Derdegraadsvergelijkingen oplossen

Een lessenserie voor vwo wiskunde D

F.M. van Ruiten BSc
S2096633
Onderzoek van Onderwijs - Wiskunde
Educatie en Communicatie in de bètawetenschappen

UT Begeleider: W.R. van der Meulen MSc
Tweede beoordelaar: dr. G.A.M. Jeurnink

16 augustus 2023

UNIVERSITY OF TWENTE.

Samenvatting

In het vwo wiskunde D onderwijs krijgen leerlingen uitleg over complexe getallen. De complexe getallen worden meestal aan de hand van de verschillende getallenverzamelingen geïntroduceerd. Historisch gezien zijn complexe getallen in de zestiende eeuw ontstaan om reële oplossingen te vinden van derdegraads-vergelijkingen. De formule van Cardano geeft bij een derdegraadsvergelijking die drie reële oplossingen heeft een oplossing in de vorm van een complex getal. Door te rekenen met complexe getallen kunnen deze oplossingen in reële vorm omgeschreven worden. Opvallend is dat in het examenprogramma van vwo wiskunde D de derdegraadsvergelijkingen niet genoemd worden. Als leerlingen de oorsprong van complexe getallen kennen, zal het ze mogelijk duidelijk worden waarom deze getallen van belang zijn voor de wiskunde. Voor dit onderzoek is er een lessenserie ontworpen over derdegraadsvergelijkingen gebaseerd op relationeel begrip om bij vwo wiskunde D leerlingen een betekenisvolle introductie van complexe getallen te creëren. Voor deze lessenserie zijn ontwerpeisen opgesteld aan de hand vooronderzoek over de huidige kennis over het oplossen van vergelijkingen van deze leerlingen, het oplossen van derdegraadsvergelijkingen met behulp van de formule van Cardano, de didactische uitgangspunten van guided reinvention die komen kijken bij relationeel begrip en bestaand lesmateriaal over complexe getallen en het oplossen van derdegraadsvergelijkingen. Met de ontwerpeisen is vervolgens een lessenserie ontwikkeld die is voorgelegd aan een expertpanel en naderhand verbeterd. De nieuwe versie van de lessenserie is in de praktijk getest en geanalyseerd met de ontwerpeisen aan de hand van het leerlingenmateriaal en semigestructureerde interviews. Hierbij valt te concluderen dat het materiaal niet voldoet aan de vooraf gestelde ontwerpeisen en daarmee blijft de onderzoeks-vraag onbeantwoord. Wel worden er een aantal aanbevelingen gedaan om het lesmateriaal verder te ontwikkelen, zodat het lesmateriaal alsnog tot een betekenisvolle introductie van complexe getallen kan gaan leiden in de toekomst.

Een woord vooraf

Voor u ligt mijn thesis van de master Educatie en Communicatie in de Bètawetenschappen. Toen ik erachter kwam dat we een praktijkonderzoek zouden gaan doen voor het vak Onderzoek van Onderwijs, wist ik eigenlijk al meteen dat ik een lessenserie voor het vak wiskunde D wilde maken. Zelf heb ik op de middelbare erg veel plezier beleefd aan het vak. De wiskundige diepgang en vrijheid die in een lessenserie verwerkt konden worden sprak me erg aan. Toch zou dit onderzoek niet tot stand zijn gekomen zonder de hulp van een aantal belangrijke mensen.

Allereerst wil ik mijn begeleider Wisse bedanken. Dankzij zijn hulp en kritische blik is mijn onderzoek er beduidend sterker op geworden. Zowel Wisse als de overige vakdidactici die ons dit jaar begeleid hebben, Mark en Tom, stralen enorm veel enthousiasme uit voor het vakgebied. Zij creëren gezamenlijk een erg prettige sfeer op de opleiding en zijn daarbij essentieel voor het goede leerproces. Ik ben erg blij met het vertrouwen dat zij in ons studenten stellen.

Verder wil ik Gerard, de tweede beoordelaar van dit onderzoek, bedanken. Dankzij zijn scherpe opmerkingen en uitgebreide wiskundige kennis heb ik verschillende details in mijn onderzoek kunnen aanscherpen.

Mijn dank gaat ook uit naar de docenten die me gedurende dit hele jaar begeleid hebben tijdens mijn stageperiodes. Zowel mijn huidige vakcoach Hans Pas als mijn voorgaande vakcoaches Bram Leferink en Ha Nguyen hebben mij in het afgelopen jaar veel geleerd over het lesgeven. Bedankt dat ik jullie klassen mocht overnemen.

Bovendien wil ik ook Chris Heuver bedanken voor het lenen van zijn klas voor dit onderzoek. Zowel hij als de overige docenten op mijn stageschool hebben meermaals hun vertrouwen in mij uitgesproken in de docentenkamer, waardoor ik met plezier op mijn stageperiode terugkijk.

Mijn medestudenten hebben me ook enorm vooruitgeholpen. De meesten boden meteen aan om onderdeel te worden van het expertpanel en iedereen straalt veel enthousiasme uit. Hierdoor is deze studieperiode er zo veel mooier op geworden. Verder is het ook fijn om bij elkaar je ei kwijt te kunnen over de mooie en minder mooie dingen aan het vak.

Mijn huisgenoten hebben mij ook gesteund door meermaals mijn geklaag aan te horen. Niet alleen tijdens deze afstudeerperiode, maar ook tijdens de rest van mijn studie heb ik op Dazta altijd een fijn plek gehad om echt thuis te komen.

Ik ben ook erg blij dat ik altijd bij mijn ouders en broertje terecht kan en weet dat zij altijd achter me zullen staan. Speciale dank aan mijn moeder die het hele verslag voor me doorgelezen heeft.

Ten slotte wil ik Marc nog bedanken. Hij staat altijd voor me klaar of het nu ongevraagd plagend advies of benodigde afleiding tijdens het werk is. Met hem kan ik alles delen.

Ik had mijn afstuderen niet zonder jullie allemaal kunnen doen.

Inhoudsopgave

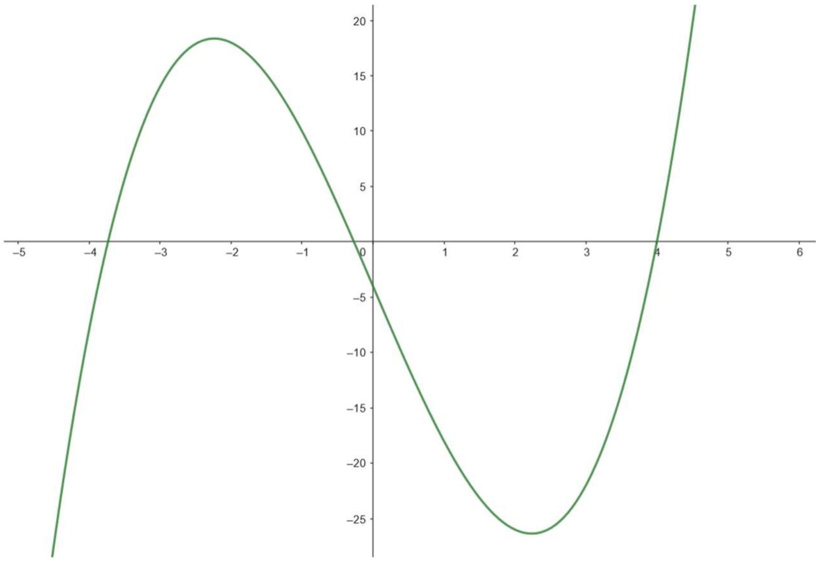
1. Inleiding

1.1 Aanleiding

Leerlingen in de bovenbouw van het vwo die interesse hebben in wiskunde kunnen voor het vak wiskunde D kiezen. Dit is een aanvulling op wiskunde B. Wiskunde D heeft alleen een schoolexamen en geen centraal schriftelijk eindexamen. In het examenprogramma van vwo wiskunde D zijn de complexe getallen opgenomen (CvTE, 2022-a). In de vwo wiskunde D boeken van zowel Getal en Ruimte (Dijkhuis et al., 2016-a) als Moderne Wiskunde (Bakker et al., 2014) worden complexe getallen geïntroduceerd aan de hand van de verschillende getallenverzamelingen die door de jaren heen zijn ontstaan. Hierbij wordt er al snel duidelijk gemaakt dat kwadratische vergelijkingen binnen de complexe getallen altijd oplossingen hebben. Dit lijkt daarmee in deze wiskundeboeken de aanleiding te zijn tot het hebben van complexe getallen. De historische aanleiding voor het introduceren van complexe getallen was echter heel anders. Deze komt voort uit het oplossen van derdegraadsvergelijkingen.

Door de jaren heen zijn er veel ontwikkelingen geweest in het oplossen van vergelijkingen. Er zijn al bronnen gevonden voor het oplossen van lineaire vergelijkingen die dateren rond 1650 voor Christus. In de negende eeuw na Christus begonnen de eerste werken met oplossingsmethoden voor tweedegraadsvergelijkingen te ontstaan. Toch zou het nog tot de zestiende eeuw duren voordat er algemene oplossingsmethoden voor derdegraadsvergelijkingen gevonden werden (Berlinghoff & Gouvêa, 2022). Hoewel derdegraads-vergelijkingen een logische volgende stap lijken, blijkt de wiskunde hierachter significant ingewikkelder.

Cardano heeft in de zestiende eeuw een formule opgesteld om derdegraadsvergelijkingen op te lossen. In moderne vorm betekent dit dat voor vergelijkingen van de vorm $x^3 + px + q = 0$ een oplossing wordt gegeven door $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ (Berlinghoff & Gouvêa, 2022). Hierbij zijn er echter gevallen mogelijk waarbij dit tot tweedemachtswortels van negatieve getallen leidt, terwijl er alleen reële oplossingen van de specifieke vergelijking bestaan. In zulke gevallen zullen er altijd drie reële oplossingen van de vergelijking bestaan, waardoor de gevonden oplossing dus ook reëel zou moeten zijn. Een voorbeeld hiervan is de vergelijking $x^3 - 15x - 4 = 0$. Cardano's formule geeft als oplossing $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ (Berlinghoff & Gouvêa, 2022). Hierin ontstaan complexe getallen waardoor het lijkt alsof de vergelijking binnen de reële getallen geen oplossingen geeft. Wanneer de grafiek geplot wordt, is duidelijk te zien dat de vergelijking tot 3 reële oplossingen leidt, zie Figuur 1.



Figuur 1: De grafiek die hoort bij $y = x^3 - 15x - 4$ (gemaakt met Geogebra).

De gevonden complexe oplossing komt overeen met $x = 4$. Met behulp van complexe getallen is dit om te schrijven tot deze reële oplossing. Derdegraadsvergelijkingen zijn daarmee de aanleiding geweest voor het ontstaan van complexe getallen. Complexe getallen werden oorspronkelijk alleen gebruikt om reële oplossingen te kunnen vinden van ingewikkelde problemen (González-Velasco, 2011). Het was nog geen op zichzelf staande wiskunde.

Opvallend is dat in het examenprogramma van vwo wiskunde D de derdegraadsvergelijkingen niet eens genoemd worden. In Getal en Ruimte wordt er bij toepassingen van de derdegraadsvergelijkingen nog een paragraaf aan gewijd (Dijkhuis et al., 2016-b), maar bij Moderne wiskunde komen ze überhaupt niet voor. Complexe getallen worden daardoor een vaag en abstract begrip terwijl ze vooral bedoeld waren om in toepassingen uiteindelijk bij reële oplossingen uit te kunnen komen (González-Velasco, 2011).

Als leerlingen de oorsprong van complexe getallen kennen, zal het ze mogelijk duidelijk worden waarom deze getallen van belang zijn voor de wiskunde. Hiervoor zal de formule van Cardano relationeel aangeleerd moeten worden, anders zou je als leerling kunnen denken dat de wiskundigen van vroeger dit ook meteen in de formule hadden kunnen implementeren. Wiskunde D leerlingen die daadwerkelijk uitdaging zoeken in de wiskunde zullen met het oplossen van derdegraadsvergelijkingen een nog beter besef van wiskunde krijgen. Wanneer de lange procedures eenmaal getoond worden, is het ineens veel logischer waarom we bij wiskunde B niet veel verder gaan dan tweedegraadsvergelijkingen. Hiermee kunnen vervolgens de complexe getallen op een betekenisvolle manier geïntroduceerd worden. Daarmee komen we tot de hoofdvraag van dit onderzoek:

"Hoe kan een lessenserie over derdegraadsvergelijkingen gebaseerd op relationeel begrip voor vwo leerlingen bij wiskunde D leiden tot een betekenisvolle introductie van complexe getallen?"

1.2 Onderzoeksvragen

Het beantwoorden van de hoofdvraag zal uit twee delen bestaan. Het begint met het vinden van verschillende oplossingsmethoden van derdegraadsvergelijkingen en het gebruik van complexe getallen hierbij. Daarna volgt het ontwerpen van de lessenserie zelf. Voor het eerste deel zal er ook gekeken moeten worden welke oplossingsmethoden leerlingen al kennen. Zoals hiervoor al vermeld is, kan het verschillen wat voor onderwerpen er voor wiskunde D gegeven worden op verschillende scholen. Het eindexamen van wiskunde B is wel centraal, dus deze vaardigheden moeten grotendeels overeenkomen. De verschillende deelvragen voor dit eerste deel worden hiermee:

- Welke oplossingsmethoden voor vergelijkingen leren leerlingen in de bovenbouw voor vwo wiskunde B?
- Wat voor soort derdegraadsvergelijkingen zijn met de kennis van wiskunde B al op te lossen?
- Welke oplossingsmethoden bestaan er voor derdegraadsvergelijkingen?
- Welke lesontwerpen voor wiskunde D bestaan er al die complexe getallen introduceren?
- Welke lesontwerpen voor wiskunde D bestaan er al die kunnen bijdragen aan een lessenserie over derdegraadsvergelijkingen?
- Wat zijn de didactische uitgangspunten om relationeel begrip te bereiken?

Naast dit eerste deel, brengt het ontwerpen van de lessenserie zelf ook twee deelvragen met zich mee:

- Hoe ziet een ontwerp voor een lessenserie over het oplossen van derdegraadsvergelijkingen om complexe getallen te introduceren voor vwo wiskunde D eruit?
- In hoeverre kunnen leerlingen dankzij de lessenserie daadwerkelijk derdegraadsvergelijkingen oplossen en snappen ze waarvoor complexe getallen nuttig zijn?

Het is vooral belangrijk om realistisch te zijn in wat er verwacht kan worden van de vwo wiskunde D leerlingen en wanneer de stof te ingewikkeld voor ze gaat worden. Bovendien zal er gezien de grootte van dit onderzoek alleen gefocust worden op een introductie van complexe getallen en zal dit dus niet volledig "Domein E: Complexe getallen" zoals in het examenprogramma staat omvangen.

2. Theoretisch kader

In dit hoofdstuk worden de theoretische achtergronden beschreven die de basis vormen voor de lessenserie. In sectie 2.1 begint dit met de vergelijkingen die leerlingen in de bovenbouw van de middelbare school al leren oplossen. Hierbij wordt er specifiek ingegaan op vwo wiskunde B, aangezien leerlingen met wiskunde D dat vak ook zullen volgen. Ook wordt er kort ingegaan op wiskunde D zelf. In sectie 2.2 wordt er gekeken naar de verschillende oplossingsmethoden om derdegraadsvergelijkingen op te lossen. Hier wordt het bewijs voor de formule van Cardano gegeven en er wordt gekeken wanneer deze tot complexe getallen leidt. Verder wordt er kort ingegaan op de overige oplossingsmethoden voor derdegraadsvergelijkingen. In sectie 2.3 worden de didactische uitgangspunten besproken die we gebruiken kijken bij het ontwerpen van de lessenserie. Ten slotte wordt in sectie 2.4 het bestaande lesmateriaal over complexe getallen besproken. Hierbij wordt er gekeken naar zowel het lesmateriaal dat het oplossen van derdegraadsvergelijkingen niet bespreekt, als het materiaal dat dit wel aanhaalt.

2.1 Vergelijkingen oplossen in bovenbouw middelbare school

Op middelbare scholen wordt leerlingen in de onderbouw het oplossen van zowel de eerste- als tweedegraadsvergelijkingen aangeleerd. Afhankelijk van de gekozen wiskunde wordt hier in de bovenbouw verder op ingegaan. Bij het examenprogramma van havo wiskunde A komen kwadratische vergelijkingen niet voor (CvTE, 2022-c). Bij havo wiskunde B komen ook enkele hogere machten naar voren.

In de examenprogramma’s wordt de kennis over het oplossen van vergelijkingen minder gespecificeerd dan in de wiskundeboeken. Zo zit in het examenprogramma van havo wiskunde B “Domein B: Functies, grafieken en vergelijkingen” (CvTE, 2022-d). In het boek Getal en Ruimte zijn vergelijkingen van de vorm $x^n = a$ met $n \in \mathbb{N}$ te vinden en vergelijkingen van een vorm als $ax^4 + bx^2 = c$ waarin bij het oplossen eerst gefocust wordt op substitueren van bijvoorbeeld $x^2 = u$ (Dijkhuis et al., 2020-a). Hierdoor herschrijven leerlingen dit opnieuw als tweedegraadsvergelijking om op te lossen. De stap naar derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx = d$ wordt hier niet gemaakt. Ook in het examenprogramma van havo wiskunde D dat als aanvulling gekozen kan worden, worden derdegraadsvergelijkingen niet genoemd (CvTE, 2022-b). Een enthousiaste docent zou wel kunnen bedenken om dit als keuzeonderwerp te kiezen, maar dat is geheel eigen invulling.

Op het vwo volgen leerlingen zes jaar onderwijs en daardoor is er tijd om uitgebreider op de wiskunde in te gaan. Hierdoor moeten leerlingen die wiskunde A volgen dankzij het examenprogramma “Domein C: Verbanden” ook met kwadratische functies overweg kunnen (CvTE, 2022-e). In de boeken van Getal en Ruimte, is te zien dat de vergelijkingen hier niet algebraïsch voorkomen (Dijkhuis et al., 2020-b,c,d,e). Bij wiskunde C wordt “Domein C: verbanden” zelfs nog minder gespecificeerd en hier zijn de kwadratische vergelijkingen dan ook niet terug te zien (CvTE, 2022-g).

2.1.1 Vergelijkingen oplossen bij vwo wiskunde B

Aangezien de lessenserie uiteindelijk gemaakt wordt voor vwo leerlingen die wiskunde D volgen, zullen deze leerlingen ook het vak wiskunde B volgen. Daarom wordt hier uitgebreider op de kennis ingegaan die deze leerlingen hebben opgedaan bij het vak wiskunde B. Dit zal uiteindelijk voorkennis zijn van de te ontwerpen lessenserie. Net als in het examenprogramma van de havo wiskunde B, heeft ook het vwo het domein: "Domein B: Functies, grafieken en vergelijkingen" (CvTE, 2022-f). Hoewel deze uit meer sub-domeinen bestaat dan die van de havo, worden ook hier hogeregraadsvergelijkingen niet verder uitgelicht. In Getal en Ruimte zijn opnieuw vergelijkingen van de vorm $x^n = a$ met $n \in \mathbb{N}$ te vinden en vergelijkingen van een vorm als $ax^4 + bx^2 = c$. Er wordt hier wel eerder en uitgebreider ingegaan op het grafisch numeriek oplossen van hogeregraadsvergelijkingen, oftewel het vinden van oplossingen met behulp van de grafische rekenmachine (Dijkhuis et al., 2020-f). Verder moeten leerlingen volgens het examenprogramma "Domein C: Differentiaal- en integraalrekening" eerste en tweede afgeleiden kunnen opstellen en interpreteren (CvTE, 2022-f).

In Getal en Ruimte is te zien dat leerlingen hierdoor van derdegraadsvergelijkingen algebraïsch de toppen moeten kunnen berekenen. Verder moeten ze van hogere machtsfuncties voor gegeven waarden van x kunnen aantonen dat de grafiek een top heeft (Dijkhuis et al., 2020-g). In het hoofdstuk over examentraining valt te zien dat de eerste, tweede- en hogeregraadsvergelijkingen zoals hierboven besproken binnen het examendomein "A: Vaardigheden" passen. Hierin wordt een samenvatting gegeven hoe deze vergelijkingen zijn op te lossen. Deze samenvatting en de samenvatting over de extreme waarden is te vinden in bijlage 1 (Dijkhuis et al., 2020-h).

2.1.2 Vergelijkingen oplossen bij vwo wiskunde D

Wiskunde D heeft alleen een schoolexamen en geen centraal schriftelijk eindexamen. De verschillende lesmethodes komen minder overeen qua vergelijkingen die leerlingen nog extra moeten kunnen oplossen. Dit wordt immers niet landelijk getoetst. Wat wel voor elke leerling nieuw is, is dat ze met vergelijkingen binnen de getallenverzameling van de complexe getallen moeten kunnen werken. In het examenprogramma van vwo wiskunde D zijn de complexe getallen opgenomen (CvTE, 2022-a). Momenteel worden bij Getal en Ruimte complexe getallen als 10e van de 16 hoofdstukken van de bovenbouw aangeboden (Dijkhuis et al., 2016-a). Bij Moderne Wiskunde is dit het 7e hoofdstuk van de 8 die in de vierde klas worden gegeven (Bakker et al., 2014).

2.2 Oplossingsmethoden van derdegraadsvergelijkingen

2.2.1 Cardano's oplossingsmethode voor derdegraadsvergelijkingen

De oplossingsmethode van Cardano is te gebruiken voor vergelijkingen in de vorm $x^3 + px + q = 0$. Hiervoor moeten de vergelijkingen dus eerst in deze vorm herschreven worden.

Stelling 1: Alle vergelijkingen in de vorm $ax^3+bx^2+cx+d=0$ kunnen in de vorm $x^3+px+q=0$ omgeschreven worden.

Bewijs: Stel $x=y-\frac{b}{3a}$.

Dit geeft $ax^3+bx^2+cx+d=ay^3-\frac{b^2}{3a}y+cy+\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{cb}{3a}+d=0$.

Delen door a geeft $y^3+py+q=0$ met $p=-\frac{b^2}{3a^2}+\frac{c}{a}$ en $q=\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{cb}{3a^2}+\frac{d}{a}$.

Q.E.D.

Vervolgens kan de herschreven vergelijking opgelost worden met behulp van de formule van Cardano. Een hogeregraadsvergelijking met als hoogste macht n heeft precies n oplossingen binnen de complexe getallen (Hass et al., 2017). Binnen de reële getallen vind je dus maximaal n oplossingen. De formule van Cardano geeft maar 1 oplossing van de derdegraadsvergelijking, hoewel er mogelijk wel meer oplossingen kunnen bestaan. In stelling 2 wordt de formule van Cardano bewezen aan de hand van de afleiding zoals deze in de zestiende eeuw ontstaan is.

Stelling 2: $y^3+py+q=0$ heeft als oplossing $y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$ (Contreras, 2015).

Bewijs: Stel $y=u+v$.

Dit geeft $y^3+py+q=u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0$.

Stel nu ook $3uv+p=0$.

Dit geeft $\begin{cases}u^3+v^3+q=0\\ u=-\frac{p}{3v}\end{cases}$

Hieruit volgt $-\frac{p^3}{27v^3}+v^3+q=0$.

Vermenigvuldigen met v^3 geeft $v^6+qv^3-\frac{p^3}{27}=0$.

Dit geeft $v^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\ \vee\ v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$.

Uit $v^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ en $u^3+v^3+q=0$ volgt $u^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ en uit $v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ en $u^3+v^3+q=0$ volgt $u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$.

In combinatie met $y=u+v$ leidt dit tot $y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$.

Q.E.D.

Wanneer zowel de reële als de complexe oplossingen gezocht worden, zal $u^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ dankzij de fundamentele theorie van de algebra (Hass et al., 2017) tot meerdere oplossingen leiden. Naast $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$ leidt dit tot $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot e_1$ en $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot e_2$ met $e_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i$ en $e_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i$. Hetzelfde geldt voor v. Dit leidt daarmee tot twee nieuwe oplossingen van $y^3+py+q=0$ vanwege overeenkomsten na optellen.

Deze oplossingen zijn:
$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \cdot e_1 + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \cdot e_2$ en
$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \cdot e_2 + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \cdot e_1$.
Afhankelijk van de vergelijking zullen deze oplossingen alsnog omgeschreven kunnen worden tot reële oplossingen. Ook kunnen sommige van deze 3 oplossingen overeenstemmen en dus leiden tot dubbele wortels. Hiermee kunnen in principe altijd alle oplossingen van een derdegraadsvergelijking gevonden worden. Het vinden van alle oplossingen via het complexe vlak valt voor nu echter buiten de omvang van dit project.

Wanneer we niet geïnteresseerd zijn in complexe oplossingen kunnen na het vinden van een eerste oplossing de eventuele overige twee oplossingen gevonden worden met behulp van de factorstelling. De factorstelling zoals gegeven in Getal en Ruimte zegt:
"Als $x = k$ een oplossing is van de vergelijking $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ dan is $x^3 + ax^2 + bx + c = (x - k)(x^2 + \ldots)$" (Dijkhuis et al., 2016-b).
Zo leidt $x^3 - 15x - 4 = 0$ met de oplossing $x = 4$ tot
$x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$.

De formule van Cardano kan dan soms echter ook tot problemen leiden. Wanneer $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ leidt de formule van Cardano namelijk tot complexe getallen. Binnen de reële getallenverzameling zou dit betekenen dat er daarmee geen oplossingen bestaan. We hebben een analyse gedaan wanneer deze complexe getallen optreden. Deze bevindt zich in bijlage 2. De analyse geeft aan dat in alle gevallen wanneer $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ de derdegraadsvergelijking 3 reële oplossingen heeft. De formule van Cardano zou daardoor eigenlijk een reële oplossing moeten geven. Daardoor zijn er nu alsnog complexe getallen nodig om deze oplossingen binnen de reële getallen te kunnen vinden. Complexe getallen kunnen bij de derdegraadsvergelijkingen dus niet helemaal genegeerd worden.

2.2.2 Overige oplossingsmethoden derdegraadsvergelijkingen
Naast de formule van Cardano zijn een aantal "simpele" derdegraads-vergelijkingen ook makkelijker op te lossen. Leerlingen weten al hoe ze om moeten gaan met derdegraadsvergelijkingen waarin geen constante aanwezig is, oftewel de vorm: $ax^3 + bx^2 + cx = 0$. Verder kunnen ze vergelijkingen van de vorm $ax^3 + d = 0$ ook al oplossen (Dijkhuis et al., 2020-h).

Voor sommige andere vergelijkingen zijn er meer mogelijkheden met het ontbinden in factoren. Denk bijvoorbeeld aan $2x^3 + 4x^2 + 3x + 6 = (2x^2 + 3)(x + 2)$. Zulke ontbindingen kunnen gevonden worden door de deler van de eerste 2 en de laatste 2 termen te pakken, zodat er onderdelen in de vorm $(x + \ldots)$ overblijven en dan te kijken of deze overeenkomen (Abby, 2020). In dit voorbeeld zouden de tussenstap $2x^2(x + 2) + 3(x + 2)$ zijn. Zoals hiervoor besproken is, kennen leerlingen deze methode bij hogere machten dan een kwadraat nog niet.

Andere oplossingsmethoden gelden ook alleen voor specifieke situaties. Zo is er een manier om een rationele oplossing te vinden van vergelijkingen van de vorm: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, met $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ zonder dat deze variabelen een gemeenschappelijke factor hebben. Dit is echter een zeer specifieke en soms ook zeer omslachtige methode waardoor dit buiten de omvang van dit onderzoek valt.

2.3 Didactische uitgangspunten

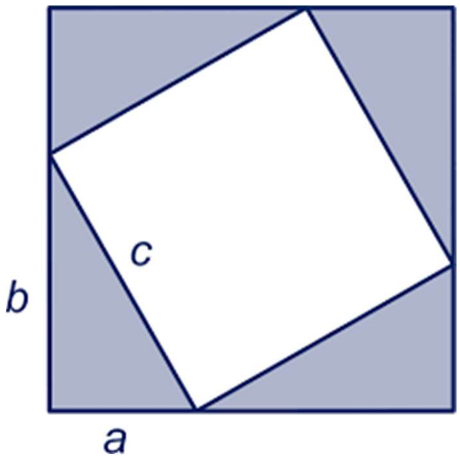
In de onderzoeksvraag komt het concept relationeel begrip voor. Volgens Skemp (2006) zijn wiskundige concepten op twee manieren aan te leren bij leerlingen: door middel van instrumenteel of relationeel begrip. Met instrumenteel begrip kunnen de leerlingen de vraag met een trucje beantwoorden. De leerling heeft een methode gevonden die werkt, maar begrijpt eigenlijk niet waarom deze werkt. Een voorbeeld hiervan is het berekenen van extreme waarden. Wanneer er bij een leerling sprake is van instrumenteel begrip, kan de leerling onthouden hebben dat voor het berekenen van de toppen de afgeleide gelijk gesteld moet worden aan 0. Hierbij moet de leerling er dan ook aan denken dat er een schets gemaakt moet worden om te zien of er inderdaad toppen zijn voor de gevonden x-waarden. Wanneer er in plaats van instrumenteel op relationeel begrip gefocust is, weet de leerling ook waarom dit werkt. In het geval van de extreme waarden, weet een leerling dat de afgeleide de helling van een grafiek geeft. Een positieve helling leidt tot een stijgende grafiek en een negatieve helling tot een dalende grafiek. Bij de wissel van positief naar negatief, of andersom, is de helling horizontaal, oftewel is de afgeleide gelijk aan 0. De afgeleide kan natuurlijk tussen positief en positief (of negatief en negatief) ook gelijk zijn aan 0. Daarom moet er een schets getekend worden om te bepalen of dit niet het geval is. Wanneer er sprake is van instrumenteel begrip, zal een leerling wel onthouden hebben dat hij een schets moet maken, maar weet hij niet waarom een afgeleide gelijk aan 0 niet per se tot een top hoeft te leiden. Voor instrumenteel begrip moeten er veel meer regels onthouden worden wat dan ook een van de grote nadelen is. In relationeel begrip bouwt de gedachtegang voort op wat de leerling al weet. Hierdoor worden de nieuwe wiskundige principes beter in het cognitieve geheugen van de leerlingen opgeslagen. Aan de andere kant levert instrumenteel begrip op korte termijn wel sneller resultaten op, omdat de procedure voor soortgelijke vragen continu hetzelfde is. Wanneer er relationeel begrip gecreëerd is, zal het creëren van dit eerste begrip wel langer duren. Het voordeel hiervan is dat niet alleen in dezelfde contexten het probleem opgelost kan worden, maar dat het begrip ook overdraagbaar is naar andere contexten. Bovendien zijn leerlingen daardoor vaak ook geneigd om deze nieuwe contexten te gaan onderzoeken en zo dieper de wiskunde in te duiken (Skemp, 2006). Dat is wat docenten uiteindelijk vaak hopen te bereiken. Relationeel begrip kan dus een goede manier zijn om leerlingen te enthousiasmeren voor wiskunde.

Een ander belangrijk punt om leerlingen te enthousiasmeren voor wiskunde is dat leerlingen het gevoel moeten krijgen dat ze goed zijn in wat ze doen. De perceptie van succes is bij wiskunde erg bepalend voor de motivatie voor het vak (Middleton & Spanias, 1999). Door leerlingen opgaven van makkelijk naar moeilijk te geven, kan er voor herhaald succes gezorgd worden

(Marzano & Miedema, 2018). Hierdoor zullen leerlingen het gevoel krijgen dat ze daadwerkelijk met de stof aan de slag kunnen. Verder is het erg belangrijk dat ze hierbij in een productive struggle terechtkomen en niet te snel opgeven (Middleton & Spanias, 1999).

Een veelvoorkomende reden dat leerlingen het gevoel hebben dat ze niet met de stof aan de slag kunnen, is doordat ze anders tegen wiskundige concepten aan kunnen kijken. Sfard (1991) beschrijft een proceskijk op wiskunde tegenover een objectkijk. Wanneer men bijvoorbeeld over het =-teken nadenkt zien leerlingen dit in de eerste plaats vooral als het resultaat. Wanneer een leerling de som 3+5 oplost, levert dit het resultaat 8 op. Dit optellen wordt daarmee een wiskundige procedure die de leerlingen uitvoeren, oftewel ze kunnen alleen van 3+5 naar 8 gaan. Later zullen de leerlingen bij bijvoorbeeld de balansmethode het =-teken als een object moeten gaan zien. Wat er aan de linkerkant van het =-teken staat is altijd gelijk aan wat er aan de rechterkant van het =-teken staat en daarom kan de procedure ook in tegengestelde richting uitgevoerd worden. Getallen mogen omgedraaid en weggehaald worden, zolang het totaal maar klopt. Hiermee is het geen procedure op zichzelf meer, maar wordt er een breder begrip van het wiskundige concept gecreëerd. In sommige gevallen hangt dit ook sterk samen met het instrumentele en relationele begrip, zoals hiervoor beschreven. Dit is bijvoorbeeld te zien wanneer een leerling doorkrijgt dat de afgeleide van een functie daadwerkelijk de helling beschrijft en daarmee een ding op zichzelf is. Hierdoor kan bij het berekenen van extreme waarden achterhaalt worden dat er visueel bij een top altijd een horizontale helling te zien is. Doordat de afgeleide en helling nu voor de leerling gekoppeld zijn, zal de leerling daarmee doorhebben dat dit betekent dat de afgeleide gelijk is aan 0. De leerling kan op die manier eerder verworven kennis inzetten, in plaats van dat er een trucje aangeleerd wordt om de vraag op te lossen.

Het is dus belangrijk om relationeel begrip te creëren, maar daarvoor blijft wel de vraag staan hoe dit bereikt kan worden. Een van de mogelijkheden hiervoor is aan de hand van guided reinvention. Aan de hand van Freudenthal (2002) komen we op de volgende definitie van guided reinvention: *wanneer een docent zijn/haar leerlingen zo kan begeleiden dat zij de wiskundige concepten die ze moeten leren zelf kunnen herontdekken is er sprake van guided reinvention*. Bij deze didactische strategie beslis je als docent dus wat de leerlingen uiteindelijk moeten weten en stuur je de leerlingen zo dat ze zelf op het leerdoel uitkomen. Het is hierbij de bedoeling dat leerlingen zo min mogelijk hulp van buitenaf nodig hebben. Wanneer men bij wiskunde bijvoorbeeld de stelling van Pythagoras uitlegt kan een docent meteen $a^2 + b^2 = c^2$ geven, maar bij guided reinvention zou het kunnen dat de leerlingen beginnen met een afbeelding als in Figuur 2.



Figuur 2: Afbeelding bij de stelling van Pythagoras.

Door leerlingen voorzichtig vragen te stellen over deze afbeelding, kunnen ze zelf ontdekken dat het berekenen van de oppervlakten van de blauwe driehoeken op twee verschillende manieren kan. Hierdoor krijgen ze zowel $(a+b)^2 - c^2$ als $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ wat na gelijkstellen uiteindelijk leidt tot de beroemde stelling van Pythagoras. Op deze manier kunnen de leerlingen deze stelling zelf ontdekken. Zo wordt er relationeel begrip gecreëerd, omdat de leerlingen de stelling zelf ontdekken. Hierdoor zal het resultaat waarschijnlijk beter blijven hangen.

Er zijn ook kritieken op de manier waarop guided reinvention gebruikt kan worden. Zo is er bijvoorbeeld bij het gebruik van guided reinvention voor lastige wiskunde erg veel sturing nodig. Lijnse (2007) geeft aan dat het te beargumenteren valt om de didactiek op deze momenten geen guided reinvention meer te noemen. Volgens hem moet er te veel voorgezegd worden en wordt er eigenlijk gewoon een uitleg gegeven. Barton beargumenteerd juist in een interview door Timmer en Caspers (2022) dat guided discovery alleen werkt wanneer het heel erg gestructureerd is. Guided discovery is Bartons equivalent van guided reinvention. Dankzij een grote hoeveelheid sturing is er geen ruimte voor misconcepties bij de leerlingen terwijl ze wel nog steeds het gevoel krijgen dat ze begrijpen waarom iets juist is. Op deze manier wordt het zelf ontdekken dus in de uitleg gebruikt om relationeel begrip te creëren. Dit is uiteindelijk waarvoor wij guided reinvention in de lessenserie willen verweven. Daarom zullen wij wiskundige zelfontdekking met veel sturing in dit onderzoek wel als guided reinvention zien.

2.4 Bestaand lesmateriaal

2.4.1 Lesmateriaal over complexe getallen

In de vwo wiskunde D boeken van Getal en Ruimte (Dijkhuis et al., 2016-a) worden complexe getallen geïntroduceerd aan de hand van de verschillende getallenverzamelingen die door de jaren heen zijn ontstaan. In Getal en Ruimte worden er een aantal kwadratische vergelijkingen gegeven die in verschillende getallenverzamelingen wel of geen oplossingen hebben. Daarna worden er kwadratische oplossingen gegeven die binnen de reële getallen geen oplossingen hebben, waarvoor de complexe getallen erbij komen. De reden voor het introduceren van de complexe getallen is daarmee dat kwadratische vergelijkingen binnen de complexe getallen altijd oplossingen hebben.

In Moderne Wiskunde (Bakker et al., 2014) worden complexe getallen ook aan de hand van de getallenverzamelingen geïntroduceerd. Hier wordt eerst een korte opbouw van gehele getallen naar reële getallen gegeven. Zo wordt in een opgave bijvoorbeeld uit het ongerijmde bewezen dat $\sqrt{2}$ geen rationeel getal kan zijn. Daarna worden ook hier kwadratische vergelijkingen gegeven waarvoor complexe getallen nodig zijn om een oplossing te krijgen. Dit lijkt daarmee in deze wiskundeboeken de aanleiding tot het hebben van complexe getallen. De derdegraadsvergelijkingen komen in Moderne wiskunde helemaal niet terug, ook niet in de latere hoofdstukken over complexe getallen.

Sommige andere wiskundemethoden die gebruikt worden op de middelbare school hebben helemaal geen boekenlijn voor wiskunde D. Zowel Bettermarks (2021), Kern (z.d.) als Smartwiskunde (z.d.) hebben hier geen opties voor.

Wanneer er naar het vervolg op de middelbare school gekeken wordt, de calculus boeken die gebruikt worden op universitair niveau, introduceren deze complexe getallen ook met de verschillende getallenverzamelingen. Thomas Calculus (Hass et al., 2017) geeft aan dat er een nieuw getallensysteem nodig is omdat "De simpele kwadratische vergelijking $x^2 + 1 = 0$ onmogelijk op te lossen is met de drie getallensystemen die bestaan." In het hele boek wordt niet ingegaan op het oplossen van derdegraadsvergelijkingen.

2.4.2 Lesmateriaal met derdegraadsvergelijkingen

In het laatste hoofdstuk van de wiskunde D boeken van Getal en Ruimte komt in een van de paragrafen het oplossen van derdegraadsvergelijkingen wel nog aan bod (Dijkhuis et al., 2016-b). Hier wordt eerst de factorstelling geïntroduceerd en vervolgens ook de formule van Cardano op een relationele manier. Er wordt hier vanuit gegaan dat leerlingen complexe getallen al kennen. De stap dat complexe getallen gebruikt kunnen worden om reële oplossingen te vinden wanneer de formule van Cardano tot complexe oplossingen leidt, wordt enkel kort aangestipt.

De Wageningse Methode is de enige lesmethode die complexe getallen aan de hand van derdegraadsvergelijkingen introduceert (van den Broek et al., 2009). Hier worden opnieuw eerst de verschillende getallenverzamelingen benoemd, maar nu wel in een paragraaf die over de derdegraadsvergelijkingen gaat. Vervolgens wordt de oplossing voor derdegraadsvergelijkingen instrumenteel gegeven met de formule van Cardano. Met behulp van verschillende voorbeelden wordt laten zien dat de formule soms wel en soms geen reële oplossingen geeft. Dan wordt er verteld dat de formule altijd tot oplossingen leidt als we negatieve tweedemachtswortels gaan accepteren. Bovendien wordt er meteen gezegd dat een vergelijking als $x^3 = 1$ ook meerdere oplossingen zou moeten hebben. In beide gevallen wordt er niet uitgelegd waarom. Hierna worden de complexe getallen alsnog met kwadratische vergelijkingen geïntroduceerd. Aan het eind wordt er wel even de koppeling gemaakt dat deze complexe getallen nu wel gebruikt kunnen worden om reële oplossingen te vinden wanneer de formule van Cardano tot complexe oplossingen leidt. De opbouw is op basis van het nut van complexe getallen gemaakt, maar dit wordt puur instrumenteel gedaan.

Geschiedenis van de Wiskunde is een vak dat door beta4all wordt aangeboden voor (aanstaande) leraren. Als eindopdracht moet er aan de hand van een bron een werkblad voor een les gemaakt worden waarbij de geschiedenis van een wiskundeonderwerp geïntegreerd wordt met de wiskunde zelf. Een van de opdrachten van 2023 luidt als volgt, zie Figuur 3.

4. Bombelli, complexe getallen
Nadat Cardano per ongeluk over complexe getallen gestruikeld was en vervolgens de handdoek in de ring gooide, liet Bombelli zien hoe je ermee kunt rekenen. Gebruik hierbij l'Algebra van Bombelli in het Italiaans en de toelichting (en deels vertaling) van Enrique Gonzàlez-Velasco, *Journey through Mathematics*, paragraaf 3.3 (hij geeft paginanrs bij Bombelli).

Figuur 3: Opdracht geschiedenis van de wiskunde (Wepster & Daems, 2023).

In voorgaande jaren is deze opdracht een aantal keer uitgevoerd. Hiervan hebben we toegang hebben gekregen tot een werkblad en lessenserie. Dit werkblad is ontworpen door de uitvoerend docent van dit vak, Jeanine Daems. Het werkblad is te vinden in bijlage 3. Vanwege de coronacrisis kon het werkblad echter nooit in een les geïntroduceerd worden en daarom is dit bij een eerste opzet gebleven.

In dit werkblad is te zien hoe in opgave 1 de formule van Cardano ineens geïntroduceerd wordt om de oplossing van een derdegraadsvergelijking te krijgen. Hierbij wordt de formule instrumenteel geïntroduceerd; waarom deze tot oplossingen van derdegraadsvergelijkingen leidt is onbekend. Vervolgens wordt er vooral op de bron van Bombelli gefocust om de geschiedenis van de wiskunde aan de leerlingen mee te geven. De oude wiskundige notatie wordt hierin meegenomen, wat voor de te ontwerpen lessenserie verder niet het doel zal zijn. In vraag 6 en 8 gezamenlijk wordt laten zien dat er met behulp van complexe getallen wel een reële oplossing van de derdegraadsvergelijking gevonden kan worden. Dit wordt eigenlijk aan de leerlingen verklapt, waardoor ze hier niet meer zelf over na hoeven te denken.

Naast het werkblad is er ook een lessenserie gemaakt voor een opdracht van Historical Aspects of Classroom Mathematics. Dit is de Engelstalige voorloper van Geschiedenis van de Wiskunde. Deze lessenserie ging ook in op de complexe getallen aan de hand van Cardano en Bombelli (Kosman & de Vos, 2016). In de eerste les wordt voorkennis over kwadratische en derdegraadsvergelijkingen herhaald. Het probleem om op te lossen waar de hele lessenserie aan gelinkt is, is te vinden in Figuur 4.

Find two numbers, a and b, whose sum is 10 and whose product is 40. That is:

$$a + b = 10$$
$$ab = 40$$

Figuur 4: Het begin probleem van de lessenserie voor Historical Aspects of Classroom mathematics.

Dit probleem valt niet op te lossen met alleen reële getallen. De tweede les is vooral gefocust op de geschiedenis rondom het oplossen van derdegraadsvergelijkingen. Hierin wordt ook de formule van Cardano op een instrumentele wijze gepresenteerd. Leerlingen wordt wel gevraagd om hier eerst zelf mee aan de slag te gaan, waarbij er extra materiaal aanwezig is voor leerlingen die hierin interesse hebben. Dit materiaal is echter niet beschikbaar, dus het is onduidelijk in hoeverre dit tot relationeel begrip leidt. In les 3 worden vervolgens ingewikkeld uitziende vergelijkingen teruggebracht tot een simpelere vorm. Zo wordt laten zien dat $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} + \sqrt[3]{10-\sqrt{108}} = 2$. Hierbij wordt al gebruikt dat de oplossing gelijk zal moeten zijn aan 2, maar in de tekst wordt dan ook benadrukt dat het erom gaat dat deze ingewikkeld uitziende formule op een makkelijkere manier opgeschreven kan worden. De uitleg is te vinden in Figuur 5.

Right now you may be crying foul though. We were trying to simplify

$$x = \sqrt[3]{10+\sqrt{108}} + \sqrt[3]{10-\sqrt{108}},$$

but in the solution process we used the fact that we already knew that $x = 2$. That reeks of circular reasoning. Bombelli is cheating! This is in fact true. But our gain is not so much finding out that $x = 2$, but instead in discovering how the value 2 can be 'hiding' in something as horrific looking as

$$\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} + \sqrt[3]{10-\sqrt{108}}.$$

Why this is such an important insight, will become clear shortly.

Figuur 5: Uitleg in lessenserie.

Dit is een hele interessante stap om mogelijk in de te ontwerpen lessenserie te gaan implementeren. Tot en met deze les zijn bewust de complexe getallen nog niet gebruikt om eerst op de derdegraadsvergelijkingen te kunnen gaan focussen. In de laatste les, les 4 worden complexe getallen geïntroduceerd. Hierbij worden de rekenregels gebruikt, zoals te zien in Figuur 6.

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3 \qquad \text{or}$$

$$\sqrt{12}\cdot\sqrt{12} = \left(\sqrt{12}\right)^2 = 12$$

it would seem reasonable to assume that:

$$\sqrt{-b}\cdot\sqrt{-b} = \left(\sqrt{-b}\right)^2 = -b \quad \text{with} \quad b \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad b > 0.$$

Figuur 6: Introductie rekenregels negatieve tweedemachtswortels lessenserie.

Deze regels lijken ook uit te nodigen tot $\sqrt{-b}\cdot\sqrt{-b} = \sqrt{-b\cdot -b} = \sqrt{b^2} = b$ wat natuurlijk onjuist is en daarom voorkomen moet worden. Dit wordt in een latere opgave wel nog benadrukt, zie Figuur 7.

30 A lot of the 'new' rules seem to be carried over directly from the familiar rules for real numbers. But there are exceptions. Consider the identity:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$$

a Based on this, what might one expect the result to be of:

$$\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3}$$

b What should its result be though, according to Bombelli's rules?

Figuur 7: Opdracht verwarring complexe rekenregels.

Daarmee lijkt deze lessenserie een aantal belangrijke aspecten aan te stippen die ook in de te ontwerpen lessenserie gebruikt kunnen worden. Uiteindelijk gaan ze weer terug naar hun oorspronkelijke puzzel van Cardano. Het is hierbij belangrijk om op te merken dat er in deze lessenserie een grote nadruk op geschiedenis ligt, wat niet het doel is van de te ontwerpen lessenserie. Bovendien wordt de formule van Cardano zelf niet op een relationele, maar op een instrumentele manier gegeven, wat ook niet de bedoeling is van de te ontwerpen lessenserie.

3. Ontwerpeisen en leerdoelen

In dit hoofdstuk worden de ontwerpeisen en leerdoelen achtereenvolgend in secties 3.1 en 3.2 beschreven. De lessenserie zal uiteindelijk aan deze ontwerpeisen en leerdoelen moeten voldoen. Aan de hand van deze leerdoelen en ontwerpeisen worden in sectie 5.1 ook leerdoelen per les opgesteld. Wanneer het ontwerp besproken wordt in hoofdstuk 5 zal het materiaal aan de hand van de ontwerpeisen en leerdoelen geanalyseerd worden.

3.1 Ontwerpeisen lessenserie

Allereerst zitten er een aantal praktische ontwerpeisen aan de lessenserie. De meeste middelbare scholen hebben lessen tussen de 40 en 60 minuten. Leerlingen zijn dus gewend om zich binnen deze tijdsspanne in te zetten. Bovendien moet vanuit praktisch oogpunt de lessenserie niet te groot worden. Uiteindelijk zal de lessenserie als introductie op complexe getallen gebruikt worden, waardoor er meerdere lessen op dit materiaal zullen volgen. De eerste ontwerpeis wordt daarom:

- De lessenserie is in 3 lessen van 50 minuten uit te voeren.

De lessenserie zal verder goed aan moeten sluiten op het niveau van de leerlingen. Zoals te zien was in sectie 2.1 worden complexe getallen momenteel bij Moderne Wiskunde aan het eind van de vierde klas gegeven. Verder stond in die sectie ook dat de leerlingen die wiskunde D hebben ook wiskunde B volgen. Om ervoor te zorgen dat zo veel mogelijk scholen van de lessenserie gebruik kunnen maken wordt de tweede ontwerpeis:

- De lessenserie sluit aan op het wiskunde B en D niveau van vwo leerlingen aan het eind van 4 vwo/het begin van 5 vwo.

Afhankelijk van de school zullen deze lessen door de leerlingen bij een docent te volgen zijn of bevatten ze veel meer zelfstudie. Aangezien wiskunde D vaak als extra vak aangeboden wordt en er daardoor veelal kleinere klassen zijn, zullen leerlingen regelmatig zelf met de stof aan de slag moeten. Daarom zal de lessenserie voor deze zelfstandigheid ontworpen moeten worden. Hieruit komt de derde ontwerpeis voort:

- De lessenserie is zelfstandig door leerlingen te volgen en vereist minimale inmenging van de docent.

Ten slotte is het natuurlijk belangrijk dat de lessenserie ook voldoet aan een aantal leerdoelen. Deze zullen in de volgende sectie uitvoerig besproken worden. Dit geeft ons de vierde en laatste ontwerpeis:

- De lessenserie voldoet aan de leerdoelen, zoals besproken in sectie 3.2.

3.2 Leerdoelen lessenserie

Aan de hand van het theoretisch kader gezamenlijk met de hoofdvraag ontstaan een aantal leerdoelen voor de lessenserie. Allereerst is het belangrijk dat leerlingen derdegraadsvergelijkingen kunnen oplossen. In het theoretisch kader is er al gezien dat alle vergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ na omschrijven op te lossen zijn met de formule van Cardano. Deze formule heeft uiteindelijk ook geleid tot het ontstaan van de complexe getallen, zoals in sectie 2.2.1 besproken is. Het eerste leerdoel wordt daarmee:

- Leerlingen kunnen derdegraadsvergelijkingen oplossen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Zoals in sectie 2.3 is uitgelegd, is het de bedoeling dat leerlingen bij deze oplossingsmethode relationeel begrip ontwikkelen. Hieruit vloeit het tweede leerdoel:

- Leerlingen kunnen uitleggen waarom ze derdegraadsvergelijkingen op deze manier oplossen.

Zoals in de hoofdvraag in sectie 1.1 gesteld is, zal het lesmateriaal uiteindelijk tot een introductie van complexe getallen moeten leiden. In het bestaande lesmateriaal dat besproken is in sectie 2.4.2 was al te zien hoe de complexe oplossingen van de formule van Cardano omgeschreven kunnen worden tot reële oplossingen. Hieruit volgt het derde leerdoel:

- Leerlingen kunnen van oplossingen van de formule van Cardano met behulp van complexe getallen reële oplossingen maken.

De complexe getallen zouden op een betekenisvolle manier bij de leerlingen geïntroduceerd moeten worden, zoals ook in de hoofdvraag in sectie 1.1 te zien is. Als de lessenserie goed ingestoken wordt, zullen leerlingen na afronden van de lessen ook door moeten hebben dat complexe getallen van belang zijn om terug te komen bij reële oplossingen. Dit brengt ons tot het laatste leerdoel van de lessenserie:

- Leerlingen kunnen uitleggen waar complexe getallen voor nodig zijn.

4. Methode

In dit hoofdstuk wordt de onderzoeksmethode, die is toegepast tijdens dit onderzoek, besproken. Het begint met de algemene onderzoeksopzet in sectie 4.1. Vervolgens wordt er dieper ingegaan op het expertpanel en de praktijktest in secties 4.2 en 4.3.

4.1 De onderzoeksopzet

Dit onderzoek is gestart met een literatuurstudie om de eerste deelvragen, zoals besproken in sectie 1.2, te beantwoorden. Hiervoor zijn examenprogramma's en bestaand lesmateriaal bestudeerd in secties 2.1 en 2.4. Verder zijn de oplossingsmethoden voor derdegraadsvergelijkingen en specifiek het afleiden van de formule van Cardano besproken in sectie 2.2. Bovendien zijn de algemene didactische uitgangspunten voor deze lessenserie uiteengezet in sectie 2.3. Aan de hand van de bevindingen zijn ontwerpeisen en leerdoelen opgesteld voor deze lessenserie in hoofdstuk 3. Deze ontwerpeisen en leerdoelen zullen in het vervolg van dit verslag gebruikt worden om de lessenserie mee te ontwerpen. Hiermee start de tweede fase van het onderzoek.

In de tweede fase wordt de lessenserie ontworpen en meermaals getest. Bovendien is er gedurende het hele onderzoek overlegd met een expert, Wisse van der Meulen. Wisse van der Meulen is vakdidacticus aan de Universiteit Twente en tevens eerstegraadsdocent wiskunde. Er zijn twee testmomenten in het onderzoek ingebouwd. De lessenserie wordt eerst voorgelegd aan een expertpanel. Na verbetering zal er een praktijktest plaatsvinden. Deze momenten zullen in de secties 4.2 en 4.3 in detail besproken worden. De goedgekeurde ethiekaanvraag voor deze dataverzameling die is ingediend bij de facultaire BMS Ethiek Commissie is te vinden in bijlage 4. Verder zijn de leerlingen en ouders voor de praktijktest op de hoogte gesteld met behulp van een brief die te vinden is in bijlage 5. Op basis van de resultaten van de praktijktest zullen conclusies en aanbevelingen voor vervolgonderzoek gegeven worden. Deze zijn te vinden in hoofdstuk 6.

4.2 Expertpanel

Zoals hiervoor besproken zal het tweede deel van het onderzoek uiteindelijk tot de daadwerkelijke lessenserie gaan leiden. Deze wordt eerst voorgelegd aan een expertpanel dat wordt samengesteld uit medestudenten van de lerarenopleiding Educatie en Communicatie in de Bètawetenschappen met de specialisatie wiskunde. Deze studenten kunnen met een didactische blik naar het ontwerp kijken en zich goed inleven in de leerlingen. Het expertpanel zal de lessenserie bekijken om te testen of aan de leerdoelen en ontwerpeisen wordt voldaan. De verzamelde feedback zal gebruikt worden om het ontwerp te versterken voordat de lessenserie in de praktijk getest zal worden.

4.2.1 Feedbackformulier

Met behulp van een feedbackformulier wordt data verzameld bij het expertpanel om de eerste versie van de lessenserie te verbeteren. Dit formulier is te vinden in bijlage 6. Het feedbackformulier is gemaakt om inzicht te krijgen in de leerdoelen en ontwerpeisen. Hiervoor is een overzicht van alle ontwerpeisen en leerdoelen, zoals ze zijn opgesteld in hoofdstuk 4, gedeeld met de experts. Bovendien wordt er ook naar de les-specifieke leerdoelen gekeken die worden opgesteld in sectie 5.1. Verder wordt er gevraagd om suggesties te doen ter verbetering van het ontwerp, zodat deze feedback makkelijker in het lesmateriaal verwerkt kan worden. Ten slotte is er ruimte voor algemene feedback die niet specifiek aansluit op de leerdoelen of ontwerpeisen. Op deze manier kunnen de experts ook eventuele onjuistheden aangeven. Hiermee kan de lessenserie zo veel mogelijk geoptimaliseerd worden voordat deze getest wordt in de praktijk.

4.3 Praktijktest lessenserie

De vernieuwde versie van het lesmateriaal zal op 5, 6 en 7 juni bij vier vwo leerlingen van wiskunde D op een school in Overijssel uitgetest worden. Dit is momenteel de gehele populatie wiskunde D op deze school. Hiervoor worden de leerlingen indien nodig uitgeroosterd van hun reguliere lessen. Ze zullen elke dag een les doorwerken. De lessen op de school duren 50 minuten, dus dit sluit aan op de eerste ontwerpeis van de lessenserie. Indien de leerlingen in het geplande uur op school niet helemaal door een les heen kunnen komen, zullen ze hem thuis afmaken. Hierdoor kunnen ze de dag erop goed starten. Om de validiteit en betrouwbaarheid van het onderzoek te waarborgen zal al het lesmateriaal van de leerlingen na afloop bekeken worden. Aan de hand hiervan bekijken we ook of de leerlingen de opgestelde (les-specifieke) leerdoelen behalen. De week na de uitvoering zullen semigestructureerde interviews met alle leerlingen gehouden worden. Aan de hand hiervan zal geanalyseerd worden of de ontwerpeisen en leerdoelen van de lessenserie inderdaad behaald worden.

4.3.1 Interviewleidraad

Voor de semigestructureerde interviews is er een interviewleidraad opgesteld die te vinden is in bijlage 7. Tijdens de inleiding van het interview wordt het doel van het interview aan de leerling duidelijk gemaakt. Vervolgens wordt eerst om een algemeen beeld van de lessenserie gevraagd, zodat de mening van de leerling nog niet gestuurd is door de overige vragen. Hiermee wordt duidelijk wat de leerling het meest is bijgebleven. Hierna wordt specifieker ingegaan op het lesmateriaal. Daarvoor zijn een aantal vragen opgesteld om informatie te verzamelen over de ontwerpeisen en leerdoelen. Hierbij wordt gefocust op de algemene leerdoelen voor de gehele lessenserie. De mate waarin de les-specifieke leerdoelen behaald worden, die worden opgesteld in sectie 5.1, wordt aan de hand van de uitwerkingen van leerlingen geanalyseerd en dus niet in de interviews. Ten slotte is het de bedoeling dat de leerling een voorbeeldprobleem proberen op te lossen. Hierbij wordt gevraagd aan de leerling om zijn/haar gedachtegang bij de opgave te delen. Na afloop worden de laatste leerdoelen getest. Het interview wordt afgerond met een algemene vraag naar overige opmerkingen. De interviews zullen worden opgenomen en getranscribeerd om de validiteit en betrouwbaarheid te waarborgen.

5. De resultaten

In dit hoofdstuk worden de resultaten besproken. Het begint in sectie 5.1 met het opstellen van les-specifieke leerdoelen. Hiermee is de lessenserie ontworpen. In sectie 5.2 wordt een toelichting bij de eerste versie van het ontwerp gegeven. Vervolgens wordt in sectie 5.3 de feedback van het expertpanel besproken. Hoe de lessenserie is aangepast aan de hand van deze feedback is te zien in sectie 5.4. Ten slotte wordt in sectie 5.5 geanalyseerd hoe het lesmateriaal op de ontwerpeisen en leerdoelen aansluit aan de hand van de praktijktest.

5.1 Les-specifieke leerdoelen

In hoofdstuk 3 zijn de ontwerpeisen en leerdoelen voor de lessenserie opgesteld. Daarin is te zien dat de lessenserie voor 3 lessen gemaakt moet worden. Daarom worden er specifieke leerdoelen per les opgesteld. De eerste les is bedoeld om de voorkennis van leerlingen te herhalen, zodat ze een goed gevoel krijgen over de lessenserie. Dit verhoogt de motivatie bij leerlingen, zoals te zien was in sectie 2.3. Bovendien zal door het eerst afleiden van de abc-formule een opbouw gecreëerd worden naar de moeilijkere formule van Cardano in les 2. Om deze opbouw te versterken, zullen de kleine onderdelen die bij het oplossen van derdegraadsvergelijkingen, zoals in sectie 2.2 te zien was, ook al geïntroduceerd worden. Hierdoor komt er zo min mogelijk extra's kijken bij het afleiden van de formule van Cardano in les 2. De bijbehorende leerdoelen voor de eerste les zijn:

- Leerlingen kunnen uitleggen waar de abc-formule vandaan komt.
- Leerlingen worden zich bewust welke derdegraadsvergelijkingen ze al kunnen oplossen met de kennis die ze tot dan toe hebben.
- Leerlingen kunnen derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ herschrijven tot de vorm $x^3 + px + q = 0$.
- Leerlingen kunnen met behulp van de factorstelling algebraïsch extra oplossingen van derdegraadsvergelijkingen vinden als ze de eerste met de grafische rekenmachine hebben gevonden.

