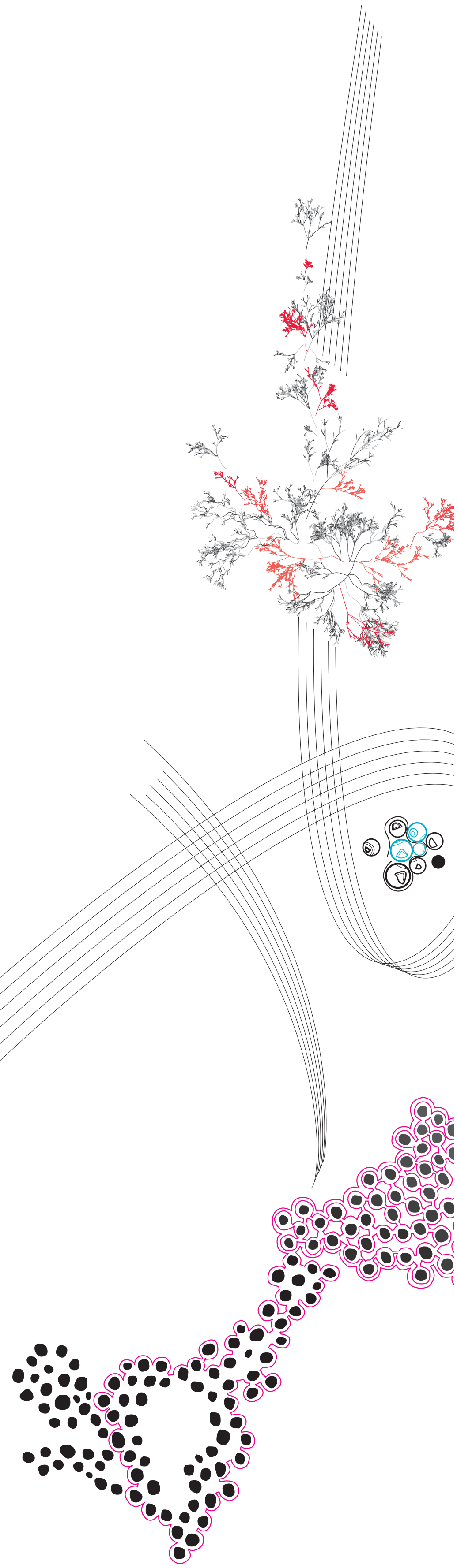


Onderzoek van Onderwijs - Wiskunde

# Het effect van instrumenteel begrip op het ontwikkelen van relationeel begrip

L. R. ten Klooster

Begeleiders: Dr. Ir. Mark Timmer, MSc Wisse van der Meulen

Beoordelaars: Dr. Ir. Mark Timmer, Dr. Ir. Tom Coenen

7 januari 2024

UNIVERSITY OF TWENTE.

# Samenvatting

In het vwo wiskunde B-onderwijs is een belangrijk onderwerp goniometrische functies. Veel leerlingen in de bovenbouw van het vwo hebben moeite om deze stof onder de knie te krijgen, en ook al bezitten ze wel instrumenteel begrip, vaak is er bij deze leerlingen een gebrek aan relationeel begrip van de stof. Uit een onderzoek blijkt bovendien dat de aanwezigheid van instrumenteel begrip mogelijk verhindert dat leerlingen relationeel begrip kunnen verkrijgen. In dit onderzoek is een lessenserie ontworpen met het doel relationeel begrip te kweken bij 5 vwo wiskunde B-leerlingen voor het onderwerp goniometrische functies. Hiervoor zijn ontwerpeisen en leerdoelen opgesteld die passen bij de doelgroep en de materie. De lessenserie is voorgelegd aan een expertpanel en aan de hand van de verkregen feedback uitgevoerd in een klas 5 vwo wiskunde B, die is opgesplitst in twee groepen. De eerste groep leerlingen heeft alleen de relationele lessenserie gevolgd, de tweede groep leerlingen kreeg eerst een les op instrumentele wijze, gevolgd door de relationele lessenserie. Alle leerlingen uit de klas hebben vervolgens een toets gemaakt en een deel van deze leerlingen heeft ook deelgenomen aan individuele interviews. Er is een analyse verricht over het lesmateriaal, de resultaten van de toets en de uitwerkingen van de interviews. We concluderen dat de lessenserie niet volledig voldoet aan alle ontwerpeisen, maar dat met enkele aanpassingen dit wel het geval zou zijn. Daarnaast stellen we vast dat er geen significant verschil is in relationeel begrip van de stof tussen de twee groepen leerlingen. We kunnen dus niet aantonen dat de aanwezigheid van instrumenteel begrip effect heeft gehad op het ontwikkelen van relationeel begrip bij het onderwerp goniometrische functies.

# Inhoudsopgave

# 1 Inleiding

Dit onderzoek gaat over relationeel begrip van leerlingen op het gebied van goniometrische functies. Veel docenten kunnen bevestigen dat leerlingen moeite hebben met het toepassen van hun kennis over de sinus, cosinus, en tangens. Leerlingen zien de goniometrische functies vaak meer als een trucje om te gebruiken in rechthoekige driehoeken, dan dat ze inzien dat het echt functies zijn en wat de relatie tot de eenheidscirkel is. Ook uit literatuur is het duidelijk dat leerlingen veel moeite hebben met dit onderwerp (Sayster, 2023; Mensah, 2017; Dhungana e.a., 2023). Zo kunnen ze vaak wel de aangeleerde rekenregels van de goniometrie onthouden, maar kunnen ze lastig uitleggen waar die regels vandaan komen of hoe die in nieuwe situaties kunnen worden toegepast. Ook zijn ze vaak niet goed in staat uit te leggen wat concepten als radialen of de eenheidscirkel inhouden, of wat de relatie tussen sinusoïden en de eenheidscirkel is. Ook de docenten op de middelbare school waar dit onderzoek is uitgevoerd merkten op dat leerlingen moeilijk de connectie kunnen leggen van het idee van het gebruik van de sinus en cosinus in een driehoek naar sinus en cosinus als functie. Daarom wordt er in dit onderzoek lesmateriaal ontworpen met de bedoeling beter deze connectie te leggen, en dus te focussen op het ontwikkelen van relationeel begrip (Skemp, 1976).

Daarnaast wordt een ander aspect onder de loep genomen, namelijk het mogelijke effect van aanwezige instrumentele kennis op het ontwikkelen van relationele kennis. Sinds Skemp in 1976 zijn artikel over de twee verschillende soorten kennis heeft gepubliceerd, is er veel onderzoek gedaan naar instrumenteel en relationeel begrip onder leerlingen. Tijdens het bestuderen van literatuur viel één onderzoek erg op van Pesek en Kirshner (2000), waarin een deel van de leerlingen alleen relationele instructie kregen, en een ander deel van de leerlingen eerst instrumentele instructie, gevolgd door relationele instructie. Wat bleek, de leerlingen die alleen relationele instructie hadden gekregen, scoorden beter. Pesek en Kirshner trokken dus de conclusie dat instrumenteel begrip kan verhinderen dat relationeel begrip wordt ontwikkeld. Er is hier verder nog niet heel veel meer onderzoek naar gedaan, en vandaar dat dit onderzoek ook zal kijken naar wat het mogelijke effect is van instrumenteel begrip op het kweken van relationeel begrip.

Dit leidt tot de volgende twee onderzoeksvragen:

*"Hoe kan lesmateriaal eruit zien bij het onderwerp goniometrische functies met het doel om relationeel begrip te ontwikkelen?"*

*"Wat is bij leerlingen het effect van de aanwezigheid van instrumenteel begrip op het ontwikkelen van relationeel begrip bij het onderwerp goniometrische functies?"*

Om dit te onderzoeken is er een lessenserie ontworpen met het doel om relationeel begrip te kweken. Twee groepen leerlingen hebben, onafhankelijk van elkaar, deze lessenserie gevolgd, waarbij één groep leerlingen daarvoor een les op instrumentele wijze heeft gehad. Met behulp van een toets en een aantal interviews wordt er vervolgens geanalyseerd wat voor kennis de leerlingen op hebben gedaan.

Dit onderzoek heeft de volgende structuur. In hoofdstuk 2 bespreken we met behulp van literatuur wat instrumenteel en relationeel begrip inhouden, wat voor onderzoek ernaar is gedaan, en hoe er relationeel begrip bij goniometrische functies ontwikkeld kan worden. In hoofdstuk 3 worden de ontwerpeisen en leerdoelen besproken waaraan de lessenserie moet voldoen. Hoofdstuk 4 bespreekt de opzet van het onderzoek, waaronder de respondenten, instrumenten, en de analyse ervan. In hoofdstuk 5 wordt het lesmateriaal besproken, en de toets en de interviews geanalyseerd. Tot slot zullen we de bevindingen samenvatten in hoofdstuk 6 en tot een conclusie komen met betrekking tot onze onderzoeksvragen.

# 2 Theoretisch kader

In dit hoofdstuk wordt alle benodigde theorie en literatuur uiteengezet wat nodig is voor dit onderzoek. In sectie 2.1 worden de begrippen relationeel en instrumenteel begrip uiteengezet. Sectie 2.2 gaat in op operationeel en structureel begrip, aan de hand van het artikel van Anna Sfard. Sectie 2.3 gaat in op gerelateerde onderzoeken aan deze begrippen. Tot slot zetten we in sectie 2.4 uiteen wat de moeilijkheden zijn bij het kweken van begrip bij goniometrische functies en gaan we in op een alternatieve aanpak in de didactiek van dit onderwerp.

## 2.1 Relationeel en instrumenteel begrip

Relationeel begrip en instrumenteel begrip zijn twee didactische concepten in het wiskundeonderwijs die slaan op de manier waarop individuen wiskunde begrijpen en toepassen. De oorsprong van deze begrippen ligt bij Richard Skemp. In zijn (ondertussen beroemde) artikel "Relational understanding and instrumental understanding" stelt hij dat het idee van 'begrijpen' verschillend geïnterpreteerd kan worden door verschillende mensen, en dat er in de basis twee soorten begrip zijn, en eigenlijk dus ook twee manieren om wiskundeonderwijs te geven (Skemp, 1976). Relationeel begrip draait om het begrijpen van de diepere structuren binnen de wiskunde, waarbij leerlingen in staat zijn om concepten flexibel toe te passen in verschillende contexten. Het draait dus niet alleen om het kennen van regels en procedures, maar ook om het begrijpen van de redenen en logica erachter, en om relaties en onderlinge verbindingen tussen verschillende concepten. Daarentegen draait het bij instrumenteel begrip om het beheersen van wiskunde op een meer oppervlakkig niveau, en dus voornamelijk gericht op het volgen van de regels en procedures zonder echt begrip van de onderliggende concepten te hebben. Leerlingen met instrumenteel begrip zijn vaak goed in staat om standaard, vaak contextvrije opgaven op te lossen en hebben meer moeite met het toepassen van deze kennis in onbekende, en/of context-rijkere situaties.

Skemp heeft een overduidelijke voorkeur voor het kweken van relationeel begrip bij leerlingen in het wiskundeonderwijs. Hij lijkt ook een aantal beweegredenen voor instrumenteel begrip te schetsen, maar die schetst hij uiteindelijk vooral om ze vervolgens te ontkrachten, waarop hij toch weer doorgaat op de voordelen van relationeel begrip. Een voordeel van instrumenteel begrip is dat het leerlingen snel leren hoe je efficiënt een wiskundige berekening maakt en standaard opgaven oplost. Instrumenteel begrip is over het algemeen gericht op het aanleren van specifieke stappenplannen en daardoor stelt het leerlingen in staat om gemakkelijk vertrouwd te raken met de standaardprocedures in vakgebieden in de wiskunde. Het kan erg nuttig zijn om een simpele basis te leggen voor verdere wiskundige vaardigheden en toepassingen, zonder dat het te veel tijd hoeft te kosten. Daarnaast is het gemakkelijker dan bij relationeel begrip om al snel een standaardvraag goed te kunnen maken. Hierdoor krijgen leerlingen snel zelfvertrouwen en geeft het ze een gevoel van voldoening. Relationeel begrip daarentegen kan voor sommige leerlingen, vooral in de beginfase van een nieuw onderwerp, moeilijker zijn, omdat het meer abstractie en kritisch denken vereist. Dit kan leerlingen ook tegenstaan omdat ze niet gelijk een succeservaring hebben, wat er makkelijker toe kan leiden dat ze willen opgeven. Bovendien vergt het vaak meer tijd en inspanning om relationeel begrip te ontwikkelen, zowel bij leerlingen als docenten. Omdat er een diepere analyse van concepten en de relaties daartussen nodig is, is er vaak meer begeleiding en ondersteuning van de docent nodig.

Aan de andere kant heeft relationeel begrip ook enkele belangrijke voordelen. Ten eerste bevordert het een dieper begrip van wiskundige concepten, wat bovendien ook langer blijft hangen. Als je snapt hoe bepaalde regels zijn ontstaan, kan je makkelijker zelf reproduceren, en je hoeft bovendien de regels niet uit het hoofd te leren. Door de nadruk te leggen op de onderliggende connecties tussen concepten, kunnen leerlingen een flexibeler begrip ontwikkelen en wiskunde in verschillende contexten toepassen. Relationeel begrip stimuleert kritisch denken, probleemoplossing en het vermogen om nieuwe situaties te analyseren. Daarentegen leidt instrumenteel begrip vaak tot een meer oppervlakkig leerproces, waarbij het niet nodig is dat leerlingen de achterliggende gedachte van stappenplannen of werkschema's snappen. Dit kan ertoe leiden dat leerlingen niet in staat zijn die nieuwe situaties effectief te analyseren en hun kennis dan toe te passen. Bovendien kan die beperking tot de vaste stappen juist het creatieve denkvermogen van leerlingen inperken doordat ze deze nooit hebben hoeven gebruiken hiervoor.

Aan de hand van deze voor- en nadelen lijkt het, volgens Skemp, logischer om, de langetermijn-effecten in gedachten houdend, meer naar relationeel begrip te neigen. Maar toch zijn er redenen dat docenten vaak (en mogelijk onbewust) kiezen voor het benadrukken van instrumenteel begrip. In het middelbaar onderwijs is plek gemaakt voor (meestal) drie tot vier lesuren wiskunde in de week, wat simpelweg niet altijd genoeg tijd geeft voor het kweken van relationeel begrip. Soms vergt het ook een te hoog denkniveau van leerlingen om op relationeel vlak de stof aan te bieden, maar moeten ze wel (delen van) de stof kunnen toepassen bij examens of bij een ander vak. In die gevallen kan het verstandiger zijn dan toch maar de 'trucjes' aan te leren. Daarnaast kan het ook afhangen van de lesmethode die wordt aangeboden op de school, waarvan docenten, en startende docenten al helemaal, toch behoorlijk afhankelijk zijn. Als er dan binnen een klas leerlingen zijn met erg variërende behoeften betreffende hun ontwikkeling van wiskundig begrip, maakt dit alles het soms lastig voor docenten om te sturen richting relationeel begrip.

## 2.2 Operationeel en structureel begrip

Een andere manier om te kijken naar wiskundig begrip is beschreven door Anna Sfard in haar artikel waar er wordt gekeken naar de dualiteit tussen enerzijds operationeel begrip van wiskundige begrippen en anderzijds structureel begrip (Sfard, 1991). Ze stelt dat operationele conceptie draait om het zien van wiskundige begrippen als een proces, iets wat dynamisch is, terwijl structurele conceptie meer slaat op het interpreteren van wiskundige begrippen als abstracte en statische objecten. Sfard pleit ervoor dat deze twee concepten niet gescheiden kunnen worden, maar dat het verschillende aspecten of zienswijzen van hetzelfde concept zijn. Operationeel begrip is juist nodig om structureel begrip te ontwikkelen. Er zijn drie stappen om naar structureel begrip te komen. De eerste stap is verinnerlijking, waarin de leerling kennismaakt met het proces waardoor een nieuw concept wordt geïntroduceerd. De tweede stap is condensatie, waarin de leerling het nieuwe concept steeds meer als een geheel proces ziet. De derde stap is reïficatie, waarin de leerling het concept als proces los laat en het als een losstaand, abstract begrip ziet. Sfard beweert dus dat vanuit operationeel begrip door middel van deze stappen structureel begrip ontstaat.

Belangrijk om te beseffen is dat operationeel en structureel niet geheel overeenkomen met instrumenteel en relationeel begrip. Waar relationeel begrip en instrumenteel begrip elkaar uitsluiten, hebben we hierboven benoemd dat dit niet het geval hoeft te zijn voor structureel en operationeel begrip. Sfard benoemt zelf in haar artikel ook dat structureel begrip waarschijnlijk veel overeenkomsten heeft met wat Skemp bedoelt met relationeel begrip, waarin vooral wordt geduid op het het idee dat hierbij leerlingen weten zowel *wat* ze moeten alswel *waarom* ze datgene moeten doen. Maar men zou ook kunnen beredeneren dat operationeel begrip, het zien van een wiskundig begrip als proces, wel degelijk relationeel kan worden aangeleerd. Iemand kan immers nog steeds diepgaande kennis hebben van een wiskundig begrip en deze kennis kunnen toepassen in een nieuwe situatie, terwijl het begrip nog steeds als een proces wordt gezien. Daarentegen lijkt structureel begrip moeilijk te kunnen worden gekoppeld met instrumenteel begrip, aangezien structureel begrip wel inzicht vereist van het wiskundige object en instrumenteel begrip vooral draait om het *wat* en niet het *waarom.*

Sindsdien zijn er tal van onderzoeken gedaan naar relationeel begrip en instrumenteel begrip bij leerlingen in wiskundeklassen van allerlei niveaus.

## 2.3 Gerelateerd onderzoek

Het onderzoek van Pesek en Kirshner (2000) onderzocht het effect van instrumentele instructie op relationeel leren. Ze ontdekten dat wanneer studenten eerst instrumentele instructie kregen, dit negatieve invloed had op hun vermogen om later relationeel begrip te ontwikkelen (Pesek en Kirshner, 2000). Het lijkt er hieruit op dat de focus op het aanleren van regels en procedures zonder diepgaand begrip van de onderliggende concepten de ontwikkeling van relationeel begrip kan verhinderen. Zoals hierboven beschreven, is relationeel en structureel begrip niet precies hetzelfde - dit geldt ook voor instrumenteel en operationeel begrip -, maar als we nu terugkijken naar het artikel van Sfard over operationeel en structureel begrip, lijkt er toch wat tegenstrijdigheid te zijn. Sfard beweert namelijk dat het bevorderlijk kan zijn om structureel begrip vanuit operationeel begrip te ontwikkelen. Pesek en Kirshner beweren dat het *niet* bevorderlijk is dat instrumenteel begrip voorgaat aan relationeel begrip. Dus ook al is relationeel begrip niet precies hetzelfde als structureel begrip, spreekt de uitkomst van het onderzoek van Pesek en Kirshner toch Sfard een beetje tegen. Dit zet dus zeker aan tot denken. Waar volgens Sfard bij structureel begrip het bevorderlijk is om eerst operationeel begrip te ontwikkelen, lijkt het ontwikkelen van instrumenteel begrip juist te verhinderen dat er relationeel begrip kan ontstaan.

In het onderzoek van Pesek en Kirshner wordt ook een gedacht nadeel van relationeel begrip weerlegd: het tijd-tekort. Er waren twee lessenseries gegeven met een verschillende opzet: de ene lessenserie bestond uit vijf dagen instrumentele instructie gevolgd door drie dagen relationele instructie, en de andere lessenserie had alleen drie dagen instrumentele instructie. Het bleek dat dus dat de groep die alleen relationele uitleg kreeg beter scoorde, terwijl ze in totaal minder lestijd hadden.

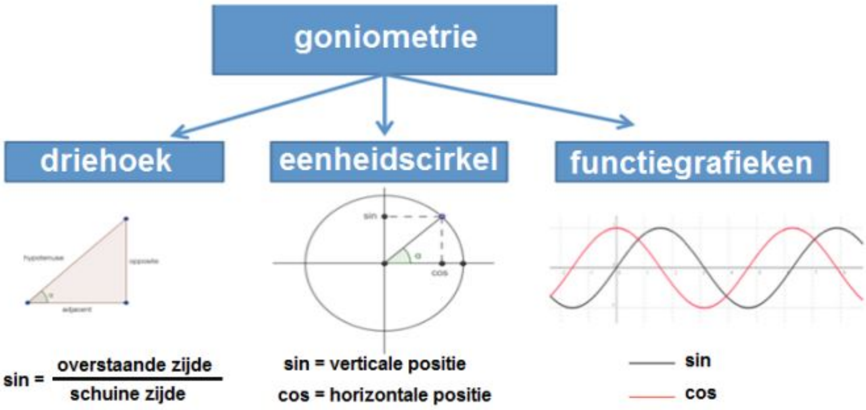
Naar aanleiding van het onderzoek van Pesek en Kirshner zijn er meer onderzoeken gedaan naar instrumentele instructie voorafgaand aan relationele instructie en hoe de aanwezigheid van instrumenteel begrip kan verhinderen dat relationeel begrip wordt ontwikkeld bij leerlingen. Een studie van Wearne en Hiebert (1988) ontdekte dat de aanwezigheid van instrumenteel begrip van het decimale systeem het ontwikkelen van relationeel begrip van dit onderwerp inderdaad kon belemmeren (Wearne en Hiebert, 1988). Ze observeerden dat studenten die zich voornamelijk richtten op het volgen van regels en procedures, moeite hadden om diepere relaties en verbindingen tussen concepten te begrijpen. Ook het onderzoek van Mack duidt aan dat voorkennis gebaseerd op routines en procedurele berekeningen kan verhinderen dat leerlingen een betekenisvol gevoel van begrip krijgen van een concept (in dit geval rekenen met breuken) (Mack, 1990). Het blijkt wel vanuit alle hiervoor genoemde onderzoeken dat er een sterke behoefte is aan meer onderzoek om goed vast te kunnen stellen of instrumenteel begrip verhindert dat relationeel begrip goed kan ontwikkelen.

## 2.4 Goniometrische functies

Over het algemeen hebben leerlingen van verschillende niveaus veel moeite met het onderwerp goniometrische functies op de middelbare school. Dit blijkt zowel uit onderzoek (Blackett en Tall, 1991; Gur, 2009; Weber, 2008) als uit ervaring van vele docenten. In de onderbouw van het vwo leren leerlingen hoe ze de sinus, cosinus, en tangens kunnen gebruiken als verhoudingen van zijden in rechthoekige driehoeken. In de vierde klas gaan ze hiermee door en wordt dit uitgebreid naar de sinusregel en cosinusregel in scherphoekige en stomphoekige driehoeken. In de vijfde klas komt het onderwerp 'eenheidscirkel' naar voren, en hiervan uit wordt er de link gelegd met de sinus en cosinus als reële functies. In de praktijk blijkt dat leerlingen veel moeite hebben met de eenheidscirkel, en het bijkomende begrip 'radiaal', omdat deze nogal uit de lucht komen vallen. Vervolgens is de stap om de sinus en cosinus als functies te gaan zien, en niet alleen als manier om hoeken en zijden in rechthoekige driehoeken aan elkaar te relateren, erg lastig en dit wordt vaak niet gevat door leerlingen. Heck heeft de drie verschillende werkvelden die aan bod komen bij de sinus en cosinus bijzonder mooi samengevat in figuur 1 (Heck, 2012).

Het artikel van Heck pleit ervoor dat het onderwijs meer aandacht moet verleggen naar de representaties 'eenheidscirkel' en 'functiegrafieken', en dan met name ook te focussen op de volgorde waarop de representaties worden geïntroduceerd bij de leerlingen. Figuur 2 laat zien dat volgorde in de zogenaamde traditionele aanpak verschilt van de volgorde in zijn voorgestelde alternatieve aanpak.

De traditionele aanpak wordt gebruikt in een van de meeste populaire wiskundemethodes op het middelbaar onderwijs in Nederland, namelijk Getal & Ruimte. Het onderwerp goniometrische

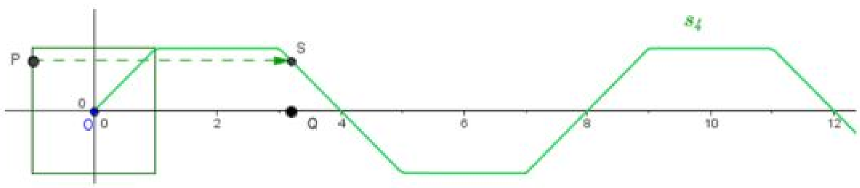



FIGUUR 1: Verschillende representaties bij goniometrie (Heck, 2012).


FIGUUR 2: Traditionele versus alternatieve aanpak van goniometrie (Heck, 2012).

functies komt in de bovenbouw van het vwo aan bod in hoofdstuk 8 van Getal & Ruimte, editie 12, wiskunde B. De eerste nieuwe stof van het hoofdstuk behandelt de eenheidscirkel en stelt daar gelijk de definitie van de sinus en cosinus vast. Nadat dit gebruikt wordt in opgaven om de coördinaten van punten op de eenheidscirkel en bijbehoren de hoeken te berekenen, gaat de methode door op radialen in de eenheidscirkel. In de volgende paragraaf komt de methode aan bij de representatie functiegrafieken, zoals besproken door Heck, door de sinusfunctie, en later de cosinusfunctie, te introduceren. Dit laat zien dat de methode inderdaad de traditionele volgorde van representaties volgt zoals Heck stelt. De theorieblokken die horen bij deze paragrafen kunnen gevonden worden in Bijlage A.

De aanpak die Heck voorstelt in zijn artikel, is die van een zogenaamde 'opwindfunctie'. Het idee hiervan is dat de leerlingen beginnen met een eenheidsvierhoek, oftewel een regelmatige vierhoek met zijde 2, waarvan het midden in de oorsprong van het assenstelsel ligt. Leerlingen beginnen met het tekenen, met de hand, van een grafiek van de hoogte van een punt terwijl dit punt, tegen de wijzers van de klok in, over de vierhoek beweegt. Figuur 3 illustreert het idee hiervan.




FIGUUR 3: Grafiek van de functie van een bewegend punt over een regelmatige vierhoek.

Deze constructie kan worden uitgebreid naar een regelmatige $n$-hoek, waarbij $n$ verschillende waardes aanneemt, om de leerlingen steeds een functie te laten tekenen van een bewegend punt over de regelmatige $n$-hoek, waarbij ook gebruik wordt gemaakt van GeoGebra om dit goed te kunnen visualiseren. Uiteindelijk krijgen de leerlingen een regelmatige 30-hoek voor hun neus, die uiteraard qua vorm al erg lijkt op de eenheidscirkel. Op deze manier leren de leerlingen eigenlijk al de sinusfunctie tekenen, al weten ze nog niet dat dit de sinusfunctie is. Op deze manier gaat de alternatieve aanpak van Heck eerst naar de voorstelling van goniometrische functies via een grafiek, en maakt hij daarna pas de stap naar de eenheidscirkel. Dit onderzoek is later nogmaals op grotere schaal uitgevoerd door een student van Heck (Demir, Heck e.a., 2013), en de resultaten bleken erg positief te zijn. Leerlingen bleken meer begrip van de verschillende representaties van goniometrische functies te hebben en minder misconcepties dan hiervoor uit literatuur bleek, en het begrip van de sinus en cosinus als functies leek zeker aanwezig.

Er is meer onderzoek gedaan naar het begrip van goniometrische functies in verschillende representaties. Bijvoorbeeld het artikel van Alberink e.a. uit 2011 focust specifiek op de overgang van meetkundig naar analytisch begrip van de sinus (Alberink e.a., 2011). Hierin wordt stapsgewijs duidelijk gemaakt hoe de definitie van de sinus als verhouding van twee zijden in een rechthoekige driehoek kan worden uitgebreid naar de sinus als functie van een hoek in de eenheidscirkel. Dit is vergelijkbaar met een onderzoek uitgevoerd in Indonesië, waar een gelijkwaardige lessenserie is uitgevoerd, ook met de bedoeling om de connectie tussen de sinus en cosinus in rechthoekige driehoeken en de sinus en cosinus in de eenheidscirkel te verstevigen (Maknun e.a., 2019).

# 3 Ontwerpeisen en leerdoelen

In dit hoofdstuk worden de ontwerpeisen en leerdoelen beschreven waaraan de lessenserie moet voldoen. Deze worden gebruikt in de volgende hoofdstukken om het lesmateriaal te evalueren, en ook de resultaten van de leerlingen te analyseren op het eind.

## 3.1 Ontwerpeisen

De ontwerpeisen voor de lessenserie zijn als volgt.

1. *De lessenserie is in drie lessen van 40 minuten uit te voeren.*
   De lessenserie is bedoeld om leerlingen basiskennis te geven van de eenheidscirkel en radialen en dit te kunnen gebruiken in het hoofdstuk 'Goniometrische functies' van Getal & Ruimte. Het dient (grotendeels) als vervanging voor de eerste paragraaf van dit hoofdstuk. Aangezien op de school waar de lessenserie wordt uitgevoerd er lessen van 40 minuten zijn, is ervoor gekozen om drie lessen van 40 minuten te besteden aan de relationele lessenserie.

2. *De lessenserie sluit aan op het wiskunde B-niveau van vwo-leerlingen aan het begin van 5 vwo.*
   De lessenserie dient als introductie voor een hoofdstuk dat normaliter uitgevoerd wordt in een klas 5 vwo wiskunde B. Ze hebben voorkennis nodig van het gebruik van de sinus en cosinus in rechthoekige driehoeken, die wordt behandeld in klas 4 vwo, vandaar dat de lessenserie aan moet sluiten op de kennis van een wiskunde B-leerling uit klas 5 vwo.

3. *De lessenserie voldoet aan de leerdoelen zoals hieronder benoemd.*
   De lessenserie zelf moet qua inhoud ook voldoen aan een aantal leerdoelen. Deze leerdoelen worden hieronder besproken.

## 3.2 Leerdoelen

Het is de bedoeling dat aan het eind van de lessenserie leerlingen bepaalde kennis hebben opgedaan die ondersteunend is voor de rest van het hoofdstuk. Aangezien het doel van de lessenserie is om te onderzoeken of er relationeel begrip aanwezig is, zijn deze leerdoelen ook zoveel mogelijk opgesteld om relationeel begrip te bereiken. Hieronder worden de algemene leerdoelen van de lessenserie uitgewerkt die de leerlingen zouden moeten hebben behaald aan het eind van de lessenserie. Aan de hand hiervan zijn ook leerdoelen per les opgesteld, deze zijn te vinden in hoofdstuk 5.3. De algemene leerdoelen worden ook gebruikt in de toets aan het eind te kijken welke vaardigheden de leerlingen bezitten. Niet al deze leerdoelen kunnen alleen gehaald worden als de leerling relationeel begrip bezit, maar soms ook met instrumenteel begrip. Per leerdoel wordt er dan ook kort toegelicht van wat soort begrip er sprake is als dit leerdoel is behaald.

1. *De leerling kan uitleggen wat de eenheidscirkel is en wat het te maken heeft met de sinus/cosinus.*
   Leerlingen kunnen waarschijnlijk ook met instrumenteel begrip iets over de eenheidscirkel zeggen. Bijvoorbeeld, dat het gaat om een cirkel met straal één. Maar als de leerling ook beschikt over relationeel begrip, dan kan de leerling toelichten dat het middelpunt van de cirkel in de oorsprong moet liggen, want dan kan je gebruik maken van de eigenschappen van de cirkel om uit te leggen waarom de sinus en de cosinus gebruikt kunnen worden om de coördinaten van punten op de cirkel te berekenen.

2. *De leerling kan uitleggen wat de interpretatie van de input en output van de sinusfunctie/cosinusfunctie is.*
   Dit is een leerdoel dat puur relationele kennis toetst. Met instrumenteel begrip kunnen leerlingen over het algemeen nog prima berekeningen met de sinusfunctie en cosinusfunctie uitvoeren, maar ze kunnen niet onderbouwen wat de functie precies voorstelt. Het is hierbij niet de bedoeling dat de leerling de definitie van de sinus of cosinus in rechthoekige driehoeken gebruikt, maar kan uitleggen wat de interpretatie is van de sinus/cosinusfunctie voor inputs die ook buiten het interval van hoeken tussen de nul en 90 graden zijn. Als de leerling

kan beredeneren dat de input (invoer) van de sinusfunctie de middelpuntshoek van punten op de cirkel is en de output (uitvoer) de hoogte (y-coördinaat) van het bijbehorende punt, dan duidt dat op relationeel begrip.

3. *De leerling kan met behulp van het verband tussen de eenheidscirkel en de grafiek van de (co)sinus uitleggen waar de eigenschappen periodiciteit, domein en bereik van de (co)sinus vandaan komen.*
   De leerling moet eigenschappen van de eenheidscirkel gebruiken om uit te leggen waarom de (co)sinus een bepaald domein, bereik, en periodiciteit heeft. Als de leerling instrumenteel begrip bezit, kan er wel worden gegeven wat het domein, bereik en periodiciteit is van de (co)sinus, maar als er wordt beredeneerd vanuit de eenheidscirkel waarom dit zo is en waar dit vandaan komt, dan duidt dit aan dat de leerling relationeel begrip bezit.

4. *De leerling kan de x/y-coördinaat van punten op de eenheidscirkel berekenen aan de hand van de booglengte.*
   De berekening zelf kan ook worden uitgevoerd met bezit van instrumenteel begrip, aangezien veel waardes van punten op de eenheidscirkel uit het hoofd kunnen worden geleerd aan de hand van de booglengte/middelpuntshoek. Als de leerling kan toelichten waarom bepaalde stappen worden genomen, er een tekening bij maakt, en/of zonder berekeningen kan beredeneren wat de coördinaten zijn, dan duidt dit al op meer relationeel begrip.

5. *De leerling kan uitleggen wat radialen zijn in het geval van de eenheidscirkel.*
   Dit is een leerdoel wat zeker getuigt van relationeel begrip bij leerlingen. In het algemeen hebben leerlingen al moeite met het gebruiken van radialen, juist omdat er relationeel begrip van het onderwerp ontbreekt (Orhun, 2004; Heck, 2012). Als een leerling kan uitleggen wat radialen zijn, en hoe het in elkaar steekt in het geval van de eenheidscirkel, dan laat dit duidelijk zien dat ze diep begrip hebben van de situatie. Leerlingen zouden dit leerdoel in principe ook kunnen halen door te onthouden dat de grootte van een hoek in radialen de verhouding is tussen de booglengte die bij een middelpuntshoek van een cirkel past en de straal van deze cirkel. Als leerlingen alleen instrumenteel begrip bezit zullen ze dit niet verder kunnen toelichten, maar als er sprake is van relationeel begrip, kunnen ze ook toelichten wat radialen zijn in cirkels met een straal ongelijk aan één, of in ieder geval kunnen uitleggen dat een andere straal invloed heeft op de verhouding tussen de straal en booglengte van een cirkel, en dat is van belang bij radialen.

6. *De leerling kan radialen omrekenen naar graden en vice versa.*
   Dit leerdoel kan goed behaald worden met instrumenteel begrip. Het blijft belangrijk dat leerlingen deze berekeningen kunnen uitvoeren voor dit onderwerp, en ook zonder te snappen wat radialen precies zijn, want er is een simpele berekening die ze uit het hoofd kunnen leren om radialen om te rekenen naar graden (en vice versa).

# 4 Methode

In dit hoofdstuk bespreken we de onderzoeksmethode die is gebruikt voor dit onderzoek. In sectie 4.1 en 4.2 bespreken we de onderzoeksopzet door in te gaan op de context en procedure van het onderzoek. Sectie 4.3 zet uiteen welke respondenten hebben meegewerkt aan dit onderzoek. Tot slot beschrijft sectie 4.4 welke instrumenten we hebben gebruikt en hoe we deze hebben geanalyseerd om onze onderzoeksvragen te kunnen beantwoorden.

## 4.1 Context

Dit onderzoek is uitgevoerd in het najaar van het schooljaar 2023-2024. In deze periode werd het hoofdstuk ‘Goniometrische functies’ behandeld in klas 5 vwo wiskunde B op het Canisius in Almelo. Wiskundedocenten op deze school merkten dat dit hoofdstuk als erg lastig werd ervaren door leerlingen en dat er gebrek was aan diepgaand begrip van de stof van dit hoofdstuk. Daarom is gekozen om het onderzoek uit te voeren bij dit hoofdstuk, om te kijken of deze manier van lesgeven invloed zou hebben op de mate van aanwezigheid van relationeel begrip bij de leerlingen. De lessenseries zijn uitgevoerd aan het begin van het hoofdstuk, om een zo sterk mogelijke basis te kunnen vormen voor de rest van het hoofdstuk. Helaas was er dit jaar maar één (kleine) klas 5 vwo wiskunde B op de school. Dit bleef alsnog de meest geschikte manier om het onderzoek uit te voeren, omdat de betreffende school ook de stageschool was van de student die dit onderzoek heeft uitgevoerd.

## 4.2 Procedure

Voor de start van de lessenseries is er gekeken naar de cijfers van alle leerlingen uit de klas, die zijn gebruikt om te bepalen welke leerling in welke groep werd gezet. Om de meest realistische resultaten te krijgen, zouden de leerlingen van de twee groepen een gelijkwaardig niveau van wiskunde moeten hebben. De leerlingen zijn daarom opgesplitst op basis van hun cijfer voor wiskunde B uit klas 4. Het gemiddelde cijfer van beide groepen was een 7,1, en er waren twee leerlingen die doorgestroomd waren vanuit 5 havo, die ook werden gesplitst over de twee groepen. Om te kijken in hoeverre de aanwezigheid van instrumenteel begrip het ontwikkelen van relationeel begrip verhindert, kreeg de eerste groep leerlingen eerst een les de stof uitgelegd op instrumentele wijze, gevolgd door drie lessen waarbij het onderwerp op relationele wijze wordt benaderd. Deze groep wordt vanaf nu de IRRR-groep genoemd (staande voor één les instrumenteel en drie lessen relationeel). Bij de tweede groep leerlingen lieten we de instrumentele les weg en behouden we alleen de relationele lessen. Deze groep leerlingen noemen we vanaf nu de RRR-groep (staande voor drie lessen relationeel). Beide groepen hebben na de lessenserie een korte toets gekregen, met als doel te testen wat de behaalde kennis van de leerlingen is, en in hoeverre deze kennis relationeel is. Van beide groepen werden vervolgens, dus na de toets, drie leerlingen geïnterviewd. In dit interview werd er dieper ingegaan op een aantal vraagstukken van vergelijkbaar niveau als de toets, en de leerlingen werden gevraagd hardop na te denken en hun antwoorden toe te lichten. Ook werd er de tijd genomen om te vragen wat de leerlingen van de lessenserie vonden.

De stof in de lessenseries is bedoeld als introductie op het onderwerp ‘goniometrische functies’, zoals die in hoofdstuk 8 van de methode Getal & Ruimte voor wiskunde B, editie 12, uiteen is gezet. Tijdens de lessenserie is het grootste deel van de stof van paragraaf 8.1 ‘Eenheidscirkel en radiaal’ behandeld en een deel van paragraaf 8.2 ‘Sinusoïden’. Voor de IRRR-groep is er eerst een les op een deel van de stof ingegaan op instrumentele wijze, waarin de theorieblokken A, C en D van paragraaf 8.1 zijn gebruikt als basis. Een aantal bijbehorende opdrachten van het hoofdstuk zijn gebruikt als oefenmateriaal, en de leerlingen hebben na deze les instrumentele kennis van de sinus en de cosinus in de eenheidsheidscirkel, middelpuntshoeken, graden, en radialen. Hierna volgden drie lessen die op relationele wijze werden gegeven, wat ook de volledige stof omvatte die de RRR-groep kreeg. Deze stof heeft als basis de stof die Heck heeft ontwikkeld zoals kort toegelicht in hoofdstuk 2.4. Dit lesmateriaal is voor de uitvoering van het onderzoek langs een expertpanel gegaan, die beschreven wordt in hoofdstuk 4.3. Dit expertpanel heeft met behulp van een feedbackformulier het lesmateriaal van commentaar voorzien, en aan de hand daarvan is de lesstof aangepast voordat deze ten uitvoer werd gebracht.

Na de uitvoering van de lessenseries hebben de leerlingen van zowel de RRR-groep als de IRRR-groep een toets gemaakt. Deze toets was afgestemd op de leerdoelen van de lessenserie. Tot slot zijn van beide groepen drie leerlingen gekozen voor een apart interview, waarin ze een aantal inhoudelijke vragen konden beantwoorden over de stof, en ook hun mening over de lessenserie konden geven. Deze leerlingen waren gekozen op basis van hun cijfer voor wiskunde uit klas 4, zodat van beide groepen het gemiddelde niveau gelijkwaardig is.

Voor de uitvoering van de lessenseries is er een ethiekaanvraag gedaan bij de ethiekcommissie van de faculteit BMS (Behavioural, Management and Social Sciences). Deze ethiekaanvraag, met nummer 231089, is goedgekeurd en is terug te vinden in bijlage B1. Alvorens de uitvoering van het onderzoek zijn alle leerlingen, en in het geval van leerlingen onder de 16 jaar ook de ouders, ingelicht met behulp van een formulier over het onderzoek en het gebruik van toetsresultaten van de leerlingen. De leerlingen die werden geïnterviewd hebben ook expliciet toestemming gegeven via een apart formulier voor het opnemen van de interviews. Beide formulieren zijn terug te vinden in bijlage B.

## 4.3 Respondenten

De respondenten in het onderzoek zijn de volgende:

- Een expertpanel. Dit expertpanel heeft, voorafgaand aan de uitvoering van de lessenserie, het lesmateriaal beoordeeld op inhoud en toepasbaarheid. Het panel bestond uit negen mensen met overeenkomstige achtergronden. Vier leden van het expertpanel zijn masterstudenten Educatie & Communicatie in de Bètawetenschappen met specialisatie Wiskunde aan de Universiteit Twente. Eén lid is afgestudeerd in de Master Educatie & Communicatie in de Bètawetenschappen met specialisatie Wiskunde. Twee leden zijn eerstegraads wiskundedocenten, momenteel werkzaam in het middelbaar onderwijs in Twente. De laatste twee leden van het expertpanel zijn de begeleiders van dit onderzoek. Mark Timmer is vakdidacticus wiskunde op de Universiteit Twente en is lang werkzaam geweest als eerstegraads docent wiskunde. Wisse van der Meulen is een eerstegraads docent wiskunde en is ook een jaar werkzaam geweest als vakdidacticus wiskunde op de Universiteit Twente.

- De leerlingen. De lessenseries zijn uitgevoerd op het Canisius in Almelo in de klas 5 vwo wiskunde B. De klas bestaat uit veertien leerlingen, en is opgesplitst in twee groepen van zeven leerlingen. Ze zijn niet volledig willekeurig opgesplitst, maar op basis van hun wiskundeniveau zoals hierboven benoemd. Ter plekke tijdens de lessen bleek één leerling tijdelijk niet naar school te kunnen, dus de IRRR-groep bestond uiteindelijk uit zes leerlingen. Achteraf hebben alle leerlingen van beide groepen ook deelgenomen aan een toets, die niet meetelde voor een cijfer. Van beide groepen zijn achteraf drie leerlingen uitgenodigd om deel te nemen aan een interview. Deze leerlingen zijn gekozen op basis van hun niveau: één leerling van hoog niveau, één leerling van gemiddeld niveau, en één leerling van lager niveau. Op deze manier is er een zo goed mogelijke representatie van alle leerlingen gekregen van de klas.

## 4.4 Instrumenten en analyse

Zoals beschreven in hoofdstuk 4.2, zijn er verscheidene instrumenten gebruikt in dit onderzoek. Hieronder worden deze stuk voor stuk uitgewerkt.

### 4.4.1 Feedbackformulier

Nadat de eerste versie van het lesmateriaal was ontworpen, is deze langs het expertpanel zoals beschreven in hoofdstuk 4.3 gegaan. Met lesmateriaal doelen we op de lessenserie van drie relationele lessen; de instrumentele les volgt de methode van het boek en is niet langs het panel gegaan. De bedoeling van het expertpanel was dat ze konden beoordelen of de lessenserie zoals deze was opgesteld voldeed aan de gestelde ontwerpeisen en leerdoelen. De experts kregen het materiaal geleverd, inclusief leerdoelen en ontwerpeisen, en vervolgens kregen ze vier vragen voorgelegd. Ze konden dit in eigen tijd doornemen en beantwoorden zodat er geen invloed vanuit de ontwerper kon worden uitgeoefend op enige manier. De experts hebben feedback geleverd door de volgende vragen te beantwoorden:

1. In hoeverre voldoet de lessenserie aan de gestelde leerdoelen? Welke wel/niet, en heb je verbetersuggesties?
2. In hoeverre voldoet de lessenserie aan de gestelde ontwerpeisen? Welke wel/niet, en heb je verbetersuggesties?
3. Klopt het materiaal inhoudelijk? Als je ergens een foutje ziet, geef het vooral aan.
4. Wat vind je verder over het algemeen van de lessenserie? Denk je dat het effectief gaat zijn in het doel om leerlingen meer relationele kennis te geven over de basis van goniometrische functies?

Aan de hand van de feedback die hierdoor is verkregen, is het lesmateriaal aangepast, en ook de leerdoelen zijn op enkele punten aangepast als dat vaker naar voren kwam. Het volledige feedbackformulier kan worden gevonden in bijlage C. In hoofdstuk 5.2 wordt de feedback van het expertpanel besproken.

### 4.4.2 Lessenserie

De lessenserie is weliswaar een doel van dit onderzoek en dus een resultaat, het is ook een instrument om te zorgen dat de leerlingen kennis kunnen opdoen. Het lesmateriaal is door een expertpanel bekeken en geëvalueerd, zoals beschreven in hoofdstuk 4.2. De feedback die hieruit is gekomen is zorgvuldig bekeken en geïmplementeerd alvorens de lessenserie werd uitgevoerd. Als meerdere experts dezelfde feedback gaven is dit gelijk geïmplementeerd, zo niet dan zijn er, in sommige gevallen in overleg met de eerste begeleider van dit onderzoek, zorgvuldige overwegingen gemaakt om de feedback wel of alsnog niet te verwerken. Dit waarborgt de betrouwbaarheid van de lesvoorbereidingen en de werkbladen. De lessenserie wordt uitgewerkt in hoofdstuk 5.1, waarna de feedback van het expertpanel wordt besproken in hoofdstuk 5.2, en het uiteindelijke ontwerp in hoofdstuk 5.3.

### 4.4.3 Toets

Na de uitvoering van de lessenserie hebben alle leerlingen een toets gemaakt, waar ze maximaal 40 minuten de tijd voor hadden. Deze is te zien in figuur 5.4. Zoals te zien is, bestaat de toets uit zes vragen, die allemaal gelinkt aan met een leerdoel. De toets is zo opgesteld dat alle leerdoelen worden getoetst. Leerdoel 1 (*de leerling kan uitleggen wat de eenheidscirkel is en wat het te maken heeft met de sinus/cosinus*) wordt getoetst in vraag 1 door de vraag letterlijk te stellen. Leerdoel 2 (*de leerling kan uitleggen wat de interpretatie van de input en output van de sinusfunctie/cosinusfunctie is*) wordt getoetst in vraag 2. In vraag 2a wordt gevraagd naar de interpretatie van de cosinus bij een bepaalde hoek, en in vraag 2b wordt in het algemeen gevraagd wat de interpretatie van de input en output van de sinus/cosinusfunctie is. Leerdoel 3 (*de leerling kan met behulp van het verband tussen de eenheidscirkel en de grafiek van de (co)sinus uitleggen waar de eigenschappen periodiciteit, domein en bereik van de (co)sinus vandaan komen*) wordt getoetst in vraag 3, die in verschillende deelvragen toetst of de leerlingen kunnen afleiden waar de eigenschappen zoals benoemd in het leerdoel vandaan komen. Leerdoel 4 (*de leerling kan de x/y-coördinaat van punten op de eenheidscirkel berekenen aan de hand van de booglengte*) wordt getoetst in vraag 4 en 5. Er wordt voor verschillende booglengtes gevraagd de sinuswaarde of de cosinuswaarde te berekenen, en ook gevraagd naar de losse coördinaten van een punt met een bepaalde booglengte. Leerdoel 5 (*de leerling kan uitleggen wat radialen zijn in het geval van de eenheidscirkel*) wordt getoetst in vraag 6a en 6b, door om de betekenis van radialen te vragen en er een voorbeeld mee te doen. Tot slot wordt leerdoel 6 (*de leerling kan radialen omrekenen naar graden en vice versa*) getoetst in vraag 6c en 6d door een hoek in graden om te rekenen naar radialen en andersom. De vragen zijn deels zelf bedacht, maar zijn ook gebaseerd op materiaal ontwikkeld naar aanleiding van het artikel van Heck (te vinden via Heck, 2012).

Naam:............................................... Datum:........................................

**Toets - eenheidscirkel en radiaal**

Schrijf je antwoorden op het ruitjespapier. Zet nummers bij de vragen, en licht je antwoorden zoveel mogelijk toe. Als je iets niet weet is het niet erg, probeer vooral alles op te schrijven wat in je op komt.

**Vraag 1**

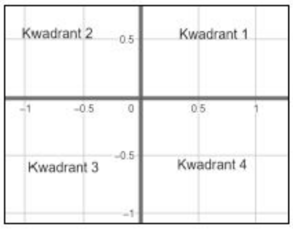
Leg in je eigen woorden uit wat de eenheidscirkel is en wat de sinus en de cosinus ermee te maken hebben. Maak ook gebruik van een tekening.

**Vraag 2**

a) Wat is de interpretatie van $\cos(\frac{1}{2}\pi)$? Kan je uitleggen wat deze waarde betekent?
b) Leg in je eigen woorden wat de interpretatie van de input en output van de sinusfunctie en cosinusfunctie zijn.

**Vraag 3**

a) Wat is het bereik van de cosinusfunctie? Hoe weet je dit?
b) Wat is de periode van de sinusfunctie? Hoe weet je dit?
c) In welk kwadrant of kwadranten van het assenstelsel zijn de sinuswaarden van hoeken negatief in de eenheidscirkel? Hoe weet je dit?
*De figuur hiernaast geeft aan wat de kwadranten zijn.*
d) In welk kwadrant of kwadranten van het assenstelsel zijn de cosinuswaarden van hoeken negatief in de eenheidscirkel? Hoe weet je dit?




**Vraag 4**

Gegeven is de eenheidscirkel, en een punt er op die hoort bij een booglengte van $\frac{7}{2}\pi$. Wat zijn de coördinaten van dit punt? Licht je antwoord toe.

**Vraag 5**

Bereken de volgende waarden exact. Gebruik geen rekenmachine, licht je antwoord toe, en maak gebruik van een tekening.

a) $\cos(225°)$
b) $\sin(-\pi)$

**Vraag 6**

a) Wat zijn radialen? Wat hebben radialen te maken met de eenheidscirkel?
b) Hoe groot is de middelpuntshoek die bij een booglengte van $\frac{1}{2}\pi$ op de eenheidscirkel hoort? Geef je antwoord zowel in graden als in radialen.
c) Druk $\frac{4}{3}\pi$ rad uit in graden.
d) Druk $135°$ exact uit in radialen.

Figuur 4: Toets

Tabel 1 laat zien welke vraag van de toets welk leerdoel toetst. Tussen haakjes staat aangegeven hoeveel punten er voor elke vraag kan worden verdiend. De leerlingen hebben zelf geen puntenverdeling gekregen zodat ze hierdoor niet onnodig werden gestimuleerd vooral te focussen op de vragen met de meeste punten. De punten die te verdienen zijn op de toets kunnen ingedeeld worden in twee categorieën: instrumenteel begrip en relationeel begrip. Het antwoordenmodel met puntenverdeling is te vinden in bijlage D2. De scores van beide groepen zullen met elkaar worden vergeleken om te kijken of de IRRR-groep inderdaad beïnvloed is door de instrumentele les van tevoren. Hiervoor zullen de groepen vergeleken worden in totale score, score op instrumenteel begrip en score op relationeel begrip.

TABEL 1: Kruistabel van de toetsvragen en de leerdoelen met het aantal punten dat kan worden toegekend.

| | **Leerdoel 1** | **Leerdoel 2** | **Leerdoel 3** | **Leerdoel 4** | **Leerdoel 5** | **Leerdoel 6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Vraag 1** | x (3 punten) | | | | | |
| **Vraag 2a** | | x (2 punten) | | | | |
| **Vraag 2b** | | x (3 punten) | | | | |
| **Vraag 3a** | | | x (1 punt) | | | |
| **Vraag 3b** | | | x (1 punt) | | | |
| **Vraag 3c** | | | x (1 punt) | | | |
| **Vraag 3d** | | | x (1 punt) | | | |
| **Vraag 4** | | | | x (2 punten) | | |
| **Vraag 5a** | | | | x (2 punten) | | |
| **Vraag 5b** | | | | x (2 punten) | | |
| **Vraag 6a** | | | | | x (2 punten) | |
| **Vraag 6b** | | | | | x (1 punt) | x (1 punt) |
| **Vraag 6c** | | | | | | x (1 punt) |
| **Vraag 6d** | | | | | | x (1 punt) |

Om te kijken of er relevante verschillen zijn in de scores tussen beide groepen, zijn er hypothesetoetsen afgenomen. Voor elke hypothesetoets stellen we een nulhypothese ($H_0$) en de alternatieve hypothese ($H_1$). De algemene nulhypothese luidt: de scores van de RRR- en IRRR-groep zijn niet significant verschillend. Omdat we binnen dit onderzoek willen kijken of de scores van beide groepen wèl verschillen, dus dat de instrumentele les wel invloed heeft gehad op het leren van de leerlingen, stellen we de alternatieve hypothese als volgt: de scores van de RRR- en IRRR-groep zijn wel significant verschillend. Aangezien de onderzoeksvraag kijkt naar het effect van instrumenteel begrip op het ontwikkelen van relationeel begrip, is er voor tweezijdige toetsen gekozen en niet voor eenzijdige toetsen, ook al is het vermoeden dat de instrumentele les een negatief effect heeft (en de RRR-groep dus hoger zou moeten scoren). Maar er wordt gekeken of er een verschil in score is, en in theorie kan elk van beide groepen hoger scoren dan de andere, dus wordt er gebruik gemaakt van tweezijdige toetsen. We maken dus gebruik van ongepaarde t-toetsen met gelijkwaardige variantie (Poortema en Meijer, 2018). Normaal gesproken geldt het dat om de t-toets te kunnen gebruiken, de data normaal verdeeld moet zijn en er minstens 30 datapunten per groep zijn. We hebben hier te maken met twee groepen leerlingen, met een totaal van 13 leerlingen, en dat is niet minstens 30. Toch nemen we aan voor dit onderzoek dat onze data normaal verdeeld is zodat we de t-toets kunnen gebruiken. We stellen $\alpha = 0,05$, oftewel de $p$-waardes die we uit onze data krijgen zullen kleiner dan $0,05$ moeten zijn om de nulhypothese te kunnen verwerpen. De tabel hieronder laat voor elke hypothesetoets zien wat precies onze nulhypothese en alternatieve hypothese is. Omdat we 13 leerlingen hebben die meedoen aan het onderzoek, zullen we gebruik maken van $13 - 2 = 11$ vrijheidsgraden in de t-toetsen.

