Onderzoek van Onderwijs
Wiskunde

# Polya's 4 stappen methode om analytisch denkvermogen te bevorderen

Lavinia Suvi Lanting

Eerste begeleider: dr. G.A.M. Jeurnink
Tweede begeleider: prof.dr. N.V. Litvak

12 februari 2024

Afdeling Educatie  Communicatie in de Bètawetenschappen
Faculteit Behavioural, Management and Social Sciences

UNIVERSITY OF TWENTE.

# Polya’s 4 stappen methode om analytisch denkvermogen te bevorderen

Lavinia. S. Lanting*

12 februari 2024

**Samenvatting**

In dit onderzoek wordt kwalitatief gekeken naar de effecten van Polya’s vier stappen methode op het analytisch denkvermogen van leerlingen op 2 HAVO/VWO niveau op de middelbare school in Nederland. Uit de onderzochte respondenten is gebleken dat de methode erg effectief is voor zwakke en/of onzekere leerlingen, die een houvast vinden in de methode om moeilijkere opdrachten toch nog te kunnen uitwerken zonder volledig vast te lopen, ook wordt het juiste antwoord niet altijd gevonden. Deze leerlingen deden dan ook tijdens het onderzoek enthousiaster en beter mee. Minder effectief is de methode juist voor de wat sterkere en/of zelfverzekerde leerlingen, die het nut van de methode niet inzien doordat zij gemakkelijker uit opdrachten komen en het dus niet de moeite waard vinden om extra stappen te nemen en dus ook stappen uit de methode vaak niet (volledig) uitgewerkt hebben tijdens dit onderzoek.

De voordelen van het regelmatig inzetten van de methode worden besproken naast de beperkingen van het onderzoek en de suggesties om verder de mogelijkheid om Polya’s methode te verwerken in het curriculum rekenen-wiskunde te onderzoeken in de toekomst.

*Keywords*: Polya, George Polya, analytisch denkvermogen, probleem oplossing, analytische denkvaardigheid, systematisch oplossen

*Email: l.s.lanting@student.utwente.nl

# Inhoudsopgave

# 1 Inleiding

Dankzij Inspectie van het Onderwijs, is het sinds een aantal jaar duidelijk geworden dat het niveau voor een aantal basisvaardigheden van leerlingen op de middelbare school in Nederland te laag is. Vooral het kritisch lezen, het kritisch nadenken en het rekenen, vaardigheden die een rol spelen in bijna elk vak op de middelbare school en die van belang zijn voor het ontwikkelen van het analytisch denkvermogen van leerlingen, lijken zeer beperkt ontwikkeld te blijven, waardoor leerlingen vaak niet begrijpen wat een bepaalde opdracht van hen vraagt en vervolgens ook niet de juistheid van het eigen antwoord kunnen inschatten of controleren (van het Onderwijs, 2022; van het Onderwijs, 2023). Het niveau dat specifiek bij het vak wiskunde behaald kan worden, lijdt enorm aan het lage niveau analytisch denkvermogen en begrijpend lezen (waarbij volgens Prenger (2005) taalkennis en vocabulaire ook een rol spelen) en het wordt zo steeds moeilijker om leerlingen verder te laten komen in wiskundige ontwikkeling: de leerlingen blijven namelijk al bij de basis haken en leren slechts op instrumentele manier aan de hand van trucjes en uit het hoofd leren in plaats van echt begrijpen de stof eigen te maken, waardoor herhaling van al opgemaakte kennis een steeds grotere rol komt te spelen in de les. De door SLO (2022) vastgestelde basisvaardigheden voor het curriculum wiskunde-rekenen voor de onderbouw worden vaak dan ook niet gehaald, met grote gevolgen voor de leerlingen in het bovenbouw, die wiskunde moeten voortbouwen op een vrij zwakke basis.
De gerichtheid van leerlingen op cijfers speelt hier ook een rol in: leerlingen leren namelijk, zoals eerder benoemd, op instrumentele manier met de bedoeling om de toets en/of een hoog cijfer te halen en niet om de opgemaakte kennis te behouden voor hun toekomst of om vaardigheden, zoals kritisch nadenken, uit het wiskundeonderwijs te halen om binnen andere gebieden te gaan toepassen. Dit heeft vervolgens weer gevolgen voor een vervolgopleiding, waarbij vaak studenten veel moeite hebben met de wiskunde vakken die hun aangeboden worden. Dit ook als gevolg van constateringen, zie van het Onderwijs (2022), waarbij benoemd wordt dat significant meer leerlingen slagen terwijl het niveau basisvaardigheden omlaag blijft gaan.