In de tweede les wordt de formule van Cardano geïntroduceerd. Dit vereist veel herleiden van de leerlingen, wat ze in een makkelijkere vorm voor de abc-formule hebben gezien. Aangezien de volledige formule van Cardano zal worden afgeleid is dit een belangrijke les om de eerste twee hoofdleerdoelen van de lessenserie, zoals beschreven in sectie 3.2, te behalen. Bovendien gaan de leerlingen ook alvast een instap op het omschrijven van derdemachtswortels doen, zodat de stap naar complexe getallen in de laatste les verkleind wordt. De leerdoelen voor deze les zijn:

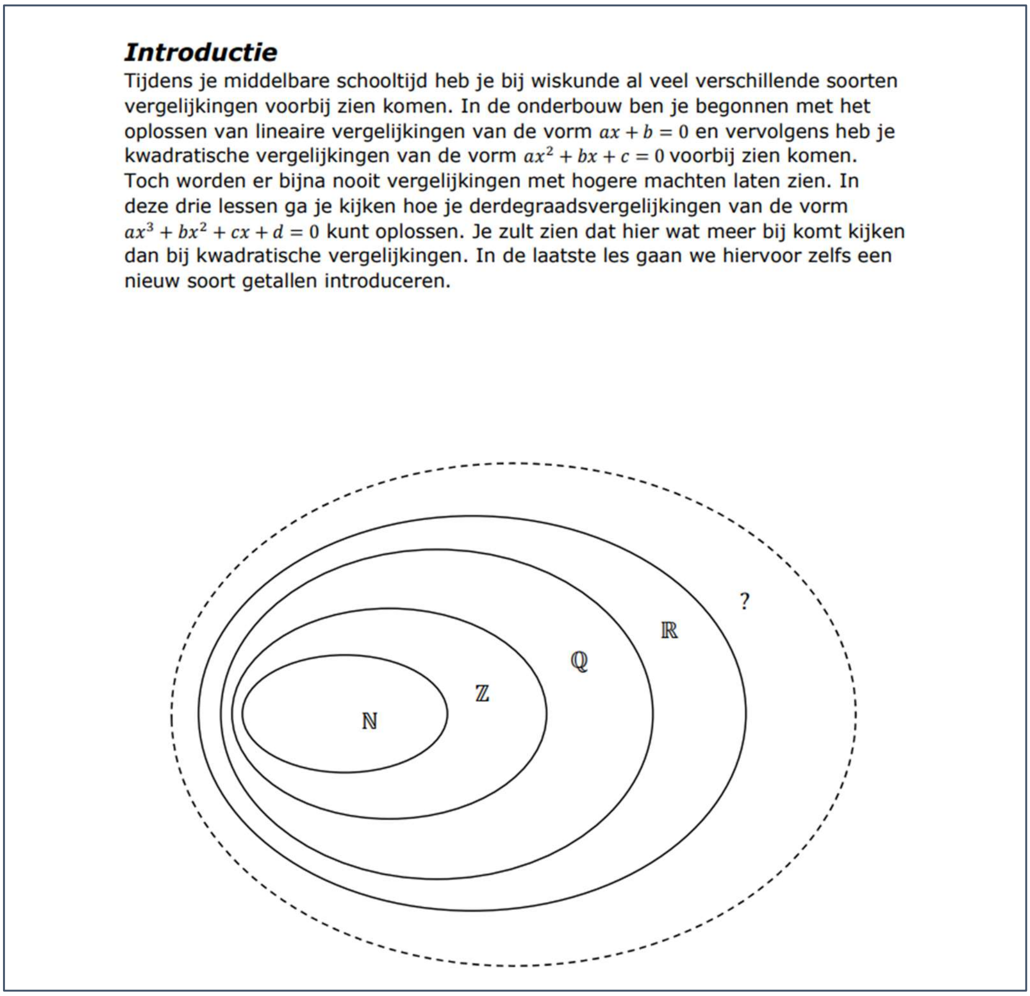
- Leerlingen kunnen derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ oplossen met behulp van de formule van Cardano.
- Leerlingen kunnen aan de hand van een opgave van ingewikkeld uitziende expressies simpelere gehele getallen maken.

In de laatste les worden de complexe getallen zelf dan ook daadwerkelijk geïntroduceerd. Hiermee worden de laatste hoofdleerdoelen, zoals besproken in sectie 3.2, als het goed is behaald. Leerlingen leren zo daadwerkelijk het begin om met complexe getallen te rekenen. Ze hoeven nog niet alle rekenregels van complexe getallen te kennen omdat deze lessenserie alleen nog maar een introductie is. De leerdoelen van deze les zijn:

- Leerlingen kunnen complexe getallen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen.
- Leerlingen kunnen van oplossingen van de formule van Cardano met behulp van complexe getallen reële oplossingen maken.
- Leerlingen kunnen uitleggen waar complexe getallen voor nodig zijn.

5.2 Eerste versie ontwerp

Zoals besproken in de methode is er aan de hand van het vooronderzoek met behulp van de ontwerpeisen en leerdoelen een eerste versie van de lessenserie gemaakt. Hiervoor zijn de les-specifieke leerdoelen opgesteld, zoals besproken in sectie 5.1. De ontwerpkeuzes voor de eerste versie van de lessenserie worden hier stap voor stap uitgelegd. Hiervoor gebruiken we stukken van de lessenserie als afbeelding, waarna deze toegelicht worden. De volledige lessenserie is te vinden in bijlage 8.



Introductie

Tijdens je middelbare schooltijd heb je bij wiskunde al veel verschillende soorten vergelijkingen voorbij zien komen. In de onderbouw ben je begonnen met het oplossen van lineaire vergelijkingen van de vorm $ax + b = 0$ en vervolgens heb je kwadratische vergelijkingen van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ voorbij zien komen. Toch worden er bijna nooit vergelijkingen met hogere machten laten zien. In deze drie lessen ga je kijken hoe je derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kunt oplossen. Je zult zien dat hier wat meer bij komt kijken dan bij kwadratische vergelijkingen. In de laatste les gaan we hiervoor zelfs een nieuw soort getallen introduceren.

Figuur 8: Introductie lessenserie.

De lessenserie begint met een korte introductie over wat de leerlingen te wachten staat. Hierin wordt de opbouw van lineaire naar kwadratische vergelijkingen benoemd voor de leerlingen en komen ze erachter dat er nu naar derdegraadsvergelijkingen gekeken gaat worden. Hieruit blijkt een duidelijke opbouw, wat ervoor zorgt dat de leerlingen het gevoel hebben dat ze deze opgaven aankunnen. Dit is belangrijk voor de motivatie van het vak, zoals besproken in sectie 2.3 (Middleton & Spanias, 1999). Bovendien wordt er al gehint dat er in de laatste les naar een nieuw soort getallen gekeken zal worden, waardoor de interesse van de leerlingen geprikkeld wordt en de verwachtingen duidelijk worden.

Les 1

Laten we niet op de zaken vooruit lopen en beginnen bij wat je al weet. Wanneer je een kwadratische vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ wilt oplossen kan dat op een aantal manieren. In de meest simpele gevallen geldt $b = 0$ of $c = 0$. Bij vergelijkingen van de vorm $ax^2 + bx = 0$ kan de x buiten haakjes gehaald worden en bij vergelijkingen van de vorm $ax^2 + c = 0$ kunnen we deze herleiden tot de vorm $x^2 = -\frac{c}{a}$ om zo de wortel te trekken.

Opgave 1

Wat voor type vergelijking krijg je wanneer $a = 0$?

Opgave 2

Los op.

a) $9x^2 - 5x = 0$
b) $3x^2 - 48 = 0$

Wanneer de $a, b, c \neq 0$ zullen andere oplossingsmethoden gebruikt moeten worden. Als de getallen mooi uitkomen kan de product-som methode gebruikt worden: $ax^2 + bx + c = 0$ leidt dan tot $(dx + e)(fx + g) = 0$. Als dat niet werkt kun je altijd nog kwadraat afsplitsen of de abc-formule gebruiken.

Opgave 3

Los de vergelijking $x^2 - 3x - 10 = 0$ op met behulp van...

a) ... de product-som methode.
b) ... kwadraat afsplitsen.
c) ... de abc-formule.

Figuur 9: Les 1 (deel 1).

De eerste les begint met het herhalen van de voorkennis van de leerlingen. De leerlingen moeten een aantal kwadratische vergelijkingen oplossen via verschillende oplossingsmethoden. Hierbij wordt er voor succes gezorgd zodat leerlingen een positieve perceptie over hun kunnen ontwikkelen. Dit is belangrijk voor de motivatie, zoals in sectie 2.3 besproken is (Middleton & Spanias, 1999). Bovendien wordt hier kwadraat afsplitsen herhaald, waarmee de leerlingen later de abc-formule gaan afleiden. Hierdoor zal deze informatie beter aansluiten in het cognitieve schema van de leerlingen.

Veel mensen gebruiken de abc-formule zonder zich af te vragen waarom deze eigenlijk werkt. Toch wordt deze formule rond het jaar 825 al gebruikt in de Arabische wiskunde[1]. De abc-formule is af te leiden aan de hand van het kwadraat afsplitsen.

Tip: Maak het getal voor de x^2 eerst gelijk aan 1.

Opgave 4

a) Laat zien dat de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ te herleiden is tot de vorm $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$.

b) Los de vergelijking verder op.

c) Laat zien dat de oplossingen overeenkomen met de oplossingen die de abc-formule geeft.

Tip: Gebruik dat $\sqrt{\frac{-4ac+b^2}{4a^2}} = \frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{\sqrt{4a^2}}$.

Het oplossen van derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ is lastiger dan het oplossen van kwadratische vergelijkingen. Toch ken je al een aantal methodes voor simpelere vergelijkingen. Zelfs sommige hogeregraadsvergelijkingen kun je al oplossen.

---

[1] De formule werd toen wel iets anders opgeschreven omdat de symbolen die wij in de wiskunde gebruiken nog niet allemaal bestonden. Als je meer over deze geschiedenis wilt weten zou je het boek Wortels van de Wiskunde kunnen lezen.

Figuur 10: Les 1 (deel 2).

In de vierde opgave wordt de abc-formule aan de hand van het kwadraat afsplitsen afgeleid met behulp van guided reinvention (Freudenthal, 2002). Met behulp van deelvragen werken leerlingen vanuit het kwadraat-afsplitsen naar de abc-formule toe. Dit wordt op een gestructureerde manier gedaan door tussenantwoorden te geven. Hierdoor worden misstappen zo veel mogelijk voorkomen. Dit is volgens Barton, zoals in sectie 2.3 besproken, erg belangrijk om guided reinvention goed uit te voeren (Timmer & Caspers, 2022). Op deze manier zien leerlingen dat de abc-formule daadwerkelijk ergens vandaan komt, in plaats van dat ze deze doelloos gebruiken. Daarmee wordt relationeel begrip gecreëerd, zoals ook in sectie 2.3 besproken is (Skemp, 2006). Dit past bij het eerste leerdoel van deze les zoals te zien in sectie 5.1. Het zal de leerlingen later ook een beter idee geven van de formule van Cardano wanneer ze deze aan het afleiden zijn. De abc-formule is al bekend en geeft daarom een makkelijk voorbeeld om er even in te komen. Hiermee wordt er opnieuw voor een positieve perceptie van het eigen kunnen gezorgd bij de leerlingen, om de motivatie te vergroten (Middleton & Spanias, 1999). De tips worden bewust in denkwolkjes gegeven zodat ze makkelijker te negeren zijn voor leerlingen die ze niet nodig hebben. Op deze manier staan ze namelijk los van de opgave zelf. Hiermee komen de leerlingen beter in een productive struggle terecht, omdat ze op hun eigen niveau kunnen werken. Leerlingen die het nodig hebben zullen de tips kunnen gebruiken, terwijl de sterkere leerlingen de tips kunnen negeren. Op deze manier is de lessenserie makkelijker zelfstandig te volgen. Dit sluit daarmee aan op onze derde ontwerpeis, zoals besproken in sectie 3.2. Verder is de tweede tip in deze opgave bewust zo geschreven dat leerlingen zelf naar de eerste versie van de breuk moeten gaan zoeken. Op die manier zullen ze op de “$-4ac$” moeten komen, wat vanuit de vergelijking bij a nog niet te zien is. Vervolgens zijn de leerlingen dicht genoeg bij de daadwerkelijke eindoplossing dat ze deze zelf kunnen vinden.

Opgave 5

Los op.

a) $2x^3 + 54 = 0$
b) $18x^3 - 9x^2 = 0$
c) $7x^3 = 0$
d) $x^3 - 6x^2 - 7x = 0$
e) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

Tip: Alle mogelijkheden worden weergegeven in opgave 5.

Opgave 6

a) Welke variabelen uit de algemene vorm van de derdegraadsvergelijking (a, b, c of d) moeten gelijk zijn aan 0 om de vergelijking te kunnen oplossen met de kennis die je al hebt? Er zijn meerder opties mogelijk.
b) Welke variabele kan niet gelijk zijn aan 0?

Figuur 11: Les 1 (deel 3).

Na het afleiden van de abc-formule gaan de leerlingen naar de hogeregraads-vergelijkingen kijken. Hierin wordt er eerst gekeken naar een aantal situaties van derdegraadsvergelijkingen die de leerlingen al kunnen oplossen. Deze zijn opgesteld aan de hand van de voorkennis van leerlingen die beschreven werd in sectie 2.1. Dit sluit aan bij leerdoel 2 van deze les, zoals besproken in sectie 5.1. Bovendien moeten de leerlingen verder over de vergelijkingen nadenken in opgave 6, zodat hun kennis uitgebreid kan worden in de lessenserie. Hierdoor sluit de nieuwe kennis later beter aan op het cognitieve schema, wat een voordeel is van relationeel begrip. Dit is besproken in sectie 2.3 (Skemp, 2006). Bovendien zorgen deze vragen ervoor dat het materiaal goed op het niveau van de leerlingen aansluit, wat de tweede ontwerpeis is, zoals besproken in sectie 3.1. Verder wordt er bewust een vierdegraadsvergelijking gegeven, omdat leerlingen deze zullen moeten oplossen door middel van substitutie. Dit moeten de leerlingen ook al kunnen, zoals besproken is in sectie 2.1. De leerlingen hebben dit substitueren later bij de formule van Cardano ook nodig. Door de voorkennis alvast te herhalen zal de nieuwe situatie straks beter aansluiten in het cognitieve schema van de leerlingen.

Voor derdegraadsvergelijkingen is er uiteindelijk een formule gevonden die net zoals de abc-formule een oplossing geeft. In de volgende les zullen we deze formule gaan afleiden. Deze formule geeft altijd maar 1 oplossing van een derdegraadsvergelijking. De andere oplossingen zullen dus op een andere manier gevonden moeten worden.

Tip: De drie vormen met een positief getal voor de x^3 heb je al geplot in a. Wat zou er gebeuren als er een negatief getal voor de x^3 staat?

Opgave 7

a) Plot de grafieken van $f(x) = 3x^3 + 2$, $g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7x - 5$ en $h(x) = x^3 - 2x + 3$ op je grafische rekenmachine.

b) Schets de verschillende vormen van derdegraadsvergelijkingen.

c) Hoeveel oplossingen zou een vergelijking van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kunnen hebben?

Tip: Bekijk hoeveel snijpunten de grafieken uit b kunnen hebben met de x-as als je ze omhoog en omlaag schuift.

De formule om derdegraadsvergelijkingen op te lossen, die bekend staat als de formule van Cardano komt van de methode die Girolamo Cardano (1501-1576) heeft gevonden om één van de oplossingen te krijgen van een vergelijking van de vorm $x^3 + cx + d = 0$. Hierbij zien we dat $a = 1$ en $b = 0$. Cardano had de formule eigenlijk gekregen van een andere wiskundige Niccolò Fontana Tartaglia (1499, 1557) met de belofte om deze geheim te houden. Tartaglia had de oplossingsmethode nog niet gepubliceerd omdat het in die tijd erg gebruikelijk was om wiskundewedstrijden aan te gaan met andere geleerden. Hoe langer je de oplossingsmethoden geheim kon houden, hoe groter de kans dat je deze wedstrijden won. Cardano heeft de oplossingsmethode na lang aandringen gekregen. Vervolgens heeft hij de methode zelf bewezen en uitgebreid naar het oplossen van alle derdegraadsvergelijkingen. Dit wilde hij graag publiceren om op die manier beroemd te worden.

Figuur 12: Les 1 (deel 4).

Vervolgens wordt de eerste stap naar de formule van Cardano gemaakt. Leerlingen zullen eerst gaan kijken hoe ze overige oplossingen kunnen vinden aangezien de formule van Cardano binnen de reële getallen altijd maar 1 oplossing geeft. Daarvoor gaan de leerlingen eerst uitzoeken hoeveel oplossingen van derdegraadsvergelijkingen er daadwerkelijk te vinden zijn in opgave 7. Hierbij maken de leerlingen de oplossingen visueel zichtbaar. Op deze manier wordt de informatie op verschillende manieren aangereikt, waardoor het beter blijft hangen in het cognitieve schema van de leerlingen. Dit helpt ook bij de koppeling tussen de proces en objectkijk van Sfard (1991) die besproken is in sectie 2.3. Uiteindelijk is het vinden van alle oplossingen ook de aanleiding geweest voor het ontstaan van complexe getallen, zoals beschreven in hoofdstuk 1 en sectie 2.2.

Aangezien hij erachter kwam dat niet alleen Tartaglia, maar ook een andere wiskundige, Scipione del Ferro (1465-1526) de derdegraadsvergelijkingen heeft leren oplossen, vond Cardano dat hij uiteindelijk de volledige oplossingsmethode wel kon publiceren. Deze was gelijk aan die van Tartaglia, maar Tartaglia kon hier niets tegen doen. Tartaglia was terecht boos, want de formule staat nu nog steeds bekend als de formule van Cardano. De aanvulling van Cardano's onderzoek is dat hij er zelf achter kwam dat alle vergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ omgeschreven kunnen worden in de vorm $x^3 + px + q = 0$. Hierdoor konden alle derdegraadsvergelijkingen opgelost worden. Dit herschrijven van de vergelijking deed hij door de x te vervangen en op te lossen voor een andere variabele. Op dezelfde manier heb jij eerder voor vergelijkingen van de vorm $ax^4 + bx^2 + c = 0$ de variabele $u = x^2$ gesubstitueerd. Dit had je bijvoorbeeld nodig in opgave 5e.

Tip: Vul $x = y + s$ in in de vergelijking en maak gebruik van het feit dat $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Opgave 8

We gaan de x in $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ vervangen door $x = y + s$.

a) Voor welke waarde van s leidt dit tot de vergelijking van de vorm $ay^3 + my + n = 0$, waarbij de y^2 verdwenen is?

b) Hoe komen we van $ay^3 + my + n = 0$ tot de vorm $y^3 + py + q = 0$?

Figuur 13: Les 1 (deel 5).

Aangezien de formule van Cardano in deze lessenserie geïntroduceerd wordt, worden de leerlingen ook even mee teruggenomen in de tijd naar hoe deze formule eigenlijk ontstaan is. Cardano heeft de formule namelijk eigenlijk helemaal niet zelf bedacht. Wel deed hij de aanvulling dat alle derdegraadsvergelijkingen in de vorm $x^3 + px + q = 0$ geschreven konden worden, zoals bewezen in sectie 2.2.1. De leerlingen leren vervolgens dit omschrijven aan. Het omschrijven hoort bij het derde leerdoel van deze les. Dit levert ook de eerste verwijzing naar een eerdere opgave op, namelijk de substitutie die herhaald is in 5e. Op deze manier wordt het leerlingen duidelijk dat ze op de opgaven voorbereid worden en niet zomaar in het diepe springen. Dit geeft de leerlingen opnieuw een versterkt beeld van hun eigen kunnen en zal de motivatie daarmee verhogen, zoals besproken in sectie 2.3 (Middleton & Spanias, 1999).

Wanneer we met de formule van Cardano eenmaal een oplossing gevonden hebben, willen we ook de eventuele overige 2 oplossingen van de derdegraadsvergelijking kunnen vinden. Hiervoor gebruiken we de zogenoemde factorstelling. De factorstelling zegt:

"Als $x = k$ een oplossing is van de vergelijking $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ dan is $x^3 + ax^2 + bx + c = (x - k)(x^2 + \ldots)$." Voor kwadratische vergelijkingen gebruiken we dit eigenlijk ook al voor de product-som methode.

Opgave 9

a) Zoek met behulp van de grafische rekenmachine de gehele oplossing van de vergelijking $x^3 - 15x - 4 = 0$ (dus geen kommagetal).
b) Gebruik nu de factorstelling om algebraïsch de overige twee oplossingen van de vergelijking $x^3 - 15x - 4 = 0$ te vinden.
c) Komen de gevonden oplossingen overeen met de oplossingen uit de grafische rekenmachine?
d) Vind op dezelfde manier de exacte oplossingen van $x^3 - 21x - 20 = 0$.

Tip: Weet je niet hoe je moet beginnen? Stel $(x^3 - 15x - 4) = (x - 4)(x^2 + ax + b)$ en maak een stelsel om a en b uit te rekenen.

Figuur 14: Les 1 (deel 6).

Ten slotte eindigt de eerste les met de factorstelling. Deze komt voort uit het bestaande lesmateriaal van Getal en Ruimte, zoals in sectie 2.4.2 beschreven is (Dijkhuis et al., 2016-b). Doordat leerlingen vergelijkingen in de vorm $x^3 + px + q = 0$ hebben omgeschreven, is de factorstelling makkelijker te gebruiken. Hoewel de tip bij 9b ook al in de factorstelling verwerkt zou kunnen worden, is de factorstelling letterlijk overgenomen uit Getal en Ruimte en wordt de $(x^2 + ax + b)$ daarom als tip bijgevoegd. Hierdoor kunnen leerlingen ook niet in de war raken dat de variabelen a en b meteen gevonden kunnen worden. Om de eerste oplossing te vinden gebruiken de leerlingen de grafische rekenmachine. Hiermee bouwt de stof opnieuw voort op de bestaande kennis van de leerlingen, wat de motivatie verhoogt (Middleton & Spanias, 1999). De voorbeelden zijn zo gekozen dat precies één van de oplossingen een geheel getal vormt, maar er wel 3 oplossingen te vinden zijn. Dit sluit daarmee aan bij het laatste leerdoel van deze les. Bovendien wordt het eerste voorbeeld in les 3 ook gebruikt om uiteindelijk de complexe getallen te introduceren. Daarmee zal dit voorbeeld straks herkenbaar zijn voor de leerlingen, waardoor de nieuwe kennis goed aan zal sluiten.

Les 2

In de vorige les hebben we al gezien dat alle vergelijkingen om te schrijven zijn tot de vorm $y^3 + py + q = 0$. We gaan er in deze les vanuit dat $p, q \neq 0$, anders kun je de vergelijking al oplossen met de kennis die je al had. Verder weten we hoe we eventuele overige oplossingen kunnen vinden wanneer we een eerste oplossing hebben. In deze les gaan we kijken hoe we deze eerste oplossing kunnen vinden. Hiervoor gaan we de formule van Cardano afleiden. Een aantal stappen die hierin gebeuren lijken in het eerste opzicht misschien niet logisch, maar bedenk dat de abc-formule eerst ook als magie leek. We introduceren nu eerst een extra variabele.

Tip: Maak opnieuw gebruik van het feit dat $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Opgave 10

Substitueer $y = u + v$ in de vergelijking $y^3 + py + q = 0$.
Laat zien dat dit gelijk is aan $u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0$.

Figuur 15: Les 2 (deel 1).

De tweede les begint met het kort benoemen van wat de leerlingen in de eerste les gedaan hebben. Hiermee worden de leerlingen aan het afleiden van de abc-formule herinnerd, wat de voorkennis opfrist. Daardoor zal de lastigere formule van Cardano beter in het cognitieve schema worden opgeslagen. Leerlingen krijgen op deze manier een beter beeld van wat ze in deze les te wachten staat. Daarna moeten de leerlingen vrij snel de diepte ingaan om de formule van Cardano af te leiden. Wat nieuw is ten opzichte van de abc-formule is dat er bij de formule van Cardano extra variabelen geïntroduceerd worden. Om de leerlingen hier rustig aan te laten wennen, doen ze dit los in de eerste opgave van deze les.

De formule die we nu gevonden hebben kunnen we versimpelen door $(u+v)(3uv+p)$ gelijk te stellen aan 0.

Opgave 11

a) Leg uit waarom $(u+v)(3uv+p)=0$ niet kan leiden tot $u+v=0$.
b) Welke vergelijking krijgen we uit opgave 10 wanneer we $3uv+p$ gelijk stellen aan 0?

Tip: Wat gebeurt er in $y^3+py+q=0$ wanneer $u+v=0$?

Figuur 16: Les 2 (deel 2).

Met de extra variabelen versimpelt uiteindelijk de formule, zodat hij makkelijker op te lossen wordt. Voor het versimpelen wordt een tweede aanname gedaan in het bewijs van de formule van Cardano. Dit is daarmee de laatste aanname die wordt gedaan in het bewijs, zoals in sectie 2.2.1 te zien is. Daarom is ook voor deze stap een losse opgave uitgetrokken.

We willen nu graag weer van een van de extra variabelen afkomen. Hiervoor gebruiken we dat we voor het versimpelen hebben gekozen dat $3uv+p=0$. We willen eerst van de variabele v afkomen.

Opgave 12

a) Waarom maakt het niet uit welke variabele (u of v) je vrijmaakt in de vergelijking $3uv+p=0$?
b) Maak v vrij.
c) Substitueer v terug in de vergelijking zoals gevonden in opgave 11b.
d) Vermenigvuldig de vergelijking met u^3. Wat valt je op?
e) Los de vergelijking verder op en laat zien dat
$u^3=\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2} \vee u^3=\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$.
f) Laat zien dat de waarden van u^3 overeenkomen met
$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} \vee -\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$.
g) Gebruik nu $u^3+v^3+q=0$ om v^3 te berekenen bij beide oplossingen.
h) Bepaal u en v en bereken y. Hoeveel mogelijke oplossingen voor y heb je nu gevonden?

Tip: Kijk terug naar hoe we deze variabelen introduceerden in opgave 10.

Tip: Gebruik de substitutie $t=u^3$.

We hebben nu de formule van Cardano gevonden. Voor vergelijkingen van de vorm $y^3+py+q=0$ geeft de formule van Cardano een oplossing door:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Figuur 17: Les 2 (deel 3).

Vervolgens gaan de leerlingen verder met de afleiding. Hierin zijn geen extra aannames meer nodig en daarom is ervoor gekozen om de rest van de afleiding in één opgave te behandelen. Dit is daarmee een lange algebraïsche herleiding die opnieuw aan de hand van guided reinvention doorlopen kan worden. Om de leerlingen te sturen wordt de afleiding opnieuw in verschillende deelstappen met deelvragen opgebroken. Bovendien worden halverwege de opgave de tussenantwoorden laten zien om te voorkomen dat leerlingen door blijven werken met eventuele foute antwoorden. Dit sluit weer aan bij de ideeën van Barton, zoals beschreven in sectie 2.3 (Timmer & Caspers, 2022). Deze tussenresultaten worden niet bij elke stap gegeven, om te voorkomen dat het denkwerk van de leerlingen compleet overbodig wordt. Hierdoor blijven de leerlingen wel in de productive struggle (Middleton & Spanias, 1999).

In opgave 12e is de substitutie te zien waarvan in opgave 5e al de voorkennis is opgehaald. Hiermee wordt voor herhaald succes gezorgd, wat de motivatie in deze opgave vergroot (Marzano & Miedema, 2018). Verder wordt de abc-formule hier gebruikt die uitvoerig behandeld is in de eerste les. Ook dit zorgt voor herhaald succes. Na de opgave wordt er afgesloten met de volledige formule van Cardano, zodat leerlingen zeker weten dat ze op het goede resultaat zijn uitgekomen. Mochten ze niet op het juiste resultaat zijn uitgekomen, zorgt dit ervoor dat ze in ieder geval niet in de problemen komen met de rest van het lesmateriaal. Dankzij opgave 12 weten de leerlingen waar de formule van Cardano vandaan komt. Hierdoor wordt het relationele begrip gecreëerd bij de leerlingen, zoals in sectie 2.3 besproken (Skemp, 2006).

Opgave 13

We gaan nu de vergelijking $x^3 + 6x - 20 = 0$ oplossen. Hiervoor gebruiken we opnieuw de hele procedure.

a) Substitueer $x = u + v$ in de vergelijking.
b) Maak v vrij in de vergelijking $3uv + p = 0$ en substitueer dit opnieuw in de gevonden vergelijking.
c) Vermenigvuldig de vergelijking met u^3 en bepaal u^3.
d) Bepaal u en v bereken hiermee x.
e) Vul de gevonden oplossing in op je grafische rekenmachine. Waar zou deze oplossing aan gelijk moeten zijn?

Figuur 18: Les 2 (deel 4).

Na de lange algebraïsche afleiding wordt de procedure nogmaals herhaald aan de hand van een getallenvoorbeeld. Dit past bij het eerste leerdoel van deze les, zoals besproken in sectie 5.1. Hierbij zien leerlingen daadwerkelijk dat het geleerde in de praktijk gebracht kan worden en worden de stappen nogmaals herhaald, zodat ze bekender worden voor de leerlingen. Dit zorgt voor herhaald succes, wat de motivatie van de leerlingen vergroot (Marzano & Miedema, 2018). Bovendien zullen de leerlingen aan het eind van de opgave de introductie zien voor het laatste onderdeel van deze les.

Blijkbaar komen sommige ingewikkeld uitziende oplossingen dus eigenlijk overeen met een stuk simpeler uitziende getallen. Dit willen we ook algebraïsch kunnen laten zien. Hiervoor willen we de derdemachtswortel van $10+\sqrt{108}$ en $10-\sqrt{108}$ te berekenen.

Tip: Maak opnieuw gebruik van het feit dat $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Opgave 14

a) Bereken $(1+\sqrt{3})^3$.
b) Laat zien dat de oplossing die je gevonden hebt in opgave 14a gelijk moet zijn aan $10+\sqrt{108}$. Bereken hiermee $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}$.
c) Gebruik nu $(1-\sqrt{3})^3$ om $\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}$ te berekenen.
d) Bereken met b en c algebraïsch $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} + \sqrt[3]{10-\sqrt{108}}$.

Op deze manier kunnen we dus alsnog algebraïsch laten zien dat sommige ingewikkeld uitziende oplossingen gelijk zijn aan een stuk simpeler uitziende getallen[2]. Voor het laatste voorbeeld dat je in opgave 9 heb je gebruikt zul je de volgende les namelijk zien dat dit tot problemen zal leiden. Dan zullen we ook de nieuwe getallensoort introduceren zoals we in de inleiding al beloofd hadden.

[2] Het vinden van de getallen als $1+\sqrt{3}$ om de derdemachtswortel te nemen hoef je niet zelf te kunnen. Als je hier meer over wilt weten kun je bij de docent terecht. Hiervoor gebruiken we wel de simpeler uitziende oplossing al.

Figuur 19: Les 2 (deel 5).

We sluiten de tweede les af met een opgave over het herschrijven van derdemachtswortels. Dit is waar de complexe getallen uiteindelijk voor nodig zijn. Met dit getallenvoorbeeld hebben de leerlingen de procedure al een keer gezien, die ze later met de complexe getallen nodig hebben. Door de procedure eerst binnen de bekende getallenverzameling te introduceren bouwt het niveau opnieuw op, wat de motivatie verhoogd. Dit sluit aan bij het tweede leerdoel van deze les zoals besproken in sectie 5.1. Dit specifieke getallen-voorbeeld komt uit de lessenserie gemaakt voor Historical Aspects of Classroom Mathematics, zoals in sectie 2.4.1 besproken (Kosman & de Vos, 2016). In tegenstelling tot die lessenserie focussen wij niet op de afleiding om zelf $1+\sqrt{3}$ te vinden, maar moeten de leerlingen alleen het omschrijven kunnen gebruiken. Dit is ook het enige wat er later bij de complexe getallen van ze verwacht wordt. In de afsluiting wordt daarom bewust gehint naar de nieuwe getallensoort. Wanneer leerlingen wel meer over het afleiden van $1+\sqrt{3}$ willen weten, kunnen ze het desbetreffende stuk uit de lessenserie van Kosman en de Vos krijgen, zodat ze dit alsnog zelf kunnen uitzoeken. Dit wordt aangegeven in de voetnoot bij de lessenserie. Op deze manier wordt het de leerlingen duidelijk welke aspecten er wel en niet binnen de leerdoelen vallen. Bovendien kunnen gemotiveerde leerlingen dieper op het materiaal ingaan. Daardoor sluit het lesmateriaal nog beter aan bij het niveau van de leerlingen, waardoor ze in een productive struggle terechtkomen (Middleton & Spanias, 1999).

Les 3

Zoals we in de vorige les al aangekondigd hadden gaan we nu naar het voorbeeld kijken van opgave 9.

Opgave 15

a) Welke oplossingen van de vergelijking $x^3 - 15x - 4 = 0$ heb je gevonden in opgave 9?
b) Bereken met de formule van Cardano de oplossingen van $x^3 - 15x - 4 = 0$. Wat valt je op?

Figuur 20: Les 3 (deel 1).

De laatste les gaat daadwerkelijk in op het ontstaan van de complexe getallen. Leerlingen kijken hiervoor opnieuw naar het getallenvoorbeeld dat ze in les 1 hadden gezien. Door alleen de formule van Cardano in te vullen, zien de leerlingen meteen dat er negatieve tweedemachtswortels ontstaan. Daarmee kan er in deze les gefocust worden op de complexe getallen zelf. Bovendien zien de leerlingen nu dat ze de grafische rekenmachine, die ze in opgave 9 nog nodig hadden, nu niet meer hoeven te gebruiken. Hiermee wordt het de leerlingen duidelijk wat ze allemaal geleerd hebben in deze lessenserie.

De formule van Cardano leidt nu duidelijk tot geen oplossingen, want we hebben met de wortel van een negatief getal te maken. In opgave 9 hebben we echter gezien dat er drie mogelijke oplossingen zijn voor deze vergelijking. Daardoor moet de formule van Cardano wel een oplossing geven. We gaan daarom proberen op dezelfde manier als aan het eind van de vorige les via $a + \sqrt{-b}$ op een oplossing te komen. Hiervoor zullen we dus met negatieve wortels moeten gaan werken. Bombelli deed dit voor het eerst. Hij gebruikte net zoals dat $(\sqrt{3})^2 = 3$ ook moest gelden $(\sqrt{-3})^2 = -3$.

Opgave 16

Ga er voor nu even vanuit dat je wel met negatieve wortels kunt werken en bereken $(\sqrt{-b})^2$.

Het rekenen met negatieve wortels is mogelijk en in sommige gevallen zelfs noodzakelijk. Dit klinkt misschien een beetje gek, maar aan het begin van de middelbare school had je waarschijnlijk ook niet bedacht dat je met negatieve getallen kon werken. De getallensystemen zijn door de jaren heen steeds iets verder uitgebreid en negatieve wortels zijn hierin de volgende stap. Deze getallen zijn ontstaan om derdegraadsvergelijkingen te kunnen oplossen. We noemen deze negatieve wortels onderdeel van de complexe getallen.

Opgave 17

Bereken de volgende getallen en herleid zo ver mogelijk.

a) $\sqrt{3} + \sqrt{3}$
b) $\sqrt{-5} + \sqrt{-5}$
c) $\sqrt{9}$
d) $\sqrt{-16}$
e) $\sqrt{1} \cdot \sqrt{3}$
f) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{-7}$
g) $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}$

Figuur 21: Les 3 (deel 2).

Vervolgens gaan de leerlingen aan de slag met het werken met de negatieve tweedemachtswortels. Ze werken met een concept dat ze eerder nog niet kenden en bouwen dit daarom in 2 opgaven op. Dit sluit aan bij het eerste leerdoel van deze les. Eerst zien de leerlingen in opgave 16 wat er zou gebeuren als negatieve tweedemachtswortels zouden bestaan. Vervolgens krijgen ze in opgave 17 een rijtje aan berekeningen. Deze worden bewust afgewisseld met een aantal reële tweedemachtswortels, zodat leerlingen de rekenregels daaruit blijven herkennen.

Op deze manier wordt de nieuwe informatie beter opgeslagen in het cognitieve schema van de leerlingen.

Deze laatste opgave leidt nu tot een probleem. Als we de rekenregels die we voor wortels kennen volgen leidt g tot $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{-2 \cdot -2} = \sqrt{4} = 2$. We hebben hiervoor echter al gezien dat $\left(\sqrt{-b}\right)^2 = -b$ en $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \left(\sqrt{-2}\right)^2 = -2$. Blijkbaar gaat er dus iets mis met onze rekenregels n we met deze negatieve wortels gaan

rekenen. Aangezien we $\sqrt{-1}$ tot nu toe nog niet kenden, gaan we hier niet zomaar mee rekenen, maar introduceren we hier een nieuw symbool voor: $\sqrt{-1} = i$. Hierbij spreken we af dat $i^2 = -1$. We kunnen andere negatieve wortels nu ook schrijven met behulp van i. Zo krijgen we $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$. Hierdoor kunnen we $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}$ berekenen als $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{2}i \cdot \sqrt{2}i = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot i^2 = 2 \cdot -1 = -2$. We gaan van nu af aan negatieve wortels altijd terugschrijven naar een vorm met i. Hiervoor hebben we ook getallen als $2i$ en $3 + i$ nodig. Daardoor kunnen we alle complexe getallen schrijven in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$. Alle getallen die we al kenden vallen hier dus ook onder, want we kunnen een complex getal zo kiezen dat $b = 0$. De getallenverzameling van de complexe getallen schrijven we ook wel op met het symbool $\mathbb{C}$.

Opgave 18

Bereken de getallen en herleid zo ver mogelijk. Schrijf ze in de vorm $a + bi$.

a) $\sqrt{-5} + \sqrt{-5}$
b) $\sqrt{-16}$
c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{-7}$
d) $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$
e) $3 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{-20}$
f) $(2 + \sqrt{-3})(5 - \sqrt{-12})$
g) $(c + di)^2$

Figuur 22: Les 3 (deel 3).

Vooral het vermenigvuldigen van negatieve tweedemachtswortels kan tot verwarring leiden. Toen de complexe getallen net gebruikt werden in de zestiende eeuw, werden vermenigvuldigingen ook al inconsistent gebruikt (Berlinghoff & Gouvêa, 2022). Daarom wordt in het lesmateriaal nu de letter i geïntroduceerd om van deze verwarring af te komen. Daarmee is de introductie van de complexe getallen voor de leerlingen compleet. Dit is het vervolg op het eerste leerdoel van deze les. In opgave 18 oefenen leerlingen met deze volledige set aan rekenregels. Hierbij worden de voorbeelden die de leerlingen in opgave 17 al gezien hebben herhaald, zodat ze in de vorm $a + bi$ omgeschreven kunnen worden. Op deze manier wordt herhaald succes gecreëerd, wat belangrijk is voor het leerproces (Marzano & Miedema, 2018).

Nu we een beetje weten hoe we met complexe getallen kunnen rekenen gaan we terug naar de derdegraadsvergelijking waar we mee bezig waren. We willen laten zien dat $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ gelijk is aan een reëel getal. We kunnen dit niet op de rekenmachine uitproberen, aangezien de negatieve wortels een error zullen geven, maar we kunnen de grafiek wel plotten en op die manier de nulpunten vinden. Vervolgens kunnen we dit algebraïsch proberen te laten zien door $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ en $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ te berekenen.

Tip: Maak opnieuw gebruik van het feit dat $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Opgave 19

a) Laat zien dat $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ geschreven kan worden als $\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}$.

b) Gebruik $(2+i)^3$ om $\sqrt[3]{2+11i}$ te berekenen.

c) Gebruik nu $(2-i)^3$ om $\sqrt[3]{2-11i}$ te berekenen.

d) Bereken met b en c algebraïsch $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$.

e) Controleer je oplossing met behulp van de grafiek op je grafische rekenmachine. Hoe zou je de overige oplossingen exact kunnen berekenen?

Tip: Je hebt dit al gedaan in opgave 9.

Figuur 23: Les 3 (deel 4).

Nu gaan de leerlingen opnieuw terug naar de derdegraadsvergelijking waar de complexe getallen voor geïntroduceerd werden. Hierbij wordt een voorbeeld uitgewerkt net zoals dat in opgave 14 aan het eind van les 2 werd gedaan. De opbouw in niveau wordt geleidelijk aan gemaakt, wat belangrijk is voor het leerproces, zoals te zien in sectie 2.3. Opnieuw wordt de opgave aan de hand van tussenstappen uitgewerkt. Hiermee creëren de leerlingen relationeel begrip aan de hand van guided reinvention, zoals besproken in sectie 2.3. Met deze opgave valt te zien dat leerlingen nu algebraïsch van de oplossing van de formule van Cardano een reële oplossing kunnen maken. Dit sluit aan bij het tweede leerdoel van deze les, zoals besproken in sectie 5.1. Bovendien sluit dit daarmee ook aan bij het derde leerdoel van de lessenserie, zoals besproken in sectie 3.2.

Het is nu duidelijk waar complexe getallen handig voor zijn. Dankzij het rekenen met complexe getallen kunnen we in specifieke gevallen reële oplossingen vinden. Na het ontstaan van de complexe getallen is er veel onderzoek gedaan naar de complexe getallen zelf. Hier zul je in je eigen lesmethode later nog uitgebreid op in gaan. Wanneer we complexe getallen

toestaan kunnen we van alle vergelijkingen namelijk minstens 1 oplossing vinden.

Opgave 20

Bereken de complexe oplossingen van $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Figuur 24: Les 3 (deel 5).

Vervolgens lezen de leerlingen dat ze nu gezien hebben waarvoor complexe getallen nuttig voor zijn. Dit sluit aan bij het derde leerdoel van deze les, zoals besproken in sectie 5.1. De complexe getallen worden nu ook aan de kwadratische vergelijkingen gelinkt waar in eerste instantie geen oplossingen voor leken te bestaan. Daarmee wordt duidelijk dat het getalbegrip hiermee echt uitgebreid wordt in alle takken van de wiskunde. De nieuwe kennis sluit daarmee aan op de kennis die de leerlingen al hadden, waardoor het cognitieve schema van de leerlingen opnieuw uitgebreid wordt.

Andere hogeregraadsvergelijkingen die in de eerste oogopslag nergens toe lijken te leiden, omdat de grafiek bijvoorbeeld niet door de x-as gaat, zullen dus ook altijd complexe oplossingen hebben. Hoewel we van een aantal vergelijkingen de reële oplossing al kennen, vinden we binnen de complexe getallen nog veel meer mogelijkheden. Zo weten we al dat een derdegraadsvergelijking 1, 2 of 3 oplossingen kan hebben. Binnen de complexe getallen heeft een vergelijking van de vorm $x^3 = a$ (bijna altijd) 3 oplossingen. Als we de oplossingen voor $x^3 = 1$ hebben gevonden, hoeven we deze alleen maar te vermenigvuldigen met $\sqrt[3]{a}$ om de oplossingen van $x^3 = a$ te krijgen.

Opgave 21

Tip: Wanneer heeft $x^2 = a$ maar één oplossing?

a) Bereken $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^3$ en $\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^3$.
b) Welke drie oplossingen heeft de vergelijking $x^3 = 1$?
c) Welke drie oplossingen heeft de vergelijking $x^3 = a$?
d) Voor welke a heeft de vergelijking $x^3 = a$ geen drie oplossingen?

Figuur 25: Les 3 (deel 6).

Ten slotte wordt nog de stap gemaakt hoe derdegraadsvergelijkingen meerdere oplossingen hebben binnen het complexe vlak. Hiermee wordt het aantal oplossingen zoals leerlingen dit in vraag 7 gezien hebben dus weer aangepast binnen de nieuwe kennis die leerlingen hebben opgedaan. Om dit goed te laten aansluiten gaan leerlingen dit opnieuw zelf bekijken in een opgave. De leerlingen wordt verteld dat dit ook geldt voor andere hogeregraadsvergelijkingen, maar om de lessenserie niet te uitgebreid te maken wordt hier niet dieper op ingegaan.

De andere hogeregraadsvergelijkingen gaan we voor nu verder niet op in. Je weet nu een beetje hoe je met complexe getallen kunt werken. Wanneer je terug gaat naar de wiskunde B lessen, zul je echter altijd binnen de reële getallen werken en zijn negatieve wortels dus niet toegestaan. Om het af te leren hebben we nog één mooie derdegraadsvergelijking waarin je de complexe getallen heel goed kunt gebruiken.

Opgave 22

Tip: Kijk hiervoor terug naar opgave 8.

Gegeven is de vergelijking $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$.
a) Schrijf de vergelijking in de vorm $y^3 + py + q = 0$.
b) Vind een reële oplossing van de in a gevonden vergelijking met behulp van de formule van Cardano. Maak hiervoor gebruik van $(1+i)^3$ en $(1-i)^3$.
c) Vind exact alle oplossingen van de vergelijking die je in a hebt gevonden.
d) Vind exact alle oplossingen van de vergelijking $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$. Controleer de gevonden oplossingen met behulp van de grafische rekenmachine.

Tip: Gebruik hiervoor de factorstelling uit les 1 (bij opgave 9).

Figuur 26: Les 3 (deel 7).

Ter afronding gaan de leerlingen nu nog naar een opgave kijken waarin al het geleerde van de lessenserie terugkomt. Hierbij wordt er ook naar specifieke lessen terugverwezen om ervoor te zorgen dat de leerlingen de juiste linken gaan leggen. Eventuele verloren gegane kennis kan door de leerlingen op deze manier weer makkelijk opgehaald worden. Deze opgave kan daarmee eigenlijk als een toetsing van het eerste en derde leerdoel van de lessenserie gezien worden, zoals besproken in sectie 3.2. Het toetsen van het relationeel begrip waaraan het tweede en laatste leerdoel van de lessenserie gekoppeld zijn, kan met dit materiaal nog niet specifiek getest worden. Leerlingen zijn door het materiaal heen wel duidelijk gemaakt waar bepaalde kennis vandaan komt, maar het testen hoe goed dit aangekomen is, zal aan de hand van de interviews geanalyseerd worden. Hiermee wordt de lessenserie afgerond.

5.3 Feedback expertpanel

De eerste versie van het ontwerp, zoals hiervoor besproken, is voorgelegd aan een expertpanel. Oorspronkelijk was het de bedoeling dat alle experts tegelijk het materiaal zouden beoordelen, zodat ze elkaar tijdens een korte bespreking aan zouden kunnen vullen met feedback op het ontwerp. Echter kwam dit testen vanwege drukte en ziektes niet uit zoals gepland. Uiteindelijk hebben 4 experts het materiaal van feedback voorzien, waarvan de meesten het hebben ingestuurd. Deze feedback is verzameld tussen 20 en 28 mei 2023. Voor het behoud van de anonimiteit zal er naar elke expert verwezen worden met “hij.”

Het expertpanel heeft het materiaal beoordeeld op drie onderdelen: de leerdoelen, de ontwerpeisen en algemene feedback. Dit is gedaan aan de hand van een feedbackformulier, zoals beschreven in sectie 4.2.1. De ingevulde versies van de experts zijn te vinden in bijlage 9. Expert 4 heeft zijn feedback niet op het feedbackformulier ingevuld. In zijn feedback zijn de verschillende punten waar het materiaal op getest moest worden wel terug te lezen. Verder hebben twee van de vier experts nog extra opmerkingen op de lessenserie zelf gegeven. Deze zijn te vinden in bijlage 10.

De algemene indruk van alle experts is zeer positief. Toch zijn er nog een aantal verbeterpunten door te voeren. In de rest van deze sectie wordt de feedback zoals gegeven door de experts per onderdeel besproken. Als een expert bij een specifieke ontwerpeis of leerdoel niet besproken wordt, heeft hij hier niets over gezegd. Gezien het algemene beeld wordt er dan vanuit gegaan dat de expert hier positief tegenaan kijkt.

De feedback die de experts gegeven hebben op de leerdoelen zal in sectie 5.3.1 benoemd worden. Hierbij hebben de experts het lesmateriaal beoordeeld op zowel de algemene leerdoelen voor de lessenserie als de leerdoelen per les, zoals besproken in secties 3.2 en 5.1. Uit deze feedback ontstaat 1 concrete aanpassing voor de lessenserie, waarvan we de specifieke implementatie bespreken in sectie 5.4.

Vervolgens wordt ingegaan op de feedback per ontwerpeis in sectie 5.3.2. Dit heeft niet tot aanpassingen aan de lessenserie geleid. In sectie 5.3.3 worden ten slotte de belangrijkste algemene verbeterpunten benoemd die de experts aangeven. Hier wordt besproken welke 2 grote aanpassingen uit deze feedback zijn ontstaan en welke verbetersuggesties bewust niet zijn doorgevoerd. Opnieuw wordt de implementatie van de 2 aanpassingen pas in sectie 5.4 uiteengezet. Kleine vraag-specifieke aanpassingen die experts bij de algemene feedback of de extra opmerkingen noemen worden enkel in sectie 5.4 bij het vernieuwde lesmateriaal besproken.

5.3.1 Feedback op de leerdoelen

Dankzij het feedbackformulier bespreken de experts de leerdoelen specifiek. Leerdoel 1 van de lessenserie, zoals besproken in sectie 3.2, lijkt volgens expert 1 terug te komen in de laatste opgave van de lessenserie. Dit was ook de bedoeling van die opgave, zoals in sectie 5.2 besproken is.

Over leerdoel 2 zijn de meeste experts wat sceptischer. Expert 1 geeft aan het onduidelijk te vinden in welke mate het uitleggen moet terugkomen. Volgens hem wordt er in deze les ook vrij veel opgelegd in plaats van dat leerlingen echt aan de hand mee worden genomen. Dit leidt tot aanpassing 1 van de lessenserie: extra uitleg toevoegen rondom de afleiding van de formule van Cardano. Hoe dit precies is doorgevoerd wordt beschreven in sectie 5.4. Naast expert 1 vindt expert 2 de afbakening van leerdoel 2 ook lastig. Expert 3 geeft aan dat de leerlingen mogelijk het totaalplaatje niet helemaal door zullen hebben. Met behulp van de interviews wordt dit in sectie 5.5.2 verder geanalyseerd.

Expert 2 zegt dat dezelfde problemen ook gelden voor leerdoel 1 van les 1; het kunnen uitleggen van de abc-formule. Ook expert 3 geeft aan dat het bij dat les-specifieke leerdoel onduidelijk is wanneer deze behaald is en wanneer niet. Expert 2 geeft een opzet voor een nieuwe formulering, maar dit lijkt de problemen niet op te lossen. Aangezien het materiaal op deze leerdoelen ontworpen is, worden deze voor de praktijktest niet aangepast. In sectie 5.5.2 wordt besproken in hoeverre de leerdoelen anders opgesteld moeten worden voor vervolgonderzoek.

Bij leerdoel 3 geeft expert 1 dat dit terugkomt in opdracht 19. De expert geeft enkele kanttekeningen bij het leerdoel, maar dat komt omdat hij over de voetnoot heen gelezen heeft. De voetnoot haalt eventuele twijfels weg.

Verder benoemt expert 1 nog dat leerdoel 4 ook terugkomt in de lessenserie. Expert 3 die als enige meer op de leerdoelen per les in is gegaan geeft specifiek aan dat de lessen 2 en 3 goed gekoppeld lijken aan de leerdoelen. De kanttekeningen voor les 1 zijn hiervoor al besproken.

5.3.2 Feedback op de ontwerpeisen

Over de eerste ontwerpeis spreken alle vier de experts hun twijfels uit. Expert 1 vindt de planning lastig en zou ook meer tijd uit willen trekken voor reflectie tussendoor. Daarvoor stelt hij voor om er 4 lessen van te maken. Expert 2 vraagt zich af in hoeverre de leerlingen zich buiten de lessen nog met de stof bezig zullen moeten houden. Expert 4 twijfelt met name of de leerlingen 50 minuten lang gefocust aan het werk zullen blijven. Wel geeft hij aan dat er een aantal elementen in de lessenserie zitten die dit wel ten goede zullen versterken. Er is voor gekozen om geen extra les en lestijd in te plannen en eerst te kijken in de praktijktest in hoeverre de twijfels van de experts gegrond zijn.

Alle experts zijn tevreden over de mate waarin het materiaal lijkt te voldoen aan ontwerpeis 2 en 3. Expert 1 benoemt hierbij specifiek dat ingewikkelde stof mooi toegankelijk is gemaakt voor de leerlingen. De mate waarin de lessenserie voldoet aan de leerdoelen, oftewel ontwerpeis 4, zijn in sectie 5.3.1 al besproken. De feedback op de ontwerpeisen leidt niet tot aanpassingen aan de lessenserie.

5.3.3 Algemene feedback

Algemeen geeft expert 1 aan dat een aantal woordkeuzes wat scherper kunnen. Hoewel het in opdracht 14a daadwerkelijk belangrijk was om het woord exact toe te voegen, lijken een aantal verwoordingsaanbevelingen ook een kwestie van stijl te zijn. Zulke kleine (tekstuele) wijzigingen zullen verder niet besproken worden.

Expert 1 gaf verder nog aan in de feedback om het eventueel over de abcd-formule te hebben. Aangezien in de lessenserie de derdegraadsvergelijking eerst in de vorm $x^3 + px + q = 0$ wordt geschreven en daarmee nooit de volledige abcd-formule getoond wordt is er echter bewust voor gekozen om dit woord buiten de lessenserie te houden. Het kan wel interessant zijn om hier als extra verdiepende opdracht nog verder naar te kijken. Dit is terug te vinden bij de aanbevelingen voor vervolgonderzoek in hoofdstuk 6.

Expert 1 miste het reflecteren door de lessenserie heen. Hij vond dat er op het einde van de lessen gereflecteerd kon worden wat er nou eigenlijk gebeurd was, zodat er een mooie conclusie en duidelijkheid voor de leerlingen zou ontstaan. Dit leidt tot aanpassing 2 voor de lessenserie: stukken tekst aan het eind van elke les toevoegen om reflecties in te bouwen. Expert 2 benoemt dat hij een goede conclusie aan het eind van de lessenserie wilt zien. Dit wordt daarom meegenomen in deze aanpassing.

Naast de toevoeging van een conclusie aan het eind gaf expert 2 ook aan om de inleiding uit te breiden. De feedback van expert 2 leidt tot aanpassing 3 voor de lessenserie: in de introductie moet een vooruitblik komen met meer informatie over complexe getallen. Aanpassingen 2 en 3 worden concreet uitgelicht in sectie 5.4.

Expert 2 doet voor les 3 de suggestie om een extra leerdoel toe te voegen en de algemene rekenregels explicieter te verwerken. Dit is niet het doel van het materiaal, omdat deze lessenserie alleen als introductie moet dienen. Daarom wordt hier niets mee gedaan.

Expert 4 uitte twijfels over het lettergebruik van y in plaats van x in bijvoorbeeld de formule van Cardano. Vanwege het omschrijven kan de x echter niet gebruikt blijven worden en moet er wel een andere letter gekozen worden. Hierin lijkt de y het normaalst over te komen voor leerlingen, dus aan de hand van deze feedback zullen geen aanpassingen doorgevoerd worden.

Naast deze grote aanpassingen zijn er ook kleinere suggesties gegeven door de experts voor specifieke opgaven. De drie hiervoor benoemde aanpassingen en de overige wijzigingen die zijn doorgevoerd naar aanleiding van het expertpanel worden in sectie 5.4 besproken.

5.4 Aanpassingen ontwerp

Op basis van de feedback van het expertpanel zijn een aantal aanpassingen gedaan aan de lessenserie. De grootste 3 aanpassingen/toevoegingen zijn in sectie 5.3 al algemeen toegelicht. De opdracht specifieke wijzigingen zijn in de voorgaande sectie nog niet besproken. Alle wijzigingen zullen in deze sectie op volgorde van het lesmateriaal besproken worden. Eventuele kleine (tekstuele) aanpassingen die zijn doorgevoerd zullen niet besproken worden. Voor het bespreken van de wijzigingen volgen stukken van de lessenserie waarna deze toegelicht worden. De volledige nieuwe versie van het lesmateriaal is te vinden in bijlage 11. In bijlage 12 is het antwoordmodel van de lessenserie te vinden.

dan bij kwadratische vergelijkingen. In de laatste les gaan we hiervoor zelfs een nieuwe getallenverzameling introduceren. Dat lijkt misschien een beetje gek, maar tijdens je wiskunde carrière is dit eigenlijk al heel vaak gebeurd. Je begon ooit op de basisschool met het tellen van de natuurlijke getallen ($\mathbb{N} = 0, 1, 2, \ldots$). Deze kunnen vervolgens uitgebreid worden met negatieve getallen tot de gehele getallen ($\mathbb{Z} = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$). Dankzij het delen kwamen hier ook breuken bij en zo kregen we de rationele getallen ($\mathbb{Q} = \frac{a}{b}$ met $a, b \in \mathbb{Z}$). Vervolgens hebben we naar de wortels gekeken die niet meer als breuken te schrijven waren, maar ook de bijzondere getallen als π en e om zo de reële getallen ($\mathbb{R}$) te vormen. Aan het eind van deze lessenserie zal daar dus nog een getallenverzameling bij komen.

Figuur 27: Aanvulling introductie lessenserie.

In de introductie is een nieuw stuk toegevoegd als inleiding op de complexe getallen. Dit sluit aan bij aanpassing 3, zoals besproken in sectie 5.3.3, op aanbevelen van expert 2. Deze toevoeging zal ervoor zorgen dat de getallenverzameling wat minder uit de lucht komen vallen in les 3. Bovendien sluit dit ook aan bij het bestaande materiaal wat allemaal met de verschillende getallenverzamelingen begint, zoals beschreven in sectie 2.4.

Opgave 1
In kwadratische vergelijkingen van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ zien we nooit dat $a = 0$. Wat voor type vergelijking krijg je wanneer $a = 0$?

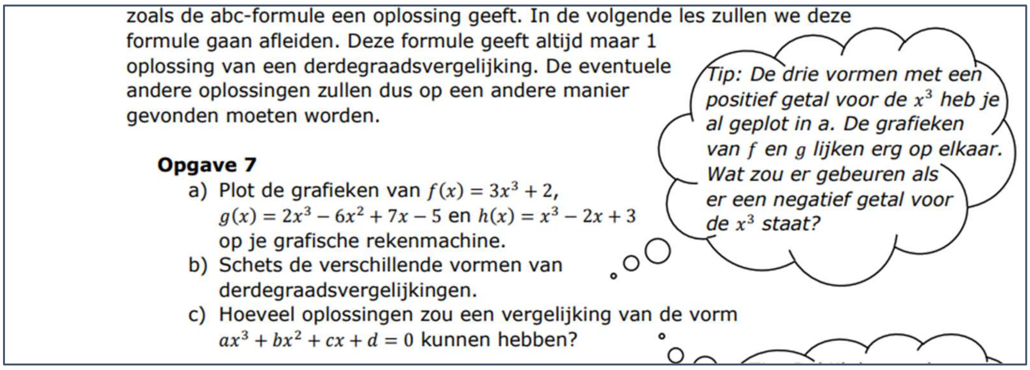
Figuur 28: Herformulering opdracht 1.

De eerste opgave werd door verschillende mensen als onduidelijk ervaren. Zowel expert 1 en 2 hadden hier moeite mee als de beiden vakdidactici. De opgave is tekstueel herschreven om de leerlingen alsnog dezelfde denkstap mee te geven en op deze manier duidelijker over te komen.

Wanneer de $a, b, c \neq 0$ zullen andere oplossingsmethoden gebruikt moeten worden. Als de getallen mooi uitkomen dan lukt het om de product-som methode te gebruiken. Als dat niet werkt kun je altijd nog kwadraat afsplitsen of de abc-formule gebruiken.

Figuur 29: Verwijdering uitleg product-som methode.

In de tekst boven opgave 3 is de uitleg over de product-som methode weggehaald op basis van feedback van expert 3. De product-som methode was de enige oplossingsmethode die met een voorbeeld uitgelegd werd. Het kwadraat-afsplitsen en de abc-formule werden verder niet toegelicht, wat voor verwarring kon zorgen bij de leerlingen. In plaats van overige oplossings-methoden ook uit te leggen is ervoor gekozen om alle uitleg weg te halen. Dit is immers al veronderstelde voorkennis is van de leerlingen, zoals in sectie 2.1 te zien was.



zoals de abc-formule een oplossing geeft. In de volgende les zullen we deze formule gaan afleiden. Deze formule geeft altijd maar 1 oplossing van een derdegraadsvergelijking. De eventuele andere oplossingen zullen dus op een andere manier gevonden moeten worden.

Opgave 7

a) Plot de grafieken van $f(x) = 3x^3 + 2$, $g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7x - 5$ en $h(x) = x^3 - 2x + 3$ op je grafische rekenmachine.

