

Een framework voor het gebruik van Geschiedenis van de Wiskunde in de les

Onderzoek van Onderwijs 10 EC

A.S.D. de Leeuw (s1693956)

Begeleiders: Dr.ir. T.J.M. Coenen, H.M. Mul, MSc

31 januari 2024

Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
1.1	Onderwerp en onderzoeksprobleem	3
1.2	Belang van onderzoek	3
1.3	Hoofdvraag en ontwerpdoel	3
2	Theoretisch kader	5
2.1	Waarom GW gebruiken in de wiskundeles?	5
3	Methode	10
3.1	Aanvullingen van een expert	12
4	Resultaten	13
4.1	Hoe kan de docent GW gebruiken?	13
4.2	Voorbeeld van het doorlopen van het framework	18
5	Conclusie en Discussie	21
6	Referenties	23
7	Bijlagen	25
A	Keuzelijst voor de docent met literatuurverwijzingen	25
B	Onderscheid doel en hulpmiddel	27

Samenvatting

In dit onderzoek is gekeken naar het gebruik van Geschiedenis van de Wiskunde (GW) in de wiskundeles. Er is een uitgebreide literatuurstudie gedaan betreffende het gebruik van GW in de wiskundeles. Binnen de huidige literatuur ontbreekt een duidelijk overzicht voor de docent hoe hij/zij GW kan gebruiken in de wiskundeles en wat voor doel hij/zij daarmee kan bereiken. Om het 'kennis-gat' tussen de literatuur en de praktijk van de docent te verkleinen en de docent een handvat te bieden om GW te gaan gebruiken in de wiskundeles, is dit onderzoek verricht. Hiervoor is de huidige literatuur binnen het theoretisch kader uiteengezet, waar duidelijk wordt waarom GW de leerlingen kan helpen in de wiskundeles en eveneens waarom GW de docent kan helpen in zijn/haar lessen. Om vervolgens een handvat te bieden waarin de docent begeleid wordt in het gebruik van GW in de wiskundeles, is er een framework opgezet. Vanuit de literatuur is er een concept framework opgesteld, dat verbeterd is na feedback van een expert binnen dit vakgebied en de begeleiders van dit onderzoek. De docent wordt geholpen bij het doorlopen van het framework door middel van een keuzelijst, waar hij/zij voorkeuren kan aankruisen wat hij/zij wil bereiken met de les. Op basis van deze voorkeuren, komt de docent uit bij een bepaald punt binnen het framework, zodat hij/zij weet hoe GW het beste gebruikt kan worden door hem/haar om het lesdoel te behalen. Het gepresenteerde framework dicht daarbij het huidige 'kennis-gat' tussen de literatuur en de praktijk, waardoor de docent nu over verscheidene handvatten beschikt die de opstap naar het gebruik van GW binnen de wiskundeles vergemakkelijken. Het framework zorgt ervoor dat de docent de GW gemakkelijker kan gebruiken in de wiskundeles en ook weet op welke manier hij/zij dat kan doen, doordat de docent geholpen wordt bij het doorlopen van het framework middels een keuzelijst en een overzicht van desbetreffende literatuur van de GW tot zijn/haar beschikking heeft. Het framework dient nog getest te worden in de praktijk, om de werkbaarheid van het framework te bepalen en eventueel het framework nog te perfectioneren. Dit onderzoek heeft zodoende de basis gelegd voor een gemakkelijk gebruik van GW binnen de wiskundeles voor de docent, waarbij tevens duidelijk wordt hoe de docent GW dan in de les kan gaan gebruiken. Leerlingen worden hierdoor geholpen in het verkrijgen van een breder en gevarieerder beeld van de wiskunde, waardoor hun leerproces wordt ondersteund.

1 Inleiding

1.1 Onderwerp en onderzoeksprobleem

Voor de docentenopleiding heb ik het vak 'Geschiedenis van de Wiskunde' gevolgd bij Mastermath. Ik vond het enorm interessant om te leren over de geschiedenis, omdat duidelijk werd waarom de mensheid bijvoorbeeld begonnen is met de invoering van een logaritme. Waarom was dat nodig? Waar liepen we als mensheid toen tegenaan? Dat zijn voorbeelden van vragen die nauwelijks gesteld worden in een doorsnee wiskundeles op het middelbaar onderwijs. Ik kreeg hierdoor het idee om dit te gaan onderzoeken. Na een tijd op het internet gezocht te hebben in de literatuur over deze vraagstelling, kwam ik erachter dat er voldoende artikelen geschreven zijn over geschiedenis van de wiskunde in de wiskundeles. Er worden zowel voordelen als nadelen beschreven, maar geen enkel artikel bood een aanpak voor de docent hoe hij/zij dan de Geschiedenis van de Wiskunde (GW) kon gaan gebruiken in de les. In de literatuur is op verschillende vlakken onderzoek gedaan waarom GW juist goed (of juist niet) kan zijn voor de leerling/les, maar ik miste in de literatuur een duidelijk overzicht voor de docent. Het ene artikel gaf andere redenen voor dan wel tegen dan het andere artikel, waardoor er geen overzicht was te vormen betreffende het gebruik van GW in de les. Naast dit overzicht dat ontbreekt, mist er een handvat voor de docent: er wordt nergens beschreven hoe een docent GW dan kan gaan gebruiken binnen zijn/haar eigen les. Die vertaalslag, van het onderzoek dat gedaan wordt naar de praktijk, dat ontbreekt dus in de huidige literatuur. Dit vormde dan ook het beginpunt van mijn onderzoek.

1.2 Belang van onderzoek

Met dit onderzoek hoop ik het gat tussen het onderzoek dat gedaan is/wordt naar het gebruiken van GW in de wiskundeles en de praktijk van de docent in het middelbaar onderwijs te verkleinen. Ik ben van mening dat dit om verscheidene redenen van belang is. Allereerst wil ik een overzicht geven van het huidige onderzoek dat gedaan is naar het gebruik van GW, zodat docenten, docent-opleiders en de middelbare scholen toegang hebben tot een overzicht waarin de voordelen en nadelen van het gebruiken van GW in de wiskundeles beschreven staan. Dat biedt voor deze partijen de mogelijkheid om juist wel/niet hierin te investeren, door bijvoorbeeld een of meerdere lessen aan te passen of de hele opzet van het vak wiskunde op de schop te nemen.

Bij het theoretisch kader heb ik dit overzicht vormgegeven, door het uiteenzetten waarom GW de leerlingen kan helpen (of juist niet) bij wiskunde, en op welke vlakken het de leerlingen dan wel/niet helpt. Door deze verdieping eindig ik het theoretisch kader met een overzicht van de alreeds onderzochte aspecten binnen dit onderwerp. Naast deze uiteenzetting, zal ik ook ingaan op de wijze waarop de geschiedenis van de wiskunde gebruikt zou kunnen worden in de les door een docent.

Naast dit overzicht, is het van belang dat de docenten vervolgens een handvat hebben om hun les dan ook aan te kunnen passen. Daarmee wordt het belang van dit onderzoek voor de docenten wiskunde aanzienlijk verhoogd, omdat dit onderzoek specifiek gericht is op het toepasbaar maken van het gebruik van GW in de wiskundeles. Dit onderzoek onderscheidt zich dan ook van vele andere onderzoeken, omdat het voornamelijk gericht is op de praktijk van de docent in plaats van het onderzoeksdomein.

1.3 Hoofdvraag en ontwerpdoel

Vanuit het overzicht dat volgt uit het theoretisch kader, wordt een handvat gevormd voor de wiskundedocent. Ik zal dan ook een framework creëren dat een wiskundedocent kan gebruiken en op basis van dat framework eenvoudig tot een keuze geleid kan worden: op welke manier kan ik GW gaan gebruiken in mijn eigen les om mijn eigen doel voor de les te bereiken? Door het framework te gebruiken hoeft een docent die eerste stappen dan dus niet zelf te bedenken, maar wordt hij/zij geleid door deze keuzes en krijgt daardoor dus een opstapje om de geschiedenis van de wiskunde toe te kunnen passen in de praktijk. Op basis van deze literatuurstudie hoop ik dan ook ontwerpdoelen op te kunnen stellen, waardoor ik een framework op kan stellen dat voldoet aan deze eisen.

De hoofdvraag van dit onderzoek is dan ook: In hoeverre helpt een framework, gebaseerd op literatuur betreffende het gebruik van Geschiedenis van de Wiskunde in de wiskundeles, de docent bij de keuze hoe hij/zij GW het beste kan gebruiken in zijn/haar eigen les?

Subvragen:

- Wat zijn argumenten vóór gebruik van geschiedenis van de wiskunde in de wiskundeles?
- Wat zijn argumenten tegen gebruik van geschiedenis van de wiskunde in de wiskundeles?
- Wat zijn mogelijke doelen van de docent om Geschiedenis van de Wiskunde te gebruiken in de wiskundeles(sen)?
- Op welke wijze kan een docent Geschiedenis van de Wiskunde incorporeren in de wiskundeles(sen)?

Daarbij is het ontwerpdoel om een framework te ontwerpen op basis van de literatuur, dat de docent eenvoudig kan gebruiken om zijn/haar les in te richten waarbij hij/zij gebruik maakt van GW.

2 Theoretisch kader

In dit theoretische kader worden de voor- en nadelen van het gebruiken van GW in de wiskundeles toegelicht. In dit deel wordt dan ook voornamelijk beschreven waarom een docent wel/niet de GW kan gebruiken in de les. Op basis van dit theoretisch kader is uiteindelijk een framework opgesteld. Dit framework kan de docent gebruiken om te bepalen hoe hij/zij GW wil gaan gebruiken in zijn/haar les. Dit framework is te zien bij de resultaten. Voordat er dus beschreven wordt hoe de docent GW kan gebruiken, wordt allereerst beschreven waarom een docent GW juist wel of niet wil gebruiken in de les. Hiervoor is het belangrijk dat het duidelijk is, wat precies onder GW wordt verstaan. De literatuur geeft hier geen precieze definitie over, al geeft Yuste (2010) een beschrijving van wat wiskunde leren door middel van GW betekent: het manipuleren van objecten, het weergeven van hoeveelheden en beelden, het sorteren en classificeren en figuren opstellen, om vervolgens een concept te onttrekken: het getal van de hoeveelheid, de geometrische vorm van het beeld, en de abstracte relatie van de meetkundige compositie om zo uiteindelijk de discipline te ontdekken van deze ideeën: rekenkunde, meetkunde en algebra (Yuste, 2010). Daarmee geeft Yuste (2010) aan dat, door verschillende manieren, GW de ontdekkingen van de wiskunde omvat. Dat is dan ook de definitie van GW in dit onderzoek: GW omvat het ontstaan van alle huidige ontdekkingen binnen de Wiskunde, op welke wijze die ontdekking werd gedaan (bijvoorbeeld welke methodes en notaties er destijds werden gebruikt) en welke gevolgen die ontdekking had (bijvoorbeeld hoe de wiskunde vervolgens veranderde).

2.1 Waarom G W gebruiken in de wiskundeles?

Er is veel onderzoek gedaan waarom GW gebruikt zou kunnen worden in de les. De GW wordt namelijk al sinds de jaren 60 gebruikt in de wiskundeles (Fried, 2001), maar de rol van het gebruik van de GW in de uitleg en het leerproces is de laatste 20 jaar gestegen (Fauvel & Maanen, 1997; Schubring e.a., 2012). Er zijn verschillende redenen waarom het gebruik van GW in de wiskundeles is gestegen. In algemene zin is de kijk op het wiskundeonderwijs de laatste jaren veranderd, waarbij er meer wordt gekeken vanuit de leerling en hoe een abstract vak zoals wiskunde de leerling kan prikkelen: leerlingen moeten zich bewust worden dat wiskunde hun leven kan vereenvoudigen (Göktepe Yildiz & Özdemir, 2013). Wiskunde moet dan ook aangeleerd worden in een omgeving waar studenten wiskunde willen leren en grotendeels zelfstandig met de wiskunde aan de slag kunnen gaan. De docent speelt een cruciale rol bij het instrueren van de leerlingen voordat zij zelfstandig aan de slag gaan, omdat hij/zij aan de hand van een effectieve wiskunde instructie de leerlingen wiskundige concepten betekenisvoller alsmede interessanter kan laten ervaren (Carter, 2006). De wiskunde wordt dan minder als abstract vak of discipline gezien, waardoor de leerlingen anders tegen het vak aan zullen kijken. De GW kan dan ook helpen om deze doelen te bereiken (Göktepe Yildiz & Özdemir, 2013).