Studenten Toegepaste Wiskunde aan de Universiteit Twente hebben de afgelopen jaren de kans gekregen om de voor- en nadelen van de vier stappen methode om problemen op te lossen van Polya (2004) te ervaren. Dankzij deze methode worden studenten uitgenodigd om een betere manier aan te leren om opdrachten uit te werken, die het begrijpen, studeren en eigen maken van vakken en stof bevordert. Deze methode wordt momenteel namelijk ingezet door prof.dr. N.V. Litvak (Nelly) zowel op BSc (Bachelor of Science) als op MSc (Master of Science) niveau binnen de Universiteit Twente. Dit onderzoek is uitgevoerd met haar ondersteuning en advies met dank aan Erik Mazur voor de structuur waarmee de methode ingezet wordt: op basis van een van zijn lezingen over de methode tijdens een tour van Nederlandse universiteiten in 2016 en op basis van communicatie met hem heeft prof.dr. N.V. Litvak (Nelly) namelijk vorm gegeven aan het inzetten van Polya's methode binnen de Universiteit Twente (Litvak en Weedage, 2023). Het is dan ook via prof.dr. N.V. Litvak (Nelly) op basis van het werk van Erik Mazur dat structuur is gegeven aan het inzetten van de methode binnen dit onderzoek: vooral het reflectie onderdeel is

aan hem te danken (Mazur, 2016).
Deze zelfde methode en structuur zijn vaker gebruikt binnen verschillende onderzoeken en zijn door Heutinck (2022) al in enige mate bewezen te kunnen helpen met het bevorderen van relationeel begrip en met het kunnen bevorderen van vaardigheden en een positieve houding richting het oplossen van problemen. Het gebruik van Polya's methode leert een systematische manier aan om problemen op te lossen waardoor het automatiseren wordt bevorderd van vele vaardigheden die te maken hebben met analytisch nadenken. Het doel van dit onderzoek is dus om deze methode aan te passen en te verbreiden aan de hand van literatuur, eerdere onderzoeken en de adviezen van prof.dr. N.V. Litvak (Nelly), zodat deze ingezet kan worden bij leerlingen op de middelbare school in Nederland om te onderzoeken of Polya's methode een positief effect heeft op het analytisch denkvermogen van jonge leerlingen met de bedoeling dat leerlingen deze vaardigheden in hun toekomst zullen mogen gebruiken en inzetten voor het aanpakken van wiskundevakken op hoger niveau, maar ook voor het aanpakken van opdrachten, projecten en problemen binnen andere vakken.
Het doel van dit onderzoek is dus om op kwalitatieve wijze antwoord te kunnen geven op de hoofdvraag: *in welke mate bevordert Polya's 4 stappen methode het analytisch denkvermogen van leerlingen?*

# 2 Theoretische kader

Bij dit onderzoek is ervoor gekozen om de effecten van Polya's methode voor jonge leerlingen te onderzoeken op kwalitatieve manier om te kunnen bepalen of deze manier van problemen oplossen het analytische denkvermogen van leerlingen significant zou beïnvloeden. Om dit te doen is gebruik gemaakt van literatuur en van het advies van prof.dr. N.V. Litvak (Nelly) om de methode van George Polya aan te passen zodanig dat deze inzetbaar zou zijn binnen de kaders van het wiskundige onderwijs op de middelbare school in Nederland. Ervaring van prof.dr. N.V. Litvak (Nelly) leert namelijk dat bepaalde aspecten van de methode door leerlingen als moeilijk beschouwd worden, met als risico dat de methode niet meer de gewenste resultaten zou kunnen brengen doordat leerlingen al blijven haken door een stap in de methode dat amper significantie heeft voor hun begrip van de stof. Deze aanpassingen zijn gemaakt met het doel van dit onderzoek in gedachten, zodat hoofdvraag en onderzoeksvragen sturend zouden zijn hierbij. Dit wordt getoond aan de hand van onderbouwing die hier zal volgen, waarbij de belangrijke terminologie en deelvragen evenals gerelateerde onderzoek toegelicht worden.

