. Het gebruik van zo'n werkschema bevordert alleen de proces-kijk, omdat simpelweg een aantal handelingen moeten worden uitgevoerd zonder daarbij in plaatjes (iets dat de object-kijk bevordert) te denken. De introductie van de tweede afgeleide aan de hand van buigpunten is meer gericht op het verkrijgen van relationeel begrip doordat hier extra uitleg bij staat. Het werkschema hier is echter ook weer om dezelfde reden overbodig. In theorieblok C mist echter de uitleg wat een tweede afgeleide groter of kleiner dan nul betekent.

Opdrachten paragraaf 1

In de opdracht vóór het eerste theorieblok wordt een oriënterende inleiding gegeven op het berekenen van extreme waarden. In de opdrachten ná Theorieblok A wordt er vooral geoefend met het berekenen van extreme waarden. Daarnaast zijn er vragen gefocust op extreme waarden in combinatie met grafiekenbundels. Ook komt er een opdracht terug op de theorie van de voorkennis over het opstellen van de raaklijn. Vóór Theorieblok B is er weer een oriënterende opgave en na theorieblok B komen er veel opgaven die oefenen met het aantonen van extreme waarden. Daarnaast is er opnieuw een deelopgaven over het opstellen van een raaklijn. De opgave voor Theorieblok C is opnieuw oriënterend en laat de leerling zelf ontdekkingen over het buigpunt doen. De opdrachten na het theorieblok oefenen hiermee en er is één opdracht waarin buigpunten en extreme waarden beide voorkomen.

Het valt op dat er veel terug gekomen wordt op eerder geoefende vaardigheden. Het terugkomen op oudere opdrachten is volgens Barton goed voor het opslaan in langetermijngeheugen van kennis (Barton, 2018). In de opgaven wordt verder goed gevarieerd geoefend. In de opdrachten komt echter niet terug wat een tweede afgeleide groter of kleiner dan nul betekent.

Inzicht opdracht bij paragraaf 1

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12$. Toon aan met de eerste en de tweede afgeleide van f dat de grafiek van f toenemend dalend is in $x = 1$.

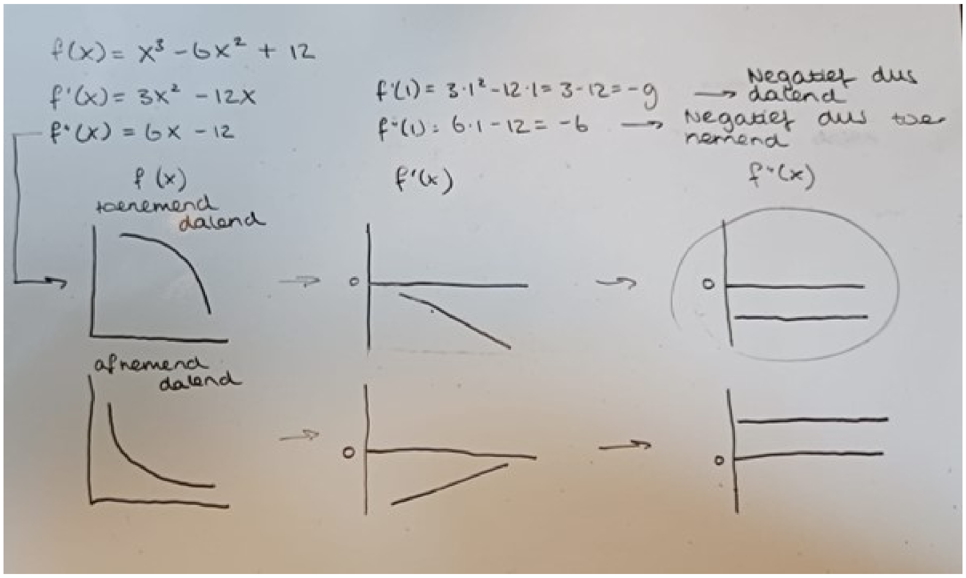
Aangezien er uit de bovenstaande analyse kwam dat in theorieblok C de uitleg mist wat een tweede afgeleide groter of kleiner dan nul betekent, en dit ook niet behandeld wordt in de opdrachten, is dit als startpunt genomen voor de opdracht. Deze specifieke opdracht is gekozen aangezien het verschillende wiskundige denkactiviteiten (verder WDA's genoemd) bevat, en verscheidene punten van Figuur 3. De opdracht bevat WDA's 'Ordenen en structureren' (de vraag opdelen in eerste afgeleide zegt iets over stijgen of dalen, tweede afgeleiden iets over toenemend of afnemend), 'Abstraheren' (het snappen van de betekenis van het getal dat berekend wordt met de afgeleide) en 'Logisch redeneren en bewijzen'

(bedenken wanneer het gevraagde inderdaad volledig aangetoond is). Daarnaast bevat de opdracht in ieder geval punten B17 en B19 t/m B27 van Figuur 3. Zie ook Tabellen 3 en 4. Er is voor gekozen om de leerlingen de hint te geven dat ze de eerste en tweede afgeleide nodig hebben om ze vast op weg te helpen. Zo kunnen de metacognitieve vragen ook beter geoefend worden. Wanneer de leerlingen niet verder komen, zal dan ook eerst aan hen gevraagd worden wat gegeven is, en wat er gevraagd wordt.
Er is gekozen om de opdracht niet al te lang te maken met té veel denkstappen, omdat het pas de eerste opdracht is. Het moet voorkomen worden dat leerlingen afgeschrokken worden voor volgende opdracht. Houding tot wiskunde was immers een belangrijke factor voor probleemoplossend vermogen bij leerlingen (zie Sectie 1 Inleiding). De opdracht is waarschijnlijk al uitdagend genoeg om wiskundige denkactiviteit te verkrijgen door het proportie relationele begrip dat ervoor nodig is. Daarnaast zal tijdens deze les tijd nodig zijn om het concept metacognitieve vaardigheden in te leiden en moet er genoeg tijd over blijven voor de nabespreking. De nabespreking is namelijk erg belangrijk om de leerlingen het belang van de metacognitieve vaardigheden extra in te laten zien. Het is daarnaast belangrijk dat de leerlingen constructieve feedback krijgen en dat ze worden ondersteund in dit leerproces (C3, C5, E6 en E8). Bij het leren van nieuwe vaardigheden is het extra belangrijk dat de leerlingen in het begin goed ondersteund worden, zodat ze later langzaam losgelaten kunnen worden Barton (2018) (en B8). De leerlingen mogen deze opdracht alleen maken, in duo's of met z'n tweeën: ze worden hier volledig in losgelaten omdat dit pas de eerste opgave is.

Nabespreking
Op het bord zal de uitwerking met bijbehorende bordindeling van Figuur 5 komen te staan. Tijdens de nabespreking zal uitgebreid aandacht besteed worden aan de metacognitieve vragen die op het bord staan. De docent vraagt eerst aan een leerling hoe deze begonnen is met de aanpak van de vraag. Niet per se het antwoord, maar wáárom dit een logische stap was voor de leerling is belangrijk. Zoals in de literatuurstudie te lezen is (B6, B11), is het belangrijk om vooral de methode en aanpak van leerlingen boven de uitkomst of het antwoord te waarderen. Wanneer een leerling er niet uit komt, wordt gevraagd waar deze vast gelopen is. Er wordt gevraagd wie hier nog meer vast was gelopen en wie wél verder is gekomen. Aan de leerling die wél verder is gekomen, wordt gevraagd wat deze leerling zichzelf heeft afgevraagd dat hij toch verder is gekomen. Bij de uitkomst van de opgave wordt er gevaagd hoe je jezelf kan overtuigen dat het antwoord inderdaad klopt. Hier komen de tekeningen aan bod.

5.3.3 Paragraaf 2

Theorieblokken paragraaf 2
Paragraaf 6.2 richt zich op de afgeleide van machtsfuncties. In theorieblok A wordt bewezen dat de regel $f(x) = ax^n$ *geeft* $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$, die eerder alleen voor positieve n bewezen was, ook voor negatieve n geldt. Leerlingen kunnen nu de afgeleide van breuken niet alleen met de quotiëntregel berekenen, maar ook door de breuk om te schrijven als macht van bijvoorbeeld x. In theorieblok B wordt gesteld dat de regel $f(x) = ax^n \quad geeft \quad f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$ zelfs voor elke reële waarde van n geldt.
Het bewijs in theorieblok A zorgt ervoor dat de leerlingen niet zomaar hoeven aan te nemen dat het klopt, maar ook snappen waar de regel vandaan komt en hoe deze gevormd is. In een uitgave van het lerarenvakblad Euclides zijn artikelen van o.a. B. van Asch, D. van Dalen, M. de Villiers en H. Swart te vinden die argumenten geven waarom (het bekijken van) bewijzen een zinvolle activiteit is voor leerlingen (Euclides, 2006). Daarnaast kennen de leerlingen de quotiëntregel al, waardoor het een goede met-before is om op aan te sluiten en op voort te bouwen. Volgens McGowen and Tall (2010) kunnen positieve met-befores een leerling helpen om hun denkproces te organiseren en om wiskundige operaties of symbolische noteringen beter te begrijpen. Het is dan ook jammer dat in theorieblok B geen bewijs wordt gegeven. Het bewijs zou pas in deel 3 gegeven worden, maar de reden voor het wachten wordt niet



Figuur 5: Uitwerking en bordindeling opdracht bij paragraaf 1.

*gegeven. Echter zouden de leerlingen met eenzelfde eenvoud als in theorieblok A met de productregel het bewijs moeten kunnen snappen. Door beide theorieblokken zo te bewijzen wordt de schoonheid van redeneren binnen het gesloten systeem van de wiskunde benadrukt (Drijvers et al., 2012*b*).*

Opdrachten paragraaf 2

De paragraaf begint met opgaven om te herhalen hoe men ook alweer met breuken werkt: hoe je een breuk omschrijft naar de vorm $ax^n \quad (+bx^m)$, hoe je de vorm ax^n weer omschrijft naar een breuk en hoe je de som van twee breuken als één breuk kan schrijven. In de opgaven voorafgaande aan het eerste Theorieblok, wordt de te leren theorie aannemelijk gemaakt. In de eerste opgaven die op Theorieblok A volgt, wordt met de nieuwe theorie geoefend. Ook wordt in opgaven 24 t/m 26 weer geoefend met het interpreteren van de afgeleide. Voorafgaande aan Theorieblok B wordt in de oriënterende opgave de nieuwe theorie aannemelijk gemaakt voor $n = \frac{1}{2}$. In de eerste opgaven na Theorieblok B wordt er weer gericht op het oefenen van de regel. De laatste paar opdrachten van deze paragraaf richten zich weer op het begrijpen van de afgeleide en hoe deze toegepast kan worden bij problemen.
*De eerste opgaven in de paragraaf halen de benodigde voorkennis naar boven. Dit is belangrijk voor goede aansluiting van cognitieve schema's (Drijvers et al., 2012*a*). Daarnaast zorgt het aannemelijk maken van de theorie m.b.v. oriënterende en reflectie-opgaven voor het bevorderen van het relationele begrip. De rijtjes sommen zorgen ervoor dat de leerlingen de stof automatiseren waardoor hun werkgeheugen later minder belast hoeft te worden. Verder bevatten de rijtjessommen geïntegreerde oefening: eerder geleerde vaardigheden zoals werken met de product- en quotiëntregel komen terug. Barton schrijft hierover dat dit een effectieve manier kan zijn om het begrip verder te verdiepen terwijl ook eerder behandelde stof terug wordt gehaald (Barton, 2018). De opgaven over het interpreteren van de afgeleide en waarvoor je deze kunt gebruiken, vergroten daarnaast opnieuw het relationeel begrip.*

Inzicht opdracht bij paragraaf 2

Voor welke waarde van x hebben de functies $f(x) = \frac{4}{5}x^2\sqrt{x}$ en $i(x) = -\frac{2}{x}$ dezelfde helling? Los algebraïsch op.
Hoewel uit de analyse van de theorie vooral naar voren kwam dat het bewijs van de regel $f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$ zelfs voor elke reële waarde van n geldt, mist, is er niet voor gekozen de inzichtopdracht hierover te laten gaan. De reden hiervoor is dat een bewijs ongeveer gelijk zal zijn aan het

bewijs uit theorieblok A met als enige extra denkstap dat de productregel gebruikt moet worden. Verder zal het alleen wiskundig uitschrijven zijn, waardoor leerlingen niet veel denkactiviteit nodig zullen hebben en dus metacognitieve vragen niet erg nodig zijn. De gekozen inzichtopdracht is gekozen omdat op deze manier de leerlingen oefenen met de stof uit de paragraaf, maar óók verschillende denkstappen uit moeten voeren en relationeel begrip moeten tonen. Deze opdracht bevat daarnaast WDA's 'Modelleren en algebraïseren' (gelijke helling op een punt betekent in wiskundige termen gelijke afgeleiden op dat punt), 'formules manipuleren' (de afgeleiden bepalen en gelijkstellen aan elkaar) en 'Logisch redeneren en bewijzen' (De leerlingen zullen het misschien lastig vinden om de vergelijking $x^3\sqrt{x} = 1$ *op te lossen, maar met logisch redeneren zullen ze tot een antwoord kunnen komen. Ze kunnen bijvoorbeeld door logisch nadenken erop uit komen dat* $x = 1$ *een correct antwoord is, en door te checken in de grafische rekenmachine dat dit het enige antwoord is). Daarnaast bevat het in ieder geval punten B17, B21 t/m B23 en B25 t/m B27 van Figuur 3. Zie ook Tabellen 3 en 4. Ook deze opdracht is niet té lang of té moeilijk gemaakt omdat de leerlingen wel het idee moeten hebben dat de opgave representatief is voor wat haalbaar is met hun kunnen. De leerlingen moeten eerst proberen om deze opgave alleen te maken. Hierdoor denken de leerlingen hopelijk bewuster na over de vragen die ze zichzelf kunnen stellen.*