Voordat argumenten worden aangehaald waarom het gebruik van GW in de wiskundeles een positief effect heeft op de leerlingen, is het van belang dat er stil wordt gestaan bij het belang voor de docent. Zo geeft Fried (2001) aan dat de docent eveneens de eigen historie van de wiskunde leert en laat Liu (2003) zien dat het gebruik van GW ook als handleiding voor de les kan dienen voor de docenten. De kennis van de docent over de GW wordt groter wanneer hij/zij (meer) GW in de les gebruikt. Deze grotere kennis biedt de docent dan ook handvatten om obstakels bij leerlingen in het leren van de wiskunde te anticiperen (Looy, 1980; Struve, 1996; Waldegg, 1997). Er is namelijk een connectie tussen de fouten die leerlingen maken, obstakels van deze fouten in het leren van de wiskunde bij de leerlingen en de historische ontwikkeling van de wiskunde zelf (Schubring, 1988). De GW kan de docent dan dus helpen om dergelijke obstakels in het leren van de wiskunde in de stof te voorzien, waardoor de docent zijn/haar les beter af kan stemmen op de leerlingen. Sfard ondersteunt dit, omdat volgens haar GW de docenten helpt in het herkennen van fouten en misconcepties bij leerlingen en de docent zodoende beter op de hoogte is van waar leerlingen vandaag de dag tegenaan lopen in de wiskundeles (Sfard, 1994). Naast dat docenten dus een belang hebben om GW te gebruiken in de les om een beter beeld te vormen van waar de leerlingen tegenaan lopen, biedt het gebruik van GW de docent de mogelijkheid om overbruggende curriculaire stappen te

leggen tussen wiskunde en andere vakken zoals natuurkunde (Bkouche, 1990).

Het gebruik van GW biedt niet alleen meer mogelijkheden voor de docent om verbanden te leggen met andere vakken, maar de docent kan door gebruik van GW zijn/haar eigen les 'levendiger' maken. Gulikers en Blom beschrijven namelijk dat GW meer dynamiek in de klas teweeg brengt en daarmee een levendige klas-atmosfeer gecreëerd wordt (Gulikers & Blom, 2001). Die dynamiek en levendige atmosfeer is erg voordelig voor de docent, aangezien een les die meer interessant wordt bevonden door de leerlingen een les is die meer succesvol is (Perkins, 1991). Perkins liet namelijk zien dat wanneer lessen door leerlingen interessanter worden bevonden, zij vervolgens betere resultaten haalden voor het vak. Dan als laatste, wellicht een argument dat vaak over het hoofd wordt gezien, biedt GW veel (nieuw) bruikbaar materiaal dat het eigen enthousiasme van de docent kan stimuleren. Het enthousiasme kan namelijk stijgen voor een bepaald onderwerp doordat hij/zij nieuwe inzichten krijgt van bijvoorbeeld de ontwikkeling van wiskundige ideeën vanuit de GW (Gulikers & Blom, 2001). Dat is van belang, omdat leerlingen aangeven dat zij het enthousiasme van de docent één van de belangrijkste eigenschappen van een docent vinden. Tevens heeft het enthousiasme van de docent een positieve impact op de motivatie van leerlingen voor desbetreffend vak (Moë & Katz, 2022), dit geeft aan dat er overlap is tussen argumenten die een positief effect hebben op de docent en de argumenten die een positief effect hebben op de leerlingen (zie volgende alinea). Bovenstaande argumenten voor docenten worden uiteindelijk geschaald door Fried in twee doeleinden: GW helpt docenten bij de wiskundeles én de docent leert zelf eveneens meer over de historie van de wiskunde (Fried, 2001).

Er worden in de literatuur eveneens vele argumenten aangehaald waarom gebruik van GW eveneens een positief effect heeft op de leerlingen. Zo worden er door Liu (Liu, 2003) vijf redenen gegeven waarom de docent de GW moet gebruiken in de wiskundeles. De eerste reden focust zich nog op een positief effect voor de docent zelf, de overige vier redenen focussen zich op het positieve effect voor de leerlingen:

1. GW biedt de docent een handleiding voor het geven van lessen

De docent kan de GW gebruiken om zijn/haar lessen in te richten. Dat kan natuurlijk op verschillende manieren, maar de GW kan hier wel een basis voor bieden. Het blijkt namelijk dat de meest natuurlijke manier voor leerlingen om wiskunde te leren de manier is wanneer GW gebruikt wordt, oftewel, wanneer het brein van de leerling kan ervaren hoe de eerdere generaties de wiskunde doorgemaakt hebben. Hierdoor kan de docent snel schakelen naar opeenvolgende stappen binnen een onderwerp, omdat deze op een logische chronologische wijze door de geschiedenis heen worden gedoceerd waarbij er dus geen grote stappen worden overgeslagen (Gulikers & Blom, 2001). Er ligt hier wel een uitdaging voor de docent, want het vormen van een relatie tussen begripsvorming van wiskundige concepten en de evolutie van deze concepten door de geschiedenis heen is lastig te visualiseren (Byers, 1982). Byers benoemt hier namelijk dat het van belang is dat de docent een uitgebreid beeld heeft, maar zichzelf makkelijk kan verliezen in het vele historische materiaal. Een keuze maken hoe en welk onderdeel de docent dan belicht, en welk deel ook niet, dat is vanwege de enorme hoeveelheid aan informatie en een gebrek aan overzicht over deze informatie erg lastig.

2. Historische kennis verhoogt de motivatie van studenten en helpt hen een positieve houding aan te nemen tegenover wiskunde

Hier sluiten meerdere bronnen zich bij aan. GW blijkt namelijk een effectieve methode om studenten te motiveren (Fauvel, 1991; Swetz, 1994), door die effectiviteit lijkt GW dus een handige 'tool' om als docent in je gereedschapskist te hebben. De positieve houding van leerlingen die Liu aanhaalt, wordt eveneens ondersteund door meerdere bronnen. Zo bemerkten studenten met een negatieve houding tegenover de wiskundeles dat hun houding naar een positieve houding veranderde wanneer GW werd gebruikt in de wiskundeles (Marshall, 2000). GW heeft daarbij niet alleen een positieve invloed op studenten die een negatieve houding

hebben tegenover het vak wiskunde, maar GW beïnvloedt de houding van een leerling altijd in positieve zin (Alpaslan, 2011; Gönülateş, 2004; Gürsoy, 2010; McBride & Rollins, 1977).

3. Het zien van de obstakels waar men tegen aanliep gedurende de ontwikkeling van wiskunde stelt hen in staat om dergelijke moeilijkheden in de toekomst te voorzien.

Een verkenning van GW door de leerlingen helpt de docent dan ook om de motivatie van de leerlingen (en daarmee hun interesse) te verhogen: de wiskundeles kan bijvoorbeeld minder 'angstaanjagend' maar juist leuker en spannender worden, en stelt het de slimme leerlingen in de klas in staat om verder te kijken dan zij gewend zijn (Byers, 1982; Siu & Siu, 1979). Naast het feit dat leerlingen dus zien hoe wiskundigen vroeger tegen problemen aanliepen en daarmee omgingen, waardoor leerlingen beter met dergelijke problemen op hun eigen pad om kunnen gaan, geeft de ontwikkeling van wiskunde door de jaren heen de leerling nog meer mee. Zo laat het de leerling eveneens het veranderende en evoluerende karakter van de wiskunde zien (Karakuş, 2009). Daarmee ziet de leerling dus dat wiskunde zoals ze dat vandaag de dag kennen er niet altijd is geweest, en dat de wiskunde nog steeds wordt aangevuld met nieuwe inzichten. Van Breugel gaf dit al aan in 1987, hij liet zien dat kennis bij 'de lerende' (de leerling) over hoe wiskundige concepten zich hebben ontwikkeld door de jaren heen ervoor zorgt dat 'de lerende' een betere begripsvorming heeft (Breugel, 1987). Dat vormt dan ook het derde punt van Liu:

4. Problemen vanuit de geschiedenis oplossen helpt leerlingen in hun ontwikkeling van wiskundig denken

Als de docent dus laat zien dat wiskunde meer is dan een abstract vak en 'uitgevonden' is door verschillende mensen gedurende de geschiedenis, zorgt dit ervoor dat de wiskunde concreter wordt voor de leerling en de leerling meer inzicht verkrijgt (Gulikers & Blom, 2001). Naast een betere begripsvorming, biedt het de leerlingen ook een geruststelling. Het is helemaal niet erg als je als leerling de stof niet direct snapt, of dat je fouten maakt in het begin. De leerlingen zien namelijk in dat, doordat ze de ontwikkeling van de wiskunde door de jaren heen bekijken, de wiskundigen destijds bij het tot stand komen van hun ideeën óók hun twijfels hadden en fouten maakten (Arcavi, 1991; Ofir, 1991). Dat is van belang, omdat normaliter de leerlingen alleen maar te horen krijgen hoe goed deze wiskundigen waren en hoe handig hun ideeën zijn. Het stelt de leerlingen dan gerust, omdat zij dus niet de enigen zijn die tegen problemen aanlopen en fouten maken. Hierdoor raken de leerlingen ook minder ontmoedigd wanneer ze een keer iets niet direct begrijpen of fout doen (Gulikers & Blom, 2001).

Dit belang wordt door andere bronnen ondersteund, omdat GW de leerlingen de mogelijkheid biedt om op een andere manier te leren. In een wiskundeboek worden de wiskundige ideeën namelijk getoond alsof deze overgang erg logisch is en soepel verloopt, terwijl dit helemaal niet zo is (Grootendorst, 1982). Dat wordt eveneens beschreven door Freudenthal, die dit proces als 'anti-didactische inversie' beschrijft (Freudenthal, 1962). Een belangrijk punt dat Freudenthal in de jaren 60 al aanstipte, is dat het onderliggende probleem werd vermeden. Zodra een probleem was opgelost, werd dit vertaald naar een theorie en die theorie werd vervolgens gedoceerd aan de leerlingen. Een referentie naar het achterliggende probleem, wordt vrijwel altijd overgeslagen. Wanneer de docent GW dus toepast in de les, worden achterliggende problemen wel toegelicht voor de leerlingen. De leerlingen zien in dat de 'gepresenteerde wiskunde' in hun wiskundeboeken dus daadwerkelijk anders is dan de 'wiskunde in ontwikkeling', met name omdat dit dus erg verschilt met hoe deze wiskundige ideeën ontdekt/uitgevonden werden (Gulikers & Blom, 2001). Hierdoor leren leerlingen om zelf hun eigen pad uit te stippen, waarbij de obstakels die zij tegenkomen als minder negatief worden ervaren. Hierdoor zal een leerling zien niet snel opgeven, maar juist een weg vinden naar de oplossing. In andere woorden, de leerling leert om te gaan met problemen en hoe hij/zij deze kan overwinnen door er op verschillende manieren naar te kijken. De leerling vindt dus een balans tussen strikt-

heid en verbeelding: hij/zij zal niet hals over kop springen naar ongegronde conclusies, maar neemt de tijd om stil te staan en vanuit verschillende hoeken naar het probleem te kijken (dat overigens de natuurlijke wijze is waarop ons brein functioneert) (Siu & Siu, 1979). De leerling zorgt dan dus zelf voor een soepel leerproces. Deze redentatie wordt ondersteund door andere bronnen: zo geven Byers en Ransom aan dat gebruik van GW ervoor zorgt dat leerlingen alternatieve oplossingsmethodes toegereikt krijgen, waardoor de leerlingen een probleem vanuit verschillende kanten kunnen benaderen en het de leerlingen ook aan het denken zet (Byers, 1982; Ransom, 1991).