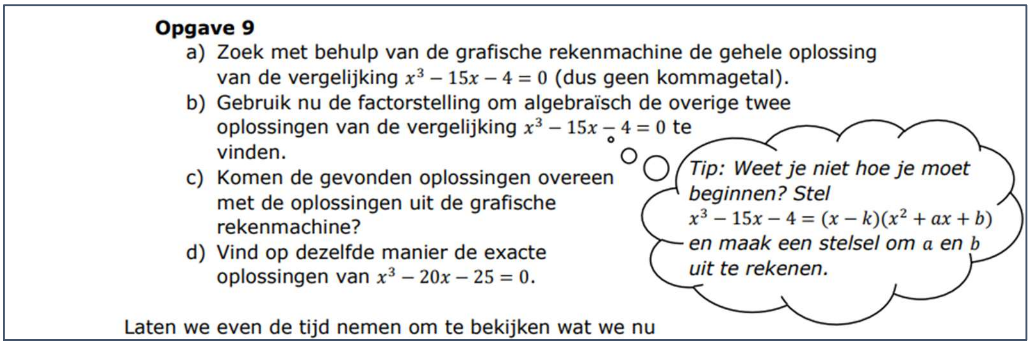
b) Schets de verschillende vormen van derdegraadsvergelijkingen.

c) Hoeveel oplossingen zou een vergelijking van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kunnen hebben?

Tip: De drie vormen met een positief getal voor de x^3 heb je al geplot in a. De grafieken van f en g lijken erg op elkaar. Wat zou er gebeuren als er een negatief getal voor de x^3 staat?

Figuur 30: Aanvulling tip opdracht 7b.

De tip bij opgave 7 is uitgebreid om te benoemen dat de grafieken van f en g erg op elkaar lijken. Beide hebben evenveel snijpunten met de x-as in alle gevallen, waardoor onduidelijk kan ontstaan bij de leerlingen. Door de tip uit te breiden en dit te benoemen zal deze eventuele onduidelijkheid bij de leerlingen weggehaald moeten worden.



Opgave 9

a) Zoek met behulp van de grafische rekenmachine de gehele oplossing van de vergelijking $x^3 - 15x - 4 = 0$ (dus geen kommagetal).

b) Gebruik nu de factorstelling om algebraïsch de overige twee oplossingen van de vergelijking $x^3 - 15x - 4 = 0$ te vinden.

c) Komen de gevonden oplossingen overeen met de oplossingen uit de grafische rekenmachine?

d) Vind op dezelfde manier de exacte oplossingen van $x^3 - 20x - 25 = 0$.

Tip: Weet je niet hoe je moet beginnen? Stel $x^3 - 15x - 4 = (x - k)(x^2 + ax + b)$ en maak een stelsel om a en b uit te rekenen.

Laten we even de tijd nemen om te bekijken wat we nu

Figuur 31: Herschrijving tip opdracht 9b.

Van opgave 9 werd door expert 3 aangegeven dat de $x - 4$ de tip eigenlijk weggaf. Daarom is dit algemener geschreven naar $x - k$ zoals dit ook terugkomt in de factorstelling zelf. Hoewel dit een kleine aanpassing leek die als tekstuele wijziging hier eerst niet benoemd zou worden, zal later in sectie 5.5.1 bij de resultaten van de praktijktest duidelijk worden dat dit alsnog voor een verschil zal zorgen.

Laten we even de tijd nemen om te bekijken wat we nu allemaal precies gedaan hebben. Deze les ben je begonnen met het oplossen van kwadratische vergelijkingen. We wisten al dat we deze altijd konden oplossen met behulp van de abc-formule en met behulp van het kwadraat afsplitsen hebben we deze formule ook zelf herleid. Vervolgens hebben we gekeken naar hogeregraadsvergelijkingen. Van een aantal derdegraadsvergelijkingen wisten we al hoe we ze moesten oplossen. Bovendien hebben een paar Italiaanse wiskundigen ontdekt hoe je vergelijkingen van de vorm $x^3 + px + q = 0$ moet oplossen. In de volgende les gaan we die formule die bekend staat als de formule van Cardano zelf afleiden. Dan weet je waar die vandaan komt, net zoals we dat vandaag voor de abc-formule hebben gezien. Het mooie is dat we er in deze les ook achter zijn gekomen dat we alle derdegraadsvergelijkingen in de vorm $x^3 + px + q = 0$ kunnen schrijven. Als we dus de formule van Cardano hebben afgeleid, dan zou je alle derdegraadsvergelijkingen moeten kunnen oplossen. De formule van Cardano geeft maar 1 oplossing van de derdegraads-vergelijking, maar ook daar hebben we deze les wat op gevonden. Als je namelijk eenmaal een oplossing gevonden hebt, kun je met behulp van de factorstelling de eventuele overige oplossingen vinden. Hoewel we volgende les dus klaar lijken te zijn, zit er bij sommige vergelijkingen nog wel een addertje onder het gras. Daar gaan we in de laatste les naar kijken.

Figuur 32: Reflectie les 1.

Aan het eind van les 1 is bovenstaande conclusie toegevoegd om te reflecteren op wat er in deze les allemaal is gebeurd. Dit is op aanbevelen van expert 1 gedaan, zoals in sectie 5.3.3 als aanpassing 2 is omschreven.

De formule die we nu gevonden hebben kunnen we versimpelen door $(u+v)(3uv+p)$ gelijk te stellen aan 0. Hierdoor moeten we er wel voor zorgen dat de oplossingen uiteindelijk ook aan de vergelijking $(u+v)(3uv+p) = 0$ voldoen.

Tip: Wat gebeurt er in $y^3 + py + q = 0$ wanneer $u + v = 0$?

Opgave 11

a) Leg uit waarom $(u+v)(3uv+p) = 0$ niet kan leiden tot $u + v = 0$.
b) Welke extra vergelijking krijgen we dus hierdoor?
c) Welke versimpelde vergelijking krijgen we uit opgave 10 wanneer we $(u+v)(3uv+p)$ gelijk stellen aan 0?

We willen nu graag van een van de extra variabelen afkomen. Hiervoor gebruiken we dat we voor het versimpelen hebben gekozen dat $3uv + p = 0$. We kiezen ervoor om eerst van de variabele v af te komen. Op die manier hebben we weer 1 variabele in de vergelijking. Je zult zien dat er door het herschrijven een vorm is ontstaan waarvan we weten hoe we hem kunnen oplossen. Vervolgens kunnen we met behulp van de gekozen substituties de oplossingen van de oorspronkelijke vergelijking vinden.

Tip: Kijk terug naar hoe we deze variabelen

Figuur 33: Aanvulling uitleg afleiding stelling van Cardano.

Rond opgave 11 is meer begeleiding toegevoegd. Zowel voor als na de opgave staat nu meer uitleg, zodat het de leerlingen duidelijker wordt wat er gebeurt. Dit is aan de hand van de feedback van expert 1 en 2 gedaan, zoals in sectie 5.3.1 als aanpassing 1 is omschreven.

We hebben deze les dus eerst de formule van Cardano afgeleid en vervolgens gezien dat sommige ingewikkeld uitziende oplossingen overeenkomen met simpelere getallen. Dit laatste gaan we de volgende les nodig hebben. Voor het

laatste voorbeeld dat je in opgave 9 heb je gebruikt zul je de volgende les namelijk zien dat de formule van Cardano tot problemen zal leiden. Hier kunnen we vanaf komen door de nieuwe getallenverzameling te introduceren zoals we in de inleiding al beloofd hadden.

Figuur 34: Aanvulling afsluiting les 2.

De terugblik aan het einde van les 2 is uitgebreid, al is dit marginaal. Dit is opnieuw aan de hand van aanpassing 2 gedaan.

> Het rekenen met negatieve wortels is mogelijk en in sommige gevallen zelfs noodzakelijk. Dit klinkt misschien een beetje gek, maar aan het begin van de middelbare school had je waarschijnlijk ook niet bedacht dat je met wortels getallen kon werken. Zoals we in de inleiding al verteld hebben zijn de getallenverzamelingen door de jaren heen steeds iets verder uitgebreid en negatieve wortels zijn hierin de volgende stap. Deze getallen zijn ontstaan om derdegraadsvergelijkingen te kunnen oplossen. We noemen deze negatieve wortels onderdeel van de *complexe getallen*.

Figuur 35: Herschrijving voorbeeld les 3.

Er is tussen vraag 16 en 17 twijfel over het oorspronkelijke voorbeeld dat leerlingen voor de middelbare school nog geen negatieve getallen kenden. Leerlingen kennen bijvoorbeeld -3 ℃ op de basisschool wel. Ze werken alleen nog niet met de rekenregels voor vermenigvuldiging van negatieve getallen. Dit voorbeeld is daarom aangepast naar wortels. Dit komt pas tijdens de middelbare schoolcarrière aan bod. Hoewel de experts geen feedback over dit punt gaven, viel het de maker van het lesmateriaal op. Na het aanpassen, werd dit ook teruggegeven door Gerard Jeurnink, die als tweede beoordelaar in deze fase bij het lesmateriaal betrokken was.

> Aangezien we $\sqrt{-1}$ tot nu toe nog niet kenden, gaan we hier niet zomaar mee rekenen, maar introduceren we hier een nieuw symbool voor: $\sqrt{-1} = i$. Hierbij spreken we af dat $i^2 = -1$. We kunnen andere negatieve wortels nu ook schrijven met behulp van i. Zo krijgen we $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$. Hierdoor kunnen we $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}$ berekenen als $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{2}i \cdot \sqrt{2}i = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot i^2 = 2 \cdot -1 = -2$. Verder zien we dat er naast i nog één ander getal is waarvan het kwadraat gelijk is aan -1. We weten namelijk dat ook $\left(-\sqrt{-1}\right)^2 = (-i)^2 = - - i^2 = -1$.
> We gaan van nu af aan negatieve wortels altijd terugschrijven naar een vorm met i. Hiervoor hebben we ook getallen als $2i$ en $3 + i$ nodig. Daardoor kunnen we alle complexe getallen schrijven in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$. Een van de betekenissen van complex is samengesteld en aangezien we deze getallen uit twee gedeelten (a en bi) kunnen samenstellen hebben we deze getallenverzameling de complexe getallen genoemd. Alle getallen die we al kenden vallen hier dus ook onder, want we kunnen een complex getal zo kiezen dat $b = 0$. Daarmee breiden we de getallen die we kennen dus nog verder uit. De getallenverzameling van de complexe getallen schrijven we ook wel op met het symbool $\mathbb{C}$. Dit zou dus op de plek van het vraagteken kunnen komen in de afbeelding van de inleiding.

Figuur 36: Aanvulling uitleg complexe getallen.

Op aanraden van Gerard Jeurnink is toegevoegd dat $(-i)^2 = -1$, zodat dit niet bij verwarring voor de leerlingen gaat leiden. Er zijn hiermee twee getallen die in het kwadraat gelijk zijn aan -1, namelijk i en $-i$, wat verwarrend kan overkomen op leerlingen. Verder had Gerard Jeurnink als toevoeging dat een van de betekenissen van complex samengesteld is. Daarom wordt dit de getallenverzameling van de complexe getallen genoemd. Dit wordt nu in deze tekst overgebracht naar de leerlingen. Ten slotte wordt aan het einde van dit deel nu ook een koppeling naar de inleiding toegevoegd, omdat de leerlingen nu het symbool $\mathbb{C}$ kennen op aanraden van expert 2. Dit sluit opnieuw aan bij zijn toevoeging beschreven als aanpassing 3 voor de inleiding.

In de hele lessenserie hebben we dus eerst gezien hoe we alle derdegraads-vergelijkingen kunnen omschrijven in de vorm $x^3 +$
$px + q = 0$. In les 2 hebben we de formule van Cardano afgeleid die we kunnen gebruiken om een oplossing te vinden van vergelijkingen van de vorm $x^3 + px +$
$q = 0$. Wanneer hier negatieve wortels in ontstaan, lijken deze binnen de reële getallen niet tot oplossingen te leiden. In deze laatste les hebben we echter gezien, dat we hier als nieuwe getallenverzameling, de complexe getallen, wel mee kunnen werken. Daardoor kunnen we via de complexe getallen alsnog een reële oplossing vinden. Vervolgens zullen we nog wel de overige oplossingen van de derdegraads-vergelijking moeten vinden. Hiervoor kunnen we de factorstelling gebruiken die we ook in les 1 al hebben gezien. Daarmee kunnen we alle derdegraads-vergelijkingen dus volledig oplossen. Hier sluiten we dan ook deze lessenserie mee af.

Figuur 37: Terugblik lessenserie.

Om de lessenserie af te sluiten is er een conclusie aan de lessenserie toegevoegd. Dit is op aanraden van experts 1 en 2 gedaan wat aansluit bij aanpassing 2. Hiermee is de lessenserie verbeterd voordat hij in de praktijk getest kan worden.

Zoals te zien is in Figuur 37, worden in dit tekstdeel de vergelijkingen afgebroken aan het einde van de zin. Verder bevat de tekst enkele keren een – teken in het woord derdegraadsvergelijkingen. Oorspronkelijk is de lessenserie opgemaakt met een enter na de laatste opgave. Deze is echter per ongeluk weggehaald net voordat het materiaal geprint zou worden. Aangezien het materiaal op deze manier met de leerlingen is gedeeld, wordt deze opmaakfout hier weergegeven in het lesmateriaal. Dit geeft het meest realistische beeld van de testfase. Verder mist er in de lessenserie bij opgave 13 de tip $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Dit is de enige opgave waar deze regel ontbreekt. Ten slotte mist er tussen opgave 16 en 17 eenmalig het woord “van”. Deze fouten zijn echter pas door ons ontdekt na het testen, waardoor dit niet meer aangepast kon worden voor de leerlingen.

5.5 Resultaten praktijktest

De nieuwe versie van het ontwerp zou oorspronkelijk 5, 6 en 7 juni uitgetest worden op een middelbare school in Overijssel, zoals vermeldt in sectie 4.3. Deze testfase liep echter ook niet geheel volgens plan. De leerlingen startten 19 juni met de toetsweek. Hierdoor kwamen niet alle leerlingen elke les opdagen, omdat hun prioriteiten anders lagen. Bovendien lukte het hierdoor niet om lessen thuis af te maken indien nodig. Voor de eerste 2 lessen was het onbekend dat niet alle leerlingen aanwezig zouden zijn. Een van de leerlingen had dit wel aangegeven bij de vakdocent, Chris Heuver, maar dit was niet goed doorgekomen. Tijdens de derde les waren voor het eerst alle leerlingen aanwezig. Aangezien hierna nog geen enkele leerling het volledige materiaal had doorgewerkt, werd het testen van de lessenserie met een week verlengd. Er was voor deze extra lessen contact met elke leerling over wanneer ze wel of niet de lessen zouden volgen. Twee van de leerlingen zijn uiteindelijk bij 4 lessen aanwezig geweest, terwijl de andere twee leerlingen door de planning rondom de toetsweek maar bij 2 lessen aanwezig waren. De aanwezigheid van de leerlingen is te vinden in Tabel 1. Voor het behoud van de anonimiteit zal er naar elke leerling verwezen worden met “hij.”

Datum	Aanwezigen	Opgave
Maandag 5 juni	Leerling 1 Leerling 2	1-7 1-8a
Dinsdag 6 juni	Leerling 1 Leerling 2	7-9d 8a-9d
Woensdag 7 juni	Leerling 1 Leerling 2 Leerling 3 Leerling 4	11-13c (hiervoor thuis 10-11) 10-12h 1-5 1-7
Maandag 12 juni	Leerling 1 Leerling 3	13-18 (hiervoor thuis 15-17) 5-9b
Woensdag 14 juni	Leerling 2 Leerling 4	15-21 (hiervoor thuis 12h-14) 8a-18

Tabel 1: Aanwezigheid en gemaakte opdrachten leerlingen.

De gemaakte opgaven geven een indicatie van hoever de leerlingen in de les zijn gekomen. Er wordt niet continu over de schouders van de leerlingen meegekeken. De leerlingen zouden tussendoor een of meerdere opgaven overgeslagen kunnen hebben. Na de laatste les is er met de leerlingen afgesproken dat ze het materiaal zelf thuis af zouden maken voordat de interviews plaats zouden vinden. De leerlingen vervolgden het werk daarom pas na de toetsweek. Hier zaten ruim 2 weken tussen. De interviews werden uiteindelijk op 3, 4 en 5 juli gepland, (bijna) een maand na de eerste lessen.

In bijlage 13 is een overzicht te vinden van de vragen die de leerlingen tijdens de lessenserie hebben gesteld. Verder zijn de transcripties van de interviews aan de hand van de interviewleidraad, zoals besproken in sectie 4.3.1, te vinden in bijlage 14. De codering van de interviews is te vinden in bijlage 15. Aan de hand van het vragen-overzicht, de uitwerkingen van het leerlingenmateriaal, de transcripties en de codering van de interviews, zullen in secties 5.5.1, 5.5.2 en 5.5.3 de ontwerpeisen, de leerdoelen van de lessenserie en de les-specifieke leerdoelen geanalyseerd worden.

Zoals al beschreven in sectie 4.3.1 worden de leerdoelen per les alleen getest aan de hand van het leerlingenmateriaal. Het enige leerdoel wat hierdoor niet gecontroleerd kan worden is het uitleggen waar de abc-formule vandaan komt. De experts hadden bij dit leerdoel dezelfde bedenkingen als bij het algemene leerdoel 2 van de lessenserie, zoals besproken in sectie 5.3.1. Daarom is ervoor gekozen om op alleen op leerdoel 2 van de gehele lessenserie te focussen.

5.5.1 Analyse ontwerpeisen

De eerste ontwerpeis van de lessenserie wordt op het moment niet behaald. Tijdens het testen bleek dat de lessenserie niet in 3 lessen van 50 minuten was uit te voeren. Voornamelijk over les 1 deden leerling 1, 2 en 3 veel te lang, zoals te zien is in bijlage 13. Alle vier de leerlingen liepen in les 1 bij dezelfde opgaven vast. Ondanks het vastlopen in deze opgave lijkt leerling 4 alsnog binnen 50 minuten door deze les heen te komen. De leerlingen hadden allereerst moeite met het kwadraat-afsplitsen in opgaven 3b en 4. Blijkbaar wordt hier tijdens de wiskundelessen op deze school geen focus gelegd. Dit is vermoedelijk omdat dezelfde oplossingen ook met de abc-formule te behalen zijn. Bij het lesmateriaal moet daarom voor docenten benadrukt worden dat opgaven (1), 2, 3 en 5 voorkennisvragen zijn. De docenten kunnen daarmee zelf inschatten of hun school voldoende op de onderdelen focust en het eventueel met een voorbeeld uitleggen wanneer dit niet het geval is. Vermoedelijk vormt alleen het kwadraat-afsplitsen of de abc-formule een probleem voor leerlingen aangezien beide oplossingsmethoden voor dezelfde vraagstukken ingezet worden. Daardoor kan een school er zelf voor kiezen om meer op een van beide methoden in te zetten.

Door de voorkennisvragen bij de docenten te benadrukken wordt voorkomen dat leerlingen die dit wel gehad hebben afhaken omdat er onnodige uitleg wordt gegeven. Verder leidt dit niet tot onevenredigheid doordat de ene methode meer uitgelegd wordt dan de andere. Zulke onevenredigheid is bij de product-sommethode op basis van de feedback al weggehaald, zoals beschreven is in sectie 5.4.

Naast het kwadraat-afsplitsen hadden de leerlingen ook moeite met opgave 8 en 9. Ze hebben niet door dat $x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 + dx^2 + ex + f$ in het algemeen leidt tot $a = d$, $b = e$ en $c = f$. Hiervoor zal een extra opgave toegevoegd kunnen worden waarin dit als algemeen voorbeeld wordt uitgewerkt. Daarmee kan de stof begrijpelijker gemaakt worden voor de leerlingen en zullen ze er minder in vastlopen. Een ander oplossing zou kunnen zijn om dit als extra tip toe te voegen, zodat de leerlingen er in de opgaven zelf beter mee kunnen werken. In een tip is er echter weinig ruimte om relationeel begrip te creëren. Hoewel het doel van de lessenserie niet is om begrip over dit specifieke onderdeel te creëren, blijft relationeel op de lange termijn wel beter zodat de informatie beter aansluit in het cognitieve schema van de leerlingen. Deze extra opgave zal daarom in een vervolgfase ontworpen moeten worden.

Een bijkomend probleem in opgave 9b was dat de leerlingen niet doorhadden dat ze een waarde voor k moesten invullen. In sectie 5.4 werd al aangegeven dat het aanpassen van de tip uiteindelijk onbedoeld tot extra verwarring zou leiden. Daarom zou de tip uitgebreid moeten worden om duidelijk te maken dat er een k ingevuld moet worden. Op deze manier is de factorstelling wel nog steeds nodig en wordt de verwarring weggehaald.

Les 2 lijkt al meer richting de 50 minuten gemaakt te worden. Aangezien de lessen niet getimed zijn, kan de specifieke tijdsduur per leerling niet achterhaald worden. Hier lopen leerlingen voornamelijk vast in opgave 12, zoals te zien is in bijlage 13. Dit komt doordat leerlingen soms met onjuiste antwoorden verder werken. Van les 3 is helemaal onbekend hoe lang de leerlingen hierover doen, aangezien elke leerling deze thuis heeft afgemaakt. De opgaven waar de leerlingen binnen de lessen mee bezig te zijn, lijken op een redelijk tempo gemaakt te worden. Geen van de leerlingen is hierbij nog aan opgave 22 toegekomen. Deze zou mogelijk lang kunnen duren aangezien de opgave terugbouwt op de eerdere lessen en als afsluiting van de lessenserie dient. In het leerlingenmateriaal is te zien dat de leerlingen veelal vastliepen in opgave 22 en deze daarom grotendeels overgeslagen hebben. Daarom is de tijdsduur hiervan voor nu niet in te schatten, alhoewel dit inderdaad voor veel extra tijd lijkt te gaan zorgen.

Tijdens de interviews geven alle leerlingen zelf ook aan dat de tijdsduur van de lessen momenteel te kort lijkt. Hieruit blijkt verder dat de leerlingen denken dat dit voor een deel door de moeilijkheidsgraad van de lessenserie komt. Als dit het enige probleem zou zijn, zouden leerlingen er met extra uitleg wel doorheen moeten komen. Leerling 1 gaf aan dat les 1 dan vermoedelijk nog steeds te lang zou zijn. Wel zegt hij les 2 nu al bijna binnen de les af te hebben gekregen. Verder denkt hij dat zowel les 2 en 3 met enige extra uitleg binnen 50 minuten moeten kunnen. De overige leerlingen gaven juist aan dat les 1 sneller voelde dan de rest van de lessen. Dit gevoel kregen ze allemaal ook deels doordat ze les 1 makkelijker vonden dan de overige lessen. Leerling 2 denkt dat extra uitleg bij de lessen kan helpen om het tempo omhoog te halen, aangezien er dan minder teruggezocht hoeft te worden. Leerling 3 geeft aan dat het tempo waarschijnlijk ook iets lager ligt omdat alles nieuw is. Hij denkt dat les 2 en 3 daardoor hoe dan ook meer tijd dan 50 minuten gaan kosten. Leerling 4 geeft aan dat les 2 en 3 binnen de 50 minuten zouden passen wanneer er extra uitleg gegeven wordt.

Al met al is de tijdsduur voor de lessenserie momenteel te krap en zullen er aanpassingen gedaan moeten worden om de lessenserie aan de eerste ontwerpeis te laten voldoen. Dit wordt verder besproken in hoofdstuk 6.

Aan de tweede ontwerpeis voldoet het lesmateriaal ook niet volledig. Hiervoor is al besproken bij welke opgaven in les 1 de leerlingen vastliepen. Zoals te zien is bij de vragen die gesteld zijn tijdens de testfase in bijlage 13, liepen de leerlingen allemaal vast in opgave 12e. (Alleen leerling 3 is hier tijdens de testmomenten niet aan toegekomen.) Bij 12e krijgen de leerlingen een tussenantwoord, waardoor ze kunnen controleren of ze op de juiste weg zitten. Elke leerling heeft daarvoor al ergens een fout gemaakt, waardoor dit tussenantwoord eigenlijk te laat komt. Het zou beter zijn om bij opgave d al een tussenresultaat te geven en deze in e achterwege te laten. De substitutie ging in 5e namelijk goed bij de leerlingen (hoewel leerling 3 een rekenfout heeft gemaakt). Leerlingen kunnen met het juiste antwoord in d waarschijnlijk goed verder. Op deze manier hebben leerlingen minder stappen te doorlopen om hun eventuele fout te achterhalen en worden ze beter door de opgave gestuurd. Bovendien is de “wat valt je op?” vraag dan ook te beantwoorden wanneer leerlingen hiervoor wel een fout hebben gemaakt. Ten slotte liepen leerling 1 en 4 nog vast in opgave 13c. De leerlingen hebben hier bij b niet door dat ze een waarde voor p moesten invullen. Net als bij opgave 9b moet dit daarom hier ook als extra tip toegevoegd worden.

Overige problemen met de moeilijkheidsgraad zijn niet uit de lesobservaties zelf te halen. Alle leerlingen gaven tijdens de interviews aan de lessenserie erg moeilijk te vinden. Dit is de voornaamste indruk die bij iedereen is achtergebleven. Leerling 1 gaf aan het lastig te vinden om de informatie uit de tekst te moeten halen. Hij miste hierbij voornamelijk voorbeelden. De andere drie leerlingen gaven aan dat vooral lessen 2 en 3 moeilijk werden. Leerling 3 noemt hierbij specifiek dat hij de draad kwijtraakte wanneer er vele stappen gezet werden die op elkaar voortbouwden. Op zulke momenten wist hij niet meer goed wat hij aan het doen was. Alle leerlingen gaven aan vooral moeite te hebben met opgave 22, wat aan de resultaten ook wel te zien is. De scores per leerling en de p-waarden per opdracht worden in Tabel 2 weergegeven.

	1	2a	2b	3a	3b	3c	4a	4b	4c	5a	5b	5c	5d	5e	6a	6b	7a	7b	7c	8a	8b	9a	9b	9c	9d
Maximaal	1	2	2	3	3	3	2	2	3	2	3	2	4	5	2	1	3	3	2	4	1	1	5	1	6
Leerling 1	1	2	2	3	3	3	2	0	-	2	3	2	4	5	1	1	3	-	1	4	0	1	5	1	6
Leerling 2	1	2	2	3	3	3	2	0	0	2	3	2	4	5	2	1	3	-	0	4	1	1	3	0	2
Leerling 3	1	2	2	3	3	3	2	2	3	1	2	0	-	4	0	0	3	-	0	4	1	1	3	1	-
Leerling 4	1	2	2	3	3	3	2	2	3	2	1	2	4	5	0	0	3	1,5	0	4	1	0	0	1	-
p-waarde	1	100	100	100	100	100	100	50	50	88	75	75	75	95	38	50	100	13	13	100	75	75	55	75	33

Tabel 2a: Scores en p-waarden gemaakte opdrachten leerlingen les 1.

	10	11a	11b	11c	12a	12b	12c	12d	12e	12f	12g	12h	13a	13b	13c	13d	13e	14a	14b	14c	14d
Maximaal	2	2	1	1	1	1	2	2	3	3	2	3	2	3	4	2	1	1	2	3	1
Leerling 1	2	2	0	1	0	1	2	1	3	2	-	-	2	1	1	-	-	0	0	-	-
Leerling 2	2	2	0	0	1	1	2	1	3	3	2	2	1	1	0	-	-	1	1	0	1
Leerling 3	2	0	0	1	1	1	0	1	0	0	2	3	-	-	-	-	-	0	0	-	1
Leerling 4	2	0	1	1	0	1	2	0	3	3	1	1	2	2	0	-	0	0	1	3	-
p-waarde	100	50	25	75	50	100	75	38	75	67	63	50	63	33	6,3	0	0	25	25	25	50

Tabel 2b: Scores en p-waarden gemaakte opdrachten leerlingen les 2.

	15a	15b	16	17a	17b	17c	17d	17e	17f	17g	18a	18b	18c	18d	18e	18f	18g	19a	19b	19c	19d	19e	20	21a	21b	21c	21d	22a	22b	22c	22d
Maximaal	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	1	2	3	2	1	1	1	3	4	4	2
Leerling 1	1	2	1	1	1	1	0	1	1	0,5	2	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	-	1	-	-	-
Leerling 2	1	2	1	1	1	1	0	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1	2	1	2	1	0	-	0	1	1	-	-	-	-
Leerling 3	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	2	2	2	1	1	1	1	0	-	-	1	1	0	-	-	-	-	-	-	-
Leerling 4	1	1	1	0,5	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	-	0	1	0	0	0	1	0	-	-	0
p-waarde	100	63	100	88	75	100	0	100	75	88	63	75	75	63	50	38	50	100	25	13	50	38	25	0	25	50	50	8,3	0	0	0

Tabel 2c: Scores en p-waarden gemaakte opdrachten leerlingen les 3.

Zoals te zien is in de tabel, lijken veel opdrachten redelijk gemaakt. Opgave 7b is door veel leerlingen overgeslagen, terwijl ze wel allemaal 7c hebben geprobeerd te maken. Waarschijnlijk is alleen opgave a genoeg om te zien hoeveel oplossingen de vergelijkingen hebben. Hoewel maar 1 leerling gedeeltelijk op het juiste antwoord komt in c, weten de leerlingen in de interviews wel allemaal dat een derdegraadsvergelijking 3 oplossingen kan hebben. Of hierbij aangekomen is dat minder oplossingen ook mogelijk kan zijn, blijft hierbij onduidelijk. Verder lijken voornamelijk opgave 13 en 14 vrij slecht gemaakt. Zoals net besproken, vullen de leerlingen in eerste instantie geen waarde voor p is bij opgave 13b, waarna ze vastlopen en de opgave uiteindelijk niet afmaken. De tip zou hierbij uitkomst kunnen bieden. Opgave 14 levert een groter probleem op. De leerlingen werken soms de haakjes verkeerd uit en leggen de stap tussen de derdemacht en de derdemachtswortel niet. Hierdoor gaat opgave 19 ook vrij slecht, waardoor een van de leerdoelen niet behaald wordt. Hier wordt in sectie 5.5.2 dieper op ingegaan.

De lessenserie sluit dus deels aan op het wiskunde B en D niveau van vwo leerlingen aan het eind van 4 vwo/het begin van 5 vwo. Met de hiervoor besproken aanpassingen zou het lesmateriaal al sterker moeten worden. De leerlingen hebben zelf ook suggesties voor verbetering van het lesmateriaal gegeven in de interviews. Leerling 1 en 3 geven aan dat meer voorbeelden zouden helpen. Hierbij zou de manier waarop guided reinvention gebruikt wordt teniet gaan. Dit zou er toe kunnen leiden dat er instrumenteel in plaats van relationeel begrip gecreëerd wordt. Verder benoemt leerling 1 nog dat er eventueel een antwoordenboekje gegeven kan worden. Leerling 4 denkt dat het handig kan zijn om de moeilijkste opgaven van het lesmateriaal te bespreken aan het begin van de les. Op die manier kunnen leerlingen goed verder met het lesmateriaal. Dit sluit aan bij de gestructureerdheid van guided reinvention die Barton benoemd, zoals besproken in sectie 2.3 (Timmer & Caspers, 2022). Op deze manier worden de misconcepties weggehaald en kunnen de leerlingen goed verder bouwen op het materiaal. Voor de voortgang van opgave 19 op opgave 14 zou dit bijvoorbeeld geholpen hebben. Met enkele aanpassingen zou het dus mogelijk zijn om de tweede ontwerpeis wel te behalen.

Het bespreken van de moeilijkste opgaven doet wel de derde ontwerpeis teniet. Deze wordt nu nog niet volledig behaald. Uit de observaties bleek dat leerlingen op dit moment het materiaal nog niet zelfstandig door kunnen werken zonder inmenging van de docent. De meeste problemen kunnen echter aan de hand van aanpassingen aan het lesmateriaal ondervangen worden, zoals hierboven besproken. In plaats van het bespreken van de lastige opgaven zouden de leerlingen beter het antwoordmodel kunnen krijgen. Door deze na afloop van elke les te geven, zullen de leerlingen de uitkomsten nog steeds zelf moeten ontdekken. Op deze manier kunnen ze wel beter aan de nieuwe lessen beginnen. Het blijft hierbij wel belangrijk om uiteindelijk vragen te kunnen stellen aan de docent, zoals de leerlingen in de interviews ook al aangeven. Door de uitwerkingen te delen en de leerlingen aan de hand hiervan vragen te laten stellen zal de inmenging minimaal blijven. Dit zou bijvoorbeeld in de vorm van checkpoints aan het einde van elke les naar voren kunnen komen. Op die manier weten de leerlingen wel dat ze op de goede weg zitten en blijft de inmenging van de docent beperkt. Met deze aanpassingen zal ontwerpeis 3 redelijk behaald worden.

De vierde en laatste ontwerpeis wordt in sectie 5.5.2 uitvoerig besproken.

5.5.2 Analyse leerdoelen lessenserie

Het eerste leerdoel van de lessenserie, "Leerlingen kunnen derdegraads-vergelijkingen oplossen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$," zou allereerst aan de hand van opgave 22 getest moeten worden. Zoals te zien was in de uitwerkingen kwamen de leerlingen niet uit deze opgave. Ook tijdens het interview geven de leerlingen aan geen idee te hebben hoe ze de extra opgave, zoals te zien in bijlage 7, moeten uitwerken. Leerling 1 is uiteindelijk de enige die zelf bedenkt dat hij de formule van Cardano kan invullen. Hiermee is het eerste leerdoel niet behaald.

Na het doorwerken van de opgave wordt in het interview het tweede leerdoel van de lessenserie, "Leerlingen kunnen uitleggen waarom ze derdegraadsvergelijkingen op deze manier oplossen," getest. Leerling 1 geeft aan dat ze een andere manier nodig hadden om vergelijkingen op te lossen, naast de vergelijkingen die hij al kende. Leerling 3 wil de opgave oplossen aan de hand van $y = u + v$ en heeft daarmee iets van de afleiding onthouden. De overige twee leerlingen hebben geen idee waar de formule vandaan komt. Aangezien de leerlingen niet door het oplossen van de derdegraadsvergelijking zelf heen kwamen, is het ook onduidelijk in hoeverre dit tweede leerdoel verder afgebakend moet worden. Zoals in sectie 5.3.1 besproken waren dit zorgen van verschillende experts en hier kan met deze resultaten dus geen duidelijkheid over gecreëerd worden. Het twee leerdoelen van de lessenserie wordt daarmee duidelijk niet behaald.

Als derde leerdoel was gesteld: "Leerlingen kunnen van oplossingen van de formule van Cardano met behulp van complexe getallen reële oplossingen maken." Zoals aangegeven in sectie 5.5.1 ging het omschrijven van derdemachtswortels voor reële getallen in opgave 14 al mis. Daarmee is de basis voor het omschrijven van complexe naar reële oplossingen van de formule van Cardano verkeerd gelegd. Leerling 2 is de enige die hier in opgave 19 alsnog wel uit lijkt te komen, ondanks dat dit mis ging in opgave 14. Geen van de leerlingen heeft in het interview door dat ze iets met de $(1+2i)^3$ en $(1-2i)^3$ moeten doen. Het derde leerdoel van de lessenserie wordt daarmee niet behaald.

Ten slotte wordt nog aan de leerlingen gevraagd of ze kunnen uitleggen waar complexe getallen voor nodig zijn. Alle leerlingen geven aan dat complexe getallen gebruikt kunnen worden om alsnog een antwoord te vinden wat zonder de complexe getallen niet altijd mogelijk was. De stap naar het vinden van een reële oplossing wordt niet gelegd. Dit is de leerlingen met het lesmateriaal niet gelukt. Dit laatste leerdoel lijkt daarmee technisch gezien behaald, maar dit is niet wat er oorspronkelijk met het leerdoel bereikt zou moeten worden. Daarom zou het leerdoel beter omgeschreven kunnen worden naar de vorm: "Leerlingen kunnen uitleggen dat complexe getallen gebruikt worden om reële oplossingen te vinden." In deze vorm kan het leerdoel echter niet aan de leerlingen gepresenteerd worden. Het antwoord op onze oorspronkelijke vraag wordt daarmee al weggegeven.

De lessenserie voldoet dus niet aan de leerdoelen en daarmee is de laatste ontwerpeis niet behaald.

5.5.3 Analyse les-specifieke leerdoelen

Zoals aangegeven kan het eerste leerdoel van les 1 lastig geanalyseerd worden. Er wordt nergens getest of leerlingen kunnen uitleggen waar de abc-formule vandaan komt. In het interview gaf leerling 4 wel aan dit heel interessant te vinden. Hij denkt de abc-formule nog steeds zelf te kunnen afleiden. Aangezien veel leerlingen vastliepen in het kwadraat-afsplitsen zijn leerlingen 3 en 4 ook de enigen die uiteindelijk volledig door de afleidingsopgave heen zijn gekomen. Leerdoel 1 van les 1 lijkt daarmee gedeeltelijk behaald. Hiermee lijken de zorgen van de experts zoals besproken in sectie 5.3.1 ongegrond en hoeft dit leerdoel niet anders opgesteld te worden voor vervolgonderzoek.

Voor leerdoel 2 van de eerste les is het belangrijk dat de leerlingen zich bewust worden welke derdegraadsvergelijkingen ze al kunnen oplossen. De meeste leerlingen kwamen redelijk door opgave 5 heen. Leerling 1 benoemt in het interview bij het oplossen van derdegraadsvergelijkingen zelfs specifiek dat ze een nieuwe methode zochten om derdegraadsvergelijkingen zonder constante te kunnen oplossen. Leerdoel 2 van les 1 is daarmee behaald.

Het omschrijven van derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3+bx^2+cx+d=0$ herschrijven tot de vorm $x^3+px+q=0$ lukte de leerlingen in opgave 8 van les 1 alleen met hulp. Ook in het interview kwamen de leerlingen hier niet meer zelf op. Leerdoel 3 van les 1 is daarmee niet behaald.

Voor het gebruik van de factorstelling in opgave 9 hadden ed leerlingen ook hulp nodig. Leerling 2 stelde hier bij opgave 19e zelfs nog een vraag over, omdat hij toen al niet meer doorhad dat hij de factorstelling kon gebruiken. Zelfs wanneer de leerlingen de factorstelling bij de opgave in de interviews aangereikt werd, wisten ze niet (volledig) hoe ze hiermee om moesten gaan. Het laatste leerdoel van les 1 is daarmee niet behaald.

Het eerste leerdoel van les 2 komt overeen met het eerste leerdoel van de lessenserie. Hierbij is toegevoegd dat de derdegraadsvergelijkingen opgelost moeten kunnen worden met behulp van de formule van Cardano. Hoewel dit leerdoel niet behaald lijkt te worden, kwamen de leerlingen hier in opgave 15b grotendeels wel nog uit. Daarmee lijkt dit leerdoel op de korte termijn wel behaald te zijn. Vermoedelijk is de tijd tussen het maken van de les en het interview bij de testfase hier de beperkende factor geweest.

Als laatste leerdoel van les 2 was het de bedoeling dat leerlingen de oplossingen tot simpelere gehele getallen konden omschrijven. Zoals in sectie 5.5.2 besproken ging opgave 14 niet goed bij de leerlingen en daarmee is dit tweede leerdoel van les 2 niet behaald.

In les 3 was het allereerst belangrijk dat leerlingen met complexe getallen leerden werken. Hoewel er veel fouten gemaakt werden in opgave 17 en 18, lijken de meeste leerlingen in de specifieke antwoorden het optellen, aftrekken en vermenigvuldigen wel begrepen te hebben. Leerling 4 heeft voornamelijk problemen met het omschrijven van $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$. Hij vergeet hierbij continu de wortel van de a te nemen. Verder lijken de meeste fouten vooral rekenfouten en daarmee lijkt dit leerdoel van de laatste les wel behaald. In de interviews blijkt ook dat de leerlingen 2 en 3 de regel $i^2 = -1$ nog kennen. Leerling 2 maakt hier wel eerst 1 van, maar weet zichzelf na afwijzing meteen te verbeteren. Leerling 1 blijft ook op $i^2 = 1$ hangen en komt hier niet vanaf. Leerling 4 heeft geen idee meer dat i^2 omgeschreven kan worden.

De laatste twee leerdoelen van les 3 komen overeen met de laatste twee leerdoelen van de lessenserie en zijn daarom in sectie 5.5.2 al besproken. Al met al wordt leerdoel 1 van les 3 wel behaald en leerdoelen 2 en 3 niet.

6. Conclusie, discussie en aanbevelingen

In dit hoofdstuk proberen we de onderzoeksvraag, zoals aan het begin opgesteld te beantwoorden. Deze onderzoeksvraag luidde:

> "Hoe kan een lessenserie over derdegraadsvergelijkingen gebaseerd op relationeel begrip voor vwo leerlingen bij wiskunde D leiden tot een betekenisvolle introductie van complexe getallen?"

Het beantwoorden voor deze onderzoeksvraag heeft geleid tot twee fases. Allereerst is er een literatuuronderzoek gestart om de bestaande kennis van leerlingen te achterhalen, de verschillende oplossingsmethoden van derdegraadsvergelijkingen te onderzoeken en de didactische uitgangspunten voor het lesmateriaal vast te stellen. Bovendien is bestaand lesmateriaal bekeken om te kijken hoe dit kan bijdragen aan het ontwikkelen van nieuw lesmateriaal. Deze bevindingen zijn gepresenteerd in hoofdstuk 2. Aan de hand van dit theoretisch kader zijn in hoofdstuk 3 de ontwerpeisen en leerdoelen opgesteld.

Vervolgens is in het tweede deel van dit onderzoek lesmateriaal ontworpen over het oplossen van derdegraadsvergelijkingen. Dit lesmateriaal leidt hierbij bovendien tot een introductie van complexe getallen voor de leerlingen. Het lesmateriaal is voorgelegd aan een expertpanel en vervolgens aangepast en getest op een middelbare school in Overijssel. Met behulp van de uitwerkingen van leerlingen en semigestructureerde interviews is het lesmateriaal geanalyseerd. In sectie 6.1 wordt geprobeerd de onderzoeksvraag te beantwoorden. Hierbij wordt ingaan op de deelvragen die zijn opgesteld voor de beide fasen van het onderzoek. In sectie 6.2 worden de beperkingen van het onderzoek en suggesties voor het verbeteren van het lesmateriaal gegeven. Hierbij staan ook aanbevelingen voor vervolgonderzoek. In sectie 6.3 wordt het verslag afgerond met de implicaties van dit onderzoek voor de onderwijspraktijk.

6.1 Conclusie

In sectie 2.1 was te zien dat leerlingen in de bovenbouw voor vwo wiskunde B voornamelijk bezig zijn met het oplossen van lineaire en kwadratische vergelijkingen. Hogeremachtsvergelijkingen zijn door middel van substitutie of het buiten haakjes brengen van machten van x om te schrijven tot deze vergelijkingen. Verder moeten leerlingen vergelijkingen van de vorm $x^n = p$ kunnen oplossen. Leerlingen kunnen voordat ze aan de ontworpen lessenserie beginnen dus al sommige derdegraadsvergelijkingen oplossen. Dit zijn vergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ wanneer $d = 0$ en de vergelijkingen wanneer $b = 0 \wedge c = 0$.

Vervolgens was in sectie 2.2 te zien dat alle derdegraadsvergelijkingen om te schrijven zijn tot de vorm $x^3 + px + q = 0$ waarna de formule van Cardano gebruikt kan worden om deze op te lossen. Met de factorstelling kunnen de eventuele overige oplossingen van de derdegraadsvergelijking gevonden worden.

In sectie 2.3 werd duidelijk dat het gebruik van guided reinvention een goede methode is om relationeel begrip te creëren. Verder kwam hierin naar voren dat een goede opbouw van de opgaven belangrijk is om de leerlingen te enthousiasmeren voor de wiskunde.

Ten slotte is in sectie 2.4 het bestaande wiskunde D materiaal beschreven. Hierin was te zien dat complexe getallen veelal aan de hand van de verschillende getallenverzamelingen geïntroduceerd worden. Er is ook lesmateriaal bekeken dat het oplossen van derdegraadsvergelijkingen behandelt in combinatie met complexe getallen. Naast de wiskunde D module van de Wageningse methode omvatte dit lesmateriaal een werkblad en lessenserie aan de hand van een bron van Bombelli. Van beide lesmaterialen was het doel om ook geschiedenis in de wiskundelessen te introduceren. Daarmee heeft het andere focus dan het materiaal dat is ontworpen voor dit onderzoek.

Aan de hand van de antwoorden van deze eerste fase van het onderzoek zijn in hoofdstuk 3 ontwerpeisen en leerdoelen opgesteld voor de lessenserie. In de tweede fase van het onderzoek is een lessenserie ontworpen om derdegraads-vergelijkingen op te lossen en hiermee ook complexe getallen te introduceren bij vwo wiskunde D leerlingen. In hoofdstuk 5 werden de ontwerpkeuzes aan de hand van de bevindingen van de eerste onderzoeksfase beschreven. Vervolgens is de lessenserie voorgelegd aan een expertpanel en aan de hand hiervan verbeterd zoals beschreven in secties 5.3 en 5.4.

In de laatste fase van het onderzoek is het lesmateriaal in de praktijk getest op een middelbare school in Overijssel. In sectie 5.5 werd besproken welke ontwerpeisen wel en niet behaald worden en welke aanpassingen ertoe kunnen leiden dat deze alsnog behaald worden. De leerlingen kunnen dankzij de lessenserie helaas op dit moment nog geen derdegraadsvergelijkingen oplossen. Ze geven aan dat complexe getallen nuttig zijn om uiteindelijk oplossingen te kunnen vinden van vergelijkingen wanneer deze eerst niet gevonden konden worden. Dit laatste is met de introductie van een negatieve tweedemachtswortel in de abc-formule ook te behalen en daardoor heeft deze lessenserie niet tot een betekenisvolle introductie van complexe getallen geleid. Hiermee blijft onderzoeksvraag dus onbeantwoord.

6.2 Discussie en aanbevelingen

Al met al leidt het onderzoek dus niet tot het gehoopte antwoord op onze hoofdvraag. Toch lijken er met het algemene onderzoek wel interessante richtingen voor het lesmateriaal zijn te ontstaan. Het lesmateriaal op zich voldoet niet aan de ontwerpeisen, maar met de in sectie 5.5.1 besproken aanpassingen voor specifieke opgaven lijkt het lesmateriaal wel redelijk goed bij het niveau van de leerlingen aan te sluiten. Het zou dan zelfstandig door de leerlingen met minimale inmenging van de docent te volgen moeten zijn. Na elke les zouden de leerlingen de antwoorden van de opgaven moeten krijgen, zodat ze eventueel vragen aan de docent kunnen stellen voordat ze aan de nieuwe stof beginnen. De tijdsduur per les zal opgeschaald moeten worden. Met de niveauverbetering zal dit vermoedelijk binnen 3 lessen van 60 minuten uit te voeren moeten zijn. Afhankelijk van de manier waarop het vak wordt vormgegeven kan dit daarmee als huiswerk afgemaakt worden.

De leerdoelen van het vak worden momenteel grotendeels niet behaald. Er kan voornamelijk veel winst behaald worden bij opgave 14 en 19 zoals in sectie 5.5 besproken. Het is goed mogelijk dat deze leerdoelen wel behaald worden als het lesmateriaal wordt aangepast zoals hiervoor besproken. Het is bij de leerdoelen goed om op te merken dat de lessenserie maar bij 4 leerlingen op één middelbare school is uitgetest. Dit is daarmee een erg kleine groep. Deze testfase zou nauwkeuriger kunnen worden uitgevoerd wanneer er in verschillende wiskunde D klassen getest kan worden. Barton geeft aan dat dezelfde methode in verschillende klassen en op verschillende momenten van de dag al een enorm verschil in resultaat kan hebben (Timmer & Caspers, 2022). Verschillende scholen meenemen is daarmee nog interessanter.

De uitvoering van het onderzoek verliep nu ook onregelmatig vanwege de toetsweek. Leerlingen gaven al aan dat dat impact had op hoe ze het materiaal doorgewerkt hadden. Bovendien zijn de interviews ook pas 3 weken na de laatste les gehouden. Het zou beter zijn om het onderzoek op reguliere wiskunde D tijden in de wiskundelessen in te plannen en de interviews hier op kortere termijn op aan te laten sluiten. Hiermee kan het lesmateriaal ook voorafgaand aan het hoofdstuk over complexe getallen gegeven worden om deze introductie goed door te laten lopen. Dit zal een realistischer beeld geven van hoe de leerlingen daadwerkelijk presteren. De leerlingen waren nu in hun wiskunde D lessen met een heel ander onderwerp bezig, waardoor het doorwerken van deze lessenserie ook als iets extra's komt. Leerlingen kijken er daardoor anders tegenaan dan ze bij hun reguliere lesmateriaal doen, wat een vertekend beeld geeft.

Wanneer de lessenserie op reguliere momenten kan worden ingepland geeft dit de leerlingen ook tijd om het materiaal tot zich te nemen wanneer het niet meteen lukt. Deze tijd was in dit onderzoek niet ingecalculeerd. Het zou het beste zijn om deze introductie bovendien naast een controlegroep te leggen die alleen de eigen lesmethode doorwerken. Op die manier kan de impact van het nieuwe lesmateriaal beter onderzocht worden.

Voor vervolgonderzoek is het interessant om de blik van verschillende wiskunde D docenten en de manier waarop zij het vak vormgeven mee te nemen. Gezien het feit dat verschillende leerlingen aangaven voorbeelden te missen, zou het kunnen dat zij bijna nooit leskrijgen via guided reinvention. Het lesmateriaal sluit waarschijnlijk beter aan in klassen die hier vaker mee werken. Het zou interessant kunnen zijn om te testen of er verschil zit in hoeverre dit lesmateriaal een toevoeging geeft op de verschillende lesmethodes die de scholen momenteel gebruiken.

Ten slotte zou het nog een mogelijkheid zijn om de lessenserie uit te breiden door de leerlingen meer lesmateriaal aan te bieden. Er zouden extra oefenopgaven aangeboden kunnen worden voor bijvoorbeeld zaken als het omschrijven naar de vorm $x^3 + px + q = 0$ en de factorstelling. Op deze manier kunnen leerlingen extra oefenen wanneer ze hier behoefte aan hebben. Daartegenover zouden verdiepingsopdrachten kunnen worden ontwikkeld voor leerlingen die er makkelijk doorheen komen. De afleiding die we met behulp van de formule van Cardano gedaan hebben in bijlage 2, zou ook door de leerlingen gedaan kunnen worden aan de hand van guided reinvention. Zo wordt het voor leerlingen duidelijk wanneer complexe getallen ontstaan in de formule van Cardano. Dit geeft ze een nog dieper begrip van het belang van complexe getallen. Verder zou de volledige abcd-formule afgeleid kunnen worden door de leerlingen. Op deze manier kan er gedifferentieerd worden tussen de zwakke en sterke leerlingen en heeft het lesmateriaal voor iedereen dezelfde grootte.

6.3 Implicaties voor de onderwijspraktijk

Hoewel de lessenserie op dit moment nog niet tot het gehoopte antwoord op onze hoofdvraag leidt, denken we nog steeds dat de introductie van complexe getallen aan de hand van derdegraadsvergelijkingen waardevol kan zijn voor leerlingen. Hierbij is het belangrijk om er rekening mee te houden dat de introductie op deze manier vermoedelijk vooral goed aansluit bij leerlingen die al vaker met guided reinvention gewerkt hebben. Dit onderzoek geeft daarmee ook belangrijke aandachtspunten voor het vak in het algemeen. Verschillende lesmethoden sluiten anders aan op verschillende klassen. Aangezien wiskunde D geen centraal schriftelijk eindexamen heeft, hebben de docenten veel meer keuzevrijheid bij dit vak. Het zou interessant kunnen zijn om de verplichte examenonderdelen om die reden meer af te bakenen, zodat de inhoud die bij de verschillende scholen getoetst wordt meer overeenkomt. Dit voorkomt dat het vak geen betekenis meer heeft en zorgt ervoor dat er wel een bepaald niveau verwacht kan worden. Tegelijkertijd is het wel belangrijk om een deel van dit vak juist heel vrij te laten, omdat dit voor veel docenten en scholieren juist voor de meerwaarde van het vak zorgt. Docenten die vaak op relationeel begrip aan de hand van guided reinvention focussen, zouden dan veel baat kunnen hebben bij deze lessenserie. Docenten die vaker van instrumenteel begrip uitgaan, zouden juist beter een methode als Getal en Ruimte kunnen volgen. Leerlingen zullen daarmee niet alles op instrumentele manieren aanleren en kunnen wel meer voorbeelden volgen. Mogelijk zou dat bij de leerlingen waarbij de lessenserie momenteel getest is daarmee beter aansluiten, aangezien zij stuk voor stuk om meer voorbeelden vroegen. Het is belangrijk om voor ontwerponderzoeken mee te nemen dat de manier waarop nieuw lesmateriaal aansluit binnen de al bestaande kaders een invloedrijke factor kan zijn voor de mate van succes. Daarom is het ook belangrijk dat een docent zich het materiaal eigen maakt en inspeelt op wat de leerlingen verwachten. Dit zijn interessante factoren waar voor dit onderzoek geen rekening mee gehouden zijn, maar waar de onderwijswereld veel baat bij kan hebben.

Referenties

Abby (2020). Solving Cubic Equations – Methods & Examples. *Story of Mathematics.* https://www.storyofmathematics.com/solving-cubic-equations/

Bakker, H. et al. (2014). Moderne wiskunde. *Wiskunde D VWO 4 Leerboek.* Elfde editie. Noordhoff Uitgevers, Groningen.

Berlinghoff, W.P., & Gouvêa, F.Q. (2022). *Wortels van de wiskunde.* Tweede editie, vijfde druk. Epsilon uitgaven, Amsterdam. Vertaling Agterberg, D., & Daems, J.

Bettermarks (2021). *Lesmethoden*. https://nl.bettermarks.com/lesmethoden/

Broek, L. van den, Haandel, M. van, Homberg, D. van den, Piekaar, A., & Smaalen, D. (2009). *Inleiding complexe getallen.* De Wageningse methode. Iddink voortgezet onderwijs Ede.

Contreras, J.N. (2015). An Episode of the Story of the Cubic Equation: The del Ferro-Tartaglia-Cardano's Formulas. *Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education,* 9(2), 24-37.

CvTE (2022-a). Examenprogramma wiskunde D vwo. *Examenprogramma wiskunde D vwo vanaf schooljaar 2017-2018* https://www.examenblad.nl/examen/wiskunde-d-vwo/2022/vwo

CvTE (2022-b). Examenprogramma wiskunde D havo. *Examenprogramma wiskunde D havo vanaf schooljaar 2016-2017* https://www.examenblad.nl/examen/wiskunde-d-havo/2022

CvTE (2022-c). Examenprogramma wiskunde A havo. *Examenprogramma wiskunde A havo vanaf CE 2017* https://www.examenblad.nl/examen/wiskunde-a-havo-2/2022/havo

CvTE (2022-d). Examenprogramma wiskunde B havo. *Examenprogramma wiskunde B havo vanaf CE 2017* https://www.examenblad.nl/examen/wiskunde-b-havo-2/2022/havo

CvTE (2022-e). Examenprogramma wiskunde A vwo. *Examenprogramma wiskunde A vwo vanaf CE 2018* https://www.examenblad.nl/examen/wiskunde-a-vwo-2/2022/vwo

CvTE (2022-f). Examenprogramma wiskunde B vwo. *Examenprogramma wiskunde B vwo vanaf CE 2018* https://www.examenblad.nl/examen/wiskunde-b-vwo-2/2022/vwo

CvTE (2022-g). Examenprogramma wiskunde C vwo. *Examenprogramma wiskunde C vwo vanaf CE 2018* https://www.examenblad.nl/examen/wiskunde-c-vwo-2/2022/vwo

Dijkhuis, J.H. et al. (2016-a). Getal en Ruimte*. VWO D deel 3.* Elfde editie. Noordhoff Uitgevers, Groningen.

Dijkhuis, J.H. et al. (2016-b). Getal en Ruimte*. VWO D deel 4.* Elfde editie. Noordhoff Uitgevers, Groningen.

Dijkhuis, J.H. et al. (2020-a). Getal en Ruimte*. Havo B deel 1.* Twaalfde editie. Noordhoff Uitgevers, Groningen.

Dijkhuis, J.H. et al. (2020-b). Getal en Ruimte*. VWO AC deel 1.* Twaalfde editie. Noordhoff Uitgevers, Groningen.

Dijkhuis, J.H. et al. (2020-c). Getal en Ruimte*. VWO AC deel 2.* Twaalfde editie. Noordhoff Uitgevers, Groningen.

Dijkhuis, J.H. et al. (2020-d). Getal en Ruimte*. VWO A deel 3.* Twaalfde editie. Noordhoff Uitgevers, Groningen.

Dijkhuis, J.H. et al. (2020-e). Getal en Ruimte*. VWO A deel 4.* Twaalfde editie. Noordhoff Uitgevers, Groningen.

Dijkhuis, J.H. et al. (2020-f). Getal en Ruimte*. VWO B deel 1.* Twaalfde editie. Noordhoff Uitgevers, Groningen.

Dijkhuis, J.H. et al. (2020-g). Getal en Ruimte*. VWO B deel 2.* Twaalfde editie. Noordhoff Uitgevers, Groningen.

Dijkhuis, J.H. et al. (2020-h). Getal en Ruimte*. VWO B deel 4.* Twaalfde editie. Noordhoff Uitgevers, Groningen.

Freudenthal, H. (2002). *Revisiting Mathematics Education - China Lectures*. Kluwer Academic Publishers

González-Velasco, E. A. (2011). *Journey through mathematics*. Springer.

Hass, J.R., Weir, M. D., & Thomas, G.B. (2017). A.7 Complex numbers. *Thomas' Calculus Early Transcendentals,* Pearson Education, 1065-1075.

Kern Wiskunde tweede fase h/v. (z.d.) https://boomvoortgezetonderwijs.nl/kern-wiskunde-havovwo-tf/ Geraadpleegd op 2 mei 2023.

Kosman, R., & Vos, A. de (2016). *An introduction to complex numbers*. https://webspace.science.uu.nl/~wepst101/wisl901/goodpractices/ Geraadpleegd op 18 april 2023.

Lijnse, P. (2007). Over een probleemstellende aanpak en guided reinvention. Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 26(1), 3-11.

Marzano, R. &, Miedema, W. (2018). Leren in vijf dimensies. Moderne didactiek voor het voortgezet onderwijs.

Middleton, J.A., & Spanias, P.A. (1999). Motivation for achievement in mathematics: Findings, generalizations, and criticisms of the research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(1), 65-88.

Noordhoff. (z.d.). Wiskunde. *Onze Methoden.* https://www.noordhoff.nl/voortgezet-onderwijs/wiskunde

Sfard, A. (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Nederland: Kluwer Academic Publishers. Educational Studies in Mathematics 22. 1-36.

Skemp, R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 12(2), 88-95

Smartwiskunde. (z.d.) *Highlights.* https://www.smartwiskunde.nl/over-smartwiskunde/highlights/ Geraadpleegd op 2 mei 2023.

Timmer, M. & Caspers, W. (2022). How he wishes he'd taught maths: Craig Barton on improving your teaching, lethal mutations and problem solving. *Nieuw archief voor de wiskunde,* 5(23), 218-225.

Wepster, S.A., & Daems, J.L.A.H. (2023). *Geschiedenis (leraren) projecten*. https://webspace.science.uu.nl/~wepst101/wisl901/proj/projecten.html Geraadpleegd op 20 maart 2023.

Bijlage 1: Examentraining informatie Getal en Ruimte

Vergelijkingen oplossen

Bij het algebraïsch of exact oplossen van vergelijkingen werk je al schrijvend stap voor stap naar de oplossing toe.