Nabespreking

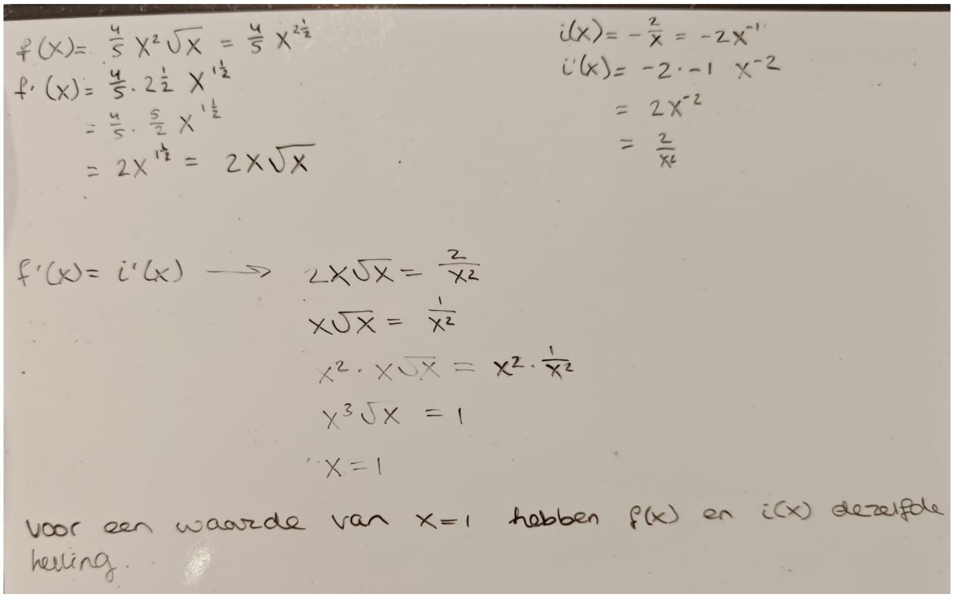
Op het bord zal de uitwerking met bijbehorende bordindeling van Figuur 6 komen te staan. De nabespreking zal nu volledig aan de hand van de metacognitieve vragen van het bord zijn (A3, E1, G2). De docent vraagt aan de leerlingen eerst hoe deze begonnen zijn met de vraag, en dus 'Wat heb je geantwoord op de eerste vraag over oriënteren?'. Wanneer deze vraag beantwoord is, gaan we eerst door met plannen: 'Ik wil dus weten voor welke x de functies dezelfde helling hebben, staan hier aanwijzingen in hoe ik kan beginnen? Hoe ga ik deze vraag aanpakken?' Wanneer de leerlingen niet weten wat ze moeten doen, kan er gevraagd worden: 'Wat weet ik over de helling van functies? En wat weet ik van gelijke hellingen?'. Er worden veel vragen gesteld aan de leerlingen en expliciet benoemd bij welke stap we zijn en hoe we kunnen wisselen van stap wanneer dit nodig is (B1, B3, B13, B15, C5, E4, E5, E6 en F2). Wanneer we bij het antwoord $x = 1$ zijn uitgekomen, zal de docent de vragen stellen: 'Hoe bepaal ik nu wat de helling is? En hoe kan ik dit antwoord dus controleren?' Daarnaast wordt gevraagd hoe je jezelf nog meer kan controleren. Hier zal GeoGebra (een publiekelijk toegankelijk computeralgebrasysteem) erbij gepakt worden om te laten zien dat het inderdaad waar is dat op $x = 1$ de helling ongeveer overeen komt. Hoewel deze manier van controleren minder betrouwbaar is, zullen grote fouten wél aan het licht komen. Zo worden de leerlingen erop gewezen dat er meerdere methoden mogelijk zijn (D3).

5.3.4 Paragraaf 3

Theorieblokken paragraaf 3

In paragraaf 6.3 wordt de kettingregel geïntroduceerd. Voor het grootste deel gebeurt dit in theorieblok A, waar eerst het principe van een samengestelde functie, oftewel een kettingfunctie, aan de hand van schakels wordt uitgelegd. Hierna wordt de kettingregel in algemene vorm gegeven, waarna een bewijs ervan volgt. In theorieblok B wordt kort uitgelegd dat de kettingregel ook gecombineerd voorkomt met de productregel of de quotiëntregel.

Met de uitleg over de verschillende schakels en het gegeven bewijs, wordt de kettingregel redelijk geïntroduceerd. Al zal het bewijs voor de leerlingen, door de vele haakjes en verschillende letters, vrij lastig zijn. Het zou helpen om de leerlingen éérst erop te wijzen waar naartoe wordt gewerkt, dit zou het duidelijker maken waarom bepaalde stappen in het bewijs worden gezet (leerlingen hebben begeleiding nodig met het leren wanneer welke metacognitieve vaardigheden in te zetten. Hier is dat het afvragen waar naartoe te werken, zie Sectie 4 E4 en E6). Wanneer iemand zelf dit bewijs zou moeten bedenken, zou het namelijk ook niet meteen chronologisch uitgedacht zijn. Het is goed om leerlingen mee te nemen in dit proces.



Figuur 6: Uitwerking en bordindeling opdracht bij paragraaf 2.

Aan relationeel begrip, wat een kettingfunctie nou precies inhoudt en hoe dit werkt in situaties van de echte wereld, wordt geen aandacht besteed in het theorieblok. Dit is erg jammer omdat dit iets meer gevoel kweekt voor wat een kettingfunctie nou is en wat het nut ervan is.

Opdrachten paragraaf 3

De eerste twee opgaven van de paragraaf nog vóór het eerste theorieblok dienen om het concept van een samengestelde functie te begrijpen. De eerste paar opgaven na theorieblok A zijn rijtjes sommen waarin de kettingregel geoefend wordt. Opgaven 45 t/m 52 richten zich weer meer op het begrijpen en kunnen toepassen van de afgeleide. Opdracht 53 is weer een inleidende opgave voor het theorieblok en met opgaven 54 t/m 57 (opdrachten na theorieblok B) kan het combineren van de kettingregel met de product of quotiëntregel worden geoefend. Opdracht 56 is een nieuwe opgave wat betreft vorm: hier moeten de leerlingen fouten in een uitwerking ontdekken. De laatste opgaven van deze paragraaf doen weer meer beroep op het begrip van en inzicht in de afgeleide bij leerlingen.
De introducerende opgaven geven alvast een idee wat de bedoeling is van de paragraaf. Dit zorgt ervoor dat de leerlingen al iets met de stof bezig zijn geweest waardoor ze de uitleg daarna beter onthouden en gerichtere vragen kunnen stellen. De rijtjes sommen na het eerste theorieblok zorgen er opnieuw voor dat de leerlingen de stof automatiseren waardoor hun werkgeheugen later minder belast hoeft te worden. De opgaven over toepassingen van de afgeleiden verdiepen het relationele begrip verder. De opdracht dat een leerling de fout in een uitwerking moet ontdekken is erg interessant. Dit wordt niet vaak gevraagd in het boek, maar zorgt er wel voor dat leerlingen nadenken over wat er allemaal fout kan gaan in een som, en waarom dit dus fout is.

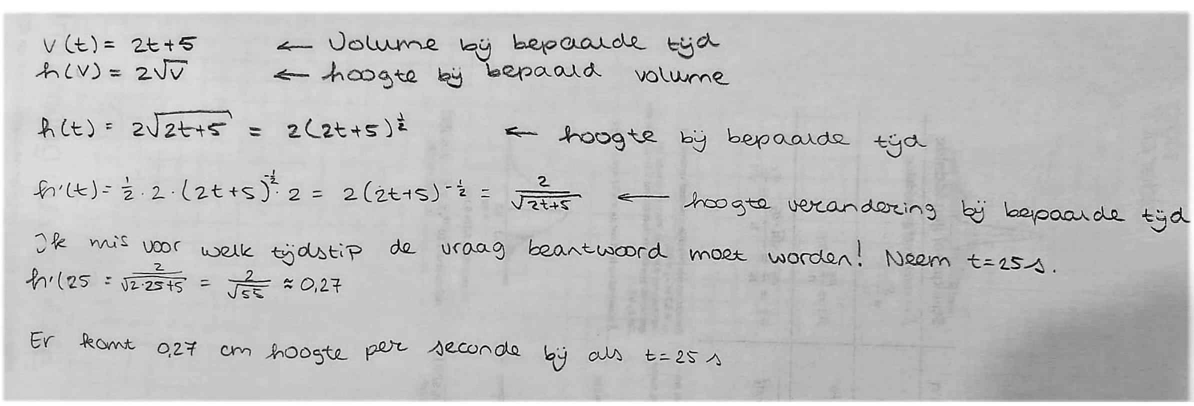
Inzicht opdracht bij paragraaf 3

We hebben een reservoir met water dat zich vult. We hebben een formule voor het volume V (in liters) na een bepaalde tijd t (in seconden), en voor de hoogte h (in cm) gegeven het volume (in liters): $V(t) = 2t + 5$ en $h(V) = 2\sqrt{V}$. Hoeveel centimeter hoogte, afgerond op 2 decimalen, komt er per seconde in het water reservoir bij? Er mist iets in deze vraag. Als je eruit bent welk gegeven er mist, vraag het aan de docent en reken hierna verder.
Aangezien er uit de bovenstaande analyse kwam dat er weinig tijd besteed wordt aan relationeel begrip van wat een kettingregel nou precies inhoudt en hoe dit werkt in situaties in de echte wereld, is dit

als startpunt genomen voor de opdracht. Deze specifieke opdracht is gekozen aangezien het verschillende WDA's bevat, en verscheidene punten van Figuur 3. Deze opdracht bevat WDA's 'Modelleren en algebraïseren' (de vraag vertalen naar $f'(h = 25) =?$), 'Ordenen en structureren' (classificeren dat de eerste helft van de vraag over functies gaat, en de vraag zelf over de afgeleide van die functies), 'Formules manipuleren' (het afleiden van een kettingfunctie, maar ook het inzicht dat we überhaupt met een kettingfunctie te maken hebben), 'Abstraheren' (het weten wat de formules en hun uitkomsten betekenen in termen van het waterreservoir) en 'Logisch redeneren en bewijzen' (het bedenken wat er mist). Daarnaast bevat het alle punten van Figuur 3. Zie ook Tabellen 3 en 4. Er is voor gekozen om weg te laten welk tijdstip er gevraagd wordt, zodat de leerlingen hiernaar moeten zoeken wat eenheden betreft en zo beter en grondiger over de stof nadenken. De opdracht kan doordat deze veel verschillende WDA's bevat wat moeilijk zijn voor de leerlingen. De afweging is hier gemaakt om wél deze opgave te doen aangezien de leerlingen met deze opgave kennis maken met ook de andere WDA-aspecten die nog niet aan bod zijn gekomen in de voorgaande opgaven. Daarnaast weten de leerlingen al beter wat de bedoeling is omdat er al twee opdrachten geweest zijn, hierdoor kunnen ze iets meer losgelaten worden. De leerlingen mogen deze opdracht in tweetallen maken omdat de opdracht aan de moeilijke kant is.

Nabespreking

Op het bord zal de uitwerking met bijbehorende bordindeling van Figuur 7 komen te staan. Tijdens de nabespreking zal opnieuw uitgebreid aandacht besteed worden aan de metacognitieve vragen die op het bord staan (A3). De docent vraagt aan de leerling hoe zij begonnen zijn met de vraag: wat is het eerste wat je jezelf hebt afgevraagd? Wanneer een leerling het antwoord al wilt geven op de opdracht zelf, wordt opnieuw daarna gevraag hoe ze hierop gekomen zijn, en wat hij zichzelf dus heeft afgevraagd (B6, B11 en B13): wanneer je het uit zou leggen aan een andere leerling, hoe zou je deze leerling dan vertellen waarom dit een logische stap is? Wanneer een leerling er niet uit komt, wordt gevraagd waar deze vast gelopen is. Er wordt gevraagd wie hier nog meer vast was gelopen en wie wel verder is gekomen. Aan de leerling die wel verder is gekomen, wordt gevraagd wat deze leerling zichzelf heeft afgevraagd dat hij toch verder is gekomen. Bij de uitkomst van de opgave wordt er gevaagd hoe je jezelf kan overtuigen dat het antwoord inderdaad klopt (B1, B3, B7, B13, C3, C5, D2, D3, E10 en F5).



Figuur 7: Uitwerking en bordindeling opdracht bij paragraaf 3.

5.3.5 Paragraaf 4

Theorieblokken paragraaf 4

In paragraaf 6.4 worden afgeleiden gebruikt bij functies met parameters. Deze paragraaf is sterk toe-

passingsgericht. In het eerste theorieblok komen raaklijnproblemen bij functies met een parameter aan bod: hier wordt verteld dat, wanneer een lijn raakt aan een functie $f(x)$ met parameter p in punt A met x-coördinaat x_A, de vergelijking $f'_p(x_A) = rc_A$ opgelost moet worden om p te bepalen. In theorieblok B leren de leerlingen om een formule op te stellen van een kromme waarop alle toppen van de grafieken van een grafiekenbundel van een parameterfunctie liggen. Het derde theorieblok behandelt rakende grafieken en het vierde theorieblok loodrecht snijdende grafieken. Het hoofdstuk sluit af met een informatief blok dat uitlegt waarom de regel $f'(x) \cdot g'(x) = -1$ niet gebruikt kan worden bij loodrecht snijdende grafieken waarbij één van de raaklijnen verticaal is.
Bij het eerste theorieblok wordt vooral instrumenteel begrip gekweekt hoe de parameter p in een bepaalde situatie uitgerekend wordt. Hoewel de voorgaande opdracht het theorieblok inleidt, zal bij het leren voor de toets hier waarschijnlijk niet meer naar gekeken worden en bestaat het gevaar dat de leerlingen dit als regel uit hun hoofd gaan leren, in plaats van proberen te snappen wat ze nou eigenlijk moesten doen en waarom dit logisch is. Een illustratief plaatje zou dit tegen kunnen gaan. Voor het tweede theorieblok zou een terugverwijzing naar eerdere paragrafen nuttig zijn. Leerlingen weten namelijk al hoe ze normaal de x-coördinaat van de top uit moeten rekenen. Waarschijnlijk zullen veel leerlingen dit dan ook herkennen in het theorieblok, maar het zal veel leerlingen ook helpen om dit nog expliciet te benoemen. Een subtiele aanpassing zoals 'Daartoe los je de vergelijking $f'_p(x) = 0$ op.' vervangen door 'Daartoe los je de vergelijking $f'_p(x) = 0$ op om de x-coördinaat van de top te vinden' zou al genoeg zijn. Hierdoor wordt er beter voortgebouwd op cognitieve schema's die de leerlingen al hebben.
Het derde theorieblok maakt goed gebruik van een illustratief plaatje om het theorieblok te verduidelijken en intuïtief te maken. Het vierde theorieblok en het afsluitende informatieblok doen dit ook.