TABEL 2: Hypotheses voor de drie hypothesetoetsen

| | |
|---|---|
| $H_0$ | De totaal scores van de RRR- en IRRR-groep zijn niet significant verschillend |
| $H_1$ | De totaal scores van de RRR- en IRRR-groep zijn significant verschillend |
| $H_0$ | De instrumentele scores van de RRR- en IRRR-groep zijn niet significant verschillend |
| $H_1$ | De instrumentele scores van de RRR- en IRRR-groep zijn significant verschillend |
| $H_0$ | De relationele scores van de RRR- en IRRR-groep zijn niet significant verschillend |
| $H_1$ | De relationele scores van de RRR- en IRRR-groep zijn significant verschillend |

#### 4.4.4 Interviews

Voor de semi-gestructureerde interviews is er een interviewleidraad opgesteld. De vragen in de interviews zijn op te delen in twee categorieën: inhoudelijke vragen over de lesstof, en contextvragen betreffende de meningen van leerlingen over de lessenserie. De inhoudelijke vragen zijn als volgt.

1. Leg in je eigen woorden uit wat de eenheidscirkel is en wat de sinus en de cosinus ermee te maken hebben. Je mag ook gebruik maken van een tekening.
2. Reken exact uit zonder rekenmachine: $\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right)$.
3. Hoe kan je de sinus van een negatieve hoek interpreteren? In welke kwadranten van het assenstelsel is de sinus negatief in de eenheidscirkel?
4. Wat zijn radialen en wat hebben ze te maken met de eenheidscirkel?
5. Hoe kan je graden omrekenen naar radialen? Kan je dit uitwerken voor 225°?
6. Wat is de interpretatie van de input en output van de sinusfunctie?

In tabel 3 staat een overzicht van de relatie tussen de inhoudelijke interviewvragen en de leerdoelen van de lessenserie. Vraag 1 van de interviewleidraad is hetzelfde als vraag 1 op de toets, vraag 4 van de interviewleidraad is hetzelfde als vraag 6a van de toets, en vraag 6 van de interviewleidraad is hetzelfde als vraag 2b van de toets. Dit is gedaan, omdat dit vragen zijn waarin iets beschreven en uitgelegd moet worden, en vaak vinden leerlingen dit lastig om op te schrijven. Door dit ook in het interview te bespreken kunnen leerlingen de kans krijgen hun redenaties nog beter en uitgebreider te onderbouwen. Ook geeft dit de kans voor de interviewer om er nog wat dieper op in te gaan. Vraag 2 van de interviewleidraad gaat iets dieper in op de stof dan in de lessenserie is gedaan. Dit toetst dus op relationeel begrip, omdat gekeken kan worden of leerlingen zelf de geleerde stof in een net wat andere situatie kunnen toepassen. Vraag 3 en vraag 5 van de interviewleidraad komen, respectievelijk, overeen met vraag 3c en vraag 6d van de toets. Er wordt een andere formulering gebruikt of iets dieper ingegaan op de stof. Ook dit kan worden gebruikt om te kijken of er sprake is van relationeel begrip. Op deze manier is elke interviewvraag gekoppeld aan één van de leerdoelen, en is het interviewleidraad, net zoals de toets, een goede basis om te testen wat voor kennis de leerlingen hebben van het materiaal.

Tabel 3: Kruistabel van de inhoudelijke interviewvragen en leerdoelen

| | **LD 1** | **LD 2** | **LD 3** | **LD 4** | **LD 5** | **LD 6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Vraag 1** | x | | | | | |
| **Vraag 2** | | | | x | | |
| **Vraag 3** | | | x | | | |
| **Vraag 4** | | | | | x | |
| **Vraag 5** | | | | | | x |
| **Vraag 6** | | x | | | | |

Belangrijk om te benoemen is dat dit een interview*leidraad* betreft: het is van belang dat alle vragen die opgeschreven staan gevraagd worden, maar er mag altijd wat worden uitgeweid of afgeweken van de leidraad waar de interviewer dat nodig vindt, of als de leerling daar behoefte aan heeft. Dit is waarom we het ook semi-gestructureerde interviews noemen. De complete interviewleidraad is te vinden in bijlage E.

Aan het begin van het interview wordt de leerlingen verteld wat de bedoeling is van de interviews. Dit gedeelte is niet opgenomen en zal niet in de transcriptie mee worden genomen. Zoals benoemd zijn er zes vragen leidend voor het inhoudelijke gedeelte van de interviews. Om de validiteit van de interviews te waarborgen worden ze opgenomen en getranscribeerd. Doordat elke vraag aan één leerdoel is gekoppeld hoeven de interviews niet verder gecodeerd te worden, maar kan er gecheckt worden in hoeverre een leerdoel is behaald door de bijbehorende vraag met antwoorden door te nemen. Verder worden er tijdens de interviews ook vragen gesteld aan de leerlingen wat ze vonden van de lessenserie.

# 5 Resultaten

In dit hoofdstuk worden de resultaten besproken. In 5.1 wordt de eerste versie van het lesmateriaal besproken met toelichting. Sectie 5.2 bespreken we de feedback van het expertpanel en welke aanpassingen daardoor zijn gemaakt aan het materiaal. In sectie 5.3 wordt het uiteindelijke ontwerp van het lesmateriaal gegeven. In 5.4 worden de gemaakte toetsen van de leerlingen geanalyseerd en in 5.5 de interviews.

## 5.1 Eerste versie lesmateriaal

Hieronder wordt het lesmateriaal besproken dat is ontworpen voor dit onderzoek. Het is een lessenserie bestaande uit drie lessen, en hiervoor is een lesbeschrijving gemaakt die we uiteenzetten. Ook is er gebruik gemaakt van een aantal applets in GeoGebra, waarnaar verwezen wordt in de tekst. Waar nodig is hiervan een schermopname ingevoegd ter verduidelijking.

Aangezien het hier ging om een erg kleine doelgroep (maximaal zeven leerlingen per groep), is er gekozen voor een klassikale aanpak waarin leerlingen veel worden aangespoord om samen met de docent de stof in te duiken, met af en toe opdrachten om zelfstandig of in tweetallen aan te werken. De tekst hieronder dient dan ook als algemene lijn voor de docent om de les te gebruiken, en de lesgevende docent heeft mogelijk af en toe iets afgeweken van de lesvoorbereiding als er extra verduidelijking nodig was voor de leerlingen. Als de tekst normaal gedrukt is, is dit voor de docent om over te brengen naar de klas in letterlijke woorden. Als de tekst schuingedrukt is, betekent het dat de docent hier een discussie moet begeleiden, de leerlingen stuurt in hun denkproces, of iets moet laten zien/voordoen op het bord of scherm.

Tot slot zijn er ook nog leerdoelen opgesteld. Op dit punt waren de leerdoelen nog onder voorbehoud en zouden deze nog langs het expertpanel gaan. De leerdoelen waren hier als volgt.

Aan het eind van de lessenserie kunnen de leerlingen

1. de grafiek tekenen van de afgelegde afstand van een punt die over een vierkant met zijde 2 beweegt tegenover de verticale positie van dat punt
2. uitleggen wat de eenheidscirkel is
3. de sinus definiëren als een functie van reële getallen
4. de cosinus definiëren als een functie van reële getallen
5. met behulp van het verband tussen de eenheidscirkel en de grafieken van de sinus en cosinus uitleggen waar bepaalde eigenschappen (periodiciteit, domein en bereik) van de sinus en cosinus vandaan komen
6. de coördinaten van punten op de eenheidscirkel berekenen aan de hand van de booglengte
7. hoeken uitrekenen in graden aan de hand van de booglengte van punten op de eenheidscirkel
8. de sinus waarden uitrekenen van gegeven hoeken en (reële) getallen
9. de cosinus waarden uitrekenen van gegeven hoeken en (reële) getallen
10. uitleggen wat radialen zijn en hoe dit werkt voor de eenheidscirkel
11. radialen omrekenen naar graden en vice versa

De volledige eerste versie van de lessenserie is terug te vinden in bijlage F. Hieronder wordt stap voor stap deze versie besproken met afbeeldingen van (delen van) het lesmateriaal.

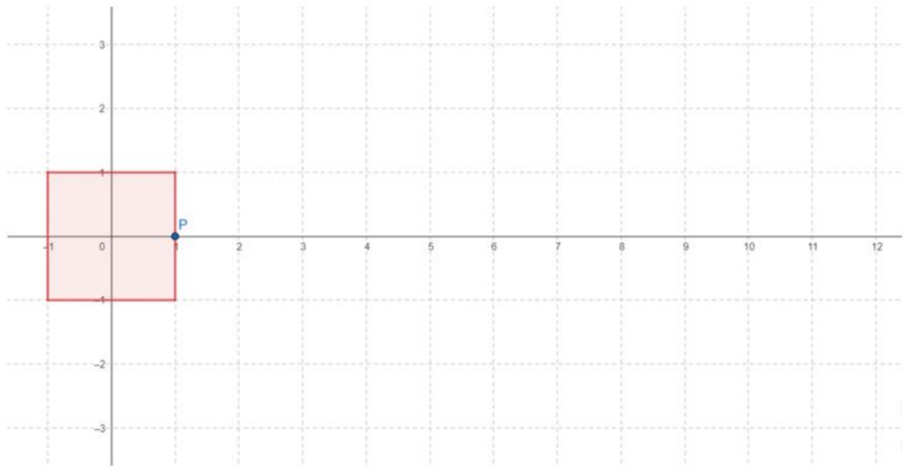
De les begint met een korte introductie over waar deze lessenserie over zal gaan, zoals figuur 5 laat zien.

In eerdere hoofdstukken van wiskunde heb je al kennis gemaakt met de sinus, cosinus, en tangens. Je weet dat je deze kan gebruiken bij het berekenen van de zijden en hoeken bij rechthoekige driehoeken. Maar eigenlijk zijn deze begrippen nog veel breder dan alleen dat! Deze week gaan we beginnen met het hoofdstuk van goniometrische functies, en daar spelen de sinus en cosinus de hoofdrol in. Om jullie een sterke basis te geven voor dit hoofdstuk gaan we op een iets andere manier beginnen dan jullie gewend zijn, maar stapje voor stapje zullen we uitkomen op een nieuwe manier om tegen de sinus en cosinus aan te kijken.

Figuur 5: Introductie lessenserie

De stof wordt geïntroduceerd met het idee van een opwindfunctie, gebaseerd op het idee van Heck, zoals beschreven in hoofdstuk 2.4. In figuren 6 en 7 is te zien hoe de leerlingen stap voor stap hier geholpen worden om een grafiek te tekenen van een bewegend punt over een figuur. Als eerste wordt gebruik gemaakt van een regelmatige vierhoek. Doordat de leerlingen zelf met pen en papier hiermee aan de slag gaan, kunnen ze zelf ontdekken hoe de constructie werkt, en hoe de hoogte van het bewegende punt afhangt van de afgelegde afstand over de vierhoek. Het is aan de docent om de leerlingen hierin te sturen en te wijzen op belangrijke eigenschappen van de grafiek, zoals periodiciteit en bereik.

We gaan beginnen met het bekijken van een vierkant met zijde 2 die we op een assenstelsel zetten, met het midden van de vierhoek in de oorsprong. We gaan kijken naar het punt P, met coördinaten (1,0), en laten dat punt langs het vierkant lopen, tegen de klok in. *Laat de figuur hieronder op het bord zien, of zorg dat het alvast getekend is.*

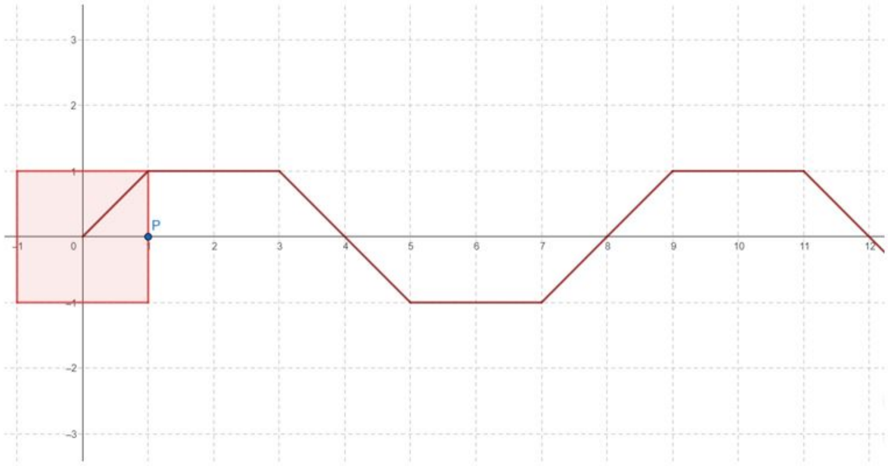



We gaan de grafiek tekenen van de verticale positie, dus de hoogte, het y-coördinaat, van het punt P terwijl dit punt tegen de klok in over de rand van het vierhoek beweegt. De x-as is hierbij de afgelegde weg van het punt P, en de y-as is de hoogte/verticale positie van het punt P.

Figuur 6: Lesbeschrijving, deel 1

Vervolgens is het ook van belang dat de leerlingen zich gaan realiseren dat de grafiek die ze tekenen een representatie van een functie is, en dat dit ook betekent dat er een invoer en uitvoer van de functie is. Dit gaat namelijk helpen om de link tussen de representaties 'eenheidscirkel' en 'functiegrafieken', zoals beschreven in sectie 2.4, te verstevigen voor de goniometrische functies. In figuur 8 is te zien hoe er gebruik wordt gemaakt van GeoGebra om de nadruk te leggen op het feit dat ze een functie hebben getekend.
Nu wordt de stap gemaakt naar een regelmatige vijfhoek. Weer wordt de grafiek van een bewegend punt over de cirkel getekend. Hierna kan dit ook met een achthoek worden gedaan. Dit laat dus zien dat het gaat om een opwindfunctie, zoals beschreven in het theoretisch kader, omdat het gaat om een regelmatige $n$-hoek, waarbij de $n$ variabel is. Het is aan de docent om de nadruk te leggen op de veranderingen in de grafieken naarmate de regelmatige $n$-hoek meer hoeken krijgt.

*Samen en in overleg met de leerlingen teken je op het bord deze grafiek. Hierbij begin je bij het punt (0,0) en ga je in stapjes verder. Belangrijke punten om op te letten is, wat is de maximale hoogte waarop het punt P komt, wat is de overgang tussen de hoekpunten (1,1), (-1,1), (-1,-1) en (1,-1), en hoe steil is die overgang? Als je bij x=8 aankomt, vraag je wat er hierna gaat gebeuren, als je nog een keer het vierkant om zou lopen met punt P. Samen met de leerlingen kom je uiteindelijk op de volgende grafiek uit:*

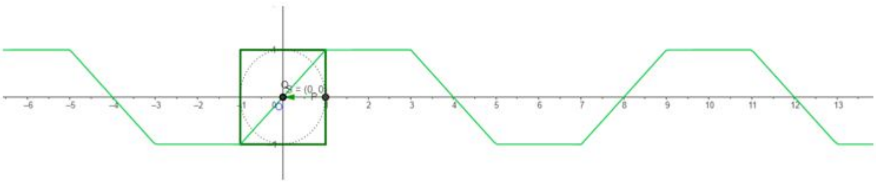



*Stel de volgende vragen aan de leerlingen (indien dit nog niet tijdens het tekenen aan bod is gekomen). Wat is de maximale en minimale hoogte van de grafiek en hoe kan je dit aan het vierkant zelf zien? Vanaf wanneer (welke x-coördinaat) herhaalt de grafiek zichzelf en hoe kan je dit vanuit het vierkant zien? Welke coördinaten uit de grafiek corresponderen met de hoekpunten van het vierkant?*

Figuur 7: Lesbeschrijving, deel 2

Het is nu dus duidelijk dat we een grafiek hebben die de beweging van het punt P beschrijft, oftewel de waarde van het y-coördinaat. Nu heb je bij een functie altijd iets wat je er in stopt, je x-waarde, en iets wat je er uit krijgt, je y-waarde. Wat zeiden we net ook alweer wat de x-waarde en y-waarde was bij onze grafiek? En wat is dus de x-waarde/input en y-waarde/output van onze functie?

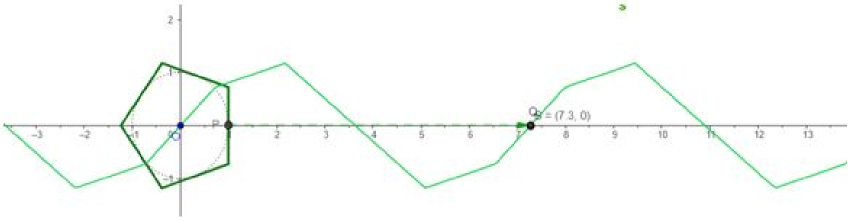
*Kom er samen met de leerlingen weer op uit dat de x-waarde de afgelegde weg van punt P over het vierkant is, en de y-waarde de hoogte/verticale positie van het punt P is. Benadruk dat dit dus betekent dat dit de input en output zijn waardoor de grafiek een functie is.*
*Laat vervolgens de applet zien (zie applet 1 in de bijlage), waarbij in GeoGebra te zien is hoe dit werkt. Ook kan je laten zien wat er gebeurt als je de negatieve x-as bewandelt, oftewel punt P met de wijzers van de klok mee laten bewegen.*



Figuur 8: Lesbeschrijving, deel 3

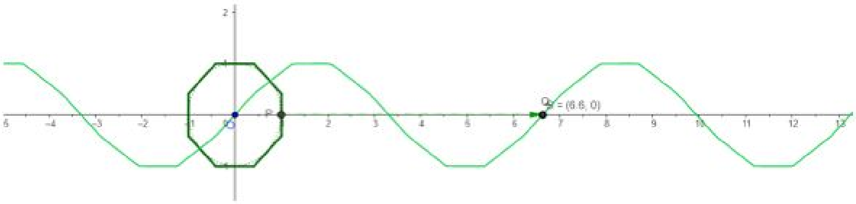
Hierdoor krijgen de leerlingen al snel door waar het bereik, domein, en de periodiciteit van de functies vandaan komt. Ook zullen ze merken dat de grafiek in steeds meer kleine stukjes verdeeld wordt, maar over het algemeen een meer soepele vorm krijgt. Figuur 9 laat de beschrijving van dit deel van de lessenserie zien.
Naarmate de leerlingen hier meer mee oefenen, kan langzaamaan de overgang worden gemaakt naar de eenheidscirkel. Dit wordt gedaan door eerst een regelmatige 30-hoek te construeren, en de leerlingen te laten praten over hun vermoedens wat er nu met de grafiek gaat gebeuren. In figuur 10 is te zien hoe dit in zijn werk gaat, en wat vervolgens belangrijk is om te benadrukken.

Nu gaan we iets soortgelijks doen, maar dan, in plaats van een vierkant, pakken we een figuur met vijf hoeken. Dit heet een regelmatige vijfhoek, want er zijn vijf zijden van gelijke grootte. *Teken zelf een regelmatige vijfhoek op het bord (of het staat er al ergens), en zet het in een assenstelsel zoals we ook bij het vierkant deden, met een punt P op (1,0). Vraag aan de leerlingen weer hoe de grafiek van de beweging van punt P eruit ziet. Hierbij moeten de leerlingen vooral doorhebben dat op de eerste hoek van de vijfhoek (als je het tekent zoals hieronder in de tekening staat), je niet gelijk op het hoogste punt zit. Je hoeft niet een hele periode te tekenen, maar pak bijvoorbeeld halverwege applet 2 in de bijlage erbij. Vraag aan de leerlingen, voordat je het punt over de figuur begint te bewegen op welk punt in de grafiek het punt P over de hele figuur is 'gewandeld'. Dit moet op het punt zijn dat er een periode is afgelegd, dus ongeveer bij (7,3;0). Leg uit dat die 7,3 slaat hoe lang de weg is die punt P heeft moeten afleggen om weer bij zijn beginpunt uit te komen. Vertel de leerlingen dat het op dit moment niet uitmaakt hoe dit getal is berekent, maar meer op wat het getal betekent.*




*Ook kan je hier weer samen met de leerlingen de connectie maken tussen het hoogste punt van de vijfhoek en het hoogste punt in de grafiek.*

Nu pakken we bijvoorbeeld een achthoek *(doe dit ook weer zelf in de applet in GeoGebra)*. Wat valt er op aan de grafiek? *De leerlingen moeten er in ieder geval op uitkomen dat de grafiek lijkt op de eerdere grafiek die we zagen, maar dat de 'stukjes' van de grafiek korter zijn (doordat het een figuur is met meer zijden), en dat de grafiek daardoor wat soepeler loopt.*



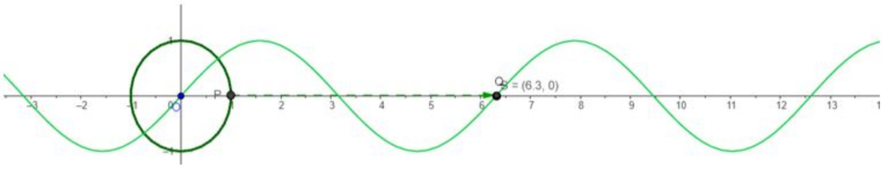

Wanneer herhaalt de grafiek zich weer? *Nu kom je uit op ongeveer 6,6. Benadruk nogmaals dat nu de dit de periodiciteit is, en dat dit dus de afgelegde weg van punt P is, voordat het punt weer op het startpunt aankomt (en dat het even niet uitmaakt hoe deze is berekent). Eigenlijk is dit dus de omtrek van de figuur! Bij het vierkant kon je weten dat de omtrek 8 was (2+2+2+2), en bij deze achthoek is dat blijkbaar 6,6.*

FIGUUR 9: Lesbeschrijving, deel 4

Door de opwindfunctie te gebruiken, en dus vanuit een regelmatige vierhoek naar een regelmatige $n$-hoek te gaan, beginnen de leerlingen operationeel begrip te ontwikkelen, zoals beschreven in hoofdstuk 2.2. De opwindfunctie is dynamisch proces, en wordt gebruikt om de leerlingen stap voor stap inzicht te geven in wat de eenheidscirkel is. Volgens Sfard is het aan te raden om eerst operationeel begrip te ontwikkelen en daarvanuit structureel begrip te ontwikkelen, en daarom vormt dit een goede basis voor het begrip eenheidscirkel, aangezien die op dit punt wordt geïntroduceerd. Er wordt dus nu ook de stap gemaakt naar de representatie 'eenheidscirkel' (zie figuur 2). Het begrip booglengte wordt geïntroduceerd als begrip, wat de leerlingen natuurlijk al hebben gebruikt als afgelegde afstand van het bewegende punt over de regelmatige $n$-hoek. Ook het begrip middelpuntshoek wordt geïntroduceerd, zodat er hierna ook een connectie kan worden gemaakt van de eenheidscirkel naar de meetkundige representatie van goniometrische functies. Figuur 11 laat zien hoe dit wordt gedaan.

Wat gaat er met de figuur gebeuren als we meer en meer hoeken gaan toevoegen? Wat voor figuur gaan we dan krijgen? *Kom samen met de leerlingen tot de conclusie dat dit een cirkel wordt. Laat dit vooral zien met behulp van de applet.*

Wat zal dan de afstand zijn die punt P moet afleggen voordat het weer bij het startpunt is? Wat is de omtrek van een cirkel? *Als het goed is weten de leerlingen nog dat dit 2πr is, met r de radius. Aangezien r=1 in dit geval, moet de omtrek 2π zijn. Vraag wat de waarde hiervan is (π=3,14…) dus wat wordt 2π? Nadat dit is besproken kan je de applet aanpassen naar n=30 zodat je een dertighoek krijgt, en dan kunnen de leerlingen de eerder gestelde vermoedens bevestigen.*

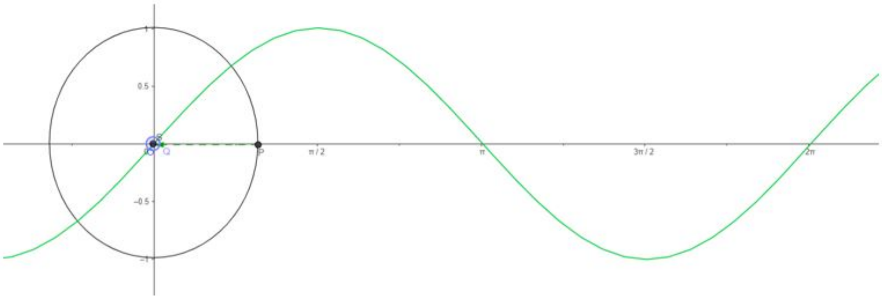



*Benadruk hier dat de grafiek inderdaad nog 'soepeler/gladder' is geworden zoals de leerlingen normaal gesproken een grafiek kennen, en dat de periode, dus wanneer P de hele omtrek van de figuur heeft belopen, ongeveer 2π is.*

Figuur 10: Lesbeschrijving, deel 5

Laten we nu zeggen dat we n nu heel groot hebben gemaakt en dat dit echt een cirkel is. Wat is de straal van deze cirkel? De straal is 1, en daarom noemen we deze specifieke cirkel vanaf nu de eenheidscirkel. Vanaf nu gaan we ook het woord 'booglengte' gebruiken voor de afstand die punt P vanaf (1,0) heeft afgelegd als het over de figuur tegen de klok in beweegt. De hele eenheidscirkel heeft een omtrek van 2π, en dat is dus de booglengte van de hele eenheidscirkel.

*Vanaf nu pak je applet 3 erbij op GeoGebra.*

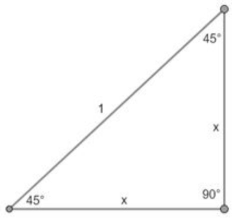



*Op dit moment ga je wat vragen stellen aan de klas over booglengtes, en gebruik je hierbij π. Wat zijn de coördinaten van P wanneer het over de eenheidscirkel heeft bewogen over een boog met lengte π? Teken hier de booglengte nadat leerlingen hier op in zijn gegaan, en schrijf de coördinaten (-1,0) op. En met lengte $\frac{1}{2}\pi$? Teken hier de booglengte nadat leerlingen hier op in zijn gegaan, en schrijf de coördinaten (0,1) op. Vraag ook hoe groot hier de bijbehorende middelpuntshoek is (als dit begrip nog onbekend is, teken dan een lijn van het middelpunt naar (1,0) en een lijn van het middelpunt naar het nieuwe punt P en duid aan dat de hoek tussen die twee lijnen de middelpuntshoek wordt genoemd van de cirkel). Als het goed is weten de leerlingen dat deze hoek 90° is. Doe ook hetzelfde voor $\frac{3}{2}\pi$. Maak hier nu de connecties met hoeveel graden. Als ze dit niet gelijk weten, ga eerst terug naar het punt waar P over de eenheidscirkel heeft bewogen met een lengte π.*

Figuur 11: Lesbeschrijving, deel 6

Nu is het de bedoeling dat leerlingen de koppeling gaan maken met de sinus. Om te beginnen gaan de leerlingen, met behulp van Pythagoras, eerst zelf algebraïsch de coördinaten van het punt met booglengte $\frac{1}{4}\pi$ berekenen. Figuur 12 laat zien hoe dit in stapjes kan worden gedaan. Vervolgens worden meerdere middelpuntshoeken gekoppeld met de $y$-coördinaat van punten op de eenheidscirkel met die middelpuntshoeken. Zo kan stap voor stap die middelpuntshoek met de sinus worden gerelateerd zodat de koppeling van de eenheidscirkel met de meetkundige definitie van de sinus wordt gemaakt. Figuur 13 laat zien hoe dit in de les wordt bereikt.

*Vraag nu hetzelfde voor $\frac{1}{4}\pi$. Dit gaat minder makkelijk, omdat het punt niet op de x- of y-as ligt en er dus geen duidelijke coördinaten zijn. Maak een tekening voor dit punt en vraag aan de leerlingen wat de bijbehorende middelpuntshoek is. Leerlingen zouden snel moeten weten dat deze hoek 45° is. Laat ze zelf ontdekken (met een beetje sturende begeleiding) dat ze, als ze een driehoek tekenen, met Pythagoras de hoogte van het punt P kunnen berekenen en dat de coördinaten dus ($\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$) zijn. Mogelijk hebben ze hierin sturing nodig. Belangrijke stappen die ze moeten realiseren is dat ze een gelijkbenige driehoek krijgen, dus dat ze een figuur als deze hieronder krijgen. Hiermee kunnen ze met Pythagoras komen op $x^2 + x^2 = 1$, wat op te lossen is tot $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.*




*Het kan ook nog zijn dat leerlingen hier dachten dat punt P bij $\frac{1}{4}\pi$ wel op hoogte 0,5 zou zitten. Ga hier op in door vanaf (1,0) de beweging zelf langzaamaan te tekenen, waardoor de leerlingen zien dat je eerste steil omhoog gaat, en daarna pas vlakker opzij (je gaat dus niet in een rechte lijn). Dit betekent ook dat de y-coördinaat van punt P sneller stijgt dan het x-coördinaat daalt, en daarom kom je dus boven de 0,5 uit bij $\frac{1}{4}\pi$. Laat de leerlingen dit bevestigen door ze op de rekenmachine $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ uit te rekenen.*

Figuur 12: Lesbeschrijving, deel 7

*Ga vervolgens weer terug naar het punt (0,1), wat hoorde bij een booglengte van $\frac{1}{2}\pi$, en vraag de leerlingen welke middelpuntshoek hierbij hoort. Maak ook de connectie met welk punt van de grafiek hierbij hoort. Doe dit ook voor booglengtes π, $\frac{3}{2}\pi$, en 2π (180°, 270° en 360°). Maar nu, als de connectie wordt gemaakt met de grafiek van de functie, ga die functie een naam geven (bijvoorbeeld s), en ga het ook als input/output geven zoals je dat ook met een functies doet normaal gesproken. Dus s(x)=..., waarbij x de afgelegde weg, oftewel booglengte is, dus bijvoorbeeld s(π)=0, want nul is de verticale positie/hoogte van punt P, en gelijk aan de waarde op de y-as. Zo krijg je s($\frac{1}{2}\pi$)=1, s($\frac{3}{2}\pi$)=-1, en s(2π)=0. Ze deze op een rijtje boven elkaar, en zet s($\frac{1}{4}\pi$)= $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ er ook bij.*

*Nu moet nog de connectie worden gemaakt met de hoeken en de sinus. Pak de driehoek van hierboven erbij, en ga samen met de leerlingen bekijken hoe je met behulp van de sinus ook achter de waarde van x had kunnen komen. Als het goed is weten ze nog de regel dat $\sin(\alpha) = \frac{overstaand}{schuin}$, waarbij hier $\alpha =$ 45°, overstaand= $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en schuin =1, waardoor je krijgt $\sin(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Hierdoor kan je in het rijtje zetten dat s($\frac{1}{4}\pi$)= $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \sin(45°)$.*

We zien nu dus dat het y-coördinaat van punt P dus beschreven kan worden door de sinus van de middelpuntshoek! Dit geldt ook voor onze andere punten, laten we samen het rijtje afmaken.

*Maak samen met de leerlingen het rijtje af, dus maak de connectie tussen de middelpuntshoek en de sinus.*

$$s\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sin(45°)$$

$$s\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1 = \sin(90°)$$

$$s(\pi) = 0 = \sin(180°)$$

$$s\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 = \sin(270°)$$

$$s(2\pi) = 0 = \sin(360°)$$

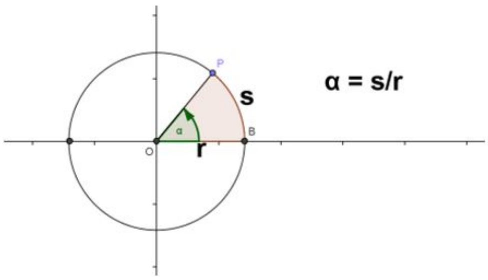
Figuur 13: Lesbeschrijving, deel 8

Nu de leerlingen de connectie hebben gemaakt met de middelpuntshoek en de sinusfunctie, is het tijd om radialen te introduceren. Dit hoort tot slot bij het begrip van goniometrische functies binnen de eenheidscirkel, maar het was niet nodig om het begrip radiaal te introduceren vóórdat de connectie werd gemaakt met de meetkundige representatie van de sinusfunctie. Figuren 14 en 15 laten zien hoe het begrip radialen over wordt gebracht naar de leerlingen. Merk op dat ervoor is gekozen om $f(x) = \sin\left(\frac{180°x}{\pi}\right)$ niet op een volledig relationele manier uit te werken, maar het toch iets te simplificeren. Dit is gedaan uit de overweging dat er hier al veel ingewikkelde nieuwe concepten worden geïntroduceerd. Het is de intentie dat de leerlingen zich nu vooral gaan richten op wat radialen nu echt zijn, en omdat er simpelweg maar beperkte lestijd is, is er daarom voor gekozen om de koppeling van booglengte naar middelpuntshoek ietwat instrumenteler te behouden.

Vanaf nu gaan we dit ook als maat gebruiken om aan te geven hoe groot onze hoek is. Niet in graden, maar in **radialen**. De afkorting hiervan is **rad**, dat mag je ook in opgaven gebruiken. De grootte van een hoek in radialen is de verhouding tussen de booglengte die bij een middelpuntshoek van een cirkel past en de straal van deze cirkel. Maar hoe groot is de straal van de eenheidscirkel ook alweer?

*Met de leerlingen er op uit komen dat deze straal 1 is. Omdat deze straal 1 is, hangt de grootte van de hoek dus af van de booglengte die bij de hoek hoort. Daarom is de hoek bij een booglengte van $\frac{1}{4}\pi$ (bijvoorbeeld) dus $\frac{1}{4}\pi$ radialen. Radialen is dus een meting voor de middelpunthoek bij een booglengte.*

*Laat het volgende plaatje zien aan de leerlingen (of teken het) en benoem dat dit als officiële definitie kan worden gebruikt voor de grootte van een hoek in radialen.*




*Neem het voorbeeld van de eenheidscirkel (dus r=1) en een booglengte van $\frac{1}{4}\pi$ (= s_. Bereken hierbij samen met de leerlingen dat je dan krijgt $\alpha = \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{180°}{\pi} = 45°$. En dit klopt natuurlijk met wat we eerder hebben gezien.*

Figuur 14: Lesbeschrijving, deel 9

We gaan laten zien dat de grootte van een hoek in radialen afhangt van de straal van de cirkel door ook een voorbeeld te doen met een andere cirkel. We pakken nu een cirkel met straal 3, en nogmaals een booglengte van $\frac{1}{4}\pi$. *Samen met de leerlingen werk je ook dit voorbeeld uit, eventueel maak je hierbij weer een tekening of gebruik je GeoGebra. Nu krijg je $\alpha = \frac{\frac{1}{4}\pi}{3} = \frac{1}{12}\pi$. Omschrijven naar graden geeft $\alpha = \frac{1}{12}\pi \cdot \frac{180°}{\pi} = 15°$. Aangezien een cirkel 360° is, is dit dus 1/24 deel van de cirkel. De omtrek van deze cirkel is 6π (2πr met r=3). En $\frac{1}{4}\pi$ van 6π is ook 1/24 deel. Dit laat dus de leerlingen intuïtief zien dat de grootte van een hoek in radialen inderdaad de verhouding is tussen de booglengte die bij een middelpuntshoek van een cirkel past en de straal van deze cirkel.*

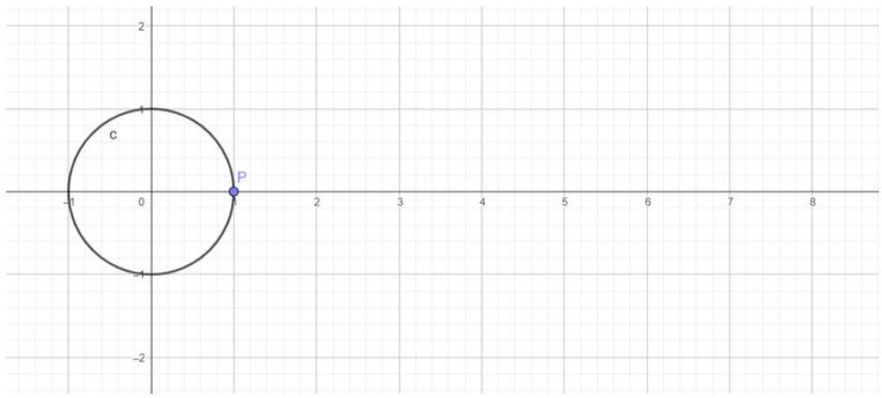
*Laat nu de leerlingen de volgende vragen beantwoorden (zelfstandig of in tweetallen).*

- Wat is $\frac{180°}{\pi}$ in radialen?
- Hoeveel graden is $\frac{1}{8}\pi$ ?
- Druk uit in radialen: sin(450°)
- Druk 125° exact uit in radialen
- Druk $\frac{2}{3}\pi$ rad uit in graden

Figuur 15: Lesbeschrijving, deel 10

Nu is het nog zaak om de cosinusfunctie te behandelen. Er is voor gekozen om dit pas te doen nadat de sinusfunctie volledig is behandeld en het duidelijk is wat radialen zijn, om de volgorde logischer te maken voor leerlingen. Bovendien is het de verwachting dat leerlingen het proces naar het begrip van de cosinus als functie sneller zullen begrijpen juist doordat ze dit al hebben gezien voor de sinusfunctie. Het gaat nu weliswaar om het $x$-coördinaat van een bewegend punt over de eenheidscirkel, de begrippen (zoals middelpuntshoeken, radialen) zijn hetzelfde en de afleiding is erg vergelijkbaar. In figuur 16 is te zien dat, net als bij de sinus, de leerlingen eerst de grafiek gaan tekenen van het $x$-coördinaat van een bewegend punt over de eenheidscirkel. Mogelijk is dit een te grote stap om in één keer te doen, dus kan er een stapje terug worden gedaan door dit eerst te doen over de eenheidsvierhoek.

*Nu komt het punt om leerlingen ook in te laten zien wat de cosinus als functie doet, en wat dat te maken heeft met de eenheidscirkel. Geef de leerlingen onderstaand plaatje op een blad, en laat ze terugdenken aan hoe ze de baan tekende van de verticale positie van punt P, terwijl P tegen de klok in over de eenheidscirkel bewoog. Geef ze nu de opdracht om dit voor de* ***horizontale positie van punt P, oftewel de x-waarde van punt P, te doen****. Begeleid ze hierbij, tot ze een soort vorm van de cosinus krijgen.*

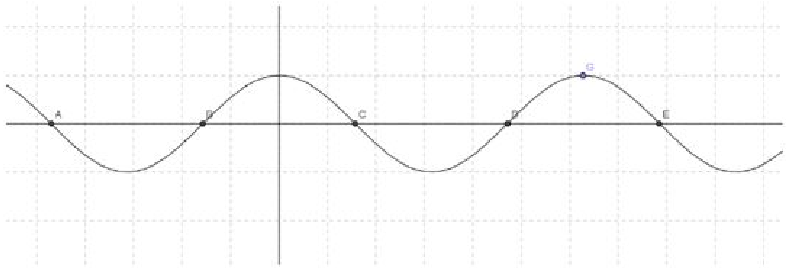



*Als dit lastig gaat, kan je ze eerst deze opdracht geven bij het vierkant met zijde 2 zoals ze ook bij de sinus deden.*

Figuur 16: Lesbeschrijving, deel 11

Hierna is het zaak om deze grafiek te koppelen aan de cosinus als functie. In figuur 17 is te zien hoe hier stap voor stap naartoe wordt gewerkt. De stappen die worden genomen zijn vergelijkbaar met hoe er hiervoor vanuit de grafiek, via de eenheidscirkel, er naar de sinusfunctie werd toegewerkt.

*Vervolgens geef je ze onderstaand figuur, en bespreek je wat de coördinaten van alle punten op de grafiek zijn. Houd hierbij een tekening van de eenheidscirkel paraat, zodat ze de connectie kunnen maken tussen informatie uit de grafiek en informatie uit de eenheidscirkel.*




*Ga ook weer in op wat het gedeelte van de grafiek op de negatieve x-as betekent. Hoe kan je dit relateren aan de eenheidscirkel? Vermoedelijk gaan deze vragen redelijk goed omdat dit herkenbaar is vanuit de sinussituatie.*

*Ga nu weer in op het verband tussen de booglengte en middelpuntshoek voor de eenheidscirkel. Nu is de bedoeling om een formule voor deze grafiek, die we c kunnen noemen, gaan vinden, uitgedrukt in x, oftewel de afgelegde afstand van punt P. We beweren nu dat er een hoek α bestaat zodat c(x)=cos(α). Laat de leerlingen zelf het werk doen om een formule voor c(x) te vinden. Als het goed is herkennen leerlingen dit als hetzelfde als bij de sinusfunctie (dus $\alpha = \frac{180° x}{\pi}$).*

*Nadat dit is gebeurt, kan je samen met de leerlingen op de conclusie komen dat deze functie dus de cosinusfunctie is. Benoem dat waar de sinusfunctie de verticale positie (y-coördinaat) van het bewegende punt beschrijft, de cosinus dus de horizontale positie (x-coördinaat) beschrijft.*

*Laat ze dit zelf ook uitvinden door ze te laten berekenen wat $c(\frac{1}{4}\pi)$ is. Teken het in de eenheidscirkel met een driehoek erbij, en laat ze Pythagoras gebruiken. Vervolgens kan je ze de volgende opgaven geven om hiermee te oefenen, en te laten inzien wat de cosinusfunctie nu echt is.*

- *Wat zijn de minimale en maximale waarden die de cosinusfunctie kan aannemen?*
- *Wat is de periode van de cosinusfunctie?*
- *Reken exact uit: $cosl(\frac{1}{2}\pi)$*
- *Reken exact uit: cos(-π)*
- *Reken exact uit: cos(30°)*

FIGUUR 17: Lesbeschrijving, deel 12

## 5.2 Feedback expertpanel en aanpassingen

Dit lesmateriaal is, zoals beschreven in hoofdstuk 4, voorgelegd aan een expertpanel. In sectie 4.3 is uiteengezet uit welke personen dit expertpanel bestond. De leden van dit expertpanel hebben met behulp van een formulier feedback gegeven op het lesmateriaal. De leden van het expertpanel hebben feedback geleverd op de (haalbaarheid van de) ontwerpeisen, de (haalbaarheid van de) leerdoelen, de inhoud van het lesmateriaal, en tot slot was er nog ruimte om een algemene mening en/of algemene opmerkingen te geven. Hieronder wordt op elk van deze onderdelen het commentaar van de experts uitwerkt. Hun volledige feedback is te vinden in bijlage G. Voor het gemak en om de anonimiteit te bewaren, worden de experts genummerd, waarbij de twee begeleiders van dit onderzoek wel als begeleider worden benoemd. Hierdoor krijgen we experts 1 t/m 7, en de twee begeleiders. Als er geen commentaar ergens op was, of het gaat om tekstuele aanbevelingen, dan wordt dat hier niet besproken, maar is het wel terug te vinden in de bijlagen.

### 5.2.1 Feedback op de leerdoelen

In het algemeen zijn veel van de leerdoelen goed ontvangen. Wel vonden meerdere experts dat er soms wat leerdoelen nog wat concreter mochten worden gemaakt, of dat anders het concreter moest worden hoe deze leerdoelen zouden worden getest.

Over het algemeen vonden alle experts dat leerdoel 1 goed behaald moet kunnen worden. Expert 3 benoemde nog dat het effect van de snelheid waarmee over het vierkant wordt bewogen niet in de les zit, maar verwacht hier ook niet echt moeilijkheden over. In overleg met de eerste begeleider is wel besloten om dit leerdoel algemeen te maken door het te veranderen naar het tekenen van $n$-hoeken.
Leerdoel 2 werd ook goed ontvangen. Expert 3 benoemde dat hij niet denkt dat alle leerlingen weten dat elke cirkel met straal 1 een eenheidscirkel is. Expert 2 dacht ook dat er nog iets meer aandacht naartoe zou kunnen gaan. Om deze reden is dit in het materiaal aangepast en verduidelijkt.
Bij leerdoel 3 en 4 waren er afwisselende reacties. Sommige experts vonden dit prima leerdoelen, anderen vonden het nog wel vaag geformuleerd, al vermoedden ze wel dat leerlingen dit zouden moeten kunnen. De eerste begeleider was het hiermee eens, en daarom is ervoor gekozen om deze leerdoelen te herformuleren naar *Aan het eind van de les kan de leerlingen uitleggen wat de interpretatie van de input en output van de sinusfunctie/cosinusfunctie is.* Op deze manier zijn de leerdoelen duidelijker en ook beter toetsbaar.
Over leerdoel 5 had alleen expert 6 de opmerking dat de termen domein/bereik/periodiciteit nog wat explicieter benoemd mogen worden in het materiaal, maar dat de leerlingen dit wel zeker zouden moeten kunnen.
Over leerdoel 6 heeft alleen expert 1 benoemd dat het misschien handig is om nog wat opgaven te geven die dit leerdoel expliciet testen. Er wordt wel gedacht dat dit leerdoel moet kunnen worden behaald.
Over leerdoel 7 worden geen relevante opmerkingen gemaakt.
Over leerdoel 8 en 9 wordt alleen opgemerkt door expert 1 dat het waarschijnlijk lastig is voor leerlingen om dit zonder rekenmachine te doen. In overleg met de expert is er besloten om deze leerdoelen helemaal weg te laten, omdat het eigenlijk op hetzelfde neerkomt als leerdoel 6, alleen dan wat explicieter. Hierdoor zijn deze leerdoelen samengevoegd tot het leerdoel *Aan het eind van de les kan de leerling de $x/y$-coördinaat van punten op de eenheidscirkel berekenen aan de hand van de booglengte, gegeven zowel in graden als radialen.*
Over leerdoel 10 hebben experts 1 en 6 de opmerking gemaakt dat deze waarschijnlijk nog lastig te behalen is. De eerste begeleider benoemde dat het leerdoel ook ietwat vaag geformuleerd is. Om deze reden is dit leerdoel veranderd naar *Aan het eind van de les kan de leerling uitleggen wat radialen zijn in het geval van de eenheidscirkel.* Ook is het materiaal over radialen in de lessenserie uitgebreid. Er is bijvoorbeeld ook een voorbeeld toegevoegd over radialen in een cirkel met een andere straal. In het materiaal is het als volgt opgenomen.

We gaan laten zien dat de grootte van een hoek in radialen afhangt van de straal van de cirkel door ook een voorbeeld te doen met een andere cirkel. We pakken nu een cirkel met straal 3, en nogmaals een booglengte van $\frac{1}{4}\pi$. Werk uit op je werkblad welke middelpuntshoek je dan krijgt.

*Begeleid je leerlingen hierbij, eventueel maak je hierbij weer een tekening of gebruik je GeoGebra. Nu krijg je* $\alpha = \frac{\frac{1}{4}\pi}{3} = \frac{1}{12}\pi$. *Omschrijven naar graden geeft* $\alpha = \frac{1}{12}\pi \cdot \frac{180°}{\pi} = 15°$. *Aangezien een cirkel 360° is, is dit dus 1/24 deel van de cirkel. De omtrek van deze cirkel is 6π (2πr met r=3). En* $\frac{1}{4}\pi$ *van 6π is ook 1/24 deel. Dit laat dus de leerlingen intuïtief zien dat de grootte van een hoek in radialen inderdaad de verhouding is tussen de booglengte die bij een middelpuntshoek van een cirkel past en de straal van deze cirkel.*

Figuur 18: Toevoeging in het lesmateriaal over radialen

Ook geeft expert 1 aan dat de link tussen de booglengte en hoekmaat radialen explicieter mag worden gemaakt, en dat dit kan helpen om het leerdoel te bereiken. Om deze reden is dit ook explicieter in het lesmateriaal opgenomen.

Over het algemeen werd leerdoel 11 ook goed ontvangen. Expert 1 benoemde nog dat dit wel erg lijkt op leerdoel 7. In overleg met de eerste begeleider is daarom ook leerdoel 7 toch weggehaald omdat dit ook kan worden getest met leerdoel 11.
Expert 7 benoemde nog dat leerdoel 6 t/m 9 en 11 wat meer inoefening vereisen om echt behaald te kunnen worden, en dat hiervoor meer opdrachten nodig zijn.

### 5.2.2 Feedback op de ontwerpeisen

De eerste ontwerpeis luidt: *De lessenserie is in drie lessen van 40 minuten uit te voeren.* De meeste experts dachten dat dit zeker goed te doen is. Expert 4 vroeg zich wel af hoe de verdeling over de drie lessen zal zijn, dus wat wanneer aan bod komt, en raadde aan om dit in het lesmateriaal op te nemen. Expert 5 had een soortgelijke mening hierover, en raadde ook aan om de leerdoelen dan ook per les in te delen. Expert 3 dacht dat het ook nog in twee lessen van 50 minuten te halen was, en ook expert 6 denkt dat het nog wel korter kan. Experts 2 en 7 vinden het allebei lastig in te schatten. Ze denken wel dat het te doen is en raden niet aan iets te schrappen. Door deze verzameling van feedback is ervoor gekozen om inderdaad een verdeling te maken over de drie lessen, en dan ook elke les specifieke leerdoelen toe te voegen. Expert 1 voegde hier nog aan toe dat er waarschijnlijk ook tijd zou zijn voor wat extra opdrachten, dus om die ook voor te bereiden en toe te voegen.
De tweede ontwerpeis luidt: *De lessenserie sluit aan op het wiskunde B-niveau van vwo-leerlingen aan het begin van 5 vwo.* Over het algemeen dachten de experts dat de lessenserie goed aansluit op het niveau van de doelgroep. Expert 6 benoemde dat er zelfs bijna geen voorkennis voor nodig is, met uitzondering van het functiebegrip en de goniometrische verhoudingen. Expert 1 had nog twijfels over de overgang van $\sin(x)$ met $x$ de afgelegde weg oftewel hoek in radialen, naar $\sin\left(\frac{180x}{\pi}\right)$ oftewel met tussen de haakjes de hoek in graden. Ook in overleg met de eerste en tweede begeleider is dit in meer detail ingevoegd in de les. Dit heeft wel meer te maken met de inhoud van de les en niet met de voorkennis van de leerlingen.
De derde ontwerpeis luidt: *De lessenserie voldoet aan de leerdoelen zoals hier benoemd.* Deze is in detail besproken in subsectie 5.2.1, en wordt hier dus niet verder los besproken.

### 5.2.3 Feedback op inhoudelijke correctheid

Sommige experts hebben enkele tekstuele of grammaticale opmerkingen gegeven. Deze zijn gelijk geïmplementeerd en worden hier niet besproken. Experts 2 en 4 merkten op dat bij de vragen die behandeld worden bij radialen (zie figuur 15) de vraagstelling soms onduidelijk is. Bijvoorbeeld ‘Wat is $\frac{180°}{\pi}$ in radialen?’, deze is na commentaar veranderd naar ‘Vul in: $\frac{180°}{\pi}$ = .....rad’. Ook is hierdoor ‘Druk uit in radialen: $\sin(450°)$’ veranderd naar ‘Druk $\sin(450°)$ uit in radialen in plaats van graden’. Expert 6 benoemde dat het gek kan lijken voor leerlingen dat de hoekpunten van de regelmatige vijfhoek buiten het eenheidsvierkant vallen en er dus waarden groter dan 1, kleiner dan -1 kunnen ontstaan. Het advies was om te beperken tot de vierhoek, achthoek, zestienhoek, enzovoorts. In overleg met de eerste begeleider is ervoor gekozen om dit niet te implementeren, omdat het niet de bedoeling is dat er een problematische met-before ontstaat dat dit alleen maar kan met figuren met een even aantal hoeken. Expert 2 en de tweede begeleider raadden aan om op te passen met het gebruik van $s(x)$ voor het functievoorschrift, omdat leerlingen dit gauw kunnen verwarren of aannemen voor de sinusfunctie op momenten dat dat nog niet de bedoeling is. Om die reden is $s(x)$ veranderd in $f(x)$, om zo niet een problematische met-before te creëren. Expert 2 gaf ook aan dat het belangrijk is om te benoemen dat de afgelegde afstand over de $n$-hoek wel specifiek de afgelegde afstand tegen de klok in moet zijn. Anders wordt het lastig de negatieve $x$-as goed uit te leggen. Dit werd ook benoemd door expert 5 in de overige opmerkingen. Dit is overal in het lesmateriaal aangepast en ook ter verduidelijking is hier een stuk over toegevoegd. Ook benoemde expert 2 dat het handig kan zijn voor de inhoud toe te voegen wanneer de leerlingen zelf iets moeten doen of niet.

### 5.2.4 Algemene feedback

Over het algemeen waren de experts erg positief over de lessenserie. Expert 1 vond vooral de opbouw naar de eenheidscirkel en het verband tussen de representatie ‘eenheidscirkel’ en ‘functiegrafieken’ goed gelukt, en denkt dat het effectief kan zijn om de leerlingen relationeel begrip te laten krijgen. Expert 2 vond de lessenserie erg interessant, onder andere door het gebruik van GeoGebra. Wel werd er benoemd dat de overgang van de 30-hoek naar de cirkel misschien net niet correct is om zo te doen. De eerste begeleider was het hiermee eens, maar in overleg is er besloten om dit zo te laten, omdat het uiteindelijk niet een van de leerdoelen van de lessenserie is.

Expert 3 vermoedde dat de lessenserie vooral met betrekking tot de eenheidscirkel en de interpretatie ervan tot een beter begrip zal leiden bij leerlingen. Er wordt ook benoemd dat de basis van goniometrische functies misschien alsnog niet zo goed zal blijven hangen of dat het meer als trucje wordt gezien, maar wel met de opmerking dat één lessenserie daar ook weinig aan kan veranderen. De expert benoemde ook dat het misschien nog leuk is om een interessante/leuke afsluiting van de lessenserie te doen met een praktische toepassing. Uiteindelijk is besloten om dit niet in deze lessenserie te doen vanwege gebrek aan tijd/ruimte hiervoor, maar dit zou zeker nog van toegevoegde waarde kunnen zijn. Expert 4 vond de lessenserie er goed uitzien, maar waarschuwt wel dat er misschien niet veel zichtbaar effect op de leerlingen zal zijn, aangezien drie lessen van 40 minuten niet veel kan doen aan jarenlang les krijgen op instrumenteel vlak. Expert 5 gaf aan dat het stuk van de lessenserie over booglengtes en graden in meer stappen kan. Hetzelfde geldt voor voor het stuk over coördinaten van P wanneer het over de eenheidscirkel heeft bewogen met bepaalde booglengte. De expert zou daar graag duidelijker zien wat we daar graag zouden zien dat de leerlingen antwoorden en wanneer aan de leerdoelen is voldaan. De eerste begeleider was het hiermee eens en dat stuk van de lessenserie is aangepast, zoals te zien is in figuur 19.