- *Eerstegraadsvergelijkingen*
  1. Werk haakjes en breuken weg.
  2. Breng alle termen met de variabele naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid en herleid beide leden.
  3. Deel beide leden door het getal dat voor de variabele staat.
- *Tweedegraadsvergelijkingen*
  - $ax^2 + bx = 0$
    Breng x buiten haakjes.
  - $ax^2 + c = 0$
    Herleid tot de vorm $x^2 = \text{getal}$.
  - $ax^2 + bx + c = 0$ en het linkerlid is te ontbinden
    Gebruik de product-som-methode en pas toe $AB = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.
  - $ax^2 + bx + c = 0$ en het linkerlid is niet te ontbinden
    Ga kwadraatafsplitsen of gebruik de *abc*-formule.
- *Hogeregraadsvergelijkingen*
  - $x^n = p$ met $n = 2, 3, 4, \ldots$
    n oneven $x^n = p$ geeft $x = \sqrt[n]{p}$
    n even en $p > 0$ $x^n = p$ geeft $x = \sqrt[n]{p} \vee x = -\sqrt[n]{p}$
    n even en $p < 0$ $x^n = p$ heeft geen oplossingen
  - Derdegraadsvergelijkingen zoals $x^3 - x^2 - 2x = 0$.
    Breng x buiten haakjes. Je krijgt $x(x^2 - x - 2) = 0$
    $x(x + 1)(x - 2) = 0$
    $x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2$
    Bij de vierdegraadsvergelijking $x^4 - x^3 - 2x^2 = 0$ breng je x^2 buiten haakjes.
  - Vierdegraadsvergelijkingen zoals $x^4 - x^2 - 2 = 0$.
    Gebruik de substitutie $x^2 = u$. Je krijgt $u^2 - u - 2 = 0$
    $(u + 1)(u - 2) = 0$
    $u = -1 \vee u = 2$
    $x^2 = -1 \vee x^2 = 2$
    $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$
    Bij $x^4 - 2x^2 - 2 = 0$ gebruik je na de substitutie $x^2 = u$ de *abc*-formule bij $u^2 - 2u - 2 = 0$.
    Bij de zesdegraadsvergelijking $x^6 - x^3 - 2 = 0$ gebruik je de substitutie $x^3 = u$.

Algebraïsch
Stap voor stap zonder gebruik te maken van opties van de GR. Zo nodig geef je het antwoord in het gevraagde aantal decimalen.

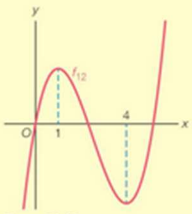
Exact
Ga algebraïsch te werk en rond niet af.

De *abc*-formule
$ax^2 + bx + c = 0$
$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$
met $D = b^2 - 4ac$

Extreme waarden, buigpunten en raaklijnen

Gegeven is dat de functie $f_p(x) = x^3 - 7\frac{1}{2}x^2 + px$ een extreme waarde heeft voor $x = 1$. Gevraagd wordt de andere extreme waarde exact te berekenen.
Je gaat als volgt te werk.

- Bereken $f_p'(x)$. Je krijgt $f_p'(x) = 3x^2 - 15x + p$.
- Er moet gelden $f_p'(1) = 0$, dus $3 \cdot 1^2 - 15 \cdot 1 + p = 0$.
  Dit geeft $p = 12$, dus $f_{12}'(x) = 3x^2 - 15x + 12$.
- Los de vergelijking $f_{12}'(x) = 0$ op.
  $3x^2 - 15x + 12 = 0$
  $x^2 - 5x + 4 = 0$
  $(x - 1)(x - 4) = 0$
  $x = 1 \vee x = 4$
- Schets de grafiek van f_{12}.
  Zie hiernaast, er is een minimum voor $x = 4$.
  Je krijgt min. is $f_{12}(4) = -8$.



figuur 16.28

(Dijkhuis et al., 2020-h)

Bijlage 2: Analyse complexe getallen in de formule van Cardano

De formule van Cardano geeft aan dat voor vergelijkingen van de vorm $x^3 + px + q = 0$ een oplossing wordt gegeven door

$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ (Berlinghoff & Gouvêa, 2022).

Wanneer $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ leidt de formule van Cardano tot complexe getallen. Dit leidt alleen tot een negatieve discriminant wanneer $p < 0$. Dat komt omdat q^2 niet negatief kan zijn. Als de grafiek van $x^3 + px + q$ geplot wordt, is te zien dat deze voor een negatieve p-waarde twee toppen heeft. Deze toppen kunnen worden gevonden door de afgeleide gelijk te stellen aan 0. Dit geeft $3x^2 + p = 0$ oftewel $x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$. De y-waarden voor de toppen zijn daarmee $f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q$ en $f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q$. Wanneer één top zich boven en één zich onder de x-as bevindt, zal de vergelijking $x^3 + px + q = 0$ dus drie reële oplossingen moeten hebben. Beide toppen liggen boven de x-as voor wanneer $f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) > 0$, aangezien dit de laagste top is (vanwege $p < 0$). Dit leidt daarmee tot $q > \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$. Dit leidt echter tot tegenspraak, want het geeft $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > \frac{\left(\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{\frac{4p^3}{27}}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$ oftewel de formule van Cardano leidt tot reële oplossingen. Beide toppen liggen onder de x-as voor $f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) < 0$ aangezien dit de hoogste top is. Dit leidt daarmee tot $q < -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$ en ook tot tegenspraak want $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > \frac{\left(-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{\frac{4p^3}{27}}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$ (het <-teken klapt om omdat $p < 0$). Hieruit blijkt dus dat er in de formule van Cardano alleen negatieve tweedemachtswortels ontstaan wanneer de vergelijking drie reële oplossingen heeft. De gevonden oplossing met de formule van Cardano zal dus om te schrijven moeten zijn tot een reële oplossing.

Bijlage 3: Werkblad aan de hand van Bombelli

Jeanine Daems heeft een werkblad gemaakt aan de hand van een bron van Bombelli om geschiedenis in de wiskundeles te integreren. Het werkblad is te vinden op de volgende bladzijden.

Derdegraads vergelijkingen oplossen met complexe getallen: Bombelli

1) Laat zien dat $x = 4$ een oplossing is van de vergelijking $x^3 = 15x + 4$.

De formule van Cardano zegt dat de vergelijking $x^3 = px + q$ als oplossing heeft:

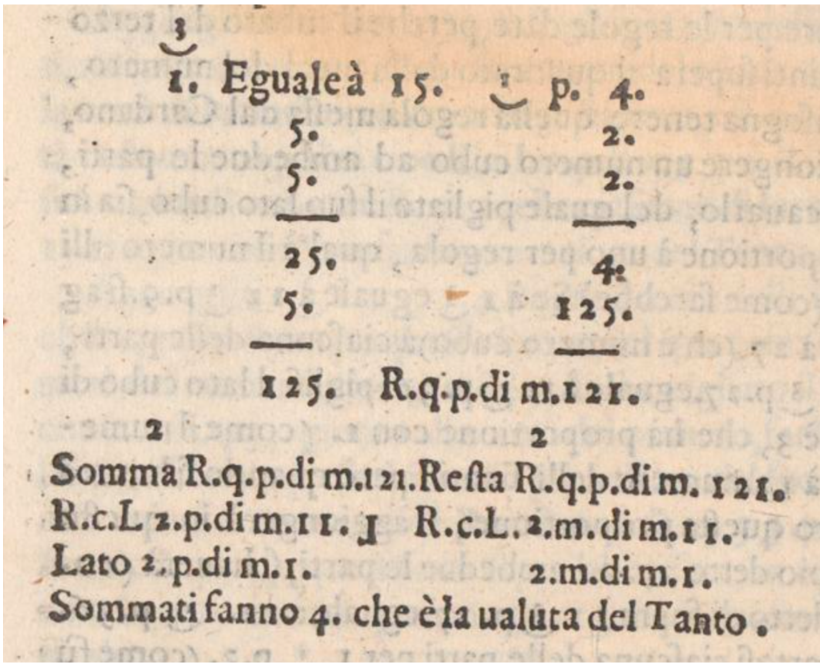
$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

2) Bereken de oplossing van $x^3 = 15x + 4$ die uit de formule van Cardano volgt. Wat valt op?

3) Hoeveel (reële) oplossingen heeft de vergelijking $x^3 = 15x + 4$ eigenlijk? (Kijk bijvoorbeeld in geogebra naar de nulpunten van $y = x^3 - 15x - 4$.)

De conclusie is dat de oplossing die je bij opgave 2 gevonden hebt gelijk moet zijn aan een reëel getal. Bombelli ging rekenen met de wortels uit negatieve getallen om toch tot reële oplossingen te komen!

Hieronder zie je een stukje uit zijn boek *Algebra* uit 1572 (blz 294). Bombelli schreef in het Italiaans.



1. Eguale à 15. p. 4.
5. 2.
5. 2.
25. 4.
5. 125.
125. R.q.p.di m.121.
2 2
Somma R.q.p.di m.121. Reſta R.q.p.di m. 121.
R.c.L 2.p.di m.11. ⅃ R.c.L.2.m.di m.11.
Lato 2.p.di m.1. 2.m.di m.1.
Sommati fanno 4. che è la ualuta del Tanto.

4) Op de eerste regel staat in Bombelli's notatie de vergelijking $x^3 = 15x + 4$. Daaronder lost hij de vergelijking op. Vergelijk wat je hier ziet met je eigen oplossing in opgave 2. Wat herken je?

De 4 op de laatste regel is uiteindelijk de oplossing die Bombelli hier gevonden heeft. Tussendoor gebeurt iets interessants. Met "R.q." wordt de vierkantswortel bedoeld ("Radice quadrata"), met R.c. de derdemachtswortel ("Radice cuba").
"2 Somma R.q.p.di m.121" lijkt op een deel van de formule die je hebt gevonden, "2 Resta R.q.p.di m.121" op een ander deel.
In de formule van Cardano moet van die beide delen nog de derdemachtswortel genomen worden. In de volgende regel van de bron staat inderdaad ook iets met derdemachtswortels, zoals je ziet.

6) Toon aan dat $2 + i$ een derdemachtswortel is van $2 + 11i$, en dat $2 - i$ een derdemachtswortel is van $2 - 11i$. (Hint: het is makkelijker om haakjes uit te werken in $(2 + i)^3$ dan om complexe wortels uit te rekenen.)

7) Herken je deze getallen ook in de bron?

8) Laat zien dat de formule van Cardano nu inderdaad $x = 4$ als oplossing geeft.

Bijlage 4: Ethiekaanvraag

Voor het verzamelen van de data aan de hand van het expertpanel en met de praktijktest is een ethiekaanvraag ingediend bij de facultaire BMS Ethiek Commissie. Deze is goedgekeurd onder nummer 230663. De complete aanvraag is te vinden op de volgende bladzijden.

230663 REQUEST FOR ETHICAL REVIEW

Request nr: 230663
Researcher: Ruiten, F.M. van
Supervisor: Meulen, W.R. van der
Reviewer: Walma van der Molen, J.H.
Status: Approved by commission
Version: 2

1. START

A. TITLE AND CONTEXT OF THE RESEARCH PROJECT

1. What is the title of the research project? (max. 100 characters)

Derdegraadsvergelijkingen oplossen. Een lessenserie voor vwo wiskunde D

2. In which context will you conduct this research?

Master's Thesis

3. Date of the application

20-04-2023

5. Is this research project closely connected to a research project previously assessed by the BMS Ethics Committee?

No/Unknown

B. CONTACT INFORMATION

6. Contact information for the lead researcher

6a. Initials:

F.M.

6b. Surname:

van Ruiten

6c. Education/Department (if applicable):

M-ME

6d. Staff or Student number:

2096633

6e. Email address:

f.m.vanruiten@student.utwente.nl

6f. Telephone number (during the research project):

+31612399134

6g. If additional researchers (students and/or staff) will be involved in carrying out this research, please name them:

-

6h. Have you completed a PhD degree?

No

7. Contact information for the BMS Supervisor

7a. Initials:

W.R.

7b. Surname:

van der Meulen

7c. Department:

BMS-ELAN

7d. Email address:

w.r.vandermeulen@utwente.nl

7e. Telephone number (during the research project):

+31534895483

8. Is one of the ethics committee reviewers involved in your research? Note: not everyone is a reviewer.

No

C. RESEARCH PROJECT DESCRIPTION

9a. Please provide a brief description (150 words max.) of the background and aim(s) of your research project in non-expert language.

I am developping a serie of three lectures to introduce complex numbers to high school "wiskunde D" students. Mathematics books introduce complex numbers with different sets of numbers. Complex numbers were created to solve cubic equations, but this is not shared with the students. Once students know the origin of complex numbers, they will understand why these numbers are important to mathematics. Therefore the aim of this lecture series is to create a meaningfull introducting of complex numbers by introducing the solution methods for cubic equations. I want to review the lecture series with an expert panel of UT students and afterwards try the lectures out at the CSG Reggesteyn in Nijverdal. There are currently four students who follow "wiskunde D" at this school. After teaching them the lecture series I would like to conduct individual interviews with all four students, to test if the lecture series meets it aims and how it can be improved.

9b. Approximate starting date/end date of data collection:

Starting date: 2023-05-13

End date: 2023-07-06

9c. If applicable: indicate which external organization(s) has/have commissioned and/or provided funding for your research.

Commissioning organization(s):

Not applicable

Funding organization(s):

Not applicable

2. TYPE OF STUDY

Please select the type of study you plan to conduct:

I will be collecting new data from individuals acting as respondents, interviewees, participants or informants.

4. RESEARCH INVOLVING THE COLLECTION OF NEW DATA

A: RESEARCH POPULATION

20. Please provide a brief description of the intended research population(s):

First of all I want to make an expert panel out of the fellow students who follow my study (maximum 5). Afterwards I want to try out the lecture series at a high school. There are currently four students following "wiskunde D" at the CSG Reggesteyn in Nijverdal. I want to teach them the new lecture series and afterwards I would like to conduct individual interviews with all four students.

21. How many individuals will be involved in your research?

As many fellow students of my studies as there are available (maximum 5) and four students of the high school in Nijverdal.

22. Which characteristics must participants/sources possess in order to be included in your research?

The fellow students should follow the educational master to become a mathematics teacher. The amount of students is purely based on availability. The students of the high school should all follow "wiskunde D" and since I am currently following my internship at the CSG Reggesteyn in Nijverdal in want to conduct the interviews at the four students currently following "wiskunde D" at this school.

23. Does this research specifically target minors (<16 years), people with cognitive impairments, people under institutional care (e.g. hospitals, nursing homes, prisons), specific ethnic groups, people in another country or any other special group that may be more vulnerable than the general population?

Yes, minors

Educational research

24. Are you planning to recruit participants for your research through the BMS test subject pool, SONA

No

B. METHODS OF DATA COLLECTION

25. What is the best description of your research?

- Observation research
    - By researcher in person
- Interview research
- Research using focus groups and/or stakeholder workshops

26. Please prove a brief yet sufficiently detailed overview of activities, as you would in the Procedure section of your thesis or paper. Among other things, please provide information about the information given to your research population, the manipulations (if applicable), the measures you use (at construct level), etc. in a way that is understandable for a relative lay person.

First I want to review the to be designed lecture series with the university students. After using the feedback and improving the lecture series with that session I want to teach the high school students the new lecture series. I would like to conduct individual interviews with all four high school students.

How much time will each participant spend (mention the number of sessions/meetings in which they will participate and the time per session/meeting)?

The university students will spend one session of 1.5 hours. The high school students will follow 3 lectures of 50 minutes and one interview of 20 minutes

C: BURDEN AND RISKS OF PARTICIPATION

27. Please provide a brief description of these burdens and/or risks and how you plan to minimize them:

For the university students there are no risks at all. It will only cost them a little of their time, but this also improves their intellectual thinking as connected to their studies. Furthermore it is completely voluntary. The high school students will follow the lecture series during their "wiskunde D" lectures. Their normal "wiskunde D" lecture series will be paused to make it possible for me to conduct this research. Complex numbers are part of their exam program, so they have a head start when this topic will be taugth later on. The students get a lecture series instead of working through their books, but this is not that much different compared to normal circumstances.

28. Can the participants benefit from the research and/or their participation in any way?

Yes

Please Explain:

The university students will engage in a critical reflection of the lecture series, which is something they need to be able to do for their study. The high school students will get a more meaningfull introduction to complex numbers compared to the program when they would follow their book, wherefore it will match their interests more closely.

29. Will the study expose the researcher to any risks (e.g. when collecting data in potentially dangerous

environments or through dangerous activities, when dealing with sensitive or distressing topics, or when working in a setting that may pose 'lone worker' risks)?

No

D. INFORMED CONSENT

30. Will you inform potential research participants (and/or their legal repsentative(s), in case of non-competent participants) about the aims, activities, burdens and risks of the research before they decide whether to take part in the research?

Yes

Briefly clarify how:

University students will be asked for oral consent prior to the reflection of the lecture series. Parents of students younger than 16 will receive a letter with information about the lecture series and interviews afterwards. In this way there will be asked for written consent by filling in the forms and sending them back. The students will be asked to fill in those forms at the start of the lecture series.

32. How will you obtain the voluntary, informed consent of the research participants (or their legal repsentatives in case of non-competent participants)?

Other

The university students will be asked for oral consent. The parents and high school students are younger than 16 and will be asked for wigned, written consent.

33. Will you clearly inform research participants that they can withdraw from the research at any time without explanation/justification?

Yes

34. Are the research participants somehow dependent on or in a subordinate position to the researcher(s) (e.g. students or relatives)?

Yes

If yes how will you ensure that these participants have voluntarily consented to take part in the research?

There is no grade assigned to the lecture series. It is all about receiving feedback on the lecture series to see if it meets its goal and improve it if necessary.

35. Will participants receive any rewards, incentives or payments for participating in the research?

- No

36. In the interest of transparency, it is a good practice to inform participants about what will happen after their participation is completed. How will you inform participants about what will happen after their participation is concluded?

- Participants will receive the researcher's contact details, so that they can contact the researcher if they have questions/would like to know more.

- Participants who indicate they are interested will receive a summary of the research results.

E. CONFIDENTIALITY AND ANONYMITY

37. Does the data collected contain personal identifiable information that can be traced back to specific individuals/organizations?

    No

39. Will you make use of audio or video recording?

    Yes

- What steps have you taken to ensure safe audio/video data storage?

    The audio of the interviews will be recorded with IrisConnect. In this way it will be stored conform the university rules about privacy. The files will not be shared with anyone.

- At what point in the research will tapes/digital recordings/files be destroyed?

    After the interviews are transcripted.

5. DATA MANAGEMENT

- I have read the UT Data policy.
- I am aware of my responsibilities for the proper handling of data, regarding working with personal data, storage of data, sharing and presentation/publication of data.

6. OTHER POTENTIAL ETHICAL ISSUES/CONFLICTS OF INTEREST

40. Do you anticipate any other ethical issues/conflicts of interest in your research project that have not been previously noted in this application? Please state any issues and explain how you propose to deal with them. Additionally, if known indicate the purpose your results have (i.e. the results are used for e.g. policy, management, strategic or societal purposes).

    I don't suspect any issues

7. ATTACHMENTS

-

8. COMMENTS

Meulen, W.R. van der (04-05-2023 11:50):

Commentaar Gerard:

Gelezen de Request for ethical review. Ziet er goed uit.

Bij vraag 23 meer specificeren het antwoord: minors=students Reggesteyn, …?? Educational research??

Bij vraag 36, eerste antwoord All participants ipv Partricipants

Meulen, W.R. van der (01-05-2023 11:46):

Vraag 1: titel ook in het Engels toevoegen.

Vraag 20/21: probeer te specificeren hoeveel. Bijvoorbeeld max. 5.

Vraag 27: hoe zorg je ervoor dat de pauze van de normale les niet negatieve gevolgen heeft? Noem bijvoorbeeld dat complexe getallen later voorkomen en ze dan een voordeel hebben.

9. CONCLUSION

Status: Approved by commission

The BMS ethical committee / Domain Humanities & Social Sciences has assessed the ethical aspects of your research project. On the basis of the information you provided, the committee does not have any ethical concerns regarding this research project. It is your responsibility to ensure that the research is carried out in line with the information provided in the application you submitted for ethical review. If you make changes to the proposal that affect the approach to research on humans, you must resubmit the changed project or grant agreement to the ethical committee with these changes highlighted.

Moreover, novel ethical issues may emerge while carrying out your research. It is important that you re-consider and discuss the ethical aspects and implications of your research regularly, and that you proceed as a responsible scientist.

Finally, your research is subject to regulations such as the EU General Data Protection Regulation (GDPR), the Code of Conduct for the use of personal data in Scientific Research by VSNU (the Association of Universities in the Netherlands), further codes of conduct that are applicable in your field, and the obligation to report a security incident (data breach or otherwise) at the UT.

Bijlage 5: Brief ouders en leerlingen

Voor het uitvoeren van de praktijktest en het verzamelen van de data op de middelbare school zijn de ouders en leerlingen geïnformeerd aan de hand van een brief. Deze is te vinden op de volgende bladzijde.

Beste ouder(s)/verzorger(s),

Uw zoon/dochter volgt het vak wiskunde D op school. Dit jaar heb ik, Floor van Ruiten (eerstegraads docent wiskunde in opleiding), voor mijn afstudeeropdracht een lessenserie ontworpen voor het vak wiskunde D. Hierin leert uw kind waarvoor complexe getallen ontstaan zijn aan de hand van het oplossen van derdegraadsvergelijkingen. Complexe getallen zijn een onderdeel van het schoolexamen en deze lessenserie zou een betekenisvolle introductie moeten bieden, waardoor de leerlingen daar profijt van hebben wanneer ze dit hoofdstuk starten in het vak. Voor dit onderzoek zou ik graag de verslagen van de leerlingen bekijken en na afloop leerlingen interviewen over hun ervaringen met de opdrachten. Deze interviews worden opgenomen (audio) om later te transcriberen. Deze audio wordt in een beveiligde omgeving bewaard (Iris Connect) en zullen na het transcriberen verwijderd worden. Er is geen cijfer verbonden aan deze lessenserie. Zowel de verslagen van de leerlingen, als de antwoorden van leerlingen tijdens de interviews hebben geen effect op hun resultaten voor het vak wiskunde D. Wel besteden we extra aandacht aan de onderwerpen van het schoolexamen wat een positieve invloed kan hebben op het leerproces van uw kind. De transcripties van de interviews zullen geanonimiseerd worden opgeslagen. Ook eventuele interessante resultaten uit de verslagen zullen anoniem worden verwerkt in het onderzoek. Als u akkoord gaat met het gebruik van het werk van uw kind voor het verder verbeteren van het lesmateriaal, en met de mogelijkheid dat uw kind geïnterviewd wordt, dan hoeft u niets te doen. Mocht u hier wel bezwaren tegen hebben, dan kunt u dat kenbaar maken via een e-mail aan mij (f.vanruiten@reggesteyn.nl), liefst uiterlijk op maandag 29 mei. U kunt uw bezwaren ook kenbaar maken door onderstaand strookje door uw zoon/dochter bij mij te laten inleveren (via de vakdocent), liefst uiterlijk op 29 mei. Uiteraard kan uw zoon/dochter zelf nog op ieder moment beslissen niet aan het onderzoek te willen deelnemen. Ik hoop u hiermee voldoende te hebben geïnformeerd. Voor vragen kunt u contact opnemen via het bovengenoemde e-mailadres.

Met vriendelijke groet,
Floor van Ruiten, stagiair wiskunde

Ik geef **geen** toestemming voor …………………………… uit klas …… op geïnterviewd te worden betreffende zijn/haar ervaringen met de lessenserie van Wiskunde D en/of voor dat zijn/haar verslag gebruikt wordt ten behoeve van het genoemde onderzoek.

Naam: …………………………….........

Handtekening: …………………………….........

Bijlage 6: Feedbackformulier

Voor het verzamelen van de data aan de hand van het expertpanel is een feedbackformulier opgesteld. Deze is te vinden op de volgende bladzijden.

Feedbackformulier lessenserie

Zo meteen ga je kijken naar de lessenserie die ik, Floor van Ruiten, gemaakt heb voor het vak Onderzoek van Onderwijs. De lessenserie bestaat uit 3 lessen en is bedoeld om complexe getallen te introduceren bij de leerlingen aan de hand van het oplossen van derdegraadsvergelijkingen. Momenteel worden complexe getallen vaak geïntroduceerd aan de hand van de verschillende getalsystemen. Daardoor blijven complexe getallen vaak een erg vaag begrip voor leerlingen. Complexe getallen zijn ooit ontstaan omdat ze opdoken bij het oplossen van derdegraadsvergelijkingen. De formule van Cardano, die gemaakt was voor het oplossen van derdegraadsvergelijkingen leidde soms tot complexe oplossingen, terwijl het bekend was dat er in zulke gevallen drie reële oplossingen zouden moeten zijn. Bepaalde ingewikkeld uitziende oplossingen die complexe getallen bevatten kunnen uiteindelijk teruggeschreven worden naar reële getallen. Als leerlingen de oorsprong van complexe getallen kennen, zal het leerlingen duidelijk worden waarom deze getallen van belang zijn voor de wiskunde. Hiervoor zal de formule van Cardano wel relationeel aangeleerd moeten worden, anders zou je als leerling kunnen denken dat de wiskundigen van vroeger dit ook meteen in de formule hadden kunnen implementeren. Deze lessenserie zou via het relationeel aanleren van oplossingsmethoden van derdegraadsvergelijkingen tot een betekenisvolle introductie van complexe getallen moeten leiden. Hiervoor zijn een aantal leerdoelen en ontwerpeisen opgesteld.

Leerdoelen lessenserie

De leerdoelen van de complete lessenserie zijn als volgt:

- Leerlingen kunnen derdegraadsvergelijkingen oplossen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
- Leerlingen kunnen uitleggen waarom ze derdegraadsvergelijkingen op deze manier oplossen.
- Leerlingen kunnen van oplossingen van de formule van Cardano met behulp van complexe getallen reële oplossingen maken.
- Leerlingen kunnen uitleggen waar complexe getallen voor nodig zijn.

Leerdoelen per les

Naast de totale leerdoelen zijn er ook leerdoelen per les opgesteld. De eerste les is bedoeld om de voorkennis van leerlingen van kwadratische vergelijkingen te herhalen en een begin te maken met wat er komt kijken bij derdegraadsvergelijkingen. De bijbehorende leerdoelen zijn:

- Leerlingen kunnen uitleggen waar de abc-formule vandaan komt.
- Leerlingen worden zich bewust welke derdegraadsvergelijkingen ze al kunnen oplossen met de kennis die ze tot dan toe hebben.
- Leerlingen kunnen derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ herschrijven tot de vorm $x^3 + px + q = 0$.
- Leerlingen kunnen met behulp van de factorstelling algebraïsch extra oplossingen van derdegraadsvergelijkingen vinden als ze de eerste met de grafische rekenmachine hebben gevonden.

In de tweede les wordt de formule van Cardano geïntroduceerd. Dit is daarmee een belangrijke les om de eerste twee hoofdleerdoelen van de lessenserie te behalen. De leerdoelen voor deze les zijn:

- Leerlingen kunnen derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ oplossen met behulp van de formule van Cardano.
- Leerlingen kunnen aan de hand van een opgave van ingewikkeld uitziende expressies simpelere gehele getallen maken.

In de laatste les worden de complexe getallen zelf dan ook daadwerkelijk geïntroduceerd. Hiermee worden de laatste hoofdleerdoelen als het goed is ook behaald. Bovendien leren leerlingen zo daadwerkelijk het begin om met complexe getallen te rekenen. De leerdoelen van deze les zijn:

- Leerlingen kunnen complexe getallen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen.
- Leerlingen kunnen van oplossingen van de formule van Cardano met behulp van complexe getallen reële oplossingen maken.
- Leerlingen kunnen uitleggen waar complexe getallen voor nodig zijn

Ontwerpeisen lessenserie

Naast de leerdoelen zijn er ook een aantal ontwerpeisen voor de lessenserie. Deze ontwerpeisen zijn:

- De lessenserie is in 3 lessen van 50 minuten uit te voeren.
- De lessenserie sluit aan op het wiskunde B en D niveau van vwo leerlingen aan het eind van 4 vwo/het begin van 5 vwo.
- De lessenserie is zelfstandig door leerlingen te volgen en vereist minimale inmenging van de docent.
- De lessenserie voldoet aan de leerdoelen zoals hiervoor besproken.

Om deze lessenserie te verbeteren en te zien of deze leerdoelen en ontwerpeisen daadwerkelijk behaald worden zou ik graag willen dat je feedback geeft op deze aspecten. Hiervoor heb ik een paar begeleidende vragen opgesteld. Bekijk het lesmateriaal goed en stel eventuele vragen ter verduidelijking. Vul daarna de antwoorden op de hieronder gestelde vragen in. Alle feedback die gebruikt kan worden om de lessenserie beter te maken is zeer welkom. Alvast bedankt voor je tijd en veel leesplezier!

- In hoeverre voldoet het lesmateriaal aan de gestelde leerdoelen zoals hierboven besproken? Welke onderdelen versterken dit en welke leerdoelen kunnen nog sterker naar voren komen? Heb je suggesties om dit te verbeteren?

- In hoeverre voldoet het lesmateriaal aan de ontwerpeisen zoals hierboven besproken? Welke onderdelen versterken dit en welke ontwerpeisen zullen mogelijk nog niet behaald worden? Heb je suggesties om deze ontwerpeisen wel te behalen?

- Heb je nog algemene feedback om het ontwerp te verbeteren? Welke zaken moeten in ieder geval behouden blijven en waar twijfel je nog over?

Bijlage 7: Interviewleidraad

Voor het verzamelen van de data aan de hand van de semigestructureerde interviews is een interviewleidraad opgesteld. Deze is te vinden op de volgende bladzijden. De opgave zoals de leerlingen die te zien krijgen tijdens het interview is te vinden na de interviewvragen.

Interview leerlingen lessenserie

Het interview wordt afgenomen aan de hand van een aantal vragen. Afhankelijk van de antwoorden kan erop door gevraagd worden door de interviewer ter verduidelijking. Bovendien kunnen vragen ook overgeslagen worden als ze op dat moment al beantwoord zijn. Van tevoren wordt aan de leerling duidelijk gemaakt dat hij/zij/hen zich op elk moment kan terugtrekken uit het onderzoek. Verder wordt er verteld dat het interview alleen bedoeld is om het lesmateriaal te verbeteren. Daarvoor wordt het interview opgenomen en na afloop uitgetypt en anoniem opgeslagen.

De vragen voor het interview zijn:

- Wat vond je van de lessenserie?
- Had je van tevoren verwachtingen over de lessenserie? Zo ja, kwam de lessenserie overeen met die verwachtingen?
- Welke les vond je het leukst en waarom?
- Wat vond je het interessantst om te leren?
- Waren er opdrachten die je te moeilijk vond? Welke opdracht vond je het lastigst?
- Waren er opdrachten die je te makkelijk vond? Welke opdracht vond je overbodig?
- Had je graag meer uitleg van een docent gehad of vind je het zelf/gezamenlijk doorwerken met leerlingen wel prettig?
- Vond je de tijdsplanning van de lessenserie goed? In welke lessen had je tijd over en wanneer had je meer tijd nodig gehad? Waar lag het aan dat je meer tijd nodig had? (Denk aan opgave x was lastig, we waren te veel aan het kletsen, we begonnen te laat met de les.)
- Welke nieuwe dingen uit de lessenserie heb je geleerd, die je zonder de uitleg waarschijnlijk ook nog steeds kan? (Denk aan afleiden abc-formule, vergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ schrijven in de vorm $x^3 + px + q = 0$, de factorstelling, afleiden formule van Cardano, rekenen met complexe getallen, derdegraadsvergelijking van de vorm $x^3 + px + q = 0$ oplossen.)
- Was er nog iets waar je graag meer over had willen leren?
- We gaan nu nog naar 1 nieuwe opgave kijken die overeenkomt met de laatste opgave van de lessenserie. Hierin heb je een derdegraadsvergelijking opgelost waarvoor je de hele lessenserie nodig had. Kun je deze opgave voor me uitwerken:

Opgave

Gegeven is de vergelijking $x^3 - 9x^2 + 12x + 40 = 0$.

a) Schrijf de vergelijking in de vorm $y^3 + py + q = 0$.
b) Vind een reële oplossing van de in a gevonden vergelijking met behulp van de formule van Cardano. Maak hiervoor gebruik van $(1 + 2i)^3$ en $(1 - 2i)^3$.
c) Vind exact alle oplossingen van de vergelijking die je in a hebt gevonden.
d) Vind exact alle oplossingen van de vergelijking $x^3 - 9x^2 + 12x + 40 = 0$.

- Kun je me uitleggen waarom we derdegraadsvergelijkingen zo oplossen?

- Waarvoor denk jij dat we complexe getallen nodig hebben?
- Heb jij verder nog dingen die we mee moeten nemen voor de lessenserie?

De uitwerking van de opgave is als volgt:

a) We gaan substitueren $x = y - \frac{-9}{3} = y + 3$ om van het kwadraat af te komen.
$(y+3)^3 - 9(y+3)^2 + 12(y+3) + 40 = 0$
$y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - 9y^2 - 54y - 81 + 12y + 36 + 40 = 0$
$y^3 - 15y + 22 = 0$

b) $(1+2i)^3 =$
$1 + 6i + 12i^2 + 8i^3 =$
$1 + 6i - 12 - 8i = -11 - 2i$
$(1-2i)^3 =$
$1 - 6i + 12i^2 - 8i^3 =$
$1 - 6i - 12 + 8i = -11 + 2i$
$y = \sqrt[3]{-\frac{22}{2} + \sqrt{\frac{(22)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{22}{2} - \sqrt{\frac{(22)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}}$
$y = \sqrt[3]{-11 + \sqrt{\frac{484}{4} + \frac{-33}{27}}} + \sqrt[3]{-11 - \sqrt{\frac{484}{4} + \frac{-33}{27}}}$
$y = \sqrt[3]{-11 + \sqrt{121 - 125}} + \sqrt[3]{-11 - \sqrt{121 - 125}}$
$y = \sqrt[3]{-11 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-11 - \sqrt{-4}}$
$y = \sqrt[3]{-11 + 2i} + \sqrt[3]{-11 - 2i}$
$y = \sqrt[3]{(1-2i)^3} + \sqrt[3]{(1+2i)^3}$
$y = 1 - 2i + 1 + 2i = 2$

c) Dankzij de factorstelling weten we dat $y^3 - 15y + 22 = (y-2)(y^2 + \ldots)$
Hierdoor krijgen we $y^3 - 15y + 22 = (y-2)(y^2 + 2y - 11)$
De vergelijking leidt tot $(y-2)(y^2 + 2y - 11) = 0$
Dit geeft $y - 2 = 0 \vee y^2 + 2y - 11 = 0$
$y = 2 \vee D = (2)^2 - 4 \cdot -11 = 26$
$y = 2 \vee y = \frac{-2-\sqrt{26}}{2} \vee y = \frac{-2+\sqrt{26}}{2}$
$y = 2 \vee y = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{26} \vee y = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{26}$

d) In a hadden we $x = y + 3$ gekozen als substitutie.
De oplossingen van de vergelijking $x^3 - 9x^2 + 12x + 40 = 0$ zijn dus
$x = 5 \vee x = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{26} \vee x = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{26}$

Opgave

Gegeven is de vergelijking $x^3 - 9x^2 + 12x + 40 = 0$.

a) Schrijf de vergelijking in de vorm $y^3 + py + q = 0$.

b) Vind een reële oplossing van de in a gevonden vergelijking met behulp van de formule van Cardano. Maak hiervoor gebruik van $(1 + 2i)^3$ en $(1 - 2i)^3$.

c) Vind exact alle oplossingen van de vergelijking die je in a hebt gevonden.

d) Vind exact alle oplossingen van de vergelijking $x^3 - 9x^2 + 12x + 40 = 0$.

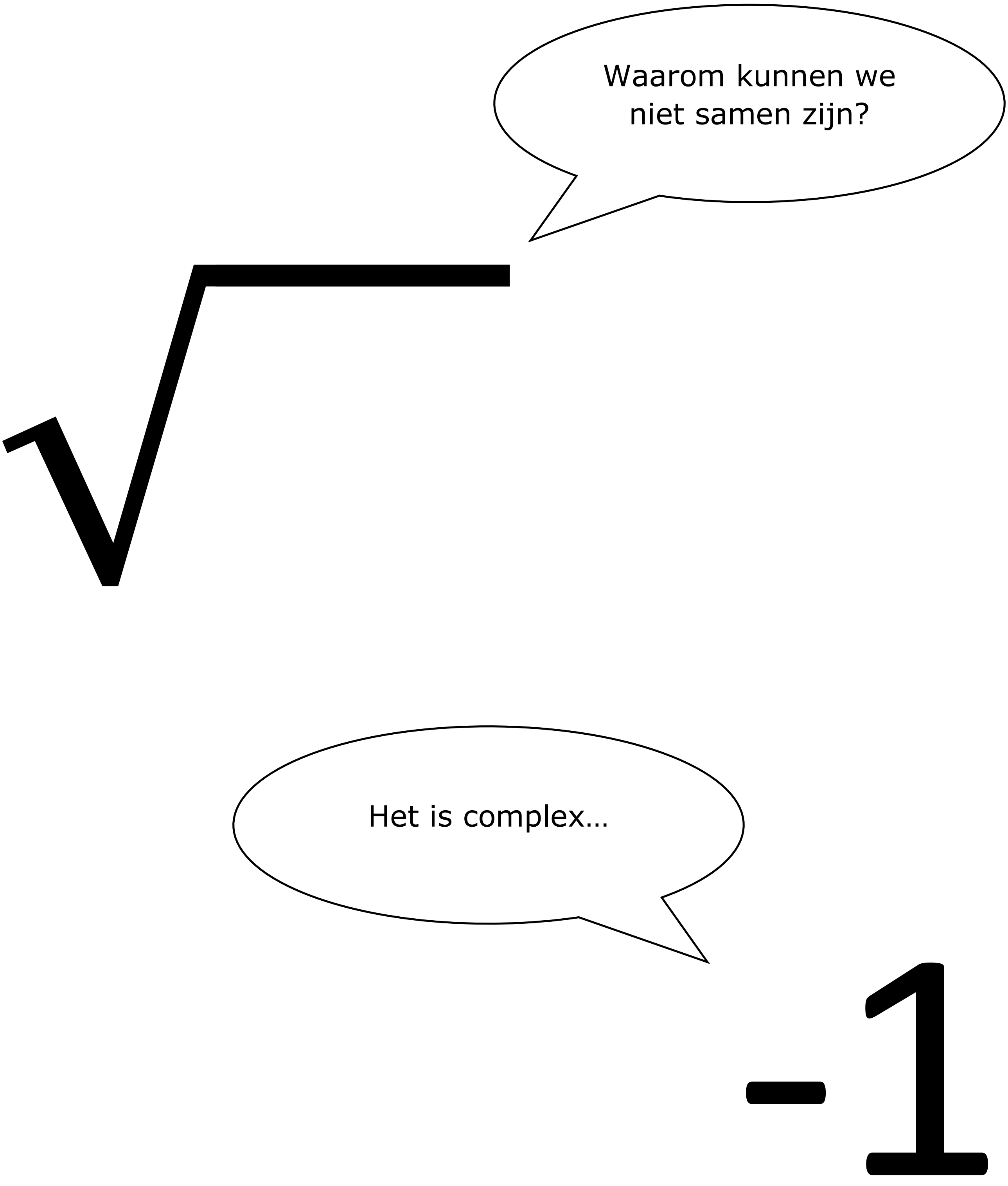
Bijlage 8: Eerste versie lessenserie

De eerste versie van het ontwerp van de lessenserie is te vinden op de volgende bladzijden.

Het oplossen van derdegraadsvergelijkingen

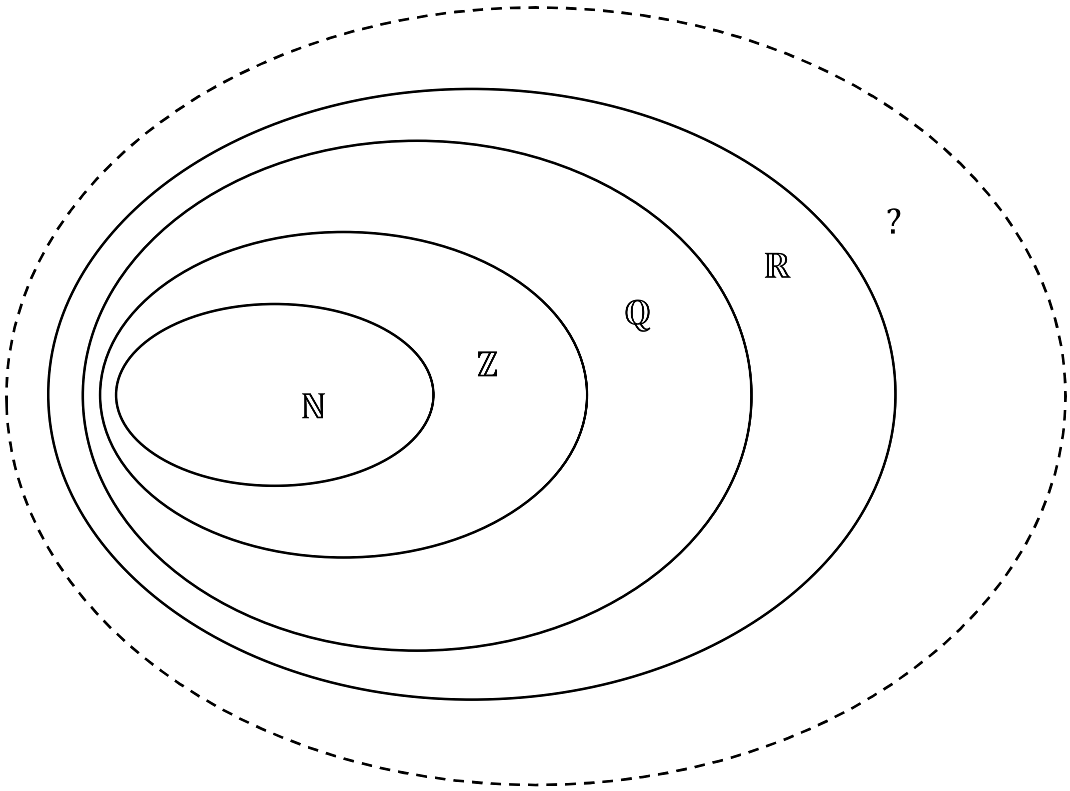
En de introductie van een nieuw getallensysteem

Een lessenserie voor VWO Wiskunde D



Introductie

Tijdens je middelbare schooltijd heb je bij wiskunde al veel verschillende soorten vergelijkingen voorbij zien komen. In de onderbouw ben je begonnen met het oplossen van lineaire vergelijkingen van de vorm $ax + b = 0$ en vervolgens heb je kwadratische vergelijkingen van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ voorbij zien komen. Toch worden er bijna nooit vergelijkingen met hogere machten laten zien. In deze drie lessen ga je kijken hoe je derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kunt oplossen. Je zult zien dat hier wat meer bij komt kijken dan bij kwadratische vergelijkingen. In de laatste les gaan we hiervoor zelfs een nieuw soort getallen introduceren.



Les 1

Laten we niet op de zaken vooruit lopen en beginnen bij wat je al weet. Wanneer je een kwadratische vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ wilt oplossen kan dat op een aantal manieren. In de meest simpele gevallen geldt $b = 0$ of $c = 0$. Bij vergelijkingen van de vorm $ax^2 + bx = 0$ kan de x buiten haakjes gehaald worden en bij vergelijkingen van de vorm $ax^2 + c = 0$ kunnen we deze herleiden tot de vorm $x^2 = -\frac{c}{a}$ om zo de wortel te trekken.

Opgave 1

Wat voor type vergelijking krijg je wanneer $a = 0$?

Opgave 2

Los op.

a) $9x^2 - 5x = 0$
b) $3x^2 - 48 = 0$

Wanneer de $a, b, c \neq 0$ zullen andere oplossingsmethoden gebruikt moeten worden. Als de getallen mooi uitkomen kan de product-som methode gebruikt worden: $ax^2 + bx + c = 0$ leidt dan tot $(dx + e)(fx + g) = 0$. Als dat niet werkt kun je altijd nog kwadraat afsplitsen of de abc-formule gebruiken.

Opgave 3

Los de vergelijking $x^2 - 3x - 10 = 0$ op met behulp van…

a) … de product-som methode.
b) … kwadraat afsplitsen.
c) … de abc-formule.

Veel mensen gebruiken de abc-formule zonder zich af te vragen waarom deze eigenlijk werkt. Toch wordt deze formule rond het jaar 825 al gebruikt in de Arabische wiskunde[1]. De abc-formule is af te leiden aan de hand van het kwadraat afsplitsen.

Tip: Maak het getal voor de x^2 eerst gelijk aan 1.

Opgave 4

a) Laat zien dat de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ te herleiden is tot de vorm $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$.
b) Los de vergelijking verder op.
c) Laat zien dat de oplossingen overeenkomen met de oplossingen die de abc-formule geeft.

Tip: Gebruik dat $\sqrt{\frac{-4ac+\ ^2}{4a^2}} = \frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{\sqrt{4a^2}}$.

Het oplossen van derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ is lastiger dan het oplossen van kwadratische vergelijkingen. Toch ken je al een aantal methodes voor simpelere vergelijkingen. Zelfs sommige hogeregraadsvergelijkingen kun je al oplossen.

---

[1] De formule werd toen wel iets anders opgeschreven omdat de symbolen die wij in de wiskunde gebruiken nog niet allemaal bestonden. Als je meer over deze geschiedenis wilt weten zou je het boek Wortels van de Wiskunde kunnen lezen.

Opgave 5

Los op.

a) $2x^3 + 54 = 0$
b) $18x^3 - 9x^2 = 0$
c) $7x^3 = 0$
d) $x^3 - 6x^2 - 7x = 0$
e) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

Tip: Alle mogelijkheden worden weergegeven in opgave 5.

Opgave 6

a) Welke variabelen uit de algemene vorm van de derdegraadsvergelijking (a, b, c of d) moeten gelijk zijn aan 0 om de vergelijking te kunnen oplossen met de kennis die je al hebt? Er zijn meerder opties mogelijk.
b) Welke variabele kan niet gelijk zijn aan 0?

Voor derdegraadsvergelijkingen is er uiteindelijk een formule gevonden die net zoals de abc-formule een oplossing geeft. In de volgende les zullen we deze formule gaan afleiden. Deze formule geeft altijd maar 1 oplossing van een derdegraadsvergelijking. De andere oplossingen zullen dus op een andere manier gevonden moeten worden.

Tip: De drie vormen met een positief getal voor de x^3 heb je al geplot in a. Wat zou er gebeuren als er een negatief getal voor de x^3 staat?

Opgave 7

a) Plot de grafieken van $f(x) = 3x^3 + 2$, $g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7x - 5$ en $h(x) = x^3 - 2x + 3$ op je grafische rekenmachine.
b) Schets de verschillende vormen van derdegraadsvergelijkingen.
c) Hoeveel oplossingen zou een vergelijking van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kunnen hebben?

Tip: Bekijk hoeveel snijpunten de grafieken uit b kunnen hebben met de x-as als je ze omhoog en omlaag schuift.

De formule om derdegraadsvergelijkingen op te lossen, die bekend staat als de formule van Cardano komt van de methode die Girolamo Cardano (1501-1576) heeft gevonden om één van de oplossingen te krijgen van een vergelijking van de vorm $x^3 + cx + d = 0$. Hierbij zien we dat $a = 1$ en $b = 0$. Cardano had de formule eigenlijk gekregen van een andere wiskundige Niccolò Fontana Tartaglia (1499, 1557) met de belofte om deze geheim te houden. Tartaglia had de oplossingsmethode nog niet gepubliceerd omdat het in die tijd erg gebruikelijk was om wiskundewedstrijden aan te gaan met andere geleerden. Hoe langer je de oplossingsmethoden geheim kon houden, hoe groter de kans dat je deze wedstrijden won. Cardano heeft de oplossingsmethode na lang aandringen gekregen. Vervolgens heeft hij de methode zelf bewezen en uitgebreid naar het oplossen van alle derdegraadsvergelijkingen. Dit wilde hij graag publiceren om op die manier beroemd te worden.

Cardano *Tartaglia*

Aangezien hij erachter kwam dat niet alleen Tartaglia, maar ook een andere wiskundige, Scipione del Ferro (1465-1526) de derdegraadsvergelijkingen heeft leren oplossen, vond Cardano dat hij uiteindelijk de volledige oplossingsmethode wel kon publiceren. Deze was gelijk aan die van Tartaglia, maar Tartaglia kon hier niets tegen doen. Tartaglia was terecht boos, want de formule staat nu nog steeds bekend als de formule van Cardano. De aanvulling van Cardano's onderzoek is dat hij er zelf achter kwam dat alle vergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ omgeschreven kunnen worden in de vorm $x^3 + px + q = 0$. Hierdoor konden alle derdegraadsvergelijkingen opgelost worden. Dit herschrijven van de vergelijking deed hij door de x te vervangen en op te lossen voor een andere variabele. Op dezelfde manier heb jij eerder voor vergelijkingen van de vorm $ax^4 + bx^2 + c = 0$ de variabele $u = x^2$ gesubstitueerd.
Dit had je bijvoorbeeld nodig in opgave 5e.

Tip: Vul $x = y + s$ in in de vergelijking en maak gebruik van het feit dat $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Opgave 8

We gaan de x in $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ vervangen door $x = y + s$.

a) Voor welke waarde van s leidt dit tot de vergelijking van de vorm $ay^3 + my + n = 0$, waarbij de y^2 verdwenen is?

b) Hoe komen we van $ay^3 + my + n = 0$ tot de vorm $y^3 + py + q = 0$?

Wanneer we met de formule van Cardano eenmaal een oplossing gevonden hebben, willen we ook de eventuele overige 2 oplossingen van de derdegraadsvergelijking kunnen vinden. Hiervoor gebruiken we de zogenoemde factorstelling. De factorstelling zegt:

"Als $x = k$ een oplossing is van de vergelijking $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ dan is $x^3 + ax^2 + bx + c = (x - k)(x^2 + \ldots)$." Voor kwadratische vergelijkingen gebruiken we dit eigenlijk ook al voor de product-som methode.

Opgave 9

a) Zoek met behulp van de grafische rekenmachine de gehele oplossing van de vergelijking $x^3 - 15x - 4 = 0$ (dus geen kommagetal).

b) Gebruik nu de factorstelling om algebraïsch de overige twee oplossingen van de vergelijking $x^3 - 15x - 4 = 0$ te vinden.

c) Komen de gevonden oplossingen overeen met de oplossingen uit de grafische rekenmachine?

d) Vind op dezelfde manier de exacte oplossingen van $x^3 - 21x - 20 = 0$.

Tip: Weet je niet hoe je moet beginnen? Stel $(x^3 - 15x - 4) = (x - 4)(x^2 + ax + b)$ en maak een stelsel om a en b uit te rekenen.

Les 2

In de vorige les hebben we al gezien dat alle vergelijkingen om te schrijven zijn tot de vorm $y^3 + py + q = 0$. We gaan er in deze les vanuit dat $p, q \neq 0$, anders kun je de vergelijking al oplossen met de kennis die je al had. Verder weten we hoe we eventuele overige oplossingen kunnen vinden wanneer we een eerste oplossing hebben. In deze les gaan we kijken hoe we deze eerste oplossing kunnen vinden. Hiervoor gaan we de formule van Cardano afleiden. Een aantal stappen die hierin gebeuren lijken in het eerste opzicht misschien niet logisch, maar bedenk dat de abc-formule eerst ook als magie leek. We introduceren nu eerst een extra variabele.

Tip: Maak opnieuw gebruik van het feit dat $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Opgave 10

Substitueer $y = u + v$ in de vergelijking $y^3 + py + q = 0$.
Laat zien dat dit gelijk is aan $u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0$.

De formule die we nu gevonden hebben kunnen we versimpelen door $(u+v)(3uv+p)$ gelijk te stellen aan 0.

Tip: Wat gebeurt er in $y^3 + py + q = 0$ *wanneer* $u + v = 0$*?*

Opgave 11

a) Leg uit waarom $(u+v)(3uv+p) = 0$ niet kan leiden tot $u + v = 0$.
b) Welke vergelijking krijgen we uit opgave 10 wanneer we $3uv + p$ gelijk stellen aan 0?

We willen nu graag weer van een van de extra variabelen afkomen. Hiervoor gebruiken we dat we voor het versimpelen hebben gekozen dat $3uv + p = 0$. We willen eerst van de variabele v afkomen.

Tip: Kijk terug naar hoe we deze variabelen introduceerden in opgave 10.

Opgave 12

a) Waarom maakt het niet uit welke variabele (u of v) je vrijmaakt in de vergelijking $3uv + p = 0$?
b) Maak v vrij.
c) Substitueer v terug in de vergelijking zoals gevonden in opgave 11b.
d) Vermenigvuldig de vergelijking met u^3. Wat valt je op?
e) Los de vergelijking verder op en laat zien dat
$u^3 = \frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2} \vee u^3 = \frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$.
f) Laat zien dat de waarden van u^3 overeenkomen met
$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \vee -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$.
g) Gebruik nu $u^3 + v^3 + q = 0$ om v^3 te berekenen bij beide oplossingen.
h) Bepaal u en v en bereken y. Hoeveel mogelijke oplossingen voor y heb je nu gevonden?

Tip: Gebruik de substitutie $t = u^3$.

We hebben nu de formule van Cardano gevonden. Voor vergelijkingen van de vorm $y^3 + py + q = 0$ geeft de formule van Cardano een oplossing door:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Opgave 13

We gaan nu de vergelijking $x^3 + 6x - 20 = 0$ oplossen. Hiervoor gebruiken we opnieuw de hele procedure.

a) Substitueer $x = u + v$ in de vergelijking.
b) Maak v vrij in de vergelijking $3uv + p = 0$ en substitueer dit opnieuw in de gevonden vergelijking.
c) Vermenigvuldig de vergelijking met u^3 en bepaal u^3.
d) Bepaal u en v bereken hiermee x.
e) Vul de gevonden oplossing in op je grafische rekenmachine. Waar zou deze oplossing aan gelijk moeten zijn?

Blijkbaar komen sommige ingewikkeld uitziende oplossingen dus eigenlijk overeen met een stuk simpeler uitziende getallen. Dit willen we ook algebraïsch kunnen laten zien. Hiervoor willen we de derdemachtswortel van $10 + \sqrt{108}$ en $10 - \sqrt{108}$ te berekenen.

Tip: Maak opnieuw gebruik van het feit dat $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Opgave 14

a) Bereken $\left(1 + \sqrt{3}\right)^3$.
b) Laat zien dat de oplossing die je gevonden hebt in opgave 14a gelijk moet zijn aan $10 + \sqrt{108}$. Bereken hiermee $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}$.
c) Gebruik nu $\left(1 - \sqrt{3}\right)^3$ om $\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$ te berekenen.
d) Bereken met b en c algebraïsch $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$.

Op deze manier kunnen we dus alsnog algebraïsch laten zien dat sommige ingewikkeld uitziende oplossingen gelijk zijn aan een stuk simpeler uitziende getallen[2]. Voor het laatste voorbeeld dat je in opgave 9 heb je gebruikt zul je de volgende les namelijk zien dat dit tot problemen zal leiden. Dan zullen we ook de nieuwe getallensoort introduceren zoals we in de inleiding al beloofd hadden.

[2] Het vinden van de getallen als $1 + \sqrt{3}$ om de derdemachtswortel te nemen hoef je niet zelf te kunnen. Als je hier meer over wilt weten kun je bij de docent terecht. Hiervoor gebruiken we wel de simpeler uitziende oplossing al.

Les 3

Zoals we in de vorige les al aangekondigd hadden gaan we nu naar het voorbeeld kijken van opgave 9.

Opgave 15

a) Welke oplossingen van de vergelijking $x^3 - 15x - 4 = 0$ heb je gevonden in opgave 9?

b) Bereken met de formule van Cardano de oplossingen van $x^3 - 15x - 4 = 0$. Wat valt je op?

De formule van Cardano leidt nu duidelijk tot geen oplossingen, want we hebben met de wortel van een negatief getal te maken. In opgave 9 hebben we echter gezien dat er drie mogelijke oplossingen zijn voor deze vergelijking. Daardoor moet de formule van Cardano wel een oplossing geven. We gaan daarom proberen op dezelfde manier als aan het eind van de vorige les via $a + \sqrt{-b}$ op een oplossing te komen. Hiervoor zullen we dus met negatieve wortels moeten gaan werken. Bombelli deed dit voor het eerst. Hij gebruikte net zoals dat $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ ook moest gelden $\left(\sqrt{-3}\right)^2 = -3$.

Opgave 16

Ga er voor nu even vanuit dat je wel met negatieve wortels kunt werken en bereken $\left(\sqrt{-b}\right)^2$.

Het rekenen met negatieve wortels is mogelijk en in sommige gevallen zelfs noodzakelijk. Dit klinkt misschien een beetje gek, maar aan het begin van de middelbare school had je waarschijnlijk ook niet bedacht dat je met negatieve getallen kon werken. De getallensystemen zijn door de jaren heen steeds iets verder uitgebreid en negatieve wortels zijn hierin de volgende stap. Deze getallen zijn ontstaan om derdegraadsvergelijkingen te kunnen oplossen. We noemen deze negatieve wortels onderdeel van de complexe getallen.

Opgave 17

Bereken de volgende getallen en herleid zo ver mogelijk.

a) $\sqrt{3} + \sqrt{3}$

b) $\sqrt{-5} + \sqrt{-5}$

c) $\sqrt{9}$

d) $\sqrt{-16}$

e) $\sqrt{1} \cdot \sqrt{3}$

f) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{-7}$

g) $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}$

Deze laatste opgave leidt nu tot een probleem. Als we de rekenregels die we voor wortels kennen volgen leidt g tot $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{-2 \cdot -2} = \sqrt{4} = 2$. We hebben hiervoor echter al gezien dat $\left(\sqrt{-b}\right)^2 = -b$ en $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \left(\sqrt{-2}\right)^2 = -2$. Blijkbaar gaat er dus iets mis met onze rekenregels n we met deze negatieve wortels gaan

rekenen. Aangezien we $\sqrt{-1}$ tot nu toe nog niet kenden, gaan we hier niet zomaar mee rekenen, maar introduceren we hier een nieuw symbool voor: $\sqrt{-1} = i$. Hierbij spreken we af dat $i^2 = -1$. We kunnen andere negatieve wortels nu ook schrijven met behulp van i. Zo krijgen we $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$. Hierdoor kunnen we $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}$ berekenen als $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{2}i \cdot \sqrt{2}i = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot i^2 = 2 \cdot -1 = -2$. We gaan van nu af aan negatieve wortels altijd terugschrijven naar een vorm met i. Hiervoor hebben we ook getallen als $2i$ en $3 + i$ nodig. Daardoor kunnen we alle complexe getallen schrijven in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$. Alle getallen die we al kenden vallen hier dus ook onder, want we kunnen een complex getal zo kiezen dat $b = 0$. De getallenverzameling van de complexe getallen schrijven we ook wel op met het symbool $\mathbb{C}$.

Opgave 18

Bereken de getallen en herleid zo ver mogelijk. Schrijf ze in de vorm $a + bi$.

a) $\sqrt{-5} + \sqrt{-5}$
b) $\sqrt{-16}$
c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{-7}$
d) $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$
e) $3 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{-20}$
f) $(2 + \sqrt{-3})(5 - \sqrt{-12})$
g) $(c + di)^2$

Nu we een beetje weten hoe we met complexe getallen kunnen rekenen gaan we terug naar de derdegraadsvergelijking waar we mee bezig waren. We willen laten zien dat $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ gelijk is aan een reëel getal. We kunnen dit niet op de rekenmachine uitproberen, aangezien de negatieve wortels een error zullen geven, maar we kunnen de grafiek wel plotten en op die manier de nulpunten vinden. Vervolgens kunnen we dit algebraïsch proberen te laten zien door $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ en $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ te berekenen.

Tip: Maak opnieuw gebruik van het feit dat $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Opgave 19

a) Laat zien dat $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ geschreven kan worden als $\sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$.
b) Gebruik $(2 + i)^3$ om $\sqrt[3]{2 + 11i}$ te berekenen.
c) Gebruik nu $(2 - i)^3$ om $\sqrt[3]{2 - 11i}$ te berekenen.
d) Bereken met b en c algebraïsch $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.
e) Controleer je oplossing met behulp van de grafiek op je grafische rekenmachine. Hoe zou je de overige oplossingen exact kunnen berekenen?

Tip: Je hebt dit al gedaan in opgave 9.

Het is nu duidelijk waar complexe getallen handig voor zijn.
Dankzij het rekenen met complexe getallen kunnen we in specifieke gevallen reële oplossingen vinden. Na het ontstaan van de complexe getallen is er veel onderzoek gedaan naar de complexe getallen zelf. Hier zul je in je eigen lesmethode later nog uitgebreid op in gaan. Wanneer we complexe getallen

toestaan kunnen we van alle vergelijkingen namelijk minstens 1 oplossing vinden.