Opdrachten paragraaf 4
De eerste opdracht van de paragraaf behandelt de theorie van het eerste theorieblok. De opdrachten na het eerste theorieblok oefenen met de theorie van Theorieblok A en de opdracht voor het tweede theorieblok is opnieuw inleidend. Zo gaat het door tot het einde van de paragraaf: vóór het theorieblok een inleidende opgave, na het theorieblok opgaven die met de stof van het theorieblok oefenen. Het valt op dat er een paar opdrachten zijn die ook specifiek om reflecterende vaardigheden vragen. Zo wordt in opdracht 70 bijvoorbeeld gevraagd waarom het niet ter zake doet in de theorie dat er in de gevonden kromme eventueel ook punten liggen die geen top zijn en in opdracht 75 wat het betekent wanneer $f'(x) = g'(x)$ maar niet $f(x) = g(x)$.
De opdrachten waar om reflecterende vaardigheden wordt gevraagd zijn goed voor het relationele begrip van de leerlingen. Daarnaast zal het oefenen hiermee mogelijk nuttig zijn voor het leren beantwoorden van de metacognitieve vragen van het onderzoek.

Inzicht opdracht bij paragraaf 4
De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{3x-p}$. De lijn l raakt de grafiek van f in punt $(\frac{1}{2}, 2)$. Bereken exact het snijpunt van lijn l met de y-as.
Uit de analyse van de paragraaf kwamen geen grote dingen naar voren die missen. Om deze reden is er gekozen voor een opgave die vooral veel stappen bevat. De opdracht bestaat uit een combinatie van het bepalen van een parameter d.m.v. het invullen van een punt, het opstellen van de raaklijn m.b.v. de afgeleide en een punt, en het berekenen van een snijpunt van de lijn met de y-as. De afzonderlijke aspecten kennen de leerlingen al, maar leerlingen hebben deze stappen nog niet gecombineerd gezien. Deze opdracht bevat daarom de WDA's 'Formules manipuleren' (het opstellen van de vergelijking van lijn l), 'Abstraheren' (bedenken wat de uitkomsten van alle tussenstappen betekenen) en 'Logisch redeneren en bewijzen' (weten in welke volgorde ik mijn onbekende moet berekenen). Daarnaast bevat het de punten B17, B19, B21 t/m B23 en B25 t/m B28 van Figuur 3. Zie ook Tabellen 3 en 4. De opgaven is in vergelijking met de vorige inzichtopdracht een stuk makkelijker. Echter is de opgave wel erg representatief voor wat de leerlingen zouden moeten kunnen met de kennis die ze hebben. Er wordt aangeraden de vraag eerst zelf te proberen, maar wanneer ze er niet uitkomen, mogen de leerlingen overleggen met hun buurman. Er is voor gekozen de leerlingen eerst zelf de vraag te laten maken zodat ze er beter achter komen wat ze zelf weten en wat niet (B14). De leerlingen mogen overleggen met hun

buur wanneer ze er niet uitkomen, zodat ze ook leren van het uitleggen aan elkaar en zo hopelijk meer inzicht in hun eigen denkproces krijgen (C1 en E7).

Nabespreking
Op het bord zal de uitwerking met bijbehorende bordindeling van Figuur 8 komen te staan. De nabespreking zal op dezelfde manier gaan als voorgaande vraag wat betreft metacognitieve vragen. Na afloop zal opnieuw GeoGebra erbij gepakt worden om de oplossing te controleren. De gegevens worden op chronologische volgorde van vinden tijdens het oplossingsproces ingevoerd om zo alle stappen duidelijker te maken wanneer leerlingen dit nog niet voor hun zagen. Er is voor gekozen dit niet tíjdens het oplossen al te doen omdat dan het oplossingsproces van de leerlingen gevolgd zal worden. Aangezien dit de laatste vraag is, zal ik zo min mogelijk sturing geven, het afbouwen van sturing staat namelijk in lijn met de ondervindingen uit de literatuurstudie (B8). Wanneer de leerlingen hier zelf al op waren gekomen, zal dit natuurlijk gevolgd worden.

$f(x) = \frac{1}{3x-p} = (3x-p)^{-1}$

$f(\frac{1}{2}) = 2 \longrightarrow \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{2} - p} = 2 \qquad \frac{1}{1\frac{1}{2} - p} = 2 \qquad 1\frac{1}{2} - p = \frac{1}{2} \qquad p = 1 \longrightarrow f(x) = \frac{1}{3x-1} = (3x-1)^{-1}$

$f'(x) = -1(3x-1)^{-2} \cdot 3 = -3(3x-1)^{2} = \frac{-3}{(3x-1)^2}$

$f'(\frac{1}{2}) = \frac{-3}{(3 \cdot \frac{1}{2} - 1)^2} = \frac{-3}{1/4} = -12 = rc_l$

l: $y = ax + b \qquad y = -12x + b$

l gaat door punt $(\frac{1}{2}, 2)$: $2 = -12 \cdot \frac{1}{2} + b \qquad 2 = -6 + b \qquad b = 8$

l: $y = -12x + 8$

Snijpunt lijn l met y-as is dus $(0,8)$

Figuur 8: Uitwerking en bordindeling opdracht bij paragraaf 4.

5.3.6 Algemeen overzicht van de WDA's en denkactiverende aspecten die omvangen zijn in de ontworpen inzichtopdrachten

In tabellen 3 en 4 is een overzicht te zien welke opdrachten welke WDA's omvangen en welke aspecten voor een denkactiverende opgaven. Het is te zien dat in totaal alle WDA's en aspecten verwerkt zijn in de lessenserie.

WDA	**1**	**2**	**3**	**4**
Modelleren en algebraïseren		X	X	
Ordenen en structureren	X		X	
Formules manipuleren		X	X	X
Abstraheren	X		X	X
Logisch redeneren en bewijzen	X	X	X	X

Tabel 3: Overzicht welke WDA's de ontwikkelde inzichtopdrachten bevatten. Merk op dat WDA 'Analytisch denken en probleem oplossen' buiten beschouwing is gelaten, aangezien deze overkoepelend is voor deze lessenserie.

Aspecten denkactiverende wiskunde opgave	**1**	**2**	**3**	**4**
B17. Gaat over hoe én waarom	X	X	X	X
B18. Is een aansprekend probleem voor leerlingen			X	
B19. Heeft iets te bieden voor zowel de sterke als zwakke leerlingen	X		X	X
B20. Kan op verschillende manieren worden aangepakt	X		X	
B21. Is origineel of verrassend	X	X	X	X
B22. Vereist meerdere denkstappen	X	X	X	X
B23. Is open en niet te sturend	X	X	X	X
B24. Leent zich voor discussie tussen leerlingen of in de hele klas	X		X	
B25. Zet aan tot terugkijken en reflectie	X	X	X	X
B26. Nodigt uit tot verder denken en vervolgvragen	X	X	X	X
B27. Doet beroep op de verschillende aspecten van wiskundig denken	X	X	X	X
B28. Zet leerlingen aan de kern uit gegevens te halen			X	X

Tabel 4: Overzicht welke WDA-aspecten de ontwikkelde inzichtopdrachten bevatten

5.4 Formatieve toets en nakijkmodel

In deze sectie zal de formatieve toets besproken worden die dient om het verschil in probleemoplossend vermogen van de test- en controlegroep vast te leggen. Eerst zal onderbouwd worden waarom deze opdrachten gekozen zijn voor de formatieve toets, waarna besproken zal worden hoe, en waarom op deze manier, het nakijkmodel is opgebouwd.

5.4.1 Formatieve toets

De formatieve toets is te vinden in Bijlage C.1. De toets bestaat uit twee opgaven en een bonusopgave. De opdrachten zijn zó uitgekozen dat de leerlingen deze nog niet eerder gezien hebben in het methode boek of tijdens de lessen, de opdrachten verschilende WDA's bevatten en verschillende WDA-aspecten bevatten (Figuur 3), zie ook Tabellen 5 en 6.

In de eerste opgave krijgen de leerlingen een parameterfunctie en moeten ze de formule opstellen van de kromme waarop alle buigpunten van de grafiek liggen. Deze opdracht bevat de WDA's 'Modelleren en Algebraïseren' (buigpunt betekend tweede afgeleide is gelijk aan nul), 'Ordenen en structureren' (de vraag kennen ze al voor het opstellen van een kromme waarop alle toppen liggen, ze moeten bedenken dat dit op ongeveer dezelfde manier gaat), 'Formules manipuleren' (bedenken dan p vrijgeschreven moet worden, en ingevuld moet worden in de parameter vergelijking) en 'Abstraheren' (controleren van de tussenstappen op logische betekenis). De opgaven bevat daarnaast de WDA-aspecten B17, B19, B21 t/m B23 en B25 t/m B27. Zie Tabellen 5 en 6.

In de tweede opdracht krijgen de leerlingen het functievoorschrift van een parabool en een lijn. De leerlingen moeten de formule van een tweede lijn opstellen die de parabool raakt en de eerste lijn loodrecht snijdt. Daarnaast is gegeven dat de eerste lijn de parabool raakt op een gegeven x-waarde. Dit laatste stukje informatie is natuurlijk eigenlijk overbodig voor het maken van de vraag. Deze opdracht bevat de WDA's 'Modelleren en Algebraïseren' (loodrecht snijden betekent o.a. dat het product van de afgeleiden gelijk is aan -1, raken betekent o.a. dat de afgeleiden gelijk zijn aan elkaar), 'Ordenen en structureren' (de vraag in delen opdelen: eerst richtingscoëfficiënt uitrekenen, daarna startgetal), 'formules manipuleren' (invullen van bijvoorbeeld het punt waar de lijn en de parabool elkaar moeten raken in het functievoorschrift van de parabool om het startgetal van de lijn te berekenen), 'Abstraheren' (bedenken wat de gegeven situatie voorstelt, eventueel een tekening maken) en 'logisch redeneren en bewijzen' (redeneren dat bepaalde gegevens uit de vraag overbodig zijn). De opgaven bevat daarnaast de WDA-aspecten B17, B19, B21 t/m B23 en B25 t/m B28. Zie Tabellen 5 en 6.

In de derde opdracht moeten de leerlingen berekenen wat de beste manier is om een hekwerk neer te zetten, waarbij gebruik gemaakt mag worden van een muur, zodat het afgezette oppervlakte maximaal is. Deze opdracht is volledig overgenomen uit een College vakdidactiek van van der Meulen (2023). De opdracht bevat de WDA's 'Modelleren en algebraïseren' (het noemen van de breedte en lengte x en y en het opstellen van de formule van de oppervlakte en omtrek), 'Formules manipuleren' (het vrijschrijven van een variabele in de omtrek formule en substitueren in de oppervlakte formule) en 'Abstraheren' (bedenken dat differentiëren gebruikt moet worden omdat de oppervlakte maximaal is wanneer de afgeleide gelijk is aan nul). De opgaven bevat de WDA-aspecten B17, B18 en B20 t/m B28. Zie Tabellen 5 en 6. Er is voor gekozen deze opdracht als 'bonus' op te schrijven aangezien de leerlingen nog nooit te maken hebben gehad met maximaliseringsproblemen. De stap van het opstellen van de oppervlakte functie, dit zien als een parabool en beseffen dat daar dus het maximum van berekend moet worden, kan iets te ver staat van de stof die ze gehad hebben. De leerlingen kunnen om deze reden erg lang bij deze opdracht blijven hangen omdat het een relatief eenvoudig probleem lijkt, zonder enig resultaat, wat ten koste gaat van de tijd voor de andere twee opdrachten. De reden dat deze opdracht wél in de formatieve toets is gestopt, is juist omdat we benieuwd waren hoe ver de leerlingen komen met een probleem waar ze misschien helemaal geen idee van hebben hoe te beginnen.

WDA	**1**	**2**	**3**
Modelleren en algebraïseren	X	X	X
Ordenen en structureren	X	X	
Formules manipuleren	X	X	X
Abstraheren	X	X	X
Logisch redeneren en bewijzen		X	

Tabel 5: Overzicht welke WDA's de ontwikkelde inzichtopdrachten uit de formatieve toets bevatten. Merk op dat WDA 'Analytisch denken en probleem oplossen' buiten beschouwing is gelaten, aangezien deze overkoepelend is voor deze lessenserie.

Aspecten denkactiverende wiskunde opgave	**1**	**2**	**3**
B17. Gaat over hoe én waarom	X	X	X
B18. Is een aansprekend probleem voor leerlingen			X
B19. Heeft iets te bieden voor zowel de sterke als zwakke leerlingen	X	X	
B20. Kan op verschillende manieren worden aangepakt			X
B21. Is origineel of verrassend	X	X	X
B22. Vereist meerdere denkstappen	X	X	X
B23. Is open en niet te sturend	X	X	X
B24. Leent zich voor discussie tussen leerlingen of in de hele klas			X
B25. Zet aan tot terugkijken en reflectie	X	X	X
B26. Nodigt uit tot verder denken en vervolgvragen	X	X	X
B27. Doet beroep op de verschillende aspecten van wiskundig denken	X	X	X
B28. Zet leerlingen aan de kern uit gegevens te halen		X	X

Tabel 6: Overzicht welke WDA-aspecten de ontwikkelde inzichtopdrachten uit de formatieve toets bevatten.

5.4.2 Nakijkmodel formatieve toets

Het nakijkmodel van de formatieve toets is te vinden in Bijlage C.2. De leerlingen krijgen voor iedere actieve denkstap die ze moeten maken een punt en krijgen géén punten voor uitwerkingen van die denkstappen. Er is daarnaast voor gekozen om géén punten af te trekken voor rekenfoutjes. Het doel van deze toets is namelijk om hun probleemoplossend vermogen zichtbaar te maken, en niet hun rekenvaardigheid.

In de eerste opdracht krijgen de leerlingen een punt voor het maken van de denkstap dat ze de dubbele afgeleide gelijk moeten stellen aan nul. Ze krijgen geen punten om die dubbele afgeleide uit te rekenen aangezien de afgeleide zó gekozen is dat dit onder reproductie valt: de leerlingen hebben dit al vaker gezien. De tweede stap waar ze een punt voor krijgen is het bedenken dat ze de p vrij moeten schrijven. De leerlingen zouden namelijk ook kunnen denken dat zij x vrij moeten schrijven. Als laatste krijgen ze een punt voor het invullen van de gevonden p in de formule voor $f_p(x)$. De leerlingen zouden namelijk ook bijvoorbeeld kunnen denken dat ze de p in de afgeleide functie in moeten vullen.