*Ga vervolgens weer terug naar het punt (0,1), wat hoorde bij een booglengte van $\frac{1}{2}\pi$, en vraag de leerlingen welke middelpuntshoek hierbij hoort. Maak ook de connectie met welk punt van de grafiek hierbij hoort. Doe dit ook voor booglengtes $\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, en $2\pi$ (180°, 270° en 360°). Maar nu, als de connectie wordt gemaakt met de grafiek van de functie, ga die functie een naam geven (bijvoorbeeld f), en ga het ook als input/output geven zoals je dat ook met een functies doet normaal gesproken. Dus f(x)=…, waarbij x de afgelegde weg, oftewel booglengte is, dus bijvoorbeeld $f(\pi)=0$, want nul is de verticale positie/hoogte van punt P, en gelijk aan de waarde op de y-as. Zo krijg je $f(\frac{1}{2}\pi)=1$, $f(\frac{3}{2}\pi)=-1$, en $f(2\pi)=0$. Ze deze op een rijtje boven elkaar, en zet $f(\frac{1}{4}\pi)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ er ook bij.*

*Nu moet nog de connectie worden gemaakt met de hoeken en de sinus. Pak de driehoek van hierboven erbij, en ga samen met de leerlingen bekijken hoe je met behulp van de sinus ook achter de waarde van x had kunnen komen. Ga terug naar het voorbeeld van $\frac{1}{4}\pi$, waarbij middelpuntshoek van 45° hoorde, en dat de hoogte van dit punt gelijk was aan $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Vraag de leerlingen hoe ze op een andere manier de hoogte van dat punt, oftewel de lengte van die zijde hadden kunnen weten. Als ze niet zelf met iets komen, wijs ze op de rechte hoek in de driehoek, en vraag welke informatie je hebt, en wat ze willen weten. Op deze manier help je ze herinneren dat $\sin(\alpha) = \frac{overstaand}{schuin}$, waarbij hier $\alpha = 45°$, overstaand= $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en schuin =1. Hierdoor krijg je $\sin(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Ze zien dus dat, in plaats van Pythagoras gebruiken, ze ook de sinus hadden kunnen gebruiken. Hierdoor kan je in het rijtje zetten dat $f(\frac{1}{4}\pi)= \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sin(45°)$.*

We zien nu dus dat de y-coördinaat van punt P dus beschreven kan worden door de sinus van de middelpuntshoek! Dit geldt ook voor onze andere punten, laten we samen het rijtje afmaken. *Benoem hier goed dat je dus de sinus kan gebruiken om de hoogte van punt P te berekenen, en laat zien met een voorbeeld waarom dit handig is. Neem hiervoor, bijvoorbeeld, een booglengte van 0,3, en teken de driehoek die hierbij hoort. In dit geval kan je niet makkelijk algebraïsch de lengte van de zijde uitrekenen, maar je kan dus wel de sinus hiervoor gebruiken! Benoem dat we dit hebben laten zien voor waardes in het eerste kwadrant in de eenheidscirkel (daar heb je hoeken van $\leq 90°$), en dat we hebben afgesproken dat je dit ook mag gebruiken voor de andere kwadranten, waar de hoeken $> 90°$ zijn.*

Figuur 19: Aanpassing in het lesmateriaal

Expert 6 zei dat het eerst wennen was om zo een nieuwe aanpak van dit onderwerp te zien, maar dat naarmate het verhaal vorderde er steeds meer enthousiasme kwam. Onder andere de connectie tussen de sinus en het $y$-coördinaat en de cosinus en het $x$-coördinaat van een punt op de cirkel werd zo mooi duidelijk. Wel wordt hier aangeraden om bijvoorbeeld een werkblad te maken voor de lessen omdat er veel getekend moet worden en er vragen tussendoor beantwoord moeten worden. Expert 7 vond ook dat er een mooie opbouw in de lessenserie zat. Wel wordt er benoemd dat het pittig kan worden voor de leerlingen zodra er met hoeken gewerkt wordt. Ook deze expert legde nog de nadruk van het belang van inoefening en dat extra opgaven nog een beetje missen in de lessenserie.

## 5.3 Uiteindelijk ontwerp

Met alle feedback die hierboven is gegeven, is er een nieuwe ontwerp van het lesmateriaal gekomen, waarin het materiaal in drie lessen is verdeeld. Met betrekking tot de leerdoelen betekent dit dat er zowel les-specifieke leerdoelen zijn gekomen als overkoepelende leerdoelen.

De eerste les eindigt op het punt dat de eenheidscirkel wordt geïntroduceerd. De leerdoelen van deze les zijn als volgt.

1. *De leerling kan de grafiek tekenen van de afgelegde afstand van een punt die over een $n$-hoek beweegt tegenover de verticale positie van dat punt voor verschillende waarden van $n$.*
2. *De leerling kan uitleggen wat de eenheidscirkel is.*

De tweede les gaat vooral over de connectie met de sinus als functie en radialen. De les eindigt voordat het deel over de cosinus begint. De leerdoelen van deze les zijn als volgt.

1. *De leerling kan uitleggen wat de interpretatie van de input en output van de sinusfunctie is.*
2. *De leerling kan met behulp van het verband tussen de eenheidscirkel en de grafiek van de sinus uitleggen waar de eigenschappen periodiciteit, domein en bereik van de sinus vandaan komen.*
3. *De leerling kan de $y$-coördinaat van punten op de eenheidscirkel berekenen aan de hand van de booglengte.*
4. *De leerling kan uitleggen wat radialen zijn in het geval van de eenheidscirkel.*
5. *De leerling kan radialen omrekenen naar graden en vice versa.*

De derde les gaat vooral over de cosinusfunctie. Ook zijn er hier op het eind nog wat overkoepelende vragen toegevoegd. De leerdoelen van deze les zijn als volgt.

1. *De leerling kan uitleggen wat de interpretatie van de input en output van de cosinusfunctie is.*
2. *De leerling kan met behulp van het verband tussen de eenheidscirkel en de grafiek van de cosinus uitleggen waar de eigenschappen periodiciteit, domein en bereik van de sinus vandaan komen.*
3. *De leerling kan de $x$-coördinaat van punten op de eenheidscirkel berekenen aan de hand van de booglengte.*

De overkoepelende leerdoelen zijn uiteindelijk als volgt.

1. *De leerling kan uitleggen wat de eenheidscirkel is en wat het te maken heeft met de sinus/cosinus.*
2. *De leerling kan uitleggen wat de interpretatie van de input en output van de sinusfunctie/cosinusfunctie is.*
3. *De leerling kan met behulp van het verband tussen de eenheidscirkel en de grafiek van de (co)sinus uitleggen waar de eigenschappen periodiciteit, domein en bereik van de (co)sinus vandaan komen.*
4. *De leerling kan de $x/y$-coördinaat van punten op de eenheidscirkel berekenen aan de hand van de booglengte.*
5. *De leerling kan uitleggen wat radialen zijn in het geval van de eenheidscirkel.*
6. *De leerling kan radialen omrekenen naar graden en vice versa.*

Het is te zien dat niet alle les-specifieke leerdoelen mee zijn genomen in de overkoepelende leerdoelen. Het eerste leerdoel van les 1 is bijvoorbeeld van belang om de opwindfunctie te snappen en dus de opbouw naar de sinusfunctie, maar is niet persé een doel van de lessenserie op zich. De onderbouwing voor de verandering van leerdoelen is te vinden in hoofdstuk 5.2.1. Op deze manier is ontwerpeis 3 behaald.

Verder zijn er, aan de hand van de feedback van het expertpanel, voor elke les werkbladen gemaakt. Hierbij geldt, per les, dat het eerste werkblad vooral vragen erop heeft staan die al in de eerste versie van het materiaal stonden, en dus vooral helpen als ondersteuning voor zowel docent als leerlingen. Ook maakt dit het makkelijker voor de leerlingen om de tekeningen te maken zoals de bedoeling is vanuit het lesmateriaal. Het tweede werkblad is voor elke les bedoeld om te maken aan het eind van de les, dus als alle instructie plaats heeft gevonden. Hiervoor is ofwel tijd in de les zelf, ofwel dit worden huiswerkopgaven voor thuis. Deze werkbladen zijn te vinden in bijlage H2. Aangezien dit ervoor zorgt dat de tijd van de lessen goed kan worden gevuld, wordt ontwerpeis 1 zo ook behaald. Ontwerpeis 2 werd door het expertpanel ook gezien als behaald.

Verder zijn er op diverse plekken in het materiaal nog concrete aanpassingen gedaan. Zinnen die niet goed liepen, stukken uitleg die uitgebreider konden, of vragen van de docent waar nog een expliciet antwoord bij moest staan. De uiteindelijke versie van het lesmateriaal, dus met al deze veranderingen, is te vinden in bijlage H1.

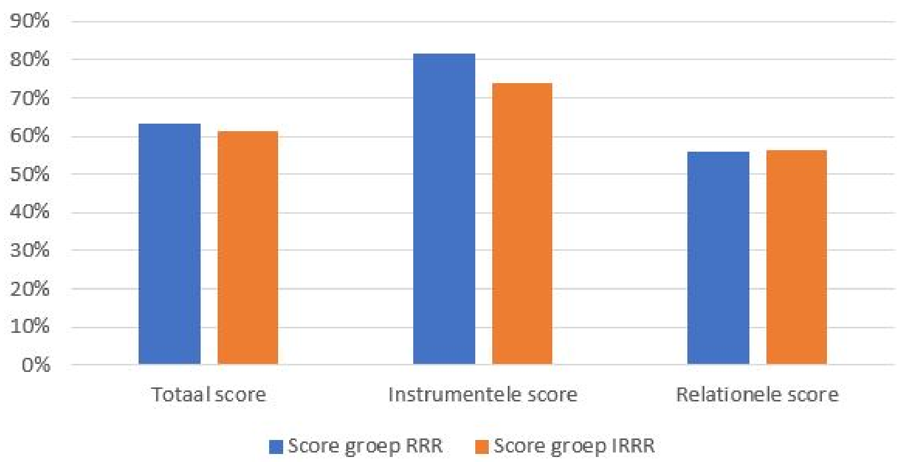
## 5.4 Toets

Beide groepen hebben na de lessenserie de toets gemaakt, te zien is in figuur 5.4. Er waren 24 punten te scoren op deze toets, waarvan 7 punten testen op instrumenteel begrip en 17 op relationeel begrip. De verdeling van de punten en waarvoor deze zijn toegekend zijn terug te vinden in het antwoordenmodel in bijlage D2. In tabel 4 zijn de gemiddelde scores te vinden van de groepen, de volledige scores per leerling zijn terug te vinden in bijlage I.

TABEL 4: Behaalde punten op de toets van de RRR- en IRRR-groep

| | **Score groep RRR** | **Score groep IRRR** |
|---|---|---|
| Totaal score | 15,21 | 14,75 |
| Instrumentele score | 5,71 | 5,17 |
| Relationele score | 9,5 | 9,58 |

Voor beide groepen is, aan de hand van het gemiddeld aantal punten, het percentage behaalde punten te zien in figuur 20. Het gaat gaat dus niet om een cijfer dat zou zijn behaald, wat meestal een aangepaste berekening heeft, maar een percentage behaald punten van beide groepen op totale score, instrumentele score, en relationele score.




FIGUUR 20: Percentage behaalde punten op de toets

Het is te zien aan de scores dat er niet veel verschil lijkt te zijn tussen beide groepen. Om te kijken of er een statistisch significant verschil is, gebruiken we de hypothesetoetsen zoals beschreven in hoofdstuk 4.4. Tabel 5 laat de waardes van de toetsingsgrootheid zien bij de drie verschillende t-toetsen. Vanuit de bijbehorende tabel van de t-toets is af te lezen, bij 11 vrijheidsgraden en $\alpha = 0,05$, dat de toetsingsgrootheid minstens $2,201$ zou moeten zijn. Bij alle drie de t-toetsen is de waarde van de toetsingsgrootheid kleiner dan $2,201$, en daarom kunnen we concluderen dat voor elke hypothesetoets de nulhypothese niet verworpen kan worden en dat er dus geen significant verschil is tussen de scores van de RRR- en de IRRR-groep.

TABEL 5: Waardes van toetsingsgrootheid bij de drie t-toetsen

| **Soort score** | **Waarde van toetsingsgrootheid** |
|---|---|
| Totale score | $0,89$ |
| Instrumentele score | $0,54$ |
| Relationele score | $0,98$ |

In tabel 6 is uiteengezet hoeveel punten er gemiddeld zijn gescoord per leerdoel voor beide groepen apart, en voor beide groepen samen. Elk leerdoel is vervolgens nog opgesplitst in behaalde punten instrumenteel begrip en relationeel begrip, te vinden in tabel 7 t/m 12.

Tabel 6: Gemiddeld aantal punten per leerdoel, per groep

| **Leerdoel** | **Maximale score** | **Score RRR-groep** | **Score IRRR-groep** | **Gemiddelde score** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2,35 | 1,92 | 2,14 |
| 2 | 5 | 1,8 | 2,67 | 2,24 |
| 3 | 4 | 3,65 | 2,67 | 3,16 |
| 4 | 6 | 3,14 | 3,66 | 3,4 |
| 5 | 3 | 1,57 | 1,5 | 1,54 |
| 6 | 3 | 2,72 | 2,34 | 2,53 |

Tabel 7: Gemiddeld aantal punten voor leerdoel 1, per groep, per soort begrip

| | Maximale score | Score RRR-groep | Score IRRR-groep | Gemiddelde score |
|---|---|---|---|---|
| Instrumenteel begrip | 2 | 1,71 | 1,50 | 1,61 |
| Relationeel begrip | 1 | 0,64 | 0,42 | 0,53 |

Tabel 8: Gemiddeld aantal punten voor leerdoel 2, per groep, per soort begrip

| | Maximale score | Score RRR-groep | Score IRRR-groep | Gemiddelde score |
|---|---|---|---|---|
| Instrumenteel begrip | 1 | 0,43 | 0,50 | 0,47 |
| Relationeel begrip | 4 | 1,37 | 2,17 | 1,77 |

Tabel 9: Gemiddeld aantal punten voor leerdoel 3, per groep, per soort begrip

| | Maximale score | Score RRR-groep | Score IRRR-groep | Gemiddelde score |
|---|---|---|---|---|
| Instrumenteel begrip | 0 | - | - | - |
| Relationeel begrip | 4 | 3,65 | 2,67 | 3,16 |

Tabel 10: Gemiddeld aantal punten voor leerdoel 4, per groep, per soort begrip

| | Maximale score | Score RRR-groep | Score IRRR-groep | Gemiddelde score |
|---|---|---|---|---|
| Instrumenteel begrip | 0 | - | - | - |
| Relationeel begrip | 6 | 3,14 | 3,66 | 3,4 |

Tabel 11: Gemiddeld aantal punten voor leerdoel 5, per groep, per soort begrip

| | Maximale score | Score RRR-groep | Score IRRR-groep | Gemiddelde score |
|---|---|---|---|---|
| Instrumenteel begrip | 1 | 0,86 | 0,83 | 0,85 |
| Relationeel begrip | 2 | 0,71 | 0,67 | 0,69 |

Tabel 12: Gemiddeld aantal punten voor leerdoel 6, per groep, per soort begrip

| | Maximale score | Score RRR-groep | Score IRRR-groep | Gemiddelde score |
|---|---|---|---|---|
| Instrumenteel begrip | 3 | 2,72 | 2,34 | 2,53 |
| Relationeel begrip | 0 | - | - | - |

Het is te zien dat voor leerdoel 1 op zowel instrumenteel als relationeel begrip de RRR-groep iets hoger scoort dan de IRRR-groep. Voor leerdoel 2 scoort de IRRR-groep iets hoger op instrumenteel gebied, en behoorlijk meer op relationeel gebied. Voor leerdoel 3 waren alleen punten te halen op relationeel begrip, waarbij de RRR-groep significant hoger scoort. Voor leerdoel 4 waren ook alleen punten te halen op relationeel begrip, en de IRRR-groep scoort iets hoger hiervoor. Beide groepen scoren voor op instrumenteel als relationeel begrip een gelijkwaardige score voor leerdoel 5. Voor leerdoel 6 waren alleen punten te halen op instrumenteel begrip, hiervoor scoorde de RRR-groep iets hoger.

## 5.5 Interviews

Van zowel de IRRR- als de RRR-groep zijn er, nadat de toets was afgenomen, drie leerlingen geïnterviewd. Deze interviews vonden plaats op de dag van de toets of de dag erna. Van de RRR-groep had leerling 1 in 4 vwo een gemiddelde van 6,1 voor wiskunde B, leerling 2 een 8,7 en leerling 3 een 7,3. Van de IRRR-groep had leerling 1 in 4 vwo een gemiddelde van 8,7 voor wiskunde B, leerling 2 een 5,3 en leerling 3 een 7,3. Alle leerlingen hebben dezelfde vragen gesteld gekregen tijdens de interviews, van welke de transcripties terug te vinden zijn in bijlage J.

### 5.5.1 Inhoudelijke vragen

Hieronder worden eerst, per vraag, de antwoorden op elke inhoudelijke vraag geanalyseerd om te kijken of er verschil zit tussen de twee groepen. Vervolgens wordt ook nog samengevat wat de leerlingen antwoordden op de contextvragen, dus wat ze vonden van de lessenserie. De inhoudelijke interviewvragen zijn als volgt.

1. Leg in je eigen woorden uit wat de eenheidscirkel is en wat de sinus en de cosinus ermee te maken hebben. Je mag ook gebruik maken van een tekening.
2. Reken exact uit zonder rekenmachine: $\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right)$.
3. Hoe kan je de sinus van een negatieve hoek interpreteren?
4. Wat zijn radialen en wat hebben ze te maken met de eenheidscirkel?
5. Hoe kan je graden omrekenen naar radialen? Kan je dit uitwerken voor 225°?
6. Wat is de interpretatie van de input en output van de sinusfunctie?

Het overzicht van welke interviewvraag welk leerdoel test is te vinden in tabel 3. Hieronder volgen de tabellen met (delen van) de antwoorden van de leerlingen.

Tabel 13: Leerlingenreacties op interviewvraag 1 - leerdoel 1

| | Leerlingenreactie |
|---|---|
| Leerling 1 RRR | - Eh, ja zeg maar de eenheidscirkel is een cirkel met een straal van één, die, zeg maar, het middelpunt op de oorsprong ligt, dus nul komma nul. En de cosinus is zeg maar de x, als je dat berekent is dat dan de x en de sinus is dan de y.<br>- Van de cirkel. [*Tekent met de vingers een cirkel in de lucht en wijst een punt er op aan.*] De coördinaten x en y. |
| Leerling 2 RRR | - Ja, het begint in de oorsprong, het middelpunt, en heeft straal 1. En die cosinus had te maken met de x-coördinaten en de afgelegde afstand, volgens mij. En die sinus had te maken met de y-coördinaten volgens mij.<br>- Van de cirkel. |
| Leerling 3 RRR | - Ehm, ja de eenheidscirkel is een cirkel met een straal van één, en het middelpunt is de oorsprong. En, ehm, je hebt dan een willekeurig punt P op de cirkel, en met de sinus kan je de y-coördinaat van P uitrekenen, en met de cosinus de x-coördinaat van P. |
| Leerling 1 IRRR | - Ohja, ehm, ja de eenheidscirkel is eigenlijk een cirkel waarbij de straal één is, en de, het middelpunt is de oorsprong. Ja, met de cosinus kun je eigenlijk kijken naar de x-coördinaten van punten op de cirkel, en met de sinus geldt dat voor de y-coördinaten. |
| Leerling 2 IRRR | - Eenheidscirkel is de, ehm, een cirkel en die heeft als middelpunt de oorsprong en straal één. En de omtrek is twee pi. Of twee pi rad, dat weet ik niet meer. En, ehm, cosinus, als je daar invult 180 graden, dan komt daar uit één pi. En hetzelfde bij de sinus volgens mij, maar dan hebben we de sinus of zo is. Als je zo'n grafiek wil maken, dan is het met de x en met de cosinus de y.<br>- Ehm, als je dan eentje omhoog gaat, ja, volgens mij is het meer met dat vierkant. Als je dan één omhoog gaat, vanaf punt P, dus dan één omhoog, dan ga je op de grafiek, ga je ook één omhoog schuiven.<br>- Als je dan de graden berekent, of hebt, of dan de radialen juist, dan kun je daarmee het punt op de cirkel berekenen.<br>- Ja ik weet niet meer of sinus nou bij de x hoort of cosinus bij de x. En ja ook voor de y, dat ben ik een beetje vergeten. |
| Leerling 3 IRRR | - Ehm, de eenheidscirkel is een cirkel met straal van één. En, ehm, de sinus en de cosinus kijk eigenlijk naar de, ehm, de y-waarde en de x-waarde van punten. Op de cirkel.<br>- Ja, hij moet precies, ehm, op de oorsprong liggen. |

Vrijwel alle leerlingen waren goed instaat de eerste vraag te beantwoorden (*Leg in je eigen woorden uit wat de eenheidscirkel is en wat de sinus en de cosinus ermee te maken hebben*). Alleen leerling 2 van de IRRR-groep had nog moeite met het uitleggen van wat de rol van de sinus en cosinus is in de eenheidscirkel. Wat wel opvallend is, is dat veel leerlingen aangeven dat sinus de $y$ is, en cosinus de $x$, van de cirkel. Naar doorvragen kunnen de leerlingen bijna altijd wel aangeven dat het eigenlijk gaat om de coördinaten van *punten op* de cirkel. Verder is hier geen duidelijk verschil tussen de leerlingen van beide groepen.

Tabel 14: Leerlingenreacties op interviewvraag 2 - leerdoel 4 - deel 1

| | Leerlingenreactie |
|---|---|
| Leerling 1 RRR | - Ohja, wacht. [*Schrijft op:* Eh, dat is hetzelfde als... hmmm, één en drie kwart pi, dus...<br>- Ja want de vier past er één keer in en dan nog drie over en dan drie delen van vier is driekwart.<br>- Was dat niet zeg maar, aanliggend gedeeld door schuin?... Ja, ik weet het niet meer, aanliggend is dan... één? Nee want het was, die driehoek had een verhouding, twee?...<br>- Ja 315 graden, ehm, en dan weet ik niet hoe ik verder moet gaan. Want je hebt dan wel dat middelhoekspunt, toch?<br>- [**Na veel aansporing**] Ooh, jaa, dan daar. [*Wijst naar een punt op de cirkel in het eerste kwadrant]*<br>- Hmm, als je hier weer die driehoek maakt toch? En dat was, zo. [*Tekent de driehoek]* Ongeveer. En dan had je hier 90 graden, en dan daar 30 en daar 60.<br>- Ja, en dan is deze kant één, want de straal is ook één.<br>- En dan, kan je dat, wacht. Aanliggend gedeeld door schuine dus, nul. Dus de cosinus van 45 is hetzelfde als... [*Begint te schrijven]* Nee maar dat kan ook niet.<br>- [**Na veel aansporing**] Oh, die zijn gelijk aan elke kant. Oh, dus dan is die ook gewoon hetzelfde. [*Wijst naar de derde hoek in de driehoek]*<br>- Ja. [*Schrijft verder]* a kwadraat plus b kwadraat is c kwadraat. Dus x in het kwadraat, 2 x in het kwadraat, want je hebt, is één.<br>- En dan, x in het kwadraat is een half. X is wortel van een half. |
| Leerling 2 RRR | - Ja, ehm. Ik had volgens mij, ja toen had ik dus een cirkel getekend. [*Begint te tekenen]* Zeven vierde pi, dat zit, hier, één twee derde, nee, één... één... wacht even hoor [*lacht*]..., één drie vierde ja! Eén drie vierde pi, ehm, dat had ik dan omgerekend naar graden.<br>- Ja dan zit ie hier volgens mij. [*Wijst naar een punt behorend bij* $1\frac{1}{4}$ *pi op de cirkel]* Ja want hij zit op de helft hiertussen<br>- Ohja, het is meer dan anderhalf dus dan ligt ie hier [*wijst naar het punt net verder dan het punt bij anderhalf pi*].<br>- Die was, wacht even hoor... [*stilte*]. Ja, 180, plus, negentig plus vijfenveertig is 135, ja dat wordt dus niet 60 [*lacht*].<br>- Als ik het in mijn hoofd moet doen wordt het veel moeilijker opeens, euhm, maar die wordt dus 45 dus dat is niet 60, maar... 45<br>- En dan, ehm, die x, die x [*schrijft het in de tekening erbij*], en dan is deze één [*wijst naar de straal van de cirkel*].<br>- Ja, dan, x in het kwadraat plus x in het kwadraat is één. Twee x in het kwadraat is één. En dan x is wortel één tweede.<br>- Ja dus het is eigenlijk, ja het is nog steeds dus, alsof het eigenlijk gespiegeld is. |
| Leerling 3 RRR | - Eén vierde is zegmaar, hier [*wijst naar het punt op de cirkel met een middelpuntshoek van 45 graden*], en dit is anderhalf pi, en dan is hier dus deze [*wijst naar het punt op de cirkel met een middelpuntshoek van 315 graden*]. *Gaat verder met tekenen.* Dit is één, dit is x, x (zie tekening).<br>- Nou, dan Pythagoras, a kwadraat plus b kwadraat is c kwadraat. C kwadraat is, ehm, ja één kwadraat en dat is één. Dus dan is x kwadraat plus x kwadraat is één. Twee x kwadraat is één, dus dan één x kwadraat is een half. En dan is x wortel een half.<br>- [**Na aansporing**] Oooh, ja, omdat ie, helemaal tot hier gaat, en dan is ie weer aan de rechterkant van de, zegmaar, y-lijn. |

Tabel 15: Leerlingenreacties op interviewvraag 2 - leerdoel 4 - deel 2

| | |
|---|---|
| Leerling 1 IRRR | - Ja, omdat, als je toch van pi naar graden wil, kun je toch, deze berekenen. Denk ik. Alleen, ehm, 180, ja...<br>- Ja, één pi is 180 graden en één vierde pi is 45 graden, dus eigenlijk doe je dat keer zeven om er op te komen. Dus dan kun je ook zeven keer 45 doen.<br>- Oh ja en dan moet je het in de cosinus zetten.<br>- Dat moet je toch iets met Pythagoras doen. [*Begint te tekenen*]<br>- En dan, naar beneden. [*Beschrijft wat ze tekent*] Ja, en dan weet je dat deze één is, en deze is 45 graden.<br>- Omdat het zeg maar één vierde is, ja hoe leg je dat uit. Maar je weet dat dat zo is door die andere hoek.<br>- Dus dan deze hoek vijf, nee, dan weet je dat deze 90 is. En deze is 45 want dat is, ehm, ja hoe zeg je dat, erbij. Ja ik weet niet hoe ik dat uit moet leggen.<br>- En deze zijn gelijk aan elkaar [*wijst naar twee zijden van de driehoek*].<br>- Omdat gelijke hoeken gelijke zijdes zijn, zeg maar, dus die kunnen we x stellen. En dan Pythagoras. [*Schrijft de berekening van Pythagoras op*] En dan alleen deze [*schrijft alleen de positieve wortel op*].<br>- Ja, omdat hier ga je met de klok mee bij 45 graden, dus eigenlijk is het min 45 graden, maar omdat het een hoek is, hoef je dat niet negatief te schrijven. En hier ga, ja hoe zeg je dat, de andere kant, tegen de klok in. Dus dan is het 315 graden, dus of je kunt zeggen een cosinus van min 45 of een cosinus van 315. |
| Leerling 2 IRRR | - Hmm, maar dat is toch ook met 180 gedeeld door pi.<br>- Oh wacht maar nu bereken ik de hoek.<br>- De x.<br>- [*tekent*] Nou dan heb je die hoek, en dit staat negentig graden.<br>- En dan. Maar je wil... Oké wacht je wil dit weten eigenlijk, dit is de lengte, en dan heb je dat [*gebaart*].<br>- Dan heb je de x, dus dan moet je [*stilte*] sinus gebruiken, want dit is één, en dan heb je de overstaande hoek.<br>- [**Na veel aansporing**] Dan is dit ook 45 [*wijst naar de derde hoek*], want dit is 90.<br>- Hadden deze geen verhoudingen? Was dat, ehm. Maar dat is toch niet die met 60 en 30, dus dat is toch niet die met wortel drie en twee en één?<br>- Oh dus x, x [*schrijft*]. Wacht... jawel.<br>- We hebben Pythagoras, en dan één is wortel x kwadraat plus x kwadraat. Eén is twee x kwadraat. [*Schrijft*]<br>- Moet je nu kwadrateren. Maar moet je dan plus òf min gebruiken, of...?<br>- [**Na aansporing**] Ohja wacht, kan niet.<br>- Nou gedeeld door twee. X kwadraat, en dan wortel. |
| Leerling 3 IRRR | - [*Tekent de eenheidscirkel en pakt het punt bij zeven vierde pi*]<br>- Dit is, ehm, één pi [*wijst naar het punt (-1,0)*], en dit anderhalf [*wijst naar het punt (0,1)*]. Dus dit één drie vierde.<br>- Dus het x-coördinaat [*onverstaanbaar*]. Ik weet even niet hoe ik dit op moet schrijven.<br>- Ja, dat is dan, ehm, nul komma vijf? Zo lijkt het.<br>- Dat is een bij een driehoek zo [*refereert naar 180 graden*].<br>- Dat kan. Dat is, ehm, 315 graden.<br>- [**Na aansporing**] Ah, 45.<br>- Ja. [*Gaat verder met tekenen*] En ehm, ja, die zijn even lang.<br>- Ja met Pythagoras. Dan krijg je x kwadraat is gelijk aan één.<br>- [*Schrijft goede antwoord op*]<br>- Omdat, ehm, ja die 45 graden, dat is die laatste vierde. |

Vrijwel alle leerlingen hadden veel moeite met deze vraag (*Reken exact uit zonder rekenmachine:* $\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right)$). De vraag gaat dan ook iets dieper in op de stof dan hiervoor is gedaan, doordat een nog onbekende waarde van de cosinus wordt gevraagd. Leerling 1 van de RRR-groep en leerling 2 van de IRRR-groep hebben beide veel moeite om überhaupt te beginnen met het kunnen beantwoorden van de vraag om het goede punt op de eenheidscirkel te kunnen aanwijzen. De andere leerlingen zijn wel vrij snel in staat om het begin te maken. De volgende stap is het tekenen van een rechthoekige driehoek zodat de stelling van Pythagoras kan worden gebruikt. Leerling 2 en 3 van de RRR-groep en leerling 1 en 3 van de IRRR-groep herkennen dit zelf en komen er (grotendeels) zelfstandig uit. De laatste stap, namelijk uitleggen dat $\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)$, is voor alle leerlingen lastig. Leerling 2 en 3 van de RRR-groep en leerlinge 1 van de IRRR-groep komen nog dicht in de buurt om dit uit te leggen. Dit was ook een nieuwe en onbekende stap voor alle leerlingen, en er is geen duidelijk verschil tussen de twee groepen leerlingen hierbij.

Tabel 16: Leerlingenreacties op interviewvraag 3 - leerdoel 3

| | Leerlingenreactie |
|---|---|
| Leerling 1 RRR | - Dat ie, zeg maar, met de klok mee gaat. [*Geeft met de vingers in de lucht aan welke kant dat op is*]<br>- Vier en drie.<br>- Omdat je zeg maar, dan is de y ook in de min, en de sinus hoort bij de y. |
| Leerling 2 RRR | - Ja je gaat met de klok mee.<br>- P, punt P gaat met de klok mee, en dan de sinus is, ehm, dat is zeg maar het y-coördinaat, ehm. Hoe zeg je dat, ja, dat je de y-coördinaat bekijkt, ofzo?<br>- Ehm, ja, in de derde en vierde, denk ik.<br>- Ja, omdat daar, oh nee. Ja, omdat daar de y-coördinaat negatief is. |
| Leerling 3 RRR | - Ja, dan is de P met de wijzers meegegaan. [*Gebaart in de lucht*]<br>- Sinus is, ehm, drie en vier.<br>- Omdat daar de y negatief is.<br>- De sinus, dan moet je kijken naar de y-coördinaat van P. |
| Leerling 1 IRRR | - Ehm, hoe je de sinus van een negatieve kunt... ja hoe zeg je dat. Ja, ik weet het eigenlijk niet zo goed.<br>- Dat je met de klok meegaat.<br>- Ja de y-coördinaat.<br>- Een negatieve y-coördinaat of ja, (-1,0) toch? [*Wijst met de wijzers van de klok mee tot het punt (-1,0)*]<br>- Ja dat kan verschillend zijn om hoeveel graden het gaat, maar hieronder zit je dan zeg maar. [*Wijst naar kwadrant drie en vier*]<br>- Vier en drie.<br>- Daar ga je tegen de klok in en dan, ehm, is de y-coördinaat daar negatief. |
| Leerling 2 IRRR | - Dan ben je teruggegaan over de cirkel.<br>- Dat de klok meegaat.<br>- Min pi? Of...<br>- Vier en drie.<br>- Omdat die hier weer plus wordt [*wijst naar het punt (-1,0)*].<br>- De y-waarde. |
| Leerling 3 IRRR | - Het y-coördinaat van een negatieve hoek.<br>- Tegen de klok in.<br>- In drie en vier. De y is dan min. |

Alle leerlingen waren goed in staat deze vraag te beantwoorden (*Hoe kan je de sinus van een negatieve hoek interpreteren? En in welke kwadranten is de sinus negatief?*). Deze vraag kwam (deels) overeen met vraag 3c op de toets, en deze leerlingen hadden deze vraag ook allemaal goed. Er is geen verschil tussen de twee groepen voor deze vraag.

Tabel 17: Leerlingenreacties op interviewvraag 4 - leerdoel 5

| | Leerlingenreactie |
|---|---|
| Leerling 1 RRR | - Eh ja één radiaal staat gelijk aan 180 graden.<br>- 180 graden gedeeld door pi.<br>- Zeg maar hoe ver je hebt [*tekent met vingers een boog in de lucht*], de cirkel hebt verlopen. Of niet?<br>- Dat de straal altijd één is.<br>- Is het gelijk aan die booglengte.<br>- Ehm. . . [*stilte*]. Zeg maar hoever die, het punt, is verplaatst. |
| Leerling 2 RRR | - Ja, aantal graden, alleen dan in pi, eigenlijk, volgens mij. En dan geeft het de, ja hoe noem je dat, ja de booglengte aan. Ehm, die dat punt, van een punt tot een punt eigenlijk.<br>- Ja die je had afgelegd ofzo.<br>- Ja vanaf punt P [*wijst het punt met coördinaten (1,0) aan in de cirkel die ze eerder had getekend*]. Die, als je die pakt, vanaf (1,0), in de eenheidscirkel.<br>- Ja een straal van één. |
| Leerling 3 RRR | - Ehm, ja, hoever je zegmaar op de cirkel bent, de booglengte.<br>- Hoever P dus is gegaan.<br>- Straal is één. |
| Leerling 1 IRRR | - Ja, ik dacht dus van radialen zijn dus soort van eenheden die je gebruikt voor het, ehm, berekenen van de middelpuntshoeken bij bepaalde booglengte. Ja, ja ik weet niet wat het dan nog echt is ofzo.<br>- Maar bij de booglengte kun je ook gewoon alleen de pi gebruiken. Zeg maar zoals nu doe je, wat hoort, bij welke hoek hoort een booglengte van een half pi bijvoorbeeld. En dan gebruik je niet een half pi rad.<br>- Ehm, omdat de eenheidscirkel omtrek heeft van twee pi... Dus, twee pi rad is 360 graden.<br>- Omdat de straal één is. |
| Leerling 2 IRRR | - Dat zijn, ehm, punten op de cirkel, en dan ehm, hoe ver die is op de cirkel.<br>- Hoeveel pi.<br>- Hoever je de cirkel over bent gegaan.<br>- Straal één. |
| Leerling 3 IRRR | - Één radiaal staat gelijk aan 180. Ehm, ja 180 graden is precies pi radialen.<br>- De hoek.<br>- Ook de hoek.<br>- Omdat, ehm, de straal precies één is, dus dandat dan ja. Dan kan je die pi wegdelen ofzo. |

Deze vraag kwam ook voor op de toets en was daar slecht gemaakt (*Wat zijn radialen en wat hebben ze te maken met de eenheidscirkel?*). Ook tijdens de interviews hadden leerlingen moeite met het beantwoorden van deze vraag. Leerling 2 en 3 van de RRR-groep kwamen dicht in de buurt tijdens hun uitleg hiervoor, net zoals leerling 1 van de IRRR-groep. Zoals verwacht konden weinig leerlingen de formele definitie geven met de termen booglengte, middelpuntshoek en straal, en met de conclusie waarom dit in de eenheidscirkel zo uitkomt doordat de straal gelijk aan één is (zie de uitwerking van leerdoel 5 in hoofdstuk 3). Maar de bovengenoemde leerlingen kwamen wel onder lichte aansporing een stuk verder dan ze op de toets hadden opgeschreven. Het lijkt hieruit dat leerlingen toch nog moeite hebben met het onder woorden brengen wat radialen precies zijn, maar dat ze wel een redelijk gevoel ervoor hebben gekregen.

Tabel 18: Leerlingenreacties op interviewvraag 5 - leerdoel 6

| | Leerlingenreacties op interviewvraag 5 |
|---|---|
| Leerling 1 RRR | - Ja, zeg maar, als je de graden hebt dan moet je gedeeld door 180 gedeeld door pi en dan heb je de radialen en als je van radialen naar graden moet je keer 180 gedeeld door pi doen.<br>- *[Begint te schrijven]* 225 graden gedeeld door 180 gedeeld door pi is hetzelfde als.. Dat weet ik niet uit mijn hoofd. Ik denk 0,75, nee. Mag ik even de rekenmachine pakken?<br>- *[Tikt het in op de rekenmachine]* Één één vierde pi. Als radiaal. |
| Leerling 2 RRR | - Ehm, ja 180 graden, ja 180 was pi. En dan als je graden naar radialen wil, ehm, het aantal graden keer pi gedeeld door 180.<br>- *[Typt 225:180 in op de rekenmachine. Hier komt 1,25 uit en ze schrijft als eindantwoord 1 $\frac{1}{4}$ pi log op]*<br>- Log, toch?<br>- Ja, das niet log. . . [*begint te lachen*]<br>- Naja je moest er iets achter zetten toch? Of niet? Niet graden maar. . .<br>- Ohja, rad bedoel ik. Ik was in de war.<br>- Ja gewoon omdat 180 is pi, ja dus dan zet je dat gewoon naast elkaar, want anders raak ik een beetje in de war. |
| Leerling 3 RRR | - Ehm, keer 180 gedeeld door pi.<br>- Ehm, van graden naar radialen is keer 180 gedeeld door pi.<br>- [*Begint te schrijven.*] Oh nee wacht, dat is gedeeld door.<br>- Dan heb je zo [*schrijft*]. Ja en dan krijg je 225 pi gedeeld door 180.<br>- Ehm, en dat heb je één één vierde pi rad. |
| Leerling 1 IRRR | - Ehm, ja je weet dat 180 graden delen door pi is toch één rad? Dus, ehm ja, als je wilt omrekenen van graden naar radialen dan kun je dus zeggen: één pi rad is 180 graden. En dan ja, kun je zeg maar, ligt eraan hoeveel graden je wilt, maar dan kun je delen door 180 graden en dan keer het aantal graden wat je wilt.<br>- Ja, dan zou ik gewoon van pi rad is 180 graden [*schrijft*], dus naar, hoeveel was het?<br>- 225, dus dan doe je delen door 180 keer 225. Dus dat is dan één achtste keer 225, dus dat is 225 delen door 180. [*Schrijft*]<br>- Oooh, ohja dat bedoelde ik ook hoor, één honderdtachtigste. Dus dan krijg je eigenlijk gewoon hetzelfde, gewoon delen door 180 is, ehm... Ja ik weet niet precies uit het hoofd maar...<br>- [*Typt*] Eén één vierde.<br>- Pi rad. |
| Leerling 2 IRRR | - Ja, keer 180 gedeeld door pi is die graden. Wacht, van graden naar naar radialen toch?<br>- En dan pi keer de graden, en dan kun je pi wegstrepen en dan 180 gedeeld door de graden.<br>- [G*aat schrijven*] Dat denk ik, waarschijnlijk is het dan wel andersom. [*wijst naar de getallen die ze heeft opgeschreven*]<br>- Omdat 225 groter is.<br>- [*typt*] Of is dat niet goed...<br>- [*Krast door en schrijft iets nieuws op*]<br>- [*Schrijft pi rad achter haar eerdere antwoord van één één vierde*] |
| Leerling 3 IRRR | - Delen door 180 keer pi.<br>- 225 delen door 180 en dan...<br>- Ja één één vierde pi. Rad. |

Vrijwel elke leerling kon deze vraag goed beantwoorden en daarna uitvoeren (*Hoe kan je graden omrekenen naar radialen? Kan je dit uitwerken voor* 225°*?*). Enkele leerlingen (leerling 1 en 3 van de RRR-groep en leerling 2 van de IRRR-groep) gaven eerst een verkeerde omrekening, maar verbeteren zichzelf hierna. Er is niet een heel duidelijk verschil tussen de twee groepen hier.

Tabel 19: Leerlingenreacties op interviewvraag 6 - leerdoel 2

| | Leerlingenreacties op interviewvraag 6 |
|---|---|
| Leerling 1 RRR | - Ja die had ik op de toets ook niet helemaal goed denk ik, maar ik dacht omdat je zegmaar, met zo'n cirkel, als je zegmaar wilt berekenen met zo overstaand gedeeld door schuin enzo, dat je dan altijd deelt door één, omdat die straal één is. Dus wat je er in doet krijg je er ook uit.<br>- Ehm, zegmaar de verplaatsing van punt P dat over de cirkel is, bijvoorbeeld als je naar boven gaat, als je voor de x dat wil invoeren, dan moet je bij de y beginnen, zeg maar bij het topje [*wijst in de lucht naar een punt bij de y-as]*. Als je dat voor de y wilt doen dan begin je daar in het midden [*wijst naar de oorsprong*]. En dan moet je zo verder tekenen [*maakt met de vinger een sinus beweging in de lucht*].<br>- [**Na de vraag wat er op de x-as en y-as zou staan**] De horizontale en de verticale verplaatsing van P.<br>- De verticale verplaatsing hoort bij de cosinus, en, nee nee, de horizontale hoort bij de cosinus en de verticale hoort bij de sinus. |
| Leerling 2 RRR | - *[Begint te tekenen]*<br>- Ehm, op de x-as... De, ehm, ja hoe noem je dat. De coördinaten van het punt, en dan van de y-coördinaat van punt P.<br>- Ja, als die over de cirkel loopt.<br>- Ja, de y-as is de afgelegde afstand. Of is dat de x-as... *[Stilte]*<br>- Ohja, dit was in totaal 2pi [*wijst naar (2,0) in de grafiek*], dus dan is dat, ehm, de x-as de afgelegde afstand, en de y-as was de, ja. Eh, de y-coördinaat van punt P. |
| Leerling 3 RRR | - Ehm, de input is de, hoever P is op de lijn.<br>- Ja op de cirkel zeg maar. En de output is de, bij de sinus is het de y-coördinaat en bij de cosinus de x-coördinaat. |
| Leerling 1 IRRR | - Ja die vond ik dus echt heel gek. Ik kon niet echt goed, ik snapte niet echt wat er bedoeld werd met input en output.<br>- Ehm, wat erin gaat, is toch de booglengte, en wat eruit komt is de middelpuntshoek, denk ik.<br>- Omdat dat de hoek is wat hoort bij de booglengte?<br>- De hoek bij die booglengte. Hmm nee.<br>- Hmm, coördinaten.<br>- Voor de sinus is het de y-coördinaat en voor de cosinus de x.<br>- Oh zò. Dus wat je berekent als je de booglengte erin gooit. Ja dan snap ik het. |
| Leerling 2 IRRR | - Ja, dat wist ik ook niet.<br>- Ehm, je doet de hoek van de, ja van de, de hoek doe je er in. En dan krijg je de ... de radialen er uit.<br>- De middelpuntshoek.<br>- Hoever je ook bent op de cirkel. Of hoe groot de hoek is.<br>- [**Komt hier na veel aansporing op**] Hoe hoog y is? |
| Leerling 3 IRRR | - Ehm, input is eigenlijk ook ehm, de aantal graden is wat je er in stopt. En dan daaruit krijg je de y-as, ja de y-waarde. Ja bij bijvoorbeeld 90 graden dan is de y-waarde dus één. |

Zowel vanuit de toets als tijdens de interviews bleek dat de vraagstelling van deze vraag toch nog lastig blijkt (*6. Wat is de interpretatie van de input en output van de sinusfunctie?*). Meerdere leerlingen hebben, tijdens de interviews en tijdens de toets, gevraagd wat er wordt bedoeld met ‘interpretatie’. Dit heeft waarschijnlijk ook invloed had op de slechte score van deze vraag op de toets, waardoor het nuttig bleek dat deze vraag ook tijdens de interviews was gesteld. Waar tijdens de toets op deze vraag, waarvoor 3 punten te halen waren, de RRR-groep in totaal 6 punten hiervoor scoorde en de IRRR-groep 8 punten, kon bijna elke leerling tijdens de interviews een uitleg geven hierover die dicht bij het gewenste antwoord zat. Leerling 3 van de RRR-groep en leerling 3 van de IRRR-groep konden dit beiden (bijna) perfect toelichten. Leerling 2 van de RRR-groep en leerling 1 van de IRRR-groep konden met een beetje extra uitleg dit ook behoorlijk. Leerling 1 van de RRR-groep en leerling 2 van de IRRR-groep hadden hier nog wel meer moeite mee. Samen geeft dit het beeld dat de twee groepen wel vergelijkbaar scoorden.

### 5.5.2 Contextvragen

Hieronder staat in tabellen samengevat wat de leerlingen hebben geantwoord op de contextvragen. De contextvragen waren als volgt.

1. *Wat vond je van de lessenserie?*
   Deelvragen/sturingsvragen: Wat vond je van hoe lang de lessenserie was, was er te veel of te weinig stof, had je meer of minder zelf willen oefenen?
2. *Welke delen van de lessen vond je wel of niet leuk?*
3. *Heb je het gevoel dat je snapt waar we de afgelopen lessen mee bezig zijn geweest?*

Over het algemeen waren de leerlingen positief over de lessenserie. Veel noemen het leerzaam en vonden de manier van werken fijn. Leerling 1 van de RRR-groep noemt bijvoorbeeld dat het fijn was dat er stap voor stap was uitgelegd, en leerling 1 van de IRRR-groep waardeerde hoe er met werkbladen werd gewerkt en de klassikale vorm van werken. Leerling 2 van de RRR-groep vond als enige deze manier van werken minder fijn, al dacht ze ook dat het wel een beetje aan het onderwerp kon liggen. De leerlingen geven allemaal aan dat het een prima hoeveelheid stof was voor dit aantal lessen, al hadden er misschien nog wel iets meer extra opgaven meegegeven kunnen worden. Er werd niet aangegeven dat bepaalde delen van de lessenserie minder fijn waren, en positieve aspecten waren bijvoorbeeld dat er veel voorbeelden waren en dat de visuele aspecten met plaatjes ook erg hielpen. Het is wel belangrijk om te onthouden dat leerlingen sociaal wenselijk gedrag kunnen vertonen en dat ze mogelijk minder snel negatieve aspecten van de lessenserie geven doordat de interviewer ook de docent van de lessenserie was.

Tabel 20: Leerlingenreacties op contextvraag 1 - deel 1

| | Leerlingenreactie |
|---|---|
| Leerling 1 RRR | - Ehm, ja, wel interessant. Eh, ja ik snapte het ook wel goed denk ik, want het was ook wel op een makkelijkere manier uitgelegd dan normaal met wiskunde. Dus ik kon het wel beter begrijpen.<br>- Zeg maar, het was zeg maar stap voor stap uitgelegd en dan kan ik dat beter opnemen dan, want normaal is het ‘jullie zijn vwo dat kan je zelf ook wel’... ja<br>- [**Hoeveelheid stof**] Viel wel mee. Ja was gewoon prima.<br>- [**Hoeveel oefenen**] Was wel goed zo. |

Tabel 21: Leerlingenreacties op contextvraag 1 - deel 2

| | |
|---|---|
| Leerling 2 RRR | - Ja ik vond het wel anders dan normale lessen eigenlijk.<br>- Ja het komt denk ik ook wel door het onderwerp.<br>- Ja ik vond het moeilijker eigenlijk dan normaal, normaal gesproken snap ik wiskunde wel maar dit is meer, ik weet niet, ja, ik vond het wel moeilijker, maar ja.<br>- Ja, ik weet niet of de uitleg heel anders was, maar gewoon het onderwerp, met, zegmaar met de cirkel enzo en dat je dat allemaal echt in moest beelden voordat je het snapte.<br>- [**Hoeveelheid stof**] Eh, ja ik vond het wel prima, het was wel te doen ja.<br>- [**Hoeveel oefenen**] Ja dat was ook wel goed, omdat je alles kon behandelen zegmaar. |
| Leerling 3 RRR | - Ehm, ja, wel fijn. Jawel, was gewoon goed uitgelegd met plaatjes op het bord en dat soort dingen.<br>- [**Hoeveelheid stof**] Nee, ik vond het wel genoeg.<br>- [**Hoeveel oefenen**] Jawel. |
| Leerling 1 IRRR | - Ja ik vond ze heel fijn ofzo, omdat we ook met werkbladen werkten zeg maar. En, ja, ik weet niet, ik had het gevoel dat u wat minder deed met het bord en meer de uitleg met de huiswerkopgaven erbij zeg maar, met de opgaven erbij. Dus dan kreeg je gelijk ook het inzicht hoe het dan werkt met opgaven zeg maar, dus dat vond ik wel fijn.<br>- [**Hoeveelheid stof**] Ehm, ja, ja ook wel fijn eigenlijk. Ja, ik weet niet, gewoon voor hoeveel lessen we hebben gehad?<br>- Ja, ja fijn. Het had voor mij langer gemogen, maar het is zo ook goed. Het maakt me eigenlijk niet heel veel uit.<br>- [**Hoeveel oefenen**] Hm, ik denk dat dit wel gewoon goed was eigenlijk. Ik had soms wel op de toets dat ik bijvoorbeeld dacht van met die vraag van 'wat zijn radialen', dat ik had van *ja dat weet ik eigenlijk helemaal niet.* Maar, ja, voor de rest vond ik het wel gewoon fijn. |
| Leerling 2 IRRR | - Anders dan andere lessen wel. Het was opzich wel handig, als het ware, wel flexibel. Je had niet echt huiswerk of zo, dus dat is ook wel fijn, maar ook de werkbladen, gewoon samen de opgave, maken. Dat is wel fijn. Ja, gewoon dat.<br>- [**Hoeveelheid stof**] Ja, ik denk wel dat het een beetje weinig was als het ware gewoon, want meestal doe je denk ik wel binnen twee lessen of zo een paragraaf, maar ik vond het niet erg of zo.<br>- [**Hoeveel oefenen**] Ja, misschien wel voor thuis gewoon nog extra opgaven of zo, dat je die nog erbij kon maken voordat de toets was of zo. |
| Leerling 3 IRRR | - Ja, ik vond het ja, leerzaam alles, was makkelijk uitgelegd enzo. Niet moeilijk te begrijpen.<br>- Ehm, ik denk omdat er veel voorbeelden ook zijn gebruikt en een beetje makkelijk en moeilijk, dus kan je het een beetje toepassen. Zo van, in het voorbeeld heb je het zo gedaan en dan kan je het dus op dezelfde manier en zo hier doen.<br>- [**Hoeveelheid stof**] Niet te weinig, niet te veel, is gewoon goed. Het was genoeg om te begrijpen, ja.<br>- [**Hoeveel oefenen**] Nee was ook gewoon goed, ja. |

Tabel 22: Leerlingenreacties op contextvraag 2

| | Leerlingenreactie |
|---|---|
| Leerling 1 RRR | - Nee, was wel prima. Maar er waren ook, zeg maar, voldoende opdrachten om het helemaal te begrijpen en in de les af te maken zodat je thuis niet heel veel hoefde te doen. |
| Leerling 2 RRR | - [**Minder leuk**] Nee.<br>- [**Leuker**] Uh… weet eigenlijk niet. Ja, ik heb geen idee eigenlijk. |
| Leerling 3 RRR | - Ehm. [*Stilte*] Niet echt wat ik zo zou kunnen noemen. |
| Leerling 1 IRRR | - [**Of er iets meer of minder leuk was**] Ehm… Nee, eigenlijk niet echt. Want voor mijn gevoel was bij een les toch wel een beetje hetzelfde zeg maar. Juist goed, want elke keer ging je toch gewoon weer werken met de werkbladen en er was ook niet zoveel huiswerk want dat maakte je dan in de les, en dat was wel fijn. |
| Leerling 2 IRRR | - [**Leuker**] Ja, gewoon samen de opgaven maken en dan het af kunnen maken in de les, want dan kun je vragen stellen en anders dan moet je dat nog later ook weer doen. En dan heb je bijvoorbeeld, als je dan niet tijd hebt buiten school, dan heb ik het wel gewoon af. |
| Leerling 3 IRRR | - Nee, niet echt, nee, niet specifiek. |

Tabel 23: Leerlingenreacties op contextvraag 3

| | Leerlingenreactie |
|---|---|
| Leerling 1 RRR | - Eh, ja ik snapte het ook wel goed denk ik, want het was ook wel op een makkelijkere manier uitgelegd dan normaal met wiskunde. Dus ik kon het wel beter begrijpen. |
| Leerling 2 RRR | - Ja, dat opzich wel. |
| Leerling 3 RRR | - Ik denk grotendeels wel.<br>- [**Wat hij iets minder goed snapt**] Ehm, ja met die cosinus en sinus zegmaar, als er dan een pi tussen de haakjes staat, of dat dan in radialen is zegmaar, dat. |
| Leerling 1 IRRR | - Ja, ik denk dat ik het wel gewoon snap ja. Ja je hebt natuurlijk altijd wel dingen waar je iets, dat je toch denkt dat vind ik toch nog een beetje vaag, maar dat blijft altijd wel.<br>- Maar ik heb wel het gevoel dat ik het snap. |
| Leerling 2 IRRR | - Tijdens de toets was ik het wel een beetje vergeten, maar op zich, ik snapte het wel tijdens de lessen als u het dan uitlegt enzo snap ik het wel op zich. |
| Leerling 3 IRRR | - Ja, ja dat wel. |

# 6 Conclusie, discussie, en aanbevelingen

In dit hoofdstuk proberen we de onderzoeksvragen van dit onderzoek te beantwoorden. De onderzoeksvragen waren als volgt.

*“Hoe kan lesmateriaal eruit zien bij het onderwerp goniometrische functies met het doel om relationeel begrip te ontwikkelen?”*

*“Wat is bij leerlingen het effect van de aanwezigheid van instrumenteel begrip op het ontwikkelen van relationeel begrip bij het onderwerp goniometrische functies?”*

Om dit te beantwoorden hebben we eerst literatuur onderzocht in hoofdstuk 2 en ontwerpeisen en leerdoelen opgesteld in hoofdstuk 3. Deze hebben we gebruikt om lesmateriaal te ontwikkelen met het doel om relationeel begrip te ontwikkelen bij leerlingen op het gebied van goniometrische functies. Het lesmateriaal was zorgvuldig geanalyseerd door een expertpanel en daarna aangepast, zoals beschreven in hoofdstuk 5. De leerlingen van beide groepen hebben de toets gemaakt en (deels) deelgenomen aan de interviews die achteraf werden afgenomen. Deze zijn geanalyseerd, ook te zien in hoofdstuk 5. In dit hoofdstuk beginnen we met het beantwoorden van de onderzoeksvragen in sectie 6.1 en in sectie 6.2 worden suggesties gegeven voor verbeteringen en aanbevelingen voor vervolgonderzoek. Tot slot ronden we in sectie 6.3 het verslag af door te bespreken wat de implicaties voor de onderwijspraktijk zijn van dit onderzoek.