Opgave 20

Bereken de complexe oplossingen van $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Andere hogeregraadsvergelijkingen die in de eerste oogopslag nergens toe lijken te leiden, omdat de grafiek bijvoorbeeld niet door de x-as gaat, zullen dus ook altijd complexe oplossingen hebben. Hoewel we van een aantal vergelijkingen de reële oplossing al kennen, vinden we binnen de complexe getallen nog veel meer mogelijkheden. Zo weten we al dat een derdegraadsvergelijking 1, 2 of 3 oplossingen kan hebben. Binnen de complexe getallen heeft een vergelijking van de vorm $x^3 = a$ (bijna altijd) 3 oplossingen. Als we de oplossingen voor $x^3 = 1$ hebben gevonden, hoeven we deze alleen maar te vermenigvuldigen met $\sqrt[3]{a}$ om de oplossingen van $x^3 = a$ te krijgen.

Opgave 21

Tip: Wanneer heeft $x^2 = a$ maar één oplossing?

a) Bereken $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^3$ en $\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^3$.
b) Welke drie oplossingen heeft de vergelijking $x^3 = 1$?
c) Welke drie oplossingen heeft de vergelijking $x^3 = a$?
d) Voor welke a heeft de vergelijking $x^3 = a$ geen drie oplossingen?

De andere hogeregraadsvergelijkingen gaan we voor nu verder niet op in. Je weet nu een beetje hoe je met complexe getallen kunt werken. Wanneer je terug gaat naar de wiskunde B lessen, zul je echter altijd binnen de reële getallen werken en zijn negatieve wortels dus niet toegestaan. Om het af te leren hebben we nog één mooie derdegraadsvergelijking waarin je de complexe getallen heel goed kunt gebruiken.

Opgave 22

Tip: Kijk hiervoor terug naar opgave 8.

Gegeven is de vergelijking $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$.

a) Schrijf de vergelijking in de vorm $y^3 + py + q = 0$.
b) Vind een reële oplossing van de in a gevonden vergelijking met behulp van de formule van Cardano. Maak hiervoor gebruik van $(1+i)^3$ en $(1-i)^3$.
c) Vind exact alle oplossingen van de vergelijking die je in a hebt gevonden.
d) Vind exact alle oplossingen van de vergelijking $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$. Controleer de gevonden oplossingen met behulp van de grafische rekenmachine.

Tip: Gebruik hiervoor de factorstelling uit les 1 (bij opgave 9).

Bijlage 9: Ingevulde feedbackformulieren

De feedbackformulieren zoals ingevuld door de experts zijn te vinden volgende bladzijden. Voor de duidelijkheid van de verwijzingen zijn na het invullen de koppen aangepast naar "feedbackformulier lessenserie expert 1," "… expert 2" etc.

Feedbackformulier lessenserie expert 1

Zo meteen ga je kijken naar de lessenserie die ik, Floor van Ruiten, gemaakt heb voor het vak Onderzoek van Onderwijs. De lessenserie bestaat uit 3 lessen en is bedoeld om complexe getallen te introduceren bij de leerlingen aan de hand van het oplossen van derdegraadsvergelijkingen. Momenteel worden complexe getallen vaak geïntroduceerd aan de hand van de verschillende getalsystemen. Daardoor blijven complexe getallen vaak een erg vaag begrip voor leerlingen. Complexe getallen zijn ooit ontstaan omdat ze opdoken bij het oplossen van derdegraadsvergelijkingen. De formule van Cardano, die gemaakt was voor het oplossen van derdegraadsvergelijkingen leidde soms tot complexe oplossingen, terwijl het bekend was dat er in zulke gevallen drie reële oplossingen zouden moeten zijn. Bepaalde ingewikkeld uitziende oplossingen die complexe getallen bevatten kunnen uiteindelijk teruggeschreven worden naar reële getallen. Als leerlingen de oorsprong van complexe getallen kennen, zal het leerlingen duidelijk worden waarom deze getallen van belang zijn voor de wiskunde. Hiervoor zal de formule van Cardano wel relationeel aangeleerd moeten worden, anders zou je als leerling kunnen denken dat de wiskundigen van vroeger dit ook meteen in de formule hadden kunnen implementeren. Deze lessenserie zou via het relationeel aanleren van oplossingsmethoden van derdegraadsvergelijkingen tot een betekenisvolle introductie van complexe getallen moeten leiden. Hiervoor zijn een aantal leerdoelen en ontwerpeisen opgesteld.

Leerdoelen lessenserie

De leerdoelen van de complete lessenserie zijn als volgt:

- Leerlingen kunnen derdegraadsvergelijkingen oplossen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
- Leerlingen kunnen uitleggen waarom ze derdegraadsvergelijkingen op deze manier oplossen.
- Leerlingen kunnen van oplossingen van de formule van Cardano met behulp van complexe getallen reële oplossingen maken.
- Leerlingen kunnen uitleggen waar complexe getallen voor nodig zijn.

Leerdoelen per les

Naast de totale leerdoelen zijn er ook leerdoelen per les opgesteld. De eerste les is bedoeld om de voorkennis van leerlingen van kwadratische vergelijkingen te herhalen en een begin te maken met wat er komt kijken bij derdegraadsvergelijkingen. De bijbehorende leerdoelen zijn:

- Leerlingen kunnen uitleggen waar de abc-formule vandaan komt.
- Leerlingen worden zich bewust welke derdegraadsvergelijkingen ze al kunnen oplossen met de kennis die ze tot dan toe hebben.
- Leerlingen kunnen derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ herschrijven tot de vorm $x^3 + px + q = 0$.
- Leerlingen kunnen met behulp van de factorstelling algebraïsch extra oplossingen van derdegraadsvergelijkingen vinden als ze de eerste met de grafische rekenmachine hebben gevonden.

In de tweede les wordt de formule van Cardano geïntroduceerd. Dit is daarmee een belangrijke les om de eerste twee hoofdleerdoelen van de lessenserie te behalen. De leerdoelen voor deze les zijn:

- Leerlingen kunnen derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ oplossen met behulp van de formule van Cardano.
- Leerlingen kunnen aan de hand van een opgave van ingewikkeld uitziende expressies simpelere gehele getallen maken.

In de laatste les worden de complexe getallen zelf dan ook daadwerkelijk geïntroduceerd. Hiermee worden de laatste hoofdleerdoelen als het goed is ook behaald. Bovendien leren leerlingen zo daadwerkelijk het begin om met complexe getallen te rekenen. De leerdoelen van deze les zijn:

- Leerlingen kunnen complexe getallen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen.
- Leerlingen kunnen van oplossingen van de formule van Cardano met behulp van complexe getallen reële oplossingen maken.
- Leerlingen kunnen uitleggen waar complexe getallen voor nodig zijn

Ontwerpeisen lessenserie

Naast de leerdoelen zijn er ook een aantal ontwerpeisen voor de lessenserie. Deze ontwerpeisen zijn:

- De lessenserie is in 3 lessen van 50 minuten uit te voeren.
- De lessenserie sluit aan op het wiskunde B en D niveau van vwo leerlingen aan het eind van 4 vwo/het begin van 5 vwo.
- De lessenserie is zelfstandig door leerlingen te volgen en vereist minimale inmenging van de docent.
- De lessenserie voldoet aan de leerdoelen zoals hiervoor besproken.

Om deze lessenserie te verbeteren en te zien of deze leerdoelen en ontwerpeisen daadwerkelijk behaald worden zou ik graag willen dat je feedback geeft op deze aspecten. Hiervoor heb ik een paar begeleidende vragen opgesteld. Bekijk het lesmateriaal goed en stel eventuele vragen ter verduidelijking. Vul daarna de antwoorden op de hieronder gestelde vragen in. Alle feedback die gebruikt kan worden om de lessenserie beter te maken is zeer welkom. Alvast bedankt voor je tijd en veel leesplezier!

- In hoeverre voldoet het lesmateriaal aan de gestelde leerdoelen zoals hierboven besproken? Welke onderdelen versterken dit en welke leerdoelen kunnen nog sterker naar voren komen? Heb je suggesties om dit te verbeteren?

Mooie en grotendeels denk ik haalbare leerdoelen opgesteld voor de gehele lessenserie in het algemeen. Leerdoel 1 en 4 komen wat mij betreft duidelijk terug in je lessenserie en deze moeten leerlingen ook zeker kunnen halen wanneer ze de lessenserie serieus hebben gemaakt. Vooral het eerste leerdoel zou je als docent nog mooi kunnen checken in de laatste opgave. Ook mooie opbouw naar het nut van de complexe getallen, dat wordt met deze lessenserie erg duidelijk. Leerdoel 2 vind ik persoonlijk wat lastiger. In hoeverre wil je dat leerlingen kunnen uitleggen wat ze aan het doen zijn? Moeten ze bijv. ook kunnen uitleggen hoe Cardano aan zijn formule is gekomen? Wat moeten ze precies kunnen onderbouwen? In de lessenserie probeer je relationeel begrip te kweken bij leerlingen, en ik denk dat dat zeker deels lukt, maar deels, vanwege de complexiteit (😝) van de stof ook niet. Het is

hier en daar best wel opgelegd in wat leerlingen moeten doen (bijv. ‘we willen nu dit …’ of ‘we gaan nu …’. Daarom denk ik dat dit tweede leerdoel best lastig is om te halen voor leerlingen. Misschien helpt het om iets meer te reflecteren hier en daar in de opgaven op de stappen die zijn gezet en waarom die zijn gezet. Derde leerdoel moeten leerlingen denk ik zeker deels kunnen halen en komt terug in les 3 opdracht 19. Hier leg je leerlingen wel op om bijv. (2+i) tot de macht 3 te gebruiken. Moeten ze dit ook zelf kunnen bedenken en hoe doe je dit dan? Dat zou wel een voorwaarde zijn om leerdoel 3 volledig, zoals die nu geschreven is, te behalen.

- In hoeverre voldoet het lesmateriaal aan de ontwerpeisen zoals hierboven besproken? Welke onderdelen versterken dit en welke ontwerpeisen zullen mogelijk nog niet behaald worden? Heb je suggesties om deze ontwerpeisen wel te behalen?

De gehele lessenserie in 3 lessen van 50 minuten doen gaat denk ik een uitdaging worden. Ik zou zelf meer aan 4 lessen denken, om ook regelmatig te reflecteren op wat er allemaal is gebeurd en wat we hebben gezien. Ontwerpeis 2 en 3 zijn wat mij betreft helemaal gelukt. Qua niveau vind ik dat je de best ingewikkelde leerstof voor vierdejaars mooi toegankelijk hebt gemaakt door goed op voorkennis aan te sluiten, deze regelmatig te herhalen en tips bij de vragen te zetten. Ontwerpeis 4 vind ik voor een groot deel gelukt, zie ook de feedback die gaat over leerdoelen.

- Heb je nog algemene feedback om het ontwerp te verbeteren? Welke zaken moeten in ieder geval behouden blijven en waar twijfel je nog over?

Iets meer reflecteren op welke stappen gezet zijn en waarom die stappen werken. Dit zou natuurlijk ook in opdracht-vorm kunnen waarbij leerlingen dit zelf moeten doen. Hier en daar de bedoeling van vragen iets scherper formuleren (bijv. bereken of herleid, met rekenmachine of algebraïsch, zie ook opmerkingen op de uitgeprinte lessenserie). Meer gedetailleerde opmerkingen bespreken we nog even. Verder een heel mooi, leerzaam en uitgebalanceerde lessenserie!

Feedbackformulier lessenserie expert 2

Zo meteen ga je kijken naar de lessenserie die ik, Floor van Ruiten, gemaakt heb voor het vak Onderzoek van Onderwijs. De lessenserie bestaat uit 3 lessen en is bedoeld om complexe getallen te introduceren bij de leerlingen aan de hand van het oplossen van derdegraadsvergelijkingen. Momenteel worden complexe getallen vaak geïntroduceerd aan de hand van de verschillende getalsystemen. Daardoor blijven complexe getallen vaak een erg vaag begrip voor leerlingen. Complexe getallen zijn ooit ontstaan omdat ze opdoken bij het oplossen van derdegraadsvergelijkingen. De formule van Cardano, die gemaakt was voor het oplossen van derdegraadsvergelijkingen leidde soms tot complexe oplossingen, terwijl het bekend was dat er in zulke gevallen drie reële oplossingen zouden moeten zijn. Bepaalde ingewikkeld uitziende oplossingen die complexe getallen bevatten kunnen uiteindelijk teruggeschreven worden naar reële getallen. Als leerlingen de oorsprong van complexe getallen kennen, zal het leerlingen duidelijk worden waarom deze getallen van belang zijn voor de wiskunde. Hiervoor zal de formule van Cardano wel relationeel aangeleerd moeten worden, anders zou je als leerling kunnen denken dat de wiskundigen van vroeger dit ook meteen in de formule hadden kunnen implementeren. Deze lessenserie zou via het relationeel aanleren van oplossingsmethoden van derdegraadsvergelijkingen tot een betekenisvolle introductie van complexe getallen moeten leiden. Hiervoor zijn een aantal leerdoelen en ontwerpeisen opgesteld.

Leerdoelen lessenserie

De leerdoelen van de complete lessenserie zijn als volgt:

- Leerlingen kunnen derdegraadsvergelijkingen oplossen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
- Leerlingen kunnen uitleggen waarom ze derdegraadsvergelijkingen op deze manier oplossen.
- Leerlingen kunnen van oplossingen van de formule van Cardano met behulp van complexe getallen reële oplossingen maken.
- Leerlingen kunnen uitleggen waar complexe getallen voor nodig zijn.

Leerdoelen per les

Naast de totale leerdoelen zijn er ook leerdoelen per les opgesteld. De eerste les is bedoeld om de voorkennis van leerlingen van kwadratische vergelijkingen te herhalen en een begin te maken met wat er komt kijken bij derdegraadsvergelijkingen. De bijbehorende leerdoelen zijn:

- Leerlingen kunnen uitleggen waar de abc-formule vandaan komt.
- Leerlingen worden zich bewust welke derdegraadsvergelijkingen ze al kunnen oplossen met de kennis die ze tot dan toe hebben.
- Leerlingen kunnen derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ herschrijven tot de vorm $x^3 + px + q = 0$.
- Leerlingen kunnen met behulp van de factorstelling algebraïsch extra oplossingen van derdegraadsvergelijkingen vinden als ze de eerste met de grafische rekenmachine hebben gevonden.

In de tweede les wordt de formule van Cardano geïntroduceerd. Dit is daarmee een belangrijke les om de eerste twee hoofdleerdoelen van de lessenserie te behalen. De leerdoelen voor deze les zijn:

- Leerlingen kunnen derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ oplossen met behulp van de formule van Cardano.
- Leerlingen kunnen aan de hand van een opgave van ingewikkeld uitziende expressies simpelere gehele getallen maken.

In de laatste les worden de complexe getallen zelf dan ook daadwerkelijk geïntroduceerd. Hiermee worden de laatste hoofdleerdoelen als het goed is ook behaald. Bovendien leren leerlingen zo daadwerkelijk het begin om met complexe getallen te rekenen. De leerdoelen van deze les zijn:
- Leerlingen kunnen complexe getallen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen.
- Leerlingen kunnen van oplossingen van de formule van Cardano met behulp van complexe getallen reële oplossingen maken.
- Leerlingen kunnen uitleggen waar complexe getallen voor nodig zijn

Ontwerpeisen lessenserie

Naast de leerdoelen zijn er ook een aantal ontwerpeisen voor de lessenserie. Deze ontwerpeisen zijn:
- De lessenserie is in 3 lessen van 50 minuten uit te voeren.
- De lessenserie sluit aan op het wiskunde B en D niveau van vwo leerlingen aan het eind van 4 vwo/het begin van 5 vwo.
- De lessenserie is zelfstandig door leerlingen te volgen en vereist minimale inmenging van de docent.
- De lessenserie voldoet aan de leerdoelen zoals hiervoor besproken.

Om deze lessenserie te verbeteren en te zien of deze leerdoelen en ontwerpeisen daadwerkelijk behaald worden zou ik graag willen dat je feedback geeft op deze aspecten. Hiervoor heb ik een paar begeleidende vragen opgesteld. Bekijk het lesmateriaal goed en stel eventuele vragen ter verduidelijking. Vul daarna de antwoorden op de hieronder gestelde vragen in. Alle feedback die gebruikt kan worden om de lessenserie beter te maken is zeer welkom. Alvast bedankt voor je tijd en veel leesplezier!

- In hoeverre voldoet het lesmateriaal aan de gestelde leerdoelen zoals hierboven besproken? Welke onderdelen versterken dit en welke leerdoelen kunnen nog sterker naar voren komen? Heb je suggesties om dit te verbeteren?

- Ik twijfel of leerlingen daadwerkelijk kunnen uitleggen waarom ze derdegraadsvergelijkingen op die manier kunnen oplossen. Hetzelfde geldt voor het uitleggen waar de abc-formule vandaan komt. Wellicht kun je die leerdoelen anders formuleren. Bijvoorbeeld: “Leerlingen weten waar de abc-formule vandaan komt”. - Zou het een mooie toevoeging zijn om de algemene rekenregels voor complexe getallen wat explicieter te verwerken in les 3? Hier kan je dan natuurlijk ook een leerdoel aan koppelen.

- In hoeverre voldoet het lesmateriaal aan de ontwerpeisen zoals hierboven besproken? Welke onderdelen versterken dit en welke ontwerpeisen zullen mogelijk nog niet behaald worden? Heb je suggesties om deze ontwerpeisen wel te behalen?

    - Ik twijfel aan de beoogde tijdsplanning, 3x50 minuten lijkt me vrij kort. Een opgave zoals opgave 12 kost veel tijd. Verwacht je dat leerlingen buiten de les nog met de opgaven bezig gaan?
    - Moeilijkheidsgraad sluit goed aan op de beoogde doelgroep.
    - Ik verwacht dat de meeste leerlingen de lessenserie zelfstandig kunnen doorwerken, het zou dus minimale inmenging van de docent vereisen.

- Heb je nog algemene feedback om het ontwerp te verbeteren? Welke zaken moeten in ieder geval behouden blijven en waar twijfel je nog over?

    - Ziet er goed uit!
    - Wellicht kan je bij de introductie al iets meer informatie geven over complexe getallen (bijvoorbeeld de positie van complexe getallen ten opzichte van de reële getallen), hier kan je dan later nog eens naar terugverwijzen.
    - Het lijkt me mooi om aan het einde een terugblik/conclusie op hetgene dat in de lessenserie is behandeld te schrijven. Hierbij kan je dan mooi terugblikken op de leerdoelen.

Feedbackformulier lessenserie expert 3

Zo meteen ga je kijken naar de lessenserie die ik, Floor van Ruiten, gemaakt heb voor het vak Onderzoek van Onderwijs. De lessenserie bestaat uit 3 lessen en is bedoeld om complexe getallen te introduceren bij de leerlingen aan de hand van het oplossen van derdegraadsvergelijkingen. Momenteel worden complexe getallen vaak geïntroduceerd aan de hand van de verschillende getalsystemen. Daardoor blijven complexe getallen vaak een erg vaag begrip voor leerlingen. Complexe getallen zijn ooit ontstaan omdat ze opdoken bij het oplossen van derdegraadsvergelijkingen. De formule van Cardano, die gemaakt was voor het oplossen van derdegraadsvergelijkingen leidde soms tot complexe oplossingen, terwijl het bekend was dat er in zulke gevallen drie reële oplossingen zouden moeten zijn. Bepaalde ingewikkeld uitziende oplossingen die complexe getallen bevatten kunnen uiteindelijk teruggeschreven worden naar reële getallen. Als leerlingen de oorsprong van complexe getallen kennen, zal het leerlingen duidelijk worden waarom deze getallen van belang zijn voor de wiskunde. Hiervoor zal de formule van Cardano wel relationeel aangeleerd moeten worden, anders zou je als leerling kunnen denken dat de wiskundigen van vroeger dit ook meteen in de formule hadden kunnen implementeren. Deze lessenserie zou via het relationeel aanleren van oplossingsmethoden van derdegraadsvergelijkingen tot een betekenisvolle introductie van complexe getallen moeten leiden. Hiervoor zijn een aantal leerdoelen en ontwerpeisen opgesteld.

Leerdoelen lessenserie

De leerdoelen van de complete lessenserie zijn als volgt:

- Leerlingen kunnen derdegraadsvergelijkingen oplossen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
- Leerlingen kunnen uitleggen waarom ze derdegraadsvergelijkingen op deze manier oplossen.
- Leerlingen kunnen van oplossingen van de formule van Cardano met behulp van complexe getallen reële oplossingen maken.
- Leerlingen kunnen uitleggen waar complexe getallen voor nodig zijn.

Leerdoelen per les

Naast de totale leerdoelen zijn er ook leerdoelen per les opgesteld. De eerste les is bedoeld om de voorkennis van leerlingen van kwadratische vergelijkingen te herhalen en een begin te maken met wat er komt kijken bij derdegraadsvergelijkingen. De bijbehorende leerdoelen zijn:

- Leerlingen kunnen uitleggen waar de abc-formule vandaan komt.
- Leerlingen worden zich bewust welke derdegraadsvergelijkingen ze al kunnen oplossen met de kennis die ze tot dan toe hebben.
- Leerlingen kunnen derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ herschrijven tot de vorm $x^3 + px + q = 0$.
- Leerlingen kunnen met behulp van de factorstelling algebraïsch extra oplossingen van derdegraadsvergelijkingen vinden als ze de eerste met de grafische rekenmachine hebben gevonden.

In de tweede les wordt de formule van Cardano geïntroduceerd. Dit is daarmee een belangrijke les om de eerste twee hoofdleerdoelen van de lessenserie te behalen. De leerdoelen voor deze les zijn:

- Leerlingen kunnen derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ oplossen met behulp van de formule van Cardano.
- Leerlingen kunnen aan de hand van een opgave van ingewikkeld uitziende expressies simpelere gehele getallen maken.

In de laatste les worden de complexe getallen zelf dan ook daadwerkelijk geïntroduceerd. Hiermee worden de laatste hoofdleerdoelen als het goed is ook behaald. Bovendien leren leerlingen zo daadwerkelijk het begin om met complexe getallen te rekenen. De leerdoelen van deze les zijn:

- Leerlingen kunnen complexe getallen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen.
- Leerlingen kunnen van oplossingen van de formule van Cardano met behulp van complexe getallen reële oplossingen maken.
- Leerlingen kunnen uitleggen waar complexe getallen voor nodig zijn

Ontwerpeisen lessenserie

Naast de leerdoelen zijn er ook een aantal ontwerpeisen voor de lessenserie. Deze ontwerpeisen zijn:

- De lessenserie is in 3 lessen van 50 minuten uit te voeren.
- De lessenserie sluit aan op het wiskunde B en D niveau van vwo leerlingen aan het eind van 4 vwo/het begin van 5 vwo.
- De lessenserie is zelfstandig door leerlingen te volgen en vereist minimale inmenging van de docent.
- De lessenserie voldoet aan de leerdoelen zoals hiervoor besproken.

Om deze lessenserie te verbeteren en te zien of deze leerdoelen en ontwerpeisen daadwerkelijk behaald worden zou ik graag willen dat je feedback geeft op deze aspecten. Hiervoor heb ik een paar begeleidende vragen opgesteld. Bekijk het lesmateriaal goed en stel eventuele vragen ter verduidelijking. Vul daarna de antwoorden op de hieronder gestelde vragen in. Alle feedback die gebruikt kan worden om de lessenserie beter te maken is zeer welkom. Alvast bedankt voor je tijd en veel leesplezier!

- In hoeverre voldoet het lesmateriaal aan de gestelde leerdoelen zoals hierboven besproken? Welke onderdelen versterken dit en welke leerdoelen kunnen nog sterker naar voren komen? Heb je suggesties om dit te verbeteren?

Ik heb het idee dat les 2 en 3 heel sterk gekoppeld zijn aan de leerdoelen en heel goed in elkaar zitten. Voor de eerste les heb ik de volgende punten: - Ik zou het eerste leerdoel iets herschrijven want 'waar de abc-formule vandaan komt' is heel breed. Dit kan betekenen wie het heeft bedacht, hoe het is herleid vanuit ax^2+bx+c, en ik vind het dus een beetje onduidelijk wanneer het leerdoel is behaald. - Tussen opgave 2 en 3 leg je uit hoe de product-som methode uitgeschreven wordt. Vervolgens benoem je alleen kwadraat afsplitsen en abc-formule als begrippen. Ze moeten alle drie kunnen gebruiken bij opgave 3. Ik zou òf het stukje (dx+e)(fx+g)=0 weghalen, òf ook kort kwadraat afsplitsen en de abc-formule toelichten in formule vorm. Hoe het nu staat lijkt het een beetje willekeurig wat je wel en niet benoemd,

en als leerling zou ik eigenlijk alleen maar in de war raken van (dx+e)(fx+g), of juist denken dat dat nieuwe informatie zou moeten zijn en kwadraat afsplitsen/abc-formule niet.
- Opgave 6b: misschien beetje gek, maar gaan leerlingen misschien denken dat x de variabele is die niet 0 kan zijn? Ik zag mijn leerlingen daar vaak in de war raken (wel havo leerlingen) omdat ze denken dat x ook binnen de opties valt. Misschien voor de zekerheid duidelijk maken weer bij b) dat het om variabelen a, b, c, d gaat
- Opgave 7b: misschien is het handig om toe te voegen 'welke verschillen zie je tussen de grafieken?' Ik heb namelijk het idee dat h(x) wel een duidelijke andere vorm heeft, maar dat leerlingen heel snel de eerste twee grafieken als dezelfde vorm zien
- Opgave 9: geeft de tip bij b) niet het antwoord bij a) weg door (x-4)(...) te geven?

Voor de algemene leerdoelen heb ik alleen een beetje twijfels over 'Leerlingen kunnen uitleggen waarom ze derdegraadsvergelijkingen op deze manier oplossen.' Ik denk dat ze de stappen door de opgave heen wel snappen, maar dat ze niet een totaal plaatje hebben van deze reden. Hoe dit goed verbetert kan worden weet ik niet goed, maar ik denk dat dit punt nog wat extra aandacht kan gebruiken

- In hoeverre voldoet het lesmateriaal aan de ontwerpeisen zoals hierboven besproken? Welke onderdelen versterken dit en welke ontwerpeisen zullen mogelijk nog niet behaald worden? Heb je suggesties om deze ontwerpeisen wel te behalen?

Over het algemeen past het prima, het enige waar ik over twijfel is hoe zelfstandig dit te volgen is. Maakt het uit als ze er bij bepaalde opdrachten niet uitkomen? Wat voor gevolgen heeft dat bij vervolgopgaven? Stel de leerlingen kunnen vanuit opgave 5 niet goed de connectie maken met opgave 6. Het maakt niet veel uit voor wat ze verder leren, maar daardoor kan het zijn dat het leerdoel 'Leerlingen worden zich bewust welke derdegraadsvergelijkingen ze al kunnen oplossen met de kennis die ze tot dan toe hebben' niet wordt behaald, en dat zou wel jammer zijn. Hiervoor kan dan meer inmenging van een docent nodig zijn om dit te controleren.

- Heb je nog algemene feedback om het ontwerp te verbeteren? Welke zaken moeten in ieder geval behouden blijven en waar twijfel je nog over?

Ik vind dat het echt heel goed in elkaar zit! Mooi stapje voor stapje, en ik denk dat het algemene ontwerp gewoon heel mooi is

Feedbackformulier lessenserie expert 4

Ik denk dat je leer- en ontwerpdoelen goed terugkomen in de lessen, hoewel ik niet zeker weet of de leerlingen in deze vorm 50 minuten lang gefocust aan het werk zijn.
Maar hiermee helpen dingen als de geschiedenis tussendoor wel.
Net als de tips die ervoor zorgen dat leerlingen niet vast blijven zitten. Het kan wat productive struggle voorkomen bij sterke leerlingen, maar het helpt de zwakke, dus dat is een afweging die je maakt en ik denk dat het toevoegen van de tips een goede keuze is voor een onbegeleide les.
De opbouw van kennis die de leerlingen al hebben naar de nieuwe stof is erg goed en geleidelijk, met ook eerst meer tussenstappen expliciet benoemd die later weg worden gelaten.
Vraag 4 is mogelijk een te grote stap. Misschien uitleggen dat je dit kan aantonen door van de 2e vergelijking het kwadraat uit te schrijven en terug te werken naar $ax^2+bx+c=0$ (anders gaan leerlingen $ax^2+bx+c=0$ proberen om te schrijven naar de 2e, wat mij een stuk moeilijker lijkt).
Het gebruik van y in de plaats van x in sommige voorbeelden kan voor verwarring zorgen omdat leerlingen gewend zijn te werken met vergelijkingen in de vorm van y=...x, ook aangezien die zo wordt gebruikt bovenaan pagina 8.
Misschien wil je de leerlingen na deze vergelijking ook tot rust stellen dat hoewel deze er ingewikkeld uitziet er hier in stappen naar gekeken gaat worden.

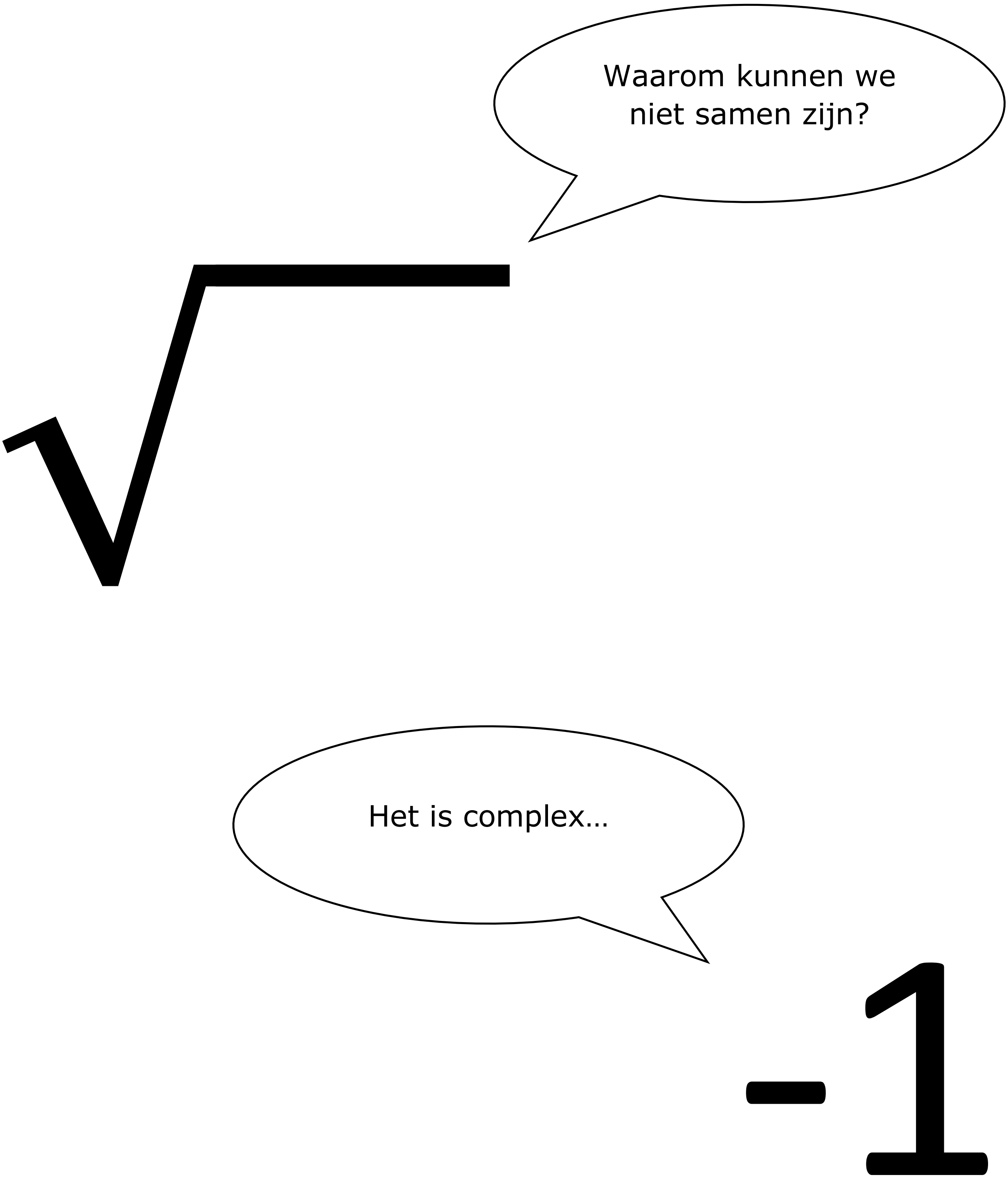
Bijlage 10: Overige feedback lessenserie

Naast de feedbackformulieren hebben experts 1 en 2 ook algemene opmerkingen op het lesmateriaal zelf geplaatst. Deze opmerkingen zoals geschreven door experts 1 en 2 respectievelijk zijn te vinden op de volgende bladzijden. De opmerkingen zijn mogelijk onleesbaar wanneer het verslag wordt geprint.

Het oplossen van derdegraadsvergelijkingen

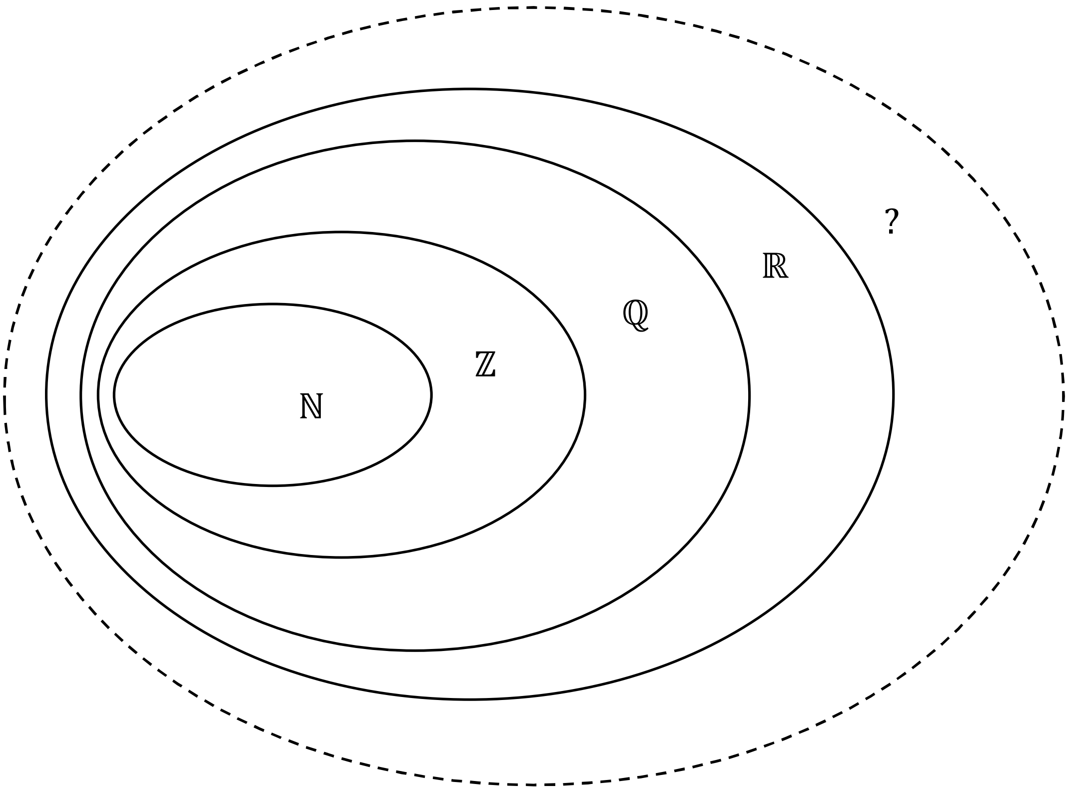
En de introductie van een nieuw getallensysteem

Een lessenserie voor VWO Wiskunde D



Introductie

Tijdens je middelbare schooltijd heb je bij wiskunde al veel verschillende soorten vergelijkingen voorbij zien komen. In de onderbouw ben je begonnen met het oplossen van lineaire vergelijkingen van de vorm $ax + b = 0$ en vervolgens heb je kwadratische vergelijkingen van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ voorbij zien komen. Toch worden er bijna nooit vergelijkingen met hogere machten laten zien. In deze drie lessen ga je kijken hoe je derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kunt oplossen. Je zult zien dat hier wat meer bij komt kijken dan bij kwadratische vergelijkingen. In de laatste les gaan we hiervoor zelfs een nieuw soort getallen introduceren.



Les 1

Laten we niet op de zaken vooruit lopen en beginnen bij wat je al weet. Wanneer je een kwadratische vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ wilt oplossen kan dat op een aantal manieren. In de meest simpele gevallen geldt $b = 0$ of $c = 0$. Bij vergelijkingen van de vorm $ax^2 + bx = 0$ kan de x buiten haakjes gehaald worden en bij vergelijkingen van de vorm $ax^2 + c = 0$ kunnen we deze herleiden tot de vorm $x^2 = -\frac{c}{a}$ om zo de wortel te trekken.

Opgave 1

Wat voor type vergelijking krijg je wanneer $a = 0$?

Opgave 2

Los op.

a) $9x^2 - 5x = 0$

b) $3x^2 - 48 = 0$

Wanneer de $a, b, c \neq 0$ zullen andere oplossingsmethoden gebruikt moeten worden. Als de getallen mooi uitkomen kan de product-som methode gebruikt worden: $ax^2 + bx + c = 0$ leidt dan tot $(dx + e)(fx + g) = 0$. Als dat niet werkt kun je altijd nog kwadraat afsplitsen of de abc-formule gebruiken.

Opgave 3

Los de vergelijking $x^2 - 3x - 10 = 0$ op met behulp van…

a) … de product-som methode.

b) … kwadraat afsplitsen.

c) … de abc-formule.

Veel mensen gebruiken de abc-formule zonder zich af te vragen waarom deze eigenlijk werkt. Toch wordt deze formule rond het jaar 825 al gebruikt in de Arabische wiskunde[1]. De abc-formule is af te leiden aan de hand van het kwadraat afsplitsen.

Tip: Maak het getal voor de x^2 eerst gelijk aan 1.

Opgave 4

a) Laat zien dat de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ te herleiden is tot de vorm $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$.

b) Los de vergelijking verder op.

c) Laat zien dat de oplossingen overeenkomen met de oplossingen die de abc-formule geeft.

Tip: Gebruik dat $\sqrt{\frac{-4ac+b^2}{4a^2}} = \frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{\sqrt{4a^2}}$.

Het oplossen van derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ is lastiger dan het oplossen van kwadratische vergelijkingen. Toch ken je al een aantal methodes voor simpelere vergelijkingen. Zelfs sommige hogeregraadsvergelijkingen kun je al oplossen.

---

[1] De formule werd toen wel iets anders opgeschreven omdat de symbolen die wij in de wiskunde gebruiken nog niet allemaal bestonden. Als je meer over deze geschiedenis wilt weten zou je het boek Wortels van de Wiskunde kunnen lezen.

Opgave 5

Los op.

a) $2x^3 + 54 = 0$

b) $18x^3 - 9x^2 = 0$

c) $7x^3 = 0$

d) $x^3 - 6x^2 - 7x = 0$

e) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

Tip: Alle mogelijkheden worden weergegeven in opgave 5.

Opgave 6

a) Welke variabelen uit de algemene vorm van de derdegraadsvergelijking (a, b, c of d) moeten gelijk zijn aan 0 om de vergelijking te kunnen oplossen met de kennis die je al hebt? Er zijn meerder opties mogelijk.

b) Welke variabele kan niet gelijk zijn aan 0?

Voor derdegraadsvergelijkingen is er uiteindelijk een formule gevonden die net zoals de abc-formule een oplossing geeft. In de volgende les zullen we deze formule gaan afleiden. Deze formule geeft altijd maar 1 oplossing van een derdegraadsvergelijking. De andere oplossingen zullen dus op een andere manier gevonden moeten worden.

Tip: De drie vormen met een positief getal voor de x^3 heb je al geplot in a. Wat zou er gebeuren als er een negatief getal voor de x^3 staat?

Opgave 7

a) Plot de grafieken van $f(x) = 3x^3 + 2$, $g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7x - 5$ en $h(x) = x^3 - 2x + 3$ op je grafische rekenmachine.

b) Schets de verschillende vormen van derdegraadsvergelijkingen.

c) Hoeveel oplossingen zou een vergelijking van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kunnen hebben?

Tip: Bekijk hoeveel snijpunten de grafieken uit b kunnen hebben met de x-as als je ze omhoog en omlaag schuift.

De formule om derdegraadsvergelijkingen op te lossen, die bekend staat als de formule van Cardano komt van de methode die Girolamo Cardano (1501-1576) heeft gevonden om één van de oplossingen te krijgen van een vergelijking van de vorm $x^3 + cx + d = 0$. Hierbij zien we dat $a = 1$ en $b = 0$. Cardano had de formule eigenlijk gekregen van een andere wiskundige Niccolò Fontana Tartaglia (1499, 1557) met de belofte om deze geheim te houden. Tartaglia had de oplossingsmethode nog niet gepubliceerd omdat het in die tijd erg gebruikelijk was om wiskundewedstrijden aan te gaan met andere geleerden. Hoe langer je de oplossingsmethoden geheim kon houden, hoe groter de kans dat je deze wedstrijden won. Cardano heeft de oplossingsmethode na lang aandringen gekregen. Vervolgens heeft hij de methode zelf bewezen en uitgebreid naar het oplossen van alle derdegraadsvergelijkingen. Dit wilde hij graag publiceren om op die manier beroemd te worden.

Cardano *Tartaglia*

Aangezien hij erachter kwam dat niet alleen Tartaglia, maar ook een andere wiskundige, Scipione del Ferro (1465-1526) de derdegraadsvergelijkingen heeft leren oplossen, vond Cardano dat hij uiteindelijk de volledige oplossingsmethode wel kon publiceren. Deze was gelijk aan die van Tartaglia, maar Tartaglia kon hier niets tegen doen. Tartaglia was terecht boos, want de formule staat nu nog steeds bekend als de formule van Cardano. De aanvulling van Cardano's onderzoek is dat hij er zelf achter kwam dat alle vergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ omgeschreven kunnen worden in de vorm $x^3 + px + q = 0$. Hierdoor konden alle derdegraadsvergelijkingen opgelost worden. Dit herschrijven van de vergelijking deed hij door de x te vervangen en op te lossen voor een andere variabele. Op dezelfde manier heb jij eerder voor vergelijkingen van de vorm $ax^4 + bx^2 + c = 0$ de variabele $u = x^2$ gesubstitueerd.
Dit had je bijvoorbeeld nodig in opgave 5e.

Tip: Vul $x = y + s$ in in de vergelijking en maak gebruik van het feit dat $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Opgave 8

We gaan de x in $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ vervangen door $x = y + s$.

a) Voor welke waarde van s leidt dit tot de vergelijking van de vorm $ay^3 + my + n = 0$, waarbij de y^2 verdwenen is?

b) Hoe komen we van $ay^3 + my + n = 0$ tot de vorm $y^3 + py + q = 0$?

Wanneer we met de formule van Cardano eenmaal een oplossing gevonden hebben, willen we ook de eventuele overige 2 oplossingen van de derdegraadsvergelijking kunnen vinden. Hiervoor gebruiken we de zogenoemde factorstelling. De factorstelling zegt:

"Als $x = k$ een oplossing is van de vergelijking $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ dan is $x^3 + ax^2 + bx + c = (x - k)(x^2 + \ldots)$." Voor kwadratische vergelijkingen gebruiken we dit eigenlijk ook al voor de product-som methode.

Opgave 9

a) Zoek met behulp van de grafische rekenmachine de gehele oplossing van de vergelijking $x^3 - 15x - 4 = 0$ (dus geen kommagetal).

b) Gebruik nu de factorstelling om algebraïsch de overige twee oplossingen van de vergelijking $x^3 - 15x - 4 = 0$ te vinden.

c) Komen de gevonden oplossingen overeen met de oplossingen uit de grafische rekenmachine?

d) Vind op dezelfde manier de exacte oplossingen van $x^3 - 21x - 20 = 0$.

Tip: Weet je niet hoe je moet beginnen? Stel $(x^3 - 15x - 4) = (x - 4)(x^2 + ax + b)$ en maak een stelsel om a en b uit te rekenen.

Les 2

In de vorige les hebben we al gezien dat alle vergelijkingen om te schrijven zijn tot de vorm $y^3 + py + q = 0$. We gaan er in deze les vanuit dat $p, q \neq 0$, anders kun je de vergelijking al oplossen met de kennis die je al had. Verder weten we hoe we eventuele overige oplossingen kunnen vinden wanneer we een eerste oplossing hebben. In deze les gaan we kijken hoe we deze eerste oplossing kunnen vinden. Hiervoor gaan we de formule van Cardano afleiden. Een aantal stappen die hierin gebeuren lijken in het eerste opzicht misschien niet logisch, maar bedenk dat de abc-formule eerst ook als magie leek. We introduceren nu eerst een extra variabele.

> *Tip: Maak opnieuw gebruik van het feit dat* $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Opgave 10

Substitueer $y = u + v$ in de vergelijking $y^3 + py + q = 0$.
Laat zien dat dit gelijk is aan $u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0$.

De formule die we nu gevonden hebben kunnen we versimpelen door $(u+v)(3uv+p)$ gelijk te stellen aan 0.

> *Tip: Wat gebeurt er in* $y^3 + py + q = 0$ *wanneer* $u + v = 0$*?*

Opgave 11

a) Leg uit waarom $(u+v)(3uv+p) = 0$ niet kan leiden tot $u + v = 0$.
b) Welke vergelijking krijgen we uit opgave 10 wanneer we $3uv + p$ gelijk stellen aan 0?

We willen nu graag weer van een van de extra variabelen afkomen. Hiervoor gebruiken we dat we voor het versimpelen hebben gekozen dat $3uv + p = 0$. We willen eerst van de variabele v afkomen.

> *Tip: Kijk terug naar hoe we deze variabelen introduceerden in opgave 10.*

Opgave 12

a) Waarom maakt het niet uit welke variabele (u of v) je vrijmaakt in de vergelijking $3uv + p = 0$?
b) Maak v vrij.
c) Substitueer v terug in de vergelijking zoals gevonden in opgave 11b.
d) Vermenigvuldig de vergelijking met u^3. Wat valt je op?
e) Los de vergelijking verder op en laat zien dat
$u^3 = \frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2} \vee u^3 = \frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$.

> *Tip: Gebruik de substitutie* $t = u^3$.

f) Laat zien dat de waarden van u^3 overeenkomen met
$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \vee -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$.
g) Gebruik nu $u^3 + v^3 + q = 0$ om v^3 te berekenen bij beide oplossingen.
h) Bepaal u en v en bereken y. Hoeveel mogelijke oplossingen voor y heb je nu gevonden?

We hebben nu de formule van Cardano gevonden. Voor vergelijkingen van de vorm $y^3 + py + q = 0$ geeft de formule van Cardano een oplossing door:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Opgave 13

We gaan nu de vergelijking $x^3 + 6x - 20 = 0$ oplossen. Hiervoor gebruiken we opnieuw de hele procedure.

a) Substitueer $x = u + v$ in de vergelijking.
b) Maak v vrij in de vergelijking $3uv + p = 0$ en substitueer dit opnieuw in de gevonden vergelijking.
c) Vermenigvuldig de vergelijking met u^3 en bepaal u^3.
d) Bepaal u en v bereken hiermee x.
e) Vul de gevonden oplossing in op je grafische rekenmachine. Waar zou deze oplossing aan gelijk moeten zijn?

Blijkbaar komen sommige ingewikkeld uitziende oplossingen dus eigenlijk overeen met een stuk simpeler uitziende getallen. Dit willen we ook algebraïsch kunnen laten zien. Hiervoor willen we de derdemachtswortel van $10 + \sqrt{108}$ en $10 - \sqrt{108}$ ~~te~~ berekenen.

Tip: Maak opnieuw gebruik van het feit dat $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Opgave 14

a) Bereken $(1 + \sqrt{3})^3$.
b) Laat zien dat de oplossing die je gevonden hebt in opgave 14a gelijk moet zijn aan $10 + \sqrt{108}$. Bereken hiermee $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}$.
c) Gebruik nu $(1 - \sqrt{3})^3$ om $\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$ te berekenen.
d) Bereken met b en c algebraïsch $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$.

Op deze manier kunnen we dus alsnog algebraïsch laten zien dat sommige ingewikkeld uitziende oplossingen gelijk zijn aan een stuk simpeler uitziende getallen[2]. Voor het laatste voorbeeld dat je in opgave 9 heb je gebruikt zul je de volgende les namelijk zien dat dit tot problemen zal leiden. Dan zullen we ook de nieuwe getallensoort introduceren zoals we in de inleiding al beloofd hadden.

---

[2] Het vinden van de getallen als $1 + \sqrt{3}$ om de derdemachtswortel te nemen hoef je niet zelf te kunnen. Als je hier meer over wilt weten kun je bij de docent terecht. Hiervoor gebruiken we wel de simpeler uitziende oplossing al.

Les 3
Zoals we in de vorige les al aangekondigd hadden gaan we nu naar het voorbeeld kijken van opgave 9.

Opgave 15

a) Welke oplossingen van de vergelijking $x^3 - 15x - 4 = 0$ heb je gevonden in opgave 9?

b) Bereken met de formule van Cardano de oplossingen van $x^3 - 15x - 4 = 0$. Wat valt je op?

De formule van Cardano leidt nu duidelijk tot geen oplossingen, want we hebben met de wortel van een negatief getal te maken. In opgave 9 hebben we echter gezien dat er drie mogelijke oplossingen zijn voor deze vergelijking. Daardoor moet de formule van Cardano wel een oplossing geven. We gaan daarom proberen op dezelfde manier als aan het eind van de vorige les via $a + \sqrt{-b}$ op een oplossing te komen. Hiervoor zullen we dus met negatieve wortels moeten gaan werken. Bombelli deed dit voor het eerst. Hij gebruikte net zoals dat $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ ook moest gelden $\left(\sqrt{-3}\right)^2 = -3$.

Opgave 16

Ga er voor nu even vanuit dat je wel met negatieve wortels kunt werken en bereken $\left(\sqrt{-b}\right)^2$.

Het rekenen met negatieve wortels is mogelijk en in sommige gevallen zelfs noodzakelijk. Dit klinkt misschien een beetje gek, maar aan het begin van de middelbare school had je waarschijnlijk ook niet bedacht dat je met negatieve getallen kon werken. De getallensystemen zijn door de jaren heen steeds iets verder uitgebreid en negatieve wortels zijn hierin de volgende stap. Deze getallen zijn ontstaan om derdegraadsvergelijkingen te kunnen oplossen. We noemen deze negatieve wortels onderdeel van de complexe getallen.

Opgave 17

Bereken de volgende getallen en herleid zo ver mogelijk.

a) $\sqrt{3} + \sqrt{3}$

b) $\sqrt{-5} + \sqrt{-5}$

c) $\sqrt{9}$

d) $\sqrt{-16}$

e) $\sqrt{1} \cdot \sqrt{3}$

f) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{-7}$

g) $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}$

Deze laatste opgave leidt nu tot een probleem. Als we de rekenregels die we voor wortels kennen volgen leidt g tot $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{-2 \cdot -2} = \sqrt{4} = 2$. We hebben hiervoor echter al gezien dat $\left(\sqrt{-b}\right)^2 = -b$ en $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \left(\sqrt{-2}\right)^2 = -2$. Blijkbaar gaat er dus iets mis met onze rekenregels n we met deze negatieve wortels gaan

rekenen. Aangezien we $\sqrt{-1}$ tot nu toe nog niet kenden, gaan we hier niet zomaar mee rekenen, maar introduceren we hier een nieuw symbool voor: $\sqrt{-1} = i$. Hierbij spreken we af dat $i^2 = -1$. We kunnen andere negatieve wortels nu ook schrijven met behulp van i. Zo krijgen we $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$. Hierdoor kunnen we $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}$ berekenen als $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{2}i \cdot \sqrt{2}i = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot i^2 = 2 \cdot -1 = -2$. We gaan van nu af aan negatieve wortels altijd terugschrijven naar een vorm met i. Hiervoor hebben we ook getallen als $2i$ en $3 + i$ nodig. Daardoor kunnen we alle complexe getallen schrijven in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$. Alle getallen die we al kenden vallen hier dus ook onder, want we kunnen een complex getal zo kiezen dat $b = 0$. De getallenverzameling van de complexe getallen schrijven we ook wel op met het symbool $\mathbb{C}$.

Opgave 18

Bereken de getallen en herleid zo ver mogelijk. Schrijf ze in de vorm $a + bi$.

a) $\sqrt{-5} + \sqrt{-5}$
b) $\sqrt{-16}$
c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{-7}$
d) $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$
e) $3 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{-20}$
f) $(2 + \sqrt{-3})(5 - \sqrt{-12})$
g) $(c + di)^2$

Nu we een beetje weten hoe we met complexe getallen kunnen rekenen gaan we terug naar de derdegraadsvergelijking waar we mee bezig waren. We willen laten zien dat $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ gelijk is aan een reëel getal. We kunnen dit niet op de rekenmachine uitproberen, aangezien de negatieve wortels een error zullen geven, maar we kunnen de grafiek wel plotten en op die manier de nulpunten vinden. Vervolgens kunnen we dit algebraïsch proberen te laten zien door $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ en $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ te berekenen.

Tip: Maak opnieuw gebruik van het feit dat $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Opgave 19

a) Laat zien dat $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ geschreven kan worden als $\sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$.
b) Gebruik $(2 + i)^3$ om $\sqrt[3]{2 + 11i}$ te berekenen.
c) Gebruik nu $(2 - i)^3$ om $\sqrt[3]{2 - 11i}$ te berekenen.
d) Bereken met b en c algebraïsch $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.
e) Controleer je oplossing met behulp van de grafiek op je grafische rekenmachine. Hoe zou je de overige oplossingen exact kunnen berekenen?

Tip: Je hebt dit al gedaan in opgave 9.

Het is nu duidelijk waar complexe getallen handig voor zijn. Dankzij het rekenen met complexe getallen kunnen we in specifieke gevallen reële oplossingen vinden. Na het ontstaan van de complexe getallen is er veel onderzoek gedaan naar de complexe getallen zelf. Hier zul je in je eigen lesmethode later nog uitgebreid op in gaan. Wanneer we complexe getallen

toestaan kunnen we van alle vergelijkingen namelijk minstens 1 oplossing vinden.

Opgave 20

Bereken de complexe oplossingen van $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Andere hogeregraadsvergelijkingen die in de eerste oogopslag nergens toe lijken te leiden, omdat de grafiek bijvoorbeeld niet door de x-as gaat, zullen dus ook altijd complexe oplossingen hebben. Hoewel we van een aantal vergelijkingen de reële oplossing al kennen, vinden we binnen de complexe getallen nog veel meer mogelijkheden. Zo weten we al dat een derdegraadsvergelijking 1, 2 of 3 oplossingen kan hebben. Binnen de complexe getallen heeft een vergelijking van de vorm $x^3 = a$ (bijna altijd) 3 oplossingen. Als we de oplossingen voor $x^3 = 1$ hebben gevonden, hoeven we deze alleen maar te vermenigvuldigen met $\sqrt[3]{a}$ om de oplossingen van $x^3 = a$ te krijgen.

Tip: Wanneer heeft $x^2 = a$ maar één oplossing?

Opgave 21

a) Bereken $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^3$ en $\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^3$.
b) Welke drie oplossingen heeft de vergelijking $x^3 = 1$?
c) Welke drie oplossingen heeft de vergelijking $x^3 = a$?
d) Voor welke a heeft de vergelijking $x^3 = a$ geen drie oplossingen?

De andere hogeregraadsvergelijkingen gaan we voor nu verder niet op in. Je weet nu een beetje hoe je met complexe getallen kunt werken. Wanneer je terug gaat naar de wiskunde B lessen, zul je echter altijd binnen de reële getallen werken en zijn negatieve wortels dus niet toegestaan. Om het af te leren hebben we nog één mooie derdegraadsvergelijking waarin je de complexe getallen heel goed kunt gebruiken.

Tip: Kijk hiervoor terug naar opgave 8.

Opgave 22

Gegeven is de vergelijking $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$.

a) Schrijf de vergelijking in de vorm $y^3 + py + q = 0$.
b) Vind een reële oplossing van de in a gevonden vergelijking met behulp van de formule van Cardano. Maak hiervoor gebruik van $(1+i)^3$ en $(1-i)^3$.
c) Vind exact alle oplossingen van de vergelijking die je in a hebt gevonden.
d) Vind exact alle oplossingen van de vergelijking $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$. Controleer de gevonden oplossingen met behulp van de grafische rekenmachine.

Tip: Gebruik hiervoor de factorstelling uit les 1 (bij opgave 9).

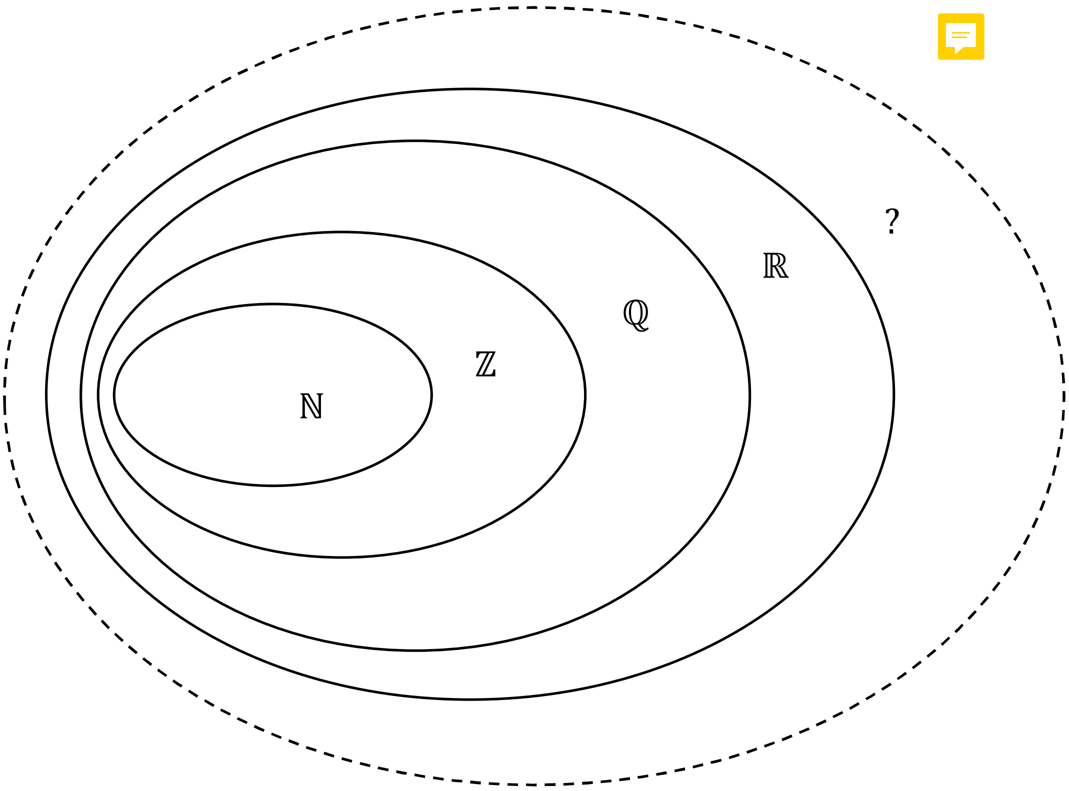
Het oplossen van derdegraadsvergelijkingen

En de introductie van een nieuw getallensysteem

Een lessenserie voor VWO Wiskunde D

Introductie

Tijdens je middelbare schooltijd heb je bij wiskunde al veel verschillende soorten vergelijkingen voorbij zien komen. In de onderbouw ben je begonnen met het oplossen van lineaire vergelijkingen van de vorm $ax + b = 0$ en vervolgens heb je kwadratische vergelijkingen van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ voorbij zien komen. Toch worden er bijna nooit vergelijkingen met hogere machten laten zien. In deze drie lessen ga je kijken hoe je derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kunt oplossen. Je zult zien dat hier wat meer bij komt kijken dan bij kwadratische vergelijkingen. In de laatste les gaan we hiervoor zelfs een nieuw soort getallen introduceren.



Les 1

Laten we niet op de zaken vooruit lopen en beginnen bij wat je al weet. Wanneer je een kwadratische vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ wilt oplossen kan dat op een aantal manieren. In de meest simpele gevallen geldt $b = 0$ of $c = 0$. Bij vergelijkingen van de vorm $ax^2 + bx = 0$ kan de x buiten haakjes gehaald worden en bij vergelijkingen van de vorm $ax^2 + c = 0$ kunnen we deze herleiden tot de vorm $x^2 = -\frac{c}{a}$ om zo de wortel te trekken.

Opgave 1

Wat voor type vergelijking krijg je wanneer $a = 0$?