5. GW laat een menselijke kant zien van wiskunde (Liu, 2003)

Wiskunde wordt vaak als een erg abstract vak gezien, waardoor leerlingen het vaak lastig vinden om de stof te relateren aan hun omgeving. Om dat te vergemakkelijken, kan de docent GW gebruiken in de les. GW kan de leerlingen namelijk helpen om de rol van wiskunde binnen de maatschappij toe te lichten (Gulikers & Blom, 2001). Wiskunde is namelijk, zoals hierboven is toegelicht, niet iets dat er altijd al was: de wiskunde is door de jaren heen ontstaan, aangepast en aangescherpt. Dit laat de leerlingen dan ook zien dat wiskunde gezien kan worden als een menselijke activiteit en niet alleen als een systeem met strikte waarheden (Kronfeller, 1997). Wanneer leerlingen overigens inzien dat wiskunde dus ook een menselijke kant heeft, blijkt dit niet alleen een stimulerend effect op leerlingen te hebben maar tevens een stimulerend effect op de docent doordat de leerlingen in de les enthousiaster worden (Gulikers & Blom, 2001). Gebruik van GW biedt de docent overigens een goede gelegenheid om de interesse van vrouwelijke leerlingen te wekken, omdat de GW laat zien dat er veel vrouwelijke wiskundigen zijn geweest die hebben bijgedragen aan de ontwikkeling van de wiskunde. Het blijkt dat de vrouwelijke leerlingen hierdoor inzien dat zij als vrouw niet 'anders' gezien worden binnen de wiskundige wereld (Downes, 1997). Ondanks dat Downes dit aantoonde in 1997, is het vandaag de dag nog steeds van belang dat er aandacht wordt besteed aan de vrouwelijke leerlingen in de klas. Mesman e.a. liet namelijk in 2019 zien dat vrouwen systematisch onder-representeerd zijn in boeken voor zowel het vak Nederlands als wiskunde, waarbij er zowel in de tekst als op afbeeldingen minder vrouwen te zien waren (Mesman e.a., 2019).

Naast deze argumenten, is er nog een losstaand argument waar de GW onderdeel vanuit kan maken. In 1996 presenteerden Stein en Lane de vier verschillende cognitieve niveaus waar een leerling zich in kan bevinden (Stein & Lane, 1996). Het eerste niveau omvat taken die een reproductie zijn voor de leerling zonder daarbij enige relatie te hebben met onderliggende concepten of betekenissen. Het tweede niveau omvat algoritmische taken waarbij de leerling alreeds bekende vaardigheden/stappen gebruikt. Het is daarbij mogelijk, dat de docent de leerling nog naar het derde of vierde cognitieve niveau kan brengen. Het derde niveau omvat namelijk activiteiten waarin de leerling inzicht krijgt in onderliggende concepten en het gebruik van verschillende representaties. De leerling krijgt hierdoor idealiter een dieper en betekenisvoller begrip van het betreffende wiskundige concept. Als de leerling daarbij complexe stappen dient te zetten dan wel creatief na moet denken om daarbij het wiskundige concept compleet te doorgronden en relaties met andere concepten te leggen, begeeft hij/zij zich in het vierde cognitieve niveau. Het kan lastig zijn voor de docent om een manier te vinden waarbij hij/zij leerlingen naar het derde of vierde niveau kan brengen. De GW kan hierbij helpen.

Er blijven echter praktische bezwaren vanuit docenten om GW te gebruiken. De argumenten die dan aangehaald worden zijn: docenten hebben onvoldoende expertise op dit vlak, docenten hebben niet/nauwelijks toegang tot de juiste materialen om GW te gebruiken in de les (daarnaast ontbreekt er ondersteunend materiaal, zoals didactische richtlijnen en beschrijvingen vanuit de praktijk, hoe de docent GW dan ook toe kan passen in de les) en als laatste geven veel docenten aan geen tijd te hebben om GW te gebruiken in hun les (Fauvel, 1991; Fowler, 1991). De docenten geven daarbij aan dat het veel tijd kost om te bedenken hoe zij dan GW kunnen gebruiken en het materiaal bruikbaar te maken voor leerlingen. Dit laatste argument is natuurlijk relatief, zo geven Gulikers en Blom ook aan, dat wanneer het materiaal er eenmaal is en door de jaren heen verbeterd wordt

dan ook eenvoudig hergebruikt kan worden en zijn positieve invloed op de kwaliteit van uitleg en leren behoudt (Gulikers & Blom, 2001).

Het komt er op neer dat er een 'kennis-gat' is tussen het onderzoek dat gedaan wordt naar GW in de wiskundeles en een handleiding hoe een docent GW dan ook kan gebruiken in de wiskundeles. In het volgende deel wordt dan ook ingegaan op hoe een docent dit zou kunnen doen. Daarbij staat de volgende hoofdvraag centraal: In hoeverre helpt een framework, gebaseerd op literatuur betreffende het gebruik van Geschiedenis van de Wiskunde in de wiskundeles, de docent bij de keuze hoe hij/zij GW het beste kan gebruiken in zijn/haar eigen les? Met deze vraag in gedachten, is het framework opgesteld dat in de volgende paragraaf wordt toegelicht. Bij de discussie zal dan ook in worden gegaan op de aanbevelingen die voortvloeien vanuit dit onderzoek om onder andere het framework in de praktijk te gaan testen.

3 Methode

In de vorige sectie is beschreven waarom een docent GW zou kunnen gebruiken in de wiskunde-les. De volgende vraag is vervolgens hoe een docent dat dan ook kan gaan doen. Om die vraag te beantwoorden, is er een framework opgesteld op basis van de literatuurstudie. Het framework dat is opgesteld wordt bij de resultaten toegelicht, waarbij eveneens een concreet voorbeeld wordt gegeven over hoe een docent het framework zou kunnen doorlopen. Voordat de eindversie van het framework was opgesteld, is er door een expert binnen dit vakgebied gekeken naar een conceptversie. De aanvullingen van deze expert worden in de volgende paragraaf besproken. Allereerst worden de ontwerpeisen en de kaders toegelicht, waarna de conceptversie van het framework getoond wordt.

Er zijn ontwerpeisen opgesteld op basis van het theoretisch kader, zodat het duidelijk is waar het framework aan moet voldoen. Uiteindelijk moet er door de auteur wel een creatieve stap gezet worden om deze eisen samen te brengen binnen een framework. Die creatieve stap achten Aken en Andriessen namelijk cruciaal in het ontwerpproces: "Een ontwerp kun je niet logisch afleiden uit de input voor het ontwerpproces. Het houdt altijd een creatieve sprong in naar iets dat nog niet bestaat" (Aken & Andriessen, 2011). Om die creatieve sprong te maken, zijn op basis van alle argumenten binnen het theoretisch kader de volgende ontwerpeisen opgesteld:

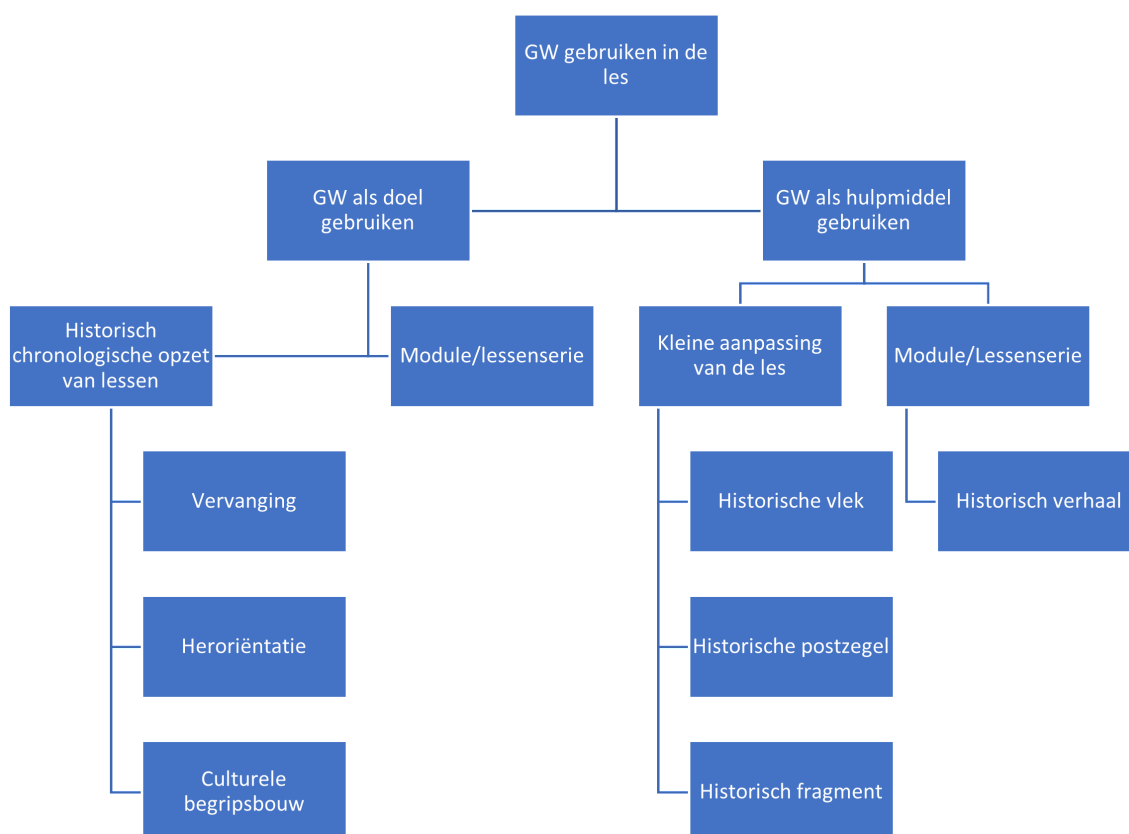
- Het framework moet makkelijk in gebruik zijn: het moet de docent weinig tijd kosten om te bepalen hoe hij/zij GW in zijn/haar les graag wil gebruiken.
- Het framework moet verschillende opties bieden betreffende grootte van het gebruik van GW in de les-opzet (variërend van een erg kleine aanpassing binnen een enkele les tot een lesopzet van meerdere lessen).
- De docent moet het framework zelfstandig kunnen doorlopen, waarbij de verschillende mogelijkheden binnen het framework worden toegelicht.
- Nadat het framework is doorlopen, dient de docent te weten welke opties hij/zij heeft om GW binnen zijn/haar les te gebruiken en wat de rol van de docent en de leerling binnen deze opties zijn.

Op basis van deze ontwerpeisen, is het concept framework opgesteld. In het concept framework is onderscheid gemaakt binnen de GW gebruiken als doel of als hulpmiddel in de les. Het onderscheid doel en hulpmiddel is uiteengezet door Jankvist (2009):

- GW als hulpmiddel in de les gebruiken: leerlingen bestuderen de geschiedenis van de wiskunde niet an sich, maar maken hier kennis mee gedurende de les(sen). Dus: GW gebruiken als hulpmiddel voor het micro-niveau van de wiskunde: de docent kijkt hier naar de interne aspecten van de wiskunde. Dat wil zeggen: aspecten/problemen gerelateerd aan een wiskundige theorie/discipline/methode etc.
- GW als hoofddoel voor de les gebruiken; leerlingen gaan de geschiedenis van de wiskunde zelf bestuderen. Dus: GW gebruiken al doel voor het macro-niveau van de wiskunde: de docent kijkt hier naar de metaperspectieve-aspecten van de wiskunde, oftewel naar de aspecten/problemen die betrekking hebben op wiskunde als gehele discipline (Jankvist, 2009).

Om de docent te helpen in zijn/haar keuze tussen gebruik van GW als doel of als hulpmiddel, is een tabel opgesteld met daarin argumenten die pleiten voor gebruik van GW als doel of als hulpmiddel (zie appendix B). Wanneer GW zowel gebruikt kan worden als doel en hulpmiddel, zijn er volgens Jahnke e.a. (2002) drie mogelijkheden voor de docent om GW te gebruiken: Vervanging, heroriëntatie en culturele begripsbouw (Jahnke e.a., 2002). Jankvist (2009) geeft vervolgens aan dat GW dan, in het geval GW dus zowel als doel en hulpmiddel gebruikt kan worden, de docent dan het beste kan kiezen voor een chronologische opzet van de les (Jankvist, 2009). Deze chronologische opzet van de les wordt beschreven door Tzanakis e.a. (2000) als 'genetisch principe', dat in het concept framework is weergegeven als "Historische chronologische opzet van de lessen".