## 6.1 Conclusie

We zullen de onderzoeksvragen hier los bespreken.

### 6.1.1 Onderzoeksvraag 1

De feedback vanuit het expertpanel laat zien dat, met de aanpassingen, de lessenserie voldoet aan ontwerpeis 1 (*de lessenserie is in drie lessen van 40 minuten uit te voeren*) en ontwerpeis 2 (*de lessenserie sluit aan op het wiskunde B-niveau van vwo-leerlingen aan het begin van 5 vwo*). Tijdens de uitvoering van de lessenserie was er (beide keren) voldoende tijd om de lessen uit te voeren en de leerlingen hadden aan het eind van de les nog een beetje tijd om aan de werkbladen te werken. Een deel van de werkbladen moest nog thuis worden afgemaakt maar dat was dus minimaal. Ook waren er geen momenten tijdens de lessenserie dat de leerlingen duidelijk voorkennis te kort kwamen om de stof te kunnen volgen. De leerlingen wisten niet wat een middelpuntshoek was, maar dat was voorbereid en dus geen enkel probleem om nog kort aandacht aan te besteden. Om te kijken of aan ontwerpeis 3 is voldaan (*de lessenserie voldoet aan de gestelde leerdoelen*), moeten we de resultaten van de toets en interviews bekijken.

In tabellen 6 en 7 is te zien dat gemiddeld gezien 2,14 van de 3 punten zijn gehaald voor leerdoel 1, en dus stellen we dat dit leerdoel is behaald. De RRR-groep scoorde hierbij hoger dan de IRRR-groep op zowel instrumenteel als relationeel begrip, maar niet significant hoger. Tijdens de interviews konden de leerlingen vrij goed de vraag die bij dit leerdoel hoorde beantwoorden en was er geen duidelijk verschil tussen de twee groepen.

Op leerdoel 2 is gemiddeld 2,24 uit 5 punten gescoord op de toets. Van deze 5 punten testen er 4 op relationeel begrip (zie tabel 8), het is dan ook een leerdoel wat erg test op relationeel begrip. Opvallend is dat de IRRR-groep gemiddeld 0,8 punt meer scoorde op relationeel begrip dan de RRR-groep. De vraag van het interview die bij dit leerdoel hoorde is vraag 6 (dezelfde vraag als de toetsvraag). Uit de interviews bleek dat leerlingen vooral moeite hadden met de manier waarop de vraag werd gesteld. Van beide groepen waren twee van de drie leerlingen goed in staat om, met een beetje extra uitleg, wel goed antwoord te geven op deze vraag en onderbouwing te kunnen geven. Hierin is geen duidelijk verschil te ontdekken tussen de twee groepen. We stellen dus, met voorzichtigheid, dat dit leerdoel alsnog grotendeels is behaald, ook al zijn op de toets de scores van beide groepen niet heel hoog voor dit leerdoel.

De punten die voor leerdoel 3 zijn gegeven, testen allemaal relationeel begrip. Gemiddeld gezien hebben de leerlingen 3,16 van de 4 punten gehaald, dus leerdoel 3 heeft relationeel begrip getest met succesvolle uitkomst. Opvallend is wel dat de RRR-groep gemiddeld gezien een punt hoger scoort dan de IRRR-groep. Tijdens de interviews konden alle leerlingen de vraag van dit leerdoel goed beantwoorden.

Op leerdoel 4 is gemiddeld 3,4 van de 6 punten gescoord op de toets. Al deze punten werden pas toegekend als er in het antwoord sprake was van relationeel begrip. De interviewvraag die bij dit leerdoel hoorde is vraag 2. De vraag die in het interview werd gesteld testte ook erg op relationeel begrip, omdat de leerlingen werd gevraagd de cosinus te berekenen van een hoek die ze daarvoor nog niet zelf hadden gedaan. Daarom kostte het ze ook veel moeite om dit zelf te kunnen beantwoorden. We kunnen dan ook stellen dat dit leerdoel slechts beperkt behaald is. Uit de resultaten blijkt weliswaar dat leerlingen de coördinaten van punten op de eenheidscirkel kunnen berekenen aan de hand van de booglengte, maar dat dit niet voor elk punt op de eenheidscirkel geldt.

Op leerdoel 5 is gemiddeld 1,54 van de 3 punten gescoord op de toets. Van deze 3 punten testen er 2 op relationeel begrip, en in tabel 11 is te zien dat beide groepen hier niet hoog scoorden op relationeel begrip. Dit was de vraag die ging over radialen, en dezelfde vraag werd tijdens het interview gesteld (vraag 4). Dit bleek de vraag waar leerlingen het meeste moeite mee hadden. Ook tijdens de interviews bleek dat sommige leerlingen wel in de buurt kwamen van een goed antwoord, maar veel hadden aansporing nodig of hadden moeite met het formuleren ervan. Het gebruiken van radialen in berekeningen lukte in de meeste gevallen nog wel, maar dat getuigt niet van relationeel begrip. We kunnen dus stellen dat dit leerdoel niet is behaald.

Leerdoel 6 testte alleen op instrumenteel begrip. Dit is dus niet relevant voor deze onderzoeksvraag, maar wel goed om op te merken is dat beide groepen deze vraag goed hebben gemaakt, met gemiddeld 2,72 punten door de RRR-groep en 2,34 voor de IRRR-groep van de 3 punten. Ook in de interviews waren de leerlingen goed in staat deze vraag te beantwoorden.

Samengevat kunnen we vaststellen dat vier van de zes leerdoelen met succes zijn behaald (leerdoelen 1, 2, 3, en 6), één deels is behaald (leerdoel 4), en één niet is behaald (leerdoel 5). Daarom voldoet de lessenserie niet volledig aan ontwerpeis 3, maar wel aan ontwerpeis 1 en 2. We kunnen dus niet zeggen dat het ontworpen lesmateriaal goed en volledig genoeg is om het als lesmateriaal aan te bieden wat relationeel begrip ontwikkelt bij het onderwerp goniometrische functies. Wel voldoet het bijna, en in de discussie zullen we enkele verbeterpunten voorstellen.

### 6.1.2 Onderzoeksvraag 2

Tabel 4 laat zien dat de gemiddelde score van de RRR-groep vrijwel hetzelfde is als de scores van de IRRR-groep. Als we de totale score bekijken zien we dat de RRR-groep gemiddeld gezien ongeveer een halve punt meer scoorde op de toets. Uit tabellen 7 t/m 12 kunnen we afleiden dat de RRR-groep hoger scoorde dan de IRRR-groep op instrumenteel begrip voor leerdoel 1 en leerdoel 6, en op relationeel begrip voor leerdoel 1 en leerdoel 3. De IRRR-groep scoorde hoger dan de RRR-groep op instrumenteel begrip voor leerdoel 2, en op relationeel begrip voor leerdoel 2 en leerdoel 4. Vooral de hogere score van de IRRR-groep bij leerdoel 2 is opvallend, maar niet significant genoeg om een duidelijke conclusie te kunnen trekken. In totaal is op de relationele score 0,08 punt minder gehaald door de RRR-groep vergeleken met de IRRR-groep. Zoals blijkt uit de t-toetsen is op alle drie de soorten scores geen significant verschil. Daarom kunnen we aan de hand van de toets niet stellen dat de instrumentele les een effect heeft gehad op het ontwikkelen van relationeel begrip bij de leerlingen.

In sectie 5.5 zijn de interviews geanalyseerd, en bij geen enkele van de beantwoorde vragen was er duiding op een verschil van hoe de leerlingen van de RRR-groep de vragen beantwoordden vergeleken met de leerlingen van de IRRR-groep. Af en toe kwamen de leerlingen van één van de groepen dichter bij de goede antwoorden, of konden hun antwoorden beter onderbouwen, maar over alle interviews heen is er niet voldoende verschil naar één kant toe om te zeggen dat de instrumentele les echt invloed heeft gehad op hoeveel relationeel begrip de leerlingen hebben kunnen ontwikkelen.

Dit alles samengenomen zorgt ervoor dat we een antwoord kunnen geven op de onderzoeksvraag: de aanwezigheid van instrumenteel begrip heeft geen negatief effect, noch positief effect, gehad op het ontwikkelen van relationeel begrip bij de leerlingen. Hier komen uiteraard wel wat kanttekeningen bij, en die zullen we hieronder in de discussie uitwerken.

## 6.2 Discussie en aanbevelingen

Ook al kunnen we helaas niet zeggen dat dit onderzoek de uitkomst biedt om relationeel begrip te kweken bij leerlingen op het gebied van goniometrische functies, we hebben wel veel geleerd en zullen hier een aantal zaken bespreken die verbeterd zouden kunnen worden. Ook zullen we aanbevelingen doen voor mogelijk verder onderzoek.

Het lesmateriaal dat is ontworpen is een goede basis voor leerlingen om relationeel begrip te ontwikkelen. Van de 6 gestelde leerdoelen zijn er 4 met succes behaald, en om ook aan de andere 2 leerdoelen te voldoen zijn een aantal verbeteringen in het lesmateriaal nodig. De grootste is dat er meer aandacht moet worden besteed aan radialen. Leerlingen kunnen er wel gebruik van maken maar kunnen moeilijk uitleggen wat radialen precies zijn (in het geval van de eenheidscirkel). De overgang van graden naar radialen, en de koppeling van booglengte met middelpuntshoek, wordt nu vooral instrumenteel behandeld, en hier zit een punt voor verbetering. Om duidelijk te maken dat radialen draait om de verhouding tussen booglengte en straal van een cirkel, wordt er in het lesmateriaal al wel een voorbeeld gegeven hiervan met een cirkel die niet de eenheidscirkel is. Het is aan te raden om dit de docent een keer voor te laten doen, maar vooral om de leerlingen daarna er zelf ook meerdere keren mee te laten oefenen met andere cirkels. Op die manier kunnen ze herkennen dat de straal inderdaad invloed heeft op de verhouding, en dat daarom, in het geval van de eenheidscirkel, het mooi uitkomt. Het zou ook een mooie toevoeging zijn om het nog meer visueel te kunnen maken, bijvoorbeeld met behulp van GeoGebra. Een ander aspect waar leerlingen nog moeite mee hadden is het berekenen van coördinaten van punten op de eenheidscirkel. Ze waren in staat dit te doen voor een aantal punten op de eenheidscirkel, maar niet allemaal. Uiteraard hoeft dit ook niet voor alle punten, maar wel voor de waarden waar over het algemeen van wordt verwacht dat dit algebraïsch af te leiden is (punten met middelpuntshoeken die een veelvoud zijn van $\frac{\pi}{3}$ of $\frac{\pi}{4}$). In dit onderzoek bleef het vaak hangen bij punten in het eerste kwadrant van het assenstelsel, of veelvouden van $\frac{\pi}{2}$. Hier kan zeker meer aandacht aan worden besteed en in deze versie van de lessenserie werd dit simpelweg te weinig meegenomen. Een mogelijkheid om dit wel in te voegen in de lessenserie is bijvoorbeeld aan het eind, als de leerlingen zowel de sinusfunctie als de cosinusfunctie hebben bestudeerd, en dan is met behulp van symmetrie in beide functies (en in de eenheidscirkel) goed af te leiden wat de coördinaten zijn van punten in de andere kwadranten van het assenstelsel dan het eerste. Het is hierbij ook goed mogelijk om leerlingen dit zelf in tweetallen of groepjes tijdens de les te laten bestuderen (bijvoorbeeld met de hulp van GeoGebra) onder begeleiding van de docent.

Deze mogelijkheden tot verbetering zijn zeker niet verrassend. Idealiter zou er een extra les de tijd worden genomen voor deze lessenserie, zodat bovenstaande verbeterpunten meegenomen kunnen worden. Helaas was voor dit onderzoek dit niet mogelijk, in verband met het aantal beschikbare lessen op school hiervoor. Het meest interessante scenario zou zijn dat een docent een eigen klas hiervoor ter beschikking heeft om het hele hoofdstuk op aan te passen. Deze lessenserie is namelijk bedoeld als basis voor goniometrische functies, en behandelt dit behoorlijk uitgebreid. De tijd is genomen die de klas normaal gesproken (volgens de oorspronkelijke studiewijzer van de klas) zou hebben voor paragraaf 8.1 van Getal & Ruimte. Maar deze lessenserie pakt ook al aspecten van de rest van het hoofdstuk, en zorgt ervoor dat die (hopelijk en vermoedelijk) beter behapbaar zijn. Het is bijvoorbeeld voor te stellen dat met deze methode de transformaties van sinusoïden en goniometrische vergelijkingen makkelijker te snappen zijn, doordat leerlingen al een goede connectie hebben gemaakt tussen de representaties ‘functiegrafieken’ en ‘eenheidscirkel’. Daar scheelt het dus weer tijd. Alles samengenomen zou het zeker interessant zijn als deze lessenserie aangepast en uitgebreid zou worden en vervolgens zou worden uitgevoerd in een klas waar de docent meer vrijheid zou hebben in de planning.

Daarnaast is het goed om op te merken dat veel leerlingen de lessenserie erg waardeerden. Van de zes leerlingen die waren geïnterviewd was er slechts één leerling die het minder leuk vond en liever de lessen volgens de methode had gevolgd. Het werd gewaardeerd dat er veel visualisatie was, en dat er veel samen in de klas werd gedaan. Een kanttekening die hierbij moet worden gemaakt is dat deze lessenserie mogelijk ook gewaardeerd werd door de opzet ervan, wat niet hoeft te betekenen dat de leerlingen de uitleg of stof zelf ook waarderen. Het is dus lastig vast te stellen of dit laatste inderdaad het geval is. Daarnaast is deze manier van werken niet in elke groep mogelijk of handig. In dit geval waren het groepen van maximaal zeven leerlingen, dus mocht de lessenserie in klassen van 30 leerlingen worden uitgevoerd dan zouden er wellicht enkele aanpassingen moeten worden gedaan om dit goed uitvoerbaar te maken.

Met betrekking tot een conclusie trekken over het effect van de instrumentele les, zijn er veel kanttekeningen te maken. Tot slot was er maar één les op instrumentele wijze gegeven, vergeleken met drie lessen op relationele wijze. Het is daarom moeilijk te zeggen of er überhaupt mogelijke effecten waargenomen zouden kunnen worden. Bovendien hebben leerlingen jarenlang les gehad op (mogelijk) instrumentele wijze. De docent die dit onderzoek uitvoerde was niet bekend met de klas alvorens het onderzoek en kon dus niet veel zeggen van tevoren of er instrumentele kennis aanwezig was of relationele kennis (over de voorkennis over goniometrie). Voor deze lessenserie zou het interessant zijn om een andere variatie te doen, waarin bijvoorbeeld één klas drie lessen op instrumentele wijze krijgt en daarna drie lessen op relationele wijze, en één klas die alleen drie lessen op relationele wijze krijgen. Een andere mogelijke variatie is dat één klas twee lessen op instrumentele wijze krijgt gevolgd door twee lessen op relationele wijze en één klas vier relationele lessen krijgt. Het zou zelfs interessant zijn om te kijken wat er gebeurt als één klas drie lessen op instrumentele wijze krijgt en en twee op relationele wijze, en één klas drie of vier lessen op relationele wijze. Het lastige hieraan is dat er altijd beargumenteerd kan worden dat een klas beter scoort (bijvoorbeeld de groep met ook instrumentele lessen) doordat ze simpelweg meer lestijd krijgen. In een ander geval kan er gezegd worden dat een klas beter scoort (degene met meer relationele lessen) omdat ze meer relationele lessen hebben gehad dan de andere klas. Het blijft een lastige overweging, en dus ook lastig om te toetsen. Het is dus de aanbeveling dat hier meer concreet onderzoek naar moet worden gedaan om er echt conclusies over te kunnen trekken.

Daarnaast moet worden bedacht dat dit slechts één onderzoek was binnen één klas, met in totaal dertien leerlingen. Het resultaat hiervan is dus überhaupt niet heel erg betrouwbaar. Het is daarom aan te bevelen om dit onderzoek (of vergelijkbare onderzoeken) op grotere schaal uit te voeren, over meerdere scholen (en mogelijk niveaus; het is aan te passen aan havo-niveau) te verspreiden.

Als we nog los kijken naar het mogelijke effect van instrumenteel begrip op het ontwikkelen van relationeel begrip (dus niet gekoppeld aan het onderwerp goniometrische functies), zou het nog het meest interessant zijn om op de lange termijn te kijken wat het effect is. Als er bijvoorbeeld twee parallelklassen zijn die eerst een hoofdstuk (of zelfs jaar) lang op verschillende wijze les krijgen (de ene op relationele wijze en de andere op instrumentele wijze), dan kan worden bestudeerd wat er gebeurt als het hoofdstuk (of jaar) erna beide klassen les krijgen op relationele wijze. Wat voor invloed heeft dit op ontwikkelen van relationele kennis? Uiteraard zouden ook hierbij veel kanttekeningen kunnen worden geplaatst, maar uiteindelijk is relationeel begrip iets wat tijd nodig heeft om goed te ontwikkelen, en het is lastig daar binnen enkele lessen veel over te zeggen. Alles wat hier besproken is lag uiteraard te ver buiten het kader van dit onderzoek om mee te kunnen nemen, maar het zou van veel toegevoegde waarde kunnen zijn voor toekomstig onderzoek.

## 6.3 Implicaties voor de lespraktijk

Ook al is de lessenserie niet perfect, het ontworpen materiaal is wel een goede basis voor docenten om te implementeren in de praktijk. Er is niet veel voorkennis vereist van leerlingen en dat maakt dat de lessenserie geschikt is om als introductie te gebruiken bij het onderwerp goniometrische functies. Wel zouden er eerst een aantal aanpassingen gedaan moeten worden zoals beschreven in sectie 6.2, omdat anders niet alle leerdoelen behaald zullen worden. Wat hierbij wel van belang is, is dat de docent die de lessenserie geeft zelf eerst het materiaal goed onder de knie heeft, omdat het een alternatieve manier is dan de wijze waarop de meeste onderwijzers de stof hebben geleerd.

Docenten die zelf graag lesgeven op relationele wijze zouden veel baat kunnen hebben bij deze lessenserie, en kunnen vervolgens naar wens de rest van het hoofdstuk (of in het algemeen stof over goniometrische functies) kunnen indelen en onderwijzen aan de hand van de manier die wordt geïntroduceerd in dit lesmateriaal. Als er bijvoorbeeld later wordt gewerkt met transformaties van sinusoïden of het oplossen en herleiden van goniometrische vergelijkingen of functies, dan kunnen de inzichten die zijn verkregen tijdens deze lessenserie erg van pas komen en weer worden toegepast. Het is wel beperkend als de docent die de lessenserie geeft zich graag strak wil houden aan de methode die wordt gebruikt op school. Aangezien elke methode de hoofdstukken anders structureert, en deze lessenserie een andere structuur gebruikt van de stof dan veel methodes, zal de docent de studiewijzer hier wel op moeten aanpassen. Als de docent daar niet toe bereid is, wordt afgeraden om deze lessenserie als geheel te pakken, en is het handiger als de docent zelf delen ervan gebruikt naargelang geschikt wordt bevonden.

Tot slot is het lastig te zeggen of deze lessenserie ook geschikt is voor het niveau van een klas havo wiskunde B. In dit onderzoek is daar niet naar gekeken, maar het zou interessant zijn om dit uit te proberen, en mogelijk aan de hand daarvan een aangepast versie voor een klas havo wiskunde B te maken. Het is daarbij wel voordelig dat de voorkennis die nodig is voor deze lessenserie vrij gering is en dat de havoleerlingen deze wel zullen bezitten.

## Referenties


Alberink, M., Muijlwijk, H., & Timmer, M. (2011). De sinus: van meetkundige definitie naar analytisch begrip. *Euclides*, *86*(6), 250–252.

Blackett, N., & Tall, D. O. (1991). Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software. *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 144–151.

Demir, Ö., Heck, A., e.a. (2013). A new learning trajectory for trigonometric functions. *Proceedings of the 11th international conference on technology in mathematics teaching*, 119–124.

Dhungana, S., Pant, B. P., & Dahal, N. (2023). Students' Experience in Learning Trigonometry in High School Mathematics: A Phenomenological Study.

Gur, H. (2009). Trigonometry Learning. *New Horizons in Education*, *57*(1), 67–80.

Heck, A. (2012). Een GeoGebra-ondersteunde benadering van sinus en cosinus.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for research in mathematics education*, *21*(1), 16–32.

Maknun, C., Rosjanuardi, R., & Jupri, A. (2019). From ratios of right triangle to unit circle: An introduction to trigonometric functions. *Journal of Physics: Conference Series*, *1157*(2), 022124.

Mensah, F. S. (2017). Ghanaian senior high school students' error in learning of trigonometry. *International Journal of Environmental & Science Education*, *12*(8), 1709–1717.

Orhun, N. (2004). Students' mistakes and misconceptions on teaching of trigonometry. *Journal of Curriculum Studies*, *32*(6), 797–820.

Pesek, D. D., & Kirshner, D. (2000). Interference of instrumental instruction in subsequent relational learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(5), 524–540.

Poortema, K., & Meijer, D. ( (2018). *Mathematical Statistics with Appliations.*

Sayster, A. (2023). High-school students' productive struggles during the simplification of trigonometrical expressions and the proving of trigonometrical identities.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 1–36.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, *77*(1), 20–26.

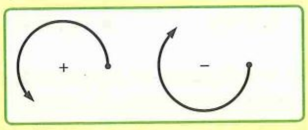
Wearne, D., & Hiebert, J. (1988). A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: Testing a local theory using decimal numbers. *Journal for research in mathematics education*, *19*(5), 371–384.

Weber, K. (2008). Connecting research to teaching: teaching trigonometric functions: lessons learned from research. *The Mathematics Teacher*, *102*(2), 144–150.

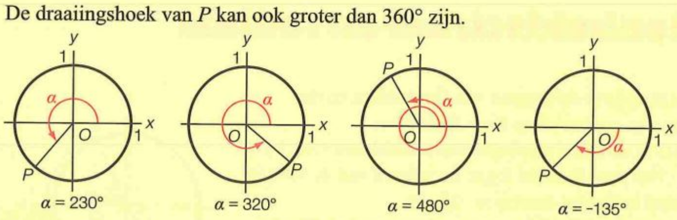
# Bijlage A - Theorieblokken Hoofdstuk 8 Getal & Ruimte

**Theorie A Definitie van sinus, cosinus en tangens**

De cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1 heet de **eenheidscirkel**.
Het punt $P$ beweegt over de eenheidscirkel en begint in het punt $A(1, 0)$, zie figuur 8.3. Hierdoor ontstaat hoek $AOP$ die we de **draaiingshoek** van $P$ noemen. We geven deze hoek aan met $\alpha$. Het eerste been van een draaiingshoek is altijd de positieve $x$-as, het tweede been gaat door het punt $P$.
Draait $P$ tegen de wijzers van de klok in, dan is $\alpha$ positief, draait $P$ met de wijzers van de klok mee, dan is $\alpha$ negatief.




De draaiingshoek van $P$ kan ook groter dan 360° zijn.




**figuur 8.5** Draaiingshoeken kunnen zowel positief als negatief zijn.

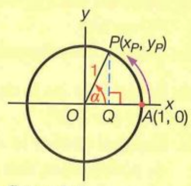
In figuur 8.6 is $0° < \alpha < 90°$. Voor deze scherpe hoek geldt

$\sin(\alpha) = \frac{PQ}{OP} = \frac{y_P}{1} = y_P$, $\cos(\alpha) = \frac{OQ}{OP} = \frac{x_P}{1} = x_P$ en

$\tan(\alpha) = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y_P}{x_P}$.

Ook voor niet-scherpe hoeken nemen we per definitie

$\sin(\alpha) = y_P$, $\cos(\alpha) = x_P$ en $\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$.



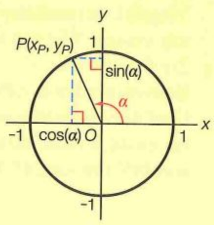

**figuur 8.6**

**Voor de draaiingshoek $\alpha$ van het punt $P(x_P, y_P)$ op de eenheidscirkel geldt**

**$\sin(\alpha) = y_P$**

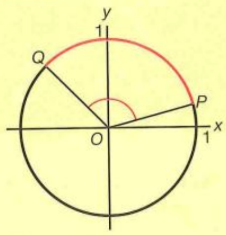
**$\cos(\alpha) = x_P$**

**$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$**



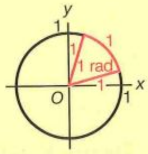
## Theorie C De hoekeenheid radiaal

Voor de punten $P$ en $Q$ op een cirkel met middelpunt $M$ heet hoek $PMQ$ een **middelpuntshoek**.
We definiëren met behulp van de eenheidscirkel de hoekmaat **radiaal**.
Voor de punten $P$ en $Q$ op de eenheidscirkel is de middelpuntshoek $POQ$ in radialen gelijk aan de lengte van de bijbehorende cirkelboog $PQ$.
Dus hoek = booglengte.
De hoekmaat radiaal wordt afgekort tot **rad**.
De radiaal is dus zo gedefinieerd, dat bij een booglengte van 1 op de eenheidscirkel een middelpuntshoek van 1 radiaal hoort.
Bij een booglengte van 2 hoort een middelpuntshoek van 2 rad. En bij een booglengte van $\pi$ hoort een middelpuntshoek van $\pi$ rad.



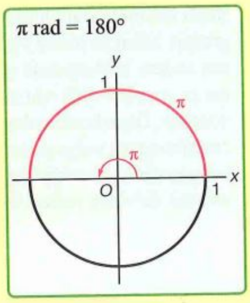

**figuur 8.15**

**De middelpuntshoek in de eenheidscirkel die hoort bij een cirkelboog met lengte 1 is een hoek van 1 radiaal.**



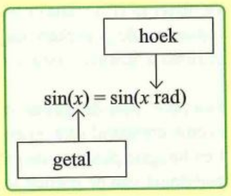

De hele eenheidscirkel heeft booglengte $2\pi \cdot 1 = 2\pi$.
Bij deze booglengte hoort dus een middelpuntshoek van $2\pi$ rad.
Hieruit volgt direct $2\pi$ rad = 360°, dus $\pi$ rad = 180°.

$\boxed{\pi \text{ rad} = 180°}$

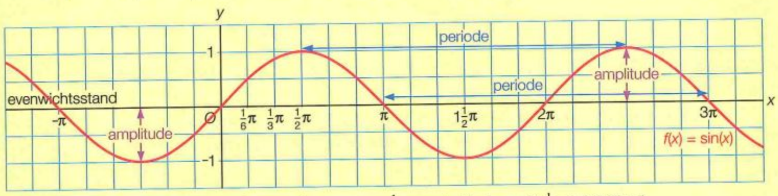



## Theorie A De functie $f(x) = \sin(x)$

Het sinusbegrip wordt niet alleen bij hoeken, maar ook bij getallen gebruikt. De sinus van het getal 2 is de sinus van een hoek van 2 radialen.
We definiëren de functie $f(x) = \sin(x)$ als de functie die bij elk getal $x$ de sinus van $x$ radialen geeft.
Hieronder is de grafiek van de **goniometrische functie** $f(x) = \sin(x)$ getekend. Op de horizontale as is 3 cm rechts van de oorsprong het getal $\pi$ gezet. Bij het tekenen van de grafiek is de volgende tabel gebruikt.




| $x$ | $0$ | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $1\frac{1}{6}\pi$ | $1\frac{1}{2}\pi$ | $1\frac{5}{6}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ |




**figuur 8.21** Op de $x$-as is 1 cm rechts van de oorsprong $\frac{1}{3}\pi$ gezet. Merk op dat $\frac{1}{3}\pi \approx 1{,}047 \approx 1$.

# Bijlage B - Ethiek

## B1 Ethiekaanvraag

UNIVERSITY OF TWENTE.
FACULTY BMS

231089 REQUEST FOR ETHICAL REVIEW

| | |
|---|---|
| Request nr: | 231089 |
| Researcher: | Klooster, L.R. ten |
| Supervisor: | Timmer, M. |
| Reviewer: | Walma van der Molen, J.H. |
| Status: | Approved by commission |
| Version: | 2 |

1. START

A. TITLE AND CONTEXT OF THE RESEARCH PROJECT

1. What is the title of the research project? (max. 100 characters)

   The effect of the presence of instrumental understanding on developing relational understanding.

2. In which context will you conduct this research?

   Master's Thesis

3. Date of the application

   22-07-2023

5. Is this research project closely connected to a research project previously assessed by the BMS Ethics Committee?

   No/Unknown

B. CONTACT INFORMATION

6. Contact information for the lead researcher

   6a. Initials:

   L.R.

   6b. Surname:

   ten Klooster

   6c. Education/Department (if applicable):

   M-AM

   6d. Staff or Student number:

   1929569

   6e. Email address:

   l.r.tenklooster@student.utwente.nl

   6f. Telephone number (during the research project):

2023-08-22 14:28:50 1/7

+31620175352

6g. If additional researchers (students and/or staff) will be involved in carrying out this research, please name them:

Not involved in carrying out the research, but my second supervisor is Wisse van der Meulen (email: w.r.vandermeulen@utwente.nl)

6h. Have you completed a PhD degree?

No

7. Contact information for the BMS Supervisor

7a. Initials:

M.

7b. Surname:

Timmer

7c. Department:

BMS-ELAN

7d. Email address:

m.timmer@utwente.nl

7e. Telephone number (during the research project):

+31534893557

8. Is one of the ethics committee reviewers involved in your research? Note: not everyone is a reviewer.

No

## C. RESEARCH PROJECT DESCRIPTION

9a. Please provide a brief description (150 words max.) of the background and aim(s) of your research project in non-expert language.

For certain mathematical subjects in highschool, teachers explain the material in a way that students gain instrumental understanding (e.g. only knowing how to use tricks without actually understanding the reasoning behind it) and as a consequence they cannot apply their knowledge in unfamiliar contexts, which is problematic. Now there is some research that indicates that, possibly, the presence of this kind of knowledge actually prevents students from being able to afterwards develop relational understanding about these subjects (actually understanding the material on a deeper level, knowing where it comes from and being able to apply this knowledge in unfamiliar contexts). In the years before this never seemed like a problem (or was never considered), but if this is actually the case, it might be quite problematic if teachers on highschool actually do teach this way. Literature does suggest that much more research needs to be done on this subject in order to draw more sustained conclusions. I will make two short series of lessons to see if this is true for the subject of geometry in a '5vwo' class in a highschool, where one series only aims to develop relational understanding and the other first aims at understanding the material instrumentally, and afterwards tries to teach the material in a relational way. This way we can test if the presence of instrumental understanding actually prevents the development of relational understanding.

9b. Approximate starting date/end date of data collection:

Starting date: 2023-09-17

End date: 2023-11-04

9c. If applicable: indicate which external organization(s) has/have commissioned and/or provided funding for your research.

Commissioning organization(s):

Not applicable

Funding organization(s):

Not applicable

## 2. TYPE OF STUDY

Please select the type of study you plan to conduct:

I will be collecting new data from individuals acting as respondents, interviewees, participants or informants.

## 4. RESEARCH INVOLVING THE COLLECTION OF NEW DATA

### A: RESEARCH POPULATION

20. Please provide a brief description of the intended research population(s):

It will be a 5vwo class of 'wiskunde B' (a certain level of mathematics) in highschool. These are students of 15-17 years old. This class will be split into two groups where each group gets a slightly different series of lessons (max. 3 lessons), of which some students of both groups will be interviewed afterwards. Before and after the lesson series all students will take a short test to see what their level of understanding is.

21. How many individuals will be involved in your research?

It will be 13 students (since these are all 5vwo students who have wiskunde B) in total. All of these will take part in the lesson series and take the test before and after the classes. Probably 6 students in total (3 from each group) will be interviewed afterwards as well.

22. Which characteristics must participants/sources possess in order to be included in your research?

They must be in the 5vwo class wiskunde B.

23. Does this research specifically target minors (<16 years), people with cognitive impairments, people under institutional care (e.g. hospitals, nursing homes, prisons), specific ethnic groups, people in another country or any other special group that may be more vulnerable than the general population?

No

24. Are you planning to recruit participants for your research through the BMS test subject pool, SONA

No

## B. METHODS OF DATA COLLECTION

25. What is the best description of your research?

- Interview research
- Other

  (please provide a brief description of the methods used to generate and/or collect data):

  I will be conducting a short test (not part of the grade) both before and after the lesson series are given in both groups. These will help indicating whether or not (or to what extent) students have learned something from the lessons.

26. Please prove a brief yet sufficiently detailed overview of activities, as you would in the Procedure section of your thesis or paper. Among other things, please provide information about the information given to your research population, the manipulations (if applicable), the measures you use (at construct level), etc. in a way that is understandable for a relative lay person.

Before the start of the lesson series, all students will first make a short test that evaluates their level of knowledge on the material that is required as preknowledge for the material to be taught. This test will be used to divide the group of students into two seperate groups where the average level of performance is similar. One group will be following a series of lessons consisting where the material is designed such that (hopefully) the students will obtain a relational understanding of the material. Afterwards they will be tested on the knowledge they obtained. The second group will first follow a lesson where the material is taught instrumentally, and afterwards follow lessons that are set up the same way as is the case for group one (so relationally). Afterwards this group will also be tested on the knowledge they obtained. From both groups, three students will be interviewed seperately and asked to answer some questions out loud which are about the material taught. These interviews and tests together will help determine whether or not the construction of the first instrumental-then relational lessons indeeds prevents the development of relational knowledge amongst the students. The topic of the lessons is trigonometric functions, specifically the unit circle and how the sine and cosine can be seen as functions instead of only the ratio of the sides of right-angled triangles. The material covered will be of the same level as given in their method (Getal&Ruimte chapter 8.1), but the way the material is taught will (on the relational level) be different. The post-test will be given with questions about the material, where the answers/way of answering the questions can reveal whether a students has relational or instrumental understanding (or, hopefully not, no understanding) of the material. The interviews will consist out of similar questions, where the students will be asked to think out loud, such that their way of thinking can be analysed on a better and deeper level. The students will not have to do anything additional as they would have normally during their classtime.

How much time will each participant spend (mention the number of sessions/meetings in which they will participate and the time per session/meeting)?

Group one: one pretest (max 30 minutes), two lessons (40 minutes each) and one final posttest (max 30 minutes). Group two will have the same but with an additional lesson of 40 minutes. In total six of the students will also be having an interview of max 30 minutes.

## C: BURDEN AND RISKS OF PARTICIPATION

27. Please provide a brief description of these burdens and/or risks and how you plan to minimize them:

The test before and after the series of lessons will not be a part of their grade for the chapter. In this way the students will not feel any stress about the classes or experience performance anxiety. Besides this the lesson are simply part of their learning experience as they have normally at school.

28. Can the participants benefit from the research and/or their participation in any way?

Yes

Please Explain:

Possibly the group that gets taught the material in only the relational way may better understand the material in the end (which is also the outcome we hope for). The other group (control group) is given the material in a way very similar to the method (book) they would have otherwise and for them there is thus no additional benefit.

29. Will the study expose the researcher to any risks (e.g. when collecting data in potentially dangerous environments or through dangerous activities, when dealing with sensitive or distressing topics, or when working in a setting that may pose 'lone worker' risks)?

No

## D. INFORMED CONSENT

30. Will you inform potential research participants (and/or their legal repsentative(s), in case of non-competent participants) about the aims, activities, burdens and risks of the research before they decide whether to take part in the research?

Yes

Briefly clarify how:

Yes, I will give oral clarification (before the first data is collected) to all students. I will explain what kind of research this

2023-08-22 14:28:50 5/7

is and to what purpose. We will also send a letter (and to the parents for the students <16) to make them aware of the research (for the passive consent, see question 32).

32. How will you obtain the voluntary, informed consent of the research participants (or their legal repsentatives in case of non-competent participants)?

Passive/tacit consent

Please provide a brief explanation of why you think passive consent is acceptable and how sufficient action will be taken to inform the participants or their legal repsentatives

-

33. Will you clearly inform research participants that they can withdraw from the research at any time without explanation/justification?

Yes

34. Are the research participants somehow dependent on or in a subordinate position to the researcher(s) (e.g. students or relatives)?

No

35. Will participants receive any rewards, incentives or payments for participating in the research?

- No

36. In the interest of transparency, it is a good practice to inform participants about what will happen after their participation is completed. How will you inform participants about what will happen after their participation is concluded?

- Participants will receive the researcher's contact details, so that they can contact the researcher if they have questions/would like to know more.

E. CONFIDENTIALITY AND ANONYMITY

37. Does the data collected contain personal identifiable information that can be traced back to specific individuals/organizations?

No

39. Will you make use of audio or video recording?

Yes

- What steps have you taken to ensure safe audio/video data storage?

  The audio recordings will only be used for the interviews. It will be asked beforehand and students have the right to deny to be recorded. The audio recordings will be stored made using Iris Connect, so it's kept only in the software environment. The data will not be shared with other parties.

- At what point in the research will tapes/digital recordings/files be destroyed?

  After the research has been carried out and is completely finished (so after the colloqium), the audio files will be destroyed.

## 5. DATA MANAGEMENT

- I have read the UT Data policy.
- I am aware of my responsibilities for the proper handling of data, regarding working with personal data, storage of data, sharing and presentation/publication of data.

## 6. OTHER POTENTIAL ETHICAL ISSUES/CONFLICTS OF INTEREST

40. Do you anticipate any other ethical issues/conflicts of interest in your research project that have not been previously noted in this application? Please state any issues and explain how you propose to deal with them. Additionally, if known indicate the purpose your results have (i.e. the results are used for e.g. policy, management, strategic or societal purposes).

-

## 7. ATTACHMENTS

Consent form (to be edited).pdf

## 8. COMMENTS

Timmer, M. ( 24-07-2023 14:36):

.

## 9. CONCLUSION

Status: Approved by commission

The BMS ethical committee / Domain Humanities & Social Sciences has assessed the ethical aspects of your research project. On the basis of the information you provided, the committee does not have any ethical concerns regarding this research project. It is your responsibility to ensure that the research is carried out in line with the information provided in the application you submitted for ethical review. If you make changes to the proposal that affect the approach to research on humans, you must resubmit the changed project or grant agreement to the ethical committee with these changes highlighted.

Moreover, novel ethical issues may emerge while carrying out your research. It is important that you re-consider and discuss the ethical aspects and implications of your research regularly, and that you proceed as a responsible scientist.

Finally, your research is subject to regulations such as the EU General Data Protection Regulation (GDPR), the Code of Conduct for the use of personal data in Scientific Research by VSNU (the Association of Universities in the Netherlands), further codes of conduct that are applicable in your field, and the obligation to report a security incident (data breach or otherwise) at the UT.

## B2 Brief passieve consent

Beste ouder(s)/verzorger(s),

Uw kind volgt het vak wiskunde B op school. Dit jaar heb ik, Linda ten Klooster (eerstegraads docent wiskunde in opleiding en oud-stagiaire op het Canisius Almelo), voor mijn afstudeeronderzoek op de Universiteit Twente een lessenserie ontworpen voor een deel van hoofdstuk 8 voor 5 vwo wiskunde B. Het doel van deze lessenserie is om leerlingen meer inzicht in de stof te geven dan normaliter volgens de methode gebeurt. Aan de helft van de leerlingen van de klas wordt een extra les van tevoren gegeven die de stof op de wijze van de methode gegeven. Dit wordt gedaan om te kijken of deze les een effect heeft op hoe de leerlingen inzicht ontwikkelen in de lessenserie die erna volgt. Aan het eind van de lessenserie wordt een korte toets afgenomen bij alle leerlingen, welke niet voor een cijfer meetelt.

Voor mijn onderzoek zou ik graag gebruik maken van de resultaten van deze toets van de leerlingen. Op deze manier kan ik een goede vergelijking maken tussen de leerlingen die wel en niet de extra les van tevoren hebben gevolgd. Ook wil ik graag de gemiddelde cijfers van de leerlingen meenemen van vorig jaar voor wiskunde B, om te zorgen dat de twee groepen leerlingen zo gelijkmatig mogelijk worden ingedeeld. De gemiddelde cijfers en resultaten van leerlingen zullen allemaal anoniem worden verwerkt in het onderzoek.

Als u akkoord gaat met het gebruik van de resultaten van de toets zonder cijfer en gemiddelde cijfer van uw kind voor het uitvoeren van het onderzoek, *dan hoeft u niets te doen*. Mocht u hier wel bezwaren tegen hebben, dan kunt u dat kenbaar maken via een e-mail aan mij (l.r.tenklooster@student.utwente.nl), liefst uiterlijk op vrijdag 17 september. U kunt uw bezwaren ook kenbaar maken door onderstaand strookje door uw zoon/dochter bij mij of hun wiskundedocent te laten inleveren, liefst uiterlijk op vrijdag 17 september. Uiteraard kan uw zoon/dochter zelf nog op ieder moment beslissen niet aan het onderzoek te willen deelnemen.

Ik hoop u hiermee voldoende te hebben geïnformeerd. Voor vragen kunt u contact opnemen via het bovengenoemde e-mailadres.

Met vriendelijke groet,

Linda ten Klooster, eerstegraads docent wiskunde in opleiding

---

Ik geef **geen** toestemming voor ..................................................... uit klas ............ dat zijn/haar toetsresultaat en gemiddelde cijfer gebruikt wordt ten behoeve van het genoemde onderzoek.

Naam: ..................................................

Handtekening: ..................................................

### B3 Brief actieve consent

Beste leerling,

Jij volgt het vak wiskunde B op school. Dit jaar heb ik, Linda ten Klooster (eerstegraads docent wiskunde in opleiding en oud-stagiaire op het Canisius Almelo), voor mijn afstudeeronderzoek op de Universiteit Twente een lessenserie ontworpen voor een deel van hoofdstuk 8 voor 5 vwo wiskunde B. Het doel van deze lessenserie is om leerlingen meer inzicht in de stof te geven dan normaliter volgens de methode gebeurt. Aan de helft van de leerlingen van de klas wordt een extra les van tevoren gegeven die de stof op de wijze van de methode gegeven. Dit wordt gedaan om te kijken of deze les een effect heeft op hoe de leerlingen inzicht ontwikkelen in de lessenserie die erna volgt. Aan het eind van de lessenserie wordt een korte toets afgenomen bij alle leerlingen, welke niet voor een cijfer meetelt.

Voor mijn onderzoek zou ik graag na afloop enkele leerlingen van de klas interviewen over hun ervaringen met de lessen en hun inzicht in de wiskundestof. Op deze manier kan ik een goede vergelijking maken tussen de leerlingen die wel en niet de extra les van tevoren hebben gevolgd. De interviews zullen worden opgenomen (audio) om het mogelijk te maken deze later te transcriberen. Vanzelfsprekend hebben de antwoorden van de leerlingen geen effect op hun beoordeling en wordt alles vertrouwelijk behandeld. De opnamen zullen geanonimiseerd worden opgeslagen en na transcriptie worden gewist. De transcripties zullen anoniem worden verwerkt in het onderzoek.

Als je akkoord gaat om geïnterviewd te worden, teken dan dit strookje hieronder en lever dit weer bij me in. Mocht je hier wel bezwaren tegen hebben, dan hoef je dit niet te ondertekenen.

Ik hoop je hiermee voldoende te hebben geïnformeerd. Voor vragen kan je naar me toekomen op school of contact opnemen via het bovengenoemde e-mailadres.

Met vriendelijke groet,

Linda ten Klooster, eerstegraads docent wiskunde in opleiding

---

Ik geef toestemming om geïnterviewd te worden betreffende mijn ervaringen met de lessenserie van 5 vwo wiskunde B en het inzicht in de lessenstof ten behoeve van het genoemde onderzoek.

Naam: ..................................................

Handtekening: ..................................................

# Bijlage C - Feedbackformulier

## Voor de lezer

Momenteel is bij leerlingen vaak weinig relationeel begrip aanwezig van het onderwerp goniometrische functies. Leerlingen hebben vaak moeite met het verband zien tussen (i) de sinus/cosinus in rechthoekige driehoeken, (ii) het gebruik van de sinus/cosinus in de eenheidscirkel bij goniometrie, en (iii) de sinus/cosinus als functies en hun grafieken. Deze lessenserie probeert vooral in te gaan op de connectie tussen (ii) en (iii) op een relationele wijze, en af en toe komt (i) ook aan bod. Deze lessenserie gaat worden gegeven aan een 5 vwo klas bestaande uit 13 leerlingen, waarbij de helft van de klas deze lessenserie als geheel krijgt (met een post-test en interviews die hier niet gedeeld worden). De tweede helft van de klas krijgt eerst een les over dit onderwerp op instrumentele wijze, en daarna gevolgd door deze lessenserie (ook gevolgd door een post-test en interviews). Uit onderzoek is namelijk gebleken dat het mogelijk is dat instrumentele kennis kan verhinderen dat er vervolgens relationeel begrip ontwikkeld kan worden bij leerlingen. Vandaar dat deze lesopzet is bedacht, om te kijken of we bij dit onderwerp ook deze conclusie kunnen trekken.

Hieronder staat een overzicht van een lessenserie van drie lessen die gaat over paragraaf 1 van hoofdstuk 8 'goniometrische functies' van Getal & Ruimte voor 5 vwo wiskunde B. Deze lessenserie gaat door mij, Linda, worden uitgevoerd in september/oktober 2023, en ik zou graag van je horen wat je ervan vindt. Het is een beschrijving van de lessenserie hoe het moet worden uitgevoerd en is dus vooral bedoelt voor de docent. Het materiaal is gebaseerd op een onderzoek van André Heck, door wie een groot deel van dit materiaal is ontwikkeld om leerlingen beter inzicht in goniometrische functies te geven. Het bleek dat, in de klassen waar zijn lessenserie was uitgevoerd, dat leerlingen hierdoor beter inzicht kregen in goniometrische functies dan in de klassen waar op de traditionele, meer instrumentele, wijze les was gegeven. Ik heb het materiaal aangepast qua inhoud en vormgeving om het te laten passen bij mijn doelen voor de lessenserie.

Als de tekst normaal is, is dit voor de docent om over te brengen naar de klas in letterlijke woorden. Als de tekst schuingedrukt is, betekent het dat de docent hier een discussie moet begeleiden, de leerlingen stuurt in hun denkproces, of iets moet laten zien/voordoen op het bord of scherm. Ik heb in de bijlage van de mail ook bepaalde applets voor in GeoGebra meegestuurd. Hopelijk werken ze, en zo niet, dan staan er een paar plaatjes in de tekst die duidelijk maken wat het doel is van de applets. (als je moeite hebt met de applets openen: ik heb ze lokaal opgeslagen op mijn laptop, en dan via GeoGebra geopend. Op deze manier moet het hopelijk lukken.)

Tot slot wil ik nog even benoemen dat dit materiaal ontworpen is om als groepsles te dienen aan een hele kleine groep leerlingen (in dit geval dus maximaal 7 leerlingen). Daarom is er voor gekozen om veel samen te doen en leerlingen niet al te veel zelfstandig te laten werken. Als je wel punten hebt waarbij je denkt dat er meer zelfstandig gewerkt kan worden, geef dit vooral aan!

Hieronder staan de leerdoelen en ontwerpeisen van de lessenserie.

## Ontwerpeisen

1. De lessenserie is in 3 lessen van 40 minuten uit te voeren.
2. De lessenserie sluit aan op het wiskunde B niveau van vwo leerlingen aan het begin van 5 vwo.
3. De lessenserie voldoet aan de leerdoelen zoals hieronder benoemd.

## Leerdoelen

Aan het eind van de lessenserie kunnen de leerlingen

1. de grafiek tekenen van de afgelegde afstand van een punt die over een vierkant met zijde 2 beweegt tegenover de verticale positie van dat punt
2. uitleggen wat de eenheidscirkel is
3. de sinus definiëren als een functie van reële getallen
4. de cosinus definiëren als een functie van reële getallen
5. met behulp van het verband tussen de eenheidscirkel en de grafieken van de sinus en cosinus uitleggen waar bepaalde eigenschappen (periodiciteit, domein en bereik) van de sinus en cosinus vandaan komen
6. de coördinaten van punten op de eenheidscirkel berekenen aan de hand van de booglengte
7. hoeken uitrekenen in graden aan de hand van de booglengte van punten op de eenheidscirkel
8. de sinus waarden uitrekenen van gegeven hoeken en (reële) getallen
9. de sinus waarden uitrekenen van gegeven hoeken en (reële) getallen
10. uitleggen wat radialen zijn en hoe dit werkt voor de eenheidscirkel
11. radialen omrekenen naar graden en vice versa

## Ik heb voor jullie de volgende specifieke vragen om te beantwoorden

1. In hoeverre voldoet de lessenserie aan de gestelde leerdoelen? Welke wel/niet, en heb je verbetersuggesties?
2. In hoeverre voldoet de lessenserie aan de gestelde ontwerpeisen? Welke wel/niet, en heb je verbetersuggesties?
3. Klopt het materiaal inhoudelijk? Als je ergens een foutje ziet, geef het vooral aan.
4. Wat vind je verder over het algemeen van de lessenserie? Denk je dat het effectief gaat zijn in het doel om leerlingen meer relationele kennis te geven over de basis van goniometrische functies?

Als je overige opmerkingen/vragen hebt, laat het vooral weten! Alle feedback die deze lessenserie zo goed mogelijk maakt, is van harte welkom.

# Bijlage D - Toetsing

## D1 Toets

Naam:............................................... Datum:........................................

### Toets - eenheidscirkel en radiaal

Schrijf je antwoorden op het ruitjespapier. Zet nummers bij de vragen, en licht je antwoorden zoveel mogelijk toe. Als je iets niet weet is het niet erg, probeer vooral alles op te schrijven wat in je op komt.

**Vraag 1**

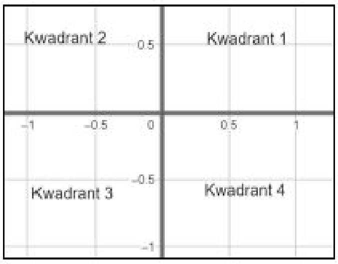
Leg in je eigen woorden uit wat de eenheidscirkel is en wat de sinus en de cosinus ermee te maken hebben. Maak ook gebruik van een tekening.

**Vraag 2**

a) Wat is de interpretatie van $\cos(\frac{1}{2}\pi)$? Kan je uitleggen wat deze waarde betekent?
b) Leg in je eigen woorden wat de interpretatie van de input en output van de sinusfunctie en cosinusfunctie zijn.

**Vraag 3**

a) Wat is het bereik van de cosinusfunctie? Hoe weet je dit?
b) Wat is de periode van de sinusfunctie? Hoe weet je dit?
c) In welk kwadrant of kwadranten van het assenstelsel zijn de sinuswaarden van hoeken negatief in de eenheidscirkel? Hoe weet je dit?
*De figuur hiernaast geeft aan wat de kwadranten zijn.*
d) In welk kwadrant of kwadranten van het assenstelsel zijn de cosinuswaarden van hoeken negatief in de eenheidscirkel? Hoe weet je dit?




**Vraag 4**

Gegeven is de eenheidscirkel, en een punt er op die hoort bij een booglengte van $\frac{7}{2}\pi$. Wat zijn de coördinaten van dit punt? Licht je antwoord toe.

**Vraag 5**

Bereken de volgende waarden exact. Gebruik geen rekenmachine, licht je antwoord toe, en maak gebruik van een tekening.

a) $\cos(225°)$
b) $\sin(-\pi)$

**Vraag 6**

a) Wat zijn radialen? Wat hebben radialen te maken met de eenheidscirkel?
b) Hoe groot is de middelpuntshoek die bij een booglengte van $\frac{1}{2}\pi$ op de eenheidscirkel hoort? Geef je antwoord zowel in graden als in radialen.
c) Druk $\frac{4}{3}\pi$ rad uit in graden.
d) Druk 135° exact uit in radialen.

## D2 Antwoordenmodel

### Antwoordenmodel toets

Hieronder wordt per vraag toegelicht wat mogelijke uitwerkingen van de vragen van de post-test zijn, en dan wordt er met name het soort uitwerking beschreven waaruit zou blijken dat er sprake is van relationeel begrip bij de leerlingen. De uitwerking hoeft niet precies gelijk te zijn, maar moet in dezelfde lijn zitten en dezelfde soort aspecten benoemen.

**Vraag 1**

- de eenheidscirkel is een **cirkel met straal 1** en met het **middelpunt in de oorsprong** van een assenstelsel
- punten op de eenheidscirkel hebben een x-coördinaat en een y-coördinaat, waarbij de **x-coördinaat gelijk is aan de cosinus van $\alpha$**, en de **y-coördinaat de sinus van $\alpha$**, waar $\alpha$ de hoek **beschrijft tussen het punt en de positieve x-as** (of een soortelijke uitwerking)
  *Notitie: na het nakijken is besloten een halve punt toe te kennen als er wel x- en y-coördinaten worden benoemd, maar het niet specifiek is waarvan de x- en y-coördinaten zijn*
- de tekening moet in ieder geval laten zien dat het een cirkel betreft met straal 1 en middelpunt in de oorsprong van een assenstelsel

**Vraag 2**

a)
- cos $(\frac{1}{2}\pi)$ is de ***x*-coördinaat** van een punt
- Waarbij dit punt is bewogen over de eenheidscirkel tegen de klok in met een **booglengte van $\frac{1}{2}\pi$**

b)
- De input van de sinusfunctie en cosinusfunctie is de **booglengte** die een punt vanaf (1,0) tegen de wijzers van de klok in heeft afgelegd
- De output van de sinusfunctie is de **y-coördinaat** (of verticale positie/hoogte) **van dat punt**
- De output van de cosinusfunctie is de **x-coördinaat** (of horizontale positie/hoogte) **van dat punt**

**Vraag 3**

a)
- Bereik **is [-1,-1]**, want de **minimale hoogte is -1** en de **maximale hoogte is 1**

b)
- **$2\pi$**, want dat is de **omtrek** van de **eenheidscirkel**

c)
- **3e en 4e kwadrant**, want daar is de **y-coördinaat van een punt op de eenheidscirkel** negatief

d)
- **2e en 3e kwadrant**, want daar is de **x-coördinaat van een punt op de eenheidscirkel** negatief

**Vraag 4**

- Een beschrijving waarom een punt met een booglengte **van $\frac{7}{2}\pi$ dezelfde coördinaten heeft als een punt met booglengte $\frac{3}{2}\pi$**
- Een beschrijving/tekening waarbij wordt aangegeven waarom een booglengte van $\frac{3}{2}\pi$ overeenkomt met $\mathbf{270°}$**, oftewel het punt (0,-1) (of een uitwerking met sinus/cosinus)**

**Vraag 5**

a)
- Een tekening of uitleg waarom $\mathbf{cos}(\mathbf{225°}) = -\,\mathbf{cos}(\mathbf{45°})$
- Een tekening of uitleg waarom $-\,\mathbf{cos}(\mathbf{45°}) = -\frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{2}}$

b)
- Een tekening of uitleg met waar op de eenheidscirkel het punt met de middelpuntshoek bij deze vraag hoort: **(-1,0)**
- Een tekening of uitleg waaruit blijkt dat $\mathbf{sin}(-\boldsymbol{\pi}) = \mathbf{0}$

**Vraag 6**

a) Formele antwoord: De grootte van een hoek in radialen is de verhouding tussen de booglengte die bij een middelpuntshoek van een cirkel past en de straal van deze cirkel. Het is een meting van de middelpuntshoek bij een booglengte.
Dit verwacht ik niet als een antwoord wat wordt gegeven, dus wordt (onder andere) geaccepteerd:
- Radialen is een meting voor een hoek, in plaats van graden.
- Het hangt af van de **verhouding** tussen **booglengte** en **straal** van een cirkel, en bij de eenheidscirkel is de **straal 1**, dus het hangt alleen nog maar af van de booglengte

b)
- 90°
- $\frac{1}{2}\pi$ rad

c)
- Een berekening die laat zien dat $\frac{4}{3}\pi$ rad= 240°

d)
- $\frac{3}{4}\pi$ rad

<u>Punten voor instrumenteel begrip:</u>

Vraag 1 punt 1,3; Vraag 2a punt 1; Vraag 6b punt 1,2; Vraag 6c punt 1; Vraag 6d punt 1

Totaal: 7 punten

<u>Punten voor relationeel begrip:</u>

Vraag 1 punt 2; Vraag 2a punt 2; Vraag 2b punt 1, 2, 3; Vraag 3a punt 1; Vraag 3b punt 1; Vraag 3c punt 1; Vraag 3d punt 1; Vraag 4 punt 1,2; Vraag 5a punt 1,2; Vraag 5b punt 1,2; Vraag 6a punt 1,2

Totaal: 17 punten

# Bijlage E - Interviewleidraad

## Interviewleidraad

Het interview zal vooral ingaan op soortgelijke vragen als de toets, maar nu zal de leerling gevraagd worden zoveel mogelijk hardop te denken, waardoor de interviewer inzicht kan krijgen in de gedachtegang van de leerlingen. Het interview zal worden opgenomen om te worden getranscribeerd, waardoor de interviewer de aandacht bij de leerling zelf kan houden.