Opgave 2

Los op.

a) $9x^2 - 5x = 0$

b) $3x^2 - 48 = 0$

Wanneer de $a, b, c \neq 0$ zullen andere oplossingsmethoden gebruikt moeten worden. Als de getallen mooi uitkomen kan de product-som methode gebruikt worden: $ax^2 + bx + c = 0$ leidt dan tot $(dx + e)(fx + g) = 0$. Als dat niet werkt kun je altijd nog kwadraat afsplitsen of de abc-formule gebruiken.

Opgave 3

Los de vergelijking $x^2 - 3x - 10 = 0$ op met behulp van…

a) … de product-som methode.

b) … kwadraat afsplitsen.

c) … de abc-formule.

Veel mensen gebruiken de abc-formule zonder zich af te vragen waarom deze eigenlijk werkt. Toch wordt deze formule rond het jaar 825 al gebruikt in de Arabische wiskunde[1]. De abc-formule is af te leiden aan de hand van het kwadraat afsplitsen.

Tip: Maak het getal voor de x^2 eerst gelijk aan 1.

Opgave 4

a) Laat zien dat de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ te herleiden is tot de vorm $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$.

b) Los de vergelijking verder op.

c) Laat zien dat de oplossingen overeenkomen met de oplossingen die de abc-formule geeft.

Tip: Gebruik dat $\sqrt{\frac{-4ac+b^2}{4a^2}} = \frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{\sqrt{4a^2}}$.

Het oplossen van derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ is lastiger dan het oplossen van kwadratische vergelijkingen. Toch ken je al een aantal methodes voor simpelere vergelijkingen. Zelfs sommige hogeregraadsvergelijkingen kun je al oplossen.

---

[1] De formule werd toen wel iets anders opgeschreven omdat de symbolen die wij in de wiskunde gebruiken nog niet allemaal bestonden. Als je meer over deze geschiedenis wilt weten zou je het boek Wortels van de Wiskunde kunnen lezen.

Opgave 5

Los op.

a) $2x^3 + 54 = 0$
b) $18x^3 - 9x^2 = 0$
c) $7x^3 = 0$
d) $x^3 - 6x^2 - 7x = 0$
e) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

Tip: Alle mogelijkheden worden weergegeven in opgave 5.

Opgave 6

a) Welke variabelen uit de algemene vorm van de derdegraadsvergelijking (a, b, c of d) moeten gelijk zijn aan 0 om de vergelijking te kunnen oplossen met de kennis die je al hebt? Er zijn meerder opties mogelijk.
b) Welke variabele kan niet gelijk zijn aan 0?

Voor derdegraadsvergelijkingen is er uiteindelijk een formule gevonden die net zoals de abc-formule een oplossing geeft. In de volgende les zullen we deze formule gaan afleiden. Deze formule geeft altijd maar 1 oplossing van een derdegraadsvergelijking. De andere oplossingen zullen dus op een andere manier gevonden moeten worden.

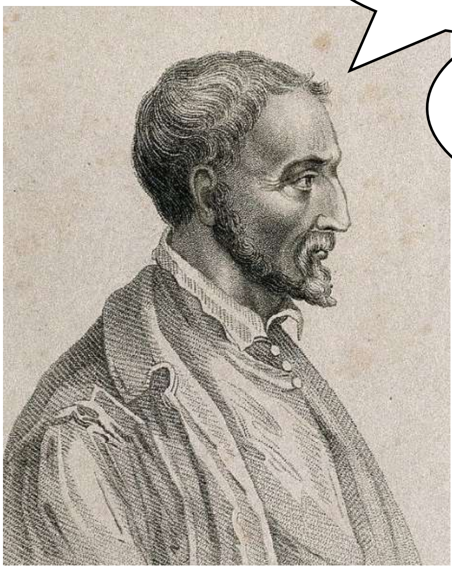
Tip: De drie vormen met een positief getal voor de x^3 heb je al geplot in a. Wat zou er gebeuren als er een negatief getal voor de x^3 staat?

Opgave 7

a) Plot de grafieken van $f(x) = 3x^3 + 2$, $g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7x - 5$ en $h(x) = x^3 - 2x + 3$ op je grafische rekenmachine.
b) Schets de verschillende vormen van derdegraadsvergelijkingen.
c) Hoeveel oplossingen zou een vergelijking van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kunnen hebben?

Tip: Bekijk hoeveel snijpunten de grafieken uit b kunnen hebben met de x-as als je ze omhoog en omlaag schuift.

De formule om derdegraadsvergelijkingen op te lossen, die bekend staat als de formule van Cardano komt van de methode die Girolamo Cardano (1501-1576) heeft gevonden om één van de oplossingen te krijgen van een vergelijking van de vorm $x^3 + cx + d = 0$. Hierbij zien we dat $a = 1$ en $b = 0$. Cardano had de formule eigenlijk gekregen van een andere wiskundige Niccolò Fontana Tartaglia (1499, 1557) met de belofte om deze geheim te houden. Tartaglia had de oplossingsmethode nog niet gepubliceerd omdat het in die tijd erg gebruikelijk was om wiskundewedstrijden aan te gaan met andere geleerden. Hoe langer je de oplossingsmethoden geheim kon houden, hoe groter de kans dat je deze wedstrijden won. Cardano heeft de oplossingsmethode na lang aandringen gekregen. Vervolgens heeft hij de methode zelf bewezen en uitgebreid naar het oplossen van alle derdegraadsvergelijkingen. Dit wilde hij graag publiceren om op die manier beroemd te worden.



Cardano

Tartaglia

Aangezien hij erachter kwam dat niet alleen Tartaglia, maar ook een andere wiskundige, Scipione del Ferro (1465-1526) de derdegraadsvergelijkingen heeft leren oplossen, vond Cardano dat hij uiteindelijk de volledige oplossingsmethode wel kon publiceren. Deze was gelijk aan die van Tartaglia, maar Tartaglia kon hier niets tegen doen. Tartaglia was terecht boos, want de formule staat nu nog steeds bekend als de formule van Cardano. De aanvulling van Cardano's onderzoek is dat hij er zelf achter kwam dat alle vergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ omgeschreven kunnen worden in de vorm $x^3 + px + q = 0$. Hierdoor konden alle derdegraadsvergelijkingen opgelost worden. Dit herschrijven van de vergelijking deed hij door de x te vervangen en op te lossen voor een andere variabele. Op dezelfde manier heb jij eerder voor vergelijkingen van de vorm $ax^4 + bx^2 + c = 0$ de variabele $u = x^2$ gesubstitueerd.
Dit had je bijvoorbeeld nodig in opgave 5e.

Tip: Vul $x = y + s$ in in de vergelijking en maak gebruik van het feit dat $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Opgave 8

We gaan de x in $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ vervangen door $x = y + s$.

a) Voor welke waarde van s leidt dit tot de vergelijking van de vorm $ay^3 + my + n = 0$, waarbij de y^2 verdwenen is?
b) Hoe komen we van $ay^3 + my + n = 0$ tot de vorm $y^3 + py + q = 0$?

Wanneer we met de formule van Cardano eenmaal een oplossing gevonden hebben, willen we ook de eventuele overige 2 oplossingen van de derdegraadsvergelijking kunnen vinden. Hiervoor gebruiken we de zogenoemde factorstelling. De factorstelling zegt:

"Als $x = k$ een oplossing is van de vergelijking $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ dan is $x^3 + ax^2 + bx + c = (x - k)(x^2 + \ldots)$." Voor kwadratische vergelijkingen gebruiken we dit eigenlijk ook al voor de product-som methode.

Opgave 9

a) Zoek met behulp van de grafische rekenmachine de gehele oplossing van de vergelijking $x^3 - 15x - 4 = 0$ (dus geen kommagetal).

b) Gebruik nu de factorstelling om algebraïsch de overige twee oplossingen van de vergelijking $x^3 - 15x - 4 = 0$ te vinden.

c) Komen de gevonden oplossingen overeen met de oplossingen uit de grafische rekenmachine?

d) Vind op dezelfde manier de exacte oplossingen van $x^3 - 21x - 20 = 0$.

Tip: Weet je niet hoe je moet beginnen? Stel $(x^3 - 15x - 4) = (x - 4)(x^2 + ax + b)$ en maak een stelsel om a en b uit te rekenen.

Les 2

In de vorige les hebben we al gezien dat alle vergelijkingen om te schrijven zijn tot de vorm $y^3 + py + q = 0$. We gaan er in deze les vanuit dat $p, q \neq 0$, anders kun je de vergelijking al oplossen met de kennis die je al had. Verder weten we hoe we eventuele overige oplossingen kunnen vinden wanneer we een eerste oplossing hebben. In deze les gaan we kijken hoe we deze eerste oplossing kunnen vinden. Hiervoor gaan we de formule van Cardano afleiden. Een aantal stappen die hierin gebeuren lijken in het eerste opzicht misschien niet logisch, maar bedenk dat de abc-formule eerst ook als magie leek. We introduceren nu eerst een extra variabele.

Tip: Maak opnieuw gebruik van het feit dat $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Opgave 10

Substitueer $y = u + v$ in de vergelijking $y^3 + py + q = 0$.
Laat zien dat dit gelijk is aan $u^3 + v^3 + (u+v)(3uv+p) + q = 0$.

De formule die we nu gevonden hebben kunnen we versimpelen door $(u+v)(3uv+p)$ gelijk te stellen aan 0.

Tip: Wat gebeurt er in $y^3 + py + q = 0$ wanneer $u + v = 0$?

Opgave 11

a) Leg uit waarom $(u+v)(3uv+p) = 0$ niet kan leiden tot $u + v = 0$.
b) Welke vergelijking krijgen we uit opgave 10 wanneer we $3uv + p$ gelijk stellen aan 0?

We willen nu graag weer van een van de extra variabelen afkomen. Hiervoor gebruiken we dat we voor het versimpelen hebben gekozen dat $3uv + p = 0$. We willen eerst van de variabele v afkomen.

Tip: Kijk terug naar hoe we deze variabelen introduceerden in opgave 10.

Opgave 12

a) Waarom maakt het niet uit welke variabele (u of v) je vrijmaakt in de vergelijking $3uv + p = 0$?
b) Maak v vrij.
c) Substitueer v terug in de vergelijking zoals gevonden in opgave 11b.
d) Vermenigvuldig de vergelijking met u^3. Wat valt je op?
e) Los de vergelijking verder op en laat zien dat
$u^3 = \frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2} \vee u^3 = \frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$.
f) Laat zien dat de waarden van u^3 overeenkomen met
$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \vee -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$.
g) Gebruik nu $u^3 + v^3 + q = 0$ om v^3 te berekenen bij beide oplossingen.
h) Bepaal u en v en bereken y. Hoeveel mogelijke oplossingen voor y heb je nu gevonden?

Tip: Gebruik de substitutie $t = u^3$.

We hebben nu de formule van Cardano gevonden. Voor vergelijkingen van de vorm $y^3 + py + q = 0$ geeft de formule van Cardano een oplossing door:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Opgave 13

We gaan nu de vergelijking $x^3 + 6x - 20 = 0$ oplossen. Hiervoor gebruiken we opnieuw de hele procedure.

a) Substitueer $x = u + v$ in de vergelijking.
b) Maak v vrij in de vergelijking $3uv + p = 0$ en substitueer dit opnieuw in de gevonden vergelijking.
c) Vermenigvuldig de vergelijking met u^3 en bepaal u^3.
d) Bepaal u en v bereken hiermee x.
e) Vul de gevonden oplossing in op je grafische rekenmachine. Waar zou deze oplossing aan gelijk moeten zijn?

Blijkbaar komen sommige ingewikkeld uitziende oplossingen dus eigenlijk overeen met een stuk simpeler uitziende getallen. Dit willen we ook algebraïsch kunnen laten zien. Hiervoor willen we de derdemachtswortel van $10 + \sqrt{108}$ en $10 - \sqrt{108}$ te berekenen.

Tip: Maak opnieuw gebruik van het feit dat $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Opgave 14

a) Bereken $\left(1 + \sqrt{3}\right)^3$.
b) Laat zien dat de oplossing die je gevonden hebt in opgave 14a gelijk moet zijn aan $10 + \sqrt{108}$. Bereken hiermee $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}$.
c) Gebruik nu $\left(1 - \sqrt{3}\right)^3$ om $\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$ te berekenen.
d) Bereken met b en c algebraïsch $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$.

Op deze manier kunnen we dus alsnog algebraïsch laten zien dat sommige ingewikkeld uitziende oplossingen gelijk zijn aan een stuk simpeler uitziende getallen[2]. Voor het laatste voorbeeld dat je in opgave 9 heb je gebruikt zul je de volgende les namelijk zien dat dit tot problemen zal leiden. Dan zullen we ook de nieuwe getallensoort introduceren zoals we in de inleiding al beloofd hadden.

[2] Het vinden van de getallen als $1 + \sqrt{3}$ om de derdemachtswortel te nemen hoef je niet zelf te kunnen. Als je hier meer over wilt weten kun je bij de docent terecht. Hiervoor gebruiken we wel de simpeler uitziende oplossing al.

Les 3

Zoals we in de vorige les al aangekondigd hadden gaan we nu naar het voorbeeld kijken van opgave 9.

Opgave 15

a) Welke oplossingen van de vergelijking $x^3 - 15x - 4 = 0$ heb je gevonden in opgave 9?
b) Bereken met de formule van Cardano de oplossingen van $x^3 - 15x - 4 = 0$. Wat valt je op?

De formule van Cardano leidt nu duidelijk tot geen oplossingen, want we hebben met de wortel van een negatief getal te maken. In opgave 9 hebben we echter gezien dat er drie mogelijke oplossingen zijn voor deze vergelijking. Daardoor moet de formule van Cardano wel een oplossing geven. We gaan daarom proberen op dezelfde manier als aan het eind van de vorige les via $a + \sqrt{-b}$ op een oplossing te komen. Hiervoor zullen we dus met negatieve wortels moeten gaan werken. Bombelli deed dit voor het eerst. Hij gebruikte net zoals dat $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ ook moest gelden $\left(\sqrt{-3}\right)^2 = -3$.

Opgave 16

Ga er voor nu even vanuit dat je wel met negatieve wortels kunt werken en bereken $\left(\sqrt{-b}\right)^2$.

Het rekenen met negatieve wortels is mogelijk en in sommige gevallen zelfs noodzakelijk. Dit klinkt misschien een beetje gek, maar aan het begin van de middelbare school had je waarschijnlijk ook niet bedacht dat je met negatieve getallen kon werken. De getallensystemen zijn door de jaren heen steeds iets verder uitgebreid en negatieve wortels zijn hierin de volgende stap. Deze getallen zijn ontstaan om derdegraadsvergelijkingen te kunnen oplossen. We noemen deze negatieve wortels onderdeel van de complexe getallen.

Opgave 17

Bereken de volgende getallen en herleid zo ver mogelijk.

a) $\sqrt{3} + \sqrt{3}$
b) $\sqrt{-5} + \sqrt{-5}$
c) $\sqrt{9}$
d) $\sqrt{-16}$
e) $\sqrt{1} \cdot \sqrt{3}$
f) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{-7}$
g) $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}$

Deze laatste opgave leidt nu tot een probleem. Als we de rekenregels die we voor wortels kennen volgen leidt g tot $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{-2 \cdot -2} = \sqrt{4} = 2$. We hebben hiervoor echter al gezien dat $\left(\sqrt{-b}\right)^2 = -b$ en $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \left(\sqrt{-2}\right)^2 = -2$. Blijkbaar gaat er dus iets mis met onze rekenregels n we met deze negatieve wortels gaan

rekenen. Aangezien we $\sqrt{-1}$ tot nu toe nog niet kenden, gaan we hier niet zomaar mee rekenen, maar introduceren we hier een nieuw symbool voor: $\sqrt{-1} = i$. Hierbij spreken we af dat $i^2 = -1$. We kunnen andere negatieve wortels nu ook schrijven met behulp van i. Zo krijgen we $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$. Hierdoor kunnen we $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}$ berekenen als $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{2}i \cdot \sqrt{2}i = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot i^2 = 2 \cdot -1 = -2$. We gaan van nu af aan negatieve wortels altijd terugschrijven naar een vorm met i. Hiervoor hebben we ook getallen als $2i$ en $3 + i$ nodig. Daardoor kunnen we alle complexe getallen schrijven in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$. Alle getallen die we al kenden vallen hier dus ook onder, want we kunnen een complex getal zo kiezen dat $b = 0$. De getallenverzameling van de complexe getallen schrijven we ook wel op met het symbool $\mathbb{C}$.

Opgave 18

Bereken de getallen en herleid zo ver mogelijk. Schrijf ze in de vorm $a + bi$.

a) $\sqrt{-5} + \sqrt{-5}$
b) $\sqrt{-16}$
c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{-7}$
d) $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$
e) $3 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{-20}$
f) $(2 + \sqrt{-3})(5 - \sqrt{-12})$
g) $(c + di)^2$

Nu we een beetje weten hoe we met complexe getallen kunnen rekenen gaan we terug naar de derdegraadsvergelijking waar we mee bezig waren. We willen laten zien dat $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ gelijk is aan een reëel getal. We kunnen dit niet op de rekenmachine uitproberen, aangezien de negatieve wortels een error zullen geven, maar we kunnen de grafiek wel plotten en op die manier de nulpunten vinden. Vervolgens kunnen we dit algebraïsch proberen te laten zien door $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ en $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ te berekenen.

Tip: Maak opnieuw gebruik van het feit dat $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Opgave 19

a) Laat zien dat $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ geschreven kan worden als $\sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$.
b) Gebruik $(2 + i)^3$ om $\sqrt[3]{2 + 11i}$ te berekenen.
c) Gebruik nu $(2 - i)^3$ om $\sqrt[3]{2 - 11i}$ te berekenen.
d) Bereken met b en c algebraïsch $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.
e) Controleer je oplossing met behulp van de grafiek op je grafische rekenmachine. Hoe zou je de overige oplossingen exact kunnen berekenen?

Tip: Je hebt dit al gedaan in opgave 9.

Het is nu duidelijk waar complexe getallen handig voor zijn. Dankzij het rekenen met complexe getallen kunnen we in specifieke gevallen reële oplossingen vinden. Na het ontstaan van de complexe getallen is er veel onderzoek gedaan naar de complexe getallen zelf. Hier zul je in je eigen lesmethode later nog uitgebreid op in gaan. Wanneer we complexe getallen

toestaan kunnen we van alle vergelijkingen namelijk minstens 1 oplossing vinden.

Opgave 20

Bereken de complexe oplossingen van $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Andere hogeregraadsvergelijkingen die in de eerste oogopslag nergens toe lijken te leiden, omdat de grafiek bijvoorbeeld niet door de x-as gaat, zullen dus ook altijd complexe oplossingen hebben. Hoewel we van een aantal vergelijkingen de reële oplossing al kennen, vinden we binnen de complexe getallen nog veel meer mogelijkheden. Zo weten we al dat een derdegraadsvergelijking 1, 2 of 3 oplossingen kan hebben. Binnen de complexe getallen heeft een vergelijking van de vorm $x^3 = a$ (bijna altijd) 3 oplossingen. Als we de oplossingen voor $x^3 = 1$ hebben gevonden, hoeven we deze alleen maar te vermenigvuldigen met $\sqrt[3]{a}$ om de oplossingen van $x^3 = a$ te krijgen.

Opgave 21

Tip: Wanneer heeft $x^2 = a$ maar één oplossing?

a) Bereken $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^3$ en $\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^3$.
b) Welke drie oplossingen heeft de vergelijking $x^3 = 1$?
c) Welke drie oplossingen heeft de vergelijking $x^3 = a$?
d) Voor welke a heeft de vergelijking $x^3 = a$ geen drie oplossingen?

De andere hogeregraadsvergelijkingen gaan we voor nu verder niet op in. Je weet nu een beetje hoe je met complexe getallen kunt werken. Wanneer je terug gaat naar de wiskunde B lessen, zul je echter altijd binnen de reële getallen werken en zijn negatieve wortels dus niet toegestaan. Om het af te leren hebben we nog één mooie derdegraadsvergelijking waarin je de complexe getallen heel goed kunt gebruiken.

Opgave 22

Tip: Kijk hiervoor terug naar opgave 8.

Gegeven is de vergelijking $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$.

a) Schrijf de vergelijking in de vorm $y^3 + py + q = 0$.
b) Vind een reële oplossing van de in a gevonden vergelijking met behulp van de formule van Cardano. Maak hiervoor gebruik van $(1+i)^3$ en $(1-i)^3$.
c) Vind exact alle oplossingen van de vergelijking die je in a hebt gevonden.
d) Vind exact alle oplossingen van de vergelijking $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$. Controleer de gevonden oplossingen met behulp van de grafische rekenmachine.

Tip: Gebruik hiervoor de factorstelling uit les 1 (bij opgave 9).

Bijlage 11: Tweede versie lessenserie

De tweede versie van het ontwerp van de lessenserie is te vinden op de volgende bladzijden.

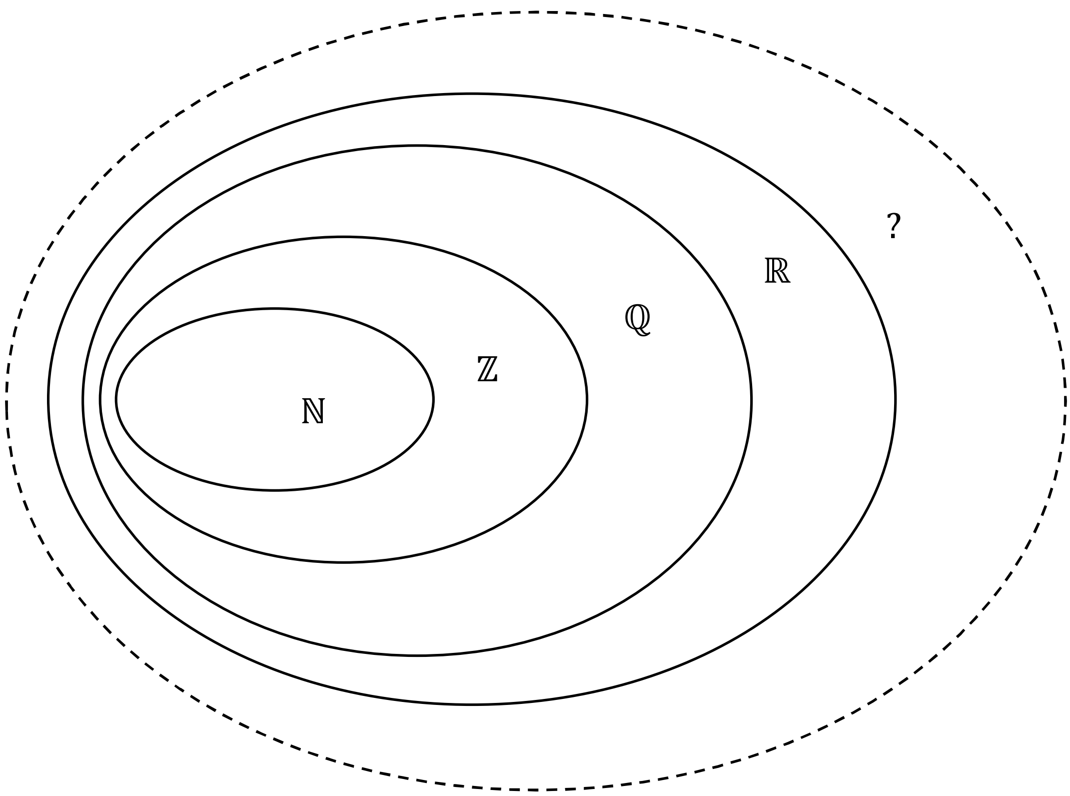
Het oplossen van derdegraadsvergelijkingen

En de introductie van een nieuwe getallenverzameling

Een lessenserie voor VWO Wiskunde D

Introductie

Tijdens je middelbareschooltijd heb je bij wiskunde al veel verschillende soorten vergelijkingen voorbij zien komen. In de onderbouw ben je begonnen met het oplossen van lineaire vergelijkingen van de vorm $ax + b = 0$ en vervolgens heb je kwadratische vergelijkingen van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ voorbij zien komen. Toch worden er bijna nooit vergelijkingen met hogere machten laten zien. In deze drie lessen ga we kijken hoe je derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kunt oplossen. Je zult zien dat hier wat meer bij komt kijken dan bij kwadratische vergelijkingen. In de laatste les gaan we hiervoor zelfs een nieuwe getallenverzameling introduceren. Dat lijkt misschien een beetje gek, maar tijdens je wiskunde carrière is dit eigenlijk al heel vaak gebeurd. Je begon ooit op de basisschool met het tellen van de natuurlijke getallen ($\mathbb{N} = 0, 1, 2, \dots$). Deze kunnen vervolgens uitgebreid worden met negatieve getallen tot de gehele getallen ($\mathbb{Z} = \dots, -1, 0, 1, \dots$). Dankzij het delen kwamen hier ook breuken bij en zo kregen we de rationele getallen ($\mathbb{Q} = \frac{a}{b}$ met $a, b \in \mathbb{Z}$). Vervolgens hebben we naar de wortels gekeken die niet meer als breuken te schrijven waren, maar ook de bijzondere getallen als π en e om zo de reële getallen ($\mathbb{R}$) te vormen. Aan het eind van deze lessenserie zal daar dus nog een getallenverzameling bij komen.



Les 1

Laten we niet op de zaken vooruit lopen en beginnen bij wat je al weet. Wanneer je een kwadratische vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ wilt oplossen kan dat op een aantal manieren. In de meest simpele gevallen geldt $b = 0$ of $c = 0$. Bij vergelijkingen van de vorm $ax^2 + bx = 0$ kan de x buiten haakjes gehaald worden en bij vergelijkingen van de vorm $ax^2 + c = 0$ kunnen we deze herleiden tot de vorm $x^2 = -\frac{c}{a}$ om zo de wortel te trekken (mits $-\frac{c}{a} \geq 0$).

Opgave 1

In kwadratische vergelijkingen van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ zien we nooit dat $a = 0$. Wat voor type vergelijking krijg je wanneer $a = 0$?

Opgave 2

Los exact op.

a) $9x^2 - 5x = 0$
b) $3x^2 - 48 = 0$

Wanneer de $a, b, c \neq 0$ zullen andere oplossingsmethoden gebruikt moeten worden. Als de getallen mooi uitkomen dan lukt het om de product-som methode te gebruiken. Als dat niet werkt kun je altijd nog kwadraat afsplitsen of de abc-formule gebruiken.

Opgave 3

Los de vergelijking $x^2 - 3x - 10 = 0$ op met behulp van…

a) … de product-som methode.
b) … kwadraat afsplitsen.
c) … de abc-formule.

Veel mensen gebruiken de abc-formule zonder zich af te vragen waarom deze eigenlijk werkt. Toch werd deze formule rond het jaar 825 al gebruikt in de Arabische wiskunde[3]. De abc-formule is af te leiden door middel van het kwadraat afsplitsen.

Opgave 4

a) Laat zien dat de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ te herleiden is tot de vorm $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$.
b) Los de vergelijking algebraïsch verder op.
c) Laat zien dat de oplossingen overeenkomen met de oplossingen die de abc-formule geeft.

Tip: Maak het getal voor de x^2 eerst gelijk aan 1.

Tip: Gebruik dat $\sqrt{\frac{-4ac+b^2}{4a^2}} = \frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{\sqrt{4a^2}}$.

Het oplossen van derdegraadsvergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ is lastiger dan het oplossen van

[3] De formule werd toen wel iets anders opgeschreven omdat de symbolen die wij in de wiskunde gebruiken nog niet allemaal bestonden. Als je meer over deze geschiedenis wilt weten zou je het boek Wortels van de Wiskunde kunnen lezen.

kwadratische vergelijkingen. Toch ken je al een aantal methodes voor simpelere vergelijkingen. Zelfs sommige hogeregraadsvergelijkingen kun je al oplossen.

Opgave 5

Los exact op.

a) $2x^3 + 54 = 0$
b) $18x^3 - 9x^2 = 0$
c) $7x^3 = 0$
d) $x^3 - 6x^2 - 7x = 0$
e) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

Tip: Alle mogelijkheden worden weergegeven in opgave 5.

Opgave 6

a) Welke variabelen (a, b, c of d) uit de algemene vorm van de derdegraadsvergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ moeten gelijk zijn aan 0 om de vergelijking te kunnen oplossen met de kennis die je al hebt? Er zijn meerdere opties mogelijk.
b) Welke variabele (a, b, c of d) kan niet gelijk zijn aan 0?

Voor derdegraadsvergelijkingen is er uiteindelijk een formule gevonden die net zoals de abc-formule een oplossing geeft. In de volgende les zullen we deze formule gaan afleiden. Deze formule geeft altijd maar 1 oplossing van een derdegraadsvergelijking. De eventuele andere oplossingen zullen dus op een andere manier gevonden moeten worden.

Tip: De drie vormen met een positief getal voor de x^3 heb je al geplot in a. De grafieken van f en g lijken erg op elkaar. Wat zou er gebeuren als er een negatief getal voor de x^3 staat?

Opgave 7

a) Plot de grafieken van $f(x) = 3x^3 + 2$, $g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7x - 5$ en $h(x) = x^3 - 2x + 3$ op je grafische rekenmachine.
b) Schets de verschillende vormen van derdegraadsvergelijkingen.
c) Hoeveel oplossingen zou een vergelijking van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kunnen hebben?

Tip: Bekijk hoeveel snijpunten de grafieken uit b kunnen hebben met de x-as als je ze omhoog en omlaag schuift.

De formule om derdegraadsvergelijkingen op te lossen, die bekend staat als de formule van Cardano komt van de methode die Girolamo Cardano (1501-1576) heeft gevonden om één van de oplossingen te krijgen van een vergelijking van de vorm $x^3 + cx + d = 0$. Hierbij zien we dat $a = 1$ en $b = 0$. Cardano had de formule eigenlijk gekregen van een andere wiskundige Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1557) met de belofte om deze geheim te houden. Tartaglia had de oplossingsmethode nog niet gepubliceerd omdat het in die tijd erg gebruikelijk was om wiskundewedstrijden aan te gaan met andere geleerden. Hoe langer je de oplossingsmethoden geheim kon houden, hoe groter de kans dat je deze wedstrijden won en hoe meer wedstrijden je kon winnen. Cardano heeft de oplossingsmethode na lang aandringen gekregen. Vervolgens heeft hij de methode zelf bewezen en uitgebreid naar het oplossen van alle derdegraadsvergelijkingen. Dit wilde hij graag publiceren om op die manier beroemd te worden.

Cardano *Tartaglia*

Aangezien hij erachter kwam dat niet alleen Tartaglia, maar ook een andere wiskundige, Scipione del Ferro (1465-1526) de derdegraadsvergelijkingen heeft leren oplossen, vond Cardano dat hij uiteindelijk de volledige oplossingsmethode wel kon publiceren. Deze was gelijk aan die van Tartaglia, maar Tartaglia kon hier niets tegen doen. Tartaglia was terecht boos, want de formule staat nu nog steeds bekend als de formule van Cardano.
De aanvulling van Cardano's onderzoek is dat hij er zelf achter kwam dat alle vergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ omgeschreven kunnen worden in de vorm $x^3 + px + q = 0$. Hierdoor konden alle derdegraadsvergelijkingen opgelost worden. Dit herschrijven van de vergelijking deed hij door de x te vervangen en op te lossen voor een andere variabele. Op dezelfde manier heb jij eerder voor vergelijkingen van de vorm $ax^4 + bx^2 + c = 0$ de variabele $u = x^2$ gesubstitueerd. Dit had je bijvoorbeeld nodig in opgave 5e.

Tip: Vul $x = y + s$ in in de vergelijking en maak gebruik van het feit dat $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Opgave 8

We gaan de x in $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ vervangen door $x = y + s$.

a) Voor welke waarde van s leidt dit tot de vergelijking van de vorm $ay^3 + my + n = 0$, waarbij de y^2 verdwenen is?
b) Hoe komen we van $ay^3 + my + n = 0$ tot de vorm $y^3 + py + q = 0$?

Wanneer we met de formule van Cardano eenmaal een oplossing gevonden hebben, willen we ook de eventuele overige 2 oplossingen van de derdegraadsvergelijking kunnen vinden. Hiervoor gebruiken we de zogenoemde factorstelling. De factorstelling zegt:

"Als $x = k$ een oplossing is van de vergelijking $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ dan is $x^3 + ax^2 + bx + c = (x - k)(x^2 + \ldots)$."
Voor kwadratische vergelijkingen gebruiken we een vergelijkbare vorm eigenlijk ook al voor de product-som methode.

Opgave 9

a) Zoek met behulp van de grafische rekenmachine de gehele oplossing van de vergelijking $x^3 - 15x - 4 = 0$ (dus geen kommagetal).
b) Gebruik nu de factorstelling om algebraïsch de overige twee oplossingen van de vergelijking $x^3 - 15x - 4 = 0$ te vinden.
c) Komen de gevonden oplossingen overeen met de oplossingen uit de grafische rekenmachine?
d) Vind op dezelfde manier de exacte oplossingen van $x^3 - 20x - 25 = 0$.

Tip: Weet je niet hoe je moet beginnen? Stel $x^3 - 15x - 4 = (x - k)(x^2 + ax + b)$ en maak een stelsel om a en b uit te rekenen.

Laten we even de tijd nemen om te bekijken wat we nu allemaal precies gedaan hebben. Deze les ben je begonnen met het oplossen van kwadratische vergelijkingen. We wisten al dat we deze altijd konden oplossen met behulp van de abc-formule en met behulp van het kwadraat afsplitsen hebben we deze formule ook zelf herleid. Vervolgens hebben we gekeken naar hogeregraadsvergelijkingen. Van een aantal derdegraadsvergelijkingen wisten we al hoe we ze moesten oplossen. Bovendien hebben een paar Italiaanse wiskundigen ontdekt hoe je vergelijkingen van de vorm $x^3 + px + q = 0$ moet oplossen. In de volgende les gaan we die formule die bekend staat als de formule van Cardano zelf afleiden. Dan weet je waar die vandaan komt, net zoals we dat vandaag voor de abc-formule hebben gezien. Het mooie is dat we er in deze les ook achter zijn gekomen dat we alle derdegraadsvergelijkingen in de vorm $x^3 + px + q = 0$ kunnen schrijven. Als we dus de formule van Cardano hebben afgeleid, dan zou je alle derdegraadsvergelijkingen moeten kunnen oplossen. De formule van Cardano geeft maar 1 oplossing van de derdegraads-vergelijking, maar ook daar hebben we deze les wat op gevonden. Als je namelijk eenmaal een oplossing gevonden hebt, kun je met behulp van de factorstelling de eventuele overige oplossingen vinden. Hoewel we volgende les dus klaar lijken te zijn, zit er bij sommige vergelijkingen nog wel een addertje onder het gras. Daar gaan we in de laatste les naar kijken.

Les 2

In de vorige les hebben we al gezien dat alle derdegraadsvergelijkingen om te schrijven zijn tot de vorm $y^3 + py + q = 0$. We gaan er in deze les vanuit dat $p, q \neq 0$, anders kun je de vergelijking al oplossen met de kennis die je al had. Verder weten we hoe we eventuele overige oplossingen kunnen vinden wanneer we een eerste oplossing hebben. In deze les gaan we kijken hoe we deze eerste oplossing algebraïsch kunnen vinden. Hiervoor gaan we de formule van Cardano afleiden. Een aantal stappen die hierin gebeuren lijken in het eerste opzicht misschien niet logisch, maar bedenk dat de abc-formule eerst ook als magie leek. Deze hebben we de vorige les ook zelf afgeleid. We introduceren nu eerst twee extra variabelen.

Tip: Maak opnieuw gebruik van het feit dat $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Opgave 10

Substitueer $y = u + v$ in de vergelijking $y^3 + py + q = 0$.
Laat zien dat dit gelijk is aan $u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0$.

De formule die we nu gevonden hebben kunnen we versimpelen door $(u + v)(3uv + p)$ gelijk te stellen aan 0. Hierdoor moeten we er wel voor zorgen dat de oplossingen uiteindelijk ook aan de vergelijking $(u + v)(3uv + p) = 0$ voldoen.

Tip: Wat gebeurt er in $y^3 + py + q = 0$ wanneer $u + v = 0$?

Opgave 11

a) Leg uit waarom $(u + v)(3uv + p) = 0$ niet kan leiden tot $u + v = 0$.
b) Welke extra vergelijking krijgen we dus hierdoor?
c) Welke versimpelde vergelijking krijgen we uit opgave 10 wanneer we $(u + v)(3uv + p)$ gelijk stellen aan 0?

We willen nu graag van een van de extra variabelen afkomen. Hiervoor gebruiken we dat we voor het versimpelen hebben gekozen dat $3uv + p = 0$. We kiezen ervoor om eerst van de variabele v af te komen. Op die manier hebben we weer 1 variabele in de vergelijking. Je zult zien dat er door het herschrijven een vorm is ontstaan waarvan we weten hoe we hem kunnen oplossen. Vervolgens kunnen we met behulp van de gekozen substituties de oplossingen van de oorspronkelijke vergelijking vinden.

Tip: Kijk terug naar hoe we deze variabelen introduceerden in opgave 10.

Opgave 12

a) Waarom maakt het niet uit welke variabele (u of v) je vrijmaakt in de vergelijking $3uv + p = 0$?
b) Maak v vrij.
c) Substitueer v terug in de vergelijking zoals gevonden in opgave 11c.
d) Vermenigvuldig de vergelijking met u^3. Wat valt je op?
e) Los de vergelijking verder op en laat zien dat
$u^3 = \frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2} \vee u^3 = \frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$.
f) Laat zien dat de waarden van u^3 overeenkomen met

Tip: Gebruik de substitutie $t = u^3$.

$u^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \vee u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$

g) Gebruik nu $u^3 + v^3 + q = 0$ om v^3 te berekenen bij beide oplossingen.
h) Bepaal u en v en bereken y. Hoeveel mogelijke oplossingen voor y heb je nu gevonden?

We hebben nu de formule van Cardano gevonden. Voor vergelijkingen van de vorm $y^3 + py + q = 0$ geeft de formule van Cardano een oplossing door:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Opgave 13

We gaan nu exact de vergelijking $x^3 + 6x - 20 = 0$ oplossen. Hiervoor gebruiken we opnieuw de hele procedure.

a) Substitueer $x = u + v$ in de vergelijking.
b) Maak v vrij in de vergelijking $3uv + p = 0$ en substitueer dit opnieuw in de gevonden vergelijking.
c) Vermenigvuldig de vergelijking met u^3 en bepaal u^3.
d) Bepaal u en v bereken hiermee x.
e) Vul de gevonden oplossing in op je grafische rekenmachine. Waar zou deze oplossing aan gelijk moeten zijn?

Blijkbaar komen sommige ingewikkeld uitziende oplossingen dus eigenlijk overeen met een stuk simpeler uitziende getallen. Dit willen we ook algebraïsch kunnen laten zien. Hiervoor willen we de derdemachtswortel van $10 + \sqrt{108}$ en $10 - \sqrt{108}$ berekenen.

Tip: Maak opnieuw gebruik van het feit dat $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Opgave 14

a) Bereken exact $\left(1 + \sqrt{3}\right)^3$.
b) Laat zien dat het antwoord dat je gevonden hebt in opgave 14a gelijk moet zijn aan $10 + \sqrt{108}$. Bereken hiermee $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}$.
c) Gebruik nu $\left(1 - \sqrt{3}\right)^3$ om algebraïsch $\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$ te berekenen.
d) Bereken met b en c algebraïsch $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$.

Op deze manier kunnen we dus alsnog algebraïsch laten zien dat sommige ingewikkeld uitziende oplossingen gelijk zijn aan een stuk simpeler uitziende getallen[4].
We hebben deze les dus eerst de formule van Cardano afgeleid en vervolgens gezien dat sommige ingewikkeld uitziende oplossingen overeenkomen met simpelere getallen. Dit laatste gaan we de volgende les nodig hebben. Voor het

[4] Het vinden van de getallen als $1 + \sqrt{3}$ om de derdemachtswortel te nemen hoef je niet zelf te kunnen. Als je hier meer over wilt weten kun je bij de docent terecht. Hiervoor gebruiken we wel de simpeler uitziende oplossing al.

laatste voorbeeld dat je in opgave 9 heb je gebruikt zul je de volgende les namelijk zien dat de formule van Cardano tot problemen zal leiden. Hier kunnen we vanaf komen door de nieuwe getallenverzameling te introduceren zoals we in de inleiding al beloofd hadden.

Les 3

Zoals we in de vorige les al aangekondigd hadden gaan we nu naar het voorbeeld kijken van opgave 9.

Opgave 15

a) Welke oplossingen van de vergelijking $x^3 - 15x - 4 = 0$ heb je gevonden in opgave 9?
b) Bereken met de formule van Cardano de oplossingen van $x^3 - 15x - 4 = 0$. Wat valt je op?

De formule van Cardano leidt nu duidelijk tot geen oplossingen, want we hebben met de wortel van een negatief getal te maken. In opgave 9 hebben we echter gezien dat er drie mogelijke oplossingen zijn voor deze vergelijking. Daardoor moet de formule van Cardano wel een oplossing geven. We gaan daarom proberen op dezelfde manier als aan het eind van de vorige les via $a + \sqrt{-b}$ op een oplossing te komen. Hiervoor zullen we dus met negatieve wortels moeten gaan werken. Rafael Bombelli (1526-1572), ook weer een Italiaanse wiskundige, deed dit voor het eerst. Hij gebruikte negatieve wortels door te zeggen dat net zoals dat $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ ook moest gelden $\left(\sqrt{-3}\right)^2 = -3$.

Opgave 16

Ga er voor nu even vanuit dat je wel met negatieve wortels kunt werken en bereken $\left(\sqrt{-b}\right)^2$.

Het rekenen met negatieve wortels is mogelijk en in sommige gevallen zelfs noodzakelijk. Dit klinkt misschien een beetje gek, maar aan het begin van de middelbare school had je waarschijnlijk ook niet bedacht dat je met wortels getallen kon werken. Zoals we in de inleiding al verteld hebben zijn de getallenverzamelingen door de jaren heen steeds iets verder uitgebreid en negatieve wortels zijn hierin de volgende stap. Deze getallen zijn ontstaan om derdegraadsvergelijkingen te kunnen oplossen. We noemen deze negatieve wortels onderdeel van de *complexe getallen*.

Opgave 17

Bereken de volgende getallen en herleid zo ver mogelijk.

a) $\sqrt{3} + \sqrt{3}$
b) $\sqrt{-5} + \sqrt{-5}$
c) $\sqrt{9}$
d) $\sqrt{-16}$
e) $\sqrt{1} \cdot \sqrt{3}$
f) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{-7}$
g) $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}$

Deze laatste opgave leidt nu tot een probleem. Als we de rekenregels die we voor wortels kennen volgen leidt g tot $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{-2 \cdot -2} = \sqrt{4} = 2$. We hebben hiervoor echter al gezien dat $\left(\sqrt{-b}\right)^2 = -b$ en $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \left(\sqrt{-2}\right)^2 = -2$. Blijkbaar

gaat er dus iets mis met onze rekenregels wanneer we met deze negatieve wortels gaan rekenen.
Aangezien we $\sqrt{-1}$ tot nu toe nog niet kenden, gaan we hier niet zomaar mee rekenen, maar introduceren we hier een nieuw symbool voor: $\sqrt{-1} = i$. Hierbij spreken we af dat $i^2 = -1$. We kunnen andere negatieve wortels nu ook schrijven met behulp van i. Zo krijgen we $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$. Hierdoor kunnen we $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}$ berekenen als $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{2}i \cdot \sqrt{2}i = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot i^2 = 2 \cdot -1 = -2$. Verder zien we dat er naast i nog één ander getal is waarvan het kwadraat gelijk is aan -1. We weten namelijk dat ook $\left(-\sqrt{-1}\right)^2 = (-i)^2 = - - i^2 = -1$.
We gaan van nu af aan negatieve wortels altijd terugschrijven naar een vorm met i. Hiervoor hebben we ook getallen als $2i$ en $3 + i$ nodig. Daardoor kunnen we alle complexe getallen schrijven in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$. Een van de betekenissen van complex is samengesteld en aangezien we deze getallen uit twee gedeelten (a en bi) kunnen samenstellen hebben we deze getallenverzameling de complexe getallen genoemd. Alle getallen die we al kenden vallen hier dus ook onder, want we kunnen een complex getal zo kiezen dat $b = 0$. Daarmee breiden we de getallen die we kennen dus nog verder uit. De getallenverzameling van de complexe getallen schrijven we ook wel op met het symbool $\mathbb{C}$. Dit zou dus op de plek van het vraagteken kunnen komen in de afbeelding van de inleiding.

Opgave 18

Bereken de getallen en herleid zo ver mogelijk. Schrijf ze in de vorm $a + bi$.

a) $\sqrt{-5} + \sqrt{-5}$
b) $\sqrt{-16}$
c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{-7}$
d) $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$
e) $3 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{-20}$
f) $(2 + \sqrt{-3})(5 - \sqrt{-12})$
g) $(c + di)^2$

Nu we een beetje weten hoe we met complexe getallen kunnen rekenen gaan we terug naar de derdegraadsvergelijking waar we in opgave 15 mee bezig waren. We willen laten zien dat $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ gelijk is aan een reëel getal. We kunnen dit niet op de rekenmachine uitproberen, aangezien de negatieve wortels een error zullen geven, maar we kunnen de grafiek wel plotten en op die manier de nulpunten vinden. Vervolgens kunnen we dit algebraïsch proberen te laten zien door $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ en $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ te berekenen.

Tip: Maak opnieuw gebruik van het feit dat $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Opgave 19

a) Laat zien dat $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ geschreven kan worden als $\sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$.
b) Gebruik $(2 + i)^3$ om $\sqrt[3]{2 + 11i}$ te berekenen.
c) Gebruik nu $(2 - i)^3$ om $\sqrt[3]{2 - 11i}$ te berekenen.
d) Bereken met b en c algebraïsch $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

e) Controleer je oplossing met behulp van de grafiek op je grafische rekenmachine. Hoe zou je de overige oplossingen exact kunnen berekenen?

Tip: Je hebt dit al gedaan in opgave 9.

Het is nu duidelijk waar complexe getallen handig voor zijn.
Dankzij het rekenen met complexe getallen kunnen we in specifieke gevallen reële oplossingen vinden. Na het ontstaan van de complexe getallen is er veel onderzoek gedaan naar de complexe getallen zelf. Hier zul je in je eigen lesmethode later nog uitgebreid op in gaan. Wanneer we complexe getallen toestaan kunnen we van alle vergelijkingen namelijk minstens 1 oplossing vinden. Dit zul je herkennen in de kwadratische vergelijkingen die voorheen dus geen oplossingen leken te hebben.

Opgave 20

Bereken de complexe oplossingen van $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Andere hogeregraadsvergelijkingen die in de eerste oogopslag nergens toe lijken te leiden, omdat de grafiek bijvoorbeeld niet door de x-as gaat, zullen dus ook altijd complexe oplossingen hebben. Hoewel we van een aantal vergelijkingen de reële oplossing al kennen, vinden we binnen de complexe getallen nog veel meer mogelijkheden. Zo weten we al dat een derdegraadsvergelijking 1, 2 of 3 oplossingen kan hebben. Binnen de complexe getallen heeft een vergelijking van de vorm $x^3 = a$ (bijna altijd) 3 oplossingen. Als we de oplossingen voor $x^3 = 1$ hebben gevonden, hoeven we deze alleen maar te vermenigvuldigen met $\sqrt[3]{a}$ om de oplossingen van $x^3 = a$ te krijgen.

Opgave 21

Tip: Wanneer heeft $x^2 = a$ maar één oplossing?

a) Bereken $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^3$ en $\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^3$.
b) Welke (complexe) oplossingen heeft de vergelijking $x^3 = 1$?
c) Welke (complexe) oplossingen heeft de vergelijking $x^3 = a$?
d) Voor welke a heeft de vergelijking $x^3 = a$ geen drie oplossingen?

De andere hogeregraadsvergelijkingen gaan we voor nu verder niet op in. Je weet nu een beetje hoe je met complexe getallen kunt werken. Wanneer je terug gaat naar de wiskunde B lessen, zul je echter altijd binnen de reële getallen werken en zijn negatieve wortels dus niet toegestaan. Om het af te leren hebben we nog één mooie derdegraadsvergelijking waarin je de complexe getallen heel goed kunt gebruiken.

Tip: Kijk hiervoor terug naar opgave 8.

Opgave 22

Gegeven is de vergelijking $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$.

a) Schrijf de vergelijking in de vorm $y^3 + py + q = 0$.
b) Vind een reële oplossing van de in a gevonden vergelijking met behulp van de formule van Cardano. Maak hiervoor gebruik van $(1+i)^3$ en $(1-i)^3$.

c) Vind exact alle oplossingen van de vergelijking die je in a hebt gevonden.
d) Vind exact alle oplossingen van de vergelijking $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$. Controleer de gevonden oplossingen met behulp van de grafische rekenmachine.

Tip: Gebruik hiervoor de factorstelling uit les 1 (bij opgave 9).

In de hele lessenserie hebben we dus eerst gezien hoe we alle derdegraadsvergelijkingen kunnen omschrijven in de vorm $x^3 + px + q = 0$. In les 2 hebben we de formule van Cardano afgeleid die we kunnen gebruiken om een oplossing te vinden van vergelijkingen van de vorm $x^3 + px + q = 0$. Wanneer hier negatieve wortels in ontstaan, lijken deze binnen de reële getallen niet tot oplossingen te leiden. In deze laatste les hebben we echter gezien, dat we hier als nieuwe getallenverzameling, de complexe getallen, wel mee kunnen werken. Daardoor kunnen we via de complexe getallen alsnog een reële oplossing vinden. Vervolgens zullen we nog wel de overige oplossingen van de derdegraads-vergelijking moeten vinden. Hiervoor kunnen we de factorstelling gebruiken die we ook in les 1 al hebben gezien. Daarmee kunnen we alle derdegraads-vergelijkingen dus volledig oplossen. Hier sluiten we dan ook deze lessenserie mee af.

Bijlage 12: Antwoordmodel lessenserie

Het antwoordmodel behorend bij het ontwerp van de lessenserie is te vinden op de volgende bladzijden. Hierbij is ook een puntenverdeling gegeven, zoals gebruikt voor het testen van de lessenserie.

Het oplossen van derdegraadsvergelijkingen

En de introductie van een nieuwe getallenverzameling

Antwoordmodel

Les 1

Opgave 1

Wanneer $a = 0$ krijgen we de vergelijking $bx + c = 0$. 1p
Dit is een lineaire vergelijking.

Opgave 2

a) $9x^2 - 5x = 0$
$x(9x - 5) = 0$ 1p
$x = 0 \vee 9x - 5 = 0$
$x = 0 \vee 9x = 5$
$x = 0 \vee x = \frac{5}{9}$ 1p

b) $3x^2 - 48 = 0$
$3x^2 = 48$
$x^2 = 16$ 1p
$x = 4 \vee x = -4$ 1p

Opgave 3

a) $x^2 - 3x - 10 = 0$
$(x - 5)(x + 2) = 0$ 1p
$x - 5 = 0 \vee x + 2 = 0$ 1p
$x = 5 \vee x = -2$ 1p

b) $x^2 - 3x - 10 = 0$
$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 10 = 0$
$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$ 1p
$x - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \vee x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$ 1p
$x = \frac{10}{2} \vee x = -\frac{4}{2}$
$x = 5 \vee x = -2$ 1p

c) $x^2 - 3x - 10 = 0$
$D = (-3)^2 - 4 \cdot -10 = 49$ 1p
$x = \frac{--3-\sqrt{49}}{2} \vee x = \frac{--3+\sqrt{49}}{2}$ 1p
$x = \frac{3-7}{2} \vee x = \frac{3+7}{2}$
$x = -2 \vee x = 5$ 1p

Opgave 4

a) $ax^2 + bx + c = 0$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ 1p
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$ 1p
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$

b) $x + \frac{b}{2a} = \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}} \vee x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$ 1p
$x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}} \vee x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$ 1p

c) $x=-\frac{b}{2a}+\sqrt{-\frac{4a}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}} \vee x=-\frac{b}{2a}-\sqrt{-\frac{4ac}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}}$

$x=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{-4ac+b^2}{4a^2}} \vee x=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{-4ac+\ ^2}{4a^2}}$ 1p

$x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{-4ac+\ ^2}}{\sqrt{4a^2}} \vee x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{\sqrt{4a^2}}$

$x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{2a} \vee x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{2a}$ 1p

$x=\frac{-b+\sqrt{-4ac+b^2}}{2a} \vee x=\frac{-b-\sqrt{-4ac+b^2}}{2a}$ 1p

Opgave 5

a) $2x^3+54=0$

$2x^3=-54$

$x^3=27$ 1p

$x=3$ 1p

b) $18x^3-9x^2=0$

$x^2(18x-9)=0$ 1p

$x^2=0 \vee 18x-9=0$ 1p

$x=0 \vee 18x=9$

$x=0 \vee x=\frac{1}{2}$ 1p

c) $7x^3=0$

$x^3=0$ 1p

$x=0$ 1p

d) $x^3-6x^2-7x=0$

$x(x^2-6x-7)=0$ 1p

$x(x-7)(x+1)=0$ 1p

$x=0 \vee x-7=0 \vee x+1=0$ 1p

$x=0 \vee x=7 \vee x=-1$ 1p

e) $x^4-5x^2+6=0$

Stel $u=x^2$ 1p

$u^2-5u+6=0$

$(u-3)(u-2)=0$ 1p

$u=3 \vee u=2$ 1p

$x^2=3 \vee x^2=2$ 1p

$x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3} \vee x=\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2}$ 1p

Opgave 6

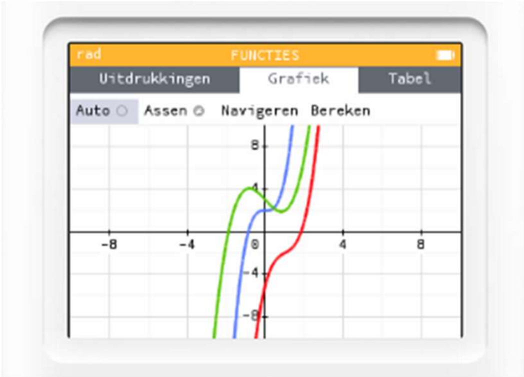
a) De verschillende opties zijn:

- b en c zijn gelijk aan 0. $\frac{1}{2}$p
- c en d zijn gelijk aan 0. $\frac{1}{2}$p
- b, c en d zijn gelijk aan 0. $\frac{1}{2}$p
- d is gelijk aan 0. $\frac{1}{2}$p

b) Wanneer $a=0$ krijgen we een kwadratische vergelijking, dus a kan niet gelijk zijn aan 0. 1p

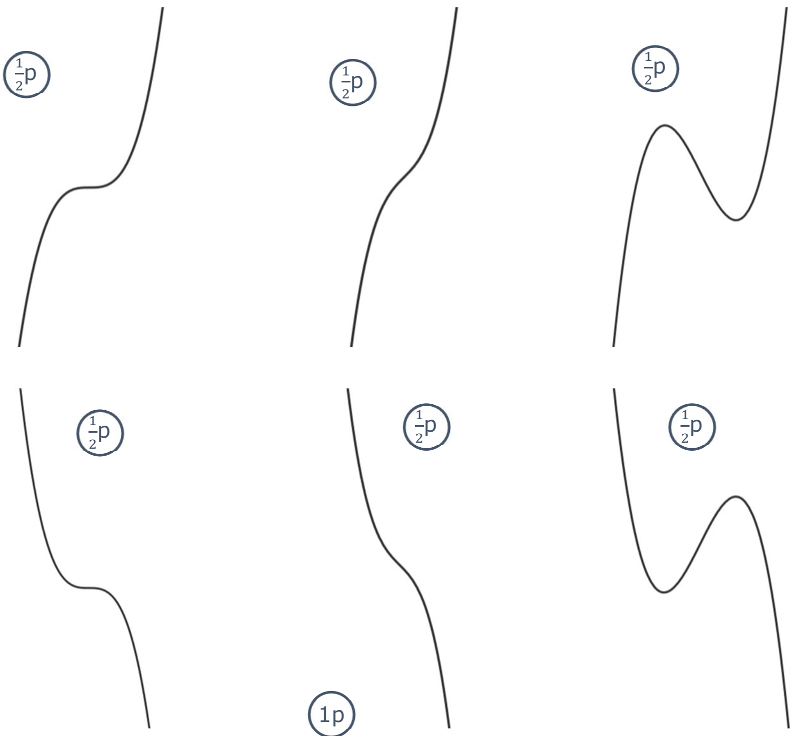
Opgave 7

a)



2p

b)



c) Elke grafiek heeft minstens 1 snijpunt met de x-as en de grafieken met 2 toppen kunnen ook 2 of 3 snijpunten hebben met de x-as afhankelijk van hoever omhoog of omlaag ze geschoven zijn. 1p

Opgave 8

a) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$a(y+s)^3 + b(y+s)^2 + c(y+s) + d = 0$ 1p

$a(y^3 + 3y^2s + 3ys^2 + s^3) + b(y^2 + 2ys + s^2) + c(y+s) + d = 0$

$ay^3 + 3ay^2s + 3ays^2 + as^3 + by^2 + 2bys + bs^2 + cy + cs + d = 0$

$ay^3 + 3ay^2s + by^2 + 3ays^2 + 2bys + cy + as^3 + bs^2 + cs + d = 0$

$ay^3 + (3as + b)y^2 + 3ays^2 + 2bys + cy + as^3 + bs^2 + cs + d = 0$ 1p

We willen de vorm $ay^3 + my + n = 0$, dus $3as + b = 0$ 1p

$3as = -b$

$s = -\frac{b}{3a}$ 1p

b) Door de gehele vergelijking te delen door a. 1p

Opgave 9

a) Voer in $y_1 = x^3 - 15x - 4$.
Optie root geeft $x = -3{,}73 \ldots \vee x = -0{,}26 \ldots \vee x = 4$.
De gehele oplossing is dus $x = 4$. 1p

b) Dankzij de factorstelling krijgen we $(x^3 - 15x - 4) = (x - 4)(x^2 + \cdots)$.
We kunnen stellen dat $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + ax + b)$
Dit geeft $x^3 - 15x - 4 = x^3 + ax^2 + bx - 4x^2 - 4ax - 4b$ 1p
$-ax^2 + 4x^2 - 15x + 4ax - bx - 4 + 4b = 0$
$(-a + 4)x^2 + (-15 + 4a - b)x - 4 + 4b = 0$
$\begin{cases} -a + 4 = 0 \\ -15 + 4a - b = 0 \\ -4 + 4b = 0 \end{cases}$ 1p
De eerste vergelijking geeft $a = 4$. De laatste vergelijking geeft $b = 1$.
De tweede vergelijking voldoet ook.
We krijgen dus $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$
Aangezien we begonnen met $x^3 - 15x - 4 = 0$ krijgen we uit de factorstelling $(x - 4)(x^2 + 4x + 1) = 0$. 1p
We hadden al gevonden $x = 4$ dus voor de overige oplossingen geldt
$x^2 + 4x + 1 = 0$ 1p
$D = 4^2 - 4 = 12$
$x = \frac{-4-\sqrt{12}}{2} \vee x = \frac{-4+\sqrt{12}}{2}$
$x = \frac{-4-2\sqrt{3}}{2} \vee x = \frac{-4+2\sqrt{3}}{2}$
$x = -2 - \sqrt{3} \vee x = -2 + \sqrt{3}$ 1p

c) Deze oplossingen komen overeen met de oplossingen uit de grafische rekenmachine. 1p

d) Voer in $y_1 = x^3 - 20x - 25$.
Optie root geeft $x = -3{,}61 \ldots \vee x = -1{,}38 \ldots \vee x = 5$.
De gehele oplossing is dus $x = 5$. 1p
Dankzij de factorstelling krijgen we $(x^3 - 15x - 4) = (x - 5)(x^2 + 5x + 5)$. 2p
Aangezien we begonnen met $x^3 - 20x - 25 = 0$ krijgen we uit de factorstelling $(x - 5)(x^2 + 5x + 5) = 0$. 1p
We hadden al gevonden $x = 5$ dus voor de overige oplossingen geldt
$x^2 + 5x + 5 = 0$ 1p
$D = 5^2 - 4 \cdot 5 = 5$
$x = \frac{-5-\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{-5+\sqrt{5}}{2}$
Deze oplossingen komen overeen met de oplossingen uit de grafische rekenmachine. 1p

Les 2

Opgave 10

$y^3 + py + q = 0$
$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$ 1p
$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0$
$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0$ 1p
$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv+p) + q = 0.$

Opgave 11

a) We hebben $u+v$ geintroduceerd door $y = u+v$ te substitueren. Wanneer $u+v=0$ krijgen we dus $y=0$. In de vergelijking 1p $y^3+py+q=0$ krijgen we dan $q=0$. In de aanname van deze les hebben we echter gezegd dat $q \neq 0$, dus $u+v \neq 0$. 1p
b) Aangezien $u+v \neq 0$ krijgen we $3uv+p=0$. 1p
c) Wanneer $(u+v)(3uv+p)=0$ krijgen we $u^3+v^3+q=0$. 1p

Opgave 12

a) We hebben u en v geïntroduceerd dankzij $y=u+v$ dus er zitten geen andere voorwaarden aan u dan er zitten aan v. 1p
b) $3uv + p = 0$
$3uv = -p$
$v = -\frac{p}{3u}$ 1p
c) $u^3 + v^3 + q = 0$
$u^3 + \left(-\frac{p}{3u}\right)^3 + q = 0$ 1p
$u^3 - \frac{p^3}{27\ ^3} + q = 0$ 1p
d) $u^3(u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q) = 0$
$u^6 - \frac{p^3}{27} + qu^3 = 0$
$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$ 1p
Dit lijkt op de vorm van een kwadratische vergelijking aangezien u^6 het kwadraat is van u^3. 1p
e) Stel $t = u^3$.
$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$ 1p
$D = q^2 - 4 \cdot -\frac{p^3}{27} = q^2 + \frac{4p^3}{27}$
$t = \frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2} \vee t = \frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$ 1p
$u^3 = \frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2} \vee u^3 = \frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$ 1p
f) $u^3 = -\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2} \vee u^3 = -\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$
$u^3 = -\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{\sqrt{4}} \vee u^3 = -\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{\sqrt{4}}$ 1p

$u^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2+\frac{4p^3}{27}}{4}} \vee u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2+\frac{4p^3}{27}}{4}}$ 1p

$u^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \vee u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ 1p

g) $u^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ geeft $-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + v^3 + q = 0$.