In de tweede opdracht krijgen de leerlingen punten voor het bedenken dat, wanneer lijn k en l loodrecht snijden, het product van de richtingscoëfficiënten -1 is. Ze moeten namelijk bedenken dat dit om de afgeleide van k en l gaat, en niet $f(x)$ hierbij betrekken. Daarnaast krijgen ze een punt wanneer ze bedenken dat ze moeten uitrekenen wáár de helling gelijk is aan $-\frac{1}{3}$. Dit is namelijk een denkstap die volledig nieuw is voor ze, aangezien de leerlingen nu deze extra tussenstap moeten doen om een punt te krijgen om in te vullen en de leerlingen echt moeten nadenken over wát de betekenis is wat ze aan het doen zijn. Vervolgens krijgen ze een punt wanneer ze beseffen dat dit het punt is waar k dus f moet raken, en ze de y-coördinaat uitrekenen van dat punt. Hieruit blijkt dat de leerlingen ook daadwerkelijk het goede punt invullen en beseffen dat ze zo het startgetal kunnen berekenen en niet tussendoor ergens nog de mist in zijn gegaan door bijvoorbeeld de overbodige informatie te gebruiken.

In de derde opgave krijgen de leerlingen het eerste punt wanneer ze de heklengte en oppervlakte in een formule opschrijven. Dit valt immers onder één van de WDA's: Modelleren en algebraïseren. Het tweede punt krijgen ze wanneer ze de formule voor de heklengte gelijkstellen aan 15: ze gebruiken hier namelijk de gegeven informatie en laten zien dat ze snappen hoe ze hun eigen formules moeten gebruiken. Het derde punt wordt gegeven wanneer de leerlingen de b vrijschrijven uit de formule voor de heklengte, en invullen in de formule van de oppervlakte. Hier laten de leerlingen namelijk zien dat ze weten dat ze wat moeten gaan doen met de oppervlakte (daarover wordt immers de vraag gesteld). Het laatste punt dat gegeven wordt, is wanneer ze bedenken dat de oppervlakte maximaal is wanneer de afgeleide van deze formule nul is. De leerlingen hebben nog nooit te maken gehad met een optimaliseringsprobleem dus daarom wordt dit ook als aparte denkstap gezien.

6 Resultaten

6.1 Resultaten formatieve toets

In tabel 7 zijn de gemiddelde resultaten te zien van de testgroep en de controlegroep. Wanneer gekeken wordt naar het totaal aantal punten, is te zien dat de controlegroep iets hoger scoort. Wanneer eerst een F-toets uitgevoerd wordt komt hier een p-waarde uit van 0.70. Dit is groter dan 0.05 en dus concluderen we dat de varianties van beide groepen niet significant afwijken. Nu kunnen we dus een t-toets gebruiken voor gelijke varianties. De uitkomst van de t-toets is hiermee p=0.65. Ook dit is hoger dan 0.05 en dus moeten we de nulhypothese aannemen: Het verschil in beide groepen wijkt niet significant af. Merk op dat het in dit geval überhaupt niet nodig was om de toets uit te voeren aangezien de controlegroep hoger scoorde dan de testgroep, en er dus sowieso niet genoeg bewijs was om te kunnen concluderen dat de testgroep beter scoorde. Echter hebben we ervoor gekozen de methode te volgen.

6.2 Resultaten hardop-denksessie

In Bijlage D zijn de interviews in meer detail uitgetypt. Per leerling zijn er een aantal momenten (in de bijlage zijn deze gemarkeerd) waarin de leerling metacognitieve vaardigheden gebruikt of juist niet.

	Opdr 1	**Opdr 2**	**Opdr 3**	**Totaal**	σ_{Totaal}
testgroep	0.86	1.14	1.14	3.14	2.61
controlegroep	1.67	0.83	1.12	3.67	2.16

Tabel 7: Overzicht scores leerlingen (opdracht 1, 2 en 3 en het totaal formatieve toets zijn weergegeven in gemiddelde aantal punten).

De gebruikte vaardigheden zijn onderstreept en in Tabel 8 gezet om een overzicht te geven. Er zal in deze sectie niet per se worden in gegaan op juistheid van de conclusies die de leerlingen trekken.

Bij leerling 1 van de testgroep zijn de dingen die opvallen per opdracht:

- (Opdracht 1) Ze leest de vraag en bedenkt hierna een plan van aanpak voordat ze begint. Ze begint dus met plannen hier, denkt te weten wat ze moet doen, en gaat verder.
- (Opdracht 1) Ze wist vanaf het begin al dat ze de p vrij moest schrijven, maar loopt vast wanneer ze dat wilt gaan doen. Ze kijkt terug naar de vraag waaruit mogelijk geconcludeerd kan worden (ze is echter stil wanneer ze dit doet) dat ze aan het bijsturen is: wat ze aan het doen is leidt nu nergens heen, misschien stond er iets in de vraag wat ze gemist heeft.
- (Opdracht 1) Ze concludeert dat het beter is om de eerste opdracht even te laten rusten en gaat door naar opgave 2. Ook dit zou als bijsturen opgevat kunnen worden: wat ze aan het doen is leidt voor nu tot niks.
- (Opdracht 1) Wanneer ze weer terug kijkt naar opdracht 1, controleert ze eerst haar eigen uitwerking, ze reflecteert: Heeft ze het goed aangepakt en is het allemaal logisch. Ze mist echter het feit dat haar fout zat bij het interpreteren van de vraag.
- (Opdracht 1) Als laatste probeert ze nog de abc-formule toe te passen om op een antwoord te komen. Ze begint opnieuw met oriënteren en plannen: Ze heeft een formule die ze moet oplossen, ze zou de abc-formule kunnen proberen.
- (Opdracht 2) Ze leest snel de vraag en wilt op automatische piloot al twee regels toepassen, hoewel dit eigenlijk té snel geconcludeerd is. De leerling laat hier wel zien dat ze oriënteert: Ze schrijft op wat ze weet dat misschien bruikbaar is.
- (Opdracht 2) Ze leest de vraag later nog een keer door, waarschijnlijk om te bedenken wat haar tussen antwoord betekent. Dit valt onder monitoren: Hoe ver is ze nu? Dit is het punt waar ze concludeert dan dat ze inderdaad de vraag verkeerd gelezen heeft (en dus haar uitwerking tot nu toe niet klopt).
- (Opdracht 2) Nu gaat ze aandachtiger naar de vraag kijken en onderstreept het een en ander. Daarnaast schrijft ze hier ook de algemene vorm op voor de formule van lijn k, en dat de afgeleide van lijn k gelijk moet zijn aan a. Ze is hier aan het oriënteren: Wat is gegeven? Wat weet ik hier al van? Hiermee maakt ze een nieuw plan van aanpak. Echter kijkt ze nog niet helemaal waar ze naar toe moet en wat ze nodig heeft daar te komen (hoort óók bij het oriënteren). In de vraag staat namelijk overbodige informatie waardoor ze nu in de war raakt. Ze besluit om een tekening te maken van de situatie. Het maken van de tekening valt onder plannen: Als ze het niet weet, wat zou ze kúnnen proberen? Het tekenen valt ook onder opnieuw oriënteren: Wat is er gegeven?
- (Opdracht 2) De tekening klopt, en het helpt haar om de richtingscoëfficiënt te berekenen van lijn k. Ze zegt zelf dat ze nu alleen b nog moet berekenen. Ze is hier dus aan het monitoren hoe ver ze is, en wat ze nog moet doen. Ze redeneert wat, en eindigt deze redenatie door zichzelf af te vragen wat ze daaraan heeft. Hier is ze dus aan het bijsturen: Wat ze aan het doen is, leidt niet tot de juiste oplossing.

- (Opdracht 2) Met maken van de tekening helpt haar echter niet verder om het startgetal te vinden. Ze zegt zelf dat ze maar wat aan het proberen is. Dit hoort ook bij bijsturen en plannen, wat ik aan het doen ben, leidt dit tot iets? En wat zou ik kúnnen proberen?

Leerling 1 van de testgroep heeft in totaal 1 punt gehaald.

Bij leerling 1 van de controlegroep zijn de dingen die opvallen per opdracht:

- (Opdracht 1) Hoewel ze al snel aan de slag gaat, bedenkt ook deze leerling een plan van aanpak, zij is dus ook aan het plannen hier.
- (Opdracht 1) Wanneer ze $x = \frac{1}{2}$ uitgerekend heeft concludeert ze dat dit het buigpunt is. De leerling is hier aan het monitoren: Hoe ver is ze nu? Wat heeft ze al uitgerekend? (Men zou dit ook als reflecteren van de tussenstap kunnen zien.) Echter lijkt ze hier terug te vallen op methodes die ze op automatische piloot uitvoert, aangezien x uitrekenen niet bij haar originele plan van aanpak hoorde. Haar reflecterende vaardigheid om te bedenken dat het niet logisch is wat ze nu doet, is dus nog niet optimaal in dit geval.
- (Opdracht 1) Ze concludeert dat het beter is om de eerste opdracht even te laten rusten en gaat door naar opgave 2. Dit zou als bijsturen opgevat kunnen worden: wat ze aan het doen is leidt voor nu tot niks.
- (Opdracht 1) Hoewel de leerling de vraag nog eens doorleest nadat ze terug is gekomen bij de opdracht, valt het op dat ze niet haar eerdere antwoord controleert op aanpak en logica maar gelijk door lijkt te gaan met iets nieuws. Ze reflecteert haar tussen antwoorden dus niet.
- (Opdracht 2) De leerling leest de vraag en begint met oriënteren: Wat weet ze al? Ze weet dat $l' \cdot k' = -1$.
- (Opdracht 2) De leerling raakt in de war van de extra informatie die in de vraag staat: Ze komt uit op een richtingscoëfficiënt van -2, maar concludeert dat dit in tegenstrijd is met bovengenoemde regel. Ze is hier aan het bijsturen/ reflecteren: Wat ze aan het doen is leidt niet meer tot de juiste oplossing, het is niet logisch.
- (Opdracht 2) Later realiseert ze zich dat ze al een formule heeft voor lijn k, dus dat ze het antwoord al heeft. Hieruit blijkt dat ze haar planning inderdaad niet helemaal meer in haar hoofd had zitten.
- (Opdracht 3) De leerling koppelt tijdens het lezen de tekst aan de plaatjes. De leerling is hier aan het oriënteren: Wat is er gegeven? Door te vragen of ze zelf een 'dinges' moet bedenken, laat ze ook zien dat ze aan het oriënteren is: Waar moet ze naartoe?
- (Opdracht 3) De leerling probeert wat dingen uit. Dit kan duiden op plannen: Wat zou ze kúnnen proberen?

Leerling 1 van de controlegroep heeft in totaal 3 punten gehaald.

Bij leerling 2 van de testgroep zijn de dingen die opvallen per opdracht:

- (Opdracht 1) De leerling is vóór het lezen van de vraag al aan het oriënteren: Hij zegt meteen al dat hij een kettingregel en een parameter ziet. Na het lezen van de vraag schrijft hij daarnaast meteen al op wat hij weet.
- (Opdracht 1) Hij check meteen al zijn afgeleide op rekenfoutjes, hij is dus nu al zijn tussenantwoord aan het reflecteren.

- (Opdracht 1) Daarna bedenkt hij een plan van aanpak om bij het eindantwoord te komen. Hier is hij dus aan het plannen.
- (Opdracht 1) Hij bedenkt tussendoor wat hij ook alweer aan het doen was: Hij is hier aan het monitoren, hoever is hij nu?
- (Opdracht 1) Wanneer hij merkt dat hij vast loopt, controleert hij meteen zijn uitwerking regel voor regel om te kijken of hij geen foutjes heeft gemaakt, hier is bij dus opnieuw aan het reflecteren. Daarna probeert hij de p buiten de haakjes te halen en concludeert dat dit klopt door de haakjes in zijn hoofd weer weg te halen. Hier reflecteert hij dus opnieuw.
- (Opdracht 1) Hij loopt nog steeds vast en gaat bedenken wat kan proberen, hij is opnieuw aan het plannen en tegelijk aan het bijsturen: De bedachte dingen gaan niet leiden niet tot een oplossing.
- (Opdracht 1) Wanneer de leerling later weer terug kijk naar opdracht 1, leest hij opnieuw de vraag deel voor deel door en checkt zijn antwoord: Hij is aan het reflecteren.
- (Opdracht 1) De leerling vraagt zich af of er niet ergens een punt is gegeven, hij is daar aan het oriënteren: wat is er nodig om bij het antwoord te komen, en is dat gegeven?
- (Opdracht 1) Hij probeert weer wat dingen. Hij is weer aan het plannen en bijsturen.
- (Opdracht 2) De leerling schrijft eerst op wat gegeven is: $f(x)$ en rekent meteen (bijna op automatische piloot alsof dit óók gegeven is) $f'(x)$ uit. Hij is aan het oriënteren. Daarnaast rekent hij $f'(2)$ uit om te kijken of hier inderdaad -3 uit komt. Hij is aan het evalueren of hij alles dat gegeven is snapt. Daarna schrijft hij de algemene formule voor k op: hier moet hij naartoe.
- (Opdracht 2) Wanneer hij klaar denkt te zijn met de opdracht, controleert hij of het klopt door een punt in te vullen. Hij is aan het reflecteren.
- (Opdracht 3) De leerling koppelt tijdens het lezen de tekst aan de plaatjes. De leerling is hier aan het oriënteren: wat is er gegeven? Daarnaast vraagt hij zichzelf af wat hij met de hint 'gebruik differentiëren' moet doen. Dit hoort ook bij oriënteren: waar moet hij naartoe?
- (Opdracht 3) Hij beredeneerd dat hij waarschijnlijk met een parabool te maken heeft. Ook hier is hij aan het oriënteren: Hij bedenkt wat hij verwacht dat er gaat komen.
- (Opdracht 3) Hij probeert zijn gevonden formules uit voor oppervlakte en omtrek met de gegeven getallen in de afbeeldingen: hij is hier aan het reflecteren of zijn tussenantwoord klopt.
- (Opdracht 3) Wanneer de leerling een formule krijgt zonder kwadraat gaat hij bijsturen, hij verwachtte namelijk een kwadraat dus zijn antwoord tot nu toe klopt waarschijnlijk niet. Hij controleert of zijn parabool aanname klopt door getallen in te vullen om de oppervlakte te berekenen en te kijken of deze inderdaad kleiner wordt. Hij evalueert/ reflecteert hier.
- (Opdracht 3) De leerling ziet in dat zijn antwoord van -2m hek niet klopt, hij is hier opnieuw zijn antwoord aan het reflecteren.

Leerling 2 van de testgroep heeft in totaal 4 punten gehaald.