Als een leerling ergens niet uitkomt, zal de interviewer mogelijk korte begeleidende vragen stellen om de leerling verder te helpen, maar er zullen geen antwoorden worden voorgezegd. De leerling krijgt ook papier beschikbaar om op te tekenen. Er worden vooral inhoudelijke vragen gesteld, maar op het eind is er ook nog even de tijd om in te gaan op wat de leerling van de lessenserie vond.

### Inhoudelijke vragen

1. Leg in je eigen woorden uit wat de eenheidscirkel is en wat de sinus en de cosinus ermee te maken hebben. Je mag ook gebruik maken van een tekening.
2. Reken exact uit zonder rekenmachine: $\cos(\frac{7}{4}\pi)$
3. Hoe kan je de sinus van een negatieve hoek interpreteren? In welke kwadranten van het assenstelsel is de sinus negatief in de eenheidscirkel?
4. Wat zijn radialen en wat hebben ze te maken met de eenheidscirkel?
5. Hoe kan je graden omrekenen naar radialen? Kan je dit uitwerken voor 225°?
6. Wat is de interpretatie van de input en output van de sinusfunctie?

### Overige vragen

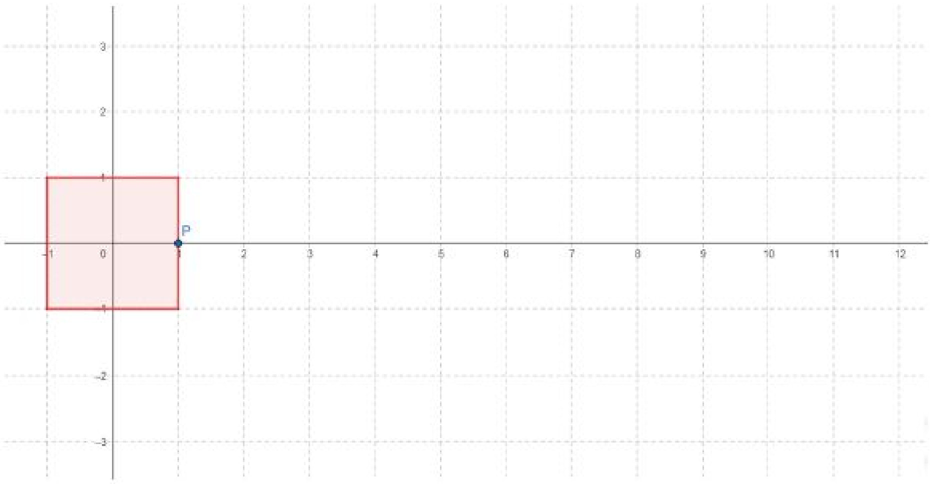
1. Wat vond je van de lessenserie?
   a. Wat vond je van de hoe lang de lessenserie was?
   b. Was er te veel of te weinig stof?
   c. Had je meer of minder zelf willen oefenen?
2. Welke delen van de lessen vond je wel en niet leuk?
3. Heb je het gevoel dat je snapt waar we de afgelopen lessen mee bezig zijn geweest?

## Bijlage F - Eerste versie lesmateriaal

Lessenserie

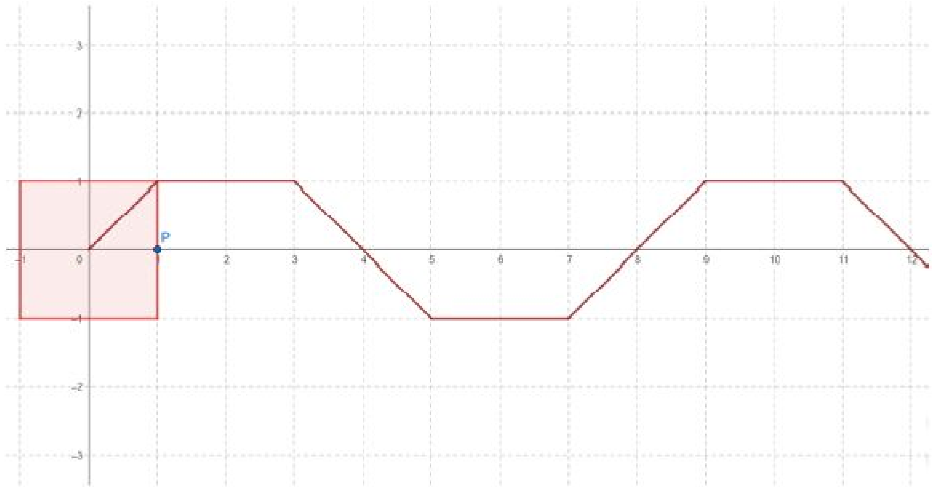
In eerdere hoofdstukken van wiskunde heb je al kennis gemaakt met de sinus, cosinus, en tangens. Je weet dat je deze kan gebruiken bij het berekenen van de zijden en hoeken bij rechthoekige driehoeken. Maar eigenlijk zijn deze begrippen nog veel breder dan alleen dat! Deze week gaan we beginnen met het hoofdstuk van goniometrische functies, en daar spelen de sinus en cosinus de hoofdrol in. Om jullie een sterke basis te geven voor dit hoofdstuk gaan we op een iets andere manier beginnen dan jullie gewend zijn, maar stapje voor stapje zullen we uitkomen op een nieuwe manier om tegen de sinus en cosinus aan te kijken.

We gaan beginnen met het bekijken van een vierkant met zijde 2 die we op een assenstelsel zetten, met het midden van de vierhoek in de oorsprong. We gaan kijken naar het punt P, met coördinaten (1,0), en laten dat punt langs het vierkant lopen, tegen de klok in. *Laat de figuur hieronder op het bord zien, of zorg dat het alvast getekend is.*




We gaan de grafiek tekenen van de verticale positie, dus de hoogte, het y-coördinaat, van het punt P terwijl dit punt tegen de klok in over de rand van het vierhoek beweegt. De x-as is hierbij de afgelegde weg van het punt P, en de y-as is de hoogte/verticale positie van het punt P.

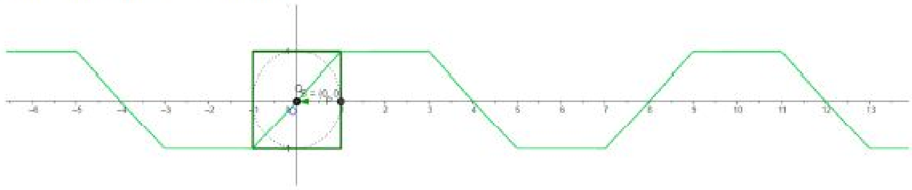
*Samen en in overleg met de leerlingen teken je op het bord deze grafiek. Hierbij begin je bij het punt (0,0) en ga je in stapjes verder. Belangrijke punten om op te letten is, wat is de maximale hoogte waarop het punt P komt, wat is de overgang tussen de hoekpunten (1,1), (-1,1), (-1,-1) en (1,-1), en hoe steil is die overgang? Als je bij x=8 aankomt, vraag je wat er hierna gaat gebeuren, als je nog een keer het vierkant om zou lopen met punt P. Samen met de leerlingen kom je uiteindelijk op de volgende grafiek uit:*



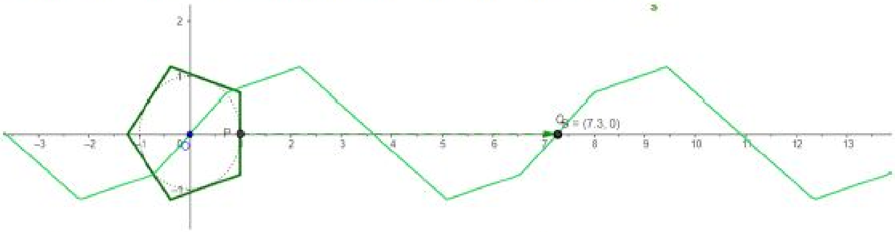
*Stel de volgende vragen aan de leerlingen (indien dit nog niet tijdens het tekenen aan bod is gekomen). Wat is de maximale en minimale hoogte van de grafiek en hoe kan je dit aan het vierkant zelf zien? Vanaf wanneer (welke x-coördinaat) herhaalt de grafiek zichzelf en hoe kan je dit vanuit het vierkant zien? Welke coördinaten uit de grafiek corresponderen met de hoekpunten van het vierkant?*

Het is nu dus duidelijk dat we een grafiek hebben die de beweging van het punt P beschrijft, oftewel de waarde van het y-coördinaat. Nu heb je bij een functie altijd iets wat je er in stopt, je x-waarde, en iets wat je er uit krijgt, je y-waarde. Wat zeiden we net ook alweer wat de x-waarde en y-waarde was bij onze grafiek? En wat is dus de x-waarde/input en y-waarde/output van onze functie?

*Kom er samen met de leerlingen weer op uit dat de x-waarde de afgelegde weg van punt P over het vierkant is, en de y-waarde de hoogte/verticale positie van het punt P is. Benadruk dat dit dus betekent dat dit de input en output zijn waardoor de grafiek een functie is.*
*Laat vervolgens de applet zien (zie applet 1 in de bijlage), waarbij in GeoGebra te zien is hoe dit werkt. Ook kan je laten zien wat er gebeurt als je de negatieve x-as bewandelt, oftewel punt P met de wijzers van de klok mee laten bewegen.*

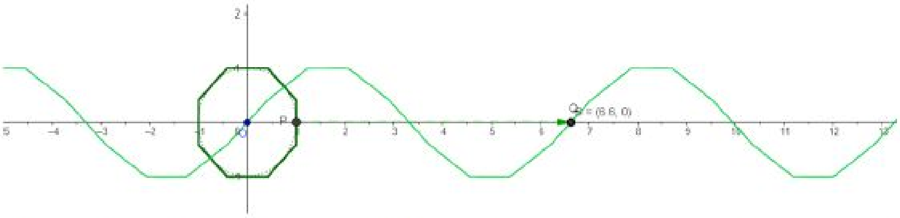


Nu gaan we iets soortgelijks doen, maar dan, in plaats van een vierkant, pakken we een figuur met vijf hoeken. Dit heet een regelmatige vijfhoek, want er zijn vijf zijden van gelijke grootte. *Teken zelf een regelmatige vijfhoek op het bord (of het staat er al ergens), en zet het in een assenstelsel zoals we ook bij het vierkant deden, met een punt P op (1,0). Vraag aan de leerlingen weer hoe de grafiek van de beweging van punt P eruit ziet. Hierbij moeten de leerlingen vooral doorhebben dat op de eerste hoek van de vijfhoek (als je het tekent zoals hieronder in de tekening staat), je niet gelijk op het hoogste punt zit. Je hoeft niet een hele periode te tekenen, maar pak bijvoorbeeld halverwege applet 2 in de bijlage erbij. Vraag aan de leerlingen, voordat je het punt over de figuur begint te bewegen op welk punt in de grafiek het punt P over de hele figuur is 'gewandeld'. Dit moet op het punt zijn dat er een periode is* *afgelegd, dus ongeveer bij (7,3;0). Leg uit dat die 7,3 slaat hoe lang de weg is die punt P heeft moeten afleggen om weer bij zijn beginpunt uit te komen. Vertel de leerlingen dat het op dit moment niet uitmaakt hoe dit getal is berekent, maar meer op wat het getal betekent.*




*Ook kan je hier weer samen met de leerlingen de connectie maken tussen het hoogste punt van de vijfhoek en het hoogste punt in de grafiek.*

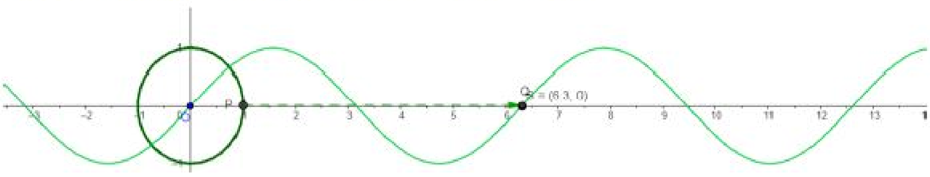
Nu pakken we bijvoorbeeld een achthoek *(doe dit ook weer zelf in de applet in GeoGebra)*. Wat valt er op aan de grafiek? *De leerlingen moeten er in ieder geval op uitkomen dat de grafiek lijkt op de eerdere grafiek die we zagen, maar dat de 'stukjes' van de grafiek korter zijn (doordat het een figuur is met meer zijden), en dat de grafiek daardoor wat soepeler loopt.*




Wanneer herhaalt de grafiek zich weer? *Nu kom je uit op ongeveer 6,6. Benadruk nogmaals dat nu de dit de periodiciteit is, en dat dit dus de afgelegde weg van punt P is, voordat het punt weer op het startpunt aankomt (en dat het even niet uitmaakt hoe deze is berekent). Eigenlijk is dit dus de omtrek van de figuur! Bij het vierkant kon je weten dat de omtrek 8 was (2+2+2+2), en bij deze achthoek is dat blijkbaar 6,6.*

Wat gaat er met de figuur gebeuren als we meer en meer hoeken gaan toevoegen? Wat voor figuur gaan we dan krijgen? *Kom samen met de leerlingen tot de conclusie dat dit een cirkel wordt. Laat dit vooral zien met behulp van de applet.*

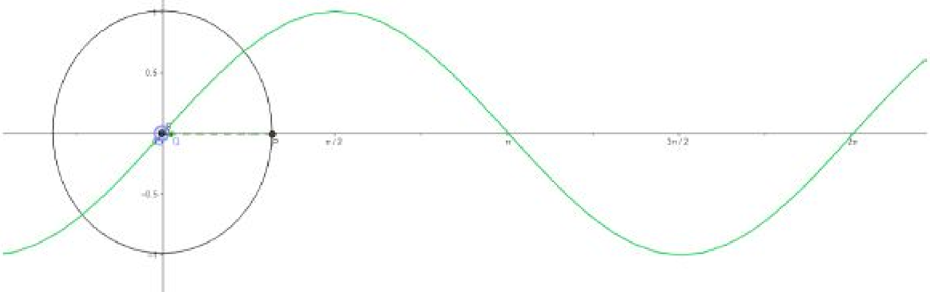
Wat zal dan de afstand zijn die punt P moet afleggen voordat het weer bij het startpunt is? Wat is de omtrek van een cirkel? *Als het goed is weten de leerlingen nog dat dit $2\pi r$ is, met r de radius. Aangezien r=1 in dit geval, moet de omtrek $2\pi$ zijn. Vraag wat de waarde hiervan is ($\pi$=3,14…) dus wat wordt $2\pi$? Nadat dit is besproken kan je de applet aanpassen naar n=30 zodat je een dertighoek krijgt, en dan kunnen de leerlingen de eerder gestelde vermoedens bevestigen.*



*Benadruk hier dat de grafiek inderdaad nog 'soepeler/gladder' is geworden zoals de leerlingen normaal gesproken een grafiek kennen, en dat de periode, dus wanneer P de hele omtrek van de figuur heeft belopen, ongeveer 2π is.*

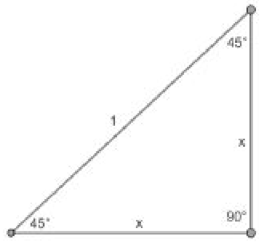
Laten we nu zeggen dat we n nu heel groot hebben gemaakt en dat dit echt een cirkel is. Wat is de straal van deze cirkel? De straal is 1, en daarom noemen we deze specifieke cirkel vanaf nu de eenheidscirkel. Vanaf nu gaan we ook het woord 'booglengte' gebruiken voor de afstand die punt P vanaf (1,0) heeft afgelegd als het over de figuur tegen de klok in beweegt. De hele eenheidscirkel heeft een omtrek van 2π, en dat is dus de booglengte van de hele eenheidscirkel.

*Vanaf nu pak je applet 3 erbij op GeoGebra.*




*Op dit moment ga je wat vragen stellen aan de klas over booglengtes, en gebruik je hierbij $\pi$. Wat zijn de coördinaten van P wanneer het over de eenheidscirkel heeft bewogen over een boog met lengte $\pi$? Teken hier de booglengte nadat leerlingen hier op in zijn gegaan, en schrijf de coördinaten (-1,0) op. En met lengte $\frac{1}{2}\pi$? Teken hier de booglengte nadat leerlingen hier op in zijn gegaan, en schrijf de coördinaten (0,1) op. Vraag ook hoe groot hier de bijbehorende middelpuntshoek is (als dit begrip nog onbekend is, teken dan een lijn van het middelpunt naar (1,0) en een lijn van het middelpunt naar het nieuwe punt P en duid aan dat de hoek tussen die twee lijnen de middelpuntshoek wordt genoemd van de cirkel). Als het goed is weten de leerlingen dat deze hoek 90° is. Doe ook hetzelfde voor $\frac{3}{2}\pi$. Maak hier nu de connecties met hoeveel graden. Als ze dit niet gelijk weten, ga eerst terug naar het punt waar P over de eenheidscirkel heeft bewogen met een lengte $\pi$.*

*Vraag nu hetzelfde voor $\frac{1}{4}\pi$. Dit gaat minder makkelijk, omdat het punt niet op de x- of y-as ligt en er dus geen duidelijke coördinaten zijn. Maak een tekening voor dit punt en vraag aan de leerlingen wat de bijbehorende middelpuntshoek is. Leerlingen zouden snel moeten weten dat deze hoek 45° is. Laat ze zelf ontdekken (met een beetje sturende begeleiding) dat ze, als ze een driehoek tekenen, met Pythagoras de hoogte van het punt P kunnen berekenen en dat de coördinaten dus $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ zijn. Mogelijk hebben ze hierin sturing nodig. Belangrijke stappen die ze moeten realiseren is dat ze een gelijkbenige driehoek krijgen, dus dat ze een figuur als deze hieronder krijgen. Hiermee kunnen ze met Pythagoras komen op $x^2 + x^2 = 1$, wat op te lossen is tot $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.*




*Het kan ook nog zijn dat leerlingen hier dachten dat punt P bij $\frac{1}{4}\pi$ wel op hoogte 0,5 zou zitten. Ga hier op in door vanaf (1,0) de beweging zelf langzaamaan te tekenen, waardoor de leerlingen zien dat je eerste steil omhoog gaat, en daarna pas vlakker opzij (je gaat dus niet in een rechte lijn). Dit betekent ook dat de y-coördinaat van punt P sneller stijgt dan het x-coördinaat daalt, en daarom kom je dus boven de 0,5 uit bij $\frac{1}{4}\pi$. Laat de leerlingen dit bevestigen door ze op de rekenmachine $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ uit te rekenen.*

*Ga vervolgens weer terug naar het punt (0,1), wat hoorde bij een booglengte van $\frac{1}{2}\pi$, en vraag de leerlingen welke middelpuntshoek hierbij hoort. Maak ook de connectie met welk punt van de grafiek hierbij hoort. Doe dit ook voor booglengtes $\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, en $2\pi$ (180°, 270° en 360°). Maar nu, als de connectie wordt gemaakt met de grafiek van de functie, ga die functie een naam geven (bijvoorbeeld s), en ga het ook als input/output geven zoals je dat ook met een functies doet normaal gesproken. Dus s(x)=..., waarbij x de afgelegde weg, oftewel booglengte is, dus bijvoorbeeld s(π)=0, want nul is de verticale positie/hoogte van punt P, en gelijk aan de waarde op de y-as. Zo krijg je $s(\frac{1}{2}\pi)=1$, $s(\frac{3}{2}\pi)=-1$, en $s(2\pi)=0$. Ze deze op een rijtje boven elkaar, en zet $s(\frac{1}{4}\pi)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ er ook bij.*

*Nu moet nog de connectie worden gemaakt met de hoeken en de sinus. Pak de driehoek van hierboven erbij, en ga samen met de leerlingen bekijken hoe je met behulp van de sinus ook achter de waarde van x had kunnen komen. Als het goed is weten ze nog de regel dat $\sin(\alpha) = \frac{overstaand}{schuin}$, waarbij hier $\alpha = 45°$, overstaand= $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en schuin =1, waardoor je krijgt $\sin(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Hierdoor kan je in het rijtje zetten dat $s(\frac{1}{4}\pi)=\frac{1}{2}\sqrt{2} = \sin(45°)$.*

We zien nu dus dat het y-coördinaat van punt P dus beschreven kan worden door de sinus van de middelpuntshoek! Dit geldt ook voor onze andere punten, laten we samen het rijtje afmaken.

*Maak samen met de leerlingen het rijtje af, dus maak de connectie tussen de middelpuntshoek en de sinus.*

$s\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sin(45°)$

$s\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1 = \sin(90°)$

$s(\pi) = 0 = \sin(180°)$

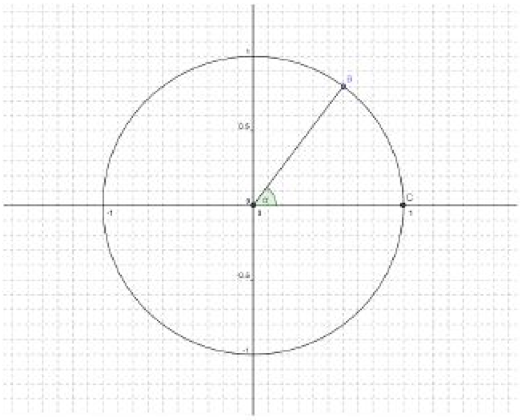
$s\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 = \sin(270°)$

$s(2\pi) = 0 = \sin(360°)$

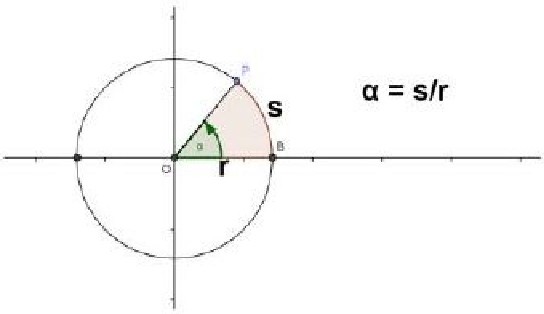
*Op deze manier merken de leerlingen dat de functie waarvan ze de grafiek hebben getekend, de sinus is. Benadruk dus echt voor de leerlingen dat de sinus dus een functie is, die de hoogte van een bewegend punt beschrijft die de eenheidscirkel afgaat. Nu kunnen ze uit het rijtje samen met jou ook afleiden hoe je van s(x) naar sin(180°x/π) gaan.*

Vanaf nu gaan we dit ook als maat gebruiken om aan te geven hoe groot onze hoek is. Niet in graden, maar in **radialen**. De afkorting hiervan is **rad**, dat mag je ook in opgaven gebruiken. De grootte van een hoek in radialen is de verhouding tussen de booglengte die bij een middelpuntshoek van een cirkel past en de straal van deze cirkel. Maar hoe groot is de straal van de eenheidscirkel ook alweer?

*Met de leerlingen er op uit komen dat deze straal 1 is. Omdat deze straal 1 is, hangt de grootte van de hoek dus af van de booglengte die bij de hoek hoort. Daarom is de hoek bij een booglengte van $\frac{1}{4}\pi$ (bijvoorbeeld) dus $\frac{1}{4}\pi$ radialen. Radialen is dus een meting voor de middelpunthoek bij een booglengte.*



*Laat het volgende plaatje zien aan de leerlingen (of teken het) en benoem dat dit als officiële definitie kan worden gebruikt voor de grootte van een hoek in radialen.*




*Neem het voorbeeld van de eenheidscirkel (dus r=1) en een booglengte van $\frac{1}{4}\pi$ (= s_. Bereken hierbij samen met de leerlingen dat je dan krijgt $\alpha = \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{180°}{\pi} = 45°$. En dit klopt natuurlijk met wat we eerder hebben gezien.*

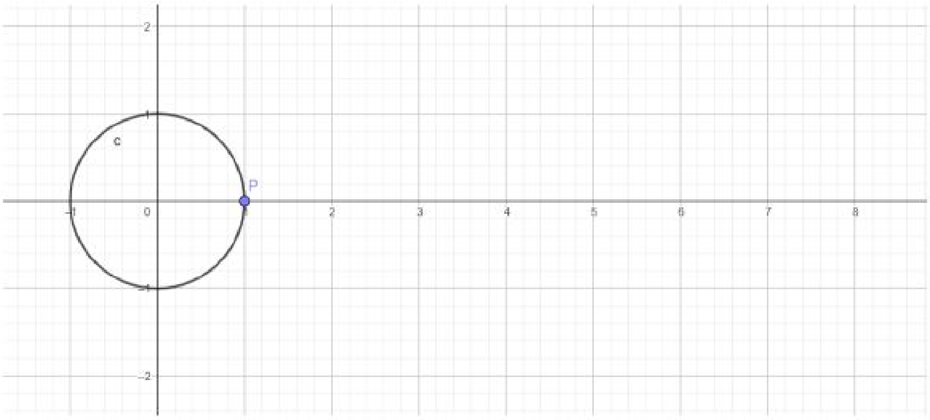
We gaan laten zien dat de grootte van een hoek in radialen afhangt van de straal van de cirkel door ook een voorbeeld te doen met een andere cirkel. We pakken nu een cirkel met straal 3, en nogmaals een booglengte van $\frac{1}{4}\pi$. *Samen met de leerlingen werk je ook dit voorbeeld uit, eventueel maak je hierbij weer een tekening of gebruik je GeoGebra. Nu krijg je* $\alpha = \frac{\frac{1}{4}\pi}{3} = \frac{1}{12}\pi$. *Omschrijven naar graden geeft* $\alpha = \frac{1}{12}\pi \cdot \frac{180°}{\pi} = 15°$. *Aangezien een cirkel 360° is, is dit dus 1/24 deel van de cirkel. De omtrek van deze cirkel is 6π (2πr met r=3). En* $\frac{1}{4}\pi$ *van 6π is ook 1/24 deel. Dit laat dus de leerlingen intuïtief zien dat de grootte van een hoek in radialen inderdaad de verhouding is tussen de booglengte die bij een middelpuntshoek van een cirkel past en de straal van deze cirkel.*

*Laat nu de leerlingen de volgende vragen beantwoorden (zelfstandig of in tweetallen).*

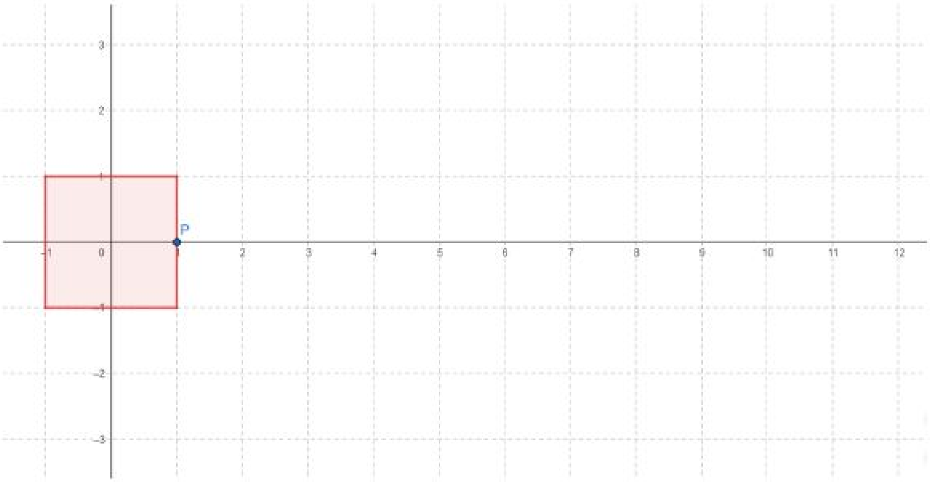
- Wat is $\frac{180°}{\pi}$ in radialen?
- Hoeveel graden is $\frac{1}{8}\pi$ ?
- Druk uit in radialen: sin(450°)
- Druk 125° exact uit in radialen
- Druk $\frac{2}{3}\pi$ rad uit in graden

*Nu kan je even aandacht besteden aan wat er gebeurt als je iets negatiefs invoert in de sinus. Stel de vraag: wat nu als ik jullie vraag wat de waarde van* $\sin(-\frac{1}{2}\pi)$ *is? Kom samen in gesprek met de leerlingen neer op de conclusie dat je dan het punt P met de wijzers van de klok mee laat gaan, in plaats van tegen de wijzers van de klok in. Laat dit ook zien met behulp van de applet. Op deze manier zien ze ook weer de connectie met de grafiek van de sinusfunctie, en dat het daardoor omgekeerd is. Stel ook de vraag in welke kwadranten van het assenstelsel de sinus negatief is in de eenheidscirkel (3e en 4e kwadrant).*

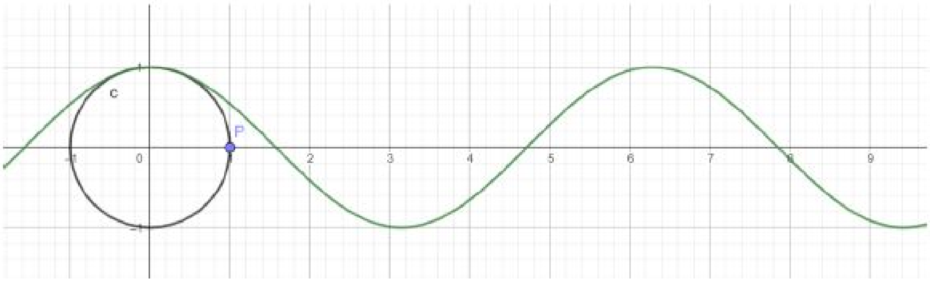
*Nu komt het punt om leerlingen ook in te laten zien wat de cosinus als functie doet, en wat dat te maken heeft met de eenheidscirkel. Geef de leerlingen onderstaand plaatje op een blad, en laat ze terugdenken aan hoe ze de baan tekende van de verticale positie van punt P, terwijl P tegen de klok in over de eenheidscirkel bewoog. Geef ze nu de opdracht om dit voor de* ***horizontale positie van punt P, oftewel de x-waarde van punt P, te doen.*** *Begeleid ze hierbij, tot ze een soort vorm van de cosinus krijgen.*



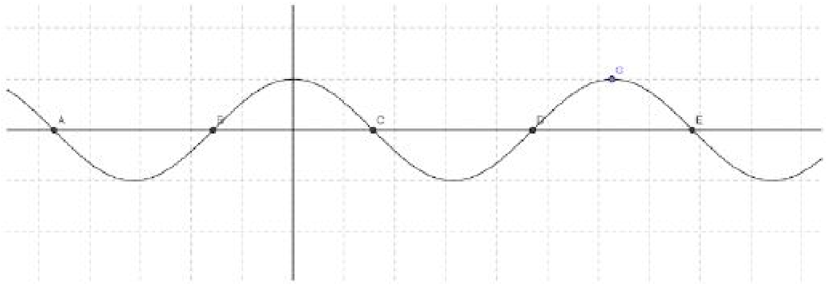

*Als dit lastig gaat, kan je ze eerst deze opdracht geven bij het vierkant met zijde 2 zoals ze ook bij de sinus deden.*




*Laat vervolgens de grafiek in GeoGebra zien en bespreek het met de klas.*




*Vervolgens geef je ze onderstaand figuur, en bespreek je wat de coördinaten van alle punten op de grafiek zijn. Houd hierbij een tekening van de eenheidscirkel paraat, zodat ze de connectie kunnen maken tussen informatie uit de grafiek en informatie uit de eenheidscirkel.*




*Ga ook weer in op wat het gedeelte van de grafiek op de negatieve x-as betekent. Hoe kan je dit relateren aan de eenheidscirkel? Vermoedelijk gaan deze vragen redelijk goed omdat dit herkenbaar is vanuit de sinussituatie.*

*Ga nu weer in op het verband tussen de booglengte en middelpuntshoek voor de eenheidscirkel. Nu is de bedoeling om een formule voor deze grafiek, die we c kunnen noemen, gaan vinden, uitgedrukt in x, oftewel de afgelegde afstand van punt P. We beweren nu dat er een hoek α bestaat zodat c(x)=cos(α). Laat de leerlingen zelf het werk doen om een formule voor c(x) te vinden. Als het goed is herkennen leerlingen dit als hetzelfde als bij de sinusfunctie (dus* $\alpha = \frac{180°x}{\pi}$*).*

*Nadat dit is gebeurt, kan je samen met de leerlingen op de conclusie komen dat deze functie dus de cosinusfunctie is. Benoem dat waar de sinusfunctie de verticale positie (y-coördinaat) van het bewegende punt beschrijft, de cosinus dus de horizontale positie (x-coördinaat) beschrijft.*

*Laat ze dit zelf ook uitvinden door ze te laten berekenen wat* $c(\frac{1}{4}\pi)$ *is. Teken het in de eenheidscirkel met een driehoek erbij, en laat ze Pythagoras gebruiken. Vervolgens kan je ze de volgende opgaven geven om hiermee te oefenen, en te laten inzien wat de cosinusfunctie nu echt is.*

- *Wat zijn de minimale en maximale waarden die de cosinusfunctie kan aannemen?*
- *Wat is de periode van de cosinusfunctie?*
- *Reken exact uit:* $cosl(\frac{1}{2}\pi)$
- *Reken exact uit:* $cos(-\pi)$
- *Reken exact uit:* $cos(30°)$

## Bijlage G - Feedback expertpanel

### G1 Feedback expert 1

1. In hoeverre voldoet de lessenserie aan de gestelde leerdoelen? Welke wel/niet, en heb je verbetersuggesties?

   *Leerdoel 1: Ik denk zeker dat ze dit moeten kunnen, omdat hier in het begin aandacht aan wordt besteed en ze dit ook moeten doen. Maar is dit echt iets wat je wil bereiken met je lessenserie? Ik dacht zelf dat het meer een opstapje was naar de eenheidscirkel en goniometrische functies.*

   *Leerdoel 2: Hier is goed naar opgebouwd in de lessenserie dus ik verwacht dat leerlingen dit zeker moeten kunnen.*

   *Leerdoel 3: Ik begrijp zelf niet helemaal wat je van leerlingen verwacht hier (kan ook aan mij liggen). Moeten ze kunnen uitleggen wat voor functie de sinus is? Wat de input ervan is (bijv. hoek/afgelegde weg)? Of waarom de grafiek van de sinusfunctie eruit zien zoals die eruit ziet? Hoe dan ook, ik denk dat ze dit allemaal moeten kunnen, door de rustige opbouw en focus op het kweken van relationeel begrip.*

   *Leerdoel 4: Zelfde opmerkingen als hierboven beschreven bij leerdoel 3.*

   *Leerdoel 5: Dit komt goed met diepgang aan bod dus denk dat leerlingen dit moeten kunnen.*

   *Leerdoel 6: Er zijn geen opgaven die dit leerdoel rechtstreeks testen (misschien kun je die nog toevoegen), maar gebaseerd op hoe de stof behandeld wordt (focus op relationeel begrip) denk ik dat leerlingen hier wel uit zouden moeten komen.*

   *Leerdoel 7: Aan dit leerdoel wordt geoefend in de vragen van het omrekenen van radialen naar graden. Ook denk ik dat booglengte een begrip moet zijn waar ze zich door het begin van de lessenserie goed iets bij kunnen voorstellen, en dit uiteindelijk kunnen linken met graden. De stap van booglengte naar graden kan misschien nog met iets meer tussenstappen aan bod komen (zie onder ontwerpeis 2). Maar denk dat ze dit uiteindelijk wel moeten kunnen.*

   *Leerdoel 8: Misschien kun je hier iets specifieker zijn: mogen ze hierbij de rekenmachine gebruiken? Dan is dit natuurlijk makkelijk. Mag dat niet en moeten ze waarden van de eenheidscirkel (zoals bij een hoek van 1/3 π) kunnen berekenen? Dat is misschien wel lastig. Denk niet dat ze dit op dit moment zonder rekenmachine kunnen.*

*Leerdoel 9: Zelfde opmerkingen als hierboven beschreven bij leerdoel 8.*

*Leerdoel 10: Ik denk dat dit een lastige is, zeker door de moeilijke zin waarmee je de betekenis van radialen uitlegt (zie ook de feedback onder ontwerpeis 2). Misschien kun je hier meer de tijd voor nemen/kleinere stappen nemen. En ook misschien nog even explicieter de link leggen tussen booglengte en de hoekmaat radialen. Misschien kun je met een vraag/opdracht checken of dit leerdoel is gehaald.*

*Leerdoel 11: Volgens mij lijkt dit erg op leerdoel 7. Ik denk dat ze dit uiteindelijk zeker wel leren en moeten kunnen met deze lessenserie.*

2. In hoeverre voldoet de lessenserie aan de gestelde ontwerpeisen? Welke wel/niet, en heb je verbetersuggesties?

   *Ontwerpeis 1: Ik denk zeker dat het in 3 lessen van 40 minuten is uit te voeren, zeker met veel sturing en bij een kleine groep. Denk zelfs dat er dan nog tijd overblijft om overige opdrachten te maken (die niet in de lessenserie staan). Heb je die al uitgekozen? Denk dat het goed is om na te denken tot waar je wil komen per les (dat staat niet aangegeven in de lessenserie maar heb je wellicht al wel gedaan). Misschien dan ook alvast nadenken over hoe de voorkennis bij de volgende lessen weer opgefrist wordt en hoelang dat ongeveer gaat duren.*

   *Ontwerpeis 2: Mede door de rustige opbouw denk ik dat dit zeker goed zit. Het enige waar ik qua moeilijkheid een beetje twijfels over heb is de overgang van sin(x) met x afgelegde weg oftewel hoek in radialen, naar sin(180x/π) oftewel met tussen de haakjes de hoek in graden. In je lessenserie staat beschreven dat ze dit samen met jou gaan afleiden, maar welke stappen kunnen ze hiervoor nemen? Je schrijft hierbij deze zin die denk ik aan de moeilijke kant is: '*De grootte van een hoek in radialen is de verhouding tussen de booglengte die bij een middelpuntshoek van een cirkel past en de straal van deze cirkel.*' Misschien kun je het iets simpeler houden door te zeggen dat de afgelegde weg over de eenheidscirkel ook wel een maat voor de grootte van een hoek is, bijv. π komt overeen met 180 graden, ½ π met 90 graden, enz. Op deze manier begrijpen ze misschien beter het verschil tussen en ook de afleiding van sin(x) naar sin(180x/π).*

   *Ontwerpeis 3: Zie onder punt 1.*

3. Klopt het materiaal inhoudelijk? Als je ergens een foutje ziet, geef het vooral aan.

   *Volgens mij klopt dat allemaal. Geen foutje gezien. Behalve dat je soms* 'het coördinaat' *zegt in plaats van* 'de coördinaat'. 😉

4. Wat vind je verder over het algemeen van de lessenserie? Denk je dat het effectief gaat zijn in het doel om leerlingen meer relationele kennis te geven over de basis van goniometrische functies?

   *Mooie lessenserie! Vooral de opbouw naar de eenheidscirkel en leerlingen het verband tussen ii en iii (zoals hierboven door jou beschreven) laten zien vind ik goed gelukt. Ik denk dat het wat dat betreft echt wel effectief gaat zijn om leerlingen relationeel begrip te laten krijgen van de (grafieken van) de sinus en cosinus.*

## G2 Feedback expert 2

1. De meeste leerdoelen lijk je te behalen alleen leerdoel 2 zie ik naar mijn idee niet helemaal terug. Misschien kun je de koppeling tussen **een**heidscirkel en straal 1 nog iets beter maken. Verder zag ik dat leerdoel 8 en 9 nu hetzelfde zijn, dus ik denk dat je bij een van beide de cosinus bedoelt. Bij die leerdoelen vroeg ik me ook nog af wat je bedoelt met reële getallen. Gaat die om de hoek in radialen, want daarmee is het nog steeds een hoek toch?
2. De tijd vind ik lastig in te schatten, omdat ik het niet duidelijk vind wanneer je nieuwe les begint. Verder vroeg ik me af of bij die 40 minuten ook het binnenkomen van de leerlingen, spullen pakken en spullen opruimen inzitten of dat die erbuiten vallen? Anders zou het wat aan de krappe kant kunnen zijn als je ook de leerlingen er weer even bij moet krijgen afhankelijk van hoe goed de stof van voorgaande lessen is blijven hangen. Dingen als het omschrijven van $1/2^{1/2}$ tot $1/2*2^{1/2}$ kunnen ook ineens veel tijd gaan kosten. Het niveau van de lessen lijkt me wel prima. De leerdoelen heb ik natuurlijk hiervoor al besproken.

3.

- Ik vind het in je materiaal enigszins onduidelijk of er ook dingen zijn die de leerlingen wel zelf moeten doen. Ik kan me voorstellen dat het tekenen van de eerste grafiek bijvoorbeeld heel interessant kan zijn om eerst zelf te proberen aangezien sommige leerlingen mogelijk een blokgolf gaan tekenen. Als je dat wilt zou ik alleen wel al een grafiek met assen uitdelen, zodat dit bij de leerlingen tijd bespaart. (Zou later bij de cosinus ook handig kunnen zijn.)
- Verder zou ik oppassen met de input altijd x noemen, want in principe is de functie f gegeven door x=y^2 ook geldig, maar dan is y duidelijk de input. Eventueel zeggen dat leerlingen dit al kennen als x en y kan wel, omdat dat het doorgaan naar de uiteindelijke functie makkelijker maakt.
- Bij applet 1 twijfel ik trouwens ook of het bewandelen met de klok mee wel tot negatieve x-waarden leidt. In principe noem je x namelijk de afstand die je aflegt, dus zou dit alsnog positief moeten zijn. Als je het de afstand vooruit of tegen de klok in noemt zou dit wel werken, maar dan moet je zelf maar even kijken hoe je dit zou verwoorden.
- Er zit een taalfout net na je achthoek *Benadruk nogmaals dat nu de dit de periodiciteit is*. Ik denk dat het woord "de" hier weg moet.
- Let bij het beginnen van de sinus als functie even goed op dat graden en radialen een andere input geeft. Ik kan me voorstellen dat leerlingen als je s(x) gebruikt voor die s meteen sin gaan lezen en dat kan het verwarrend maken. De ene input is daarmee een booglengte en de andere input een hoek, terwijl radialen in principe natuurlijk alleen bij de eenheidscirkel overeenkomen met de booglengte. Je maakt de stap van radialen als hoek namelijk pas later, dus daar moet je niet per ongeluk foutieve met-befores voor gaan creëren. Bij de volgende tekst vind ik het daarmee ook een beetje onduidelijk We gaan laten zien dat de grootte van een hoek in radialen afhangt van de straal van de cirkel door ook een voorbeeld te doen met een andere cirkel. Het lijkt namelijk alsof de booglengte de input is van je sinus, maar uiteindelijk is de hoek in radialen toch de input van je sinus? Het hele uitwerken erna vind ik wel weer logisch, maar het gaat me vooral om hoe de begrippen op leerlingen gaan aansluiten.
- Is het bij Druk uit in radialen: sin(450°) de bedoeling dat leerlingen er sin(2 ½ pi) van maken of 1/180*pi?
- Er zit op het eind nog een typfout in je materiaal *Reken exact uit: cosl()*

4. Ik vind de lessenserie heel leuk, want ik vind die hele applets heel interessant. Ik denk dat het wel een beter beeld geeft voor leerlingen om van eenheidscirkel naar grafiek bij een functie te gaan en andersom. Ik vind wel dat er enkele dingen in zitten die mogelijk tot problematische met-befores kunnen leiden, dus daar moet je in de lessenserie dan zelf vooral heel goed op letten. Dat lijkt me wel lastig aan het feit dat je dit natuurlijk zelf moet gaan vertellen. Ik vroeg me alleen nog af of je bewust de leerlingen een dertighoek laat zien en niet eerst zelf dit trucje bij een cirkel wil laten testen. In het college wat wij hier van Mark(?) over hadden zei hij volgens mij dat leerlingen dan heel vaak ineens weer halve boogjes gaan tekenen en misschien dat het onderuithalen daarvan ervoor kan zorgen dat het beter aankomt (zeker als leerlingen eerst een blokgolf tekenen in het begin). Eigen keuze of je daar iets mee wilt doen natuurlijk.

## G3 Feedback expert 3

**Leerdoelen:**

1. *de grafiek tekenen van de afgelegde afstand van een punt die over een vierkant met zijde 2 beweegt tegenover de verticale positie van dat punt*
   In principe wordt dit leerdoel behaald. Het enige wat niet benoemd wordt is het effect van de snelheid waarmee je over het vierkant beweegt. Ik verwacht hier niet echt moeilijkheden, maar ik kan me voorstellen dat hier een vraag over komt.
2. *uitleggen wat de eenheidscirkel is*
   Ik vraag me hier af of leerlingen niet denken dat elke cirkel met straal 1 een eenheidscirkel is. Het feit dat het middelpunt in de oorsprong ligt wordt niet expliciet benoemd in het stuk over de eenheidscirkel.
3. *de sinus definiëren als een functie van reële getallen*
   Voldaan. De beschrijving is voor leerlingen vaag, maar is natuurlijk geen probleem als je deze leerdoelen niet op deze manier met de leerlingen bespreekt.
4. *de cosinus definiëren als een functie van reële getallen*
   Voldaan. De beschrijving is voor leerlingen vaag, maar is natuurlijk geen probleem als je deze leerdoelen niet op deze manier met de leerlingen bespreekt.
5. *met behulp van het verband tussen de eenheidscirkel en de grafieken van de sinus en cosinus uitleggen waar bepaalde eigenschappen (periodiciteit, domein en bereik) van de sinus en cosinus vandaan komen*
   Voldaan, maar hier zou net als bij 1. het aspect van snelheid tot verwarring kunnen leiden.
6. *de coördinaten van punten op de eenheidscirkel berekenen aan de hand van de booglengte*
   Voldaan.
7. *hoeken uitrekenen in graden aan de hand van de booglengte van punten op de eenheidscirkel*
   Voldaan.
8. *de sinus waarden uitrekenen van gegeven hoeken en (reële) getallen*
   Voldaan.
9. *de sinus waarden uitrekenen van gegeven hoeken en (reële) getallen*
   Ik vermoed dat je hier de cosinus bedoel :), in dat geval ook voldaan.
10. *uitleggen wat radialen zijn en hoe dit werkt voor de eenheidscirkel*
    Opzich voldaan, maar ik denk niet dat leerlingen hier een antwoord op kunnen geven.
11. *radialen omrekenen naar graden en vice versa*
    Voldaan.

**Ontwerpeisen**

1. *De lessenserie is in 3 lessen van 40 minuten uit te voeren.*
   Lijkt me prima, wellicht dat 2 lessen van 50 minuten ook nog wel haalbaar is.
2. *De lessenserie sluit aan op het wiskunde B niveau van vwo leerlingen aan het begin van 5 vwo.*
   Top.
3. *De lessenserie voldoet aan de leerdoelen zoals hieronder benoemd.*
   -

**Inhoudelijk correct**

Ik ben geen fouten tegengekomen. (Maar moet zeggen dat ik dingen niet heb nagerekend en ook niet echt op spellings- en grammaticafouten heb gelet.)

**Algemene indruk lessenserie**

Erg mooie lessenserie, het zal zeker effect hebben op de kennis van leerlingen. Ik vermoed dat het vooral met betrekking tot de eenheidscirkel en de interpretatie tot een beter begrip zal leiden. Hier zullen de leerlingen zeker profijt van hebben. Ik twijfel echter of de 'basis van goniometrisch functies' lang zal blijven hangen of dat leerlingen dit weer snel als 'trucje' gaan zien. (Dit is iets waar jij denk ik niet veel aan kunt veranderen.)

Ik mis wel een beetje een leuke/interessante afsluiting van de lessenserie. Misschien kan je nog een soort 'wauw-momentje' creëren met een ingewikkelde praktische toepassing of iets dergelijks.

## G4 Feedback expert 4

1. **In hoeverre voldoet de lessenserie aan de gestelde leerdoelen? Welke wel/niet, en heb je verbetersuggesties?**
   De leerdoelen komen allemaal aan bod en worden besproken, dus ik denk dat jouw lessenserie hieraan voldoet. Wat voor huiswerk zit hier verder aan gekoppeld? Je wil opzich namelijk dast die ook volgens jouw leerdoelen is bedacht.
2. **In hoeverre voldoet de lessenserie aan de gestelde ontwerpeisen? Welke wel/niet, en heb je verbetersuggesties?**
   Ik twijfel over ontwerpeis 1. Het is voor mij namelijk niet helemaal duidelijk hoe jij deze lessenserie gaat spreiden over drie lessen. Wanneer bespreek je wat? Hoeveel materiaal komt aan bod per les? Misschien dat je dit duidelijker kan aangeven ook in het zicht van een andere docent die de les en materialen letterlijk wil kunnen overnemen om zelf te gebruiken aan de hand van je onderzoek.
3. **Klopt het materiaal inhoudelijk? Als je ergens een foutje ziet, geef het vooral aan.**
   Volgens mij klopt deze vraag niet helemaal, of begrijp ik niet wat jij van de leerlingen verwacht?
   - Wat is $\frac{180°}{\pi}$ in radialen?

   Verder lijkt alles te kloppen.
4. **Wat vind je verder over het algemeen van de lessenserie? Denk je dat het effectief gaat zijn in het doel om leerlingen meer relationele kennis te geven over de basis van goniometrische functies?**
   Ik vind de lessenserie goed eruit zien en ik denk dat het zeker effect gaat hebben. Leerlingen bespreken dit materiaal op een hele andere manier normaal gesproken en je onderzoek is ook goed opgezet. Drie lessen van 40 minuten na jaren les te hebben gehad op een manier dat meer naar instrumenteel neigt is wel weinig, dus ik verwacht niet dat het effect gelijk en extreem zichtbaar zal zijn, maar je zal zeker een effect hebben op zicht en begrip van functies.

**Overige opmerkingen**

Ik vroeg me nog af of er een reden is waarom je met de regelmatige vijfhoek boven de 1 en onder de -1 uitkomt qua verticale positie. Ik vond het namelijk zelf in eerste instantie verwarrent omdat je bij de vierkant en achtehoek wel binnen -1 en 1 blijft. Misschien dat je opnieuw hiernaar wil kijken? Het is geen probleem, maar misschien dat het afleidend zou kunnen zijn voor leerlingen als zij dit merken.

## G5 Feedback expert 5

Algemene opmerking, misschien als je deze lessen ook bedoelt voor anderen is iets van een tijdsschatting prettig. Zo van: besteed hier ongeveer x minuten aan. En wat je ongeveer bedacht hebt per les. Want ik zie nu alleen een kopje lessenserie, maar niet een uitsplitsing van: dit in les 1, dit in les 2. Met ook misschien: herhaal hier. Je zou dan ook de leerdoelen per les kunnen meenemen in je lesplan, dan is het per les ook duidelijker wat de link is met je leerdoelen. En ook voor leerlingen misschien: wat kunnen ze aan het eind. Ook kan je dan wat herhaling inbouwen van: vorige les deden we dit etc. en dan wordt ook meteen duidelijk wat de belangrijkste ideeën waren.

De applets openen lukte niet zo snel. Ik denk dat het dan .ggb bestanden moeten zijn om ze te kunnen openen in geogebra zelf (heb ik wel geprobeerd).

Bij het stuk van de vijfhoek: misschien nog iets meer nadruk op waarom het niet het hoogste punt is bij de eerste hoek. Misschien wat begeleidende vragen: wat is het hoogste punt van de stilstaande vijfhoek, etc?

Ik vind de omschrijving 'afgelegde weg' ook wel een klein beetje gevaarlijk. Want die wordt ook negatief... terwijl je wel doorwandelt om zo maar te zeggen. Dus je afgelegde weg zou eigenlijk alleen maar toe moeten nemen. Misschien daar een iets andere omschrijving bij kiezen? Of iets van vragen invoegen waarom dit ook negatief wordt?

Ik denk dat je bij het stuk van de booglengte ook de concrete conclusies in je lessenplan wil hebben. *Maak hier nu de connecties met hoeveel graden. Als ze dit niet gelijk weten, ga eerst terug naar het punt waar P over de eenheidscirkel heeft bewogen met een lengte $\pi$.* Dit staat er nu, maar ik zou hier echt toevoegen van dit moeten ze weten: . Dit is een van je leerdoelen en ik denk dat dit stuk nog wat uitgebreider en concreter kan. (ik snap dat je in je normale lesvoorbereiding niet zo uitgebreid alles zou opschrijven, maar voor een onderzoek dat je wil laten zien aan anderen is het denk ik handig om dit soort stappen concreet op te schrijven). Hetzelfde geldt eigenlijk ook voor het stuk ervoor *Wat zijn de coördinaten van P wanneer het over de eenheidscirkel heeft bewogen over een boog met lengte $\pi$?* Wat wil je hier uiteindelijk horen? Wanneer ben je tevreden? → hoe relateert dit aan je leerdoel?

"De grootte van een hoek in radialen is de verhouding tussen de booglengte die bij een middelpuntshoek van een cirkel past en de straal van deze cirkel." – dit is best een pittige zin en een pittige conclusie voor de leerlingen denk ik. Misschien vanuit het voorbeeld toewerken naar radialen? Dus eerst voorbeeld van de afhankelijkheid: straal cirkel en hoek (wat jenog niet radialen noemt)? En dan zie je dat die verhoudingen hetzelfde zijn en dat je dat radialen noemt.

Ik neem aan dat leerlingen weten wat exact uitrekenen is bij sinussen? Anders misschien daar nog even een opmerking bij plaatsen? En, voor de lezer, misschien ook de antwoorden op je korte vragen bijvoegen.

Misschien bij de cosinus, als het lastig gaat, zou je ook nog samen het eerste punt kunnen doen, en dan de rest door de leerlingen zelf.