Na de keuze tussen doel en hulpmiddel, dient de docent te bepalen of hij/zij GW wil gebruiken binnen een les of binnen meerdere lessen. Hiervoor is gebruik gemaakt van de resultaten van Van den Bogaart-Agterberg e.a. (2022), waarbij onderscheid wordt gemaakt tussen de grootte van gebruik van GW binnen de les. De benamingen "historische vlek, postzegel, fragment en verhaal" die in het concept framework worden gebruikt, komen voort uit het artikel van Van den Bogaart-Agterberg e.a. (2022) waarvan elke benaming staat voor een optie betreffende de grootte van het gebruik van GW binnen de les. Door gebruik te maken van de ontwerpisen en deze te verbinden met het gebruik van GW als doel/hulpmiddel binnen een les/meerdere lessen, waarbij enkele creatieve sprongen zijn gemaakt, heeft het framework de volgende vorm gekregen:



Figuur 1: Conceptversie van het framework voor het gebruik van GW in de wiskundeles. GW: Geschiedenis van de Wiskunde.

Hierbij maakt de docent dus eerst onderscheid of hij/zij GW wil gebruiken als doel of hulpmiddel, om vervolgens te kiezen tussen een kleine aanpassing van de les en gebruik van GW binnen meerdere lessen. Het dubbele karakter van de historisch chronologische opzet vond de auteur lastig te plaatsen, dus is er gekozen voor een tak binnen 'GW gebruiken als doel'. Hiervoor is gekozen zodat wanneer de docent GW wil gebruiken als doel, de chronologische opzet dan erg geschikt is voor relatief kleine aanpassingen van de les. Aangezien de auteur zich vastbeet op dergelijke onderlinge verhoudingen binnen het framework, is het framework voorgelegd aan een expert binnen het vakgebied om deze verhoudingen binnen het framework te verbeteren.

3.1 Aanvullingen van een expert

De expert die binnen dit vakgebied benaderd is, is Drs. D.A. Agterberg. De expert gaf aan dat ze het enerzijds lastig vond om het framework te beoordelen, omdat haar eigen werk in het framework naar voren komt (Drs. D.A. Agterberg heeft het artikel geschreven waar onderscheid wordt gemaakt tussen een historische vlek, postzegel, fragment en verhaal (Van den Bogaart-Agterberg e.a., 2022)). Desalniettemin, waren er veel waardevolle opmerkingen geplaatst door de expert. Ze gaf bijvoorbeeld aan dat historisch chronologische opzet niet alleen onder het kopje 'GW als doel gebruiken' geplaatst kon worden, omdat het ook op andere manier gebruikt kan worden door de docent naast een chronologische volgorde. Tevens mist de mogelijkheid voor de docent om zijn/haar eigen doel allereerst op te stellen, om vervolgens te kijken of GW hierbij kan helpen. Daarnaast werd aangegeven dat docenten vaak erg gebonden zijn aan hun boek, waardoor het duidelijk gemaakt moet worden hoe docenten ook een kleine aanpassing kunnen doen in de les zonder 'from scratch' te beginnen. Agterberg gaf tevens aan dat 'historische vlek' een wat negatieve lading had, waardoor dit is aangepast naar 'historische spetter'. Het framework is zodoende aangepast en uiteindelijk, nadat er wederom enkele creatieve sprongen zijn gemaakt in het bepalen van de verhoudingen tussen alle elementen binnen het framework, heeft het zijn uiteindelijke vorm gekregen. Alle opmerkingen van de expert zijn als erg waardevol beschouwd, zodat er nog een keer werd nagedacht over de volgorde/verhoudingen binnen het framework. Hierdoor zijn de delen van het framework beter gedefinieerd. Naast de expert hebben de begeleiders van dit onderzoek eveneens feedback geleverd. Zij zijn geen expert binnen het gebruik van GW in de les, maar wel ervaren docenten binnen wiskunde en maatschappijwetenschappen. Door ook hun feedback mee te nemen, is het uiteindelijke framework beter te begrijpen voor een docent. Zo werd aangegeven dat de tabel weergegeven in appendix B goed was, maar nog niet goed bruikbaar voor de docent. Om de bruikbaarheid te vergroten en het voor de docent gemakkelijker te maken om het framework te doorlopen, is er een keuzelijst gemaakt die de docent helpt bij het doorlopen van het framework.

Voortkomend uit de feedback van de expert en de begeleiders, zijn de volgende extra ontwerpeisen ontstaan die zijn meegenomen voor het creëren van de uiteindelijke versie van het framework:

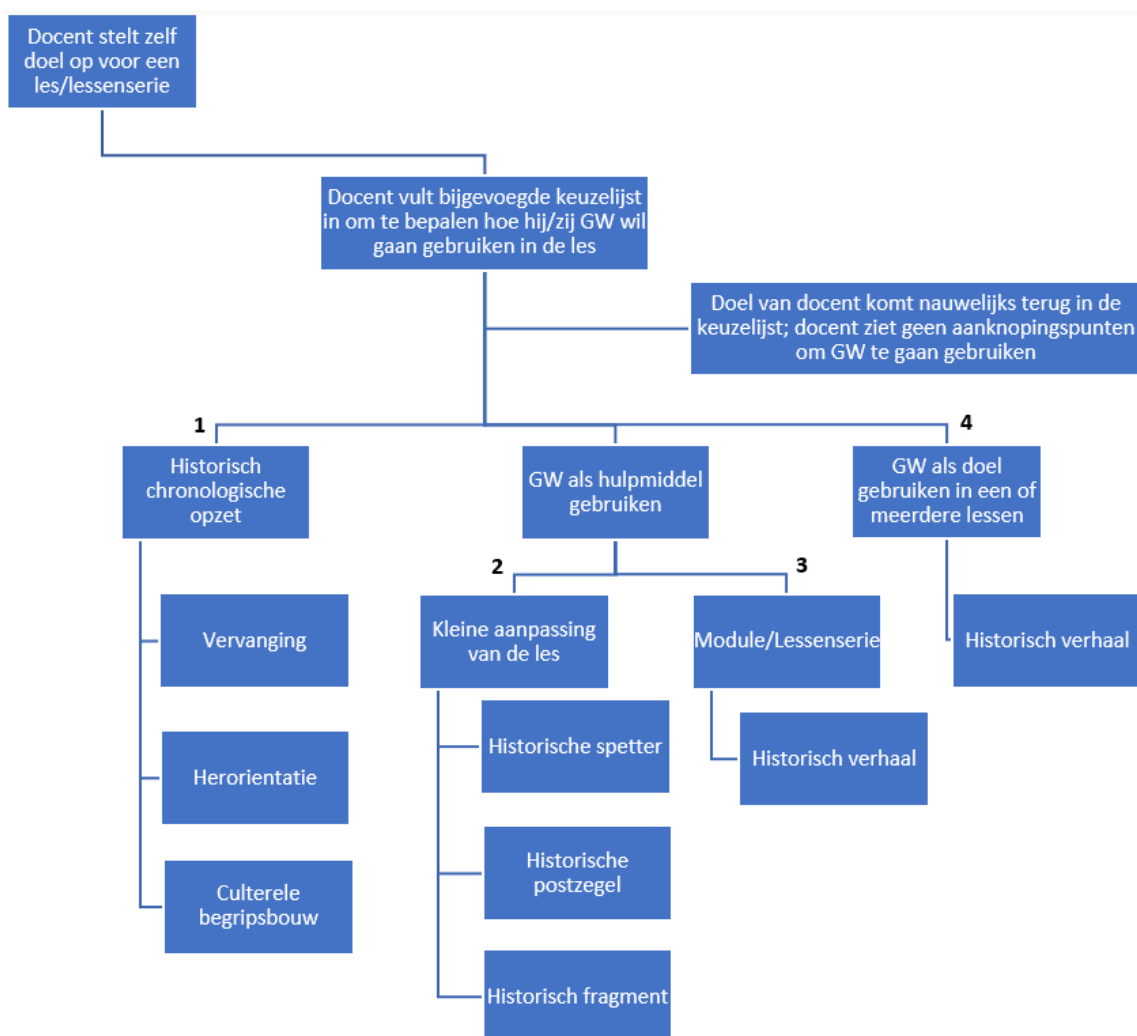
- Wanneer een docent een eigen vooropgesteld doel heeft voor de les of lessenserie, moet het framework de docent leiden naar de best mogelijke toepassing van GW om dat doel te bereiken.
- Bij het doorlopen van het framework, moet de docent op een eenvoudige en snelle manier terecht kunnen komen bij de opties om GW te gebruiken in de les die voor hem/haar het meest geschikt zijn.
- De docent moet na het doorlopen van het framework weten waar hij/zij meer informatie/inspiratie kan vinden om GW te gaan gebruiken in de les, zodat de docent niet 'from scratch' hoeft te beginnen.

Het framework heeft door de feedback van de expert en de begeleiders van dit onderzoek een betere opzet en toelichting gekregen, waardoor dit framework (naar de auteur zijn inziens) beter bruikbaar is geworden voor de docent in de praktijk. Het uiteindelijke framework dat is ontstaan geeft zodoende een opstap voor de docent binnen het gebruik van GW in de wiskundeles. De bruikbaarheid moet nog getest worden in de praktijk, zoals tezamen met andere vervolgstappen zal worden beschreven in de discussie. In de volgende sectie wordt het uiteindelijke framework gepresenteerd, waarna een concreet voorbeeld wordt gegeven om te verduidelijken hoe een docent het framework kan gebruiken. In dit voorbeeld zullen de eerder toegelichte cognitieve niveaus van een leerling terugkomen, om eveneens de rol van GW binnen deze cognitieve niveaus toe te lichten.

4 Resultaten

4.1 Hoe kan de docent G W gebruiken?

Het framework dat is opgesteld, bestaat uit drie delen: het eerste deel omvat het overzicht van alle stappen binnen het framework (zie figuur 2). Het tweede deel omvat een keuzelijst, die de docent nodig heeft om het framework te doorlopen (zie figuur 3). In bijlage A is een tabel te vinden waarin de genoemde doelen in figuur 3 zijn weergegeven, tezamen met de literatuurreferenties vanuit het theoretisch kader waaruit deze doelen voortkomen. Het derde deel van het framework, zie figuur 4, heeft de docent nodig om op basis van de door hem/haar gemaakte keuzes te bepalen waar in het framework van figuur 2 de docent terecht komt. In de tweede paragraaf van deze sectie wordt een concreet voorbeeld gegeven, om het gebruik van het framework te verduidelijken.



Figuur 2: Eindversie van het framework voor het gebruik van GW in de wiskundeles. De cijfers geven de mogelijke opties aan voor de docent om GW te gebruiken. Door gebruik te maken van de keuzelijst, komt de docent bij een van deze cijfers uit. GW: Geschiedenis van de Wiskunde.