$v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ 1p

$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ geeft $-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + v^3 + q = 0$.

$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ 1p

h) In het eerste geval krijgen we $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ en $v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.

Hieruit volgt $y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$. 1p

In het tweede geval krijgen we $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ en $v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$. 1p

Nu krijgen we $y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$. We hebben twee keer dezelfde oplossing voor y, dus we hebben één oplossing gevonden. 1p

Opgave 13

a) $x^3 + 6x - 20 = 0$

$(u+v)^3 + 6(u+v) - 20 = 0$ 1p

$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + 6u + 6v - 20 = 0$ 1p

b) $3uv + p = 0$

$p = 6$, dus $3uv + 6 = 0$

$3uv = -6$

$v = -\frac{6}{3u} = -\frac{2}{u}$ 1p

$u^3 + 3u^2 \cdot -\frac{2}{u} + 3u\left(-\frac{2}{u}\right)^2 + \left(-\frac{2}{u}\right)^3 + 6u + 6 \cdot -\frac{2}{u} - 20 = 0$ 1p

$u^3 - 6u + \frac{12}{u} - \frac{8}{u^3} + 6u - \frac{12}{u} - 20 = 0$

$u^3 - \frac{8}{u^3} - 20 = 0$ 1p

c) $u^3\left(u^3 - \frac{8}{u^3} - 20\right) = 0$

$u^6 - 8 - 20u^3 = 0$

$u^6 - 20u^3 - 8 = 0$ 1p

Stel $t = u^3$

$t^2 - 20t - 8 = 0$ 1p

$D = (-20)^2 - 4 \cdot -8 = 432$

$t = \frac{20+\sqrt{432}}{2} \vee t = \frac{20-\sqrt{432}}{2}$

$t = 10 + \sqrt{108} \vee t = 10 - \sqrt{108}$ 1p

$u^3 = 10 + \sqrt{108} \vee u^3 = 10 - \sqrt{108}$ 1p

d) $u = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}$ en $v = \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$ 1p

$x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$ 1p

e) $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} = 2$ 1p

Opgave 14

a) $\left(1 + \sqrt{3}\right)^3 =$

$1 + 3\sqrt{3} + 3 \cdot 3 + 3\sqrt{3} = 10 + 6\sqrt{3}$ 1p

b) $10 + 6\sqrt{3} =$

$10 + \sqrt{36} \cdot \sqrt{3} = 10 + \sqrt{108}$ 1p

$\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} =$

$\sqrt[3]{\left(1 + \sqrt{3}\right)^3} = 1 + \sqrt{3}$ 1p

c) $\left(1 - \sqrt{3}\right)^3 =$

$1 - 3\sqrt{3} + 3 \cdot 3 - 3\sqrt{3} =$

$10 - 6\sqrt{3} =$ 1p

$10 - \sqrt{36} \cdot \sqrt{3} = 10 - \sqrt{108}$ 1p

$\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} =$

$\sqrt[3]{\left(1 - \sqrt{3}\right)^3} = 1 - \sqrt{3}$ 1p

d) $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} =$

$1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 2$ 1p

Les 3

Opgave 15

a) $x = 4 \vee x = -2 - \sqrt{3} \vee x = -2 + \sqrt{3}$ 1p

b) $y = \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}}$

$y = \sqrt[3]{2 + \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{-3375}{27}}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{-337}{27}}}$

$y = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}}$

$y = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ 1p

De formule van Cardano geeft geen oplossingen van de vergelijking. 1p

Opgave 16

$\left(\sqrt{-b}\right)^2 = -b$ 1p

Opgave 17

a) $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ 1p

b) $\sqrt{-5} + \sqrt{-5} = 2\sqrt{-5}$ 1p

c) $\sqrt{9} = 3$ 1p

d) $\sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4\sqrt{-1}$ 1p

e) $\sqrt{1} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$ 1p

f) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{-7} = \sqrt{3 \cdot -7} = \sqrt{-21}$ 1p

g) $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{-2 \cdot -2} = \sqrt{4} = 2$ 1p

Opgave 18

Bereken de getallen en herleid zo ver mogelijk. Schrijf ze in de vorm $a + bi$.

a) $\sqrt{-5} + \sqrt{-5} =$

$\sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} =$ 1p

$\sqrt{5}i + \sqrt{5}i = 2\sqrt{5}i$ 1p

b) $\sqrt{-16} =$

$\sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4i$ 2p

c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{-7} =$

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{-1} =$ 1p

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}i = \sqrt{21}i$ 1p

d) $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} =$

$i \cdot i =$ 1p

$i^2 = -1$ 1p

e) $3 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{-20} =$

$3 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{-1} =$ 1p

$3 + \sqrt{100}i = 3 + 10i$ 1p

f) $\left(2 + \sqrt{-3}\right)\left(5 - \sqrt{-12}\right) =$

$\left(2 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}\right)\left(5 - \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}\right) =$

$\left(2 + \sqrt{3}i\right)\left(5 - 2\sqrt{3}i\right) =$ 1p

$10 - 4\sqrt{3}i + 5\sqrt{3}i - \sqrt{36}i^2 =$
$10 + \sqrt{3}i - 6 \cdot -1 =$
$16 + \sqrt{3}i$ 1p

g) $(c + di)^2 =$
$c^2 + 2cdi + d^2i^2 =$ 1p
$c^2 + 2cdi + d^2 \cdot -1 = c^2 - d^2 + 2cdi$ 1p

Opgave 19

a) $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} =$
$\sqrt[3]{2 + \sqrt{121} \cdot \sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{121} \cdot \sqrt{-1}} = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}.$ 1p

b) $(2 + i)^3 =$
$2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot i + 3 \cdot 2i^2 + i^3 =$
$8 + 12i + 6 \cdot -1 + i^2 \cdot i =$
$8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$ 1p
$\sqrt[3]{2 + 11i} = \sqrt[3]{(2 + i)^3} = 2 + i$ 1p

c) $(2 - i)^3 =$
$2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot i + 3 \cdot 2i^2 - i^3 =$
$8 - 12i + 6 \cdot -1 - i^2 \cdot i =$
$8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$ 1p
$\sqrt[3]{2 - 11i} = \sqrt[3]{(2 - i)^3} = 2 - i$ 1p

d) $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} =$
$2 + i + 2 - i = 4$ 1p

e) Voer in $y_1 = x^3 - 15x - 4$.
Optie root geeft $x = -3{,}73 \ldots \vee x = -0{,}26 \ldots \vee x = 4$. 1p
De overige oplossingen zijn te berekenen met behulp van de factorstelling. 1p

Opgave 20

$x^2 - 2x + 2 = 0$
$D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4$
$x = \frac{2-\sqrt{-4}}{2} \vee x = \frac{2+\sqrt{-4}}{2}$ 1p
$x = \frac{2-\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}}{2} \vee x = \frac{2+\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}}{2}$
$x = \frac{2-\sqrt{4}i}{2} \vee x = \frac{2+\sqrt{4}i}{2}$ 1p
$x = 1 - 2i \vee x = 2 + i$ 1p

Opgave 21

a) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^3 =$
$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}i + 3 \cdot -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^3 =$
$-\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\sqrt{3}i - \frac{9}{8}i^2 + \frac{3}{8}\sqrt{3}i^3 =$
$-\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\sqrt{3}i + \frac{9}{8} - \frac{3}{8}\sqrt{3}i = 1$ 1p
$\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^3 =$
$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}i + 3 \cdot -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^3 =$

$-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}\sqrt{3}i-\frac{9}{8}i^2-\frac{3}{8}\sqrt{3}i^3=$
$-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}\sqrt{3}i+\frac{9}{8}+\frac{3}{8}\sqrt{3}i=1$ 1p

b) $x^3=1$ leidt tot $x=1 \vee x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i \vee x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i$ 1p

c) $x^3=a$ leidt tot $x=\sqrt[3]{a} \vee x=\sqrt[3]{a}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right) \vee x=\sqrt[3]{a}(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i)$ 1p

d) $x^3=0$ geeft enkel als oplossing $x=0$, dus voor $a=0$ heeft de vergelijking $x^3=a$ geen drie oplossingen. 1p

Opgave 22

a) We gaan substitueren $x=y-\frac{3}{3}=y-1$ om van het kwadraat af te komen. 1p
$(y-1)^3+3(y-1)^2-3(y-1)-1=0$ 1p
$y^3-3y^2+3y-1+3y^2-6y+3-3y+3-1=0$
$y^3-6y+4=0$ 1p

b) $(1+i)^3=$
$1+3i+3i^2+i^3=$
$1+3i-3-i=-2+2i$ 1p
$(1-i)^3=$
$1-3i+3i^2-i^3=$
$1-3i-3+i=-2-2i$ 1p
$$y=\sqrt[3]{-\frac{4}{2}+\sqrt{\frac{(4)^2}{4}+\frac{(-6)^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{4}{2}-\sqrt{\frac{(4)^2}{4}+\frac{(-6)^3}{27}}}$$
$$y=\sqrt[3]{-2+\sqrt{\frac{16}{4}+\frac{-216}{27}}}+\sqrt[3]{-2-\sqrt{\frac{16}{4}+\frac{-216}{27}}}$$
$y=\sqrt[3]{-2+\sqrt{4-8}}+\sqrt[3]{-2-\sqrt{4-8}}$
$y=\sqrt[3]{-2+\sqrt{-4}}+\sqrt[3]{-2-\sqrt{-4}}$
$y=\sqrt[3]{-2+2i}+\sqrt[3]{-2-2i}$ 1p
$y=\sqrt[3]{(1+i)^3}+\sqrt[3]{(1-i)^3}$
$y=1+i+1-i=2$ 1p

c) Dankzij de factorstelling weten we dat $y^3-6y+4=(y-2)(y^2+\ldots)$
Hierdoor krijgen we $y^3-6y+4=(y-2)(y^2+2y-2)$ 2p
De vergelijking leidt tot $(y-2)(y^2+2y-2)=0$
Dit geeft $y-2=0 \vee y^2+2y-2=0$ 1p
$y=2 \vee D=(2)^2-4\cdot -2=12$
$y=2 \vee y=\frac{-2-\sqrt{12}}{2} \vee y=\frac{-2+\sqrt{12}}{2}$
$y=2 \vee y=-1-\sqrt{3} \vee y=-1+\sqrt{3}$ 1p

d) In a hadden we $x=y-1$ gekozen als substitutie.
De oplossingen van de vergelijking $x^3+3x^2-3x-1=0$ zijn dus
$x=1 \vee x=-2-\sqrt{3} \vee x=-2+\sqrt{3}$ 1p
Voer in $y_1=x^3+3x^2-3x-1$
Optie root geeft $x=-3{,}73\ldots \vee x=-0{,}26\ldots \vee x=1$ dus dit komt overeen met onze exact gevonden oplossingen. 1p

Bijlage 13: Vragenoverzicht praktijktest

Per gegeven les wordt besproken welke vragen er zijn gesteld door de leerlingen. Verder worden eventuele bijzonderheden van de lessen besproken wanneer deze invloed hebben gehad op de tijdsplanning.

Maandag 5 juni

Aangezien alle vier de leerlingen oorspronkelijk wel verwacht werden tijdens deze les en er eerst nog een korte uitleg van het idee van de lessenserie gegeven werd, begonnen de leerlingen iets later met het werken aan het materiaal. In Tabel 3 volgt een overzicht van de vragen die leerlingen in deze les hebben gesteld. De tijdsindicatie is na het beginnen van het werken aan het werkblad. Aangezien niet elke leerling meteen een vraag stelde wanneer hij vastliep, kan het zijn dat hierdoor tijd verloren is gegaan.

Leerling	Opgave	Tijdsindicatie	Probleem
2 (1)	3b	8 min	De leerling weet niet meer hoe kwadraat-afsplitsen werkt. Leerling 1 luistert mee naar de uitleg
1	4b	18 min	De leerling komt niet uit deze opgave. Hij heeft $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b^2}{4a^2}$ opgeschreven en zit daardoor vast.
1	7	38 min	Het is het eind van de les en de leerling is tot deze opgave gekomen.
2	8a	38 min	Het is het eind van de les en de leerling is tot deze opgave gekomen.

Tabel 3: Vragen van leerlingen tijdens de les.

Dinsdag 6 juni

De leerlingen hebben thuis geen tijd gehad om aan de slag te gaan en gaan meteen verder waar ze gebleven waren. In Tabel 4 volgt een overzicht van de vragen die leerlingen in deze les hebben gesteld.

Leerling	Opgave	Tijdsindicatie	Probleem
1	8a	14 min	Beide leerlingen lopen komen niet verder met deze opgave. Leerling 1 heeft geen idee wat hij ermee aan moet.
2	8a	14 min	Leerling 2 is getallen gaan uitproberen en komt daardoor vast te zitten. Hij heeft niet door dat het antwoord in letters uitgedrukt zou moeten worden.
2	9b	27 min	De leerling heeft naar de tip gekeken, maar weet niet waarvan hij een stelsel moet maken.
1 en 2	9b	39 min	Beide leerlingen lopen nog steeds vast in opgave 9b.
1	9d	47 min	Het is het eind van de les en de leerling is tot deze opgave gekomen.

2	9d	47 min	Het is het eind van de les en de leerling is tot deze opgave gekomen.

Tabel 4: Vragen van leerlingen tijdens de les.

Woensdag 7 juni

Op woensdag waren voor het eerst alle vier de leerlingen aanwezig. Hierdoor gaan vanaf nu de opdrachten iets meer door elkaar lopen, aangezien leerling 1 en 2 met les 2 aan de slag gaan en leerling 3 en 4 nog moeten beginnen met het materiaal. Bovendien is leerling 1 zelfs nog thuis bezig geweest. De tijdsindicatie in deze les van leerling 4 klopt bovendien niet helemaal, aangezien hij ook tijd besteed aan het helpen van leerling 3. Daardoor lijkt hij langer over de lessenserie te doen dan daadwerkelijk het geval is als hij er individueel aan zou werken. In Tabel 5 volgt een overzicht van de vragen die leerlingen in deze les hebben gesteld.

Leerling	Opgave	Tijdsindicatie	Probleem
1	12c	18 min	De leerling loopt vast in de opgave. Dit komt doordat hij niet tot de juiste vergelijking in 11c is gekomen.
2	12e	19 min	Leerling 2 snapt niet hoe hij de substitutie toe kan passen. Hij heeft ook 11c en daarmee 12c fout gedaan en komt daardoor niet goed uit.
3 en 4	3b	20 min	Beide leerlingen weten niet hoe ze moeten kwadraat-afsplitsen. Leerling 4 probeert dit zelfs al op te zoeken op internet.
3 en 4	4	27 min	Beide leerlingen lopen nog steeds vast door het kwadraat-afsplitsen, maar nu in opgave 4. Leerling 4 is ondertussen wel al verder gaan werken en zit inmiddels in opgave 7, hoewel deze opgave nog open staat.
1	12e	32 min	De leerling komt niet op het getal 27 zoals in de opgave staat, doordat hij de derdemacht in 12c niet goed heeft uitgewerkt.
1	13c	45 min	Het is het eind van de les en de leerling is tot deze opgave gekomen.
2	12h	45 min	Het is het eind van de les en de leerling is tot deze opgave gekomen.
3	5	45 min	Het is het eind van de les en de leerling is tot deze opgave gekomen.
4	7	45 min	Het is het eind van de les en de leerling is tot deze opgave gekomen.

Tabel 5: Vragen van leerlingen tijdens de les.

Maandag 12 juni

Tijdens deze les duurde de opstart langer, omdat het lege lokaal waar we oorspronkelijk zouden zitten toch bezet bleek te zijn. Bovendien stonden de lessen van deze week niet meer in het rooster, waardoor leerling 3 niet doorhad dat de les begonnen was en hij te laat kwam. De tijdsindicatie voor leerling 3 is dan ook vanaf het moment dat hij aanwezig was. In Tabel 6 volgt een overzicht van de vragen die leerlingen in deze les hebben gesteld.

Leerling	**Opgave**	**Tijdsindicatie**	**Probleem**
1	13d	4 min	De leerling loopt vast in de opgave. Dit komt doordat hij een fout heeft gemaakt in het uitwerken van de haakjes, want hij heeft $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})^{3}=\boldsymbol{u}^{3}+\boldsymbol{v}^{3}$ gedaan. (Hier stond ook voor het eerst niet de tip bij die bij andere derdemachten wel terug kwam.) Na hulp van de docent mist de leerling de $\mathbf{6}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})-\mathbf{20}$ in de vergelijking, waardoor hij hier langer in vast blijft zitten dan nodig was.
1	13d	13 min	De leerling had de $\boldsymbol{p}$ in de vergelijking laten staan en hier geen 6 voor ingevuld, waardoor hij in deze opgave vast blijft lopen. Dit was de docent bij de eerste keer vastlopen niet opgevallen, omdat de machten van $\boldsymbol{u}$ niet tot een kwadratische vergelijking konden leiden.
3	8a	11 min	De leerling heeft niet door dat het deel voor de $\boldsymbol{y}^{2}$ gelijk moet zijn aan 0 en loopt daarom vast.
3	8b	18 min	De leerling heeft niet door wat voor antwoord er van hem verwacht wordt. Nadat hij na een extra vraag zelf aangeeft dat hij moet delen door $\boldsymbol{a}$ vraagt hij "Maar hoe verandert dan de $\boldsymbol{m}$ in een $\boldsymbol{p}$. Dat dit verder niet nodig is was hem niet duidelijk.
3	9b	23 min	De leerling heeft in de tip niet door dat hij van de $\boldsymbol{k}$ af kan komen door de factorstelling te gebruiken.
1	18	45 min	Het is het eind van de les en de leerling is tot deze opgave gekomen. Hij geeft wel aan opgave 13 en 14 opgegeven te hebben.
3	9b	31 min	Het is het eind van de les en de leerling is tot deze opgave gekomen.

Tabel 6: Vragen van leerlingen tijdens de les.

Woensdag 14 juni

Leerling 2 heeft inmiddels zelf les 2 thuis afgemaakt. Leerling 4 heeft er thuis wel naar gekeken, maar geeft aan meteen vast te zijn gelopen. Hij heeft niet via teams om hulp gevraagd, ondanks dat dit wel van tevoren aangeboden was door de docent. In Tabel 7 volgt een overzicht van de vragen die leerlingen in deze les hebben gesteld.

Leerling	Opgave	Tijdsindicatie	Probleem
4	8a	0 min	De leerling heeft niet door dat het deel voor de y^2 gelijk moet zijn aan 0 en loopt daarom vast.
4	8b	4 min	De leerling snapt niet wat de bedoeling is van de vraag. Hij geeft meteen zelf aan dat er gedeeld moet worden door a. Wanneer de docent aangeeft dat dit een goede stap is, is zijn reactie "En dat is het?"
4	12e	15 min	De leerling loopt vast in de opgave. Hij heeft de tip niet gelezen.
4	13c	25 min	De leerling loopt vast in de opgave, omdat hij p niet heeft ingevuld.
2	19e	33 min	De leerling heeft niet door dat hiervoor de factorstelling weer gebruikt kan worden.
2	21	43 min	Het is het eind van de les en de leerling is tot deze opgave gekomen.
4	18	43 min	Het is het eind van de les en de leerling is tot deze opgave gekomen.

Tabel 7: Vragen van leerlingen tijdens de les.

Bijlage 14: Transcripties interviews

De interviews zijn zo letterlijk mogelijk getranscribeerd om een zo goed mogelijk beeld te geven. Hierdoor worden de validiteit en betrouwbaarheid het best gewaarborgd. De introductie en afsluiting met de leerling zijn niet meegenomen in de transcriptie.

Interview leerling 1

Interviewer	En dan gaan we beginnen met de eerste vraag. Eh allereerst: wat vond je van de lessenserie?
Leerling	Eh, ik vond hem best wel, ja, moeilijk eigenlijk. Want heel veel dingen die dan eerst een stuk tekst lezen en dan. Ik vond het in ieder geval ik vind het wel leuk dat er dan wat informatie over. Je krijgt gewoon een stukje geschiedenis over hoe je nou, ja hoe ze er anders zijn opgekomen. Ehm…, ja maar. Ook, er is zo veel tekst dat ik er soms helemaal niets van begreep, want ik moet helemaal echt heel veel dingen moet ik gewoon zien, dus ja dat vond ik wel irritant. Juist uit die tekst moest je alles halen.
Interviewer	Ja, oké. En ook dat je er dan zelf op zou moeten komen dat lukte dan.
Leerling	Hmm ja dat lukte niet echt eh.
Interviewer	Ja, oké. Eh, had je van tevoren verwachtingen over de lessenserie?
Leerling	Ehm… nee, ik heb het meer ge. Ja eigenlijk eh ben ik begonnen van ja ik zie wel hoe het eh kan.
Interviewer	Ja dat is prima. Welke les vond je het leukst?
Leerling	Ehm… Ik denk les 3.
Interviewer	Les 3? En waarom?
Leerling	Nou omdat ik, eh… Je leert meestal dat je bijvoorbeeld met wortels kan dat toch niet een negatief getal zijn en hier komt dat toch dat je nou zegmaar die negatieve kan doen.
Interviewer	Ja die complexe getallen komt ook nog. Die je moet nog verder doen uiteindelijk, dus het is de bedoeling dat dit gaat aansluiten op je hoofdstuk over complexe getallen. Dus daar wordt het dan op gemaakt, want daar heb je ooit nog een eh toets over later. Dat hoort bij het eindexamen zegmaar van wiskunde D. Ehm, dus daar is het nu op ontworpen. Wat vond je, en eh vond je dat dan ook het interessantste om te leren of vond je andere dingen ook wel?
Leerling	Hmm, ja ik vond ook wel dus hoe dat ja met die eh… ja derdemachtsfunctie enzo oplossen hoe dat dan ehm, ja een beetje die geschiedenis erachter. Vond ik ook wel leuk om te lezen wel een beetje, want dat staat ook helemaal niet in de normale wiskundeboeken dus daarom vond ik die ook wel leuk. En ja, ook omdat er allemaal andere dingen zijn, want je moet nou ja zegmaar één dingetje ja van wiskunde B eh kennen om derdemachtsvergelijkingen op te, ja eh anders eh.
Interviewer	Ja, dat je de andere vergelijkingen ook eh kan.
Leerling	Ja.

Interviewer	Ehm, welke opdrachten vond je uiteindelijk echt te moeilijk? Je kan gewoon de lessenserie er even bijpakken.
Leerling	Even kijken, ehm… Even kijken hier… Oké wel ehm bijvoorbeeld de laatste opgaves van les 2. Maar ook ehm de opgave over dat je eh de abc-formule ook moest eh afleiden. Daar kwam ik ook niet echt uit. Ik had ook wel bij bepaalde dingen van ik heb dit nog vorig jaar gedaan, hoe ging dit ook alweer.
Interviewer	Ja dat kan.
Leerling	Oké en ja ook wel de laatste, ja wat was het, 22 en eh 21 die vond ik ook wel lastig.
Interviewer	Ja, opdracht 22 is ook wel een beetje een samenvatting van alles wat je gehad hebt.
Leerling	Ja.
Interviewer	Dus eh dat is dan ook niet heel gek. Ehm, waren er opdrachten die je te makkelijk vond?
Leerling	Hmm nee dat ook niet. Ik had wel bij alle opdrachten dat ik wel gewoon nu moet ik even nadenken.
Interviewer	Opdrachten die je overbodig vond? Die er niet per se in hadden gehoeven?
Leerling	Hmm. Niet zo dat ik meteen iets zie. Meestal zat ik gewoon wel van ik moet een beetje herhalen, gewoon dat je een beetje voorkennis eh opdoet.
Interviewer	Ja? Nou dat is mooi. Daar was het ook eh voor bedoeld voor een deel. Ehm… Had je graag meer uitleg van een docent gehad?
Leerling	Dat wel.
Interviewer	Vind jij normaal gesproken dingen zelf doorwerken prettig of veel?
Leerling	Nou normaal deed ik zelf, deed ik doorwerken vind ik eigenlijk wel prettig. Ik heb ook, vorig jaar heb ik ook eigenlijk wiskunde alleen gedaan qua zelfstudie. Ehm… ja. Maar bij die boekje vond ik het wel gewoon, was het wel fijn om een docent erbij. En anders in ieder geval dat ik een soort antwoordenboekje eh er in ieder geval bij had, zodat ik ook kon controleren of ik het wel of niet eh goed deed.
Interviewer	Oké, ja ik kan je het antwoordmodel nog sturen straks, eh als we hiermee klaar zijn. Dan heb je alles ook nog een keertje gezien. Ehm… als jij. Stel je zou in een groepje het doorwerken. Dus niet met een docent maar gewoon met medestudenten. Zou dat dan helpen denk je of eh of zou dat alsnog te lastig zijn?
Leerling	Ehm. Ja de als de anderen het wel, weet je als je iets niet begrijpt en de anderen begrijpen het wel dan denk ik dat het wel handig is om in een groepje te werken. Maar ik ben zelf dat is dat is natuurlijk hoe ik zelf ben eh meer iemand die, ja die het liefst alleen werkt. En dan eh, ja, dan is soms in een groepje wel fijn, maar soms dan denk je van ja toch weer zelf, want dan weet je precies zelf ja of je het goed eh begrijpt of niet. Dat is bij een groepje soms moeilijker eh te zien.
Interviewer	Ja dat kan, ja. Ja dat is ook altijd eigen voorkeur. Dat verschilt heel erg per persoon. Ehm… Vond je de tijdsplanning van de

	lessenserie goed? Elke les zou in principe ongeveer 50 minuten moeten duren.
Leerling	Hmm, ja die, ik heb bij les 1 die ben ik niet echt doorgekomen echt binnen 50 minuten. Eh, les 2 was ik, ja die was ik wel bijna binnen, bijna binnen 1 les had ik die af. Maar les 3 duurde ook wel eh, langer dan 50 minuten.
Interviewer	En waren dat dan specifieke opgaven die heel lang duurden?
Leerling	Ja, dat wel eh.
Interviewer	En weet je nog welke? Ja het kan ook dat je dat niet meer weet hoor.
Leerling	Ja eh eigenlijk ook wel echt de opgaven die ik eigenlijk wel moeilijk vond en ik. Die grote opgaven waar je bijvoorbeeld dingen moest herleiden of eh moest bewijzen. Die eh, ja.
Interviewer	En als je daar hulp bij zou hebben, zodat je er dan iets sneller doorheen kwam omdat je het beter begreep. Zou dat dan, qua tijdsduur, zou dat dan genoeg zijn? Of zou het dan alsnog aan de lange kant zijn?
Leerling	Hmm ik denk dat het voor les 1 nog wel aan de lange kant zou zijn, de andere denk ik niet.
Interviewer	Oké, ehm… Welke nieuwe dingen uit de lessenserie heb je geleerd waarvan je denkt die kan ik zonder dat ik het materiaal erbij heb nog steeds wel uitvoeren?
Leerling	Ehm, ja ik denk wel met die eh complexe getallen. Die wel, dat je moet dan met die eh i.
Interviewer	Dat omschrijven of ermee rekenen of?
Leerling	Ja weet ik, meer dan om die eh i te gebruiken, dus eh dat je weet hoe je dat dan moet opschrijven. Ja de abc-formule maar die eh wist ik al daarvoor. Dan heb ik het wel ongeveer.
Interviewer	Oké. Ehm… Zijn er dingen waarvan je denkt: daar heb ik echt de uitleg voor nodig, anders kom ik er gewoon nooit doorheen?
Leerling	Eh… ja. Bijvoorbeeld dat van, dat bewijzen van de ehm... Ja hoe je dan derdegraads eh formules oplost dan dat eh.
Interviewer	Die formule van Cardano.
Leerling	Ja die, ja die eh… wel. Ja ongeveer die vooral.
Interviewer	Ja. Ja dat was ook de grootste natuurlijk. Was er iets waar je graag meer over had willen leren?
Leerling	Ehm… even kijken. Nee, niets echt zo.
Interviewer	Dr stonden ook wat voetnoten dat als je nog meer zou willen weten dat je dat nog zou kunnen vragen.
Leerling	Oh ja, klopt.
Interviewer	Dat vond je niet per se nodig?
Leerling	Hmm, nee. Sommige wel, maar ja ik zou niet meer echt weten wie.
Interviewer	Ja dat kan hoor. Dan gaan we nog even naar een opgave kijken. Die lijkt een beetje op die laatste opgave. Mag je mij gewoon een beetje vertellen hoe je dit zou doen. Hoe ver je erin komt.
Leerling	Oh jeetje. Zo veel kan ik er niet meer mee.
Interviewer	Ja dat kan hoor. Het kan ook dat je nergens in komt, maar als je nog iets ervan weet dat eh.

Leerling	Ja even kijken, ehm… Ja dan zullen we toch. Even kijken, daar hebben we 9 bij nodig en dan.
Interviewer	Oké.
Leerling	Dan moest je ehm… Eh, ja eerst eh, ja. Twee haken doen, dus dan had je eerst een k+…
Interviewer	Oké en waarvoor gebruikte je dat?
Leerling	Ehm… ja dat weet ik zo even niet meer.
Interviewer	Oké. *Begint te schrijven*. Er was iets met k+…
Leerling	Ja.
Interviewer	Dat was voor vraag a? Of vraag b of vraag c of…?
Leerling	Ja volgens mij vraag a.
Interviewer	Vraag a. Wat was belangrijk bij vraag a?
Leerling	Dat ehm… even kijken. Dat ik weet wat de p is eigenlijk.
Interviewer	Hmmhmm
Leerling	En ja dat die ehm, ja kwadraat dat die eigenlijk er niet meer tussen staat.
Interviewer	Oké, dat kwadraat daar moeten we vanaf.
Leerling	Ja.
Interviewer	Het had niet helemaal te maken met vraag 9 maar met vraag 8.
Leerling	Oh.
Interviewer	Je kan vraag 8 er wel even bij pakken.
Leerling	Zo. Oh en dan moest je eerst die eh. Je moest eerst die x en dan moest je dan invullen met y+s.
Interviewer	Hmmhmm. Dus dan krijgen we y+s tot de derde.
Leerling	-9 y+s in het kwadraat +12 keer y+s +40.
Interviewer	Oké en wat konden we daar dan mee?
Leerling	Ehm… Dan moest je die eerst eh ja.
Interviewer	Helemaal uitwerken.
Leerling	Ja en dan moest je bij de s weer apart.
Interviewer	En hoe kunnen we dat uitrekenen als we dat hebben uitgewerkt? Dan krijg je iets met y tot de macht 3 plus iets met y kwadraat plus iets met y plus een getal is 0.
Leerling	Ehm… Ja weet ik zo even niet meer.
Interviewer	Oké, uiteindelijk moesten we van die y kwadraat af.
Leerling	Ja.
Interviewer	Dus wat konden we hier dan mee doen, dat stuk voor die y kwadraat?
Leerling	Eh… Ja gedeeld door?
Interviewer	Nee dat stuk voor die y kwadraat moest uiteindelijk dan 0 zijn, want dan hou je geen y kwadraat meer over.
Leerling	Ja dat is waar.
Interviewer	En daarmee kun je dan die s uitrekenen. Nou stel je voor dat is helemaal gelukt, dan krijgen we een formule van de vorm, even kijken hoor. Y tot de macht 3-15y+22 is 0. En dan komen we bij vraag b.
Leerling	Even kijken. *Lange pauze.* Misschien moeten we dan die formule van eh Cardano doen, die moest eh, invullen.
Interviewer	Ja, pak hem er maar eens bij. Na opgave 12.
Leerling	Even kijken en dan. Moest je dan, die q eh wordt dan 22. En die p is dan -15. Dan moet je eh die invullen en dan.

Interviewer	Ja dan krijgen we inderdaad die met die andere wortel. Nou als we dat netjes uitwerken krijgen we y is de derdemachtswortel van -11 plus de wortel van -4 plus de derdemachtswortel van - 11 min de wortel van -4. En nu willen we de reëele oplossing hebben.
Leerling	We zijn bij b hè?
Interviewer	Hmmhmm.
Leerling	Ehm… Ja en voor de rest weet ik het niet meer.
Interviewer	Wat kun je doen met die eh (1+2i) tot de macht 3.
Leerling	Oké, dan kunnen we tot de macht 3 doen die hele eh.
Interviewer	Oké, wat krijg je als we dat doen?
Leerling	Even kijken dan 1 eh even kijken dan 6 eh. Ja je moet hem helemaal oplossen met 3a kwadraat b.
Interviewer	Hmmhmm. Ja en dan kreeg je a tot de macht 3+3a kwadraat b+3ab kwadraat +b tot de macht 3.
Leerling	Dus dan heb je 1 en dan dus 3 ehm… 3 keer 1 keer 2i. Ja plus 3 keer 1+2i kwadraat plus 2i ja…
Interviewer	3 keer 1 keer 2i wat is dat?
Leerling	Eh, 6i.
Interviewer	Ja. En 3 keer 1 keer 2i kwadraat?
Leerling	Ehm, 12i.
Interviewer	Oké, die i gaat ook in het kwadraat.
Leerling	Ehm, dan wordt dat gewoon 1 toch? Want die i is wortel -1 keer wortel -1, dus dat wordt dan 1.
Interviewer	Wat wisten we van i kwadraat, hoe hadden we die opgesteld? Waar was dat gelijk aan? De wortel van -1 inderdaad in het kwadraat.
Leerling	Dat weet ik zo even niet.
Interviewer	Dat wordt dan -1.
Leerling	Oh ja.
Interviewer	Ja, dus dan krijg je inderdaad dat wordt?
Leerling	-12.
Interviewer	-12, nou en dan die laatste.
Leerling	Plus 8i nou ja tot de macht 3.
Interviewer	En hoe kunnen we dat nog anders schrijven?
Leerling	Ja dat lijkt me dan -1 keer, ja wortel -1.
Interviewer	Ja -1 keer i of het wordt daarmee dan -8i. Oké, dus als we dit dan samen nemen krijgen we -11-2i. Herkennen we daar iets in?
Leerling	Ja, want dat was. Oh wat was het ook alweer? Die 11 die werd dan ehm die hebben we in het kwadraat gedaan, zodat je dan 121 had. Die i hier die ging dan ook weg, maar dan had je wel de wortel van -4 volgens mij.
Interviewer	Oké, dus dit. Als je dit kwadrateert dan krijg je die 2 in het kwadraat.
Leerling	4.
Interviewer	Dus dan krijg je -4, dus dit is de wortel van -4.
Leerling	Hmmhmm.
Interviewer	-11- de wortel van -4. Hé, dat hebben we hier ook.
Leerling	Ja.

Interviewer	Dus dit tot de macht 3 is dat. Dus de derdemachtswortel hiervan moet gelijk zijn hieraan. Ja?
Leerling	Ja.
Interviewer	Dus daarmee wordt dit 1+2i. Hier zouden we hetzelfde krijgen, maar dan met de min. Daarvoor was die andere ook gegeven. Y is 1-2i+2+2i. Wat krijgen we dan voor y?
Leerling	Eh, even kijken. Eh, 2. Ja 2.
Interviewer	Ja. En dan hebben we een reële oplossing gevonden. Ja?
Leerling	Ja.
Interviewer	En dat was de vraag bij b. Vind de reële oplossingen.
Leerling	Ja.
Interviewer	Ja, maar bij c staat er vind exact alle oplossingen. Hoeveel oplossingen heeft een eh, derdegraadsvergelijking?
Leerling	3.
Interviewer	3 ja. Of in ieder geval het kan er 3 hebben.
Leerling	Hmmhmm.
Interviewer	Hoe kun je die overige vinden?
Leerling	Ehm… Dat weet ik zo even niet. Even kijken. Dat is ook niet van ehm. Ja dat weet ik niet.
Interviewer	Daarvoor kun je die factorstelling gebruiken. Zegt dat je nog vaag iets?
Leerling	Ehm nee.
Interviewer	Dat is bij opgave 9, dat is met die k. Net boven opgave 9.
Leerling	Ja.
Interviewer	Als.
Leerling	Als (x-k).
Interviewer	Ja dus we hebben nu als oplossing gevonden: y is 2. Is een oplossing.
Leerling	Hmmhmm. Ja en dan kun je alsnog zo'n (x-k)(x kwadraat +ax+b).
Interviewer	Ja, dus in dit geval y-2 en dan y kwadraat+ay+b. Hoe vind ik die a en die b?
Leerling	Hmm... Dat weet ik niet meer.
Interviewer	Dat konden we uiteindelijk vinden doordat je moet kijken. Je moet uiteindelijk hierop uitkomen als je het uitwerkt. Maar goed, dat laten we voor nu even zitten. Stel je hebt dan al die oplossingen gevonden, dan heb je de oplossingen van y gevonden. Maar bij d moet je dan de oplossingen van x weer vinden. Hoe kunnen we daarop dan terugkomen?
Leerling	Ehm. Moet je eigenlijk gewoon niet? Ja even kijken, moet je dan terugrekenen, want dan heb je die van y. Heb je dan, dus dan kun je eigenlijk, ehm, hier invullen.
Interviewer	Ja we hadden daar iets van y of eh x is y+s gedaan. S uitgerekend.
Leerling	Ja, y weet je eigenlijk ook al, dus dan kun je daarvoor de x eh.
Interviewer	Ja dan daarvoor de x'en uitrekenen. Oké, ehm… Weet je nog waarom, kun je. Heb je enig idee waarom we derdegraads-vergelijkingen op deze manier oplossen? Eerst die ene vorm ervan maken.
Leerling	Ehm… Ja volgens mij was het in ieder geval zo dat. Ja anders kun je het haast niet oplossen. Want je hebt bijvoorbeeld wel

	wat je kunt oplossen bijvoorbeeld is x tot de macht 3-9x kwadraat+12x is 0. Dat kun je bijvoorbeeld wel gewoon makkelijk oplossen met haakjes enzo werken. Maar, hier staat nog +40 achter en dat, ja, nou ja ze kunnen niet, dus moesten ze een andere manier, eh.
Interviewer	Ja, en die heeft Cardano, samen met die andere Tartaglia enzo eh allemaal uiteindelijk gevonden. Oké, dan heb ik nog een laatste vraag, ehm. Waarvoor denk jij dat we complexe getallen nodig hebben?
Leerling	Ehm… Want dan met eh… negatieve breuken te eh, wortels bedoel ik. Met negatieve wortels te kunnen werken.
Interviewer	Ja, oké. En heb je dan altijd, zodat je altijd oplossingen hebt, of…?
Leerling	Eh, nou volgens mij. Nou volgens mij niet altijd. Je eh complexe getallen uiteindelijk wel. Alleen wordt het meestal niet altijd gebruikt.
Interviewer	Oké, weet je waarom niet?
Leerling	Ehm, ik denk omdat je dan de meeste oplossingen nog niet, eh, kloppen.
Interviewer	Ja, dat ze niet reëel zijn. Nou dat was m’n laatste vraag. Heb je verder nog iets waarvan je denkt dat moet ik meenemen voor de lessenserie?
Leerling	Ehm… ja meer voor de lessenserie ja gewoon meer voorbeelden enzo.
Interviewer	Oké. Nou ehm… dan was dat m.

Interview leerling 2

Interviewer	En dan beginnen we met de eerste vraag en die is eigenlijk heel algemeen: wat vond je van de lessenserie?
Leerling	Nou ik vond het wel moeilijk.
Interviewer	Vond je alles moeilijk of specifieke stukken?
Leerling	Ik begreep het niet heel goed de formules en ineens de stukjes tekst vond ik een beetje apart.
Interviewer	Oké, ja dat kan. Ehm… had je van tevoren verwachtingen over de lessenserie?
Leerling	Nee.
Interviewer	Helemaal niet? Dan ga je er helemaal blanco in. Welke opdrachten specifiek vond je heel moeilijk?
Leerling	Hmm vooral die laatste.
Interviewer	De laatste les?
Leerling	De laatste lessen volgens mij.
Interviewer	Les 2 en 3 of eh.
Leerling	Ja, vooral les 2 en 3 ja.
Interviewer	Les 1 ging dan wel?
Leerling	Ja.
Interviewer	Oké. Welke les vond je het leukst?
Leerling	Dat zou ik niet weten.
Interviewer	Nee? Nee dat kan. Was er iets wat je heel interessant vond om te leren?
Leerling	Hmm.
Interviewer	Nee? Ook niet echt. Ehm, waren er opdrachten die je te makkelijk vond?
Leerling	Nee.
Interviewer	Nee? Ook geen opdrachten die je eventueel overbodig vond?
Leerling	Hmm.
Interviewer	Nee? Dat was allemaal wel prima. Had je graag meer uitleg van een docent gehad?
Leerling	Hmm, misschien wel handig want nu moest ik telkens vragen en ik ben niet heel goed in vragen ofzo naar als ik iets niet snap.
Interviewer	Oké. En stel je voor je zou niet echt uitleg ofzo van een docent krijgen, maar in een groepje gaan werken aan de opdrachten? Zou dat helpen of?
Leerling	Nee.
Interviewer	Nee? Omdat je dat zelf sowieso niet zo prettig vindt of eh?
Leerling	Nee.
Interviewer	Oké, dat kan. Wat vond je van de tijdsplanning van de lessenserie? Ze zouden, elke les zou ongeveer 50 minuten moeten duren.
Leerling	Ja ik heb wel langer eh. Ik vond wel dat de lessen heel lang. Want het is niet dat ik in 50 minuten de hele les af kreeg.
Interviewer	Oké. Zat er nog verschil per les? Dat de ene…
Leerling	Ik vond les 1 wel sneller ging, sneller gaan dan andere lessen.
Interviewer	Ook omdat die wat makkelijker was dan misschien?
Leerling	Ja.

Interviewer	Als de rest iets meer uitleg zou geven, de andere lessen. Zou dat dan helpen qua tijdsplanning of?
Leerling	Hmm ik denk het wel want nu moet je de hele tijd weer terugbladeren en dan uitzoeken wat het nou weer was en dan. Dat scheelt toch weer tijd.
Interviewer	Ja dat kost ook wel weer veel tijd natuurlijk. Ehm… Zijn er dingen die je in de lessenserie hebt geleerd die je nu zonder dat je ernaar terugkijkt denkt dat kan ik nog steeds.
Leerling	Hmm nee.
Interviewer	Nee, niet echt?
Leerling	Nee.
Interviewer	Ehm, specifieke dingen waarvan je denkt als ik het materiaal er weer bij pak dat lukt me dan wel weer?
Leerling	Hmm nee.
Interviewer	Nee? Weet je ook zo niet? Ehm… was er iets waar je nog graag meer over zou willen leren?
Leerling	Nee.
Interviewer	Ook niet per se? Nou dan gaan we nog naar één opgave kijken die lijkt heel erg op die laatste opgave. Ehm… Ik wil gewoon een beetje je gedachtegang of je enig idee hebt hoe je kan beginnen dan gaan we er een beetje doorheen. Het kan ook dat je geen idee hebt hoor en dan is dat ook een eh een antwoord.
Leerling	Hmmhmm.
Interviewer	Enig idee hoe je opgave a zou kunnen aanpakken?
Leerling	Hmm.
Interviewer	Nee? Nou oké als je dan het lesmateriaal erbij pakt dan heb je bij opgave 8 van het lesmateriaal. Die heeft daar heel erg mee te maken.
Leerling	Hmmhmm.
Interviewer	Als je daarnaar terugkijkt, heb je dan enig idee hoe je zou kunnen beginnen met deze opgave.
Leerling	*Lichaamstaal.*
Interviewer	Nee? Nou we moesten uiteindelijk van die eh dat kwadraat af. Dus we hadden eerst een x kwadraat, dan gaan we die y+s substitueren en dan willen we van die y kwadraat af. Weet je nog hoe we van die y kwadraat af konden komen?
Leerling	*Lichaamstaal.*
Interviewer	Nee? Nou daar kwam dan iets voor te staan, dat moest je gelijkstellen aan 0, want dan hou je geen y kwadraat meer over. Want 0 vermenigvuldigd met iets, ja, dat is altijd 0.
Leerling	Hmmhmm.
Interviewer	Nou stel dat is je dan wel gelukt. Dan krijg je een formule van de vorm, ehm…, even kijken hoor. Y tot de macht 3-15y+22 is 0. *Begint te schrijven.*
Leerling	Hmmhmm.
Interviewer	Nou dan heb je dus deze vorm en dan komen we bij vraag b. Dan moet je de reële oplossing van deze vergelijking vinden met behulp van de formule van Cardano.
Leerling	Hmmhmm.

Interviewer	Als we de formule van Cardano erbij pakken, dus na opgave 11 of eh na opgave 12 bedoel ik. Enig idee hoe we dan hier een oplossing van kunnen vinden?
Leerling	*Lichaamstaal.*
Interviewer	Wat doet de formule van Cardano? *Korte pauze.* Die vindt oplossingen van formules van de vorm y tot de macht 3+py+q is 0. Wat is mijn p hier?
Leerling	-15.
Interviewer	En mijn q.
Leerling	22.
Interviewer	Als we dan die formule van Cardano pakken. Wat krijgen we dan voor oplossing? *Korte pauze*. Hoe zou ik hem kunnen invullen?
Leerling	Door de p in de formule te doen.
Interviewer	Hmmhmm, dus wat krijg ik dan?
Leerling	De derdemachtswortel van -22 tweede.
Interviewer	Ja.
Leerling	Plus de wortel van 22 kwadraat delen door 4+ehm. -15 tot de macht 3 gedeeld door 27.
Interviewer	Oké.
Leerling	Plus de derdemachtswortel van -22 delen door 2 – de wortel van 22 kwadraat gedeeld door 4+de derde… -15 tot de macht 3 gedeeld door 27.
Interviewer	Oké, dan krijgen we dit. Nou als we dit allemaal netjes zouden uitwerken zouden we krijgen: y is de derdemachtswortel van -11+wortel van -4 + de derdemachtswortel van -11 – de wortel van -4. En is dit een reële oplossing?
Leerling	Nee.
Interviewer	Want? Waarom niet?
Leerling	Omdat er -4 in de wortel staat?
Interviewer	Ja we hebben zo'n wortel van -4, dus dan hebben we complexe oplossingen. En nu willen we zo'n reële oplossing vinden. En er stond nog bij: maak gebruik van (1+2i) tot de macht 3 en (1-2i) tot de macht 3. Wat kunnen we daar nog meer mee doen? *Korte pauze* Wat krijgen we als we dat gaan uitwerken (1+2i) tot de macht 3? *Korte pauze*. Weet je nog hoe we zulke haakjes konden uitwerken.
Leerling	*Lichaamstaal.*
Interviewer	Dan kreeg je a tot de macht 3+3a kwadraat b+3ab kwadraat+b tot de macht 3. Nou dit is mijn a. 1 tot de macht 3+3 keer 1 kwadraaat keer 2i+3 keer 1 keer 2i kwadraat +2i tot de macht 3 dat was dan dit. Hoe kunnen we dit uitwerken? 1 tot de macht 3 is?
Leerling	1.
Interviewer	3 keer 1 kwadraat keer 2i.
Leerling	Is 6i.
Interviewer	6i. 3 keer 1 keer 2i kwadraat.
Leerling	Eh… 12i.
Interviewer	Oké, die i gaat dan ook in het kwadraat...
Leerling	Oh ja.
Interviewer	Weet je nog wat het was? I kwadraat, waar was dat gelijk aan?

Leerling	Eh… 1?
Interviewer	Niet helemaal.
Leerling	-1.
Interviewer	-1 ja. I was gelijk aan de wortel van -1, dus dit is gelijk aan -1. 12 keer -1, nou krijgen we dus -12. Oké, 2i tot de macht 3 wat krijgen we daar?
Leerling	8i tot de macht 3.
Interviewer	Oké en die i tot de macht 3, kunnen we daar nog iets anders van maken? Dat we die macht wat omlaag doen?
Leerling	-1i.
Interviewer	Ja -1 keer i, dus dan krijgen we -8i.
Leerling	Hmmhmm.
Interviewer	Nou nemen we dit samen, dan krijgen we -11-2i.
Leerling	Hmmhmm.
Interviewer	Hé waar lijkt dit op? Als we terugkijken naar die oplossingen van y.
Leerling	Die -11 onder.
Interviewer	Ja, die -11-2i komt overeen met dat stuk onder de wortel. Dus de derdemacht van 1+2i is gelijk aan dit. Dan betekent dat 1+2i gelijk moet zijn aan de derdemachtswortel van dit. Als we die andere zouden uitwerken zouden we hier 1-2i krijgen. Dat doen we voor nu even niet, maar dat is dezelfde procedure. Hé, dus y is 1-2i+1+2i. Waar is dat gelijk aan als we dat gaan optellen?
Leerling	2.
Interviewer	Hé dan hebben we een reële oplossing gevonden. Dat is mooi, want dat wouden we ook. Hoeveel vergelijkingen, hoeveel oplossingen kunnen we krijgen bij derdegraadsvergelijkingen.
Leerling	3.
Interviewer	Ja 3 of minder natuurlijk. Dat wisselt een beetje per vergelijking. Hoe kunnen we die overige oplossingen vinden in c?
Leerling	Weet ik niet.
Interviewer	Factorstelling zegt dat je nog wat? Aan het eind van les 1 boven opgave 9.
Leerling	*Lange pauze.*
Interviewer	Oké, dus de factorstelling die zei als je eenmaal een oplossing gevonden hebt, dan kun je die vergelijking herschrijven. Wat zouden we dan krijgen in dit geval? *Lange pauze.* Welke oplossing hebben we al?
Leerling	2.
Interviewer	2, dus dan krijgen we als eerste stukje?
Leerling	x-2.
Interviewer	Ja, in dit geval hebben we dan een y, dus dan krijgen we y-2. En dan?
Leerling	X, y kwadraat.
Interviewer	Y kwadraat, en daarna?
Leerling	Weet ik niet.
Interviewer	Dan krijgen we + een getal keer y + een getal is 0. Dat getal hier kunnen we gaan vinden als we dit gaan uitwerken, dus dan moeten we uiteindelijk op dit weer uitkomen. Dus daarmee kun

	je deze twee getallen vinden. Die getallen worden daarmee dan ook, even kijken hoor, +2y-11. Als we dit dan zouden hebben gevonden na die factorstelling.
Leerling	Hmmhmm.
Interviewer	Hoe kunnen we dan die overige twee oplossingen vinden? *Lange pauze.* Enig idee?
Leerling	y-2 is 0 of y kwadraat +2y+-11 is 0.
Interviewer	Of y kwadraat +2y-11 is 0. Nou hier krijgen we y is 2, dat was degene die we al hadden.
Leerling	Hmmhmm.
Interviewer	En dit kunnen we uitwerken.
Leerling	Hmmhmm.
Interviewer	Hoe kunnen we dit uitwerken?
Leerling	Ehm… abc-formule.
Interviewer	Ja, abc-formule. Nou dan krijg je 3 oplossingen bij c, maar dan heb je wel de oplossingen van y gevonden. En bij d willen we de oplossingen van x vinden, van die oorspronkelijke vergelijking. Hoe kunnen we dat dan doen?
Leerling	Weet ik niet.
Interviewer	Nee? Nou bij a hadden we die y+s gesubstitueerd, dus kreeg je x is y+s. Nou die s heb je dan uitgerekend, die y's rekenen we nu uit, dus dan kun je de x'en weer vinden. Oké, ehm… Heb je enig idee waarom we derdegraadsvergelijkingen op deze manier oplossen? Dat we het eerst zo omschrijven en dan?
Leerling	*Lichaamstaal.*
Interviewer	Nee, niet echt? Nou dan als laatste vraag nog: waarvoor denk jij dat we complexe getallen nodig hebben?
Leerling	Omdat er toch een antwoord uit komt.
Interviewer	En wat voor antwoord? Een complex antwoord of?
Leerling	Ja.
Interviewer	Dat je sowieso een oplossing hebt.
Leerling	Ja.
Interviewer	Oké, ehm… Nou dat waren de vragen voor het interview.
Leerling	Hmmhmm.
Interviewer	Heb jij nog andere dingen waarvan je denkt die moet ik meenemen voor de lessenserie?
Leerling	Nee.
Interviewer	Nee? Goed dan was dat m.

Interview leerling 3

Interviewer	Ehm… Nou als allereerste. Wat vond jij van de lessenserie?
Leerling	Ehm… Ik vond het moeilijk. Ja. Ik, ik heb niet echt het gevoel dat ik het helemaal begrijp.
Interviewer	Hmmhmm.
Leerling	Ehm… eh, ja ik vond het moeilijk. Dat was het.
Interviewer	Vond je alles moeilijk of vond je specifieke lessen moeilijk?
Leerling	Eh…
Interviewer	Je kan er wel even naar kijken hoor als je wil.
Leerling	Ja eh de eerste les ging nog wel omdat dat natuurlijk ook is wat ik zelf heb gehad.
Interviewer	Hmmhmm.
Leerling	Dat vond ik ook niet heel moeilijk, maar die tweede en derde les met die, waar je echt wel uitleg zegmaar kreeg, toen begreep ik eigenlijk niet meer zo goed wat ik moest doen. De uitleg begrijp ik dan tot zekere zin nog wel, maar dan als ik bij een som kom dan loop ik vast van wat moet ik nu doen.
Interviewer	Ja.
Leerling	Dus dat eigenlijk ja. En dat had ik ook bij les 3, dat ik niet helemaal. Bij les 3 wist ik vooral niet wat ik moest doen. Toen wist ik helemaal niet meer wat, wat er gebeurde zegmaar.
Interviewer	Ja oké.
Leerling	Ja.
Interviewer	Had je van tevoren verwachtingen over de lessenserie?
Leerling	Ehm… niet specifieke verwachtingen nee.
Interviewer	Welke les vond je het leukst?
Leerling	Ehm…, ik vond de… ik denk dat ik. De derde les vond ik wel interessant, omdat het iets wat nieuws is zegmaar, van dat je nog niet echt eerder had gezien. Ja ik wist wel dat i iets was, maar niet wat het dan was zegmaar.
Interviewer	Oké, ja.
Leerling	Dus ik vond het wel interessant, nou ja dat er nog een nog complexe getallen zegmaar ja bestaan.
Interviewer	Ja die complexe getallen zijn uiteindelijk ook, krijg je nog verder bij wiskunde D.
Leerling	Ja.
Interviewer	Dus uiteindelijk moet dit gaan aansluiten op dat hoofdstuk over complexe getallen.
Leerling	Ja.
Interviewer	En dan ga je daarmee verder. Eh… en dat vond je dan denk ik ook gewoon het interessantst aan de lessenserie?
Leerling	Ja.
Interviewer	Waren er specifieke opdrachten die je te moeilijk vond?
Leerling	Ehm… De opdrachten waar je het echt wel zelf moest doen, dus. Even kijken welke dat waren. Ehm, nou dertien werd je nog best wel doorheen ge…
Interviewer	Hmmhmm.
Leerling	Nou zegmaar dat is oké, maar dan vanuit veer, ja veertien snapte ik zegmaar volgens mij niet. En de laatste twee snapte ik ook niet. Die vond ik ook heel moeilijk deze twee.
Interviewer	Ja.

Leerling	Daar wist ook niet meer wat ik moest doen.
Interviewer	Ja die laatste is ook wel een beetje de afronding, dus daar kwam ook alles van de lessenserie terug.
Leerling	Ja die heb ik ook, die heb ik ook niet gemaakt, want die vond ik, die snapte ik niet meer.
Interviewer	Hmmhmm.
Leerling	Ja ik denk dat het de laatste dan is, omdat het natuurlijk de afronding is dan maar alles waarbij je zegmaar meer dan, meer dan twee, drie stappen moest doen daar raakte ik wel vast, daar wist ik het niet meer.
Interviewer	Oké en dan ook bijvoorbeeld dingen zoals opgave 12? Want daar had je dan dat je die formule van Cardano aan het afleiden was. Dat die opgaven daarvoor, 10 en 11, dat dat losse opgaven zijn, helpt dat?
Leerling	Ehm…, ja. Want dan weet je wel ongeveer wat je moet doen. Denk ik. Ehm…, ja. Maar ik wist uiteindelijk niet wat ik dan, wat ik dan zegmaar met met bijvoorbeeld die dit moest doen enzo.
Interviewer	Ja bij e dat je dan gewoon, dat je daarop uit moest komen.
Leerling	Ja. Ja, dat oh ja, maar ik liep, bij 12 kwam ik er niet uit.
Interviewer	Dan was je daarvoor al ergens vastgelopen zeker?
Leerling	Ja, want ik kwam. Ja ik wist waar ik op uit moest komen, ik wist ook wel hoe ik er moest komen, want later in de opgave kwam ik er ook wel achter van dat je eh, p derde tot de macht of eh zegmaar zeventwintigste, hoe je daar moest komen wist ik wel, maar hier kwam ik daar niet op uit.
Interviewer	Ja, ja nou ik ga er nog een keer naar kijken, dus dan zal ik dat ook wel zien.
Leerling	Ja
Interviewer	Ja, eh, waren er opdrachten die je te makkelijk vond?
Leerling	Nee, mmm ja misschien, ja die eerste paar opdrachten, maar dat daar kwam ik op zich wel makkelijk doorheen dus ja dat vond ik niet heel erg.
Interviewer	Zijn er ook opdrachten die je eventueel overbodig vond?
Leerling	Niet per se.
Interviewer	Oké. Nou dat is mooi. Had je graag meer uitleg van een docent gehad? Tijdens de les.
Leerling	Eh… ja want ik had heel erg dat ik op een gegeven moment, dat ik het niet meer zo goed. Dat ik niet meer wist wat ik moest doen.
Interviewer	Hmmhmm.
Leerling	En dan, ja ik had niet echt een voorbeeldje ofzo. Normaal dan kijk ik of zegmaar met de docent mee. Nou dat doe ik ook niet heel vaak eigenlijk. Ja ik kijk nooit echt met de docent mee met wiskunde maar dan misschien was het nu wel handig geweest aangezien ik dan een voorbeeldje had van hoe die stappen werden uitgewerkt. Want normaal kijk ik eigenlijk altijd gewoon in het antwoordenboek of in de voorbeeldopgaven zodat ik dan weet van hoe het moet, zodat ik het gewoon zegmaar een soort van na kan doen.