Antwoorden op je vragen

1. Ik denk dat je aardig voldoet aan de leerdoelen, maar ik denk dat ze op sommige punten wat concreter gemaakt kunnen worden. Niet alleen voor jezelf en de lezer, maar misschien ook voor de leerlingen. Zeker een aantal definities, bijv. radialen, waarvan je verwacht dat leerlingen het zelf kunnen uitleggen, lijken redelijk beknopt omschreven in je lessenserie. Misschien kan je dat iets uitbreiden.
2. Ik denk dat eis 2 en 3 goed zijn, ik denk dat je eis 1 nog wat zichtbaarder kan maken door zelf een beetje een idee te geven van wat ongeveer de drie lessen zijn. En dan kan je misschien ook per les aangeven wat de leerdoelen zijn (desnoods alleen voor de docent, maar dat maakt het ook voor de lezer duidelijk wat de koppeling is van je opgaves en ideeën met de leerdoelen) en welke kernideeën je wil herhalen misschien?
3. Denk het wel? In mijn word online kon ik niet alle equations duidelijk zien, maar ik neem aan dat je de sinussen goed hebt uitgerekend.
4. Zie alles wat ik hierboven heb getypt!

## G6 Feedback expert 6

1. Voldoet de lessenserie aan de gestelde leerdoelen?
    1. de grafiek tekenen van de afgelegde afstand van een punt die over een vierkant met zijde 2 beweegt tegenover de verticale positie van dat punt
       ja
    2. uitleggen wat de eenheidscirkel is
       ja
    3. de sinus definiëren als een functie van reële getallen
       weet niet precies hoe je dit bedoelt, maar dit is wel wat veel gevraagd misschien
    4. de cosinus definiëren als een functie van reële getallen
       idem
    5. met behulp van het verband tussen de eenheidscirkel en de grafieken van de sinus en cosinus uitleggen waar bepaalde eigenschappen (periodiciteit, domein en bereik) van de sinus en cosinus vandaan komen.
       Dit zou een 5V wisB leerling moeten kunnen na deze lessenserie en de voorkennis over domein, bereik die ze al hebben. In de lessenserie zoals nu beschreven kom ik deze begrippen niet expliciet tegen
    6. de coördinaten van punten op de eenheidscirkel berekenen aan de hand van de booglengte
       Bedoel je hier door de sinus en cosinus functies te gebruiken? Dan ja.

    7. hoeken uitrekenen in graden aan de hand van de booglengte van punten op de Eenheidscirkel
    ja
    8. de sinus waarden uitrekenen van gegeven hoeken en (reële) getallen
    m.b.v. de rekenmachine?
    9. de sinus waarden uitrekenen van gegeven hoeken en (reële) getallen
    Cosinus?
    10. uitleggen wat radialen zijn en hoe dit werkt voor de eenheidscirkel
    Zelf vind ik hoe radialen geïntroduceerd worden nogal vaag beschreven, het kan aan mij liggen maar ik vraag me af of een leerling na deze lessenserie kan uitleggen wat radialen zijn
    11. radialen omrekenen naar graden en vice versa
    Dat zou moeten lukken

2. Voldoet de lessenserie aan de gestelde ontwerpeisen?
    1. De lessenserie is in 3 lessen van 40 minuten uit te voeren.
       Ja dat denk ik wel, wellicht is 3 zelfs al aan de hoge kant.

    2. De lessenserie sluit aan op het wiskunde B niveau van vwo leerlingen aan het begin van 5 vwo.
       Ja helemaal, er is zelf bijna geen voorkennis nodig m.u.v. het functiebegrip en de goniometrische verhoudingen

    3. De lessenserie voldoet aan de leerdoelen zoals hieronder benoemd.
       Zie: Voldoet de lessenserie aan de gestelde leerdoelen?

3. Klopt het materiaal inhoudelijk?
   Heb geen grove fouten kunnen ontdekken 😉, wat ik niet zo goed begrijp is waarom de hoekpunten van de regelmatige vijfhoek buiten het eenheidsvierkant vallen en er dus waarden groter dan 1, kleiner dan -1 kunnen ontstaan. Wat is de omtrek van deze 5-hoek? Misschien zou ik me beperken tot 4-hoek, 8-hoek, 16-hoek
4. Algemene mening
   In het begin moest ik even wennen, maar naarmate het verhaal vorderde werd ik wel enthousiast. De connectie tussen sin = y-coordinaat van punt op eenheidscirkel en cos = x-coordinaat van punt op eenheidscirkel vind ik mooi. Ook de connectie met poolcoördinaten is zo veel gemakkelijker te maken denk ik. Het samen beredeneren kan een mooi klasgesprek opleveren, het gevaar is dat sommigen afhaken. Omdat er veel getekend kan worden en er vragen tussendoor beantwoord moeten worden vroeg ik me af of je al aan een werkblad hebt gedacht? PS: ben een paar spelfouten tegengekomen, dus daar zou ik ook nog even naar kijken 😉. Het is mij niet gelukt om de applets te openen, maar zoals je ze hebt beschreven ziet het er naar uit dat deze zeker van toegevoegde waarde zijn!

## G7 Feedback expert 7

1. Volgens mij behandel je alle leerdoelen. Ik vermoed dat bij leerdoel 9 cosinus i.p.v. sinus moet staan? Ik denk wel dat leerdoel 6 t/m 9 en 11 wat meer inoefening vereisen om écht behaald te worden. Met de enkele opdrachten die er nu in de lessenserie zitten, denk ik niet dat leerlingen er de week erna nog direct uitkomen.

2. Volgens mij voldoet de lessenserie aan de ontwerpeisen. Qua tijd is dit altijd lastig inschatten. 3x 40 minuten lijkt me haalbaar, maar zo'n klassendiscussie is heel moeilijk te voorspellen. Het zou ook maar zo kunnen dat het wat langer duurt voordat leerlingen sommige verbanden zien en dan kan het wel eens krap worden. Ook bepaalde voorkennis kan heel goed weggezakt zijn. Ik zou echter niet iets schrappen, maar gewoon proberen dit wel echt binnen die 3 lessen te doen.

3. Inhoudelijk geen opmerkingen.

4. Mooie opbouw in de lessenserie! Vanuit het vierhoek naar de cirkel toewerken en dan steeds de link leggen naar de grafiek is mooi. Vanaf het moment dat er ook met hoeken gewerkt wordt, wordt het voor de leerlingen wel pittiger denk ik. Ze kunnen dan gemakkelijk de draad kwijt raken tussen grafiek, cirkel, hoeken in graden, radialen, booglengte. Het is erg veel wat er dan op ze af komt. Ik denk dat het belangrijk is dat je continu blijft checken of ze de link nog goed leggen.
Ben je overigens van plan om er nog oefenopgaven bij te geven (voor thuis)? Zoals ik eerder al zei, denk ik dat er veel inoefening nodig is bij dit onderwerp en dat mis ik wel een beetje in deze lessenserie.
Verder geen opmerkingen!

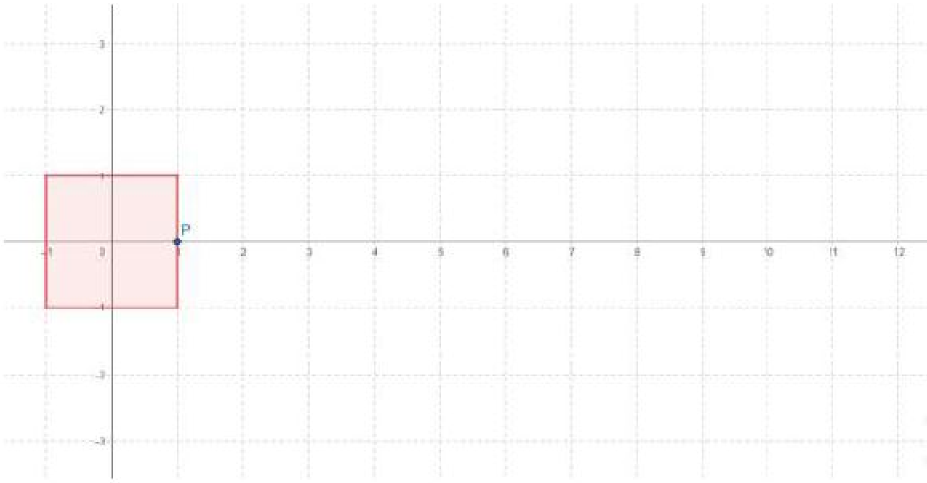
# Bijlage H - Lesmateriaal

## H1 Lesbeschrijving

### Les 1

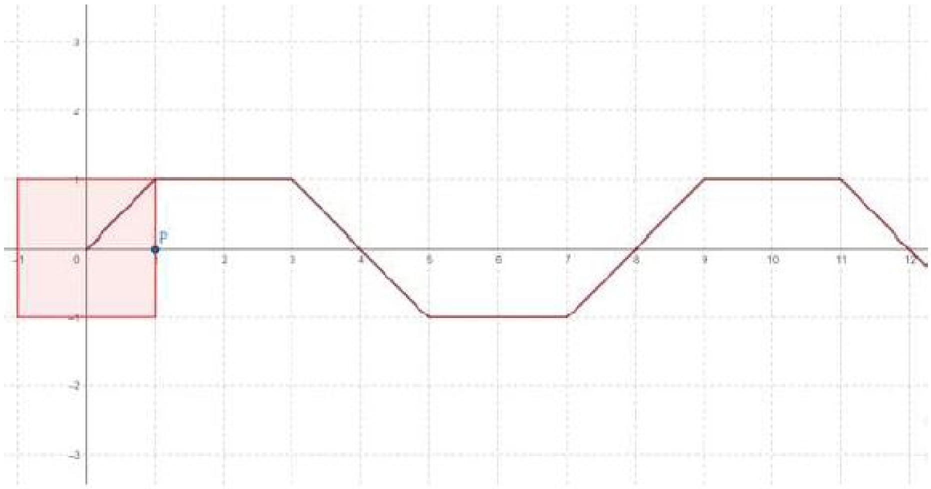
In eerdere hoofdstukken van wiskunde heb je al kennis gemaakt met de sinus, cosinus, en tangens. Je weet dat je deze kan gebruiken bij het berekenen van de zijden en hoeken bij rechthoekige driehoeken. Maar eigenlijk zijn deze begrippen nog veel breder dan alleen dat! Deze week gaan we beginnen met het hoofdstuk van goniometrische functies, en daar spelen de sinus en cosinus de hoofdrol in. Om jullie een sterke basis te geven voor dit hoofdstuk gaan we op een iets andere manier beginnen dan jullie gewend zijn, maar stapje voor stapje zullen we uitkomen op een nieuwe manier om tegen de sinus en cosinus aan te kijken.

We gaan beginnen met het bekijken van een regelmatige vierhoek met zijde 2 die we op een assenstelsel zetten, met het midden van de vierhoek in de oorsprong. We gaan kijken naar het punt P, met coördinaten (1,0), en laten dat punt langs de vierhoek lopen, tegen de klok in. *Laat de figuur hieronder op het bord zien, of zorg dat het alvast getekend is.*




We gaan de grafiek tekenen van de verticale positie, dus de hoogte, de y-coördinaat, van het punt P terwijl dit punt tegen de klok in over de rand van het vierhoek beweegt. De x-as is hierbij de afgelegde weg van het punt P, en de y-as is de hoogte/verticale positie van het punt P.

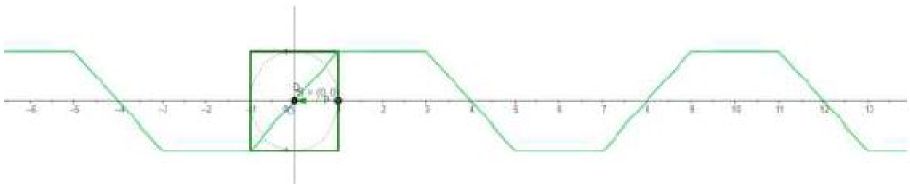
*Samen en in overleg met de leerlingen teken je op het bord deze grafiek. Hierbij begin je bij het punt (0,0) en ga je in stapjes verder. Belangrijke punten om op te letten is, wat is de maximale hoogte waarop het punt P komt, wat is de overgang tussen de hoekpunten (1,1), (-1,1), (-1,-1) en (1,-1), en hoe steil is die overgang? Doe het begin samen met de leerlingen, en geef ze daarna zelf een paar minuten om de rest van de grafiek te tekenen (zie werkblad 1a). Loop hierbij rond en assisteer. Ze mogen samenwerken. Uiteindelijk moet iedereen een grafiek als de volgende krijgen:*



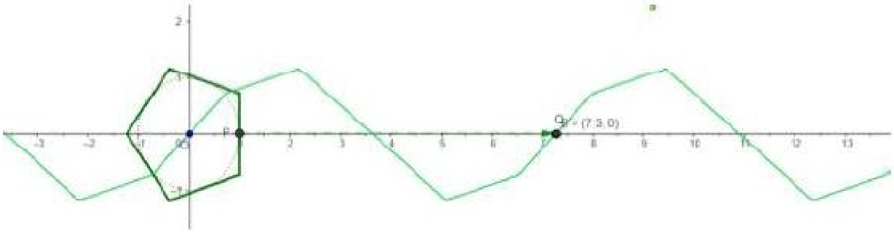
*Stel de volgende vragen aan de leerlingen (indien dit nog niet tijdens het tekenen aan bod is gekomen). Wat is de maximale en minimale hoogte van de grafiek en hoe kan je dit aan de vierhoek zelf zien? Vanaf wanneer (welke x-coördinaat) herhaalt de grafiek zichzelf en hoe kan je dit aan de hand van de vierhoek zien? Welke coördinaten uit de grafiek corresponderen met de hoekpunten van de vierhoek?*

Het is nu dus duidelijk dat we een grafiek hebben die de beweging van het punt P beschrijft, oftewel de waarde van de y-coördinaat. Nu heb je bij een functie altijd iets wat je er in stopt, je x-waarde, en iets wat je er uit krijgt, je y-waarde. Wat zeiden we net ook alweer wat de x-waarde en y-waarde was bij onze grafiek? En wat is dus de x-waarde/input en y-waarde/output van onze functie?

*Kom er samen met de leerlingen weer op uit dat de x-waarde de afgelegde weg van punt P over het vierkant is tegen de wijzers van de klok in, en de y-waarde de hoogte/verticale positie van het punt P is. Benadruk dat dit dus betekent dat dit de input en output zijn waardoor de grafiek een functie is. Laat vervolgens de applet zien (zie applet 1 en 2 in de bijlage), waarbij in GeoGebra te zien is hoe dit werkt. Ook kan je laten zien wat er gebeurt als je de negatieve x-as bewandelt, oftewel punt P met de wijzers van de klok mee laten bewegen.*

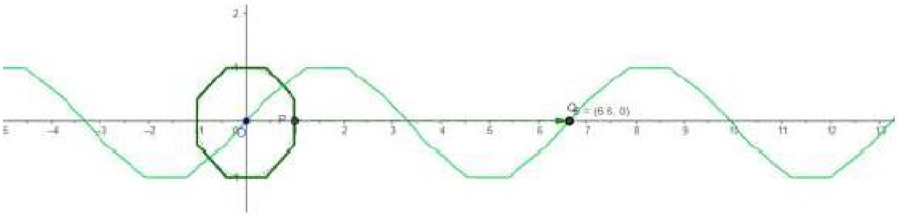


Nu gaan we iets soortgelijks doen, maar dan, in plaats van een vierhoek, pakken we een figuur met vijf hoeken. Dit heet een regelmatige vijfhoek, want er zijn vijf zijden van gelijke grootte. *Teken zelf een regelmatige vijfhoek op het bord (of het staat er al ergens), en zet het in een assenstelsel zoals we ook bij het vierkant deden, met een punt P op (1,0). Vraag aan de leerlingen weer hoe de grafiek van de beweging van punt P eruit ziet. Laat ze weer zelf op het werkblad dit uitproberen. Hierbij moeten de leerlingen vooral doorhebben dat op de eerste hoek van de vijfhoek (als je het tekent zoals hieronder in de tekening staat), je niet gelijk op het hoogste punt zit. Ze hoeven niet een hele periode te tekenen, maar pak bijvoorbeeld halverwege applet 2 in de bijlage erbij. Vraag aan de leerlingen, voordat je het punt over de figuur begint te bewegen, op welk punt in de grafiek het punt P over de hele figuur is* *'gewandeld'. Dit moet op het punt zijn dat er een periode is afgelegd, dus ongeveer bij (7,3;0), zoals blijkt uit de applet. Leg uit dat die 7,3 slaat op hoe lang de weg is die punt P heeft moeten afleggen om weer bij zijn beginpunt uit te komen. Vertel de leerlingen dat het op dit moment niet uitmaakt hoe dit getal is berekend, maar meer wat het getal betekent.*



*Ook kan je hier weer samen met de leerlingen de connectie maken tussen het hoogste punt van de vijfhoek en het hoogste punt in de grafiek.*

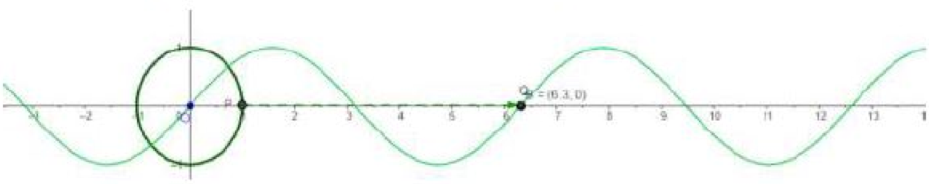
Nu pakken we bijvoorbeeld een achthoek *(doe dit ook weer zelf in de applet in GeoGebra)*. Wat valt er op aan de grafiek? *De leerlingen moeten er in ieder geval op uitkomen dat de grafiek lijkt op de eerdere grafiek die we zagen, maar dat de 'stukjes' van de grafiek korter zijn (doordat het een figuur is met meer zijden), en dat de grafiek daardoor wat soepeler loopt.*



Wanneer herhaalt de grafiek zich weer? *Nu kom je uit op ongeveer 6,6. Benadruk nogmaals dat nu dit de periodiciteit is, en dat dit dus de afgelegde weg van punt P is, voordat het punt weer op het startpunt aankomt (en dat het even niet uitmaakt hoe deze is berekend). Eigenlijk is dit dus de omtrek van de figuur! Bij het vierkant kon je weten dat de omtrek 8 was (2+2+2+2), en bij deze achthoek is dat blijkbaar 6,6.*

Wat gaat er met de figuur gebeuren als we meer en meer hoeken gaan toevoegen? Wat voor figuur gaan we dan krijgen? *Kom samen met de leerlingen tot de conclusie dat dit een cirkel wordt. Laat dit vooral zien met behulp van de applet.*

Wat zal dan de afstand zijn die punt P moet afleggen voordat het weer bij het startpunt is? Wat is de omtrek van een cirkel? *Als het goed is weten de leerlingen nog dat dit $2\pi r$ is, met r de radius. Aangezien r=1 in dit geval, moet de omtrek $2\pi$ zijn. Vraag wat de waarde hiervan is ($\pi$=3,14…) dus wat wordt $2\pi$? Nadat dit is besproken kan je de applet aanpassen naar n=30 zodat je een dertighoek krijgt, en dan kunnen de leerlingen de eerder gestelde vermoedens bevestigen.*



*Benadruk hier dat de grafiek inderdaad nog 'soepeler/gladder' is geworden zoals de leerlingen normaal gesproken een grafiek kennen, en dat de periode, dus wanneer P de hele omtrek van de figuur heeft belopen, ongeveer 2π is.*

Laten we nu zeggen dat we n oneindig groot maken, en dat we nu dus te maken hebben met een cirkel. Wat is de straal van deze cirkel? De straal is 1, en daarom noemen we deze specifieke cirkel vanaf nu de eenheidscirkel. Het deel van dit woord, **een**, slaat dus op het feit dat de straal van de cirkel gelijk is aan 1. Het is ook niet zo dat elke willekeurige cirkel met straal 1 de eenheidscirkel wordt genoemd, het gaat er ook om dat het middelpunt van deze cirkel op de oorsprong in het assenstelsel ligt.

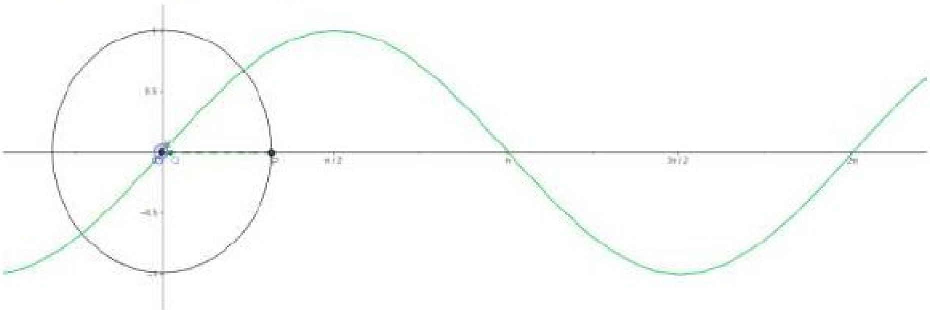
*Geef de leerlingen nu werkblad 1b. Hiermee kunnen ze aan de slag tot eind van de les. Als ze het niet afkrijgen is het huiswerk voor de volgende les.*

## Les 2

*Indien de leerlingen de vorige keer werkblad 1b niet hebben afgekregen, bespreek je deze nu nog kort na. Dit kan ook goed als herhaling dienen. Hier kan je ook applet 3 bij gebruiken in GeoGebra.*

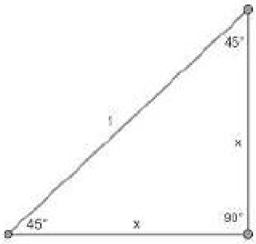
Tot nu toe hadden we het telkens over afgelegde weg door P vanaf het punt (1,0). Vanaf nu gaan we het woord 'booglengte' gebruiken voor de afstand die punt P vanaf (1,0) heeft afgelegd als het over de figuur tegen de klok in beweegt. De hele eenheidscirkel heeft een omtrek van 2π, en dat is dus de booglengte van de hele eenheidscirkel.

*Vanaf nu pak je applet 3 erbij op GeoGebra.*



*Op dit moment ga je wat vragen stellen aan de klas over booglengtes, en gebruik je hierbij $\pi$. Op dit moment geef je ze ook werkblad 2a, waar ze wat vragen kunnen beantwoorden die je zelf ook klassikaal bespreekt. Wat zijn de coördinaten van P wanneer het over de eenheidscirkel heeft bewogen over een boog met lengte $\pi$? Teken hier de booglengte nadat leerlingen hier op in zijn gegaan, en schrijf de coördinaten (-1,0) op. En met lengte $\frac{1}{2}\pi$? Teken hier de booglengte nadat leerlingen hier op in zijn gegaan, en schrijf de coördinaten (0,1) op. Vraag ook hoe groot hier de bijbehorende middelpuntshoek is (als dit begrip nog onbekend is, teken dan een lijn van het middelpunt naar (1,0) en een lijn van het middelpunt naar het nieuwe punt P en duid aan dat de hoek tussen die twee lijnen de middelpuntshoek wordt genoemd van de cirkel). Als het goed is weten de leerlingen dat deze hoek 90° is. Doe ook hetzelfde voor $\frac{3}{2}\pi$. Maak hier nu de connecties met hoeveel graden. Als ze dit niet gelijk weten, ga eerst terug naar het punt waar P over de eenheidscirkel heeft bewogen met een lengte $\pi$. Hierdoor weten ze dat het om 270° moet gaan, en niet om 90°, aangezien er over de cirkel wordt bewogen tegen de wijzers van de klok in.*

*Vraag nu hetzelfde voor $\frac{1}{4}\pi$. Dit gaat minder makkelijk, omdat het punt niet op de x- of y-as ligt en er dus geen duidelijke coördinaten zijn. Maak een tekening voor dit punt en vraag aan de leerlingen wat de bijbehorende middelpuntshoek is. Leerlingen zouden snel moeten weten dat deze hoek 45° is. Laat ze zelf ontdekken (met een beetje sturende begeleiding) dat ze, als ze een driehoek tekenen op het werkblad, met Pythagoras de hoogte van het punt P kunnen berekenen en dat de coördinaten dus $(\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2})$ zijn. Mogelijk hebben ze hierin sturing nodig. Belangrijke stappen die ze moeten realiseren is dat ze een gelijkbenige driehoek krijgen, dus dat ze een figuur als deze hieronder krijgen. Hiermee kunnen ze met Pythagoras komen op $x^2 + x^2 = 1$, wat op te lossen is tot $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.*




*Het kan ook nog zijn dat leerlingen hier dachten dat punt P bij $\frac{1}{4}\pi$ wel op hoogte 0,5 zou zitten. Ga hier op in door vanaf (1,0) de beweging zelf langzaamaan te tekenen, waardoor de leerlingen zien dat je eerste steil omhoog gaat, en daarna pas vlakker opzij (je gaat dus niet in een rechte lijn). Je kan hiervoor ook applet 3 gebruiken. Dit betekent ook dat de y-coördinaat van punt P sneller stijgt dan de x-coördinaat daalt, en daarom kom je dus boven de 0,5 uit bij $\frac{1}{4}\pi$. Laat de leerlingen dit bevestigen door ze op de rekenmachine $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ in te type, waardoor ze het decimale getal krijgen.*

*Ga vervolgens weer terug naar het punt (0,1), wat hoorde bij een booglengte van $\frac{1}{2}\pi$, en vraag de leerlingen welke middelpuntshoek hierbij hoort. Maak ook de connectie met welk punt van de grafiek hierbij hoort. Doe dit ook voor booglengtes $\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, en $2\pi$ (180°, 270° en 360°). Maar nu, als de connectie wordt gemaakt met de grafiek van de functie, ga die functie een naam geven (bijvoorbeeld f), en ga het ook als input/output geven zoals je dat ook met een functies doet normaal gesproken. Dus f(x)=..., waarbij x de afgelegde weg, oftewel booglengte is, dus bijvoorbeeld $f(\pi)=0$, want nul is de verticale positie/hoogte van punt P, en gelijk aan de waarde op de y-as. Zo krijg je $f(\frac{1}{2}\pi)=1$, $f(\frac{3}{2}\pi)=-1$, en $f(2\pi)=0$. Ze deze op een rijtje boven elkaar, en zet $f(\frac{1}{4}\pi)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ er ook bij.*

*Nu moet nog de connectie worden gemaakt met de hoeken en de sinus. Pak de driehoek van hierboven erbij, en ga samen met de leerlingen bekijken hoe je met behulp van de sinus ook achter de waarde van x had kunnen komen. Ga terug naar het voorbeeld van $\frac{1}{4}\pi$, waarbij middelpuntshoek van 45° hoorde, en dat de hoogte van dit punt gelijk was aan $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Vraag de leerlingen hoe ze op een andere manier de hoogte van dat punt, oftewel de lengte van die zijde hadden kunnen weten. Als ze niet zelf met iets komen, wijs ze op de rechte hoek in de driehoek, en vraag welke informatie je hebt, en wat ze willen weten. Op deze manier help je ze herinneren dat $\sin(\alpha) = \frac{overstaand}{schuin}$, waarbij hier $\alpha = 45°$, overstaand= $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en schuin =1. Hierdoor krijg je $\sin(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Ze zien dus dat, in plaats van Pythagoras gebruiken, ze ook de sinus hadden kunnen gebruiken. Hierdoor kan je in het rijtje zetten dat $f(\frac{1}{4}\pi)=\frac{1}{2}\sqrt{2} = \sin(45°)$.*

We zien nu dus dat de y-coördinaat van punt P dus beschreven kan worden door de sinus van de middelpuntshoek! Dit geldt ook voor onze andere punten, laten we samen het rijtje afmaken. *Benoem hier goed dat je dus de sinus kan gebruiken om de hoogte van punt P te berekenen, en laat zien met een voorbeeld waarom dit handig is. Neem hiervoor, bijvoorbeeld, een booglengte van 0,3, en teken de driehoek die hierbij hoort. In dit geval kan je niet makkelijk algebraïsch de lengte van de zijde uitrekenen, maar je kan dus wel de sinus hiervoor gebruiken! Benoem dat we dit hebben laten zien voor waardes in het eerste kwadrant in de eenheidscirkel (daar heb je hoeken van $\leq 90°$), en dat we hebben afgesproken dat je dit ook mag gebruiken voor de andere kwadranten, waar de hoeken $> 90°$ zijn.*

*Maak samen met de leerlingen het rijtje af, dus maak de connectie tussen de middelpuntshoek en de sinus. Laat ze dit ook zelf op het werkblad doen.*

$$f\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sin(45°)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1 = \sin(90°)$$

$$f(\pi) = 0 = \sin(180°)$$

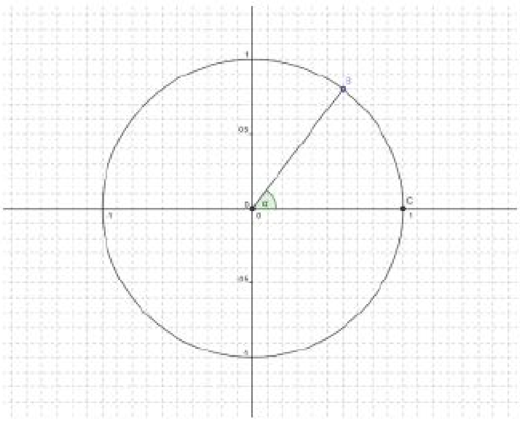
$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 = \sin(270°)$$

$$f(2\pi) = 0 = \sin(360°)$$

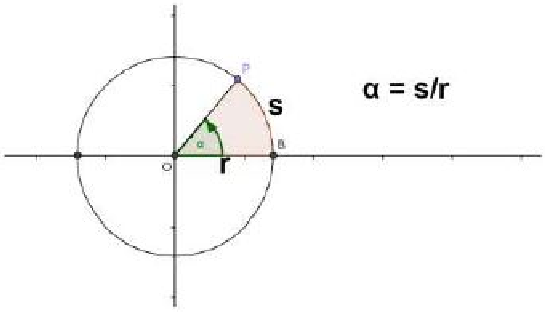
*Op deze manier zien de leerlingen dat we de functie waarvan ze de grafiek hebben getekend, vanaf nu definiëren als de sinus. Benadruk dus echt voor de leerlingen dat de sinus dus een functie is, die de hoogte van een bewegend punt beschrijft die de eenheidscirkel afgaat. Nu kunnen ze uit het rijtje samen met jou ook afleiden hoe je van f(x) naar* $\sin(\frac{180°x}{\pi})$ *gaat. Je kan hiervoor beginnen met het laatste voorbeeld uit het rijtje,* $f(2\pi) = 0 = \sin(360°)$. *Vraag hoe je van* $2\pi$ *naar 360° kan komen. Hierbij komen ze, met jouw hulp, hopelijk al snel op* $\times\ 180°$ *en dan nog delen door π (het kan natuurlijk ook* $\div\ 2\pi$ *en dan* $\times\ 360°$ *of een vergelijkbare volgorde). Doe dit voor met nog een voorbeeld, en kom dan samen op de conclusie dat dus* $f(x) = \sin(\frac{180°x}{\pi})$. *In dit proces maak je de leerlingen dus ook duidelijk dat π dan overeenkomt met 180°, dus dan weten leerlingen hoe ze hiermee kunnen rekenen.*

Vanaf nu gaan we dit ook als maat gebruiken om aan te geven hoe groot onze hoek is. Niet in graden, maar in **radialen.** De afkorting hiervan is **rad**, dat mag je ook in opgaven gebruiken. De grootte van een hoek in radialen is de verhouding tussen de booglengte die bij een middelpuntshoek van een cirkel past en de straal van deze cirkel. Maar hoe groot is de straal van de eenheidscirkel ook alweer?

*Met de leerlingen er op uit komen dat deze straal 1 is. Omdat deze straal 1 is, hangt de grootte van de hoek dus af van de booglengte die bij de hoek hoort. Daarom is de hoek bij een booglengte van* $\frac{1}{4}\pi$ *(bijvoorbeeld) dus* $\frac{1}{4}\pi$ *radialen. Radialen is dus een meting voor de middelpuntshoek bij een booglengte.*



*Laat het volgende plaatje zien aan de leerlingen (of teken het) en benoem dat dit als officiële definitie kan worden gebruikt voor de grootte van een hoek in radialen.*




*Neem het voorbeeld van de eenheidscirkel (dus r=1) en een booglengte van $\frac{1}{4}\pi\ (= s)$. Bereken hierbij samen met de leerlingen dat je dan krijgt $\alpha = \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{180°}{\pi} = 45°$. En dit klopt natuurlijk met wat we eerder hebben gezien.*

We gaan laten zien dat de grootte van een hoek in radialen afhangt van de straal van de cirkel door ook een voorbeeld te doen met een andere cirkel. We pakken nu een cirkel met straal 3, en nogmaals een booglengte van $\frac{1}{4}\pi$. Werk uit op je werkblad welke middelpuntshoek je dan krijgt.

*Begeleid je leerlingen hierbij, eventueel maak je hierbij weer een tekening of gebruik je GeoGebra. Nu krijg je $\alpha = \frac{\frac{1}{4}\pi}{3} = \frac{1}{12}\pi$. Omschrijven naar graden geeft $\alpha = \frac{1}{12}\pi \cdot \frac{180°}{\pi} = 15°$. Aangezien een cirkel 360° is, is dit dus 1/24 deel van de cirkel. De omtrek van deze cirkel is 6π (2πr met r=3). En $\frac{1}{4}\pi$ van 6π is ook 1/24 deel. Dit laat dus de leerlingen intuïtief zien dat de grootte van een hoek in radialen inderdaad de verhouding is tussen de booglengte die bij een middelpuntshoek van een cirkel past en de straal van deze cirkel.*

*Laat nu de leerlingen de volgende vragen beantwoorden (zelfstandig of in tweetallen) op het werkblad.*

- Vul in: $\frac{180°}{\pi} =$ ........ rad (antwoord: 1 rad)
- Hoeveel graden is $\frac{1}{8}\pi$ rad? (antwoord: 22,5°)
- Druk $\sin(450°)$ uit in radialen in plaats van graden (antwoord: $\sin(2\frac{1}{2}\pi)$)
- Druk 135° exact uit in radialen (antwoord: $\frac{3}{4}\pi$ rad)
- Druk $\frac{2}{3}\pi$ rad uit in graden (antwoord: 120°)
- Druk $\sin(\frac{5}{3}\pi)$ uit in graden in plaats van radialen (antwoord: $\sin(300°)$)

*Hierna is het goed om aan te geven dat je, zoals te zien was in de laatste vraag, je de hoeken in de sinusfunctie dus ook echt uit mag drukken in radialen. Bij $\sin(\frac{5}{3}\pi)$ is de hoek dus in radialen uitgedrukt, en bij $\sin(300°)$ is de hoek in graden uitgedrukt, maar het is dus dezelfde functie.*

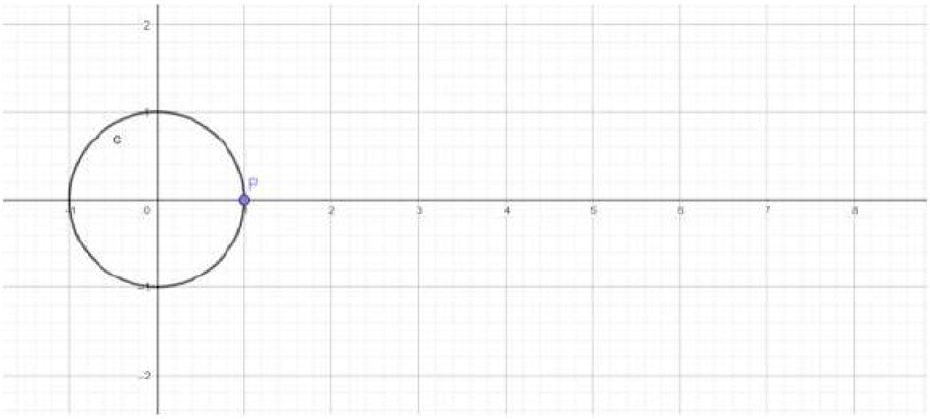
*Nu kan je even aandacht besteden aan wat er gebeurt als je iets negatiefs invoert in de sinus. Stel de vraag: wat nu als ik jullie vraag wat de waarde van* $\sin(-\frac{1}{2}\pi)$ *is? Kom samen in gesprek met de leerlingen neer op de conclusie dat je dan het punt P met de wijzers van de klok* ***mee*** *laat gaan, in plaats van tegen de wijzers van de klok in. Laat dit ook zien met behulp van de applet. Op deze manier zien ze ook weer de connectie met de grafiek van de sinusfunctie, en dat het daardoor omgekeerd is. Stel ook de vraag in welke kwadranten van het assenstelsel de sinus negatief is in de eenheidscirkel (3e en 4e kwadrant).*

*Laat de leerlingen nu zelf oefenen met wat opgaven op werkblad 2b. Alles wat ze deze les niet afkrijgen kunnen ze als huiswerk doen, of anders volgende les afmaken als je denkt dat dat past qua tijd.*

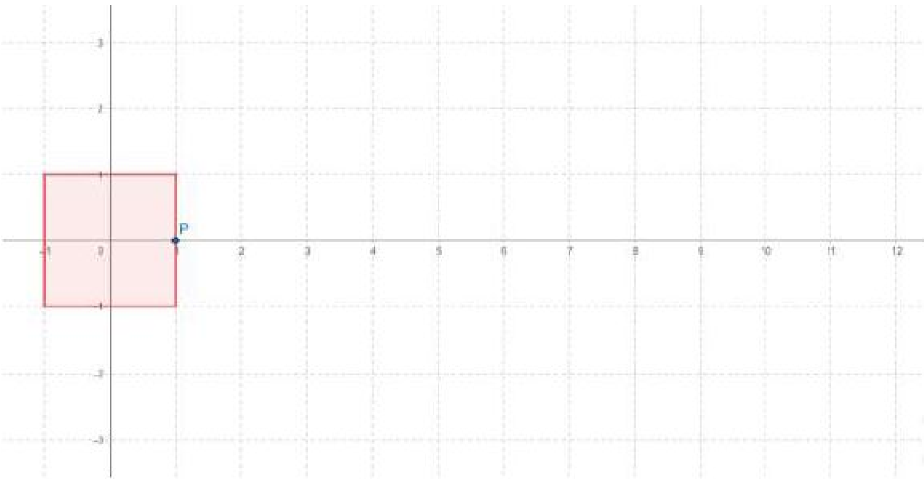
## Les 3

*Bespreek werkblad 2b, als de leerlingen deze niet hebben afgekregen vorige les. Dit helpt ook om de stof nog even te herhalen voordat je aan de nieuwe stof begint.*

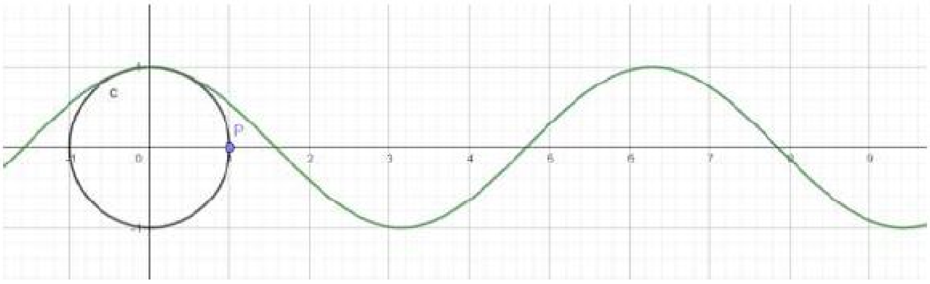
*Nu komt het punt om leerlingen ook in te laten zien wat de cosinus als functie doet, en wat dat te maken heeft met de eenheidscirkel. Geef de leerlingen onderstaand plaatje op een blad, en laat ze terugdenken aan hoe ze de baan tekenden van de verticale positie van punt P, terwijl P tegen de klok in over de eenheidscirkel bewoog. Geef ze nu de opdracht om dit voor de* ***horizontale positie van punt P, oftewel de x-waarde van punt P, te doen****. Begeleid ze hierbij, tot ze een soort vorm van de cosinus krijgen.*



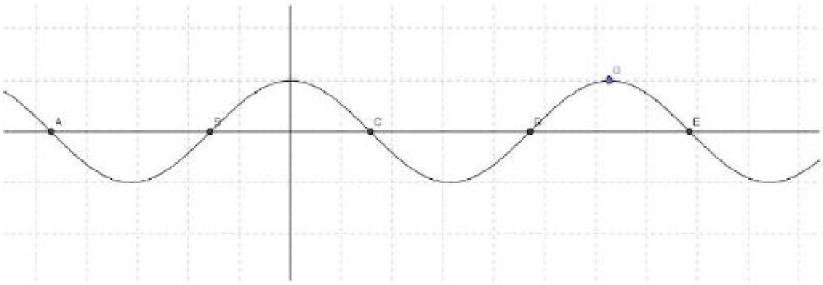

*Als dit lastig gaat, kan je ze eerst deze opdracht geven bij het vierkant met zijde 2 zoals ze ook bij de sinus deden.*




*Laat vervolgens de grafiek op het scherm zien en bespreek het met de klas.*




*Vervolgens geef je ze onderstaand figuur (deze hebben ze ook op het werkblad van deze les), en laat je ze opschrijven wat de coördinaten van alle punten op de grafiek in de eenheidscirkel zijn. Houd hierbij een tekening van de eenheidscirkel paraat, zodat ze de connectie kunnen maken tussen informatie uit de grafiek en informatie uit de eenheidscirkel.*

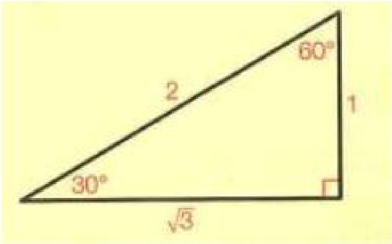



*Ga ook weer in op wat het gedeelte van de grafiek op de negatieve x-as betekent. Hoe kan je dit relateren aan de eenheidscirkel? Vermoedelijk gaan deze vragen redelijk goed omdat dit herkenbaar is vanuit de sinus-situatie. (Antwoorden:* A($-\frac{3}{2}\pi, 0$), B($-\frac{1}{2}\pi, 0$) C($\frac{1}{2}\pi, 0$), D($\frac{3}{2}\pi, 0$), E($\frac{5}{2}\pi, 0$), G($2\pi$, 1))

*Ga nu weer in op het verband tussen de booglengte en middelpuntshoek voor de eenheidscirkel. Nu is de bedoeling om een formule voor deze grafiek, die we g kunnen noemen, gaan vinden, uitgedrukt in x, oftewel de afgelegde afstand van punt P. We beweren nu dat er een hoek $\alpha$ bestaat zodat g(x)=cos($\alpha$). Laat de leerlingen zelf het werk doen op het werkblad om een formule voor g(x) te vinden. Als het goed is herkennen leerlingen dit als hetzelfde als bij de sinusfunctie (dus $\alpha = \frac{180° x}{\pi}$).*

*Nadat dit is gebeurd, kan je samen met de leerlingen op de conclusie komen dat we functie dus kunnen definiëren als de cosinusfunctie. Benoem dat waar de sinusfunctie de verticale positie (y-coördinaat) van het bewegende punt beschrijft, de cosinus dus de horizontale positie (x-coördinaat) beschrijft.*

*Zet nu de tekening hieronder op het bord, of projecteer het. Benoem dat ze dit kunnen herkennen uit het hoofdstuk over meetkunde van de 4e klas. Het figuur laat de verhoudingen zien van de zijden van een rechthoekige driehoek waarbij de scherpe hoeken 30° en 60° zijn.*



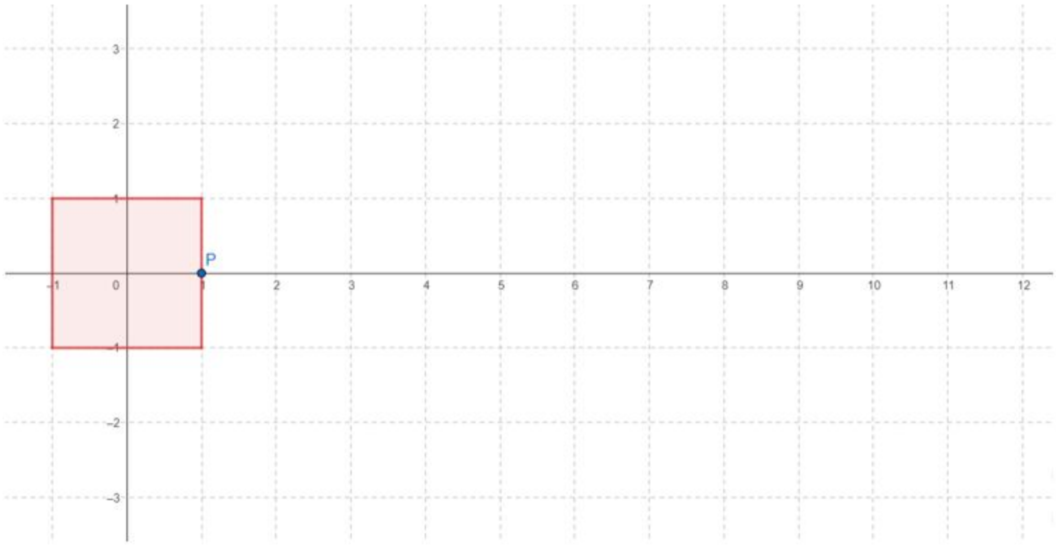

*Begeleid de leerlingen terwijl ze met deze tekening opgave 5 van het werkblad maken.*

*Geef ze vervolgens werkblad 3b om te oefenen (eventueel deels als huiswerk als ze het niet afkrijgen).*

## H2 Werkbladen

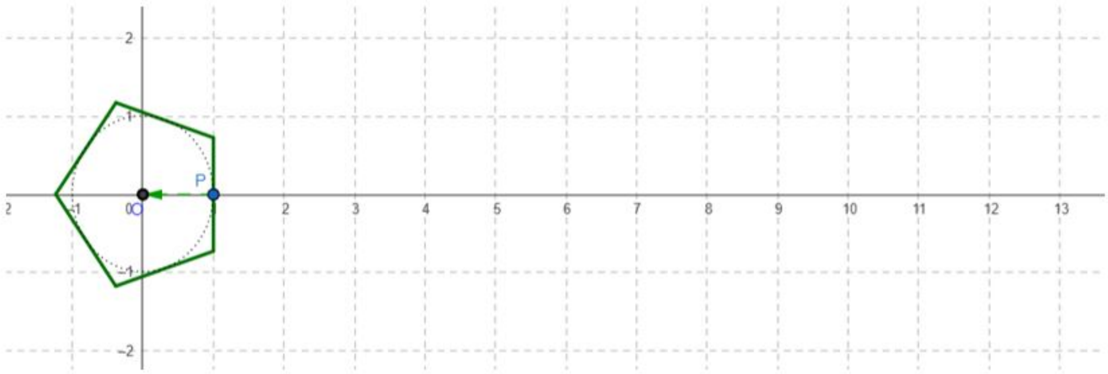
Werkblad 1a

1) a) Teken hieronder de grafiek waarin de verticale positie van het bewegende punt P uitgezet is tegen de afgelegde afstand langs de rand van de regelmatige vierhoek. De x-as stelt de afgelegde weg van het punt P voor en langs de y-as is de verticale positie (de y-coördinaat) van P tijdens de wandeling langs de rand van de vierhoek uitgezet.

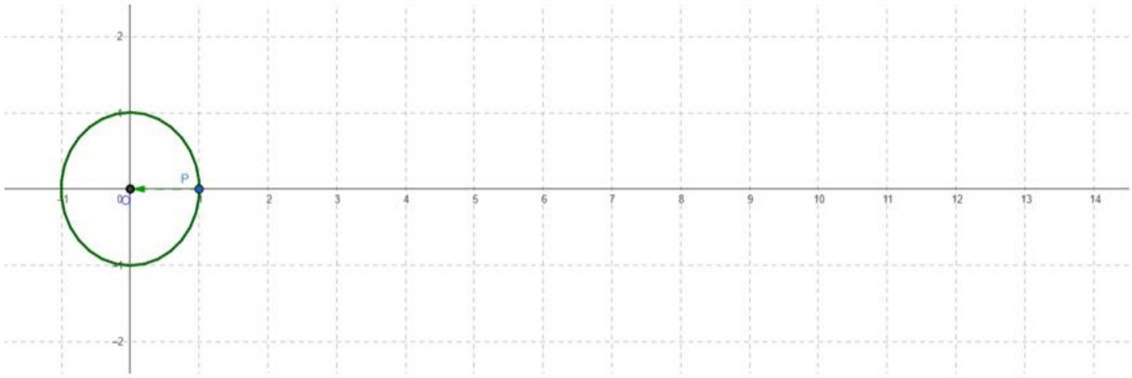



b) Zet ook de namen van de x-as en y-as erbij.

2) Teken hieronder weer de grafiek waarin de verticale positie van het bewegende punt P uitgezet is tegen de afgelegde afstand langs de rand van de regelmatige vijfhoek. De x-as stelt de afgelegde weg van het punt P voor en langs de y-as is de verticale positie (de y-coördinaat) van P tijdens de wandeling langs de rand van de vijfhoek uitgezet.



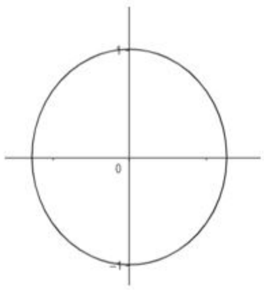
3) a) Hieronder staat een regelmatige dertighoek. Teken nogmaals de grafiek van de hoogte van punt P terwijl het tegen de wijzers van de klok in beweegt.




b) Waar lijkt de vorm van de regelmatige dertighoek op?

## Werkblad 1b

Vanaf nu noemen we de cirkel met straal 1, met het middelpunt in de oorsprong van het assenstelsel, de **eenheidscirkel.** Het deel van dit woord, **een**, slaat dus op het feit dat de straal van de cirkel gelijk is aan 1. Het is ook niet zo dat elke willekeurige cirkel met straal 1 de eenheidscirkel wordt genoemd, het gaat er ook om dat het middelpunt van deze cirkel op de oorsprong in het assenstelsel ligt.




1) Wat is de omtrek van de eenheidscirkel? Hoe weet je dit?

2) Teken hieronder de grafiek van punt P op de negatieve x-as, waar de x-as de afgelegde weg van het punt P voorstelt tegen de wijzers van de klok in, en de y-as stelt de y-coördinaat voor van bewegend punt P.


3) Wat is de periode van de grafiek?

4) a) Wat is de maximale hoogte van de grafiek?

b) Wat is de minimale hoogte van de grafiek?

c) Wat is dus het bereik?

## Werkblad 2a

**Booglengte** is de term die we gebruiken voor de afstand die punt P vanaf (1,0) heeft afgelegd als het over de figuur tegen de klok in beweegt. Het is dus letterlijk de **lengte** van de **boog** die we over zijn gewandeld.

1) Wat is de booglengte als je één keer de eenheidscirkel hebt bewandeld?

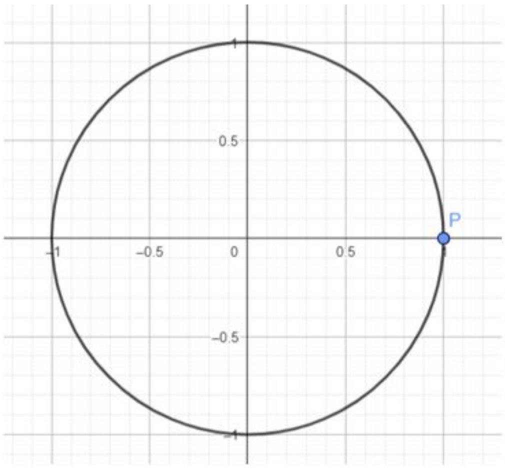
2) Wat zijn de coördinaten van P wanneer het over de eenheidscirkel heeft bewogen over een boog met lengte π? En met lengte $\frac{1}{2}\pi$?

Een **middelpuntshoek** van een cirkel is een hoek waarvan het hoekpunt op het middelpunt van de cirkel ligt. Bij de eenheidscirkel is dat dus de oorsprong.

3) Wat is de middelpuntshoek tussen de punten (1,0) en (0,1)? Bij welke booglengte hoorde dit ook alweer?

4) Wat is de middelpuntshoek tussen de punten (1,0) en (-1,0)? En bij welke booglengte hoort dit?

5) Wat zijn de coördinaten van P wanneer het over de eenheidscirkel heeft bewogen over een boog met lengte $\frac{3}{2}\pi$? Wat is de bijbehorende middelpuntshoek?




6) Geef in de eenheidscirkel hierboven het punt aan wat bij een booglengte van $\frac{1}{4}\pi$ hoort. Wat is de bijbehorende middelpuntshoek?

7) Je kan achter de coördinaten van het punt wat bij de booglengte van $\frac{1}{4}\pi$ hoort komen met behulp van de stelling van Pythagoras. Teken hiervoor eerst een driehoek, en laat zien hoe je achter de coördinaten van het punt bent gekomen.

8) Vul in wat er op de puntjes moet staan

$f\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sin(\ \dots\ )$

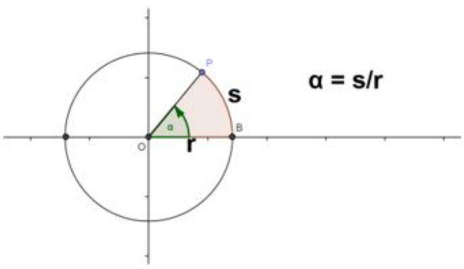
$f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1 = \sin(\ \dots\ )$

$f(\pi) = 0 = \sin(\ \dots\ )$

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 = \sin(\ \dots\ )$

$f(2\pi) = 0 = \sin(\ \dots\ )$

De grootte van een hoek in **radialen** is de verhouding tussen de booglengte die bij een middelpuntshoek van een cirkel past en de straal van deze cirkel. Het is een meting van de middelpuntshoek bij een booglengte. De afkorting van radiaal is **rad**. Bij een booglengte van 1 op de eenheidscirkel hoort een middelpuntshoek van 1 radiaal, bij een booglengte van 2 op de eenheidscirkel hoort een middelpuntshoek van 2 radiaal, enzovoorts.




$\alpha$ is de middelpuntshoek, s is de booglengte, en r is de straal.

9) Stel we pakken nu niet de eenheidscirkel, maar een cirkel met het middelpunt in de oorsprong en een straal van 3. Als we een booglengte van $\frac{1}{4}\pi$ hebben, welke middelpuntshoek $\alpha$ hoort daar dan bij, uitgedrukt in graden?

10) Vul in: $\frac{180°}{\pi}$ = ……. rad

11) Hoeveel graden is $\frac{1}{8}\pi$ rad?

12) Druk $\sin(450°)$ uit in radialen in plaats van graden

13) Druk 135° exact uit in radialen

14) Druk $\frac{2}{3}\pi$ rad uit in graden

15) Druk $\sin(\frac{5}{3}\pi)$ uit in graden in plaats van radialen

## Werkblad 2b

1) a) Voor welke waardes van $\alpha$, met $-2\pi \leq \alpha \leq 2\pi$, geldt $\sin(\alpha) = -1$?

   b) Wat heeft dit te maken met de periodiciteit van de sinusfunctie?

2) Leg uit in je eigen woorden waarom $f(x) = \sin(\frac{180°x}{\pi})$ waar is.