## 2.1 Terminologie

Aan de basis van dit onderzoek zit de uitdrukking ***analytisch denkvermogen***, ook bekend als *analytisch denken* of *analytisch vermogen*. Hiermee, gebaseerd op de definitie van Amer (2005), wordt het vermogen aangeduid om de volgende denkactiviteiten uit te kunnen voeren bij een gegeven vraagstuk (hierbij moet niet alleen gedacht worden aan een wiskundig probleem):

- het vraagstuk kunnen verdelen in hoofd- en deelvragen om dit dus gestructureerd en stapsgewijs aan te kunnen aanpakken;
- de gegevens van het vraagstuk kunnen verzamelen, ordenen en (eventueel) visualiseren;
- verbanden kunnen leggen tussen de gegevens van het vraagstuk;
- zo mogelijk, verbanden kunnen leggen tussen onderdelen van het vraagstuk en eigen bestaande kennis;
- schattingen kunnen maken voor het gezochte antwoord op basis van de gegevens;
- het eigen proces en gevonden antwoord kritisch kunnen bekijken en analyseren om sterktes, zwaktes en onlogica aan te kunnen geven;
- het proces en gevonden antwoord van anderen kritisch kunnen bekijken om sterktes, zwaktes en onlogica aan te kunnen geven.

Onder ***analytisch denkvermogen*** vallen dus ook de begrippen *kritisch lezen*, waarbij een tekst begrepen wordt en waarbij conclusies getrokken kunnen worden op basis van wat gelezen is door middel van de gegevens die uit de tekst te halen zijn, en *kritisch denken*, waarbij niks zomaar aangenomen wordt en waarbij de exacte logica en werking van processen worden achtergehaald aan de hand van vragen en analyse. Iemand die in bezit is van analytisch denkvermogen zal dus interesse tonen in de werking achter processen en in de verbanden tussen onderwerpen. Dit geeft aan dat analytisch denkvermogen pas ontwikkeld kan worden in aanwezigheid van ***relationeel begrip*** (Skemp, 2006). Hieronder wordt het vermogen aangeduid om begrip te hebben voor hoe procedures en regels in hun werk gaan: inzien waarom bepaalde methodes wel of niet werken in bepaalde situaties, verschillende stukken kennis verbinden en nieuwe kennis koppelen en onthouden worden hierdoor bevorderd. Tegenover *relationeel begrip* staat ***instrumenteel begrip***, dat verstaan kan worden als het kennen en kunnen toepassen van regels zonder reden: berekeningen kunnen hierbij uitgevoerd worden, maar er wordt niet begrepen waarom de berekeningen zo moeten en waarom een bepaalde methode wel of niet werkt, dus weinig tot geen verbanden worden gelegd tussen stukken kennis waardoor het onthouden van stof moeilijker wordt.

De motivatie voor dit onderzoek is gebaseerd op de recente ontdekkingen in van het Onderwijs (2022) en van het Onderwijs (2023) omtrent het niveau basisvaardigheden. Zinvol is dan ook om te verduidelijken wat bedoeld wordt met het begrip ***basisvaardigheden***. Hieronder worden namelijk de door SLO (2022) vastgestelde kerndoelen voor het onderbouw vo rekenen-wiskunde onderwijs. Dit onderzoek richt zich dan specifiek op de volgende kerndoelen in verband met aansluiting op het begrip ***analytisch denkvermogen***:

- kerndoel 19 (*De leerling leert passende wiskundetaal te gebruiken voor het ordenen van het eigen denken en voor uitleg aan anderen en leert de wiskundetaal van anderen te begrijpen*);
- kerndoel 23 (*De leerling leert exact en schattend rekenen en redeneren op basis van inzicht in nauwkeurigheid, orde van grootte, en marges die in een gegeven situatie passend zijn.*);
- kerndoel 27 (*De leerling leert gegevens systematisch te beschrijven, ordenen en visualiseren en leert gegevens, representaties en conclusies kritisch te beoordelen.*).

De laatste term dat van belang is voor dit onderzoek heeft te maken met de gekozen methode: ***Polya's vier stappen methode*** is een methode om systematisch problemen en vraagstukken te mogen oplossen. Deze korte verduidelijking geeft natuurlijk niet genoeg uitleg over de methode en biedt geen begrip voor de opbouw hiervan, maar de exacte werking en stappen van deze methode zullen later besproken worden bij paragraaf 3.