Bij leerling 2 van de controlegroep zijn de dingen die opvallen per opdracht:

- (Opdracht 1) Hij leest de vraag en bedenkt hierna een plan van aanpak voordat hij begint. Hij begint dus met plannen hier, denkt te weten wat hij moet doen, en gaat verder.
- (Opdracht 1) Wanneer de leerling een eindantwoord heeft, reflecteert hij of dit antwoord kan kloppen door de vraag opnieuw te lezen en te kijken wat er gevraagd werd.

- (Opdracht 2) Na het lezen van vraag 2 begint de leerling met oriënteren: Wat is gegeven en wat weet ik hierover. Hierna maakt hij een plan van aanpak om mee te beginnen.
- De leerling houdt ondertussen in te gaten wat zijn gegevens zijn en waar hij naartoe wil. Hij zegt bijvoorbeeld dat lijn l loodrecht moet snijden en dat dit nu nog niet per se het geval is. Hij is hier dus aan het monitoren.
- Hij concludeert dat zijn antwoord niet klopt aangezien $rc_l \cot rc_k$ nu niet op -1 uitkomt. Hij is hier dus aan het reflecteren en bijsturen: zijn berekening leidt niet tot de juiste oplossing want het is niet logisch.
- De leerling kijkt terug naar de vraag en ziet dat lijn l $f(x)$ raakt. Hij ziet dat het daarom logisch is dat er -3 uit zijn uitwerking komt. Hij is aan het evalueren: wat hij heeft gedaan is fout en hij weet nu waarom.
- (Opdracht 2) Hij concludeert dat het beter is om de eerste opdracht even te laten rusten en gaat door naar opgave 3. Ook dit zou als bijsturen opgevat kunnen worden: wat hij aan het doen is leidt voor nu tot niks.
- (Opdracht 2) Wanneer hij terug gaat naar opdracht 2 leest hij de vraag nogmaals aandachtig en maakt hij een schets van de situatie. Hij is opnieuw aan het oriënteren: Wat is er gegeven/ wat weet ik allemaal. Daarnaast kan dit ook opgevat worden als evalueren: Heb ik tot nu toe alles wel goed begrepen?
- (Opdracht 2) Hij zegt dat hij nog een variabele b moet bereken, maar loopt vast bij het bedenken hoe hij dit moet doen. Hij gaat wat dingen proberen. Dit valt onder plannen.
- (Opdracht 2) Hij zegt op het einde dat hij het niet ziet. Dit valt onder bijsturen: Wat hij aan het doen is leidt allemaal niet tot de juiste oplossing.
- (Opdracht 3) De leerling controleert of de gegevens in de afbeelding overeenkomen met de antwoorden uit zijn formules. Hij is hier dus aan het reflecteren of zijn formules kloppen.
- (Opdracht 3) Wanneer hij op een eindantwoord is uitgekomen, vult hij de getallen in, in zijn formule voor de oppervlakte, en kijkt hij of deze inderdaad groter dan de gegeven oppervlakte is. Hij is hier aan het reflecteren of zijn antwoord kan kloppen.

Leerling 2 van de controlegroep heeft in totaal 5 punten gehaald.

Wanneer de leerlingen 1 van de test- en controlegroep met elkaar vergeleken worden met betrekking tot Tabel 8, ziet men dat beide leerlingen alle vaardigheden, behalve evalueren, wel een keer leken te gebruiken. Wanneer de frequentie van de vaardigheden vergeleken wordt, valt het op dat de leerling van de testgroep vaker metacognitieve vaardigheden gebruikt dan de leerling van de controlegroep. Daarnaast valt op dat de leerling uit de controlegroep soms juist géén metacognitieve vaardigheden gebruikt wanneer deze wel verwacht werden. De leerling uit de controlegroep heeft beter gescoord op de toets zelf.

Wanneer leerlingen 2 van de test- en controlegroep met elkaar vergeleken worden met betrekking tot Tabel 8, ziet men dat beide leerlingen alle vaardigheden wel een keer leken te gebruiken. Wanneer de frequentie vergeleken wordt, zien we dat de leerling uit de testgroep vaker metacognitieve vaardigheden gebruikt dan de leerling uit de controlegroep. De leerling uit de controlegroep heeft beter gescoord op de toets zelf.

Wanneer leerlingen 1 met leerlingen 2 vergeleken worden, zien we dat leerling 2 uit de test groep het vaakst metacognitieve vaardigheden laat zien, leerling 1 uit de testgroep daarna, gevolgd door leerling 2 uit de controlegroep en daarna pas leerling 1 uit de controlegroep. De leerlingen 2 hebben dus gemiddeld per duo vaker metacognitieve vaardigheden laten zien dan leerlingen 1. De leerlingen 2 hebben beter gescoord op de toets zelf dan de leerlingen 1.

	Oriënteren	**Plannen**	**Monitoren**	**Bijsturen**	**Evalueren**	**Reflecteren**
Leerling 1 tg	X (4x)	X (4x)	X (2x)	X (4x)		X (1x)
Leerling 1 cg	X (3x)	X (2x)	X (1x)	X (2x)		X (1x)
Leerling 2 tg	X (6x)	X (3x)	X (1x)	X (2x)	X (2x)	X (8x)
Leerling 2 cg	X (2x)	X (2x)	X (1x)	X (3x)	X (2x)	X (4x)

Tabel 8: Overzicht van de door auteur geobserveerde metacognitieve vaardigheden van de leerlingen tijdens de hardop-denksessie, waarbij tg=testgroep en cg=controlegroep.

7 Discussie en aanbevelingen

Wanneer de resultaten van de formatieve toets bekeken worden, moet er geconcludeerd worden dat de nulhypothese niet verworpen mag worden: er is onvoldoende bewijs dat de testgroep beter scoort dan de controlegroep en dus onvoldoende bewijs dat de testgroep een beter probleemoplossend vermogen heeft dan de controlegroep. Deze conclusie is getrokken op basis van de t-toets, maar ook al zonder deze toets kon deze conclusie getrokken worden aangezien de controlegroep beter scoorde op de formatieve toets dan de testgroep. Wanneer de resultaten van de hardop-denksessie vergeleken worden, lijken de leerlingen uit de testgroep wel vaker gebruik te maken van metacognitieve vaardigheden dan de controlegroep. Echter kan dit verschil ook komen doordat de leerlingen van de testgroep bijvoorbeeld iets vaker vastliepen, de leerlingen uit de controlegroep hebben per duo immers ook beter gescoord, en daardoor bijvoorbeeld de reflecterende metacognitieve vaardigheden (om terugkijkend tussenantwoorden te controleren) meer nodig hadden om verder te gaan. Wanneer er per leerling teruggekeken wordt naar de punten die opvielen tijdens de hardop-denksessie, kan men vooral zien dat leerling 2 uit de controlegroep inderdaad iets minder vaak vast loopt dan leerling 2 uit de testgroep. Bij leerlingen 1 kan men zien dat beide leerlingen vaak vastlopen, maar leerling 1 soms geen metacognitieve vaardigheden gebruikt hoewel deze wel verwacht werden. Aangezien de resultaten per duo niet eenduidig zijn, kan er geen conclusie worden getrokken: er is onvoldoende aanleiding om te geloven dat de leerlingen uit de testgroep over betere metacognitieve vaardigheden beschikken. Verder ziet men dat leerlingen 2 beter scoren op de toets en gemiddeld per duo vaker metacognitieve vaardigheden laten zien. Dit staat in lijn met de literatuur: betere domeinspecifieke kennis en metacognitieve vaardigheden zorgen voor een beter probleemoplossend vermogen (zie Sectie 1 Inleiding). Echter hadden door omstandigheden de leerlingen 1 vijf minuten minder tijd voor de toets dan de leerlingen 2. Het verschil in punten en het in totaal minder laten zien van metacognitieve vaardigheden kan mogelijk dus ook daardoor komen. Waarschijnlijk is dit echter niet het geval, wanneer er teruggekeken wordt naar het verloop van de hardop-denksessie. Men moet daarnaast bij het interpreteren van alle resultaten van dit onderzoek omtrent de hardopdenk-sessie opmerken dat het gebruik van metacognitieve vaardigheden van de leerlingen tijdens de hardop-denksessie lastig te kwantificeren was doordat het afging van de interpretatie van de auteur, en door de overlap tussen verschillende metacognitieve vaardigheden.

In Sectie 3.4 Methode-Analyse werd verder gesteld dat wanneer de testgroep de toets beter maakte, maar in de hardop-denksessie geen verandering in het gebruik van metacognitieve vaardigheden lieten zien, de verbetering waarschijnlijk komt door een verbetering in domeinspecifieke kennis. Hoewel er niet geconcludeerd kan worden dat de leerlingen uit de testgroep waarschijnlijk over betere metacognitieve vaardigheden beschikken, kan er ook niet geconcludeerd worden dat de leerlingen uit de testgroep überhaupt betere probleemoplossers zijn geworden. Hierdoor kan er ook niet geconcludeerd worden dat de leerlingen een betere domeinspecifieke kennis verkregen hebben. Om te kunnen zeggen of de domeinspecifieke kennis van de leerlingen wel of niet verbeterd is, zou men kunnen overwegen naar de resultaten van de hoofdstuktoets te kijken. Domeinspecifieke kennis is namelijk gedefinieerd als de kennis van o.a. definities, eigenschappen en (reken)technieken (zie Sectie 1 Inleiding), en deze worden vooral in de hoofdstuktoets getest. De controlegroep had een gemiddeld cijfer van 4.6 voor de hoofdstuktoets, en de testgroep een 5.3. De testgroep heeft dus gemiddeld 0.7 punt hoger gescoord dan de controlegroep en dit zou erop kunnen wijzen dat de leerlingen uit de testgroep een betere domeinspecifieke kennis hebben dan de leerlingen uit de controlegroep. Het is echter tegen verwachtingen van literatuur in dat de leerlingen wél een betere domeinspecifieke kennis zouden hebben, maar géén beter probleemoplossend vermogen. Daarnaast is opgemerkt dat de leerlingen die goed op de hoofdstuktoets scoren (en dus een betere domeinspecifieke kennis zouden hebben) niet per se beter op de formatieve toets scoren. Dit is dus ook tegen verwachtingen van literatuur in. Dit zou mogelijk het belang van goede metacognitieve vaardigheden in probleemoplossend vermogen dus aannemelijker maken. Echter zou, voor een goede vergelijking, de toets éérst geanalyseerd moeten worden of deze inderdaad de domeinspecifieke kennis van de leerlingen goed test, en dat ligt buiten het bereik van dit onderzoek. Er wordt aanbevolen hier verder naar te kijken/ een hoofdstuktoets mee te nemen in verder onderzoek.

Mogelijke oorzaken voor het 'falen' van de theoretische lessenserie in het verbeteren van probleemoplossend vermogen van leerlingen in de praktijk is de beperkte looptijd. In Sectie 4 Literatuurstudie (E9) wordt o.a. genoemd dat de effectiviteit duidelijk samenhangt met het aantal lessen: hoe meer lessen, des te groter de effecten. Vier lessen is erg weinig en dus misschien té weinig. Daarnaast hebben een paar leerlingen van de testgroep een les gemist door ziekte. Hierdoor zullen de resultaten van de test- en controlegroep dus mogelijk nog dichter bij elkaar liggen. Ten tweede zou een mogelijke verklaring de tijd kunnen zijn die de metacognitieve opdracht in de les inneemt. Doordat deze toch vaak langer duurt dan de 'normale' herhaling zou duren (en doordat er bijvoorbeeld tijdens de eerste les veel tijd naar introductie ging) hebben de leerlingen minder tijd gehad om de nieuwe stof te behandelen, waardoor dit de winst van de metacognitieve vraag misschien weer iets uitdempt. Een derde verklaring zou de groepsgrootte kunnen zijn. Een test-groepsgrootte van 7 en een controle-groepsgrootte van 6 leerlingen is natuurlijk niet veel en zou mogelijk niet representatief kunnen zijn voor een grotere groep leerlingen. Daarnaast valt het bijvoorbeeld in de hardop-denksessie op dat de leerlingen allemaal een eigen manier van aanpak hebben, en andere metacognitieve vaardigheden vaker gebruiken. Zo is de ene leerling veel aan het bijsturen, de andere aan het oriënteren met een situatieschets en weer een andere reflecteert zorgvuldig zijn tussenstappen. Een groter aantal leerlingen waarmee deze sessie gedaan wordt, zou hier dus ook meer representatieve resultaten voor de gehele groep geven. Al met al wordt er aanbevolen het onderzoek nog een keer uit te voeren met een langere looptijd en grotere groepen. Daarnaast zou er overwogen kunnen worden de 'nieuwe theorie' tijdens een metacognitieve les te bespreken en deze wat meer uit te spreiden over andere lessen.

Alles bijeengenomen is het daarnaast lastig om aan de resultaten van dit onderzoek suggesties voor de praktijk te koppelen. Wanneer men echter de ontwikkelde materialen van dit onderzoek wilt gebruiken in de praktijk, in een poging probleem oplossend vermogen van leerlingen te testen, moet men zich vooral realiseren dat denkactiviteit relatief is (zie Sectie 4.1 in de literatuurstudie). Het beroep dat een opgave doet op denkactiviteiten hangt namelijk af van de voorkennis van de leerling, en in dit onderzoek is het methodeboek als enige kennisbron verondersteld. Wanneer leerlingen al eerder hebben geoefend met opdrachten die dezelfde stappen vereisen als de inzichtopgaven uit dit onderzoek, zal het probleemoplossend vermogen dan ook niet meer getest worden aangezien de inzichtopgaven uit dit onderzoek voor hen enkel routine-opgaven zijn geworden.