Interviewer	En als je er gezamenlijk aan zou werken met wat medestudenten? Dus dat je gezamenlijk wat meer erdoorheen gaat? Zou dat helpen?
Leerling	Eh… Dat weet ik niet zo goed.
Interviewer	Oké, dat kan. Eh… vond je de tijdsplanning van de lessenserie goed?
Leerling	Ehm, ja het was wel een beetje moeilijk dat het zo net voor de toetsweek was. Dus ik had er niet heel veel tijd voor. Ehm…, ja daarom was ik er twee lessen niet, dus voor mij was de tijd niet heel handig nee. Ik heb alles wel zegmaar volgens mij dit weekend nog afgemaakt, eh…
Interviewer	En per les zou het ongeveer 50 minuten moeten duren. Klopte dat een beetje?
Leerling	Ehm…, nee. Ik vond het wel lang, ik vond het wel langer dan 50 minuten.
Interviewer	En was het omdat je vastliep erin?
Leerling	Ja.
Interviewer	Of omdat je gewoon het sowieso veel meer tijd zou kosten?
Leerling	Ik denk, ja want ik heb zelfs nog dingen overgeslagen, dus ik denk dat het sowieso wel wat langer duurde dan 50 minuten, maar misschien is dat ook omdat, als het helemaal nieuw is dat je het dan rustig moet maken in plaats van dat je er snel doorheen kan. En dat je ook alles nog moet terughalen enzo.
Interviewer	Zat er nog verschil per les ook?
Leerling	Eh, 1 duurde natuurlijk daar was ik wel mee klaar in 1 lesuur.
Interviewer	Hmmhmm.
Leerling	Maar 2 en 3 niet.
Interviewer	Oké. En die werden ook lastiger, dus daar kan dat eventueel mee te maken hebben.
Leerling	Ja.
Interviewer	Maar misschien ook sowieso iets aan de lange kant?
Leerling	Ja.
Interviewer	Oké, ehm… Welke nieuwe dingen uit de lessenserie heb je geleerd waarvan je denkt dat je die zonder dat je het materiaal er weer bij hebt nog wel gewoon kan?
Leerling	Ehm, ik denk niet dat ik het zonder het materiaal nog een keertje zou kunnen uitvoeren.
Interviewer	Oké, helemaal niks ervan?
Leerling	Ja misschien alleen die derdegraadsvergelijking, zegmaar die tussen de haakjes dan.
Interviewer	Ja a+b tot de derde.
Leerling	Ja dat.
Interviewer	Ja die kwam wel een aantal keer terug.
Leerling	Ja.
Interviewer	Ja oké. Ehm, was er nog graag iets waar je graag meer over had willen leren?
Leerling	Ehm…, ehm. Niet per se, nee. Nee ik denk het niet.
Interviewer	Nee er misten geen dingen qua het onderwerp dat je dacht. Er waren ook wat dingen waar nog hints bij waren als je geïnteresseerd bent kun je nog wat doorgaan.
Leerling	Oh ja.

Interviewer	Dat was niet nodig verder?
Leerling	Ehm, nee dat heb ik, zelf heb ik dat niet opgezocht ofzo. Nee.
Interviewer	Nee dat hoefde ook niet, was ook extra.
Leerling	Ja.
Interviewer	Ehm…, in die opgave staan ook van die tips erbij.
Leerling	Hmmhmm.
Interviewer	Heb je die tips overal gebruikt? Had je die overal nodig?
Leerling	Ja ik had ze wel nodig. Ik heb ze wel gebruikt.
Interviewer	En heb je het gevoel, stel je zou ze niet gebruiken, dat je ze dan ook kan negeren? Omdat ze zo ook een beetje buiten de tekst staan? Of zou je ze alsnog sowieso wel lezen.
Leerling	Ehm…, ja dat wel. Maar ik had ze wel nodig, zegmaar om het eerste stapje van oh ja daar moet ik of zo of ik moet daarnaartoe of ik moet daarmee beginnen.
Interviewer	Ja, oké.
Leerling	Dus, ja ik vond ze wel handig. Ik heb ze wel allemaal gebruikt.
Interviewer	Oké, nou eh dan hebben ze in ieder geval allemaal geholpen. Ehm, we gaan nog even naar een opgave kijken, die lijkt heel erg op opgave 22. Dus we gaan daar even een beetje gezamenlijk doorheen, kijken hoe ver je daarin komt.
Leerling	Oké.
Interviewer	Eh, je hoeft het niet op te schrijven, gewoon een beetje bespreken hoe je het zou aanpakken.
Leerling	Oké.
Interviewer	Ehm, nou ja lees maar eerst eens een keertje door en kijk maar of je zou weten hoe je kan beginnen met vraag a. Het materiaal kun je er daarna eventueel bij pakken als het nodig is.
Leerling	Ehm, nou ja eerst moest je hem dan omschrijven naar de, ehm, die met u+v in plaats van ja, oh nee. Ehm… *lange pauze* Ja.
Interviewer	We zijn hier eind van die eerste les mee bezig geweest. Opgave 8 ging hierover.
Leerling	Oké. *Pauze* Ik was, dit was even een tijdje geleden, dit weet ik niet meer zo goed. *Lange pauze.*
Interviewer	Ja het idee is hier dat je die x vervangt door die y+s.
Leerling	Ehm, ja.
Interviewer	En dan die haakjes gaat uitwerken. En het stuk voor die y kwadraat moet dan verdwijnen, want die y kwadraat moet verdwijnen.
Leerling	Ja.
Interviewer	Hoe kunnen we zo’n stuk laten verdwijnen, weet je dat nog?
Leerling	Ehm, met 0.
Interviewer	Ja dat stuk voor die y kwadraat moet uiteindelijk gelijk zijn aan 0.
Leerling	Ja.
Interviewer	Nou en daarmee kun je kijken wat dan die y+s is en kun je het verder doorvoeren.
Leerling	Ja.
Interviewer	Nou oké, en als je dat hebt gevonden dan kom je op een formule van de vorm y tot de macht 3-15y+22 dus dan heb je een nieuwe vergelijking.
Leerling	Ja. En dan vraag b.

Interviewer	En dan heb je vraag b.
Leerling	Ehm… dan was het, dan was het toch dat je dan y moest. Y is dan u+v.
Interviewer	Ja.
Leerling	Ehm… en dan moest je eh... v in de formule vrijmaken. Ja.
Interviewer	*Begint te schrijven.* Dan krijg je y is u+v.
Leerling	Ja en dan krijg je v of dan v vrijmaken, dus dan huh. Dan moest je toch 3uv+p moest je toch vrijmaken of dan niet?
Interviewer	Ja dus dan heb je hier inderdaad 3uv+p gaan we vrijmaken.
Leerling	Oh ja, maar eerst de uv+p moet eerst dan in plaats van y komen, dus dan krijg je…
Interviewer	Ja die vullen we in.
Leerling	Ja die vullen we eerst in.
Interviewer	Dus dan krijg je u tot de macht 3+3u kwadraat v+3uv kwadraat +v tot de macht 3-15u-15v+22 is 0.
Leerling	Ja en dan ehm… dan krijg je eh, 3uv+p is 0 en dan wordt v -p gedeeld door 3u ehm en dat moest je dan vervangen in de formule.
Interviewer	Oké, dus dan krijg je -p gedeeld door 3u tot de derde +3.
Leerling	Wacht we hebben het over v vrijmaken, ja.
Interviewer	Ja u tot de macht 3+-p gedeeld door 3u in het kwadraat keer u+3u kwadraat.
Leerling	Dan krijg je -p gedeeld door 3u, ja.
Interviewer	*Schrijft de rest af.*
Leerling	Ja.
Interviewer	Oké, als we dit gaan uitwerken komen we dan goed uit? Want nu hebben we 3 onbekenden, een u, een v of nou ja die hebben we niet meer, maar je hebt nu wel een p erbij.
Leerling	Ja daar liep ik ook vast.
Interviewer	Oké. Voor die p.
Leerling	Ja.
Interviewer	Kunnen we een letter of een getal invullen. Want dit is eigenlijk in de vorm y tot de macht 3+py+q is 0, dus die p is deze.
Leerling	Oh.
Interviewer	Dus dan vullen we die min 15 in en als we het dan allemaal netjes uitwerken, dan valt dat weg. Ja?
Leerling	Ja.
Interviewer	Dus dat is het idee erachter.
Leerling	Ja nee dat had ik niet door dan.
Interviewer	Oké. Nou we kunnen ook gewoon de formule van Cardano zelf pakken. Die staat na opgave 12.
Leerling	Hmmhmm.
Interviewer	Dus daar hebben we al een grote formule om die uit te kunnen rekenen. Wat zouden we dan krijgen? Eens even kijken dan hadden we deze.
Leerling	Ehm…, maar ik weet ni, oh dan krijg je u tot de derde is.
Interviewer	Nee echt onder opgave 12.
Leerling	Deze, oh y is dan derdemachtswortel en dan -22 gedeeld door 2 + de wortel van 22 kwadraat min, gedeeld door 4 plus -15 tot de derde eh, gedeeld door 27.
Interviewer	Hmmhmm.

Leerling	Plus die hele formule maar dan met een minnetje.
Interviewer	Ja. Oké als we dat allemaal netjes zouden uitwerken, dan zouden we uitkomen op. Y is de wortel of eh de derdemachtswortel van ehm... -11 plus de wortel -4 plus de derdemachtswortel van -11 min de wortel van -4. En nu stond er in de vraag we willen een reële oplossing hebben en we moeten gebruik maken van (1+2i) tot de macht 3 en (1-2i) tot de macht 3. Enig idee hoe we dat kunnen doen?
Leerling	Ja ik wist niet wat dat, dat wist ik ook niet bij die opgave waar dat ook terugkwam.
Interviewer	Hmmhmm.
Leerling	Wat je daar nou mee moest doen, wat dat met die twee te maken had.
Interviewer	Oké, als we 1+2i tot de macht 3 zouden uitwerken, wat krijgen we dan?
Leerling	Ehm, 1 tot de macht 3 en dan plus ehm 1 keer 1 kwadraat keer 2i plus eh 1 keer 2 tot de macht, 2i tot de macht 2 keer 2i tot de macht 3.
Interviewer	Keer?
Leerling	Ehm plus ja.
Interviewer	Ja en hier moet nog een 3 voor en hier moet ook nog een 3 voor. Oké als we dat netjes uitwerken. 1 tot de macht 3 is?
Leerling	1.
Interviewer	3 keer 1 kwadraat keer 2i?
Leerling	Ehm…, dan 3 keer 2i.
Interviewer	Ja en dat is?
Leerling	Ehm, 3wortel -2.
Interviewer	Ehm, niet helemaal. Als we drie keer 2 doen, wat krijgen we dan?
Leerling	6.
Interviewer	We kunnen hem laten staan als 6i.
Leerling	Oh oké.
Interviewer	En die 6 of die i is de wortel van -1 dus dit zou niet 6wortel van -1 worden, maar de wortel van -36.
Leerling	Oh ja.
Interviewer	Omdat we dan die ook eh. Maar voor nu is +6i goed genoeg. We laten het vaak als i staan.
Leerling	Oké.
Interviewer	Oké, dan krijgen we nog 3 keer 1 keer 2i kwadraat.
Leerling	Ehm, dan krijg je 3 keer 4i kwadraat. Dus dan 12i kwadraat.
Interviewer	Oké. Hoe kunnen we zo’n i kwadraat omschrijven?
Leerling	Ehm, dat was toch -1. Dus dan -12.
Interviewer	Dus dan krijg je -12, oké. En dan hebben we nog 2i tot de macht 3.
Leerling	Ehm, dan krijg je 8i tot de macht 3.
Interviewer	En dan i tot de macht 3?
Leerling	Ehm, dat was dat niet −1? Of niet, nee. Ehm… Dat weet ik niet.
Interviewer	Wat weten we van i kwadraat?
Leerling	Dat was -1.
Interviewer	Dus i tot de macht 3 kunnen we schrijven als i kwadraat keer i.
Leerling	Ja.

Interviewer	Dit wordt?
Leerling	-8.
Interviewer	Dus dan houden we over -8i.
Leerling	Oh ja.
Interviewer	Nou dit kunnen we dan samennemen en dan krijgen we -11-2i. Hé herkennen we daar iets in als we naar de oorspronkelijke oplossing kijken?
Leerling	Eh, ja dan krijgen je dezelfde.
Interviewer	Ja dit stuk onder de wortel is hetzelfde.
Leerling	Oh dus dan is, y is 1+2i tot de derde.
Interviewer	Ja en deze derdemachtwortel van dat is dus 1+2i.
Leerling	Ja.
Interviewer	En bij deze zullen we krijgen 1-2i, daarom waren ze allebei gegeven.
Leerling	Hmmhmm.
Interviewer	Nou dan komen we uit op y is 1-2i+1+2i en wat krijgen we dan?
Leerling	Ehm… 2+0 oh 2.
Interviewer	Twee, hé dan hebben we de reële oplossing gevonden. Dus dat is het idee erachter.
Leerling	Oké.
Interviewer	Ehm… *lange pauze.* Nu hebben we 1 oplossing gevonden.
Leerling	Ja.
Interviewer	Hoeveel oplossingen kunnen derdegraadsvergelijkingen hebben?
Leerling	Ehm, waarschijnlijk 3.
Interviewer	Oké, waarschijnlijk 3. Hoe konden we die overige vinden?
Leerling	Ehm… *Lange pauze.* Weet ik niet.
Interviewer	Dat hebben we ook helemaal aan het einde van les 1 gedaan.
Leerling	Oh.
Interviewer	Ja dat is het langste geleden voor jou.
Leerling	Ja. Met deze formule.
Interviewer	Ja met die, dat staat er eigenlijk boven. Met die factorstelling.
Leerling	Maar ik weet niet hoe je dan op de meerdere oplossingen eh…
Interviewer	Oké, dat maakt op zich voor nu niet uit. Het idee erachter is. We hebben nu dit als 2 gevonden. Als x is 2 een oplossing is of in dit geval als y is 2 een oplossing is, dan kun je dit schrijven als y-2 keer y kwadraat + nogiets + nogiets en dan nog een keer is 0. Nou die +nogiets+nogiets dat moet uiteindelijk uitkomen op y tot de macht 3-15y+22.
Leerling	Oh ja.
Interviewer	Wat zou er voor mijn y moeten komen te staan om hier uiteindelijk mijn juiste y kwadraat te hebben. We hebben hier -2y kwadraat dus dan krijg je hier?
Leerling	Hmmhmm, 11 nee.
Interviewer	Als we naar die y kwadraat kijken. Dit is -2y kwadraat en dit levert nu y keer y is nog een keer y kwadraat op. Wat zou er voor die y kwadraat moeten komen te staan zodat je -2y kwadraat en nog iets?
Leerling	3 of niet, nee. Wacht moet het dan zegmaar net als met de product-som methode of dat niet.

Interviewer	Ehm… Nou we gaan naar die stappen kijken, dus we hebben hier als je dit vermenigvuldigd krijgen we y keer y kwadraat krijg je y tot de macht 3.
Leerling	Ja.
Interviewer	Dan heb je y keer iets -2y kwadraat. Dus ja we moeten daar dan eigenlijk geen y kwadraat over hebben.
Leerling	Ja dan waarschijnlijk -13? Of?
Interviewer	Ja maar we moeten. We hebben nu iets met y kwadraat. En we hebben 0y kwadraat want die hebben we ook.
Leerling	Oh, ja maar dan moet het 0 worden ja.
Interviewer	-2y kwadraat en dan. Wat blijft er dan hier? -2…
Leerling	Eh +2.
Interviewer	Plus 2. Nou dan houden we ook over -4y en nogiets moet -15 zijn.
Leerling	Hmm, dan -15.
Interviewer	Nou we hebben al -4y.
Leerling	Oh, -11.
Interviewer	Hé en -2 keer -11 dat is dan ook weer die 22. Dus zo kunnen we die factorstelling gebruiken.
Leerling	Ja.
Interviewer	Dan heb je dit. Hoe vind je dan de overige oplossingen? Heb je enig idee.
Leerling	Hmm, is 0. Dus allebei is 0.
Interviewer	Oké, dus y-2 is 0.
Leerling	Ja y-2 is 0 die hadden we al.
Interviewer	En dan y kwadraat +2y-11 is 0.
Leerling	Ja die kunnen we oplosssen.
Interviewer	Ja? Dus dat is het idee erachter. En dan hebben we die kwadratische vergelijking en die oplossen en zo gebruiken we de factorstelling. Ehm… Nou en dan als laatste stapje. We hebben ze nu in y, maar we moeten ze eigenlijk in x hebben.
Leerling	Ehm… Ik dacht ehm… Dat je dan weer met deze formule zegmaar omgekeerd ofzo.
Interviewer	Ja hoe zijn we oorspronkelijk van die x naar die y gekomen? Met welke deden we dat ook alweer?
Leerling	Eh, met eh… met deze. Oh dan moet je deze formule moet je dan.
Interviewer	Ja we hebben dan x is y+s gedaan. Nou die s hebben we uitgerekend.
Leerling	Ja, dat was…
Interviewer	Ja dat hebben we nu niet echt gedaan, maar die hebben we dan uitgerekend. Dus dan die y's die je hebt gevonden vul je hier in.
Leerling	Ja en dan krijg je x.
Interviewer	En dan krijg je x. Oké, nou dan was dat de opgave waar ik nog even naar wou kijken. Ehm… dan nog één vraagje. Waarvoor denk je dat we complexe getallen nodig hebben?
Leerling	Eh, ja voor oplossingen vinden die er dan nog niet waren?
Interviewer	Ja oplossingen vinden die er nog niet waren. Maar wil je dan altijd complexe oplossingen hebben?
Leerling	Ehm… hmm… weet. Ik snap het niet zo goed?

Interviewer	Nou gebruiken we het gewoon omdat je bijvoorbeeld bij nu een negatieve wortel heb je altijd oplossingen?
Leerling	Eh… ja dus niet, maar nu dus wel.
Interviewer	Ja dus in het complexe vlak kunnen we altijd oplossingen vinden?
Leerling	Ja.
Interviewer	Oké, dan ehm waren dat eigenlijk alle vragen die ik wel had. Heb jij nog extra opmerkingen of dingen waarvan jij denkt dat is nog belangrijk voor de lessenserie?
Leerling	Ehm… Nou ja wat ik altijd zelf denk ik altijd handig vind is dus een voorbeeldopgave. Zoals als ik het nu zie dan denk ik oh ja dat is ook wel logisch, maar dat kan ik dan nou zegmaar niet de eerste keer zelf bedenken omdat het volledig nieuw is.
Interviewer	Ja.
Leerling	Dus nou ja, wat je misschien kunt doen is dan een voorbeeldopgave geven van nou ja zo werkt het zo dat je wel nou ja soort van.
Interviewer	Ja.
Leerling	Ja.
Interviewer	Oké, nou dat is dan duidelijk. Als er dan verder niets meer is dan eh dan was dat m.

Interview leerling 4

Interviewer	Dan eh… gaan we beginnen met het interview.
Leerling	Ja.
Interviewer	Nou. Allereerst, wat vond je van de lessenserie in zijn geheel?
Leerling	Ik denk dat, ik vond het wel leerzaam. Ik vond soms ook wel gewoon uitleg enzo in het boekje gewoon zelf. En dat waren ook wel gewoon dingen die ik nog niet wist zegmaar. Maar ik vond, ja ik vond het wel heel moeilijk eigenlijk.
Interviewer	Ja oké. Vond je de hele lessenserie moeilijk of bepaalde stukken?
Leerling	Ik vond op het begin met eh... de abc-formule enzo dat oplossen ging op zich nog wel. Eh. Maar ik vond vanaf, kijk nou vanaf opgave 10 vond ik het wel, werd het wel echt moeilijker zegmaar.
Interviewer	Ja vanaf de tweede les zo'n beetje.
Leerling	Ja en helemaal dan les 3 zegmaar.
Interviewer	Ja met de complexe getallen.
Leerling	Ja.
Interviewer	Ja dat is ook nieuw, dat krijg je uiteindelijk ook voor je eindexamen.
Leerling	Ja.
Interviewer	Dus daar is de introductie op, dat is het idee. Had je van tevoren verwachtingen over de lessenserie? Ik weet niet wat of eh er wat over verteld was of niet.
Leerling	Nee eigenlijk niet. Nee, nee ik wist niet dat het helemaal los zou zijn, ik dacht dat het wel iets te maken had zegmaar met de methode van nu. Die we zegmaar, waar we nu mee bezig zijn.
Interviewer	Met de matrixen?
Leerling	Ja, maar ik vond het ook wel prima, dat het gewoon iets anders was.
Interviewer	Ja oké. Ja uiteindelijk is die ook bedoeld om aan te sluiten op complexe getallen dat hoofdstuk.
Leerling	Ja.
Interviewer	Maar dat kon nu niet helemaal. Dat eh.
Leerling	Nee precies.
Interviewer	Welke les vond je het leukst?
Leerling	Les 1 denk ik.
Interviewer	Les 1? Omdat dat het makkelijkste was? Of omdat het gewoon wel interessant was?
Leerling	Ik vond, ja ik vind dat oplossen vind ik altijd wel leuk. En ik vond het ehm. Ook gewoon, ja eigenlijk vond ik dat oplossen gewoon het leukst. En ik denk ehm, omdat les 2 en 3 die vond ik echt wel moeilijk daar begreep ik echt niet heel veel van, waardoor het echt heel veel tijd kostte bij elke opgave zegmaar om door te werken.
Interviewer	Ja precies.
Leerling	En op een gegeven moment dacht ik van ja, nu heb ik er eigenlijk niet heel veel zin meer in. Maar, ja.
Interviewer	Ja dat kan.
Leerling	Ja maar eh.
Interviewer	Ja daarom wordt het dus nog aangepast.

Leerling	Dat vind ik wel prima.
Interviewer	Eh… Wat vond je het interessantste om te leren?
Leerling	Even kijken, ehm… Ik vond met die formules dat vond ik wel interessant.
Interviewer	Met die formule van Cardano of met die abc-formule?
Leerling	Met die abc-formule.
Interviewer	Om dat op een andere manier terug te zien.
Leerling	Ja en deze ook.
Interviewer	Opgave 8 met het omschrijven van derdegraadsvergelijkingen zonder die x kwadraat.
Leerling	Ja.
Interviewer	Oké, ja dat had je uiteindelijk ook nodig natuurlijk om eh die derdegraadsvergelijking te kunnen oplossen.
Leerling	Ja klopt.
Interviewer	Ehm… Welke opdrachten, nou ja je vond wat opdrachten moeilijk. Welke opdrachten vond je specifiek echt te moeilijk en ehm, ja waar had je de meeste moeite mee? Een paar dingen had je natuurlijk al besproken toen je ermee bezig was.
Leerling	Even kijken. Ja 22.
Interviewer	22, de allerlaatste.
Leerling	Ja die begreep ik echt niet.
Interviewer	Oké.
Leerling	A, b en c niet. D op zich, d wel.
Interviewer	Oké, ja dat was natuurlijk ook een beetje de samenvatting van alles dus eh, daar gaan we zo ook nog een keertje naar kijken.
Leerling	Ja.
Interviewer	En waren er opdrachten die je te makkelijk vond?
Leerling	Ehm… Nee dat denk ik eigenlijk niet. Ik vond op zich, zoals kijk opdracht 5 dat was wel te doen, maar je moest, ik moest wel even nadenken zegmaar.
Interviewer	Ja dat je het weer even terughaalt.
Leerling	Ja.
Interviewer	Waren er opdrachten die je overbodig vond ook? Gewoon dingen waarvan je dacht dit was niet per se nodig geweest? Of was het allemaal wel…
Leerling	Ik denk dat het allemaal wel goed aansloot bij de teksten enzo ook, die erbij stonden.
Interviewer	Oké, nou dat is mooi.
Leerling	Ja.
Interviewer	Had je graag mee uitleg van een docent gehad of vind je juist dat zelf doorwerken wel prettig?
Leerling	Ehm… Ik vond meer uitleg denk ik wel iets fijner. Ik vind zelf ehm… als ik het begrijp zegmaar dan vind ik zelf doorwerken wel prettig. Maar ik merkte wel dat ik bij les 2 en 3 werd het wel gewoon echt een stukje moeilijker en daar had ik eigenlijk wel uitleg nodig.
Interviewer	Oké en als je het samen zou doorwerken met medestudenten? Dus dat je gewoon gezamenlijk er wat meer naar kan kijken dat daar wat meer tijd voor is? Zou dat dan helpen of?
Leerling	Ja ik denk het wel.
Interviewer	Of dan alsnog extra uitleg?

Leerling	Uitleg van iemand die het begrijpt ik denk dat dat het handigst is.
Interviewer	Dat dat er wel, dat er wel iemand bij is.
Leerling	Ja.
Interviewer	Ehm… vond je de tijdsplanning van de lessen een beetje goed? In principe zou elke les ongeveer, ja, 50 minuten moeten duren.
Leerling	Ja van, ja van die eerste les sowieso wel, want die kreeg ik volgens mij ook wel binnen de les af. Eh. Maar van die tweede en derde les ehm… ja toen moest ik er wel nog even thuis mee bezig maar, ja. Ik snapte het op zich wel dat dit zegmaar 1 les zou zijn en dan.
Interviewer	Was het dan dat het lastig was en dat je er daardoor veel tijd aan kwijt was of eh?
Leerling	Ja dat was het. Het was niet dat het, ik denk dat als ik het had begrepen dat het dan wel gewoon, gewoon paste.
Interviewer	Dus ja, met iets meer uitleg zou het waarschijnlijk wel lukken?
Leerling	Ja.
Interviewer	Oké, dus je zei het al voornamelijk die tweede en die derde, ehm… Welke nieuwe dingen uit de lessenserie heb je geleerd die je zonder de uitleg waarschijnlijk ook nog steeds kan? Dus zonder dat je die stof er weer bij hebt dat je denkt dit kan ik nu nogsteeds doen. Wat is je daarvan een beetje bijgebleven?
Leerling	Ehm… Even kijken hoor. Ja die abc-formule die kan ik denk ik wel uitschrijven.
Interviewer	Het afleiden daarvan, ja.
Leerling	En…. Even kijken hoor. Oh ja dit. Met die min-wortel.
Interviewer	Oh ja, dus dat omschrijven.
Leerling	Ja.
Interviewer	Dat zou nu wel moeten lukken denk je.
Leerling	Dat denk ik wel.
Interviewer	Oké. Nou dat is mooi. Dingen waarvan je denkt nou dat zou ik echt nooit meer kunnen als ik dat materiaal er niet bij heb of als ik extra uitleg heb?
Leerling	Ehm. Even kijken ja bijvoorbeeld, deze bijvoorbeeld.
Interviewer	Opgave 10, over dat eh. Substitueren.
Leerling	Ja.
Interviewer	Ja, want opgave 10, 11 en 12.
Leerling	Ja want dat oplossen op zich zegmaar dat.
Interviewer	Dus daar ben je in z'n geheel die oplossingen aan het doorgaan dus daar heb je wel echt die uitleg bij nodig.
Leerling	Ja.
Interviewer	Ja, oké. Ehm was er nog iets waar je nog graag meer over had willen leren in de lessenserie?
Leerling	Ehm. Nou ik vond eigenlijk dat bij elk stukje tekst dat er wel redelijk wat opdrachten waren, waardoor je het wel echt, zegmaar, ging leren.
Interviewer	Oké.
Leerling	Dus ik denk dat dat op zich wel goed was.
Interviewer	Nou dat is mooi.
Leerling	Ja.

Interviewer	Niet echt iets wat je dus op zich nog miste of. Er waren ergens een paar stukjes waarvan stond als je hier meer van wilt weten dan kun je dat nog vragen, maar dat was niet per se nodig?
Leerling	Nee eigenlijk niet. Ik vond de tips die erbij stonden die vond ik wel heel handig.
Interviewer	Oké.
Leerling	Dat zorgde er soms wel voor dat ik dacht oh ja dat moet je doen of op deze manier kun je het beter doen.
Interviewer	Heb je het gevoel dat je die tips ook kon negeren als je het zegmaar, als je het wel lukte?
Leerling	Ja dat wel.
Interviewer	Heeft dat gewoon te maken met dat eh, dat dat dan wel goed ging of juist ook dat ze mooi in zo'n wolkje aan de zijkant staan. Maakt dat nog uit of?
Leerling	Ja het is beide. Het is niet, ik vond het wel fijn dat het niet tussen de tekst stond, zodat ja, het is niet, dan kon je wel echt kiezen of je het ging lezen zegmaar. En als ik het begreep dan lette ik daar eigenlijk niet echt op, zegmaar.
Interviewer	Oké, nou dat was ook de bedoeling ervan, dus dat is dan eh goed overgekomen in ieder geval bij jou.
Leerling	Ja.
Interviewer	Ehm. We gaan nu nog naar een opgave kijken. Ja die heeft heel erg te maken met opgave 22. Je mag gewoon even mij vertellen, hoe zou je dit aanpakken? Wat hiervan denk je aan te kunnen pakken en wat lukt niet helemaal.
Leerling	Ja die eerste, dat lukt dan denk ik eigenlijk niet.
Interviewer	Dat dat omschrijven.
Leerling	Ja naar deze formule.
Interviewer	Oké, wat was er ook alweer belangrijk bij dat omschrijven, weet je dat nog?
Leerling	Ehm… Eerst eigenlijk. Wacht moest je iets substitueren?
Interviewer	Ja we gingen daar wat substitueren.
Leerling	Ehm… en daarna dat uitwerken.
Interviewer	Ja we wouden van die x kwadraat af en daarvoor substitueerden we iets in de vorm y plus een getal of y min een getal.
Leerling	Oh ja, ja.
Interviewer	En als je de lessenserie er weer bij zou pakken. Dat heeft te maken met opgave 8 volgens mij.
Leerling	Oh ja. Ja klopt. Ja dan zegmaar die eh x is y+s.
Interviewer	Ja.
Leerling	Dat daarin substitueren. En als ik hem dan daarna had uitgewerkt denk ik op zich dat het wel moet lukken.
Interviewer	Wat is er dan belangrijk als je dat uitwerkt? Hoe kun je uiteindelijk achter die s komen?
Leerling	Ehm… door met haakjes te werken.
Interviewer	Hmmhmm. En dan willen we van die y kwadraat af.
Leerling	Ehm… dat weet ik niet meer.
Interviewer	Oké er stond dan zo'n getal voor die y kwadraat en die moet uiteindelijk 0 worden. Dan kom je van die y kwadraat af.
Leerling	Oh ja.

Interviewer	En daarmee kun je dan die s en dan kun je verder.
Leerling	Ja.
Interviewer	Nou dan is dat dus allemaal gelukt en dan moet je in b een reële oplossing vinden van de in a gevonden vergelijking met behulp van de formule van Cardano. En daarvan gebruikmaken van, nou ja, die twee complexe getallen. Als je die formule van Cardano daarbij pakt.
Leerling	Ja dat is misschien wel handig. Even kijken is dat, welke…
Interviewer	Nee dat is een bladzijde verder denk ik. Na opgave 12 komt die formule van Cardano.
Leerling	Oh deze.
Interviewer	Ja die. Dus dan heb je de vergelijking. Die vergelijking wordt dan y tot de macht 3-15y+22 is 0.
Leerling	Ja.
Interviewer	En dan daarvan een oplossing vinden met behulp van de formule van Cardano.
Leerling	Moet je dat dan dit ehm… Moet je dit dan daar invullen in die formule of?
Interviewer	Even kijken we krijgen eerst *Begint te schrijven*. En nu denk jij we gaan het eerst invullen?
Leerling	Ja of oh nee. Dat kan niet, of wel. Ehm…
Interviewer	Wat kun je doen met de formule van Cardano zelf?
Leerling	Vergelijkingen oplossen van deze vorm.
Interviewer	Oké, dus wat zouden we dan krijgen in dit geval?
Leerling	Y is ehm… en dan de derdemachtswortel van ehm… -22 delen door 2 plus ehm de wortel van 22 in het kwadraat delen door 4 plus of nee ehm min 15 tot de derde delen door 27. En dan helemaal daarnaast gewoon weer een plus en dan ja eigenlijk precies hetzelfde maar dan met plus voor die tweede wortel wordt een min.
Interviewer	Oké, als we dit gaan oplossen dan komt daaruit, ik heb hem al uitgewerkt. Dan krijg je uiteindelijk y is de derdemachtswortel van -11 plus de wortel van -4 plus de derdemachtswortel van -11 min de wortel van -4.
Leerling	Ja.
Interviewer	En dan?
Leerling	En dan, dat is een hele goeie.
Interviewer	We willen de reële oplossingen.
Leerling	Ehm… Moet je dan met die i die min wortel gaan doen.
Interviewer	Oké, wat zouden we daarmee kunnen doen?
Leerling	Ehm… Even kijken… Misschien de min wortel van, 1 min de min wortel van -2 tot de derde.
Interviewer	1 min de wortel van -2.
Leerling	Ja.
Interviewer	En wat wil je daar dan mee?
Leerling	Ehm…
Interviewer	Enig idee?
Leerling	Misschien, nee dat kan niet, eh… Nee dat weet ik eigenlijk niet.
Interviewer	Oké, in die opgave staat zo de derdemachtswortel van eh… de derdemacht van 1-2i tot de macht 3 en 1+2i tot de macht 3.
Leerling	Ja.

Interviewer	Wat krijg ik als ik 1-2i tot de macht 3 doe? We kunnen dit in stappen uitwerken hoor.
Leerling	Wat zei je?
Interviewer	We kunnen dit in stappen uitwerken. Wat krijg je als we deze derdemacht ehm… doen?
Leerling	Ehm… 3 en dan plus ehm… Even kijken.
Interviewer	Hoezo 3?
Leerling	Oh nee 1, oh nee 1 tot de macht 3 blijft 1.
Interviewer	Oké 1 tot de macht 3, ja.
Leerling	Eh… 1 tot de macht 3 plus ehm… 2 keer of plus 3 keer 1 kwadraat min 2i plus ehm… 3 min 2i kwadraat. En dan plus of min ja ehm plus -2i tot de derde.
Interviewer	Oké, dus wat krijgen we hier? 1 tot de macht 3 is?
Leerling	1.
Interviewer	3 keer 1 keer -2i is?
Leerling	-6i ehm… even kijken 12i ehm… -8i.
Interviewer	Oké. -2i kwadraat. -2keer-2.
Leerling	4i.
Interviewer	Is 4i kwadraat. Kunnen we dat omschrijven?
Leerling	Oh ja ehm… Dat, blijft dat gewoon i in het kwadraat of?
Interviewer	We hadden 1 regel over de i kwadraat. I kwadraat dat heeft te maken met die wortel van -1, dus i kwadraat is -1.
Leerling	Oh ja.
Interviewer	Dus dan wordt dit? -4, 4 keer -1.
Leerling	Ja.
Interviewer	Keer 3.
Leerling	Keer 3 wordt -12.
Interviewer	Nou tellen we dit bij elkaar op, krijg je -11-14i, klopt dit?
Leerling	Ja.
Interviewer	*Lange stilte* Oh ja, we krijgen hier geen 8, want we hebben i tot de macht 3 dus wat wordt dat dan? Hoe kunnen we i tot de macht 3 anders schrijven?
Leerling	-i.
Interviewer	-1 keer i dus dan wordt dit een plus.
Leerling	Ja.
Interviewer	En dan krijgen we, ehm, dit -2i.
Leerling	-2.
Interviewer	-6i+8i is -2.
Leerling	2.
Interviewer	Eh is 2 ja, klopt, dus dan krijgen we -11+2i. Herkennen we daar iets in?
Leerling	Ehm, -11… *Lange stilte.* Ja dat is die vorm van a+bi.
Interviewer	Wat hadden we onder die derdemacht staan, bij y?
Leerling	Waar?
Interviewer	Waar we y hebben uitgerekend, net boven dat ehm deze derdemacht.
Leerling	i-2i kwadraat.
Interviewer	Net daarboven, deze.
Leerling	Oh ehm, -11+ de wortel van -4.
Interviewer	Ja.

Leerling	Oh is dat, is dat hetzelfde als die -11+2i.
Interviewer	Ja, waarom wel of niet? Hoe kunnen we die wortel van -4 anders schrijven?
Leerling	Ehm… wortel van, even kijken, wortel van -2 keer, oh nee dat klopt niet. Ehm… wortel -2 keer wortel -2.
Interviewer	Ehm, niet helemaal. Hoe kunnen we van de wortel van -4 daar zo'n vorm van i van maken?
Leerling	Ja die vind je. Dat is -2 keer 2. Heeft dat daar iets mee te maken?
Interviewer	Ja 4 is 2 keer 2. En dan krijg je nog keer de wortel van -1. En die wortel van -1 die kunnen we herschrijven als?
Leerling	Oh dat is i.
Interviewer	Ja, dus dan krijgen we 2i.
Leerling	Oh ja.
Interviewer	Hé, dus de derdemacht van 1-2i is gelijk aan is -11+2i. Dat betekent dat dit stukje gelijk moet zijn aan -11+2i.
Leerling	Ja.
Interviewer	Als we datzelfde doen voor die andere 1+2i, dan krijg je dat dit stukje gelijk moet zijn aan -11-2i.
Leerling	Ja.
Interviewer	Oké, dan heb je -11+2i+-11-2i. Dat houden we over. En wat krijgen we dan?
Leerling	Ehm, -22. Ja -22.
Interviewer	-22 en hé, dan hebben we de reële oplossing gevonden.
Leerling	Ja ik snap hem nu.
Interviewer	Dus dat is dan die vraag b.
Leerling	Ja.
Interviewer	En dan bij c moet je exact alle oplossingen vinden.
Leerling	Maar is dat dan niet hetzelfde?
Interviewer	Nu hebben we 1 oplossing. Hoeveel oplossingen kun je krijgen bij een derdegraadsvergelijking?
Leerling	3.
Interviewer	3. Daarvoor hadden we ook in les 1 nog iets gevonden, helemaal op het einde.
Leerling	*Lange pauze.* Heeft dat met dit stukje te maken?
Interviewer	Ja, met die factorstelling.
Leerling	Ooooh, even kijken *Lange pauze.* Moeten we dan zegmaar x+22 en dan tussen haakjes die x kwadraat plus nog iets?
Interviewer	Ja, dus we krijgen. Inderdaad, we hebben als oplossing al die -22. Eigenlijk werken we nu in y hè, dus dan krijg je y+22, y kwadraat+nogiets. Waar moet dit gelijk aan zijn?
Leerling	Ehm…, aan 0 of?
Interviewer	Ja dit moet gelijk zijn aan 0 uiteindelijk, maar dit stukje moet gelijk zijn aan die oorspronkelijke vergelijking. Dat was y tot de macht 3+15y-22, dat klopt niet. -15y+22. Nou als dit gelijk is, die y kwadraat is y tot de macht 3.
Leerling	Hmmhmm.
Interviewer	Wat moet er hier voor die y kwadraat komen te staan?
Leerling	-15.

Interviewer	-15, maar dit gaan we vermenigvuldigen. Nu hebben we nog 22y kwadraat +y keer iets, kijk keer y. En ik wil van die -22y kwadraat of plus 22y kwadraat af.
Leerling	Ehm, 22y of -22y?
Interviewer	-22y, nou dan hebben we nog een keer. En dan krijgen we op het eind nog +1. Nee dan hebben we +2 nodig eigenlijk.
Leerling	Oh ja, ja.
Interviewer	Maar waar komt dan die −15 vandaan?
Leerling	Ik denk dat we nu ergens een foutje hebben gemaakt. Oooh, we hebben iets fout gedaan bij b. Dit moest zijn als antwoord 1 of eh als antwoord 2.
Interviewer	We kregen daar 1-2i+1+2i. Dus dan krijgen we hier y-2.
Leerling	Ja.
Interviewer	Oké, dus dan hebben we die kwadratische vergelijking, foutje in b, maar dan krijg je de juiste factorstelling. Kun je dan die overige twee oplossingen vinden?
Leerling	Kan dat met de abc-formule?
Interviewer	Dat kan met de abc-formule. Nou en dat lukt dan denk ik verder wel.
Leerling	Ja dat lukt.
Interviewer	Nou en dan hebben we drie oplossingen en die oplossingen hebben we dan in y. En dan vragen we bij d vind exact alle oplossingen van de vergelijking x tot de macht 3-9x kwadraat +12x+40 is 0 want dat was de oorspronkelijke vergelijking.
Leerling	Moet je dan eh, de oplossingen van x zegmaar.
Interviewer	De oplossingen van x.
Leerling	Eh, kun je dan niet als. Oh wacht x is 0.
Interviewer	Hoe zijn we in a naar die vergelijking in de vorm van y gekomen?
Leerling	Door die formule van Cardano.
Interviewer	Nee dat kwam daarna pas.
Leerling	Ehm… door dat substitueren?
Interviewer	Ja we hebben dit gesubstitueerd. X is y+ een getal. Nou die s hebben we dan uitgerekend.
Leerling	Ja.
Interviewer	Dus hoe kunnen we dan terugkomen op die oplossingen in x?
Leerling	Door, ehm…, bij x iets te substitueren.
Interviewer	Wat wil je substitueren?
Leerling	Ook dat y+s.
Interviewer	Ja, dus die y+s, die y's hebben we dan net uitgerekend, die s hebben we in het begin al. Dus dan kun je ze elke keer invullen, dus dan krijg je hiervan die oplossingen.
Leerling	Oooh, ja. Ja.
Interviewer	Ja?
Leerling	Ja. Nou dat is dan het laatste stukje van die vraag en dat heb je dan ook deels gedaan in de laatste opgave van de lessenserie die niet helemaal lukte. Ik denk dat ik het dan wel, met die eh…, met die reële oplossingen. Ik denk dat ik het dan wel beter begrijp.
Interviewer	Dat is mooi. Weet je waarom we derdegraadsvergelijkingen zo oplossen? Waarom die formule van Cardano?

Leerling	Nee.
Interviewer	Hoe zijn we op die formule van Cardano gekomen?
Leerling	Ehm…
Interviewer	Cardano heeft hem inderdaad toen eh van Tartaglia gekregen.
Leerling	Hmmhmm.
Interviewer	Wat heb jij toen verder in les 2 gedaan?
Leerling	Ehm… Ja vooral dat substitueren van u+v.
Interviewer	Hmmhmm.
Leerling	En ehm…, ja eigenlijk vooral dat substitueren.
Interviewer	Ja en toen hebben we opgelost voor u.
Leerling	Ja.
Interviewer	En daarmee heb je eigenlijk je y's gevonden.
Leerling	Oh ja.
Interviewer	Dus daar kwam dat dan uiteindelijk vandaan.
Leerling	Ja.
Interviewer	Maar ja dan natuurlijk iets moderner opgeschreven dan hoe Cardano het zelf had opgeschreven.
Leerling	Ja precies.
Interviewer	Want dat is wel even geleden. En waarom denk je dat wij complexe getallen nodig hebben?
Leerling	Ehm… omdat je anders sommige dingen gewoon niet kan uitrekenen.
Interviewer	Ja. En wil je al die dingen in complexe getallen hebben?
Leerling	Ik denk het liefst zo simpel mogelijk, maar.
Interviewer	Ja, dus als het mogelijk is dan niet.
Leerling	Ja.
Interviewer	Is het altijd mogelijk om van een complex getal een reëel getal te maken?
Leerling	Ehm…, niet altijd toch?
Interviewer	Nee niet altijd. Maar bij die derdegraadsvergelijking.
Leerling	Dan wel.
Interviewer	Dan kwam het dus wel naar voren. En daarvoor zijn ze uiteindelijk dus ook ooit ontstaan.
Leerling	Om wel een oplossing te vinden zegmaar.
Interviewer	Om een reële oplossing te vinden. Dus ja dat is daarmee eigenlijk het belangrijkst van de lessenserie. Heb je verder nog overige opmerkingen of dingen die ik mee moet nemen?
Leerling	Ehm, nou eigenlijk niet. Ik vond eigenlijk dat het wel prima ging. Misschien de volgende keer aan het begin van de les even, ehm, een van de moeilijkste opdrachten bijvoorbeeld even doorspreken.
Interviewer	Ja.
Leerling	Zodat je wat makkelijker naar de volgende les kan. Maar voor de rest vond ik het eigenlijk allemaal heel goed allemaal omschreven en zo ook in deze lessenserie.
Interviewer	Dat is mooi, dat was allemaal duidelijk verder?
Leerling	Ja, volgens mij wel.
Interviewer	Oké, nou dan was dat eigenlijk het belangrijkste.

Bijlage 15: Codering interviews

We hebben de interviews op een aantal punten gecodeerd. Het oplossen van de opgave is hierin bewust niet meegenomen, aangezien alle leerlingen hierin vastliepen. Hierdoor werd dit meer een uitleg dan een daadwerkelijk interview. De reacties van de leerlingen tijdens het maken van de opgave zijn wel relevant voor de les-specifieke leerdoelen. Daarom zullen de belangrijkste leerlingreacties tijdens het doorlopen van de opgave wel weergegeven worden in sectie 5.5.3 hoewel deze hier niet gecodeerd zijn.

Code 1: Niveau

Leerling 1:

- Eh, ik vond hem best wel, ja, moeilijk eigenlijk. Want heel veel dingen die dan eerst een stuk tekst lezen en dan.
- Er is zo veel tekst dat ik er soms helemaal niets van begreep, want ik moet helemaal echt heel veel dingen moet ik gewoon zien, dus ja dat vond ik wel irritant. Juist uit die tekst moest je alles halen.
- Ehm bijvoorbeeld de laatste opgaves van les 2. Maar ook ehm de opgave over dat je eh de abc-formule ook moest eh afleiden. Daar kwam ik ook niet echt uit. Ik had ook wel bij bepaalde dingen van ik heb dit nog vorig jaar gedaan, hoe ging dit ook alweer.
- Oké en ja ook wel de laatste, ja wat was het, 22 en eh 21 die vond ik ook wel lastig.
- *Ehm, waren er opdrachten die je te makkelijk vond?* Hmm nee dat ook niet. Ik had wel bij alle opdrachten dat ik wel gewoon nu moet ik even nadenken.
- De opgaven die ik eigenlijk wel moeilijk vond en ik. Die grote opgaven waar je bijvoorbeeld dingen moest herleiden of eh moest bewijzen.

Leerling 2:

- Nou ik vond het wel moeilijk.
- Ik begreep het niet heel goed de formules en ineens de stukjes tekst vond ik een beetje apart.
- *Welke opdrachten specifiek vond je heel moeilijk?* Hmm vooral die laatste. *De laatste les?* De laatste lessen volgens mij. *Les 2 en 3 of eh.* Ja, vooral les 2 en 3 ja. *Les 1 ging dan wel?* Ja.

Leerling 3:

- Ehm… Ik vond het moeilijk. Ja. Ik, ik heb niet echt het gevoel dat ik het helemaal begrijp.
- Ehm… eh, ja ik vond het moeilijk. Dat was het.
- Ja eh de eerste les ging nog wel omdat dat natuurlijk ook is wat ik zelf heb gehad. Dat vond ik ook niet heel moeilijk, maar die tweede en derde les met die, waar je echt wel uitleg zegmaar kreeg, toen begreep ik eigenlijk niet meer zo goed wat ik moest doen. De uitleg begrijp ik dan tot zekere zin nog wel, maar dan als ik bij een som kom dan loop ik vast van wat moet ik nu doen. Dus dat eigenlijk ja.

En dat had ik ook bij les 3, dat ik niet helemaal. Bij les 3 wist ik vooral niet wat ik moest doen. Toen wist ik helemaal niet meer wat, wat er gebeurde zegmaar.

- *Waren er specifieke opdrachten die je te moeilijk vond?* Ehm… De opdrachten waar je het echt wel zelf moest doen.
- Ja veertien snapte ik zegmaar volgens mij niet. En de laatste twee snapte ik ook niet. Die vond ik ook heel moeilijk deze twee. Daar wist ook niet meer wat ik moest doen.
- Ja die heb ik ook, die heb ik ook niet gemaakt, want die vond ik, die snapte ik niet meer. Ja ik denk dat het de laatste dan is, omdat het natuurlijk de afronding is dan maar alles waarbij je zegmaar meer dan, meer dan twee, drie stappen moest doen daar raakte ik wel vast, daar wist ik het niet meer.
- Ja. Ja, dat oh ja, maar ik liep, bij 12 kwam ik er niet uit. … Ja ik wist waar ik op uit moest komen, ik wist ook wel hoe ik er moest komen, want later in de opgave kwam ik er ook wel achter van dat je eh, p derde tot de macht of eh zegmaar zeventwintigste, hoe je daar moest komen wist ik wel, maar hier kwam ik daar niet op uit.
- Ja die eerste paar opdrachten, maar dat daar kwam ik op zich wel makkelijk doorheen dus ja dat vond ik niet heel erg.
- Ehm, ik denk niet dat ik het zonder het materiaal nog een keertje zou kunnen uitvoeren.

Leerling 4:

- Maar ik vond, ja ik vond het wel heel moeilijk eigenlijk.
- Ik vond op het begin met eh... de abc-formule enzo dat oplossen ging op zich nog wel. Eh. Maar ik vond vanaf, kijk nou vanaf opgave 10 vond ik het wel, werd het wel echt moeilijker zegmaar.
- Ja en helemaal dan les 3 zegmaar.
- En ik denk ehm, omdat les 2 en 3 die vond ik echt wel moeilijk daar begreep ik echt niet heel veel van.
- *Waar had je de meeste moeite mee? …* Even kijken. Ja 22. … Ja die begreep ik echt niet. … A, b en c niet. D op zich, d wel.
- Ik vond op zich, zoals kijk opdracht 5 dat was wel te doen, maar je moest, ik moest wel even nadenken zegmaar.

Code 2: Waardering

Leerling 1:

- Ik vond het in ieder geval ik vind het wel leuk dat er dan wat informatie over. Je krijgt gewoon een stukje geschiedenis over hoe je nou, ja hoe ze er anders zijn opgekomen.
- Ja derdemachtsfunctie enzo oplossen hoe dat dan ehm, ja een beetje die geschiedenis erachter. Vond ik ook wel leuk om te lezen wel een beetje, want dat staat ook helemaal niet in de normale wiskundeboeken dus daarom vond ik die ook wel leuk. En ja, ook omdat er allemaal andere dingen zijn, want je moet nou ja zegmaar één dingetje ja van wiskunde B eh kennen om derdemachtsvergelijkingen op te, ja eh anders eh.

Leerling 3:

- De derde les vond ik wel interessant, omdat het iets wat nieuws is zegmaar, van dat je nog niet echt eerder had gezien. Ja ik wist wel dat i iets was, maar niet wat het dan was zegmaar. Dus ik vond het wel interessant, nou ja dat er nog een nog complexe getallen zegmaar ja bestaan.

Leerling 4:

- Ik denk dat, ik vond het wel leerzaam. Ik vond soms ook wel gewoon uitleg enzo in het boekje gewoon zelf. En dat waren ook wel gewoon dingen die ik nog niet wist zegmaar.
- Maar ik vond het ook wel prima, dat het gewoon iets anders was.
- Ik vond, ja ik vind dat oplossen vind ik altijd wel leuk. En ik vond het ehm. Ook gewoon, ja eigenlijk vond ik dat oplossen gewoon het leukst.
- En op een gegeven moment dacht ik van ja, nu heb ik er eigenlijk niet heel veel zin meer in. Maar, ja.
- Even kijken, ehm… Ik vond met die formules dat vond ik wel interessant. … Met die abc-formule.
- Ja en deze ook. *Opgave 8 met het omschrijven van derdegraadsvergelijkingen zonder die x kwadraat.*
- Ik denk dat het allemaal wel goed aansloot bij de teksten enzo ook, die erbij stonden.
- Ehm. Nou ik vond eigenlijk dat bij elk stukje tekst dat er wel redelijk wat opdrachten waren, waardoor je het wel echt, zegmaar, ging leren. Dus ik denk dat dat op zich wel goed was.
- Ik vond eigenlijk dat het wel prima ging.
- Maar voor de rest vond ik het eigenlijk allemaal heel goed allemaal omschreven en zo ook in deze lessenserie.

Code 3: Sturing/uitleg

Leerling 1:

- *Had je graag meer uitleg van een docent gehad?* Dat wel.
- Nou normaal deed ik zelf, deed ik doorwerken vind ik eigenlijk wel prettig. Ik heb ook, vorig jaar heb ik ook eigenlijk wiskunde alleen gedaan qua zelfstudie. Ehm… ja. Maar bij die boekje vond ik het wel gewoon, was het wel fijn om een docent erbij. En anders in ieder geval dat ik een soort antwoordenboekje eh er in ieder geval bij had, zodat ik ook kon controleren of ik het wel of niet eh goed deed.
- Ja de als de anderen het wel, weet je als je iets niet begrijpt en de anderen begrijpen het wel dan denk ik dat het wel handig is om in een groepje te werken. Maar ik ben zelf dat is dat is natuurlijk hoe ik zelf ben eh meer iemand die, ja die het liefst alleen werkt. En dan eh, ja, dan is soms in een groepje wel fijn, maar soms dan denk je van ja toch weer zelf, want dan weet je precies zelf ja of je het goed eh begrijpt of niet. Dat is bij een groepje soms moeilijker eh te zien.
- Ehm… ja meer voor de lessenserie ja gewoon meer voorbeelden enzo.

Leerling 2:

- *Had je graag meer uitleg van een docent gehad?* Hmm, misschien wel handig want nu moest ik telkens vragen en ik ben niet heel goed in vragen ofzo naar als ik iets niet snap.
- *In een groepje gaan werken aan de opdrachten? Zou dat helpen of?* Nee.

Leerling 3:

- Eh… ja want ik had heel erg dat ik op een gegeven moment, dat ik het niet meer zo goed. Dat ik niet meer wist wat ik moest doen. En dan, ja ik had niet echt een voorbeeldje ofzo. Normaal dan kijk ik of zegmaar met de docent mee. Nou dat doe ik ook niet heel vaak eigenlijk. Ja ik kijk nooit echt met de docent mee met wiskunde maar dan misschien was het nu wel handig geweest aangezien ik dan een voorbeeldje had van hoe die stappen werden uitgewerkt. Want normaal kijk ik eigenlijk altijd gewoon in het antwoordenboek of in de voorbeeldopgaven zodat ik dan weet van hoe het moet, zodat ik het gewoon zegmaar een soort van na kan doen.
- Maar ik had ze wel nodig, zegmaar om het eerste stapje van oh ja daar moet ik of zo of ik moet daarnaartoe of ik moet daarmee beginnen. Dus, ja ik vond ze wel handig. Ik heb ze wel allemaal gebruikt.
- Ehm… Nou ja wat ik altijd zelf denk ik altijd handig vind is dus een voorbeeldopgave. Zoals als ik het nu zie dan denk ik oh ja dat is ook wel logisch, maar dat kan ik dan nou zegmaar niet de eerste keer zelf bedenken omdat het volledig nieuw is. Dus nou ja, wat je misschien kunt doen is dan een voorbeeldopgave geven van nou ja zo werkt het zo dat je wel nou ja soort van.

Leerling 4:

- Ehm… Ik vond meer uitleg denk ik wel iets fijner. Ik vind zelf ehm… als ik het begrijp zegmaar dan vind ik zelf doorwerken wel prettig. Maar ik merkte wel dat ik bij les 2 en 3 werd het wel gewoon echt een stukje moeilijker en daar had ik eigenlijk wel uitleg nodig.
- Uitleg van iemand die het begrijpt ik denk dat dat het handigst is.
- Nee eigenlijk niet. Ik vond de tips die erbij stonden die vond ik wel heel handig. Dat zorgde er soms wel voor dat ik dacht oh ja dat moet je doen of op deze manier kun je het beter doen.
- Ik vond het wel fijn dat het niet tussen de tekst stond, zodat ja, het is niet, dan kon je wel echt kiezen of je het ging lezen zegmaar. En als ik het begreep dan lette ik daar eigenlijk niet echt op, zegmaar.
- Misschien de volgende keer aan het begin van de les even, ehm, een van de moeilijkste opdrachten bijvoorbeeld even doorspreken. Zodat je wat makkelijker naar de volgende les kan.

Code 4: Tijdsduur

Leerling 1:

- Ik heb bij les 1 die ben ik niet echt doorgekomen echt binnen 50 minuten. Eh, les 2 was ik, ja die was ik wel bijna binnen, bijna binnen 1 les had ik die af. Maar les 3 duurde ook wel eh, langer dan 50 minuten.
- *En als je daar hulp bij zou hebben, zodat je er dan iets sneller doorheen kwam omdat je het beter begreep. Zou dat dan, qua tijdsduur, zou dat dan genoeg zijn?* Hmm ik denk dat het voor les 1 nog wel aan de lange kant zou zijn, de andere denk ik niet.

Leerling 2:

- Ja ik heb wel langer eh. Ik vond wel dat de lessen heel lang. Want het is niet dat ik in 50 minuten de hele les af kreeg.
- Ik vond les 1 wel sneller ging, sneller gaan dan andere lessen.
- *Als de rest iets meer uitleg zou geven, de andere lessen. Zou dat dan helpen qua tijdsplanning of?* Hmm ik denk het wel want nu moet je de hele tijd weer terugbladeren en dan uitzoeken wat het nou weer was en dan. Dat scheelt toch weer tijd.

Leerling 3:

- Ik denk, ja want ik heb zelfs nog dingen overgeslagen, dus ik denk dat het sowieso wel wat langer duurde dan 50 minuten, maar misschien is dat ook omdat, als het helemaal nieuw is dat je het dan rustig moet maken in plaats van dat je er snel doorheen kan. En dat je ook alles nog moet terughalen enzo.
- Ik vond het wel lang, ik vond het wel langer dan 50 minuten.
- Eh, 1 duurde natuurlijk daar was ik wel mee klaar in 1 lesuur. Maar 2 en 3 niet.

Leerling 4:

- Daar begreep ik echt niet heel veel van, waardoor het echt heel veel tijd kostte bij elke opgave zegmaar om door te werken.
- Ja van, ja van die eerste les sowieso wel, want die kreeg ik volgens mij ook wel binnen de les af. Eh. Maar van die tweede en derde les ehm… ja toen moest ik er wel nog even thuis mee bezig maar, ja. Ik snapte het op zich wel dat dit zegmaar 1 les zou zijn en dan.
- Ik denk dat als ik het had begrepen dat het dan wel gewoon, gewoon paste.

Code 5: Oplossen derdegraadsvergelijkingen

Leerling 1:

- *Zijn er dingen waarvan je denkt: daar heb ik echt de uitleg voor nodig, anders kom ik er gewoon nooit doorheen?* Eh… ja. Bijvoorbeeld dat van, dat bewijzen van de ehm... Ja hoe je dan derdegraads eh formules oplost dan dat eh. *Die formule van Cardano.* Ja die, ja die eh… wel. Ja ongeveer die vooral.
- Oh jeetje. Zo veel kan ik er niet meer mee.
- Even kijken. *Lange pauze.* Misschien moeten we dan die formule van eh Cardano doen, die moest eh, invullen.
- Ja anders kun je het haast niet oplossen. Want je hebt bijvoorbeeld wel wat je kunt oplossen bijvoorbeeld is x tot de macht 3-9x kwadraat+12x is 0. Dat kun je bijvoorbeeld wel gewoon makkelijk oplossen met haakjes enzo werken. Maar, hier staat nog +40 achter en dat, ja, nou ja ze kunnen niet, dus moesten ze een andere manier, eh.

Leerling 2:

- *Enig idee hoe je opgave a zou kunnen aanpakken?* Hmm. (Lichaamstaal.)
- *Heb je enig idee waarom we derdegraadsvergelijkingen op deze manier oplossen?* (Lichaamstaal.)

Leerling 3:

- Ik was, dit was even een tijdje geleden, dit weet ik niet meer zo goed.
- Ehm… dan was het, dan was het toch dat je dan y moest. Y is dan u+v. Ehm… en dan moest je eh... v in de formule vrijmaken. Ja. … Ja en dan krijg je v of dan v vrijmaken, dus dan huh. Dan moest je toch 3uv+p moest je toch vrijmaken of dan niet?
- *Maar je hebt nu wel een p erbij.* Ja daar liep ik ook vast.

Leerling 4:

- Ja die eerste, dat lukt dan denk ik eigenlijk niet.
- *Weet je waarom we derdegraadsvergelijkingen zo oplossen? Waarom die formule van Cardano?* Nee. *Hoe zijn we op die formule van Cardano gekomen?* Ehm…

Code 6: Nut complexe getallen

Leerling 1:

- Met negatieve wortels te kunnen werken.
- *Zodat je altijd oplossingen hebt, of…?* Eh, nou volgens mij. Nou volgens mij niet altijd. Je eh complexe getallen uiteindelijk wel. Alleen wordt het meestal niet altijd gebruikt.
- Ehm, ik denk omdat je dan de meeste oplossingen nog niet, eh, kloppen.

Leerling 2:

- *Waarvoor denk jij dat we complexe getallen nodig hebben?* Omdat er toch een antwoord uit komt. *En wat voor antwoord? Een complex antwoord of?* Ja.

Leerling 3:

- *Waarvoor denk je dat we complexe getallen nodig hebben?* Eh, ja voor oplossingen vinden die er dan nog niet waren?

Leerling 4:

- *Waarom denk je dat wij complexe getallen nodig hebben?* Ehm… omdat je anders sommige dingen gewoon niet kan uitrekenen.
- *Wil je al die dingen in complexe getallen hebben?* Ik denk het liefst zo simpel mogelijk, maar.
- *En daarvoor zijn ze uiteindelijk dus ook ooit ontstaan.* Om wel een oplossing te vinden zegmaar.