Keuzelijst voor de docent		
Doel: Na het invullen van deze lijst, weet de docent waar hij/zij terecht komt in het framework.		
Toelichting: Hieronder staat een keuzelijst van verschillende doelen die je als docent zou kunnen hebben voor de wiskundeles. Vink aan welk(e) doel(en) overeenkomen met het doel dat je als docent zelf hebt opgesteld voor de les, of welke doelen een toevoeging zijn op het door jou opgestelde doel.		
1	Ik wil graag de motivatie van leerlingen verhogen voor een bepaald onderwerp binnen de wiskunde.	
2	Ik wil een negatieve houding van leerlingen tegenover de wiskunde veranderen naar een positieve houding.	
3	Ik wil de leerlingen graag de menselijke kant van de wiskunde laten zien.	
4	Ik wil de wiskunde minder 'angstaanjagend' maken voor leerlingen (Ik wil leerlingen gerust stellen). Slimme leerlingen kunnen hierdoor ook verder kijken dan zij gewend zijn.	
5	Ik wil de leerlingen een ander perspectief bieden om naar de wiskunde te kijken.	
6	Ik wil een onderwerp aanbieden waarbij er gekeken wordt door de ogen van een leerling, in plaats van door de ogen van een docent/volwassene.	
7	Ik wil leerlingen laten zien welke obstakels er zijn geweest bij de ontwikkeling van de wiskunde en deze obstakels identificeren met hen. Als docent kan ik vervolgens fouten/misconcepties van leerlingen herkennen.	
8	Ik wil leerlingen de balans tussen obstakels/moeilijkheden in hun leerproces en een 'soepel proces' binnen de wiskunde laten inzien, waardoor leerlingen de balans vinden tussen de striktheid van de wiskunde en de verbeelding. Leerlingen springen hierdoor minder snel naar ongegronde conclusies en nemen meer tijd om creatief te denken vanuit verschillende hoeken.	
9	Ik wil leerlingen alternatieve oplossingsmethodes bieden door gebruik te maken van historische problemen, waardoor ik de leerlingen aan het denken zet.	
10	Ik wil overbruggende curriculaire stappen zetten en daarbij een relatie leggen tussen wiskunde en bijvoorbeeld het vak natuurkunde.	
11	Ik wil meer dynamiek brengen in de wiskundeles, door deze interessanter en dus succesvoller te maken.	
12	Ik wil aan bod laten komen dat de GW duidelijk maakt dat er ook veel vrouwelijke wiskundigen zijn geweest, waardoor vrouwelijke leerlingen zich meer gestimuleerd voelen.	
13	Ik wil de leerlingen duidelijk maken dat wiskunde een discipline is.	
14	Ik wil leerlingen laten zien dat wiskunde (zoals we dat vandaag de dag kennen) er niet altijd was, maar ontstaan is door de jaren heen.	
15	Ik wil de leerlingen de ontwikkeling van de wiskunde door de jaren heen laten zien, daarbij gebruik ik GW <u>niet</u> primair voor de leerlingen om wiskunde beter te leren/begrijpen (dat kan enkel een positief bijproduct zijn).	
16	Ik wil aandacht besteden aan de sociale en culturele invloeden aangaande de ontwikkeling van de wiskunde door de jaren heen.	
17	Ik wil de GW in principe niet direct gebruiken in de les, maar op een indirecte wijze. Ik wil bijvoorbeeld kijken naar de volgorde van hoe de wiskundige onderwerpen worden onderwezen, waarbij de GW een geïntegreerd onderdeel is van de aanpak.	
	Vervolgens kruist de docent hieronder aan wat hij/zij graag zou willen:	
18	Ik wil GW graag gebruiken in één les	
19	Ik wil GW graag gebruiken in meerdere lessen	

Figuur 3: Eerste deel van de keuzelijst voor de docent om te gebruiken bij het doorlopen van het framework.

Ik heb de kleuren in deze regel aangekruisd:	Op basis van de aangekruiste onderdelen kom je in het framework terecht bij het volgende cijfer:			
<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td style="width: 33px; height: 30px; background-color: #fde9d9;"></td> <td style="width: 33px; height: 30px; background-color: #d9ead3;"></td> <td style="width: 33px; height: 30px; background-color: #fff2cc;"></td> </tr> </table>				1, waarbij ik GW wil gebruiken als hulpmiddel voor een historisch chronologische opzet van de les
<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td style="width: 33px; height: 30px; background-color: #d9e1f2;"></td> <td style="width: 33px; height: 30px; background-color: #d9ead3;"></td> <td style="width: 33px; height: 30px; background-color: #e1bfe7;"></td> </tr> </table>				1, waarbij ik GW wil gebruiken als doel voor een historisch chronologische opzet van meerdere lessen
<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td style="width: 33px; height: 30px; background-color: #fde9d9;"></td> <td colspan="2" style="width: 66px; height: 30px; background-color: #fff2cc;"></td> </tr> </table>				2, ik wil GW gebruiken als hulpmiddel a.h.v. een kleine aanpassing van de les
<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td style="width: 33px; height: 30px; background-color: #fde9d9;"></td> <td colspan="2" style="width: 66px; height: 30px; background-color: #e1bfe7;"></td> </tr> </table>				3, ik wil GW gebruiken als hulpmiddel a.h.v. een module/lessenserie
<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td style="width: 33px; height: 30px; background-color: #d9e1f2;"></td> <td colspan="2" style="width: 66px; height: 30px; background-color: #fff2cc;"></td> </tr> </table>				4, waarbij ik GW als doel wil gebruiken binnen één les
<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td style="width: 33px; height: 30px; background-color: #d9e1f2;"></td> <td colspan="2" style="width: 66px; height: 30px; background-color: #e1bfe7;"></td> </tr> </table>				4, waarbij ik GW als doel wil gebruiken binnen meerdere lessen

Figuur 4: Tweede deel van de keuzelijst voor de docent, dat duidelijk maakt bij welk cijfer in het framework van figuur 2 de docent terecht komt.

De eerste taak van de docent, voordat het framework doorlopen kan worden, is dat hij/zij zich afvraagt welk doel hij/zij voor ogen heeft met een bepaalde les of activiteit. Wanneer een docent een doel duidelijk voor ogen heeft voor bijvoorbeeld een deel van de les, een gehele les of voor meerdere lessen, dan kan hij/zij zich vervolgens afvragen of GW daarbij gebruikt kan worden. Elke docent kan een doel van een les (of meerdere lessen) opstellen, maar waar hij/zij vervolgens GW bij kan gebruiken (en op welke manier) zal lastiger zijn. Eveneens zijn veel (wiskunde)docenten erg gebonden aan hun boek, waardoor de doelen van de docent vaak in het verlengde liggen van de doelen die het boek heeft opgesteld. Veel docenten zullen dan ook een lesvoorbereiding lang blijven hergebruiken door de jaren heen, zonder hier vernieuwing in aan te brengen. Dat is de auteur van dit onderzoek opgevallen bij veel docenten waar hij een les heeft bijgewoond. Aangezien de stof over de jaren heen niet drastisch verandert, hoeven docenten hun lesvoorbereidingen van voorgaande jaren slechts af en toe aan te passen. Gebruik van GW kan echter een manier zijn voor voor de docent om lessen, die door leerlingen als lastig worden ervaren of waarvoor leerlingen vaak weinig motivatie hebben, aan te passen. Om de docenten te helpen om uit hun comfortzone te stappen en aan te sporen om GW te gebruiken in de les, is er een framework opgesteld. De docent kan dan kijken of GW kan bijdragen bij het door hem/haar opgestelde inhoudelijk wiskundig lesdoel. De docent heeft bijvoorbeeld bepaalde problemen ondervonden bij het onderwijzen van bepaalde lesstof of veelvoorkomende obstakels geïdentificeerd bij leerlingen bij dit onderwerp. Oftewel, hij/zij heeft belemmeringen om het lesdoel te behalen. Wanneer dat het geval is, of wanneer de docent zijn/haar lesdoel op een andere manier wil bereiken, kan de docent door gebruik te maken van dit framework kijken of hij/zij de GW kan gebruiken en vervolgens op welke manier hij/zij dat kan doen.

De werkwijze van het doorlopen van het framework is als volgt:

- I. De docent heeft een eigen doel opgesteld wat hij/zij wil bereiken met een gedeelte van een les, een hele les of meerdere lessen. Wanneer de docent belemmeringen heeft geanalyseerd bij zijn/haar lesdoel, dient de docent de oorzaak van deze belemmeringen (zoals demotivatie, misconcepties e.d.) duidelijk op papier te zetten. Dit maakt de volgende stap gemakkelijker voor de docent.
- II. De docent gebruikt de keuzelijst (zie 3 en 4) om te bepalen waar hij/zij terecht komt in het framework. De docent kan zijn/haar eventuele lijst van oorzaken van geïdentificeerde belemmeringen bij het invullen van de keuzelijst erbij houden, om zo overeenkomsten te zoeken met de doelen die zijn weergegeven in de keuzelijst. De docent komt uiteindelijk terecht op een van de volgende plekken in het framework:

1. Historisch chronologische opzet van de wiskundeles. De docent kan GW hier gebruiken als zowel hulpmiddel/doel als voor één les of meerdere lessen. Op basis van de aangekruiste onderdelen in de keuzelijst zal de docent weten hoe hij/zij GW hier graag wil gebruiken.
2. Kleine aanpassing van de les waarbij GW gebruikt wordt als hulpmiddel.
3. Module of lessenserie waarbij GW gebruikt wordt als hulpmiddel.
4. Zowel kleine aanpassing van de les of een module/lessenserie, waarbij GW gebruikt wordt als doel.

Notitie: Een bepaald argument van de ene docent om GW te gebruiken kan dienen als hulpmiddel, terwijl dit voor de andere docent eerder gezien wordt als doel. Verklaring hiervoor is dat de onderliggende motivatie van de docent ervoor kan zorgen dat een dergelijk argument een andere interpretatie krijgt, waardoor de ene docent een bepaald argument classificeert als hulpmiddel en de ander als doel. Mocht je als docent niet tevreden zijn met waar je uitkomt in het framework op basis van de keuzelijst, voel je vrij om een andere richting te kiezen.

Notitie: De docent kan er ook voor kiezen om zijn/haar les in te richten op basis van een 'historisch chronologische aanpak' en zal dan uitkomen bij punt 1 in het framework. Afhankelijk van het doel van de docent, kan GW hier zowel als doel of hulpmiddel voor worden gebruikt. Vanwege dat dubbele karakter, heeft deze aanpak een eigen 'stam' gekregen in het framework.

- III. De docent weet nu of hij/zij GW als hulpmiddel of doel wil gebruiken om zijn/haar eigen lesdoel te bereiken. Op plek 1 en 2 in het framework zijn er nu meerdere keuzes voor de docent. Bij plek 3 en 4 is er één optie voor de docent (mits de docent bij punt 4 al weet of hij/zij een kleine aanpassing van de les wil doen of een lessenserie/module wil inrichten). Dat is als het goed is duidelijk geworden bij het invullen van de in de keuzelijst.

De docent weet nu waar hij/zij zich bevindt binnen het framework. Hieronder volgt voor elk punt (1 t/m 4) een beschrijving van welke keuzes er mogelijk zijn:

1. Wanneer de docent heeft gekozen voor een historisch chronologische opzet:

De GW wordt hier in principe niet direct gebruikt in de les, maar op een indirecte wijze. Deze aanpak bepaalt namelijk de volgorde van hoe de wiskundige onderwerpen worden onderwezen, waarbij de GW dus een geïntegreerd onderdeel is van de aanpak van de docent. Een concreet voorbeeld is dat de docent bijvoorbeeld eerst de Natuurlijke getallen N uitlegt, vervolgens de gehele getallen Z , daarna de positieve rationale getallen Q , en zo doorgaat om af te sluiten met de complexe getallen C . De chronologische volgorde van een bepaald onderwerp binnen de wiskunde kan didactisch gezien uitdagend zijn, omdat de moeilijkheidsgraad erg kan verschillen binnen deze chronologie. Wanneer de docent dus kiest voor een chronologische aanpak, moet de docent zich bewust zijn dat hij/zij tijd dient te investeren in het creëren van een didactische opbouw binnen deze aanpak. De docent zou tevens kunnen kijken bij de vakdocenten Geschiedenis, maatschappijleer of maatschappijwetenschappen op hun school, om informatie in te winnen over het didactisch opbouwen van een les-aanpak die chronologisch is opgezet. Afhankelijk van het doel van de docent voor de les/lessen, kan de docent ervoor kiezen om de GW eveneens ook direct of expliciet te gebruiken in de les.

- (a) Betreffende de historie chronologische aanpak, komen de volgende drie algemene ideeën het beste tot hun recht (Jahnke e.a., 2002):

- Vervanging: het 'gebruikelijke' vervangen door iets anders (GW), waardoor de wiskunde wordt gezien als meer dan alleen een verzameling van kennis en technieken. Er was bijvoorbeeld een tijd voordat 'x' als onbekende werd geschreven, zo werd er een lange tijd gepraat over het woord 'ding' dat een respectabele algebra-term was (Berlinghoff & Gouvêa, 2019). De docent zou in plaats van de 'x' kunnen introduceren in zijn/haar les, eerst in kunnen gaan op waar die 'x' nu precies vandaan komt en waarom een teken zoals de 'x' nodig was.
- Herorientatie: de perceptie prikkelen van de leerling, door het bekende als onbekend te veronderstellen. Wat als we de stelling van Pythagoras niet hadden, hoe zou je een dergelijk probleem dan aanpakken? Hoe gingen ze hier vroeger mee om?