8 Conclusie

In dit onderzoek is een theoretische lessenserie, gebaseerd op literatuur, ontworpen met als doel het probleemoplossend vermogen van leerlingen te verbeteren. Het onderzoek heeft zich gefocust op het verbeteren van metacognitieve vaardigheden bij een testgroep, en had als hoofdvraag: Waar moet een lessenserie aan voldoen om leerlingen te ondersteunen in het verbeteren van hun probleemoplossend vermogen? Om deze hoofdvraag te beantwoorden zijn de volgende subvragen gesteld: Waar moeten opdrachten aan voldoen om probleemoplossend vermogen te verbeteren? en; Welke rol moet de docent aannemen om leerlingen te ondersteunen in het verbeteren van hun probleemoplossend vermogen? In een literatuurstudie zijn deze vragen theoretisch beantwoord en hier zijn aanknopingspunten uit gekomen die verwerkt zijn in een theoretisch werkende lessenserie. De lessenserie is ontworpen bij Hoofdstuk 6 van Getal en Ruimte, Differentiaalrekening, en is uitgevoerd in een 4e klas VWO wiskunde B, om de effectiviteit te testen. Een formatieve toets heeft naderhand het verschil in probleemoplossend vermogen van de leerlingen in de testgroep en een controlegroep in kaart gebracht, door punten te geven per denkstap. Met een eenzijdige t-toets zijn de resultaten van beide groepen vergeleken en uit deze resultaten kon niet geconcludeerd worden dat de testgroep naderhand een beter probleemoplossend vermogen had dan de leerlingen uit de controlegroep. Twee leerlingen uit de controlegroep en twee leerlingen uit de testgroep hebben dezelfde formatieve toets in een hardop-denksessie afzonderlijk van elkaar gemaakt om de metacognitieve vaardigheden van de leerlingen te kunnen vergelijken. Ook hieruit is geen duidelijk verschil te concluderen. De oorzaken voor het 'falen' van de lessenserie in de praktijk voor het verbeteren van probleemoplossend vermogen bij leerlingen zou onder meer kunnen komen door de kleine groepsgrootte en beperkte looptijd. Literatuur wijst immers op het belang van langere looptijd op de effectiviteit in aanleren van metacognitieve vaardigheden. Meer onderzoek is daarom aanbevolen met een langere looptijd en grotere test- en controlegroep.

Referenties

Anderson and Krathwohl (2001), 'Herziene taxomonie van de leerdoelen van bloom'. (Hoewel misschien niet volledig naar de originele versie).
URL: *https://expertisecentrum-kunsttheorie.nl/wp-content/uploads/HERZIENE-TAXONOMIE-VAN-BLOOM.pdf*

Ashman, G. (2017), 'Filing the pail: What is the most useless problem solving strategy?'. (Accessed: 19.4.2023).
URL: *https://gregashman.wordpress.com/2017/07/20/what-is-the-most-useless-problem-solving-strategy%EF%BB%BF/*

Barton, G. (2018), *Volgens Barton, Lesgeven in wiskunde aan de hand van wetenschap, experts en 12 jaar aan mislukkingen (vertaling)*, Phronese, chapter 9 Probleem oplossen en zelfstandigheid, pp. 81–126.

Bloom, B. S. (1956), 'Taxomony of educational objectives, the classification of educational goals'.

Bor, M. and Drijvers, P. (2015), 'Wiskundig denken: A way of life', *Euclides* **91**(3), 34–35.

Cho, H. C. and Abe, S. (2013), 'Is two-tailed testing for directional research hypotheses tests legitimate?', *Journal of Business Research* **66**(9), 1261–1266.
URL: *http://dx.doi.org/10.1016/j.jbusres.2012.02.023*

cTWO (2012), 'ctwo 2004-2012: vernieuwingscommissie wiskunde'. (Accessed: 20.4.2023).
URL: *https://www.fi.uu.nl/ctwo/*

de Vries, M. B. and Drijvers, P. (2015), 'Handreiking denkactiverende wiskundelessen'.

Dignath, C. and Büttner, G. (2008), 'Components of fostering self-regulated learning among students. a meta- analysis on intervention studies at primary and secondary school level'.

Dijkhuis, J. H., de Jong, G., Houwing, H. J., Kuis, J. D., ten Klooster, F., de Waal, S. K. A., van Braak, J., Liesting-Maas, J., Wieringa, M., Hiele, R. D., Romkes, J. E., Haneveld, M., Voets, S., Vos, M., van Haren, J., van Laarhoven, B. W. and Meijerink, R. (2020), *Getal en Ruimte, Leerboek wiskunde B VWO deel 1*, 12 edn, Noordhoff Uitgevers, chapter 6. Differentiaalrekening, pp. 109–138.

Drijvers, P. (2011), 'Wat bedoelen ze toch met... denkactiviteiten', *Nieuwe Wiskkrant* **31**(2).

Drijvers, P., van Streun, A. and Zwaneveld, B. (2012*a*), *Handboek Wiskunde Didactiek*, Epsilon Uitgaven, chapter 1.4.2 Cognitieve schema's, pp. 26–30.

Drijvers, P., van Streun, A. and Zwaneveld, B. (2012*b*), *Handboek Wiskunde Didactiek*, Epsilon Uitgaven, chapter 4. Afgeleide, pp. 109–138.

Euclides (2006), 'Bewijzen en redeneren', *Euclides, vakblad voor leraren* **81**.

Goorda, G. (2012), 'Ontwikkeling in verandering: Ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid van leerlingen met betrekking tot het concept afgeleide'.

Kaur, M. (2023), 'Using bloom's taxonomy for math outreach within and outside the classroom', *Journal of Humanistic Methematics* **13**(1).

Kistner, S., Otto, B., Rakoczy, K. and Dignath, C. (2010), 'Promotion of self-regulated learning in classrooms: Investigating frequency, quality, and consequences for student performance'.

Leraar24 (n.d.), 'Directe instructie leidt tot betere leerlingresultaten'. (Accessed: 6.7.2023).
URL: *https://www.leraar24.nl/2622538/directe-instructie-leidt-tot-betere-leerlingresultaten/*

Lester, F. K., Garofalo, J. and Kroll, D. L. (1989), 'The role of metacognition in mathematical problem solving: A study of two grade seven classes, final report.'.

Lester, F. K. J. and Cai, J. (2016), 'Can mathematical problem solving be taught? preliminary answers from 30 years of research'.

Lucassen, M. (2018), 'De taxonomie van bloom: inhoudelijk goed, maar vaak fout gebruikt'. (Accessed: 6.7.2023).
URL: *https://www.vernieuwenderwijs.nl/de-taxonomie-van-bloom-vaak-verkeerd-gebruikt-maar-zo-werkt-het-wel/*

McGowen, M. and Tall, D. (2010), 'Metaphor or met-before? the effect of previous experience on the practice and theory of learning mathematics'.

Pak-Hong, C. G. (2012), 'Problem-solving strategies: Research findings from mathematics olympiads'.

Polya, G. (1945), *How to Solve it*, Priceton University Press.

Quigley, A., Muijs, D. and Stringer, E. (2018), 'Metacognition and self-regulated learning, guidance raport'.
URL: *https : //dera.ioe.ac.uk/id/eprint/31617/1/EEF_Metacognition_and_self − regulated_learning.pdf*

Roorda, G. (2023), 'Meet-up over probleemoplossen'.

Roorda, G., de Vries, S. and Smale-Jacobse, A. (2023), 'Teaching through problem-solving en lesson study'.

Schoenfeld, A. H. and Grouws, D. (2992), *Handbook for Reseach on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, chapter 15 Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics, pp. 334–370.

Skemp, R. R. (2006), 'Relational understanding and instrumental understanding', *Mathematics Teaching in the Middle School* **12**(2), 88–95.

SLO (2020*a*), 'Slo, een doordacht curriculum doen we samen: Probleemoplossend denken en handelen'. (Accessed: 19.4.2023).
URL: *https://www.slo.nl/thema/meer/21e-eeuwsevaardigheden/probleemoplossend/#:~:text=Probleemoplossend%20denken%20en%20handelen%20is,het%20probleem%20op%20te%20lossen.*

SLO (2020*b*), 'Slo, een doordacht curriculum doen we samen: wiskundige denkactiviteiten'. (Accessed: 19.4.2023).
URL: *https://www.slo.nl/thema/meer/hogere-denkvaardigheden/wiskunde/denkactiviteiten/*

Sweller, J., Clark, R. and Kirschner, P. A. (2010), 'Mathematical ability relies on knowledge, too', *American Educator* **34**(4), 34–35.

Takahashi, A. (2021), *Teaching Mathematics Through Problem-Solving*, 1 edn, Routledge.

The learning center, University of North Carolina a Chapel Hill (n.d.), 'Higher order thinking: Bloom's taxonomy'. (Accessed: 6.7.2023).
URL: *https://learningcenter.unc.edu/tips-and-tools/higher-order-thinking/*

Thijs, A., Fisser, P. and van der Hoeven, M. (2014), '21e eeuwse vaardigheden in het curriculum van het funderend onderwijs'.

Timmer, M. and Caspers, W. (2022), 'How he wishes he'd taught maths: Craig barton on improving your teaching, lethal mutations and problem solving.', *Nieuw archief voor wiskunde* **23**(5), 218–225.

Tricot, A. and Sweller, J. (2014), 'Domain-specific knowledge and why teaching generic skills does not work.', *Springer* **26**(2), 265–283.

van Bruggen, W., Pijpers, R., Stiller, L. and Boeke, H. (2016), 'Computational thinking in het nederlandse onderwijs'.

van der Meulen, W. (2023), 'College vakdidactiek 2: Modelleren en computational thinking (ct)'.

van der Vegt, A. and Kramer, D. (2020), 'Wat is de effectiviteit van het directe instructiemodel op de leervorderingen van leerlingen, vooral in het voortgezet onderwijs?'.
URL: *https://www.kennisrotonde.nl/sites/kennisrotonde/files/migrate/266-antwoord-directe-instructie.pdf*

van Hout-Wolters, B. (2011), 'Meer aandacht voor denkvaardigheden van leerlingen'. Afscheidscollege Universiteit van Amsterdam.
URL: $https://www.researchgate.net/publication/262532747\_Meer\_aandacht\_voor\_denkvaardigheden\_van\_leerlingen\_Afscheidscollege\_Universiteit\_van\_Amsterdam\_9-11-2011$

van Streun, A. (2002), 'Het denken bevorderen', *Nieuw archief voor wiskunde* **5**(4), 294–301.

A Ethiek aanvraag

A.1 Algemene brief inlichting ouders en leerlingen

Zie 1 pagina verder

A.2 brief goedkeuring leerlingen deelnemers hardop-denk-sessie

Zie 2 pagina's verder

A.3 brief goedkeuring ouders deelnemers hardop-denk-sessie

Zie 3 pagina's verder

Beste ouder/verzorger,

Jullie zoon/dochter volgt het vak wiskunde B op school. Vanaf afgelopen februari loopt Renske Pijnenburg stage bij mij en die stage vindt deels plaats in 4 vwo wiskunde B, de groep van jullie kind. Voor haar afstudeeropdracht heeft ze een lessenserie ontworpen behorende bij hoofdstuk 6, differentiaalrekening. En hiermee gaan we dan ook na de meivakantie beginnen.

Voor dit onderzoek zal de klas soms in tweeën gesplitst, waarschijnlijk 1 les per paragraaf en zal ik groep 1 lesgeven op de traditionele manier en zal groep 2 van Renske een les krijgen op een manier die - volgens de literatuur- probleemoplossend gericht werken zou moeten stimuleren, iets dat bij wiskunde B steeds meer een vereiste wordt naarmate we dichter bij het examen komen.
In beide groepen zullen er formatieve toetsen afgenomen worden waarmee de eventuele verschillen in resultaten van beide manieren van werken zichtbaar gemaakt worden. Daarnaast zullen een paar leerlingen van beide groepen geïnterviewd worden door Renske tijdens het maken van de formatieve toetsjes. De resultaten zullen anoniem worden verwerkt in het onderzoek.

De eindtoets over het hoofdstuk, die wél mee zal tellen, zal over de stof gaan die in de reguliere lessen behandeld wordt en op een manier die alle leerlingen gewend zijn, dus elke leerling zal even goed voorbereid zijn op deze toets (als het aan ons ligt). Ook zullen beide groepen evenveel huiswerk krijgen, dus ook daar geen verschillen.

Mochten de resultaten van Renske een enorm positief beeld geven en een extra leeropbrengst hebben, dan zal ik de werkwijze voor hen die het goed bevalt ook aan gaan bieden.

Als u akkoord gaat met de vervangingslessen en gebruik van het werk van uw kind voor het verder verbeteren van het lesmateriaal, dan hoeft u niets te doen. Mocht u hier wel bezwaren tegen hebben, dan kunt u dat kenbaar maken via een e-mail aan mij (b.bollen@piusx.nl). Uiteraard kan uw zoon/dochter zelf nog op ieder moment beslissen niet aan het onderzoek te willen deelnemen. Ik hoop u hiermee voldoende te hebben geïnformeerd. Voor vragen kunt u ook contact opnemen via het bovengenoemde e-mailadres.

Met vriendelijke groet,

Bert Bollen

Beste leerling,

Jullie hebben in de meivakantie een brief gelezen over de lessenserie van mij, Renske Pijnenburg, stagiair wiskunde bij vakdocent Bert Bollen. Je bent geselecteerd voor een interview dat gaat over de inhoud van de lessenserie. In het interview zal je de formatieve toets, die al eerder door de rest van de klas gemaakt zal worden, hardop denkend maken. De interviews zullen worden opgenomen (audio) om het mogelijk te maken deze later te transcriberen. Vanzelfsprekend hebben je antwoorden geen effect op je beoordeling en wordt alles vertrouwelijk behandeld (voor de toets krijgen jullie geen cijfer). De opnamen en transcripties zullen geanonimiseerd worden opgeslagen. Ook eventuele interessante resultaten uit de verslagen zullen anoniem worden verwerkt in het onderzoek.

Volgens de standaard ethiek-procedure moet voor het bovenstaande officieel toestemming zijn gegeven door jou zelf. Als je akkoord gaat met het interview en het gebruik van de resultaten in het onderzoek, wilt je dan deze brief (digitaal) ondertekenen en terug sturen? Wanneer je niet akkoord gaat, hoor ik dit ook graag. Ik ontvang graag uiterlijk donderdag 22 juni om 9:00 een reactie aangezien de interviews later die dag zullen plaatsvinden.

Alvast bedankt!

Met vriendelijke groet,

Naam: ……………………………………………

Naam leerling: ……………………………………

Handtekening: ……………………………………………

Beste ouder/verzorger,

Jullie hebben in de meivakantie een brief gelezen over de lessenserie van mij, Renske Pijnenburg, stagiair wiskunde bij vakdocent Bert Bollen. Uw zoon/dochter is geselecteerd voor een interview dat gaat over de inhoud van de lessenserie. In het interview zal uw zoon/ dochter de formatieve toets, die al eerder door de rest van de klas gemaakt zal worden, hardop denkend maken. De interviews zullen worden opgenomen (audio) om het mogelijk te maken deze later te transcriberen. Vanzelfsprekend hebben de antwoorden van de leerlingen geen effect op hun beoordeling en wordt alles vertrouwelijk behandeld (voor de toets krijgen de leerlingen geen cijfer). De opnamen en transcripties zullen geanonimiseerd worden opgeslagen. Ook eventuele interessante resultaten uit de verslagen zullen anoniem worden verwerkt in het onderzoek.