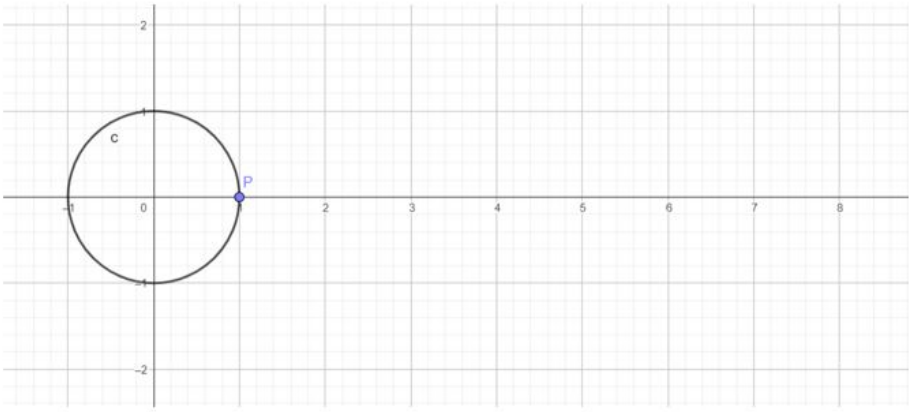
3) Hoe groot is de middelpuntshoek die bij een booglengte van $\pi$ op de eenheidscirkel hoort? Geef je antwoord zowel in graden als in radiaal.

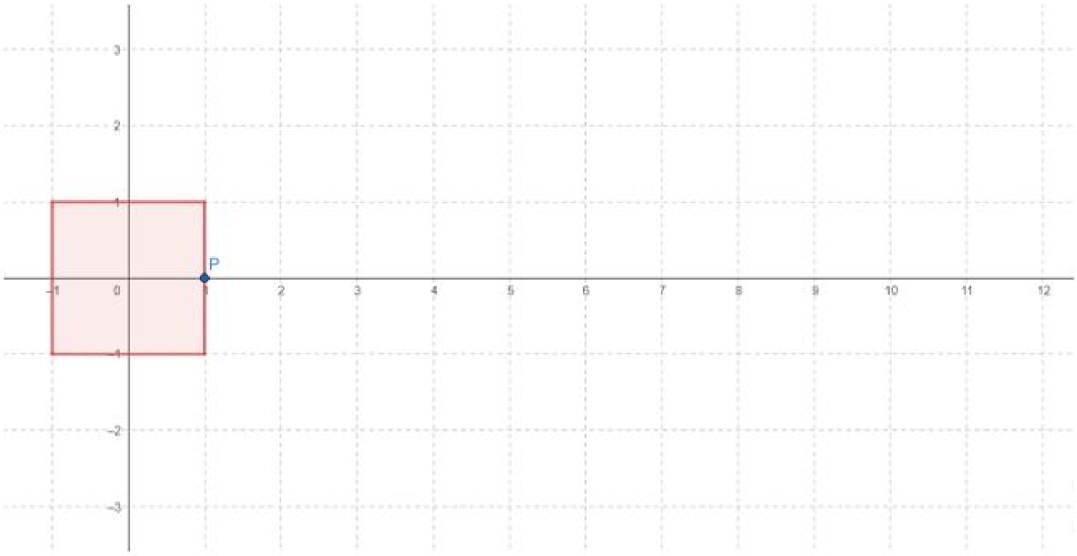
4) Gebruik bij deze 2 vragen geen rekenmachine en laat eventueel met een plaatje zien hoe je aan het antwoord gekomen bent.
   a) Bereken exact de sinuswaarde van $-\frac{3}{2}\pi$

   b) Gegeven is dat $\sin(30°) = \frac{1}{2}$. Hoe kan je dan aan $\sin(150°)$ komen?

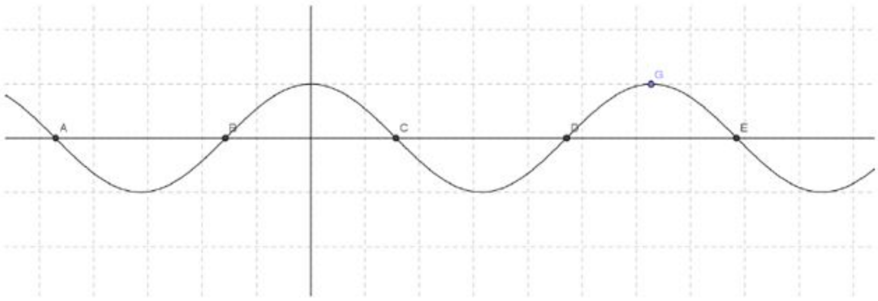
Werkblad 3a

1) Teken hieronder de grafiek waarin de **horizontale** positie van het bewegende punt P, oftewel de x-coördinaat, uitgezet wordt tegen de afgelegde afstand langs de rand van de eenheidscirkel. De x-as stelt de afgelegde weg van het punt P voor en langs de y-as is de horizontale positie (de x-coördinaat) van P tijdens de wandeling langs de rand van de eenheidscirkel uitgezet. Als je hier moeite mee hebt, probeer dit dan eerst met de figuur op de volgende bladzijde, met het vierkant, te doen.



2) Hieronder staat de grafiek g waarin de horizontale positie van een bewegend punt langs de rand van de eenheidscirkel, beginnend in punt (1, 0), uitgezet is tegen de afgelegde afstand. Schrijf de coördinaten op van A, B, C, D, E, G.

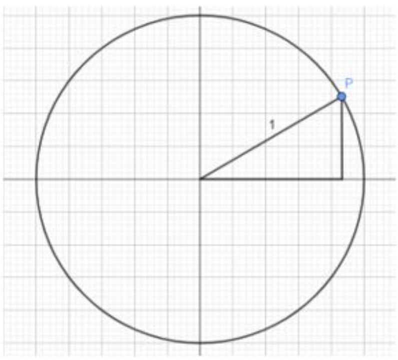



3) Denk weer terug aan de vorige les, waar we een verband tussen booglengte en middelpuntshoek voor de eenheidscirkel hadden gevonden. Toen vonden we dat voor elke *x* (afgelegde afstand) er een hoek α bestaat zodat $f(x) = \sin(\alpha)$. Nu beweren we dat dit ook kan voor de functie $g$ hierboven zodat $g(x) = \cos(\alpha)$. Herhaal het werk dat we voor de sinus gedaan hebben om nu een wiskundige formule voor *g*(*x*) te vinden.

4) Hoe kun je de cosinuswaarde van een gegeven hoek bepalen via de eenheidscirkel?

5) De tekening hieronder kan je herkennen uit het hoofdstuk over meetkunde van de 4e klas. Het geeft de verhoudingen van de zijden van een rechthoekige driehoek aan waarbij de scherpe hoeken 30° en 60° zijn.


a) Als je deze driehoek schaalt zodat de schuine zijde gelijk wordt aan 1, kan je het in de eenheidscirkel plaatsen, zoals hieronder is gedaan. Geef de waardes voor alle zijden en hoeken aan van deze driehoek.




b) Bereken nu met deze informatie wat cos(30°) is, en vervolgens ook $\sin(30°)$.

Werkblad 3b

1) Wat is het domein en bereik van de cosinusfunctie?

2) Wat is de periode van de cosinusfunctie? Waarom?

3) Reken exact uit: $\cos(\frac{1}{2}\pi)$

4) Reken exact uit: $\cos(-\pi)$

5) Reken exact uit: $\cos(45°)$

6) Je hebt nu voldoende kennis opgedaan om de volgende tabel in te kunnen vullen. Vul deze tabel volledig in, en geef overal kort aan hoe je aan dit antwoord komt, indien nodig met tekeningen. Gebruik hiervoor de ruimte op de rest van dit blaadje.

| **Hoek in graden** | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| **Hoek in radialen** | | | | | |
| **Sinus** | | | | | |
| **Cosinus** | | | | | |

# Bijlage I - Toetsscores

## I1 Toetsscores RRR groep

| | | Leerling A | Leerling B | Leerling C | Leerling D | Leerling E | Leerling F | Leerling G | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Vraag | Te behalen punten | | | | | | | | Gemiddelde #behaalde punten |
| **1** | **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | **1** | 0,5 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0,5 | 0,5 | 0,64 |
| | **1** | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0,71 |
| **2a** | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0,43 |
| | **1** | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0,5 | 1 | 0,50 |
| **2b** | **1** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0,29 |
| | **1** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0,29 |
| | **1** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0,29 |
| **3a** | **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,5 | 1 | 1 | 0,93 |
| **3b** | **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1,00 |
| **3c** | **1** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,86 |
| **3d** | **1** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,86 |
| **4** | **1** | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,86 |
| | **1** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,71 |
| **5a** | **1** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0,14 |
| | **1** | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0,43 |
| **5b** | **1** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0,57 |
| | **1** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0,43 |
| **6a** | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0,14 |
| | **1** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0,57 |
| **6b** | **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1,00 |
| | **1** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,86 |
| **6c** | **1** | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,86 |
| **6d** | **1** | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0,86 |
| | | | | | | | | | |
| Totaal aantal punten | 24 | 9,5 | 8 | 16 | 18 | 21,5 | 19 | 14,5 | 15,21 |
| Percentage | 100% | 40% | 33% | 67% | 75% | 90% | 79% | 60% | 63% |
| Punten instrumenteel begrip | 7 | 5 | 5 | 5 | 4 | 7 | 7 | 7 | 5,71 |
| Percentage instrumenteel begri | 100% | 71,43% | 71,43% | 71,43% | 57,14% | 100,00% | 100,00% | 100,00% | 82% |
| Punten relationeel begrip | 17 | 4,5 | 3 | 11 | 14 | 14,5 | 12 | 7,5 | 9,5 |
| Percentage relationeel begrip | 100% | 26% | 18% | 65% | 82% | 85% | 71% | 44% | 56% |

## I2 Toetsscores IRRR groep

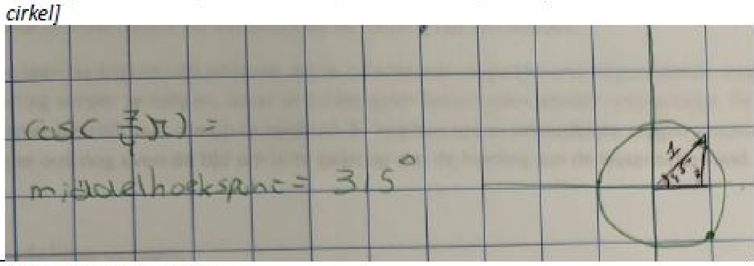
| | | Leerling A | Leerling B | Leerling C | Leerling D | Leerling E | Leerling F | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Vraag | Te behalen punten | | | | | | | | Gemiddeld #behaalde punten |
| **1** | **1** | 1 | 1 | 0,5 | 0,5 | 1 | 1 | | 0,83 |
| | **1** | 1 | 1 | 0,5 | 0 | 0 | 0 | | 0,42 |
| | **1** | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | | 0,67 |
| **2a** | **1** | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | | 0,50 |
| | **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1,00 |
| **2b** | **1** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0,17 |
| | **1** | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | | 0,50 |
| | **1** | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | | 0,50 |
| **3a** | **1** | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | | 0,50 |
| **3b** | **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | | 0,83 |
| **3c** | **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | | 0,67 |
| **3d** | **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | | 0,67 |
| **4** | **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1,00 |
| | **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1,00 |
| **5a** | **1** | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | | 0,33 |
| | **1** | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | | 0,33 |
| **5b** | **1** | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | | 0,50 |
| | **1** | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | | 0,50 |
| **6a** | **1** | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | | 0,50 |
| | **1** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0,17 |
| **6b** | **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1,00 |
| | **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | | 0,83 |
| **6c** | **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | | 0,67 |
| **6d** | **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | | 0,67 |
| | | | | | | | | | |
| Totaal aantal punten | 24 | 15 | 23 | 20 | 16,5 | 8 | 6 | | 14,75 |
| Percentage | 100% | 63% | 96% | 83% | 69% | 33% | 25% | | 61% |
| Punten instrumenteel begrip | 7 | 6 | 7 | 6,5 | 5,5 | 4 | 2 | | 5,166666667 |
| Percentage instrumenteel begr | 100% | 85,71% | 100,00% | 92,86% | 78,57% | 57,14% | 28,57% | | 74% |
| Punten relationeel begrip | 17 | 9 | 16 | 13,5 | 11 | 4 | 4 | | 9,583333333 |
| Percentage relationeel begrip | 100% | 53% | 94% | 79% | 65% | 24% | 24% | | 56% |

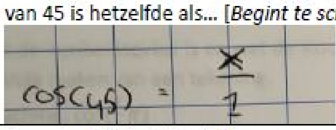
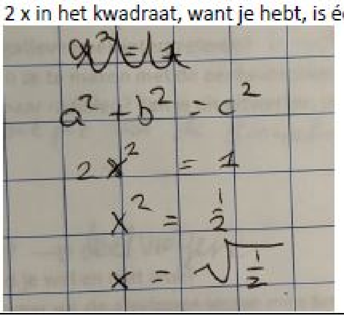
## Bijlage J - Transcripties interviews

### J1 Transcriptie interview leerling 1 RRR groep

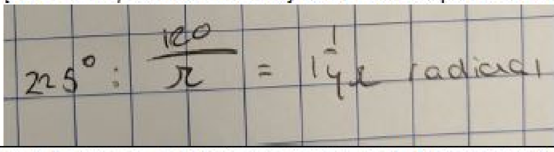
Transcriptie interview leerling 1 – 22 september

| | |
|---|---|
| *Interviewer* | Oké, nou, en dan gaan we beginnen. Ik heb eerst een paar vragen voor je over hoe je het vond. Kan je eerst zeggen, in het algemeen, wat vond je van de lessenserie? |
| *Leerling* | Ehm, ja, wel interessant. Eh, ja ik snapte het ook wel goed denk ik, want het was ook wel op een makkelijkere manier uitgelegd dan normaal met wiskunde. Dus ik kon het wel beter begrijpen. |
| *Interviewer* | Wat vond je er dan makkelijker aan? |
| *Leerling* | Zeg maar, het was zeg maar stap voor stap uitgelegd en dan kan ik dat beter opnemen dan, want normaal is het 'jullie zijn vwo dat kan je zelf ook wel'... ja |
| *Interviewer* | Oké, nou dat is goed om te horen. Eh, wat vond je van de hoeveelheid stof? |
| *Leerling* | Viel wel mee. |
| *Interviewer* | Ja? |
| *Leerling* | Ja was gewoon prima. |
| *Interviewer* | En had je meer of minder, eh, oefenen gewild of was het juist wel goed zo? |
| *Leerling* | Was wel goed zo. |
| *Interviewer* | Oké, nou dat is goed om te horen. Eh, had je ook delen van de les waarvan je dacht 'oh dat vind ik niet zo leuk'? |
| *Leerling* | Nee, was wel prima. Maar er waren ook, zeg maar, voldoende opdrachten om het helemaal te begrijpen en in de les af te maken zodat je thuis niet heel veel hoefde te doen. |
| *Interviewer* | Ja, ja dat snap ik, dat is ook fijn dat je thuis niet meer heel veel huiswerk hoeft te maken.<br>Ja, je zegt dus ook dat je wel snapt waar je mee bezig bent, eh, geweest. Nou, dat is wel goed, ehm, dan gaan we gewoon even nog een paar soortgelijke vragen, of dezelfde vragen, van de toets, dat je gewoon nog, dat ik nog iets beter kan horen wat je echt denkt. Eh, dus kan je weer uitleggen wat de eenheidscirkel is en wat de sinus en de cosinus hiermee te maken hebben. Je mag altijd iets tekenen als je wilt. *[Geeft een pen aan en legt die op het ruitjespapier neer wat tussen de interviewer en de leerling ligt.]* |
| *Leerling* | Eh, ja zeg maar de eenheidscirkel is een cirkel met een straal van één, die, zeg maar, het middelpunt op de oorsprong ligt, dus nul komma nul. En de cosinus is zeg maar de x, als je dat berekent is dat dan de x en de sinus is dan de y. |
| *Interviewer* | En de x en de y van wat? |
| *Leerling* | Van de cirkel. [*Tekent met de vingers een cirkel in de lucht en wijst een punt er op aan.]* De coördinaten x en y. |
| *Interviewer* | Van de hele cirkel? |
| *Leerling* | Ja de driehoek die dan er in zit. |
| *Interviewer* | Ja en, eh, die driehoek die dan wordt dus gevormd door welke punten? |
| *Leerling* | De... ja, zeg maar de buig... lijn, punt [*tekent met vingers driehoek in de lucht en een cirkel eromheen*], dat je bijvoorbeeld hebt, zeg maar twee vierde pi ofzo en dan kan je dat zo... ja |
| *Interviewer* | Ja en de coördinaten dat slaat dan dus op een punt op de cirkel? |
| *Leerling* | Ja |
| *Interviewer* | Dus niet de cirkel zelf maar dan een punt van de cirkel? |
| *Leerling* | Ja |
| *Interviewer* | Ja, Oké. Ehm, Oké, wil je, eh, eens proberen voor mij uit te rekenen zonder rekenmachine, de cosinus van zeven vierde pi. Dus dan kan je even opschrijven natuurlijk, dan kan je tekeningetjes maken, je kan er hardop wat bij zeggen. |
| *Leerling* | *[Begint te schrijven]* De cosinus van? |
| *Interviewer* | Zeven vierde pi. |

| | |
|---|---|
| *Leerling* | Ohja, wacht. [*Schrijft op:* cos $(\frac{7}{4}\pi)$] Eh, dat is hetzelfde als... hmmm, één en drie kwart pi, dus... |
| *Interviewer* | En waarom? |
| *Leerling* | Ja want de vier past er één keer in en dan nog drie over en dan drie delen van vier is driekwart. |
| *Interviewer* | Ja. |
| *Leerling* | Ehm....eh, ik ben het vergeten eigenlijk. |
| *Interviewer* | Je mag ook een tekeningetje erbij maken. |
| *Leerling* | Was dat niet zeg maar, aanliggend gedeeld door schuin?... Ja, ik weet het niet meer, aanliggend is dan... één? Nee want het was, die driehoek had een verhouding, twee?... |
| *Interviewer* | Misschien, probeer het maar te tekenen, want ik denk dat dat makkelijker is. Waar op de cirkel ligt dat punt? |
| *Leerling* | Ja. [*Begint te tekenen]* Hmm, hier ongeveer. [*Zie de groene punt rechtsonder in de cirkel]*  |
| *Interviewer* | Ja, ongeveer inderdaad. |
| *Leerling* | Ja, daar, en dan heb je, ehm, driehonderd, nee dat klopt niet. 315 graden? |
| *Interviewer* | Ja, je wilt de hoek weten inderdaad. |
| *Leerling* | Ja 315 graden, ehm, en dan weet ik niet hoe ik verder moet gaan. Want je hebt dan wel dat middelhoekspunt, toch? |
| *Interviewer* | Hmhm |
| *Leerling* | 315 graden, en dan weet ik niet meer hoe ik verder moet gaan. |
| *Interviewer* | Ja, want we hebben niet geleerd hoe die van 315 graden is he? Maar zou je het dan, ehm, op een andere manier, zeg maar, kunnen omzetten naar een ander punt? Dus bijvoorbeeld, ehm, we weten bijvoorbeeld dat de hoogte op dit punt gelijk is als die. [*Wijst naar een ander punt op de cirkel]* Maar dat is niet hetzelfde als de verticale positie, maar de x-coördinaat. Maar kan je zien waaraan dit punt gelijk is, van wat je wilt weten? |
| *Leerling* | ... |
| *Interviewer* | Want de cosinus, vraagt dat om een x- of y-coördinaat? |
| *Leerling* | X |
| *Interviewer* | Ja, Oké, dus je moet het x-coördinaat, eh, op dit punt zo hebben. [*Wijst naar het punt op de cirkel wat de leerling had geteken]*. Is er nog een ander punt waar dat zo is? |
| *Leerling* | Daar. [*Wijst naar een ander punt op de cirkel in het derde kwadrant]* |
| *Interviewer* | En waarom? |
| *Leerling* | Omdat het dan zegmaar op precies dezelfde punt zit, maar dan gespiegeld aan de andere kant. |
| *Interviewer* | Ja. Maar wordt x dan niet negatief? |
| *Leerling* | Ooh, jaa, dan daar. [*Wijst naar een punt op de cirkel in het eerste kwadrant]* |
| *Interviewer* | Precies. Oké dus je weet dat het dus dezelfde waarde gaat geven als daar. [*Wijst naar het oorspronkelijke punt op de cirkel]* Kan je die berekenen? |

| | |
|---|---|
| *Leerling* | Hmm, als je hier weer die driehoek maakt toch? En dat was, zo. [*Tekent de driehoek]* Ongeveer. En dan had je hier 90 graden, en dan daar 30 en daar 60. |
| *Interviewer* | En waarom 30 en 60? |
| *Leerling* | Omdat je dat je standaard hoek was, zeg maar. In de driehoek. |
| *Interviewer* | Ja, maar die hoort dus bij 30 graden. En je zei net op dit punt dat dat op de helft van hier en hier lag. [*Wijst de punten (1,0) en (0,1) aan op de getekende cirkel]* |
| *Leerling* | Dus het is 45 graden. |
| *Interviewer* | Ja, heel goed. |
| *Leerling* | Ja, en dan is deze kant één, want de straal is ook één. |
| *Interviewer* | Ja |
| *Leerling* | En dan, kan je dat, wacht. Aanliggend gedeeld door schuine dus, nul. Dus de cosinus van 45 is hetzelfde als... [*Begint te schrijven]* Nee maar dat kan ook niet.<br> |
| *Interviewer* | Nee want die heb je niet he. |
| *Leerling* | X gedeeld door één. |
| *Interviewer* | Oké en hoe kom je achter die x? |
| *Leerling* | ... hmm. Ik had kruiselings vermenigvuldigt maar ik denk niet dat dat mag. |
| *Interviewer* | Ehm nou ja dan krijg je nog steeds, x is cosinus van 45 graden en dat klopt, maar die waarde van x wil je juist weten. En inderdaad die cosinus van 45 graden kan je met de rekenmachine uitrekenen maar ik wil het nu exact. Maar wat weet je van die laatste hoek? [*Wijst naar de driehoek]* |
| *Leerling* | ... |
| *Interviewer* | Als deze 90, en die 45 graden is. |
| *Leerling* | Dan is die andere hoek ook 45 graden. |
| *Interviewer* | Ja, en wat weet je van gelijkbenige driehoeken? |
| *Leerling* | Oh, die zijn gelijk aan elke kant. Oh, dus dan is die ook gewoon hetzelfde. [*Wijst naar de derde hoek in de driehoek]* |
| *Interviewer* | Ja dus je weet, dit is allebei dus even lang. Dus allebei x. |
| *Leerling* | Dus x kwadraat is gelijk aan, even kijken hoor, x kwadraat is gelijk aan één. [*Begint te schrijven]* |
| *Interviewer* | En waarom? |
| *Leerling* | Pythagoras, toch? |
| *Interviewer* | Ja dus kan je Pythagoras misschien wat groter uitschrijven? |
| *Leerling* | Ja. [*Schrijft verder]* a kwadraat plus b kwadraat is c kwadraat. Dus x in het kwadraat, 2 x in het kwadraat, want je hebt, is één.<br> |
| *Interviewer* | Ja |
| *Leerling* | En dan, x in het kwadraat is een half. X is wortel van een half. |

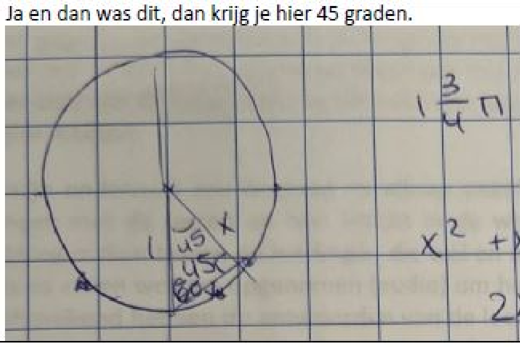
| | |
|---|---|
| *Interviewer* | Ja, nou en dat is dan dus je antwoord? |
| *Leerling* | Ja |
| *Interviewer* | Ja, dus heb je dan inderdaad heel goed die stappen, af en toe natuurlijk moest ik een beetje helpen, maar, ehm, fijn dat je dat zo kan zien. En inderdaad, wat je ook al zei, dat kan je dus daarna ook als het niet exact is uitrekenen. [*Verwijzing naar iets wat deze leerling in de les vroeg*] |
| *Leerling* | Ja. |
| *Interviewer* | Oké, ehm, dan een vraagje, hoe kan je de sinus van een negatieve hoek interpreteren? Wat betekent dat? |
| *Leerling* | Dat ie, zeg maar, met de klok mee gaat. [*Geeft met de vingers in de lucht aan welke kant dat op is]* |
| *Interviewer* | Ja, en in welke kwadranten is ie dan negatief? |
| *Leerling* | Vier en drie. |
| *Interviewer* | Ja, omdat? |
| *Leerling* | Omdat je zeg maar, dan is de y ook in de min, en de sinus hoort bij de y. |
| *Interviewer* | Ja, heel goed, netjes. Ehm, oké, kan je uitleggen wat radialen zijn? Brede vraag misschien, maar vertel maar wat je weet over radialen. |
| *Leerling* | Eh ja één radiaal staat gelijk aan 180 graden. |
| *Interviewer* | Bijna |
| *Leerling* | 180 graden gedeeld door pi. |
| *Interviewer* | Ja, heel goed. |
| *Leerling* | Ehm, ik weet eigenlijk niet heel goed hoe ik dat moet uitleggen... |
| *Interviewer* | Wat doe je met radialen? In de eenheidscirkel bijvoorbeeld, wat betekent het daar? |
| *Leerling* | Zeg maar hoe ver je hebt [*tekent met vingers een boog in de lucht*], de cirkel hebt verlopen. Of niet? |
| *Interviewer* | Ja dat is de booglengte, dat lijkt er wel een beetje op, maar wat weet je, in de eenheidscirkel, wat is er zo speciaal aan de eenheidscirkel? |
| *Leerling* | Dat de straal altijd één is. |
| *Interviewer* | Ja, en kijk radialen die geven aan de verhouding tussen die, inderdaad die booglengte wat je zei en de straal. En omdat die straal één is... |
| *Leerling* | Is het gelijk aan die booglengte. |
| *Interviewer* | Ja en wat meet een radiaal dus, want het is gelijk aan de booglengte |
| *Leerling* | De omtrek? |
| *Interviewer* | Niet helemaal, je zei het net ook al een keertje |
| *Leerling* | Ehm... [*stilte*]. Zeg maar hoever die, het punt, is verplaatst. |
| *Interviewer* | Ja je zit heel dichtbij. |
| *Leerling* | *[Stilte, lacht]* |
| *Interviewer* | Ja wat ik nog wilde horen is de middelpuntshoek. |
| *Leerling* | Ohja. |
| *Interviewer* | Ja want het is een andere manier om een hoek te meten. Want dat hebben we inderdaad in graden gedaan, eh, en dat kan dus ook in radialen. Kun je ook, eh, weet je ook hoe je graden moet omrekenen naar radialen? |
| *Leerling* | Ja, zeg maar, als je de graden hebt dan moet je gedeeld door 180 gedeeld door pi en dan heb je de radialen en als je van radialen naar graden moet je keer 180 gedeeld door pi doen. |
| *Interviewer* | Kan je het voordoen voor 225 graden? |
| *Leerling* | *[Begint te schrijven]* 225 graden gedeeld door 180 gedeeld door pi is hetzelfde als.. Dat weet ik niet uit mijn hoofd. Ik denk 0,75, nee. Mag ik even de rekenmachine pakken? |
| *Interviewer* | Ja dat mag even met de rekenmachine. Ja |

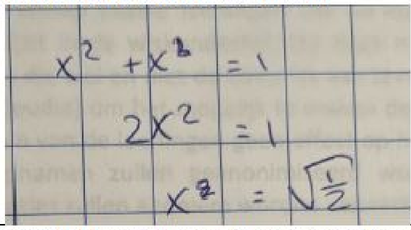
| | |
|---|---|
| *Leerling* | *[Lacht en pakt de rekenmachine]* |
| *Leerling* | *[Tikt het in op de rekenmachine]* Één één vierde pi. Als radiaal.   |
| *Interviewer* | Oké, heel mooi. Ja één één vierde pi radiaal, dat is wat ik wilde horen. Oke, dan heb ik nog een laatste vraag. Wat is de input en output van de sinus functie, hoe zou je dat kunnen beschrijven? |
| *Leerling* | Ja die had ik op de toets ook niet helemaal goed denk ik, maar ik dacht omdat je zegmaar, met zo'n cirkel, als je zegmaar wilt berekenen met zo overstaand gedeeld door schuin enzo, dat je dan altijd deelt door één, omdat die straal één is. Dus wat je er in doet krijg je er ook uit. |
| *Interviewer* | Ehm, ja dat snap ik inderdaad, hoe je de sinus in de driehoek gebruikt daardoor, maar de sinus als functie. Dus we hadden hem getekend... |
| *Leerling* | Oooh, ja! |
| *Interviewer* | Ja dan heb je die x- en die y-as, wat zijn die x en die y? |
| *Leerling* | Ehm, zegmaar de verplaatsing van punt P dat over de cirkel is, bijvoorbeeld als je naar boven gaat, als je voor de x dat wil invoeren, dan moet je bij de y beginnen, zeg maar bij het topje [*wijst in de lucht naar een punt bij de y-as]*. Als je dat voor de y wilt doen dan begin je daar in het midden [*wijst naar de oorsprong*]. En dan moet je zo verder tekenen [*maakt met de vinger een sinus beweging in de lucht*]. |
| *Interviewer* | Ja, dus wat staat er op de x- en de y-as als je het in een grafiek zou zetten en je moet de x- en de y-as labelen, wat zou je dan neerzetten? |
| *Leerling* | De horizontale en de verticale verplaatsing van P. |
| *Interviewer* | En wat is dan welke? |
| *Leerling* | De verticale verplaatsing hoort bij de cosinus, en, nee nee, de horizontale hoort bij de cosinus en de verticale hoort bij de sinus. |
| *Interviewer* | Ja dat is wat je er uit krijgt inderdaad, dat staat dan op de y-as, en dat is dus afhankelijk van waar op de cirkel je bent. Dus dat is die afstand die je hebt afgelegd, dat staat dan op de x-as. |
| *Leerling* | Ja |
| *Interviewer* | Ja, oké, maar inderdaad ik was al benieuwd hoe mensen dit zouden interpreteren. Maar je had helemaal gelijk hoor, dat het zo voor die sinus in die driehoek werkt, en daarom krijg je dan dat die gelijk is daaraan [*verwijst naar wat de leerling op haar toets had geschreven*]. Eh, maar dit is dus hoe het werkt met de grafiek.<br>Maar heel fijn, dit is eigenlijk alle informatie die ik wilde. Zal ik deze even stopzetten. **[Einde opname]** |

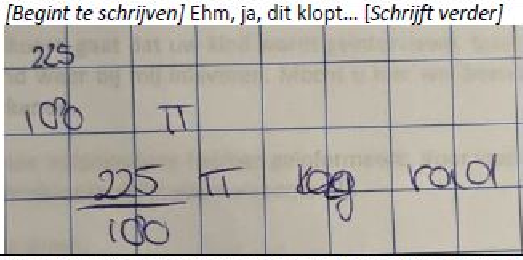
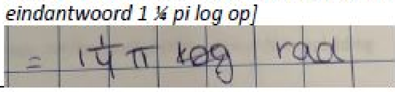
## J2 Transcriptie interview leerling 2 RRR groep

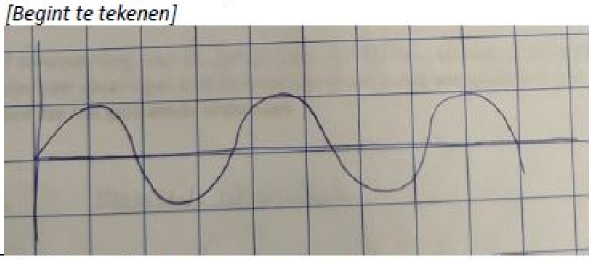
Transcriptie interview leerling 2 – 22 september

| | |
|---|---|
| *Interviewer* | Precies, dan kunnen we beginnen. Oké, ehm, nou eerst even algemene vragen: wat vond je van de lessen. |
| *Leerling* | Ja ik vond het wel anders dan normale lessen eigenlijk. |
| *Interviewer* | Ja hè. |
| *Leerling* | Ja het komt denk ik ook wel door het onderwerp. |
| *Interviewer* | Precies. |
| *Leerling* | Dat vond ik ook anders, maar, ja... |
| *Interviewer* | En anders als in, minder leuk of leuker? |
| *Leerling* | Ja ik vond het moeilijker eigenlijk dan normaal, normaal gesproken snap ik wiskunde wel maar dit is meer, ik weet niet, ja, ik vond het wel moeilijker, maar ja. |
| *Interviewer* | Kun je uitleggen waar het aan ligt, zegmaar wat was dan zo anders hoe het werd uitgelegd? |
| *Leerling* | Ja, ik weet niet of de uitleg heel anders was, maar gewoon het onderwerp, met, zegmaar met de cirkel enzo en dat je dat allemaal echt in moest beelden voordat je het snapte. |
| *Interviewer* | Ja heel visueel, dat gedeelte, dus dat vond je minder fijn eigenlijk? |
| *Leerling* | [*lacht*] Ja eigenlijk wel ja. |
| *Interviewer* | Dat mag je gewoon zeggen hoor, ja, absoluut. Ehm, en heb je wel het idee dat je er wat van leerde? |
| *Leerling* | Ja, ja dat wel. |
| *Interviewer* | Oké. |
| *Leerling* | Ja. |
| *Interviewer* | Eh, ja, voor de hoeveelheid stof, hoe vond je dat? Was het te veel of te weinig? Voor het aantal lessen wat we hadden dan. |
| *Leerling* | Eh, ja ik vond het wel prima, het was wel te doen ja. |
| *Interviewer* | En de oefenstof, hoeveel je daarvan had, was dat goed, of te veel of te weinig? |
| *Leerling* | Ja dat was ook wel goed, omdat je alles kon behandelen zegmaar. |
| *Interviewer* | Ja, oké, dat is mooi. Ehm, had je ook delen van de les waarvan je dacht 'oh dit vond ik echt niet leuk'? of niet handig of...? |
| *Leerling* | Nee. |
| *Interviewer* | En nog iets uitgesprongen wat je nou juist wel heel leuk of handig vond? Of ook niet echt? |
| *Leerling* | Uh... weet eigenlijk niet. Ja, ik heb geen idee eigenlijk. |
| *Interviewer* | [*lacht*]Nou ja als je zo niks kan bedenken dan is dat ook een antwoord he, dat is dus gewoon een beetje hetzelfde. |
| *Leerling* | Ja. |
| *Interviewer* | Oké, dat is prima. Ehm, en heb je nu een beetje het gevoel dat je, ook na dit toetsje, ook een beetje snapt wat we hebben gedaan? |
| *Leerling* | Ja, dat opzich wel. |
| *Interviewer* | Oké, ja, nou dan gaan we ook even kijken, dan ga ik een paar dezelfde vragen stellen als op de toets hoor. Ehm, dus om even te beginnen, kan je uitleggen wat de eenheidscirkel is en wat het met de sinus en cosinus te maken heeft. En je mag erbij tekenen als je wilt. |
| *Leerling* | Ja, het begint in de oorsprong, het middelpunt, en heeft straal 1. En die cosinus had te maken met de x-coördinaten en de afgelegde afstand, volgens mij. En die sinus had te maken met de y-coördinaten volgens mij. |
| *Interviewer* | En de coördinaten van? |
| *Leerling* | Van de cirkel. |
| *Interviewer* | Oké, van de cirkel zelf, of van punten op de cirkel? |

| | |
|---|---|
| *Leerling* | Ja van een punt P op de cirkel. |
| *Interviewer* | Ja precies, waar die dan ook ligt. |
| *Leerling* | Ja dat heeft dan met de locatie er op te maken. |
| *Interviewer* | Oké, ehm, nou, dan gaan we even kijken of je exact kan uitrekenen, dus zonder rekenmachine, en dan mag je gewoon van alles bij schrijven, tekenen, de cosinus van zeven vierde pi. |
| *Leerling* | Oké. |
| *Interviewer* | Ja, even kijken hoe je die stapjes doet. |
| *Leerling* | Moet ik dat gewoon hier opschrijven? [*Wijst naar het lege ruitjesblaadje op de tafel]* |
| *Interviewer* | Ja, en je mag hardop erbij praten, wat je denkt, waarom je iets opschrijft, hoe zou je het aanpakken? Dus de cosinus van zeven vierde pi |
| *Leerling* | Ja, ehm. Ik had volgens mij, ja toen had ik dus een cirkel getekend. [*Begint te tekenen]*<br>Zeven vierde pi, dat zit, hier, één twee derde, nee, één... één... wacht even hoor [*lacht*]..., één drie vierde ja! Eén drie vierde pi, ehm, dat had ik dan omgerekend naar graden. |
| *Interviewer* | Oké. |
| *Leerling* | Volgens mij... [*stilte*] |
| *Interviewer* | Het is niet hetzelfde getal als in de toets hoor, het gaat me nu meer om hoe je het gaat aanpakken. |
| *Leerling* | Ja, ik zit even te denken. Ehm... [*stilte*] |
| *Interviewer* | Ja want waar op de cirkel moet je zitten? |
| *Leerling* | Ja dan zit ie hier volgens mij. [*Wijst naar een punt behorend bij 1 ¼ pi op de cirkel]*<br>Ja want hij zit op de helft hiertussen |
| *Interviewer* | En waarom? |
| *Leerling* | Dit is één [*wijst naar de kruising van de negatieve x-as met de cirkel*]. Hier is één pi. |
| *Interviewer* | Ja. |
| *Leerling* | Hier is anderhalf pi [*wijst naar de kruising van de negatieve y-as met de cirkel*]. |
| *Interviewer* | Precies. |
| *Leerling* | Ja dus dan ligt ie eigenlijk iets meer hier [*wijst naar het punt halverwege tussen één pi en anderhalf pi*]. |
| *Interviewer* | Maar is één drie vierde meer dan anderhalf of minder? |
| *Leerling* | Ohja, het is meer dan anderhalf dus dan ligt ie hier [*wijst naar het punt net verder dan het punt bij anderhalf pi*]. |
| *Interviewer* | En waartussen precies, want welk getal heb je hier? |
| *Leerling* | Oh wacht, nee, meer hier [*wijst naar het punt halverwege tussen anderhalf pi en twee pi*]. |
| *Interviewer* | Ja oké, nou dat weet je nu in ieder geval. |
| *Leerling* | Ja en dan was dit, dan krijg je hier 45 graden.<br> |

| | |
|---|---|
| | Ehm, en, zo, is die negentig, zestig... |
| *Interviewer* | En waarom zestig? Hoe weet je dat? |
| *Leerling* | Die was, wacht even hoor... [*stilte*]. Ja, 180, plus, negentig plus vijfenveertig is 135, ja dat wordt dus niet 60 [*lacht*]. |
| *Interviewer* | Nee [*lacht*], dat is oké. |
| *Leerling* | Als ik het in mijn hoofd moet doen wordt het veel moeilijker opeens, euhm, maar die wordt dus 45 dus dat is niet 60, maar... |
| *Interviewer* | Oké, dus 45. |
| *Leerling* | Ja, ja die is ook 45. |
| *Interviewer* | Ja, oké. |
| *Leerling* | En dan, ehm, die x, die x [*schrijft het in de tekening erbij*], en dan is deze één [*wijst naar de straal van de cirkel*]. |
| *Interviewer* | Hmhm. |
| *Leerling* | Ja, dan, x in het kwadraat plus x in het kwadraat is één. Twee x in het kwadraat is één. En dan x is wortel één tweede.   |
| *Interviewer* | Ja en dat kan je dan inderdaad nog mooi omschrijven maar dit mag ook wel voor nu gewoon even zo hoor. |
| *Leerling* | Ja. |
| *Interviewer* | Ja. Oké, dus nou dat krijg je eruit. Ehm, en waarom, want het was, inderdaad van één drie vierde pi, en hier heb je dan alleen die [*wijst naar de hoek van 45 graden*] hoek gepakt, waarom? |
| *Leerling* | *Stilte* |
| *Interviewer* | Zeg maar want eigenlijk is die hoek natuurlijk veel groter. |
| *Leerling* | Ja, dus, eigenlijk... [*stilte*]. Ja want anders dan kan je niet die x en die x op hun plek zetten toch? |
| *Interviewer* | Ja, precies. |
| *Leerling* | Want daar heb je niet een hoek die je weet. Ja, zeg maar... |
| *Interviewer* | Ja, maar eigenlijk dat je dit zo mag doen, is, eh, want je gebruikt nu 45 graden, dus eigenlijk zou 45 graden hier zitten toch? [*Wijst naar de plek op de cirkel met middelpuntshoek 45 graden*] |
| *Leerling* | Ja dus het is eigenlijk, ja het is nog steeds dus, alsof het eigenlijk gespiegeld is. |
| *Interviewer* | Ja precies, dus de x-coördinaat is hetzelfde. |
| *Leerling* | Ja, daar. [*Trekt een lijn zonder pen van het punt wat bij 45 graden hoort, recht naar beneden naar het punt wat bij 315 graden hoort*] |
| *Interviewer* | Oké, nou heel mooi, dank je voor je uitleg. Ehm, hoe zou je dan de sinus van een negatieve hoek interpreteren, wat betekent dat? |
| *Leerling* | Ja je gaat met de klok mee. |
| *Interviewer* | Ja. |
| *Leerling* | P, punt P gaat met de klok mee, en dan de sinus is, ehm, dat is zeg maar het y-coördinaat, ehm. Hoe zeg je dat, ja, dat je de y-coördinaat bekijkt, ofzo? |
| *Interviewer* | Ja, inderdaad, en dan van een negatieve hoek, dus in plaats van dat je zo beweegt [*tekent over de cirkel tegen de wijzers van de klok in*], beweegt ie zo [*tekent over de cirkel met de wijzers van de klok mee*]. En waar is de sinus dan negatief? In welk |

| | |
|---|---|
| | kwadrant? Of je mag het aanwijzen. |
| *Leerling* | Ehm, ja, in de derde en vierde, denk ik. |
| *Interviewer* | Omdat? |
| *Leerling* | Ja, omdat daar, oh nee. Ja, omdat daar de y-coördinaat negatief is. |
| *Interviewer* | Ja precies, heel goed. Ehm, dan gaan we door naar radialen.Ik weet dat dit soms een moeilijke vraag is, maar wat zijn radialen? Kan je dat proberen uitleggen, waar je daarbij aan denkt? |
| *Leerling* | Ja, aantal graden, alleen dan in pi, eigenlijk, volgens mij. En dan geeft het de, ja hoe noem je dat, ja de booglengte aan. Ehm, die dat punt, van een punt tot een punt eigenlijk. |
| *Interviewer* | Ja en van welk punt tot welk punt? |
| *Leerling* | Ja die je had afgelegd ofzo. |
| *Interviewer* | En kan je dan aanwijzen vanaf welk punt dat zegmaar is? Je zegt vanaf een punt tot… |
| *Leerling* | Ja vanaf punt P *[wijst het punt met coördinaten (1,0) aan in de cirkel die ze eerder had getekend]*. Die, als je die pakt, vanaf (1,0), in de eenheidscirkel. |
| *Interviewer* | Ja en je zei graden uitdrukken in pi, maar eigenlijk is het dus een hoek uitdrukken in pi. |
| *Leerling* | Ohja, dat klopt. |
| *Interviewer* | Ja, want daar heeft het inderdaad mee te maken. Omdat we nu dus de eenheidscirkel hebben, wat is daar nu zo speciaal aan? Aan de eenheidscirkel? |
| *Leerling* | *[Stilte]* |
| *Interviewer* | Daar heb je een straal van? |
| *Leerling* | Ja een straal van één. |
| *Interviewer* | Ja en daarom, omdat radialen gaat om de verhouding tussen de straal en de booglengte van de cirkel, kunnen we dat dus gelijk stellen. |
| *Leerling* | Ohja, ja. |
| *Interviewer* | Ehm, oké, kan je dan ook een voorbeeld doen hoe je graden omrekent naar radialen? Kan je het eerst in het algemeen zeggen en dat we dan daarna nog een voorbeeldje doen. |
| *Leerling* | Ehm, ja 180 graden, ja 180 was pi. En dan als je graden naar radialen wil, ehm, het aantal graden keer pi gedeeld door 180. |
| *Interviewer* | Oké, ehm, kan je dit voor 225 graden eens uitrekenen? |
| *Leerling* | Naar radialen toch? |
| *Interviewer* | Ja, naar radialen, klopt. |
| *Leerling* | *[Begint te schrijven]* Ehm, ja, dit klopt… *[Schrijft verder]*<br> |
| *Interviewer* | En dat mag je dan wel even op de rekenmachine doen, dat hoef je niet persé zelf te kunnen. *[Pakt de rekenmachine]* Hier mag je mijn rekenmachine wel even voor gebruiken. |
| *Leerling* | *[Typt 225:180 in op de rekenmachine. Hier komt 1,25 uit en ze schrijft als eindantwoord 1 ¼ pi log op]*<br> |

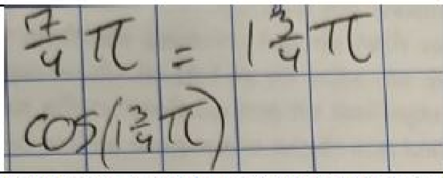
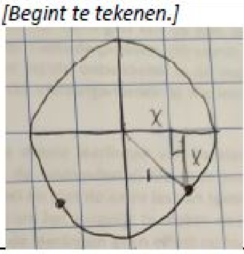
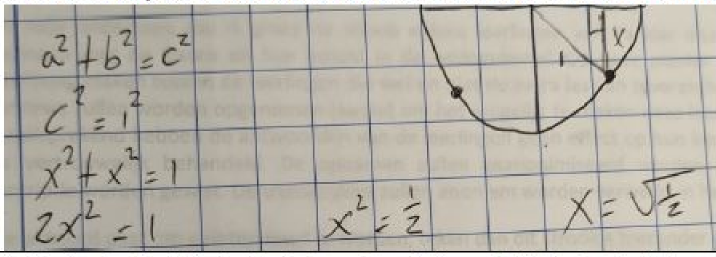
| | |
|---|---|
| *Interviewer* | En wat schrijf je daar achter? |
| *Leerling* | Log, toch? |
| *Interviewer* | En waarom? |
| *Leerling* | Ja, das niet log... [*begint te lachen*] |
| *Interviewer* | *Lacht mee.* Ja ik vind het interessant dat je dat doet want volgens mij hebben we dat niet genoemd. |
| *Leerling* | Naja je moest er iets achter zetten toch? Of niet? Niet graden maar... |
| *Interviewer* | Ja, je denkt aan radialen. |
| *Leerling* | Ohja, rad bedoel ik. Ik was in de war. |
| *Interviewer* | Oké, nee, nu snap ik het. Maar dat klopt, het gaat om radialen, dus dat moet je er wel achter zetten. |
| *Leerling* | Ja, dat. |
| *Interviewer* | Heel goed. En ik vind ook, want je schrijft dit zo op en dat vind ik heel mooi, wat doe je hier? |
| *Leerling* | Ja zo'n tabelletje. |
| *Interviewer* | Een verhoudingstabel? |
| *Leerling* | Ja, een verhoudingstabel. |
| *Interviewer* | En hoe kom je daar aan? Want ik heb dat niet gezegd, dus dat vind ik leuk! Hoe heb je dat bedacht? |
| *Leerling* | Ja gewoon omdat 180 is pi, ja dus dan zet je dat gewoon naast elkaar, want anders raak ik een beetje in de war. |
| *Interviewer* | Ja dat vind ik heel slim van je, dat werkt heel goed. En ook dat je dat zo zelf hebt bedacht, dat vind ik knap. Oké, nou dit klopt, dankjewel. Ehm, dan wil ik nog vragen, ehm, dit kwam ook op de toets, dus ik ben benieuwd wat er achter zit: wat is de input en output van de sinusfunctie? Wat betekent de sinusfunctie? |
| *Leerling* | Ja, die snapte ik eigenlijk niet helemaal meer. |
| *Interviewer* | Ja die is moeilijk he. Kan je het anders even tekenen, de sinusfunctie? Een schets |
| *Leerling* | *[Begint te tekenen]*  |
| *Interviewer* | Oké dus je tekent nu een mooie beweging. Wat stelt die functie voor? Wat zou je hier op de x-as bijvoorbeeld zetten? |
| *Leerling* | Ehm, op de x-as... De, ehm, ja hoe noem je dat. De coördinaten van het punt, en dan van de y-coördinaat van punt P. |
| *Interviewer* | Oké, dus je bedoelt als die beweegt. |
| *Leerling* | Ja, als die over de cirkel loopt. |
| *Interviewer* | Ja, dus inderdaad de coördinaten van, maar dat is nog een beetje vaag. Stel je zou nu zo de x en de y-as een naam moeten geven? |
| *Leerling* | Ja, de y-as is de afgelegde afstand. Of is dat de x-as... *[Stilte]* |
| *Interviewer* | Probeer het te beredeneren. |
| *Leerling* | Hmmm. |
| *Interviewer* | Want wat voor getallen staan hier op, op de x-as? |
| *Leerling* | Ohja, dit was in totaal 2pi [*wijst naar (2π,0) in de grafiek*], dus dan is dat, ehm, de x-as de afgelegde afstand, en de y-as was de, ja. Eh, de y-coördinaat van punt P. |

| | |
|---|---|
| *Interviewer* | Ja, heel goed, inderdaad. Want daar kan je het dan ook aan zien, dan zie je de y-as gaat alleen maar van min één tot één. Dus dat is ook de y-coördinaat van dat punt op die cirkel. Maarja, hij kan wel die afstand blijven doorlopen, dus daarom blijft de x-as ook doorgaan. Nou, dankjewel, dat is goed uitgewerkt zo. Ik zet deze even uit. [**Einde opname**] |

## J3 Transcriptie interview leerling 3 RRR groep

Transcriptie interview leerling 3 – 22 september

| | |
|---|---|
| *Interviewer* | Ja, oké, mooi. Ehm, nou ik heb eerst wat vragen voor je, wat je ervan vond van de lessen, omdat het misschien ook wat anders was dan je bent gewend, en daarna ga ik nog even wat vragen stellen die een beetje lijken op wat er in de toets zat, om te kijken, ehm, hoe goed je het hebt begrepen, hoe goed het is overgekomen. |
| *Leerling* | Ja. |
| *Interviewer* | Ja? Oké, nou ten eerste, wat vond je gewoon in het algemeen van de lessenserie. |
| *Leerling* | Ehm, ja, wel fijn. Jawel, was gewoon goed uitgelegd met plaatjes op het bord en dat soort dingen. |
| *Interviewer* | En dat vond je dus fijn, die plaatjes. |
| *Leerling* | Ja. |
| *Interviewer* | Oké. Ehm, en had je ook dingen die je minder fijn vond. |
| *Leerling* | Ehm. *[Stilte]* Niet echt wat ik zo zou kunnen noemen. |
| *Interviewer* | Hoeft ook niet als het er niet is hoor, dat hoeft zeker niet. En van de hoeveelheid stof, die we in drie lessen hebben behandeld, was dat te veel, te weinig? |
| *Leerling* | Nee, ik vond het wel genoeg. |
| *Interviewer* | En ook de hoeveelheid oefenmateriaal? |
| *Leerling* | Jawel. |
| *Interviewer* | Oké, nou dat is goed om te horen. Ehm, heb je dus ook het gevoel na deze lessen dat je ook echt snapt wat we hebben gedaan? |
| *Leerling* | Ik denk grotendeels wel. |
| *Interviewer* | Hm, oké, en kan je ook aangeven welk deel misschien wat minder? |
| *Leerling* | Ehm, ja met die cosinus en sinus zegmaar, als er dan een pi tussen de haakjes staat, of dat dan in radialen is zegmaar, dat. |
| *Interviewer* | Oké, dus vooral het radialen gedeelte vind je moeilijker? En als het in graden is, dan is het alweer beter? |
| *Leerling* | Ja. |
| *Interviewer* | Oké, nou dat is goed om te weten. We kunnen ook kijken hoe dat zometeen gaat. Want dan is de eerste vraag nu hetzelfde als bij de toets, of je uit kan leggen wat de eenheidscirkel is en wat dat met de sinus en cosinus heeft te maken. En je mag trouwens altijd iets tekenen op opschrijven als je wil. |
| *Leerling* | Ehm, ja de eenheidscirkel is een cirkel met een straal van één, en het middelpunt is de oorsprong. En, ehm, je hebt dan een willekeurig punt P op de cirkel, en met de sinus kan je de y-coördinaat van P uitrekenen, en met de cosinus de x-coördinaat van P. |
| *Interviewer* | Nou, perfect, heel mooi. Ehm, kan je dan exact, dus zonder rekenmachine, voor mij uitrekenen, de cosinus van zeven vierde pi? En ga vooral dingen opschrijven, en blijf een beetje praten wat je denkt. |
| *Leerling* | Ja, dat kan ik niet uit mijn hoofd. Zeven vierde pi. *[Begint te schrijven]* |
| *Interviewer* | Ja, de cosinus van zeven vierde pi. |
| *Leerling* | Ehm, nou zeven vierde pi is hetzelfde als 1 drie vierde pi. Ehm, en wat moet ik dan ook weer precies uitrekenen? |
| *Interviewer* | De cosinus daarvan. |
| *Leerling* | En dan krijg je als antwoord de hoek... Hmm |
| *Interviewer* | Wat denk je, wat betekent dit? |
| *Leerling* | Oh, wacht, ik weet het al wel. *[Begint te schrijven]* |

| | |
|---|---|
| |  |
| *Interviewer* | Je mag er ook een tekening bij maken als dat helpt. |
| *Leerling* | *[Begint te tekenen.]*<br> |
| *Interviewer* | En hoe weet je dat het [het punt op de eenheidscirkel] daar zit? |
| *Leerling* | Eén vierde is zegmaar, hier [*wijst naar het punt op de cirkel met een middelpuntshoek van 45 graden*], en dit is anderhalf pi, en dan is hier dus deze [*wijst naar het punt op de cirkel met een middelpuntshoek van 315 graden*]. *Gaat verder met tekenen.* Dit is één, dit is x, x (zie tekening). |
| *Interviewer* | En waarom is dat allebei x? |
| *Leerling* | Omdat die gelijk zijn [*wijst naar de zijden*], omdat die [*wijst naar het punt*] tussen, zegmaar, op het middelste punt van die boog zit. |
| *Interviewer* | Dus wat weet je over de hoek? |
| *Leerling* | Deze is 90, die 45, die 45. |
| *Interviewer* | Precies, en daarom mogen ze allebei x zijn, heel goed. |
| *Leerling* | Nou, dan Pythagoras, a kwadraat plus b kwadraat is c kwadraat. C kwadraat is, ehm, ja één kwadraat en dat is één. Dus dan is x kwadraat plus x kwadraat is één. Twee x kwadraat is één, dus dan één x kwadraat is een half. En dan is x wortel een half.<br> |
| *Interviewer* | Ja. En dan kan je dat inderdaad nog wat omschrijven, dat je de breuk uit de wortel haalt, maar dit is helemaal goed voor nu. Dus inderdaad, dat is het antwoord. En hoe weet je dat je dit zo mag doen? Want je hebt nu deze hoek gepakt [*wijst naar de hoek van 45 graden in de driehoek*], maar we zagen net dat, je gaat natuurlijk helemaal zo [*maakt een beweging voor een hoek van 315 graden*]. Waarom mag je dit zo pakken? |
| *Leerling* | Ik snap de vraag niet helemaal. |
| *Interviewer* | Ehm, ja want je gebruikt nu dus een hoek van 45 graden hier he? |
| *Leerling* | Ja. |
| *Interviewer* | Waarom mag dat? Hoe weten we dat je dan hetzelfde antwoord krijgt, ehm, als bij dus deze hoek van één drie vierde pi? |
| *Leerling* | Ik snap de vraag niet helemaal. |