- Culturele begripsbouw: de ontwikkeling van de wiskunde in een wetenschappelijke, technische of sociale context te plaatsen binnen een bepaalde tijd en plaats. De docent zou bijvoorbeeld kunnen vragen welke impact de eerste of tweede wereldoorlog op de wiskunde had; waarom gingen bepaalde ontwikkelingen binnen de wiskunde toen erg snel? Een bekend verhaal is dat van Alan Turing die de Enigma-code kraakte in de tweede wereldoorlog (waardoor Duitse berichten ontcijferd konden worden); zijn 'Enigma-machine' was de voorloper van de computer. Daardoor, konden er later veel nieuwe ontdekkingen gedaan worden binnen de wiskunde vanwege de computers die ontstonden. Dit is natuurlijk slechts een voorbeeld, maar het gaat er hierbij dus om dat leerlingen de chronologische ontwikkelingen van wiskunde bekijken vanuit een cultureel perspectief en welke invloed dat had op de ontwikkeling van de wiskunde.

2. Wanneer de docent heeft gekozen om GW te gebruiken als hulpmiddel aan de hand van een kleine aanpassing van de les:

De GW wordt dan gebruikt als subtiele informatie dat iets toevoegt aan de les, dus geïsoleerde informatie. Zoals een naam, bekend persoon, een bekend probleem of een korte anekdote. Als docent zou je ook de les kunnen afsluiten met een epiloog gebaseerd op de GW. Eventueel kan de docent een primaire bron gebruiken bij de epiloog, maar dit moet dan wel een kleine behapbare vorm zijn (anders wordt het meer dan een toevoeging op de 'normale' les). Er zijn drie gradaties voor een kleine toevoeging (Van den Bogaart-Agterberg e.a., 2022):

- GW gebruiken als een 'historische spetter': een erg kleine tekstuele toevoeging die op vrijwel elk mogelijke locatie in de les/boek/presentatie gebruikt kan worden. De voorname reden van deze 'historische spetter' is om de leerling interessante informatie te bieden, dat kan bijdragen aan de motivationele of andere affectieve effecten jegens de wiskunde. Een voorbeeld hiervan is bijvoorbeeld een kleine toelichting van de levensloop van Pythagoras.
- De GW kan ook gebruikt worden als een 'historische postzegel', waarbij de informatie om dezelfde reden wordt gebruikt als bij de 'historische spetter', maar groter in formaat is en eventueel gepaard gaat met een afbeelding. De GW speelt bij deze aanpak dus in op de motivationele en affectieve effecten van de leerling, maar niet op de begripsbouw van de wiskunde aan sich. Een voorbeeld hiervan is bijvoorbeeld een afbeelding van Thales van Milete en zijn biografie.
- De GW kan ook eveneens gebruikt worden als 'historisch fragment', dat meer substantieel is dan de 'historische spetter en postzegel' en eveneens een expliciete relatie heeft met de tekst of wiskundige opdracht. De locatie van deze informatie moet dus, in tegenstelling tot de 'historische spetter en postzegel', wél een directe relatie hebben met hetgeen dat onderwezen wordt. Een historische spetter of postzegel zijn dus op zichzelf-staande onderdelen die zodoende niet een directe relatie hoeven te hebben met hetgeen dat op dat moment wordt onderwezen, en kunnen dus vrijwel overal in de les gebruikt worden (bijvoorbeeld als anekdote, specifieke uitleg of ter afsluiting). Een historisch fragment is meer substantieel en dient wél een directe relatie te hebben met hetgeen dat op dat moment wordt onderwezen. Hierbij is het van belang dat het historische fragment over een specifiek deel van de uitleg van de docent gaat. Een voorbeeld hiervan is bijvoorbeeld dat wanneer de docent de leerlingen een uitleg geeft over negatieve getallen, hij ingaat op de discussies die er destijds optraden over het bestaan van negatieve getallen. En dat het dus niet gek is dat leerlingen erg worstelen met negatieve getallen in het begin, aangezien wiskundigen zoals Euler hier destijds ook erg mee worstelden (Berlinghoff & Gouvêa, 2019).

3. Wanneer de docent heeft gekozen om GW te gebruiken als hulpmiddel aan de hand van een module/lessenserie:

Deze module/lessenserie omvat dan één onderwerp binnen de wiskunde (en binnen het curriculum), die idealiter klaar/af is voor de docent en direct gebruikt kan worden in de les (de

module kan dan, zonder een uitleg van de docent, direct door de leerlingen gebruikt worden). De docent kan een kleine module geven van 1-3 lessen, maar bijvoorbeeld ook een grotere module van 15 lessen of zelfs een heel semester. Bij de grotere modules van 15 lessen of de module voor een heel semester kunnen door de docent dan ook extra-curriculaire onderwerpen worden aangesneden.

Bij deze aanpak is meer tijd en ruimte nodig vanwege de begripsvorming in tegenstelling tot de motivationele en affectieve argumenten. Ook kunnen meerdere grote overkoepelende thema's bij deze aanpak besproken worden.

Er is één gradatie bij deze aanpak: een historisch verhaal (Van den Bogaart-Agterberg e.a., 2022). Wanneer de docent namelijk meerdere historische fragmenten in een les wil gebruiken die betrekking hebben op verschillende onderdelen van de uitleg, wordt dit niet meer gezien als 'historisch fragment' maar als 'historisch verhaal'. Dat verhaal is een coherente verzameling, gericht op een specifiek onderwerp van de wiskunde (zoals kwadratische vergelijkingen). Een voorbeeld hiervan is bijvoorbeeld dat de docent een gehele les of lessenreeks inricht op de discussie omtrent negatieve getallen en daarbij bijvoorbeeld de volgende vragen kan opgooien: Wat zeiden de voorstanders? Wat zeiden de tegenstanders? Waarom hebben we negatieve getallen nodig? Kunnen we zonder? En waarom niet?

4. Wanneer de docent heeft gekozen om GW te gebruiken als doel, is er voor de docent voor zowel een enkele les als meerdere lessen eigenlijk maar een optie mogelijk:

Historisch verhaal: leerlingen gaan zelf bezig met de geschiedenis, waarbij de docent een begeleidende rol heeft. De docent kan bijvoorbeeld het onderwerp introduceren en gedurende de les meer vertellen over de geschiedenis van de wiskunde. De les wordt vormgegeven als een historisch verhaal: een coherente verzameling, gericht op een specifiek onderwerp van de wiskunde (zoals kwadratische vergelijkingen). Originele bronnen kunnen bij deze aanpak een centrale rol spelen. Leerlingen zouden bijvoorbeeld aan de slag kunnen gaan met het ontcijferen van een kleitablet, zonder dat de docent daar enige sturing bij geeft. De docent heeft bij deze aanpak dus enkel een begeleidende rol.

Als het goed is, heeft de docent op dit punt het gehele framework doorlopen en voor ogen hoe het doel van de les bereikt gaat worden. Hieronder volgt een voorbeeld waarbij het framework wordt doorlopen met daarbij een toelichting van het cognitieve niveau van de leerling bij de verschillende aanpakken die de docent kan kiezen.

4.2 Voorbeeld van het doorlopen van het framework

In dit voorbeeld wordt beschreven hoe het framework doorlopen kan worden. Het doel dat de docent zelf heeft opgesteld, is dat hij de leerlingen duidelijk wil maken wat het getal π nu precies is en waar dit vandaan komt. Reden hiervoor zou bijvoorbeeld kunnen zijn, dat de docent heeft opgemerkt dat leerlingen niet in hun eigen woorden toe kunnen lichten wat π nu precies is. De docent vult de keuzelijst in en kruist regel 4, 5, 7 en 18 aan. De docent heeft dus, kijkende naar de keuzelijst in figuur 3, drie kruisjes gezet in het oranje gedeelte en tevens het gele gedeelte aangekruist. In figuur 4 is vervolgens te zien, dat de docent uitkomt bij punt 2 in het framework aangezien een oranje en geel gedeelte was aangekruist. De docent wil GW dus gebruiken als hulpmiddel aan de hand van een kleine aanpassing van de les. Zoals te zien is in het framework (figuur 2) en te lezen in de toelichting, heeft de docent nu 3 keuzes. Kijkende naar het eigen doel van de docent, is het gebruik van een historisch fragment hoogstwaarschijnlijk de beste optie. De docent moet hier wel wat meer tijd voor vrijmaken dan bij de andere twee opties, maar door het gebruik van een historisch fragment zal het doel van de docent bereikt worden. De GW bij dit voorbeeld focust zich op de herkomst van het getal π , waar dit getal vandaan komt en hoe π berekend wordt. De docent kan bijvoorbeeld een opdracht geven aan de leerlingen, om elke leerling zelf op te laten schrijven wat het getal π inhoudt. Vervolgens kan de docent de leerlingen uitleg geven over hoe Archimedes rond 250 v.Chr. π probeerde te benaderen door de omtrek van een veelhoek binnen én buiten een cirkel te gebruiken (Berlinghoff & Gouvêa, 2019). Door eerst een driehoek binnen en buiten een cirkel te tekenen, vervolgens een vierkant, een vijfhoek, etc. zien de leerlingen hoogstwaarschijnlijk in dat

een grotere veelhoek binnen én buiten de cirkel steeds een betere schatting geeft van de marges qua omtrek van de gegeven cirkel. De docent kan vervolgens een uitleg geven over het berekenen van de omtrek van de veelhoek binnen de cirkel en van de veelhoek buiten de cirkel, waarna de leerlingen vervolgens deze berekeningen zelf uit voeren voor steeds grotere veelhoeken totdat de leerlingen met hun marges in de buurt komen van het getal π . Dit is een voorbeeld van hoe een docent de les zou kunnen aanpakken, maar er zijn veel meer opties voor de docent om zijn/haar doel te bereiken a.h.v. een historisch fragment.

Binnen dit voorbeeld kan de leerling zich op verschillende cognitieve niveaus bevinden, zoals beschreven in het theoretisch kader. Wanneer de docent in dit voorbeeld kiest voor het gebruik van een historisch fragment, zal een leerling zich begeven in het tweede cognitieve niveau. De leerling zal namelijk een reproductie-taak uitvoeren (een omtrek berekenen) binnen een nieuwe context (de relatie met het getal π), waarbij de leerling wel bekend is met het getal π . De docent kan de leerling vervolgens naar het derde cognitieve niveau brengen. De docent kan dit doen door bijvoorbeeld een opdracht te maken voor de leerlingen waarbij zij zelfstandig inzichten verwerven in de onderliggende concepten van het getal π en verschillende representaties van het getal π . Mocht de docent een vervolg-les willen geven, omdat de leerlingen de les bijvoorbeeld erg leuk vonden, dan kan dat natuurlijk. De docent begeeft zich dan meer naar een historisch verhaal dan een historisch fragment, vanwege de omvang van de lessen. De docent zou dan de vervolg les kunnen inrichten waarbij alle verschillende benaderingsmethoden voor het getal π worden belicht, zoals de methode van Ptolemaeus die het getal in circa 150 na Chr. representeerde met de breuk $\frac{377}{120}$ (Berlinghoff & Gouvêa, 2019). De leerlingen kunnen dan bijvoorbeeld nagaan hoe goed elke methode is, waarom π uiteindelijk een irrationaal en transcendent getal is en of er wellicht een patroon te herkennen is in de decimalen. Omdat de leerlingen hier complexere stappen zetten, creatief na moeten denken om het getal π te doorgronden en relaties moeten leggen met andere wiskundige concepten, begeven de leerlingen zich in het vierde cognitieve niveau.

Naast dat dit voorbeeld dus duidelijkheid verschaft over hoe het framework doorlopen kan worden, biedt het ook inzicht hoe GW de docent kan helpen om leerlingen naar een hoger cognitief niveau te tillen. De les wordt daarmee niet alleen anders ingericht, maar helpt de leerlingen eveneens in hun leerproces door op een andere manier bezig te zijn met de wiskunde.