Aangezien uw zoon/ dochter nog geen 16 is, moet volgens de standaard ethiek-procedure toestemming zijn gegeven door de ouders. Als u akkoord gaat met het interview en het gebruik van de resultaten in het onderzoek, wilt u dan deze brief (digitaal) ondertekenen en terug sturen? Wanneer u niet akkoord gaat, hoor ik dit ook graag. Ik ontvang graag uiterlijk donderdag 22 juni 9:00 een reactie aangezien de interviews later die dag zullen plaatsvinden.

Alvast bedankt!

Met vriendelijke groet,
Renske Pijnenburg

Naam: ……………………………………………

Naam leerling: ……………………………………

Handtekening: ………………………………………

B Slides gebruikt in de eerste interventieles voor de inleiding van domeinspecifieke kennis en metacognitieve vaardigheden

Figuur 9: Slide bij eerste interventie les voor de verdere inleiding van het onderzoek

Figuur 10: Slide bij eerste interventie les voor de verdere inleiding van metacognitieve vaardigheden

C Formatieve toets

C.1 Formatieve toets

Zie 1 pagina verder

C.2 Nakijkmodel Formatieve toets

Zie 2 pagina's verder

Klas : 4VB
Formatieve toets : HOOFDSTUK 6
Tijd : 30 MINUTEN

PIUS X COLLEGE

- Wanneer je er niet uit komt, probeer dan in ieder geval zo veel mogelijk op te schrijven (óók je probeersels die op niets uitkwamen, met eventuele onderbouwing waarom ze niet werkte).
- Je mag tekenen op dit blad

Opdracht 1

Gegeven zijn de functies $f_p(x) = (x - p)^3 - x^2$. Stel de formule op van de kromme waarop alle buigpunten van de grafiek van f_p liggen.

Opdracht 2

Gegeven is de parabool $f(x) = -x^2 + x$, en de lijn $l: y = -3x + 4$. De lijn l raakt $f(x)$ als $x = 2$. Geef de formule van de raaklijn k aan $f(x)$, die lijn l loodrecht snijdt.

BONUS: Opdracht 3 ***(Begin pas aan opdracht 3 wanneer je klaar bent met opdracht 1 en 2)***

Een boer heeft 15 meter hek in zijn bezit. Hij wil hiermee een zo groot mogelijk rechthoekig stuk land afzetten voor zijn kippen. Daarom kiest hij een slimme locatie: Hij gebruikt een muur als een van de zijkanten van het stuk land, zodat hij slechts voor drie zijkanten hekken nodig heeft.

In figuur 1 zie je bovenaanzichten van twee mogelijke manieren om het stuk land af te zetten met 15 meter hek, waarbij je een muur gebruikt als één zijkant.

Figuur 1

De linker afzetting heeft een oppervlakte van $2 \cdot 11 = 22m^2$ en de rechter van $3 \cdot 9 = 27m^2$. Blijkbaar maakt het uit hoe het hekwerk gepositioneerd wordt.

Gebruik differentiëren om te bepalen hoe de boer het best het hekwerk kan plaatsen om een rechthoekig gebied te krijgen met een zo groot mogelijke oppervlakte.

Klas : 4VB
Formatieve toets : HOOFDSTUK 6
Tijd : 30 MINUTEN

PIUS X COLLEGE

NAKIJKMODEL

Opdracht 1

$f_p'(x) = 3(x-p)^2 - 2x$

$f_p''(x) = 6(x-p) - 2 = 6x - 6p - 2$

$f_p''(x) = 0 \qquad 6x - 6p - 2 = 0$ 1p

$p = x - \frac{1}{3}$ 1p

$k(x) = (x - x - \frac{1}{3})^3 - x^2 = -\frac{1}{27} - x^2$ 1p

Opdracht 2

k snijdt l loodrecht, $rc_l \cdot rc_k = -1$, $rc_k = \frac{1}{3}$, $k: y = ax + b = \frac{1}{3}x + b$ 1p
$f'(x) = -2x + 1$
waar is de helling van $f(x)$ gelijk aan $\frac{1}{3}$? $f'(x) = \frac{1}{3}$, $-2x + 1 = \frac{1}{3}$ 1p
$x = \frac{1}{3}$, dus op $x = \frac{1}{3}$ hebben $f(x)$ en k dezelfde helling
$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$, dus k gaat door $(\frac{1}{3}, \frac{2}{9})$, want k moet f raken. 1p
k: $\frac{1}{3}x + b = \frac{2}{9}$, $b = \frac{1}{9}$ 1p
k: $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}$

Opdracht 3

$Heklengte = 2l + b$, $opp = l \cdot b$ 1p
$2l + b = 15$ 1p
$b = 15 - 2l$, $opp = l \cdot (15 - 2l)$ 1p
maximaal wanneer $opp' = 0$, $15 - 4l = 0$ 1p
$l = \frac{15}{4} = 3.75$
$b = 15 - 2 \cdot \frac{15}{4} = 7.5$

D Hardop-denk-sessie

D.1 Leerling 1 testgroep, 25 minuten

De leerling begint eerst aan opdracht 1. Ze leest de opdracht en bedenkt een plan van aanpak: "Afgeleide vinden, dan p apart halen en invullen in de grafiek". Het komt er wat hakkelig uit qua formulering, hoewel dat waarschijnlijk komt door het hardop moeten werken voor deze sessie. De leerling schrijft nu redelijk op automatische piloot verder. Ze berekent in stilte de afgeleide m.b.v. de kettingregel en werkt de haakjes uit. Hierna stelt ze de afgeleide impliciet gelijk aan nul door alle termen met een p naar één kant te halen, en alle termen zonder een p naar de andere kant van het =-teken. Hier maakt ze een klein slordigheidsfoutje met betrekking tot een min-teken. Hier loopt ze vast: "Ik moet nu proberen de p, [van de] p^2 en px, (om die) vrij te maken, maar hoe?"De leerling denkt op dit punt nog even na, kijk nog een keer naar de vraag, en vraag of ze ook deze vraag even mag laten liggen en naar de volgende vraag mag gaan. Ik antwoord dat dit mag en vraag aan haar om te vertellen wat haar de keuze heeft doen maken om toch door te gaan met de volgende vraag. Hierop antwoord ze: "omdat ik een p in het kwadraat heb en een px, en die p moet ik vrij krijgen, maar ik snap nog niet hoe."

De leerling begint aan opdracht 2 door eerst de vraag te lezen en benoemt hierna dat bij opdracht 2 er dus twee regels gelden, namelijk $f(x) = g(x)$ en $f'(x) \cdot g'(x) = -1$. Hierna verandert ze de $g(x)$ en $g'(x)$ naar l en l': "oh dit moet niet g maar l zijn, ik ben g gewend."Ze schrijft eerst de formules voor f en l op en rekent van beide de afgeleide uit. Daarna vult ze de eerder genoemde regels in met de bijbehorende formules. Ze zegt dat de tweede haar het makkelijkst lijkt en ze dus daarmee begint. Ze komt hier op $x = \frac{2}{6}$ uit. Ze pakt de toets er nog eens bij en vraagt of ze daarop mag schrijven. De vraag wordt nogmaals doorgelezen, waarna de leerling concludeert dat ze de vraag eerder verkeerd gelezen heeft. Ze leest nu de vraag nog eens een paar keer gedetailleerd door. Ze concludeert: "Dus lijn k moet l snijden ... dus daarmee moet ik de a uitrekenen van die raaklijn ... van k en ... oké dan gaan we daar eerst mee beginnen."(Hierin stellen "..."kleine stiltes voor.) Ze heeft nu wat bijschrift op het toetsblad gezet. Hierna schrijft ze de algemene vorm op voor lijn k ($k : y = ax + b$), en dat de afgeleide gelijk moet zijn aan a ($k' : y' = a$). Ze leest de vraag nogmaals en is wat verward: "Ooh oké er kan dus maar één punt zijn ... omdat lijn l $f(x)$ maar op één punt raakt, weet je ook dat dat punt waar ze loodrecht snijden datzelfde punt moet zijn ... of nee? Jawel want het is een raaklijn. Wacht. Begrijpend lezen dit!"Ze leest de vraag nog een paar keer en maakt nu een (kloppende) schets van de situatie. Ze schrijft $k' \cdot l' = -1$, rekent a uit en vervolgt nadenkend:"Oke dan moet ik b nog uitrekenen. Hoe reken ik b uit?" Ze denkt even na en redeneert hardop: "Oke we hebben $f(x)$ ... ooh moet er dan niet een $f(x)$ gelijk zijn aan $\frac{1}{3}$ want dat is de ... uhm richtingscoëfficiënt die ik heb uitgerekend. Maar wat heb ik daaraan? ... Dan reken ik een x uit, met de y coördinaat kan, ... met die x en y kan ik een p uitrekenen."De leerling stelt nu $f(x) = \frac{1}{3}$ en wilt $f(x)$ ontbinden. Daarna bedenkt ze zich dat dit niet werkt aangezien ze de formule éérst gelijk moet stellen aan nul, want "x keer nul kan nooit $\frac{1}{3}$ zijn."Ze is nu iets verward en streept het probeersel met de ontbinding weer door. Ze haalt nu de $\frac{1}{3}$ naar de andere kant zodat er 'is gelijk aan nul' komt te staan en gaat de abc-formule toepassen. Hierna zegt ze: "merk je dat ik maar wat aan het proberen ben?" Ze schrijft de discriminant uit en schrijft daarna één mogelijke term voor x uit. Hierna loopt ze echter vast: " oke met de abc-formule kom je op een heel raar antwoord."Ze kiest ervoor weer kort even naar opdracht 1 te kijken.

Ze controleert haar eigen uitwerking van opdracht 1 nog een keer en vertelt dat ze (hoewel onzeker over haar eigen antwoord), om p apart te schrijven, misschien de termen met een x als getal moet zien. Hier stopt echter de tijd voor de leerling en ze schrijft nog snel op welke termen ze als a, b en c zou zien wanneer ze de abc-formule zou toepassen. Bij opgave 2 schrijft ze nog snel op dat ze d.m.v. $f(x) = 1/3$ eigenlijk een x-coördinaat wilde uitrekenen om coördinaten te berekenen en daarmee b uit te rekenen.

D.2 Leerling 1 controlegroep, 25 minuten

De leerling bedenkt terwijl ze al begint met schrijven een aanpak: eerst de afgeleide uitrekenen met de kettingregel (aangezien dat makkelijker gaat), en daarna aangezien er naar buigpunt wordt gevraagd, de "afgeleide van de afgeleide"berekenen. Dit schrijft ze uit, en de dubbele afgeleide stelt ze naderhand gelijk aan nul. Ze schrijft hierna p uit in termen van x, hoewel ze tussendoor een slordigheidsfoutje maakt. Daarna legt ze uit dat ze de gevonden p in termen van x weer invult "in de formule waar p staat". Echter vult ze p in in $f_p''(x)$ i.p.v. $f_p(x)$. Ze stelt deze formule gelijk aan nul, denkt even na en komt na uitschrijven uit op $x = \frac{1}{2}$: "... dat is het buigpunt." Ze denkt weer even na en vult de gevonden x in $f_p'(x)$. Hierna vult ze de gevonden x in $f_p(x)$. De tweede probeert ze met de 'papagaaienbek-methode' uit te werken, waarbij ze echter een aantal termen vergeet. Hierna loopt ze vast, en begint ze met het opschrijven van de coördinaten van een punt $A(\frac{1}{2}; ?)$. Ze slaat de pagina om en zegt: "Opdracht 2!", voor nu geeft ze het even op. Ik vraag haar waar ze op uit kwam wat haar heeft laten beslissen te stoppen voor nu met de eerste vraag. Ze antwoordt: "ja zeg maar, eerst had ik de p gevonden en dacht ik, ik vul 'm hier [de tweede afgeleide] in om 'm gelijk aan nul te stellen en dan vind ik de x. En toen had ik de x gevonden, die had ik ingevuld in de formule van de afgeleide. Hier kwam $(3-6p)-2$ als richtingscoëfficiënt uit." Ze vervolgt: "Maar misschien kan ik dan de p ook alvast invullen dat ik een andere richtingscoëfficiënt heb, dat ik ze beide heb. Maar eigenlijk omdat het om $f_p(x)$ gaat, hoef ik de x niet in te vullen. Dus dan vul ik de p-waarde in, in de richtingscoëfficiënt en dat gelijk stellen aan ... moet ik dat gelijk stellen aan nul? Hmm" Ik antwoord haar dat ze best mag doorgaan met opdracht 2 en ik mijn vraag meer stelde omdat ik haar gedachtegang wilde weten, ze mag zelf weten waarmee ze verder gaat. Ze kiest ervoor door te gaan met opdracht 2.

De leerling leest de vraag van opdracht 2 en zegt: "Dus ik weet al $l' \cdot k' = -1$ want ze snijden elkaar loodrecht ... Ik krijg de richtingscoëfficiënt en de lijn l raakt $f(x)$ als x is 2, dus dan raakt 'ie 'm bij het punt $f(2) = -(2)^2 + 2$ is gelijk aan $-4 + 2 = -2$, dus dan is het punt waar ze elkaar snijden. Punt A bijvoorbeeld is dan dus $(2, -2)$". De leerling rekent nu de afgeleide uit van $f(x)$ en vult hier $x = 2$ in. Hier komt $f'(2) = -2$ uit en ze concludeert dat dit de richtingscoëfficiënt is van lijn k. Ze schrijft de algemene vorm van lijn k op, $k : y = ax + b$ en vult $a = -2$ in. Ze vertelt dat deze lijn door punt $A(2, -2)$ moet gaan en rekent op die manier b uit. Ze rekent de afgeleide van lijn k en l uit: "Maar $-2 \cdot -3$ is niet gelijk aan -1 ... dus dan kan ik de lijnen gelijk stellen aan elkaar ... dus dan is $k(x) = l(x)$ ... $-2x + 2 = -3x + 4$" Ze denkt nu even na en vervolgt: "Ooh ik heb m al ... geef de formule van lijn k..." Ze krast $-2x+2 = -3x+4$ door en gaat weer terug naar vraag 1.