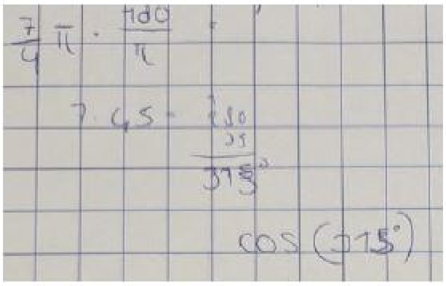
| | |
|---|---|
| *Interviewer* | Oké, eigenlijk wat je nu gebruikt is de hoek van een kwart pi, toch? |
| *Leerling* | Ja. |
| *Interviewer* | Maar de vraag was met de hoek, bij de cosinus, van één drie vierde pi. |
| *Leerling* | Oooh, ja, omdat ie, helemaal tot hier gaat, en dan is ie weer aan de rechterkant van de, zegmaar, y-lijn. |
| *Interviewer* | Precies, dat wilde ik even horen inderdaad, je weet die afstand [*wijst naar het lijnstuk van de driehoek op de x-as*], die x-coördinaat is positief, dus het is hetzelfde als die hier zo zit [*wijst naar de punten met middelpuntshoek 45 graden en middelpuntshoek 315 graden*]. Maar dit vind ik heel goed, ja dat is netjes en heel goed uitgelegd. Ehm, oké, dan het volgende: hoe kan je de sinus van een negatieve hoek interpreteren, wat betekent dat? |
| *Leerling* | Ja, dan is de P met de wijzers meegegaan. [*Gebaart in de lucht*] |
| *Interviewer* | Ja, en waar in het assenstelsel is de sinus negatief? In welk kwadrant, in de eenheidscirkel? |
| *Leerling* | Sinus is, ehm, drie en vier. |
| *Interviewer* | Omdat? |
| *Leerling* | Omdat daar de y negatief is. |
| *Interviewer* | En wat heeft het met de y te maken? |
| *Leerling* | De sinus, dan moet je kijken naar de y-coördinaat van P. |
| *Interviewer* | Heel goed. Ja, dankjewel, netjes. Oké, dan gaan we naar het deel waarvan je zei dat je het wat moeilijker vindt, radialen. Kan je proberen uit te leggen wat radialen zijn? |
| *Leerling* | Ehm, ja, hoever je zegmaar op de cirkel bent, de booglengte. |
| *Interviewer* | De booglengte. |
| *Leerling* | Hoever P dus is gegaan. |
| *Interviewer* | Oké, en kan dat in elke cirkel zo of alleen in de eenheidscirkel? |
| *Leerling* | Dat weet ik niet. |
| *Interviewer* | Want eigenlijk, en dat snap ik want dat is wat moeilijker, radialen heeft te maken met de verhouding tussen, inderdaad, de booglengte, en de straal. Maar wat is de straal hier? |
| *Leerling* | Eén. |
| *Interviewer* | Ja. En daarom heeft het alleen nog maar te maken met de booglengte. Dus in een andere cirkel, dan zou je net wat andere getallen krijgen, maar omdat je hier de straal hebt van één, dan heb je dus dat die hoek even groot is als de booglengte. |
| *Leerling* | Oh ja. |
| *Interviewer* | Ja, en hoe kan je een hoek ook wel meten, in plaats van met radialen? |
| *Leerling* | Graden. |
| *Interviewer* | Ja, en hoe kan je dat omrekenen naar elkaar? |
| *Leerling* | Ehm, keer 180 gedeeld door pi. |
| *Interviewer* | En van wat naar wat ga je dan? Je mag daar dan ook wel wat bij opschrijven hoor. |
| *Leerling* | Ehm, van graden naar radialen is keer 180 gedeeld door pi. |
| *Interviewer* | Oké, kan je dat dan voordoen met 225 graden? |
| *Leerling* | [*Begint te schrijven.*] Oh nee wacht, dat is gedeeld door. |
| *Interviewer* | Ja. |
| *Leerling* | Dan heb je zo [*schrijft*]. Ja en dan krijg je 225 pi gedeeld door 180. |
| *Interviewer* | Dat mag je hier wel even mee doen [*geeft rekenmachine aan*], maar ik wil wel graag een exact antwoord. |
| *Leerling* | Oh hij staat er al voor [*wijst naar de rekenmachine en begint te schrijven*]. *Lacht* |
| *Interviewer* | *Lacht.* Oh die stond er gewoon nog, nou je had in ieder geval dezelfde berekening, dat is mooi. |
| *Leerling* | Ehm, en dat heb je één één vierde pi rad. |

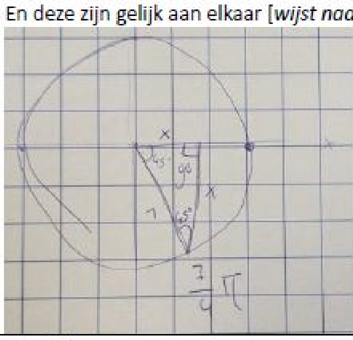
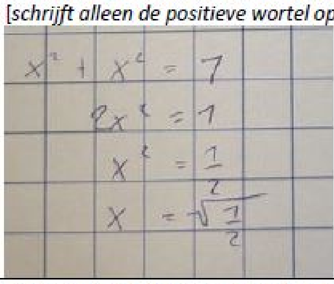
| | |
|---|---|
| *Interviewer* | Ja netjes, en kan je dan nog aanwijzen waar op de cirkel die zit? |
| *Leerling* | Ehm, hier [*wijst naar het punt wat hoort bij 225 graden op de eenheidscirkel*]. |
| *Interviewer* | Ja, inderdaad. Nou, volgens mij snap je dit best wel goed hoor! Dan heb ik nog één laatste vraag, die zat ook, ehm, op de toets. Wat is de input en output van de sinusfunctie? |
| *Leerling* | Ehm, de input is de, hoever P is op de lijn. |
| *Interviewer* | Op de lijn? |
| *Leerling* | Ja op de cirkel zeg maar. En de output is de, bij de sinus is het de y-coördinaat en bij de cosinus de x-coördinaat. |
| *Interviewer* | Nou, perfect. Ja, heb je echt heel goed gedaan. Nou, fijn om te horen dus dat je er echt iets van hebt opgestoken. |
| *Leerling* | Ja! |
| *Interviewer* | Ja, oké, nou dan ga ik dit nu stopzetten. [**Einde opname**] |

## J4 Transcriptie interview leerling 1 IRRR groep

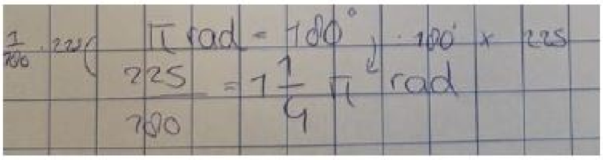
Transcriptie interview leerling 4 – 10 oktober

| | |
|---|---|
| *Interviewer* | Is ie nu begonnen, top. Dan gaan we ook beginnen met de eerste vraag. Ehm, gewoon in algemeen, wat vond je van de lessenserie? |
| *Leerling* | Ja ik vond ze heel fijn ofzo, omdat we ook met werkbladen werkten zeg maar. En, ja, ik weet niet, ik had het gevoel dat u wat minder deed met het bord en meer de uitleg met de huiswerkopgaven erbij zeg maar, met de opgaven erbij. Dus dan kreeg je gelijk ook het inzicht hoe het dan werkt met opgaven zeg maar, dus dat vond ik wel fijn. |
| *Interviewer* | Ja, oké, mooi. Ehm, en, van hoe lang de lessenserie was? |
| *Leerling* | Ehm, ja, ja ook wel fijn eigenlijk. Ja, ik weet niet, gewoon voor hoeveel lessen we hebben gehad? |
| *Interviewer* | Ja, precies. |
| *Leerling* | Ja, ja fijn. Het had voor mij langer gemogen, maar het is zo ook goed. Het maakt me eigenlijk niet heel veel uit. |
| *Interviewer* | En de stof paste dus goed in de tijd? |
| *Leerling* | Ja, ja dat vond ik sowieso wel ja. |
| *Interviewer* | Ja, oké. En dus ook, je zei dat je de werkbladen fijn vond. Had je nog meer of minder willen oefenen of niet? |
| *Leerling* | Hm, ik denk dat dit wel gewoon goed was eigenlijk. Ik had soms wel op de toets dat ik bijvoorbeeld dacht van met die vraag van 'wat zijn radialen', dat ik had van *ja dat weet ik eigenlijk helemaal niet*. Maar, ja, voor de rest vond ik het wel gewoon fijn. |
| *Interviewer* | Oké, mooi, dat is goed om te weten. Ehm, had je dan nog specifieke delen van de lessen die je wel of heel erg niet leuk vond? |
| *Leerling* | Ehm... Nee, eigenlijk niet echt. Want voor mijn gevoel was bij een les toch wel een beetje hetzelfde zeg maar. Juist goed, want elke keer ging je toch gewoon weer werken met de werkbladen en er was ook niet zoveel huiswerk want dat maakte je dan in de les, en dat was wel fijn. |
| *Interviewer* | Ja, dat snap ik. Oké, en dan, heb je ook het gevoel dat je echt snapt waar we mee bezig zijn geweest de afgelopen tijd? |
| *Leerling* | Ja, ik denk dat ik het wel gewoon snap ja. Ja je hebt natuurlijk altijd wel dingen waar je iets, dat je toch denkt dat vind ik toch nog een beetje vaag, maar dat blijft altijd wel. |
| *Interviewer* | Ja. |
| *Leerling* | Maar ik heb wel het gevoel dat ik het snap. |
| *Interviewer* | Nice, dat is mooi. Oké, ehm, dan gaan we nu een beetje inhoudelijke vragen nog doen. Dus om te beginnen, deze kreeg je ook op de toets, maar dan kan het nu wat uitgebreider bijvoorbeeld. Leg in je eigen woorden uit wat de eenheidscirkel is en wat de cosinus en sinus hiermee te maken hebben. En je mag sowieso altijd tekenen trouwens [*gebaart naar het papier op tafel*]. |
| *Leerling* | Ohja, ehm, ja de eenheidscirkel is eigenlijk een cirkel waarbij de straal één is, en de, het middelpunt is de oorsprong. Ja, met de cosinus kun je eigenlijk kijken naar de x-coördinaten van punten op de cirkel, en met de sinus geldt dat voor de y-coördinaten. |
| *Interviewer* | Ja, perfect. En wat heb je dan verder nog nodig? |
| *Leerling* | Ehm, ja de booglengtes dan misschien. En de, ja, en er was iets met de middelpuntshoek, maar dat weet ik dus niet precies, want dat was dus van een punt naar het middelpunt ofzo, dus dan de middelpuntshoek [*gebaart*]. |
| *Interviewer* | Ja, ik zie inderdaad dat je nu zo wijst [*gebaart*] dan bedoel je dan nu inderdaad dit hele eerste stuk. We begonnen altijd bij dat ene punt, en welk punt was dat? |
| *Leerling* | Ehm, (1,0). [*Gebaart.]* |

| | |
|---|---|
| *Interviewer* | Ja, en dan ga je inderdaad zo, en dan krijg je een middelpuntshoek, en die heb je nodig voor die sinus en de cosinus. |
| *Leerling* | Ja. |
| *Interviewer* | Nou, heel goed. Ehm, nou dan gaan we even kijken of je exact kan uitrekenen, dus zonder rekenmachine, de cosinus van zeven vierde pi. En schrijf vooral op, ga schrijven en zeg hardop wat je denkt. |
| *Leerling* | De cosinus van zeven vierde pi. [*Begint te schrijven.]* |
| *Interviewer* | Ja, eerst maar even opschrijven inderdaad. |
| *Leerling* | [Begint te schrijven] Zo? |
| *Interviewer* | Oké, je schrijft op keer 180 gedeeld door drie. Waarom doe je dat? |
| *Leerling* | Ja, omdat, als je toch van pi naar graden wil, kun je toch, deze berekenen. Denk ik. Alleen, ehm, 180, ja... |
| *Interviewer* | Ja, misschien is het op deze manier een beetje moeilijk om uit je hoofd te doen hè? Is er nog een manier waarop je kan beredeneren hoever graden het is. Waar op de eenheidscirkel zit het punt bijvoorbeeld? |
| *Leerling* | Ja, één pi is 180 graden en één vierde pi is 45 graden, dus eigenlijk doe je dat keer zeven om er op te komen. Dus dan kun je ook zeven keer 45 doen. |
| *Interviewer* | Precies. |
| *Leerling* | En dat is dus [*stilte*] 315 graden. Denk ik. |
| *Interviewer* | Oké, en dan heb je graden. En dan wat? |
| *Leerling* | Oh ja en dan moet je het in de cosinus zetten.<br> |
| *Interviewer* | Ja, en hoe kan je hier achter komen. |
| *Leerling* | Hoe ik het heb gedaan, of? |
| *Interviewer* | Ja, hoe kan je nu, want nu heb je inderdaad de cosinus van 315 graden, maar de cosinus, wat is dat? |
| *Leerling* | De x-coördinaat. |
| *Interviewer* | Dus je wil een x-coördinaat vinden. |
| *Leerling* | Oh zo! [*Schrijft verder*] |
| *Interviewer* | Je mag ook wel iets tekenen als dat je helpt. |
| *Leerling* | Dat moet je toch iets met Pythagoras doen. [*Begint te tekenen*] |
| *Interviewer* | Ja, precies [bevestigend over de tekening]. |
| *Leerling* | En dan, naar beneden. [*Beschrijft wat ze tekent*] Ja, en dan weet je dat deze één is, en deze is 45 graden. |

| | |
|---|---|
| *Interviewer* | En hoe weet je dat? |
| *Leerling* | Omdat het zeg maar één vierde is, ja hoe leg je dat uit. Maar je weet dat dat zo is door die andere hoek. |
| *Interviewer* | Ja, want dit 315 graden hè, dus dan blijft dit over. |
| *Leerling* | Ja dat ja, van de 360. |
| *Interviewer* | Ja. |
| *Leerling* | Dus dan deze hoek vijf, nee, dan weet je dat deze 90 is. En deze is 45 want dat is, ehm, ja hoe zeg je dat, erbij. Ja ik weet niet hoe ik dat uit moet leggen. |
| *Interviewer* | Dat blijft over, ja. |
| *Leerling* | En deze zijn gelijk aan elkaar [*wijst naar twee zijden van de driehoek*].   |
| *Interviewer* | Omdat? |
| *Leerling* | Omdat gelijke hoeken gelijke zijdes zijn, zeg maar, dus die kunnen we x stellen. En dan Pythagoras. [*Schrijft de berekening van Pythagoras op*] En dan alleen deze [*schrijft alleen de positieve wortel op*].   |
| *Interviewer* | Precies, want het is een afstand en die is positief. Ja, nou dat kan je nog mooi omschrijven, maar dat hoef je nu niet te doen. Nou, dan is dit je antwoord en dan heb ik nog één vraagje, ehm, waarom is dan de cosinus van 315 gelijk aan dit? Want wat heb je nu eigenlijk berekend? |
| *Leerling* | De x-coördinaat. |
| *Interviewer* | Ja, maar met welke hoek? |
| *Leerling* | 45 graden. |
| *Interviewer* | Precies, dus waarom is dit [*wijst naar de hoek van 45 graden*] nou hetzelfde als deze [wijst naar de hoek van 315 graden]? |
| *Leerling* | Ja, omdat hier ga je met de klok mee bij 45 graden, dus eigenlijk is het min 45 graden, maar omdat het een hoek is, hoef je dat niet negatief te schrijven. En hier ga, ja hoe zeg je dat, de andere kant, tegen de klok in. Dus dan is het 315 graden, dus |

| | |
|---|---|
| | of je kunt zeggen een cosinus van min 45 of een cosinus van 315. |
| *Interviewer* | Ja, precies. En omdat we hier op de positieve x-as zitten en je gaat dus inderdaad zoals je al zei, naar het x-coördinaat kijken, dan is dit hetzelfde als dit, het coördinaat [*wijst naar het eerste en vierde kwadrant*]. |
| *Leerling* | Ja, ja. |
| *Interviewer* | Oké, heel netjes, dank je wel. Ehm, dan de volgende vraag, hoe kan je de sinus van een negatieve hoek interpreteren? Wat betekent het? |
| *Leerling* | Sinus van een negatieve, negatieve hoek? |
| *Interviewer* | Ja, wat betekent het? |
| *Leerling* | Ehm, hoe je de sinus van een negatieve kunt... ja hoe zeg je dat. Ja, ik weet het eigenlijk niet zo goed. |
| *Interviewer* | Wat betekent die negatieve hoek? |
| *Leerling* | Dat je met de klok meegaat. |
| *Interviewer* | Precies. |
| *Leerling* | Dus, maar alleen, dan weet ik niet echt wat u bedoelt met interpreteert. |
| *Interviewer* | Nou, dit was het eigenlijk al. Wat betekent inderdaad die negatieve hoek? En dan, wat betekent de sinus? |
| *Leerling* | Ja de y-coördinaat. |
| *Interviewer* | Dus wat krijg je dan? |
| *Leerling* | Een negatieve y-coördinaat of ja, (-1,0) toch? [*Wijst met de wijzers van de klok mee tot het punt (-1,0)*] |
| *Interviewer* | Ja, je gaat die kant inderdaad op, dat klopt. |
| *Leerling* | Ja dat kan verschillend zijn om hoeveel graden het gaat, maar hieronder zit je dan zeg maar. [*Wijst naar kwadrant drie en vier*] |
| *Interviewer* | Ja want in welke kwadranten is het dan negatief, de sinus? |
| *Leerling* | Vier en drie. |
| *Interviewer* | Omdat? |
| *Leerling* | Daar ga je tegen de klok in en dan, ehm, is de y-coördinaat daar negatief. |
| *Interviewer* | Precies, want je gaat naar onder vanaf de y is nul. Ja, oké, ehm, nou, je zei net al dat je dat moeilijk vond over radialen maar ik ga toch weer even vragen: wat zijn radialen en wat hebben ze te maken met de eenheidscirkel? |
| *Leerling* | Ja, ik dacht dus van radialen zijn dus soort van eenheden die je gebruikt voor het, ehm, berekenen van de middelpuntshoeken bij bepaalde booglengte. Ja, ja ik weet niet wat het dan nog echt is ofzo. |
| *Interviewer* | Ja moeilijk hè, maar je zegt het eigenlijk wel. |
| *Leerling* | Maar bij de booglengte kun je ook gewoon alleen de pi gebruiken. Zeg maar zoals nu doe je, wat hoort, bij welke hoek hoort een booglengte van een half pi bijvoorbeeld. En dan gebruik je niet een half pi rad. |
| *Interviewer* | Nee, omdat je dat zo dan... Als je het in de cosinus zet, dan hoef je er geen rad in te zetten. Maar je zegt het echt al heel goed, ehm, dat het inderdaad een eenheid is waarin je dus een hoek meet. En waarom is dit nou, want je zei al dat het dan gaat om die booglengte die je afloopt, waarom heeft het nou alleen daarmee te maken in de eenheidscirkel? |
| *Leerling* | Ehm, omdat de eenheidscirkel omtrek heeft van twee pi... Dus, twee pi rad is 360 graden. |

| | |
|---|---|
| *Interviewer* | Ja. |
| *Leerling* | Ja. |
| *Interviewer* | En waarom in je het geval van de eenheidscirkel is dat? |
| *Leerling* | Omdat de straal één is. |
| *Interviewer* | Omdat de straal één is. Ja en in het algemeen, ik had toen nog een voorbeeldje uitgewerkt, ik weet niet of je dat nog weet, met straal drie. |
| *Leerling* | Ja. |
| *Interviewer* | Toen kreeg je hele andere berekeningen. Maar het gaat dus altijd om de verhouding tussen de booglengte, die je al benoemde, en dus die straal. En omdat in de eenheidscirkel de straal één is, nou dan doe je dat gedeeld door één, dus dan heb je gewoon alleen de booglengte. |
| *Leerling* | Oohjaa. |
| *Interviewer* | Ja, maar inderdaad, heel goed, radialen is gewoon een andere manier om hoeken te meten in plaats van graden. Oké, ehm, nou daarover, hoe kan je dus graden omrekenen naar radialen, of andersom? |
| *Leerling* | Ehm, ja je weet dat 180 graden delen door pi is toch één rad? Dus, ehm ja, als je wilt omrekenen van graden naar radialen dan kun je dus zeggen: één pi rad is 180 graden. En dan ja, kun je zeg maar, ligt eraan hoeveel graden je wilt, maar dan kun je delen door 180 graden en dan keer het aantal graden wat je wilt. |
| *Interviewer* | Ja, dus, ehm, bijvoorbeeld 225 graden? Mag je ook even opschrijven hoor, wat da is. Hoeveel rad is dat? |
| *Leerling* | Ja, dan zou ik gewoon van pi rad is 180 graden [*schrijft*], dus naar, hoeveel was het? |
| *Interviewer* | 225 |
| *Leerling* | 225, dus dan doe je delen door 180 keer 225. Dus dat is dan één achtste keer 225, dus dat is 225 delen door 180. [*Schrijft*] |
| *Interviewer* | Ja je zegt één achtste, maar je schrijft één delen door 180. |
| *Leerling* | Oooh, ohja dat bedoelde ik ook hoor, één honderdtachtigste. Dus dan krijg je eigenlijk gewoon hetzelfde, gewoon delen door 180 is, ehm... Ja ik weet niet precies uit het hoofd maar... |
| *Interviewer* | Die mag je even op de rekenmachine doen [*geeft rekenmachine aan*]. |
| *Leerling* | [*Typt*] Eén één vierde.  |
| *Interviewer* | Eén één vierde? |
| *Leerling* | Pi rad. |
| *Interviewer* | Precies, ja, heel netjes, dat is inderdaad hoe je het omrekent. Oké, dan heb ik nog één laatste vraag, ehm, wat is de input en de output van de sinusfunctie? |
| *Leerling* | Ja die vond ik dus echt heel gek. Ik kon niet echt goed, ik snapte niet echt wat er bedoeld werd met input en output. |

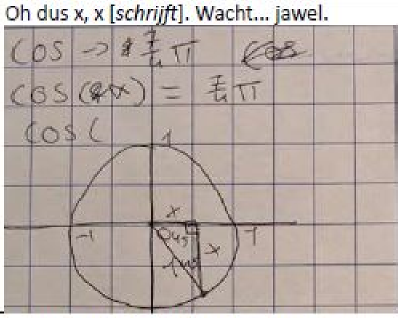
| | |
|---|---|
| *Interviewer* | Het is een beetje moeilijke vraag misschien hè? Ehm, nou normaal gesproken in een functie, want we hebben het dus over een sinusfunctie, heb je altijd iets wat erin gaat en wat eruit komt. |
| *Leerling* | Oh zo! |
| *Interviewer* | Ja, dus wat is dat nu wat erin gaat en wat eruit komt? |
| *Leerling* | Ehm, wat erin gaat, is toch de booglengte, en wat eruit komt is de middelpuntshoek, denk ik. |
| *Interviewer* | Oké, en waarom de middelpuntshoek? |
| *Leerling* | Omdat dat de hoek is wat hoort bij de booglengte? |
| *Interviewer* | Ja, maar die zijn in principe dus gelijk. |
| *Leerling* | Ohja, huh. |
| *Interviewer* | Dus wat komt er nou uit? |
| *Leerling* | De hoek bij die booglengte. Hmm nee. |
| *Interviewer* | Ja dat is wat je erin eigenlijk stopt. Maar we hebben bijvoorbeeld, ehm, die grafiek getekend. Dan heb je altijd op de x-as wat je erin stopt, dus dat is eigenlijk de booglengte, dus die middelpuntshoek, en wat staat er dan op de y-as? |
| *Leerling* | Hmm, coördinaten. |
| *Interviewer* | En welke coördinaten? |
| *Leerling* | Voor de sinus is het de y-coördinaat en voor de cosinus de x. |
| *Interviewer* | Precies, dus dat is ook wat ik bedoel met de output: wat komt eruit? Dus wat bereken je. |
| *Leerling* | Oh zò. Dus wat je berekent als je de booglengte erin gooit. Ja dan snap ik het. |
| *Interviewer* | Ja, ja en dit is [**Einde opname**]. |

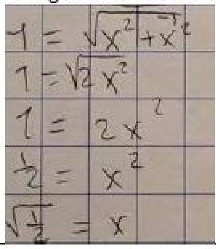
## J5 Transcriptie interview leerling 2 IRRR groep

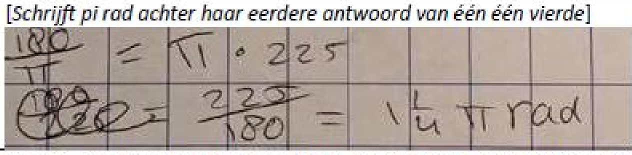
Transcriptie interview leerling 5 – 10 oktober

| | |
|---|---|
| *Interviewer* | Top, dan gaat ie op Audio. Nou, ehm, om te beginnen! Wat vond je van de lessenserie? |
| *Leerling* | Anders dan andere lessen wel. Het was opzich wel handig, als het ware, wel flexibel. Je had niet echt huiswerk of zo, dus dat is ook wel fijn, maar ook de werkbladen, gewoon samen de opgave, maken. Dat is wel fijn. Ja, gewoon dat. |
| *Interviewer* | Ja, ehm, en had je dan bepaalde delen die je leuker vond dan normaal, of juist veel minder fijn? |
| *Leerling* | Ehm, qua hoe u les gaf? |
| *Interviewer* | Ja, hoe de lessen zelf waren, en hoe ze in elkaar zaten. Was er nog iets specifieks wat je heel erg fijn vond, of juist heel erg niet fijn? |
| *Leerling* | Ja, gewoon samen de opgaven maken en dan het af kunnen maken in de les, want dan kun je vragen stellen en anders dan moet je dat nog later ook weer doen. En dan heb je bijvoorbeeld, als je dan niet tijd hebt buiten school, dan heb ik het wel gewoon af. |
| *Interviewer* | Ja dat je de vragen in de les ook al kon stellen ja, dat snap ik wel. En van hoelang de lessenserie was, dus voor hoeveel stof er in die vier lessen, volgens mij, was gedaan? |
| *Leerling* | Ja ik weet niet hoeveel paragrafen? |
| *Interviewer* | Nou, het was vooral paragraaf één, maar ook een, een beetje kleine delen uit de andere paragrafen. Maar het was ook een andere gevolg worden. Maar was het een goede hoeveelheid voor de hoeveelheid lessen die we hadden, denk je? |
| *Leerling* | Ja, ik denk wel dat het een beetje weinig was als het ware gewoon, want meestal doe je denk ik wel binnen twee lessen of zo een paragraaf, maar ik vond het niet erg of zo. |
| *Interviewer* | En had je nog meer of minder willen oefenen? Of was dat ook goed? |
| *Leerling* | Ja, misschien wel voor thuis gewoon nog extra opgaven of zo, dat je die nog erbij kon maken voordat de toets was of zo. |
| *Interviewer* | Oké, dat is goed om te weten. Ehm, en heb je het gevoel dat je nu snapt waar we afgelopen lessen mee bezig zijn geweest |
| *Leerling* | Tijdens de toets was ik het wel een beetje vergeten, maar op zich, ik snapte het wel tijdens de lessen als u het dan uitlegt enzo snap ik het wel op zich. |
| *Interviewer* | Oké. |
| *Leerling* | Soms dan duurde het nog wel even om te snappen. |
| *Interviewer* | Je hebt natuurlijk ook maar een paar lessen, om dan gelijk alles te weten is ook wel wat veel. Ja, oké, ehm, dan ga ik gewoon een paar vragen, zoals ook zoals vanochtend stellen. Je mag altijd gebruikmaken van papier als je even iets wil tekenen of opschrijven, want ik weet niet of alles aan het hoofd leuk is. Dus dat is prima. Oké, dus als eerste, kan je in je eigen woorden uitleggen wat de eenheidscirkel is en wat de sinus en de cosinus daarmee te maken hebben? |
| *Leerling* | Eenheidscirkel is de, ehm, een cirkel en die heeft als middelpunt de oorsprong en straal één. En de omtrek is twee pi. Of twee pi rad, dat weet ik niet meer. En, ehm, cosinus, als je daar invult 180 graden, dan komt daar uit één pi. En hetzelfde bij de sinus volgens mij, maar dan hebben we de sinus of zo is. Als je zo'n grafiek wil maken, dan is het met de x en met de cosinus de y. |

| | |
|---|---|
| *Interviewer* | Oké en, en wat met de x en de y? |
| *Leerling* | Ehm, als je dan eentje omhoog gaat, ja, volgens mij is het meer met dat vierkant. Als je dan één omhoog gaat, vanaf punt P, dus dan één omhoog, dan ga je op de grafiek, ga je ook één omhoog schuiven. |
| *Interviewer* | Oké, zo bedoel je inderdaad dat je zo [*gebaart*] de figuur afloopt. Maar wat doet die cosinus op de eenheidscirkel, wat geeft het aan? |
| *Leerling* | [*stilte*] Dat weet ik niet meer. |
| *Interviewer* | Oké, laat ik het dan zo zeggen: als je de eenheidscirkel hebt en je pakt een punt daarop. Wat, wat kan je dan met de cosinus en sinus en dat punt? |
| *Leerling* | Als je dan de graden berekent, of hebt, of dan de radialen juist, dan kun je daarmee het punt op de cirkel berekenen. |
| *Interviewer* | Oké, het punt, en wat kan je van dat punt dan berekenen? |
| *Leerling* | De y. Of de x. |
| *Interviewer* | En welke? Wat kan je waarmee doen? Je hebt inderdaad een x- en een y-coördinaat. |
| *Leerling* | Ja ik weet niet meer of sinus nou bij de x hoort of cosinus bij de x. En ja ook voor de y, dat ben ik een beetje vergeten. |
| *Interviewer* | Ja, ja oké. Cosinus hoort bij de x, ehm, dus met de cosinus is het inderdaad als je iets in graden of radialen invult, dat is dus de hoek. Als je de hoek hebt van een punt, ja dan kan je met de cosinus x-coördinaat van dat punt berekenen. Met de sinus kan je de y waarde berekenen. Ehm, nou, dan kunnen we nu even gaan kijken of je daar een voorbeeld van kan doen. Dus de cosinus van zeven vierde pi, of je die kan uitrekenen zonder rekenmachine. Ehm, schrijft vooral dingen op of ga iets tekenen. De cosinus van zeven vierde pi. |
| *Leerling* | Hmm, maar dat is toch ook met 180 gedeeld door pi. |
| *Interviewer* | Oké, maar laat dan eens eerst even teruggaan. Wat wil je bereiken? De cosinus van zeven vierde pi? |
| *Leerling* | Oh wacht maar nu bereken ik de hoek. |
| *Interviewer* | Ja, en eigenlijk zeggen we dus, dit is die hoek, hè? [*gebaart]* Dus je hebt een hoek en je wil de cosinus daarvan berekenen. Kan je anders even het punt op de cirkel aangeven? |
| *Leerling* | Moet ik tekenen dan? |
| *Interviewer* | Ja dat is wel handig. |
| *Leerling* | [*Begint te tekenen*] |
| *Interviewer* | Oké, ja, daar zit zeven vierde pi, dat klopt. Eh, en de cosinus is van zeven vierde pi, wat wil je dan dus van dat punt weten? |
| *Leerling* | De x. |
| *Interviewer* | De x. Oké, hoe doen we dat? |
| *Leerling* | Geen idee. Ik ben het helemaal vergeten |
| *Interviewer* | Oké, ehm, weet je dan misschien nog dat we driehoeken gingen tekenen? |
| *Leerling* | Oh ja, wacht. |
| *Interviewer* | Kijk eens of je dan iets kan doen. |
| *Leerling* | [*tekent*] Nou dan heb je die hoek, en dit staat negentig graden. |

| | |
|---|---|
| *Interviewer* | Precies. |
| *Leerling* | En dan. Maar je wil... Oké wacht je wil dit weten eigenlijk, dit is de lengte, en dan heb je dat [*gebaart*]. |
| *Interviewer* | Oké, en krijg je dan het x of het y-coördinaat? |
| *Leerling* | Nee, je wil deze weten. |
| *Interviewer* | Precies, ja. |
| *Leerling* | Dan heb je de x, dus dan moet je [*stilte*] sinus gebruiken, want dit is één, en dan heb je de overstaande hoek. |
| *Interviewer* | Oké, maar we willen dus juist de cosinus weten, want die geeft de x-coördinaat. Maar je hebt in ieder geval iets van hoeken nodig, hè? |
| *Leerling* | Moet je dan niet gewoon de cosinus van deze uitrekenen en dan heb je hem. |
| *Interviewer* | Ja, dat is wat we inderdaad nu proberen, want dit [*gebaart*] is die hoek van zeven vierde pi. Dat is als je zo omgaat [gebaart tegen de wijzers van de klok in]. Maar je ziet, het x-coördinaat is hier gelijk aan hoe het hier zou zijn. En hoe groot is dan deze hoek, als je weet dat deze hele zeven, vierde pis? Hoeveel graden is dat? |
| *Leerling* | Eén vierde pi. |
| *Interviewer* | Oké, één vierde hou je over en hoeveel graden is dat? |
| *Leerling* | 45. |
| *Interviewer* | 45 graden, dus je weet, die hoek is 45 graden. |
| *Leerling* | Dan is dit ook 45 [*wijst naar de derde hoek*], want dit is 90. |
| *Interviewer* | Ja, en je zei dus je wil deze weten [*wijst*]. Hoe kom je nu achter die lengte? |
| *Leerling* | Hadden deze geen verhoudingen? Was dat, ehm. Maar dat is toch niet die met 60 en 30, dus dat is toch niet die met wortel drie en twee en één? |
| *Interviewer* | Nee, precies, die heb je niet, maar je hebt hier twee gelijke hoeken. |
| *Leerling* | Oh dus x, x [*schrijft*]. Wacht... jawel.  |
| *Interviewer* | Ze zijn even lang, inderdaad. En dan? |
| *Leerling* | We hebben Pythagoras, en dan één is wortel x kwadraat plus x kwadraat. Eén is twee x kwadraat. [*Schrijft*] |
| *Interviewer* | Ja, maar je wil eigenlijk juist dus die waarde voor x, hè? |
| *Leerling* | Moet je nu kwadrateren. Maar moet je dan plus òf min gebruiken, of...? |
| *Interviewer* | Wat denk je? |
| *Leerling* | Ja. |
| *Interviewer* | En waarom? |
| *Leerling* | Omdat het ook een min kan zijn. |
| *Interviewer* | Maar wat betekent min hier? Kan dat? Want x betekent hier een afstand, hè. |

| | |
|---|---|
| *Leerling* | Ohja wacht, kan niet. |
| *Interviewer* | Kan een afstand negatief zijn? |
| *Leerling* | Nee. |
| *Interviewer* | Nee, dus die hoef je dan niet. |
| *Leerling* | Nou gedeeld door twee. X kwadraat, en dan wortel.  |
| *Interviewer* | Ja. Dus x is wortel een half. Nou, en wat betekent dat dus: x was dus de cosinus van zeven vierde pi. En dat betekent dus, want volgens mij vind je het nog best lastig dus dat ga ik even duidelijk zeggen, dat de cosinus van zeven vierde pi, dat is de cosinus van een hoek. Dus je weet in ieder geval, dat is de middelpuntshoek, vanaf hier, dan ben je zo gelopen [*wijst aan*] en dan kom je op dit punt uit. En de cosinus betekent dat het x-coördinaat van dat punt dus gelijk is aan wortel een half. Oké, maar in kleine stapjes kom je d'r wel en dit ga je echt de rest van de hoofdstuk nog meer oefenen hoo. Laten we nog even verder gaan. Ehm, wat betekent de sinus van een negatieve hoek? Een negatieve hoek, wat betekent dat? |
| *Leerling* | Dan ben je teruggegaan over de cirkel. |
| *Interviewer* | Ja, dus teruggaan betekent? |
| *Leerling* | Dat de klok meegaat. |
| *Interviewer* | Ja, met de klok mee. En de sinus van een negatieve hoek, wat is dat dus? |
| *Leerling* | Min pi? Of... |
| *Interviewer* | Oké, dat is van een specifieke waarde. Laat ik het anders zo zeggen, in welke kwadranten van het assenstelsel is de sinus negatief? |
| *Leerling* | Vier en drie. |
| *Interviewer* | Omdat? |
| *Leerling* | Omdat die hier weer plus wordt [*wijst naar het punt (-1,0)*]. |
| *Interviewer* | Wat wordt daar plus? |
| *Leerling* | De y-waarde. |
| *Interviewer* | Precies, en in drie en in vier is die negatief. Nou, ehm, en de sinus van een negatieve hoek betekent inderdaad dat je teruggaat. Zo [*gebaart*] met de wijzers van de klok mee, dus dan ga je eerst negatieve waarden krijgen van y. Oké, ehm, kan je uitleggen wat radialen zijn? |
| *Leerling* | Dat zijn, ehm, punten op de cirkel, en dan ehm, hoe ver die is op de cirkel. |
| *Interviewer* | Ja, hoe ver die is op de cirkel. En dat is een ander woord voor... Weet je dat nog? |
| *Leerling* | [*Stilte*] |
| *Interviewer* | Booglengte. |
| *Leerling* | Ja, dat. |
| *Interviewer* | Ja, en dat is de booglengte. En dat meet je dan bijvoorbeeld in pi. Maar radialen, |

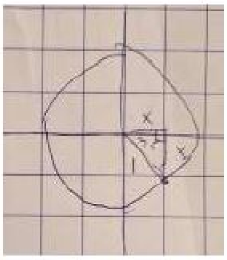
| | |
|---|---|
| | daar meten we eigenlijk iets anders. |
| *Leerling* | [*onverstaanbaar*] Maar, ehm, u heeft het toch over radialen? |
| *Interviewer* | Dus waar denk je dan aan? |
| *Leerling* | Hoeveel pi. |
| *Interviewer* | Aan hoeveel pi. Dus dan heb je inderdaad als booglengte, maar je zag bijvoorbeeld ook hier de cosinus van zeven vierde pi. Wat betekent die zeven vierde pi daar? |
| *Leerling* | Hoever je de cirkel over bent gegaan. |
| *Interviewer* | Ja, en waar ik op neer wil komen, is dat dat ook wel de hoek is. Want we weten de hoek in graden, of in radialen. Dus bijvoorbeeld een hoek van 90 graden, dan kan je ook zeggen: dat is een hoek van half pi radialen. Het ehm, is dus een manier om een hoek te meten in plaats van graden, maar dan in radialen. En waarom is dat nou gelijk aan die booglengte in het geval van de eenheidscirkel? |
| *Leerling* | [*Stilte*] |
| *Interviewer* | Wat is er zo speciaal aan die eenheidscirkel? |
| *Leerling* | Straal één. |
| *Interviewer* | Ja, ja dus daarom, want radialen zijn die meten inderdaad ook die hoek, en dat gaat altijd om de verhouding van de booglengte, die je inderdaad net benoemde, dus hoeveer je bent, en de straal van de cirkel. Maar omdat bij de eenheidscirkel die straal één is, is het dus gedeeld door één. Dus heb je gewoon dat die booglengte gelijk is aan die hoek, dat je dat ook kan meten door hoever die is. Dus wat radialen echt zijn, is een andere manier om een hoek te meten en omdat die eenheidscirkel straal één heeft, kan je dus zeggen dat dat gewoon gelijk is aan hoever, inderdaad, op die cirkel je zit. Hoe die booglengte is, hoe groot die booglengte is. Ehm, weet je ook hoe je van graden naar radialen gaat, of andersom? |
| *Leerling* | Ja, keer 180 gedeeld door pi is die graden. Wacht, van graden naar naar radialen toch? |
| *Interviewer* | Of andersom, wat je nu maar even makkelijker vindt. |
| *Leerling* | En dan pi keer de graden, en dan kun je pi wegstrepen en dan 180 gedeeld door de graden. |
| *Interviewer* | Oké, kan je even een voorbeeld doen voor 225 graden? |
| *Leerling* | [*Gaat schrijven*] Dat denk ik, waarschijnlijk is het dan wel andersom. [*wijst naar de getallen die ze heeft opgeschreven*] |
| *Interviewer* | En waarom andersom? |
| *Leerling* | Omdat 225 groter is. |
| *Interviewer* | Ja, dus je krijgt meer dan één pi. Deze mag je ook wel gebruiken [geeft rekenmachine aan]. |
| *Leerling* | [*typt*] Of is dat niet goed... |
| *Interviewer* | Maar is dat logisch, denk je? Want wat voor antwoord verwacht je? |
| *Leerling* | [*Krast door en schrijft iets nieuws op*] |
| *Interviewer* | Ja, oké, dus kan je opschrijven wat je antwoord is? |
| *Leerling* | [*Schrijft pi rad achter haar eerdere antwoord van één één vierde*]<br> |
| *Interviewer* | Precies, pi rad, want het is in radialen. Dus 225 graden is gelijk aan één één vierde pi |

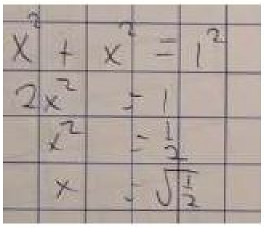
| | |
|---|---|
| | radialen. Ehm, oké dan nog één laatste vraag, die is eerst een beetje moeilijk, maar ik ga je helpen. Wat is de input en output van de sinusfunctie? |
| *Leerling* | Ja, dat wist ik ook niet. |
| *Interviewer* | Snap je wat ik bedoel met input en output? Ehm, ik bedoel eigenlijk: normaal gesproken bij een functie, dan heb je altijd iets wat erin gaat en iets wat eruit komt. Je stopt er normaal gesproken de x in en dan krijg je er een y-waarde uit. Wat zijn nu die x- en die y-waarden voor de sinusfunctie? |
| *Leerling* | Ehm, je doet de hoek van de, ja van de, de hoek doe je er in. En dan krijg je de ... de radialen er uit. |
| *Interviewer* | Bijna. Als je kijkt, ehm inderdaad, je doet een hoek erin en een hoek waarvan? |
| *Leerling* | De middelpuntshoek. |
| *Interviewer* | Ja, dus die begint altijd dan [*gebaart*], die hoek neem je altijd vanaf daar [*gebaart*], rechts, vanaf dat punt (1,0). En dan tot waar gaat die hoek? |
| *Leerling* | Tot 360. |
| *Interviewer* | Ja, daar kan die tot gaan, maar het gaat erom dat ie tot het punt is waarvan je de sinuswaarde wil weten. Dus je pakt een punt op de eenheidscirkel en dan neem je inderdaad als input de middelpuntshoek. En wat voor waarde komt eruit? Wat betekent dat? |
| *Leerling* | Hoever je ook bent op de cirkel. Of hoe groot de hoek is. |
| *Interviewer* | Ja dat is wat je erin stopt. Maar als je dit nog weet, ehm, die functie die je tekende op de x- en de y-as. Nou, die ging dus zo [*gebaart*]. |
| *Leerling* | Ja. |
| *Interviewer* | Maar wat was dan het y-coördinaat, wat betekende dat dan? Van zo'n punt op de grafiek? |
| *Leerling* | Ehm, wat de straal was? |
| *Interviewer* | Bijna, niet de straal. |
| *Leerling* | Hoe hoog y is? |
| *Interviewer* | Ja hoe hoog het punt dus is. Want die grafiek, die geeft dus de beweging van zo'n punt over de cirkel weer hè? Dat is wat we gingen tekenen. Als je zo'n, zo'n punt beweegt over de cirkel en die grafiek die gaf dan, ehm, die liet dan zien hoe hoog dat punt dus zat. En bij de cosinusfunctie, wat kwam er dan uit? |
| *Leerling* | De x. |
| *Interviewer* | Ja, dus inderdaad de horizontale positie van dat punt terwijl die bewoog. Oké, ik ga de opname even stoppen. [**Einde opname**] |

## J6 Transcriptie interview leerling 3 IRRR groep

Transcriptie interview leerling 6 – 10 oktober

| | |
|---|---|
| *Interviewer* | Oké, nou dan de eerste vraag: wat vond je van de lessenserie? |
| *Leerling* | Ja, ik vond het ja, leerzaam alles, was makkelijk uitgelegd enzo. Niet moeilijk te begrijpen. |
| *Interviewer* | Niet moeilijk dus. Kan je ook nog een beetje zeggen waardoor dat komt? |
| *Leerling* | Ehm, ik denk omdat er veel voorbeelden ook zijn gebruikt en een beetje makkelijk en moeilijk, dus kan je het een beetje toepassen. Zo van, in het voorbeeld heb je het zo gedaan en dan kan je het dus op dezelfde manier en zo hier doen. |
| *Interviewer* | Oké, en wat vond je van de hoeveelheid stof? |
| *Leerling* | Niet te weinig, niet te veel, is gewoon goed. Het was genoeg om te begrijpen, ja. |
| *Interviewer* | En van de hoeveelheid oefenstof, dus dan specifiek ook voor jezelf kunnen oefenen, was dat er te veel of te weinig of gewoon goed? |
| *Leerling* | Nee was ook gewoon goed, ja. |
| *Interviewer* | Oké, dat is mooi, dat is goed om te horen. Had je nog speciale delen van de lessen, die je, ehm, juist echt heel erg fijn vond, of veel minder fijn? |
| *Leerling* | Nee, niet echt, nee, niet specifiek. |
| *Interviewer* | Hoeft ook helemaal niet, misschien dat er iets uitsprong, maar dat is helemaal prima. En, ehm heb je daardoor ook dus echt het gevoel alsof je snapt waar je mee bezig bent geweest? |
| *Leerling* | Ja, ja dat wel. |
| *Interviewer* | Nou, dat is mooi. Gaan we gewoon even kijken, want ik heb nog niet je toets bekeken hoor, dus dit is gewoon heel erg open. Maar kan je dan beginnen met uitleggen wat de eenheidscirkel is en wat de sinus en de cosinus ermee te maken hebben? |
| *Leerling* | Ehm, de eenheidscirkel is een cirkel met straal van één. En, ehm, de sinus en de cosinus kijk eigenlijk naar de, ehm, de y-waarde en de x-waarde van punten. Op de cirkel. |
| *Interviewer* | Oké, dus voor wat voor punten dan ook op die cirkel. En is er dan nog, ehm, is het zo dat elke cirkel met straal één de eenheidscirkel is? Of moet er nog iets speciaals zijn? |
| *Leerling* | Ja, hij moet precies, ehm, op de oorsprong liggen. |
| *Interviewer* | Precies, daar zocht ik nog naar, dat het middelpunt in de oorsprong ligt. Omdat je dan zo precies die punten van één en min één zo krijgt. Ja, oké, ehm, je mag trouwens hier nu overal bij schrijven of tekenen of wat dan ook, want dan wil ik je even vragen of jij de cosinus van zeven vierde pi zonder rekenmachine uit kan rekenen. |
| *Leerling* | Zeven vierde pi. [*Begint te schrijven*] |
| *Interviewer* | Ja. |
| *Leerling* | [*Tekent de eenheidscirkel en pakt het punt bij zeven vierde pi*] |
| *Interviewer* | Ja, en waarom zit ie daar? |
| *Leerling* | Dit is, ehm, één pi [*wijst naar het punt (-1,0)*], en dit anderhalf [*wijst naar het punt (0,1)*]. Dus dit één drie vierde. |
| *Interviewer* | Ja, dat klopt. Nou, en dan de cosinus van één drie vierde pi. |
| *Leerling* | Dus het x-coördinaat [*onverstaanbaar*]. Ik weet even niet hoe ik dit op moet schrijven. |

| | |
|---|---|
| *Interviewer* | Ja, dat is nog even moeilijk, hè, misschien is het handig nog om er een tekening bij te maken. Als je bijvoorbeeld een assenstelsel neerzet. |
| *Leerling* | [*Tekent*] |
| *Interviewer* | Ja en je zei al, je wilde het x-coördinaat weten. |
| *Leerling* | Ja, dat is dan, ehm, nul komma vijf? Zo lijkt het. |
| *Interviewer* | Ja, zo lijkt het even, maar kun je dat misschien even met een tekening laten zien hoe je daaraan komt? Dat hebben we eerder gedaan. Als we dan dat deden, dan in dat geval in het eerste kwadrant [*wijst*]. Als we dan van bepaalde hoeken dat wilde weten, gingen we driehoek tekenen. Weet je nog? |
| *Leerling* | Ohja. [*Tekent verder*] |
| *Interviewer* | Ja, dus welke zijde wil je nu weten? |
| *Leerling* | Dit. [*Wijst*] |
| *Leerling* | [*Stilte*] |
| *Interviewer* | Ja. Wat weet je van de hoeken? |
| *Leerling* | Ja. [*Onverstaanbaar*] |
| *Interviewer* | En hoe weet je dat? Hoe weet je hoe groot die hoek is? |
| *Leerling* | Dat is een bij een driehoek zo [*refereert naar 180 graden*]. |
| *Interviewer* | Ja, maar hoe weet je dat? We weten het aan waar het punt ligt hè, en we weten dat zit dus op één drie vierde pi. Kun je dat misschien omrekenen daar graden? |
| *Leerling* | Dat kan. Dat is, ehm, 315 graden. |
| *Interviewer* | Precies dus dat is deze hoek. Nou, en wat weet je van de hele cirkel? |
| *Leerling* | 360 graden. |
| *Interviewer* | Dus hoe groot wordt die hoek [*wijst naar hoek van 45 graden*]? |
| *Leerling* | 65 dan. |
| *Interviewer* | Bijna. |
| *Leerling* | [*Stilte*] |
| *Interviewer* | Je zei 360 de hele cirkel en deze hoek was? |
| *Leerling* | Ah, 45. |
| *Interviewer* | Ja, dan wordt die 45. |
| *Leerling* | Ja dus deze ook. |
| *Interviewer* | Precies, oké, dus die wordt 45 graden en die ook. |
| *Leerling* | Ja. [*Gaat verder met tekenen*] En ehm, ja, die zijn even lang.  |
| *Interviewer* | Ja, omdat even grote hoeken zorgt dus voor gelijke benen. |

| | |
|---|---|
| *Leerling* | Ja. |
| *Interviewer* | Ja, en dan? |
| *Leerling* | Ja, en dan… |
| *Interviewer* | Nou als je ze even bijvoorbeeld allebei x noemt, want ze zijn even lang, wat kan je dan doen? |
| *Leerling* | Ja met Pythagoras. Dan krijg je x kwadraat is gelijk aan één. |
| *Interviewer* | Bijna ja, kan je hem uitschrijven, Pythagoras? |
| *Leerling* | [*Schrijft*] Ja, ehm kan dat? |
| *Interviewer* | Kan dat, min wortel half? |
| *Leerling* | Nee hier niet.<br> |
| *Interviewer* | Precies, want je hebt te maken met een afstand. Nou, dus de cosinus van één drie vierde pi. Daar komen we nu uit, dat is de wortel van een half. Nu nog één vraagje, want ik vroeg om de cosinus van één drie vierde pi, maar eigenlijk heb je nu de cosinus van 45 graden berekend. Waarom is dat hetzelfde? |
| *Leerling* | Omdat, ehm, ja die 45 graden, dat is die laatste vierde. |
| *Interviewer* | Ja, ja waar ik eigenlijk nog op wil komen is als je de cosinus van 45 graden neemt, dan neem je hem eigenlijk zo [*gebaart*]. Want zo ga je 45 graden met de klok mee. Maar het x-coördinaat hier is precies hetzelfde als het x-coördinaat hier vanwege de spiegeling. Dus daarom werkt dat. Maar verder heel goed. Dank je wel. Ehm, wat betekent de sinus van een negatieve hoek? |
| *Leerling* | Het y-coördinaat van een negatieve hoek. |
| *Interviewer* | Ja, en wat is een negatieve hoek? |
| *Leerling* | Tegen de klok in. |
| *Interviewer* | Precies. En in welke kwadranten van het assenstelsel is de sinus negatief? |
| *Leerling* | In drie en vier. De y is dan min. |
| *Interviewer* | Precies de y is dan min, en de sinus gaat om de y. Oké. Ehm, dan de vraag, en die je ook al vanochtend hebt gekregen: wat zijn radialen en wat hebben ze te maken met de eenheidscirkel? |
| *Leerling* | Één radiaal staat gelijk aan 180. Ehm, ja 180 graden is precies pi radialen. |
| *Interviewer* | Ja, precies. Oké, en wat meet je met radialen? |
| *Leerling* | Ehm. |
| *Interviewer* | Want meet je met graden? |
| *Leerling* | De hoek. |
| *Interviewer* | Dus wat meet je met radialen? |

| | |
|---|---|
| *Leerling* | Ook de hoek. |
| *Interviewer* | Ook de hoek. Ja, het is een andere manier om een hoek te meten. En hier zeiden we inderdaad telkens, nou dan is dus die hoek in radialen gelijk aan die booglengte. Waarom is dat zo? Wat is er zo speciaal aan die eenheidscirkel dat dat zo is? |
| *Leerling* | Omdat, ehm, de straal precies één is, dus dandat dan ja. Dan kan je die pi wegdelen ofzo. |
| *Interviewer* | Ja nou, dat klopt. Want weet je nog dat voorbeeld inderdaad dat we een cirkel hadden met straal drie? Toen kon je ook wel graden omrekenen naar radialen maar dat werd wat ingewikkelder. En dat komt doordat radialen altijd te maken hebben met de booglengte. maar ook met de straal. En omdat de straal hier één is, heeft het alleen nog maar te maken met de booglengte. Oké, ehm, nou, je zei het al een beetje, maar hoe kan je graden omrekenen naar radialen? |
| *Leerling* | Delen door 180 keer pi. |
| *Interviewer* | Oké, kan je dat voordoen voor 225 graden? |
| *Leerling* | 225 delen door 180 en dan... |
| *Interviewer* | Daar mag je wel even een rekenmachine bij gebruiken hoor. |
| *Leerling* | Ja één één vierde pi. Rad. |
| *Interviewer* | Precies, dat wilde ik nog even horen. Het wordt één één vierde pi radialen ja. En dat is gewoon de afkorting. Oké. Dan nog één laatste vraag: wat is de input en de output van de sinusfunctie? |
| *Leerling* | Ehm, input is eigenlijk ook ehm, de aantal graden is wat je er in stopt. En dan daaruit krijg je de y-as, ja de y-waarde. Ja bij bijvoorbeeld 90 graden dan is de y-waarde dus één. |
| *Interviewer* | Dus het punt op die cirkel waarvan je het wil weten. Ja, heel goed, dat is eigenlijk alles wat ik wilde weten. Dus ik ga de opname. [**Einde opname**] |