## 2.2 Eerdere onderzoek

Het idee van analytische denkvaardigheden op jonge leeftijd aanleren is niet nieuw. Diverse scholen, coaches en docenten (en zelfs ouders met een achtergrond in de onderwijssector) werken onder de aanname dat intelligentie niet statisch hoeft te zijn en dat jonge kinderen vaardigheden zoals analytisch denken en oplosschema's onder begeleiding kunnen aanleren en eigen maken. Morningside Academy implementeert zo bijvoorbeeld al jaren effectieve begeleiding bij het ontwikkelen van analytische denkvaardigheden in de vorm van een variatie op TAPS (*'Think Aloud Paired Problem Solving'*) (Robbins, 2011), waarbij leerlingen aangeleerd worden om gebruik te maken van 'private speech' (Berk, 1994) om zichzelf en klasgenoten door nieuwe stof en problemen heen te begeleiden. Het gebruik van Polya's methode houdt in, volgens de implementatie van Mazur (2016), dat leerlingen duidelijk uitleg geven voor de genomen stappen: terwijl dit niet per se mondeling gebeurt, geeft dit leerlingen de kans om toch een dialoog met zichzelf te hebben om de beredenering achter hun berekeningen en conclusies te verlichten en verduidelijken. De methode vraagt ook dat leerlingen de gevonden antwoorden en stappen delen en bespreken, waarbij een leerling dus ook mondeling gebruik maakt van 'private speech' en ook de rol neemt van luisteraar volgens de variatie op TAPS van Robbins (2011). Polya's methode heeft dus wel kenmerken die aan lijken te geven dat de implementatie hiervan een positief effect zou hebben op het analytische denkvermogen van leerlingen. Polya's methode vraagt daarbij ook dat leerlingen redeneringen en logica achter ieder stap van hun oplossing en berekening neerzetten en uitleggen in schriftelijke vorm, waardoor dialoog en taal omtrent de stof beoefend worden. Het discussiëren en redeneren over de stof brengt voort de ontwikkeling van analytische denkvaardigheden, maar leerlingen maken in afwezigheid van de docent amper hier gebruik van Murphy e.a. (2014), met als gevolg dat het nadenken en uitdelen van ontdekkingen op andere wijze gepromoot moet worden. Polya's methode biedt, zoals gezien zal worden, hier een oplossing voor in de vorm van de wisselwerking tussen de individuele fase en groepsbespreking, waardoor zowel het nadenken over eigen doen als uitwisselen van ideeën en oplosschema's gepromoot worden.

Het ontwikkelen van analytisch denkvermogen lijkt bevorderd te worden door het inzetten van modules omtrent het oplossen van problemen, waarbij de methode van probleemoplossen de stappen *'identify, define, explore, act, and look back'* bevat (Karenina e.a., 2020). Deze komen in enige mate overheen met de nodige stappen volgens Polya's methode, met uitzicht dus op een stijgende lijn in het analytische denkvermogen van leerlingen. Vergelijkbare stappen worden beschreven in Stice (2007), die het oplossen van problemen stapsgewijs volgens de methode van Polya inzet om leerlingen van het memoriseren en instrumenteel begrip te nemen naar relationeel begrip, waardoor leerlingen analytisch denkvermogen lijken te ontwikkelen in de vorm van zelf tot de ontdekking van eigen fouten kunnen komen.

Polya's methode om problemen op te lossen is erg populair en vaak gebruikt in de literatuur en heeft vaak tot positieve effecten voor het leerproces van leerlingen en studenten geleid binnen eerder onderzoek. Zo werd door Heutinck (2022) een correlatie gevonden tussen het gebruiken van de methode en het ontwikkelen van relationeel begrip en toonden jonge leerlingen in het onderzoek van Yapatang en Polyiem (2022) beter begrip en een positievere houding richting de stof. Op vergelijkbare manier is in Bilgin (2006) bevonden dat het gebruik van Polya's methode positieve effecten had op studenten bij het antwoorden van conceptuele en algoritmische vragen, ook een gevolg van relationeel begrip voor de stof.

## 2.3 Onderzoeksvragen

De effectiviteit van Polya's methode als interventie binnen het klaslokaal hangt af van de mate waarin het analytisch denkvermogen van de onderzoeksgroep ontwikkeld werd gedurende dit onderzoek. Om duidelijke resultaten te mogen bepalen is het nodig dus om een kader vast te stellen op basis waarvan gemeten en beoordeeld wordt of leerlingen baat hebben gehad aan de methode, er nadeel aan hebben gehad of juist geen effect of verandering hebben gevoeld. Zoals eerder benoemd is er bij dit onderzoek ervoor gekozen zich te richten op een aantal van de door SLO (2022) vastgestelde kerndoelen voor het rekenen-wiskunde onderwijs in de onderbouw, namelijk kerndoelen 19, 23 en 27. Deze drie kerndoelen vormen dus de basis en kader om te kunnen bepalen in welke mate de interventie en methode beschreven in dit onderzoek effect hebben op het analytisch denkvermogen van jonge leerlingen op de middelbare school in Nederland. Deze kerndoelen zijn dus gebruikt als leidende lijn om de resultaten van dit onderzoek te mogen analyseren door middel van de volgende onderzoeksvragen:

- *In welke mate bevordert Polya's 4 stappen methode kerndoel 19?*
- *In welke mate bevordert Polya's 4 stappen methode kerndoel 23?*
- *In welke mate bevordert Polya's 4 stappen methode kerndoel 27?*

Eerder onderzoek geeft enige correlatie aan tussen het aantonen van analytische denkvaardigheden zoals beschreven door Amer (2005) en het aankunnen van problemen oplossen volgens Polya (2004) en het een sterke leerling zijn binnen het vak wiskunde (Qolfathiriyus e.a., 2019; Yustiana e.a., 2021). Terwijl de grootte van de daarin beschreven onderzoeksgroepen vrij geringd is en dus niet als statistisch significant gezien kan worden om zekere conclusies over te trekken, bieden die onderzoeken wel de mogelijkheid om zich af te vragen of er een verschil kan zijn in de mate waarmee Polya's methode het analytisch vermogen helpt ontwikkelen van zwakke leerlingen tegenover sterke leerlingen voor het vak wiskunde. De effectiviteit van Polya's methode is namelijk ook specifiek eerder onderzocht bij het helpen van zwakke leerlingen in het verbeteren en niet meer angstig te zijn ten opzichte van het vak wiskunde, met als conclusie dat de methode zeker voordelen met zich brengt als gepaard met genoeg oefening (Yuan, 2013). De effectiviteit lijkt dus in enige mate beperkt te zijn door hoe goed de leerlingen meedoen met het oefenen met en volgens Polya's stappen. De laatste twee onderzoeksvragen beinvloeden elkaar en luiden dus:

- *Welke groep leerlingen (zwak, gemiddeld, sterk of gedreven) doen het beste mee bij het inzetten van Polya's 4 stappen methode?*
- *Bevordert Polya's 4 stappen methode het analytisch vermogen van zwakke leerlingen significant meer dan het analytisch vermogen van sterke leerlingen?*

# 3 Methode

De methode van achter dit onderzoek kan opgesplitst en toegelicht worden in verschillende onderdelen. De methode bestaat namelijk uit Polya's methode, die aan de basis zit van de interventie beschreven in dit onderzoek en die aangepast is om toegepast te kunnen worden op de onderbouw van de middelbare school in Nederland, de onderzoeksmethode, dus hoe het onderzoek ingericht werd en wat voor gegevens en respondenten hiervoor gebruikt werden, en de methodiek achter de instrumenten, die de ontworpen materialen onderbouwen.
Hieronder worden een voor een deze verschillende onderdelen besproken en uitgelegd om duidelijkheid te geven over de gemaakte keuzes binnen dit onderzoek en om context te geven voor de resultaten besproken in paragraaf 5.

## 3.1 Polya's 4 stappen methode

Zoals kort al eerder benoemd, in Polya (2004) wordt een methodiek om problemen systematisch op te lossen door middel van de volgende vier stappen beschreven:

1. **'Understanding the problem'**
   Tijdens deze stap worden leerlingen gevraagd om het probleem door te lezen en om op overzichtelijke manier aan te geven wat de onbekende (of in andere woorden wat het doel) is van de vraag, welke gegevens aanwezig zijn en worden vervolgens uitgenodigd om zinvolle notatie in te voeren en alvast te noteren wat de wisselwerking is tussen de verschillende gegevens van het vraagstuk en wat hun verwachting is voor het antwoord (leerlingen moeten zich hierbij dan afvragen of de vraag redelijk en op te lossen is en, zo ja, kunnen het beste een schatting noemen van de oplossing).

2. **'Devising a plan'**
   Deze stap vraagt dat leerlingen gebruik maken van de gegevens en van bekende theorie, situaties en problemen om een plan te bedenken en te noteren om tot een oplossing te komen. Het is de bedoeling de leerlingen bij deze stap een schets noteren van de berekeningen die nodig zijn om het antwoord te vinden en niet dat zij extreem gedetailleerd uitleggen exact wat zij gaan doen. Wel is het hierbij handig om leerlingen formule die nodig zijn gelijk te laten opschrijven even als de theorie en begrippen die nodig kunnen zijn voor de opdracht.
   Belangrijk om in gedachten te houden is dat niet altijd het bedenken van een correct plan lukt, dus bij deze stap zouden leerlingen ook plannen kunnen bedenken die niet tot een oplossing of tot een fout antwoord leiden.