Om dit voorbeeld af te sluiten, worden er nog enkele tips gegeven voor de docent voor het gebruik van GW:

- De docent moet zich bewust zijn van de wijze waarop hij/zij GW gebruikt in de les. Hier moet onderscheid worden gemaakt tussen primaire en secundaire bronnen. Een primaire bron is bijvoorbeeld een oorspronkelijke kleisteen met wiskundige tekens van die tijd, zonder enige interpretatie van de wiskundige tekens. Bij gebruik van een secundaire bron is er wel sprake van interpretatie. De leerlingen krijgen de informatie te zien door de ogen van een bepaalde geschiedkundige en mogelijk ook zijn/haar blik op de geschiedenis, waardoor de leerlingen bepaalde keuzes maken gebaseerd op deze interpretatie (Furinghetti, 2007). Bij secundaire bronnen volgen de studenten dus een bepaald pad dat uitgestippeld is door iemand die zijn/haar weergave geeft van de primaire bron (de interpretatie). Als je als docent echter wil dat studenten dit zelf onderzoeken en daarbij actief vragen stellen, dien je primaire bronnen te gebruiken. Dat is wel een van de meest uitdagende manieren om de geschiedenis van de wiskunde te gebruiken, maar ook de manier met de meeste resultaten voor leerlingen (Jahnke e.a., 2002).
- Een erg handig boek is het boek 'Wortels van de Wiskunde' (Berlinghoff & Gouvêa, 2019). Hierin staan verschillende onderwerpen beschreven, waar je als docent relatief eenvoudige ideeën kan halen voor de les. Zo komen de voorbeelden van Archimedes en Ptolemaeus die hierboven zijn toegelicht uit dit boek. Door de categorisering van verschillende onderwerpen in het boek, kan je als docent erg gericht zoeken op een onderwerp en daar de geschiedenis van bestuderen om ideeën op te doen voor de les.
- Het wiskunde tijdschrift Euclides bevat sinds jaargang 92 (2016-2017) de rubriek 'Wortels van

de wiskunde', waar besproken wordt hoe een docent primaire bronnen kan gebruiken in de wiskundeles (o.b.v. voorbeelden uit het boek).

- De website 'www.wiskundemeisjes.nl' wordt (helaas) sinds 2010 niet meer bijgehouden, maar is een erg makkelijke optie om inspiratie te vinden. Onder het kopje 'Geschiedenis' zijn veel blogs/posts te vinden van allerlei onderwerpen met betrekking tot de GW, zoals Babylonisch rekenen.
- Er is een blokboek beschikbaar voor wiskunde D lessen, geschreven door Rogier Bos over de GW. In dit blokboek komen verschillende onderwerpen terug, met eveneens opdrachten voor de leerlingen (en antwoorden) (Bos, 2020).
- Een voorbeeld over het verloop van de wiskunde in Nederland, specifiek in Groningen, is te vinden op de website van de universiteit van Groningen. Hierin wordt beschreven hoe de geschiedenis van de Groningse wiskunde in de vierhonderd jaar sinds de oprichting van de universiteit in 1614 zich ontwikkelde (Broer e.a., 2023).

Bovenstaande voorbeelden zijn door de auteur relatief snel gevonden op het internet bij het schrijven van dit onderzoek. Idealiter zou er in de toekomst een website komen specifiek voor de wiskunde docent waar alle onderwerpen en verschillende referenties gebundeld staan en waar docenten hun materiaal kunnen uitwisselen, zodat het gemakkelijker wordt voor de docent om GW te gebruiken in de les.

5 Conclusie en Discussie

Het doel van dit onderzoek was om een framework op basis van de literatuur op te stellen, gebaseerd op het gebruik van GW in de wiskundeles, om de docent te helpen bij de keuze hoe hij/zij GW het beste kan gebruiken in zijn/haar eigen les. Kijkende naar het uiteindelijk opgestelde framework en de bijhorende keuzelijst, kan er geconcludeerd worden dat dit is gelukt. Het overzicht vanuit de literatuurstudie zorgde er namelijk voor dat de auteur een duidelijk beeld had welke voor- en nadelen zijn verbonden aan GW binnen de wiskundeles voor zowel leerlingen als docenten. Vanuit dat overzicht was het vervolgens mogelijk om ontwerpeisen op te stellen voor het framework dat leidde, tezamen met differentiaties van bijvoorbeeld Jahnke e.a. (2002) tussen GW gebruiken als hulpmiddel of GW gebruiken als doel en Van den Bogaart-Agterberg e.a. (2022) tussen de grootte van gebruik van GW binnen de wiskundeles, tot een concept framework. De aanvullingen van de expert binnen dit vakgebied, tezamen met de feedback van de begeleiders van dit onderzoek, zorgde voor extra ontwerpeisen en uiteindelijk voor een definitief framework waarin aan alle opgestelde ontwerpeisen is voldaan. De docent wordt daarbij door middel van een keuzelijst geholpen bij het doorlopen van het framework. Bij elk mogelijke uitkomst binnen het framework is vervolgens te lezen, wat er precies bedoeld wordt en hoe de docent GW dan ook toe zou kunnen passen in de wiskundeles om zijn/haar lesdoel te behalen.

Dit onderzoek heeft er dus voor gezorgd, dat de literatuur betreffende GW in de wiskundeles overzichtelijk is weergegeven. Het onderzoek geeft dan ook, naast het uiteindelijke framework, een overzicht voor de docenten (en andere geïnteresseerden) betreffende de voor- en nadelen van het gebruik van GW in de wiskundeles. Daarnaast geeft het ook een handvat voor de docent hoe GW vervolgens gebruikt kan worden binnen de wiskundeles. Er was nog geen overzicht binnen de literatuur op welke manieren de docent GW zou kunnen gebruiken binnen de wiskundeles en welk lesdoel hij/zij daarmee zou kunnen bereiken. Dit onderzoek geeft, door het opgestelde framework, wel een duidelijk handvat voor de docent om GW te gaan gebruiken in de wiskundeles. Daarmee kan de hoofdvraag van dit onderzoek, “In hoeverre helpt een framework, gebaseerd op literatuur betreffende het gebruik van Geschiedenis van de Wiskunde in de wiskundeles, de docent bij de keuze hoe hij/zij GW het beste kan gebruiken in zijn/haar eigen les?”, dan ook beantwoord worden: het framework zorgt ervoor dat de docent de GW gemakkelijker kan gebruiken in de wiskundeles en ook weet op welke manier hij/zij dat kan doen, doordat de docent geholpen wordt bij het doorlopen van het framework middels een keuzelijst en een overzicht van desbetreffende literatuur van de GW tot zijn/haar beschikking heeft. Er zijn echter wel enkele discussiepunten die benoemd moeten worden.

Allereerst, het framework is nog niet in de praktijk getest. De focus van dit onderzoek is gelegd op het opstellen van een framework op basis van de literatuur. Door het opgestelde framework vervolgens voor te leggen aan een expert binnen dit vakgebied en de begeleiders van dit onderzoek, kan er gesteld worden dat het framework hoogstwaarschijnlijk goed bruikbaar zal zijn. Desalniettemin, kan de praktijk andere inzichten geven voor het opstellen van een les op basis van de GW. Een mooie vervolgstap zou dan ook zijn, om dit framework te gaan testen in de praktijk. Wanneer die stap gezet wordt, kan het framework nog geperfectioneerd worden dan wel anders ingericht worden. Er is in ieder geval een duidelijk handvat voor een volgende student/onderzoeker om in de praktijk te gaan testen in hoeverre dit framework bruikbaar is voor de docent, omdat er een volledig overzicht is gegeven betreffende waarom een docent GW zou kunnen gebruiken én er verschillende manieren zijn gegeven in het framework hoe de docent dat vervolgens kan doen.

Naast het in de praktijk testen van dit framework, is er momenteel nog sprake van enige subjectiviteit. Het framework is opgesteld door een docent in opleiding, met relatief weinig praktijkervaring. Doordat een expert en de begeleiders van dit onderzoek alreeds naar het framework hebben gekeken, is de objectiviteit van het framework enigszins verhoogd. Er zijn zodoende vier individuen die hun mening hebben gegeven (waaronder de docent in opleiding). Het zou daarom een goed idee zijn om het framework eveneens voor te leggen bij meer wiskundedocenten en andere experts binnen dit vakgebied. Het framework zal dan, daar waar mogelijk, een meer compleet beeld krijgen.

Een derde discussiepunt, dat de invoering naar de praktijk lastig zal maken, is het feit dat weinig wiskundedocenten een gedegen kennis hebben van de GW en hun les daarop zouden kunnen inrichten. Het zou dan ook een goede optie zijn om wellicht een gedeeld platform op te richten, waar docenten hun materiaal kunnen uitwisselen en inspiratie op kunnen doen. Voordat een dergelijk platform er is, kan de docent een eenvoudige stap zetten door een boek zoals 'Wortels van de Wiskunde' (Berlinghoff & Gouvêa, 2019) aan te schaffen (zoals alreeds benoemd bij de resultaten). Een overzichtelijk boek waarbij de GW per onderwerp van de wiskunde wordt toegelicht, waaruit de docent makkelijk inspiratie kan halen.

Kortom, er is een mooie basis gelegd doordat er een framework is opgesteld voor de docent om GW te gebruiken in de les. Een logische volgende stap is dan ook om dit framework te testen in de praktijk, om de werkbaarheid te bepalen en het framework te perfectioneren. Dit onderzoek heeft ervoor gezorgd dat elke wiskunde docent in Nederland beschikking heeft over een framework om GW in de les te gebruiken, dat de docent helpt in het gebruik van GW binnen de wiskundeles. De stap om GW te gebruiken is daardoor kleiner, waarbij tevens duidelijk wordt hoe de docent GW dan in de les kan gaan gebruiken. Dit onderzoek heeft zodoende de basis gelegd voor een gemakkelijk gebruik van GW binnen de wiskundeles voor de docent, waarbij het eveneens de leerlingen helpt in een breder en gevarieerder beeld te krijgen van de wiskunde waardoor hun leerproces wordt ondersteund.

6 Referenties

- Aken, J., & Andriessen, D. (2011). *Handboek ontwerpgericht wetenschappelijk onderzoek: wetenschap met effect*. Boom Lemma Uitgevers, Amsterdam.
- Alpaslan, M. (2011). Prospective Elementary Mathematics Teachers' Knowledge of History of Mathematics and their Attitudes and Beliefs towards the Use of History of Mathematics in Mathematics Education (masterscriptie). ODTÜ, Ankara.
- Arcavi, A. (1991). Two benefits of using history. *For the learning of mathematics*, 11(2), 11.
- Berlinghoff, W. P., & Gouvêa, F. Q. (2019). *Wortels van de Wiskunde, een historisch overzicht voor leraren en anderen*. Epsilon Uitgaven, Amsterdam.
- Bkouche, R. (1990). Enseigner la géométrie, pourquoi? *Repères IREM*, 1, 92–102.
- Bos, R. (2020). *Wiskunde D Online, Blok: Geschiedenis van wiskunde*. https://leren.wiskundedonline.nl/pluginfile.php/1855/mod_assign/intro/WisD_blok_geschiedenis.pdf
- Breugel, K. v. (1987). Van kleitablet tot overhead. *Euclides*, 63, 117–118.
- Broer, H., van Maanen, J., & de Snoo, H. (2023). De academische wiskunde in Groningen. Verkregen 15 juli 2023, van <https://www.math.rug.nl/bernoulli/Geschiedenis/Geschiedenis#A13>
- Byers, V. (1982). Why study the history of mathematics? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 13(1), 59–66.
- Carter, M. D. (2006). The Role of the History of Mathematics in Middle School.
- Downes, S. (1997). Women Mathematicians—Male Mathematics: A History of Contradiction? *Mathematics in school*, 26(3), 26–27.
- Fauvel, J., & Maanen, J. (1997). The Role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics discussion document for an ICMI study (1997-2000). *ZDM: the international journal on mathematics education*, 29(4), 138–140. <https://doi.org/10.1007/s11858-997-0019-2>
- Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the learning of mathematics*, 11(2), 3–6.
- Fowler, D. (1991). Perils and pitfalls of history. *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 15–16.
- Freudenthal, H. (1962). *Logical analysis and critical survey. Report on the Relations between Arithmetic and Algebra*.
- Fried, M. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education*, 10, 391–408. <https://doi.org/10.1023/A:1011205014608>
- Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in mathematics*, 66, 131–143.
- Göktepe Yildiz, S., & Özdemir, A. (2013). An example of using history of mathematics in classes. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 1(3), 125–136. <https://doi.org/10.30935/scimath/9392>
- Gönülateş, F. (2004). Prospective teachers' views on the integration of history of mathematics in mathematics courses (masterscriptie). Boğaziçi University. Institute of Science, Istanbul.
- Grootendorst, A. (1982). De geschiedenis van de wiskunde en het onderwijs in de wiskunde. *Wiskunde en Onderwijs*, 8(30), 287–306.
- Gulikers, I., & Blom, K. (2001). 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 223–258. <https://doi.org/10.1023/A:1014539212782>
- Gürsoy, K. (2010). A survey of prospective mathematics teachers' beliefs and attitudes towards using the history of mathematics in mathematics teaching (masterscriptie). Karadeniz Technical University. Institute of Pure, Applied Sciences, Trabzon.
- Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., El Idrissi, A., da Silva, C. M. S., & Weeks, C. (2002). The use of original sources in the mathematics classroom. *History in mathematics education: the ICMI study*, 291–328.
- Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational studies in Mathematics*, 71, 235–261.