De leerling leest opdracht 1 nog eens door en zegt: "Dus p heb ik al, dus die vul ik in de formule van ... de afgeleide." Ze vult haar gevonden $p = \frac{1}{3}x$ in en vindt $f'_{\frac{1}{3}x}(x) = -\frac{2}{3}x$. Ze vervolgt dat ze eerder al had gevonden dat $x = \frac{1}{2}$, dus die vult ze hier weer in. Zo komt ze uit op $f'_{\frac{1}{3}x}(x) = -\frac{1}{3}$. Ze zegt dat ze het punt $A(\frac{1}{2}; ?)$ nu vindt door de p- en x-waarde in te vullen in $f(x)$. Ze doet dit en komt uit op $A(1/2, -53/216)$. Ze concludeert dat lijn k door dit punt heen moet gaan en berekent op deze manier b: "Dus dan is de formule $k = -\frac{1}{3}x - \frac{17}{216}$." Ze gaat door naar opgave 3.

De leerling leest opgave 3. Tijdens het lezen koppelt ze de tekst aan het plaatje dat erbij staat. Ze denkt even na en zegt: "Oke dus als wij deze kant a noemen en deze kant b dan heeft hij $2a$ $1b$."Ze vervolgt met: "$6a \cdot 9b = 27m^2$ en $4a \cdot 11b = 22$ ... het is keer dus ik kan ze niet zomaar aftrekken." Ze vraagt: "Moet ik zelf een 'dinges' bedenken?" Ik antwoord: "Ja, je moet zelf bedenken hoe je die hekken neer zou zetten, zodat het oppervlakte het grootst is." Ze probeert wat (waarbij de som inderdaad uitkomt op 15) en de tijd is op.

D.3 Leerling 2 testgroep, 30 minuten

De leerling zegt bij het zien van de vraag meteen al: " Ik zie gelijk een kettingregel en een parameter." Dan leest hij de vraag hardop en zegt dat hij eerst $f_p(x)$ opschrijft, dat doet hij altijd, en $f_p'(x)$

uitrekent, aangezien dat toch in dit hoofdstuk altijd moet. Na dit gedaan te hebben, checkt hij snel of hij geen foutje heeft gemaakt en vervolgt: "Die moeten we dan gelijk stellen aan nul en dan de p vrijmaken om in te vullen." Hij doet dit, en vereenvoudigt de vergelijking zo ver mogelijk. Hij brengt nu alle termen met een p naar één kant van het =-teken en alle termen zonder naar de andere kant: "Ik kan dan niet de p buiten haakjes halen ... kan wel trouwens ... oh nee kan trouwens niet want is niet gelijk aan nul." Hij denkt even na: "uhm, p vrijmaken was ik aan het doen." Hij denkt na, leest de vraag nogmaals en controleert zijn antwoord per regel. Hij concludeert dat zijn uitwerking klopt. "Ik kan wel een p buiten de haakjes halen denk ik. Hij doet dit en zegt: "Ja want als ik de haakjes zou wegwerken komt hetzelfde eruit ... dus uhm, en nu ... dit delen kan ik proberen?" Nu komt hij uit op $p = \frac{-3x^2+2x}{-6x+3p}$. "Dan zit hier nog een p die daar niet moet" Hij denkt na en concludeert: "Dit gaat niet werken", hij vervolgt: "Ik ga eerst die $f_p'(x)$ uitwerken, anders uitschrijven, misschien dat ik er wel uitkom." Na dit te doen, concludeert hij dat hij weer precies hetzelfde heeft als dat hij al had. "Er staat niet overal een x in, staat niet overal een p in, kan niks wegdelen." Hij gaat verder met het opnieuw gelijk stellen van $f_p'(x)$ aan nul, maar dit leidt ook niet tot nieuwe dingen. Hij maakt de keuze om verder te gaan met opdracht 2: "Misschien dat ik het dan wel zie zo meteen".

De leerling leest opdracht 2. Wanneer hij merkt dat er toch wel veel informatie in de vraag staat, leest hij de vraag nog een keer aandachtiger door: "Gegeven is de parabool $f(x) = -x^2 + x$ en de lijn $l : y = -3x + 4$, de lijn l raakt $f(x)$ als $x = 2$. Dus als $f'(x)$ uitrekenen, ja oke, uhm geef de formule van de raaklijn k die l loodrecht snijdt, oh uhm. Die l loodrecht snijdt, uhm, ja hoe gaan we dat doen?" Hij schrijft eerst $f(x)$ op en rekent $f'(x)$ uit. "Als we $f'(2)$ uitrekenen moet er als het goed is -3 uitkomen."Hij berekent dit, en concludeert dat het klopt. Hij schrijft nu de algemene formule van $k : y = ax + b$ op. "Ik zal wel alvast een punt waar ze snijden. Dus $f(2) = ... - 2$. We hebben een punt $A(2, -2)$, wacht dit is een raaklijn hé", hij leest snel de vraag nog eens door en gaat verder: "dus l snijdt f in punt $(2, -2)$."Hij denkt even na: "Dus dan hebben we ... A is dan ... kan wel even een vergelijking opstellen met A. [echter onduidelijk welke a hij bedoelt]"Hij denkt even na en schrijft verder: "Ja want als dan de RC van k keer RC van l is gelijk aan -1."Na verder uitwerken komt hij uit op $a = \frac{1}{3}$: "Dus dan hebben we $k : y = \frac{1}{3}x + b$. Vullen we A in". Hij schrijft verder en berekend door punt A in te vullen dat $b = -\frac{8}{3}$. "Dan zijn we er al, $k : y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$. Even kijken of dat klopt, als we daar 2 invullen, moet daar -2 uitkomen ... Ja dat klopt, mooi."

De leerling gaat nu weer terug naar vraag 1. Hij leest het eerste deel van de vraag nog eens door: "Gegeven zijn de functies ... eerst even kijken, heb ik dit goed gedaan? Heb ik f' goed uitgerekend? Ja dat klopt wel."Daarna leest hij het tweede deel van de vraag: "Stel de formule op van de kromme waarop alle buigpunten van de grafiek van f_p liggen. Gelijkstellen aan nul, ja dit heb ik net ook al uitgerekend ... $f_p'(x)$ is gelijk aan $3(x-p)^2-2x$ ... ik heb geen punt ofzo hé? Nee, dat is jammer..." Hij gaat wat radeloos verder: "Dan nu nog een keer oplossen, maar dan ga ik waarschijnlijk weer ergens de fout in ..."Hij leest de vraag nog eens door en checkt zijn antwoord. Hij probeert nu beide kanten van het =-teken te delen door 3, maar dit leidt ook niet tot iets dat hem verder helpt. "Kan ik niet gewoon uitdelen? Ik heb echt geen idee meer, ik weet ook niet waarom." Ik zeg hem dat hij ook verder mag gaan met 3 hoor, als hij geen ideeën meer heeft. Maar hij zegt dat hij het nog even wil proberen. Hij probeert verder te schrijven, maar zegt dat hij echt geen idee meer heeft: "uhm oke, opdracht 3 eerst."

De leerling begint met het lezen van de derde vraag. Terwijl hij dit doet koppelt hij de tekst aan de afbeeldingen. "Uhm, even denken hoor. Uhm nou je hebt dus om het oppervlakte te krijgen, oppervlakte = lengte keer breedte." Hij stelt zich nog even vragend af wat hij moet differentiëren maar beredeneert hierna wat er gebeurt met het oppervlakte als hij de lengtes en breedtes langer of korter maakt. Hij noemt de lengte nu x en de breedte y: "Dan is de oppervlakte xy. En dan ... is dat zo?" Hij maakt nu tekeningetjes op zijn uitwerkingen blad met verschillende lengtes en breedtes en concludeert hierna: "Dus zal dan wel een parabool zijn." Hij gaat verder: "Omtrek= $x + x + y$, en dat moet gelijk zijn aan 15. Ik weet dat dat niet helemaal de omtrek is. Dus als we dan $y = 15 - 2x$. en $y = -x$ ... ik weet nog steeds niet waar je moet differentiëren". Hij vervolgt: "x keer y is zo groot mogelijk, en de omtrek, dus omtrek is, mag ik hierop schrijven? $2x + y = 15$. Uhm ..." Hij probeert de x'en en y'en uit de plaatjes in te vullen in zijn formules voor oppervlakte en omtrek en concludeert dat dit klopt. "Ooh je moet dan differentiëren om de afgeleide te bepalen zodat je een maximum hebt ... maar ik heb geen formule ... uhm wat als ik gewoon, nee dat werkt niet. Uhm $y = -x$. Daar is de afgeleide van -1, [er] moet ergens een kwadraat denk ik zijn. Uhm, wat als ik 6 heb, dan heb ik 6 6 3, toch? Ja. Dan wordt 'ie kleiner, dus dan is het wel een parabool. Uhm. Oh uhm. $-2x + 15$ en daar is dan de afgeleide van, nee dat klopt ook niet, nee want je kan geen -2 meter hek hebben." Hij vult het toch in om te proberen maar concludeert dat dit ook niet klopt: "Ik heb echt geen flauw idee ... Als er hier één bij komt, dan komt er bij de y ... dan gaat er bij de y twee af. Ja. Dus dan krijg je ..."De leerling leest de vraag nogmaals. "$15 - 2x$ ..."Hij denkt na en geeft het een beetje op, de tijd is namelijk ook bijna op.

D.4 Leerling 2 controlegroep, 30 minuten

"Uhm dan moet ik, ga ik altijd eerst even denken, wat is het plan. Dus in dit geval de afgeleide uitrekenen en dan p vrijmaken en dan die p invullen in die formule." Hij begint met schrijven en vervolgt: "Dit kan ik het best doen met de kettingregel." Hij vereenvoudigt hierna de afgeleide, maar maakt hier een foutje. Hij gaat verder met uitschrijven en komt uit op $-\sqrt{6x} + x = p$. Hij vraagt zich hardop af of hij dit nog kan vereenvoudigen, maar concludeert van niet. Hij vult nu zijn gevonden p in in de formule voor $f_p(x)$. Hij leest de vraag nog een keer: "Dan is dit toch gewoon het antwoord? Volgens mij ... uhm ja volgens mij wel ... Ik heb nu een formule ... ja volgens mij wel ..." Ik antwoord dat ik vooral niks zeg. Hij leest de vraag nog een keer en gaat hierna door met opdracht 2.

De leerling leest vraag 2 aandachtig door. "Dus als die 'm loodrecht snijdt, dan was k' keer l' gelijk aan -1 en $f(x)$ is dan ... nee k is dan gelijk aan l." Hij leest het laatste deel van de vraag nogmaals en vervolgt: "Dus dan moet ik eerst even f accent uitrekenen." Hij doet dit. "En dan daar die 2 invullen want dan weet je de richtingscoëfficiënt op dat punt." Hij komt uit op $f'(2) = -3$. "k is dan $y = -3x + b$ ..." Hij denkt even na. "Even denken, ik kan nu die twee daar invullen en dan heb ik de y, dan kan ik b uitrekenen. Alleen dan moet lijn l loodrecht snijd[en], dat is dan nog niet zeker ..." De leerling vult $x = 2$ in in f, maakt een slordigheidsfoutje en komt uit op $f(2) = 2$. " Maar nu snijdt 'ie lijn l nog niet loodrecht." Hij denkt even na. Hij leest de vraag nog een keertje en concludeert dat -3 niet de richtingscoëfficiënt kan zijn van lijn k aangezien $-3 \cdot -3 = / = -1$. Hij denkt weer even na. "Ik heb geen flauw idee." Hij zegt dat hij misschien eerst weer even naar opgave 1 gaat kijken. Hij denkt na en vervolgt toch: "ohh lijn l raakt $f(x)$ als $x = 2$ ... oh ... dus l raakt $f(x)$ als $x = 2$, dus $\ldots$ oh dat is ookwel logisch dat dit -3 is, want dat is daar. Dit is fout." Hij leest nogmaals de vraag en denkt even na. Na opnieuw redeneren zegt hij geen flauw idee te hebben. Ik antwoord dat als hij echt niet verder komt hij ook met opdracht 3 mag beginnen, wat hij zelf wil. Hij kiest er inderdaad voor om aan opdracht 3 te beginnen.

De leerling leest opgave 3. Hij begint door de lengte A te noemen en de breedte B. Hij controleert of de gegevens in de afbeelding overeen komen met de antwoorden uit zijn formules wanneer hij de getallen van de afbeelding invult. Hij puzzelt wat en komt hierna inderdaad goed uit: "Ooh, $A \cdot B = 27$, en $2A + B = 15$". Hij schrijft nu de B vrij, en vult deze in in de formule voor de oppervlakte: "$A \cdot (15 - 2A) = 27$." Van het deel vóór het =-teken neemt hij de afgeleide en die stelt hij gelijk aan nul om het maximum te vinden. Hij komt uit op $A = \frac{15}{4}$: "En als ik A weet, kan ik ook zo B uitrekenen." Hij komt uit op $B = \frac{15}{2}$. Hij controleert of de oppervlakte inderdaad groter is dan 27 en dit is het geval: "Ja dat klopt ook, dus dit zou kunnen kloppen." Hij gaat terug naar de andere opdrachten.

De leerling leest opdracht 1 nogmaals en gaat daarna meteen naar opdracht 2. Hij leest de vraag aandachtig en maakt een (kloppende) schets van de situatie. Hij vult alles in wat hij weet, denkt na, en gaat verder met redeneren: "De ene heeft een richtingscoëfficiënt van -3, dus dan zou je zeggen dat die andere een richtingscoëfficiënt van 3 zou kunnen hebben. Dan heb heb je nog een variabele b, die kan je uitrekenen door ... je weet raaklijn k aan $f(x)$, dus..." Hij schrijft de afgeleide op van $f(x)$ en lijn $k : y = 3x + b$. Hij stelt ze gelijk aan elkaar en schrijft b in termen van x. "Dan moet ik alleen nog x uitrekenen." Hij vult b in in de aan elkaar gelijkgestelde vergelijking maar redeneert dat daar nul uit komt: "Dus dat is 'm ook niet." Hij denkt even na en vervolgt: "Ohh dit is de afgeleide." Hij stelt nu $f(x)$ gelijk aan zijn vergelijking voor k en drukt opnieuw b uit in termen van x. Hij concludeert nu dat $k : y = 3x - x^2 - 2x$. hij zegt dat hij x moet weten. Hij berekend k' en merkt dat dit dezelfde vergelijking is als voor f'. Hij schrijft nog bij zijn tekeningetje zijn vergelijkingen van k en l. Na even te denken zegt hij: "Ik zie 'm niet." Hij denkt nog even na maar hierna is de tijd op.