- Karakuş, F. (2009). Matematik tarihinin matematik öğretiminde kullanılması: Karekök hesaplamada Babil metodu. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 3 (1), 195–206.
- Kronfeller, M. (1997). Historische Aspekte im Mathematikunterricht. *Didaktik-Hefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft*, 27, 83–100.
- Liu, P.-H. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching? *The Mathematics Teacher*, 96 (6), 416.
- Looy, H. v. (1980). Het nut van geschiedenis van de wiskunde voor het wiskundeonderwijs. *Wiskunde en Onderwijs*, 6 (24), 429–444.
- Marshall, G. L. (2000). Using history of mathematics to improve secondary students' attitudes towards mathematics. Illinois State University, United States.
- McBride, C. C., & Rollins, J. H. (1977). The effects of history of mathematics on attitudes toward mathematics of college algebra students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8 (1), 57–61.
- Mesman, J., van de Rozenberg, T., & van Veen, D. (2019). Representatie en stereotypering van vrouwen en mannen in schoolboeken voor de brugklas. Universiteit Leiden.
- Møe, A., & Katz, I. (2022). Need satisfied teachers adopt a motivating style: The mediation of teacher enthusiasm. *Learning and Individual Differences*, 99, 102203. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.lindif.2022.102203>
- Ofir, R. (1991). Historical happenings in the mathematical classroom. For the learning of mathematics, 11 (2), 21–23.
- Perkins, P. (1991). Using history to enrich mathematics lessons in a girls' school. For the Learning of Mathematics, 11 (2), 9–10.
- Ransom, P. (1991). Whys and hows. For the Learning of Mathematics, 11 (2), 7–9.
- Schubring, G. (1988). Historische Begriffsentwicklung und Lernprozeß aus der Sicht neuerer mathematikdidaktischer Konzeptionen (Fehler, 'Obstacles', Transposition). *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 4 (3), 138–148.
- Schubring, G., Furinghetti, F., & Siu, M. (2012). Introduction: The history of mathematics teaching. Indicators for modernization processes in societies. *ZDM: the international journal on mathematics education*, 44 (4), 457–459. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0445-7>
- Sfard, A. (1994). What history of mathematics has to offer to psychology of mathematics learning [Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,, University of Lisbon, Portugal], 1, 129–132.
- Siu, F.-K., & Siu, M.-K. (1979). History of mathematics and its relation to mathematical education. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology*, 10 (4), 561–567.
- Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation*, 2 (1), 50–80.
- Struve, H. (1996). On the epistemology of mathematics in history and in school. in H.N. Jahnke, N. Knocke and M. Otte (eds.), *History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences*.
- Swetz, F. J. (1994). Learning activities from the history of mathematics. J. Weston Walch Publishing.
- Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sa, C. C., Isoda, M., Lit, C.-K., Niss, M., de Carvalho, J. P., Rodriguez, M., & Siu, M.-K. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. *History in mathematics education: The ICMI study*, 201–240.
- Van den Bogaart-Agterberg, D., Oostdam, R., & Janssen, F. (2022). From speck to story: relating history of mathematics to the cognitive demand level of tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 1–16.
- Waldegg, G. (1997). Histoire, épistémologie et méthodologie dans la recherche en didactique. For the Learning of Mathematics, 17 (1), 43–46.
- Yuste, P. (2010). Learning mathematics through its history. *Procedia, Social and Behavioral Sciences*, 2, 1137–1141.

7 Bijlagen

A Keuzelijst voor de docent met literatuurverwijzingen

Voor de keuzelijst van de docent, zijn de doelen voor de les (de verschillende regels in de keuzelijst) gebaseerd op de literatuur. In onderstaande tabel is voor elk doel in die regel aangegeven uit welke onderzoeken bleek dat GW dit doel helpt te bereiken.

Nummer	Doel dat docent wil bereiken	Referenties
1	Ik wil graag de motivatie van leerlingen verhogen voor een bepaald onderwerp binnen de wiskunde.	(Alpaslan, 2011; Gönülateş, 2004; Gürsoy, 2010; Jankvist, 2009; Liu, 2003; Marshall, 2000; McBride & Rollins, 1977)
2	Ik wil een negatieve houding van leerlingen tegenover de wiskunde veranderen naar een positieve houding.	(Alpaslan, 2011; Gönülateş, 2004; Gürsoy, 2010; Jankvist, 2009; Liu, 2003; Marshall, 2000; McBride & Rollins, 1977)
3	Ik wil de leerlingen graag de menselijke kant van de wiskunde laten zien.	(Jankvist, 2009; Kronfeller, 1997; Liu, 2003)
4	Ik wil de wiskunde minder 'angstaanjagend' maken voor leerlingen (Ik wil leerlingen gerust stellen). Slimme leerlingen kunnen hierdoor ook verder kijken dan zij gewend zijn.	(Arcavi, 1991; Byers, 1982; Jankvist, 2009; Ofir, 1991; Siu & Siu, 1979)
5	Ik wil de leerlingen een ander perspectief bieden om naar de wiskunde te kijken.	(Jankvist, 2009)
6	Ik wil een onderwerp aanbieden waarbij er gekeken wordt door de ogen van een leerling in plaats van de ogen van een docent/volwassene.	(Jankvist, 2009)
7	Ik wil leerlingen laten zien welke obstakels er zijn geweest bij de ontwikkeling van de wiskunde en deze obstakels identificeren met hen. Als docent kan ik vervolgens fouten/misconcepties van leerlingen herkennen.	Betreffende de eerste regel: (Jankvist, 2009; Liu, 2003; Looy, 1980; Struve, 1996; Waldegg, 1997). Betreffende de tweede regel: (Sfard, 1994)
8	Ik wil leerlingen de balans leren kennen tussen obstakels/moeilijkheden en een 'soepel proces' binnen de wiskunde, waardoor de leerling de balans vindt tussen de striktheid van de wiskunde en de verbeelding. Leerlingen springen hierdoor minder snel naar ongegronde conclusies, maar nemen ze de tijd om creatief te denken vanuit verschillende hoeken.	(Siu & Siu, 1979)
9	Ik wil leerlingen alternatieve oplossingsmethodes bieden door gebruik te maken van historische problemen, waardoor ik de leerlingen aan het denken zet.	(Byers, 1982; Ransom, 1991)
10	Ik wil overbruggende curriculaire stappen zetten en daarbij een relatie leggen tussen wiskunde en bijvoorbeeld het vak natuurkunde.	(Bkouche, 1990)
11	Ik wil meer dynamiek brengen in de wiskundeles, door deze interessanter en dus succesvoller te maken.	(Van den Bogaart-Agterberg e.a., 2022)
12	Ik wil aan bod laten komen dat de GW duidelijk maakt dat er ook veel vrouwelijke wiskundigen zijn geweest, waardoor vrouwelijke leerlingen zich meer gestimuleerd voelen.	(Downes, 1997)

Nummer	Doel dat docent wil bereiken	Referenties
13	Ik wil de leerlingen duidelijk maken dat wiskunde een discipline is.	(Jankvist, 2009)
14	Ik wil leerlingen laten zien dat wiskunde (zoals we dat vandaag de dag kennen) er niet altijd was, maar ontstaan is door de jaren heen.	(Jankvist, 2009)
15	Ik wil de leerlingen de ontwikkeling van de wiskunde door de jaren heen laten zien, daarbij gebruik ik GW niet primair voor de leerlingen om wiskunde beter te leren/begrijpen (dat kan enkel een positief bijproduct zijn).	(Jankvist, 2009)
16	Ik wil aandacht besteden aan de sociale en culturele invloeden aangaande de ontwikkeling van de wiskunde door de jaren heen.	(Gulikers & Blom, 2001; Jankvist, 2009)

B Onderscheid doel en hulpmiddel

In deze bijlage is de eerste tabel te vinden, die opgesteld is bij het creëren van het concept-framework. De rechterkolom bevat argumenten (voortkomend uit de literatuur) die pleiten voor gebruik van GW als hulpmiddel in de les, de linker kolom bevat argumenten die pleiten voor gebruik van GW als doel in de les.

GW gebruiken als hulpmiddel	GW gebruiken als doel
Ik wil graag de motivatie van leerlingen verhogen voor een bepaald onderwerp binnen de wiskunde. (Alpaslan, 2011; Gönülateş, 2004; Gürsoy, 2010; Jankvist, 2009; Liu, 2003; Marshall, 2000; McBride & Rollins, 1977)	Ik wil de leerlingen duidelijk maken dat wiskunde een discipline is. (Jankvist, 2009)
Ik wil een negatieve houding van leerlingen tegenover de wiskunde veranderen naar een positieve houding. (Alpaslan, 2011; Gönülateş, 2004; Gürsoy, 2010; Jankvist, 2009; Liu, 2003; Marshall, 2000; McBride & Rollins, 1977)	Ik wil leerlingen laten zien dat wiskunde (zoals we dat vandaag de dag kennen) er niet altijd was, maar ontstaan is door de jaren heen. (Jankvist, 2009)
Ik wil de leerlingen graag de menselijke kant van de wiskunde laten zien. (Jankvist, 2009; Kronfeller, 1997; Liu, 2003)	Ik wil de leerlingen de ontwikkeling van de wiskunde door de jaren heen laten zien, daarbij gebruik ik GW niet primair voor de leerlingen om wiskunde beter te leren/begrijpen (dat kan enkel een positief bijproduct zijn). (Jankvist, 2009)
Ik wil de wiskunde minder 'angstaanjagend' maken voor leerlingen (Ik wil leerlingen gerust stellen). Slimme leerlingen kunnen hierdoor ook verder kijken dan zij gewend zijn. (Arcavi, 1991; Byers, 1982; Jankvist, 2009; Ofir, 1991; Siu & Siu, 1979)	Ik wil aandacht besteden aan de sociale en culturele invloeden aangaande de ontwikkeling van de wiskunde door de jaren heen. (Gulikers & Blom, 2001; Jankvist, 2009)
Ik wil de leerlingen een ander perspectief bieden om naar de wiskunde te kijken. (Jankvist, 2009)	
Ik wil een onderwerp aanbieden waarbij er gekeken wordt door de ogen van een leerling in plaats van de ogen van een docent/volwassene. (Jankvist, 2009)	
Ik wil leerlingen laten zien welke obstakels er zijn geweest bij de ontwikkeling van de wiskunde en deze obstakels identificeren met hen. Als docent kan ik vervolgens fouten/misconcepties van leerlingen herkennen. Betreffende de eerste regel: (Jankvist, 2009; Liu, 2003; Looy, 1980; Struve, 1996; Waldegg, 1997). Betreffende de tweede regel: (Sfard, 1994)	
Ik wil leerlingen de balans leren kennen tussen obstakels/moeilijkheden en een 'soepel proces' binnen de wiskunde, waardoor de leerling de balans vindt tussen de striktheid van de wiskunde en de verbeelding. Leerlingen springen hierdoor minder snel naar ongegronde conclusies, maar nemen ze de tijd om creatief te denken vanuit verschillende hoeken. (Siu & Siu, 1979)	
Ik wil leerlingen alternatieve oplossingsmethodes bieden door gebruik te maken van historische problemen, waardoor ik de leerlingen aan het denken zet. (Byers, 1982; Ransom, 1991)	
Ik wil overbruggende curriculaire stappen zetten en daarbij een relatie leggen tussen wiskunde en bijvoorbeeld het vak natuurkunde. (Bkouche, 1990)	
Ik wil meer dynamiek brengen in de wiskundeles, door deze interessanter en dus succesvoller te maken. (Van den Bogaart-Agterberg e.a., 2022)	
Ik wil aan bod laten komen dat de GvdW duidelijk maakt dat er ook veel vrouwelijke wiskundigen zijn geweest, waardoor vrouwelijke leerlingen zich meer gestimuleerd voelen. (Downes, 1997)	