3. **'Carrying out the plan'**
   Bij deze stap werken leerlingen het probleem uit aan de hand van hun eigen opgestelde plan. Dit betekent, mocht het plan fout zijn, dat leerlingen mogelijk hierbij vastlopen of fouten in hun methodiek ontdekken.

4. **'Looking back'**
   De bedoeling van deze stap is dat leerlingen terugblikken op de opdrachten zodat zij van het proces kunnen leren en hun kennis beter vast kunnen stellen.

Deze stap dient ook, mocht de leerling geen antwoord hebben gevonden, als mogelijkheid om te reflecteren over waarom hun plan niet heeft gewerkt en wat het antwoord wel had moeten zijn.

Terwijl deze methode erg compleet is in het over iedere onderdeel en denkstap van een oplossing laten nadenken en terugblikken, bevat deze methode ook een aantal stappen die nadelig en onnodig kunnen zijn voor het leerproces van leerlingen. Zo is het de ervaring van prof.dr. N.V. Litvak (Nelly) dat stap 2, 'devising a plan', vaak door studenten op universiteitsniveau moeilijk gevonden wordt. Vaak blijven studenten bij deze stap dan hangen, waardoor zij vastlopen en ook niet verder gaan met de opdracht of de stap compleet overslaan (Muniri en Choirudin, 2022). Als deze stap overgeslagen wordt, verliest het zijn nut voor leerlingen en de aanwezigheid van de kans dat leerlingen vastlopen doordat zij niet begrepen hoe zij deze stap moeten uitwerken zorgt voor mogelijke nadelen. Om deze reden is er besloten om deze stap niet mee te nemen in dit onderzoek. Op vergelijkbare manier is er besloten om stap 4 'looking back' niet mee te nemen in de vorm beschreven in Polya (2004). Kunnen reflecteren op eigen werk is namelijk een vaardigheid die leerlingen het beste aanleren onder begeleiding en waaraan docenten tijd moeten besteden binnen het klaslokaal om leerlingen deze echt te kunnen laten ontwikkelen (Marzano en Miedema, 2018) en is dus bij dit onderzoek niet overgelaten aan de leerlingen om zelf zonder begeleiding te doen en is op alternatieve manier ingevoerd.

## 3.2 Onderzoeksmethode

De onderzoeksmethode bevat meerdere onderdelen: zo behoren hierbij zowel de uitvoering als de respondenten. Deze zullen beide een voor een besproken worden.

### 3.2.1 Uitvoering

Om dit onderzoek uit te voeren zijn twee groepen respondenten (twee parallelle klassen om te kunnen vergelijken als onderzoeks- en controlegroep) gevonden en gevraagd vóór het begin van het bespreken van en werken door hoofdstuk 8 ('Inhoud en Vergroten') van het boek *Getal & Ruimte* voor 2 HAVO/VWO, $12^e$ editie. Dit hoofdstuk is in beide groepen respondenten besproken gedurende vier weken. Tijdens deze vier weken is bij de onderzoeksgroep Polya's methode geïntroduceerd en gebruikt samen met een aantal opdrachten. De eerste en laatste van deze opdrachten zijn ook geïntroduceerd bij de controlegroep om de twee klassen te kunnen vergelijken. Een aantal respondenten uit beide klassen zijn ook gevraagd om mee te doen aan interviews om de effecten van Polya's methode te finaliseren.
Voor dit onderzoek zijn in totaal vier opdrachten ontwikkeld, waarvan drie gebruikt zijn samen met de methode en een gebruikt is tijdens de individuele interviews met de respondenten.
Tijdens twee lessen, een per klas, zijn de twee groepen ingelicht over het onderzoek door de methode uitgelegd te krijgen en door aangegeven te krijgen de hoeveelheid en type werk dat de leerlingen zouden moeten uitvoeren tijdens het interview.

**De onderzoeksgroep** Tijdens het onderzoek zijn drie verschillende opdrachten, later in detail besproken in paragraaf 4, gegeven aan de onderzoeksgroep om uit te werken volgens een aangepaste Polya's methode in de volgende stappen:

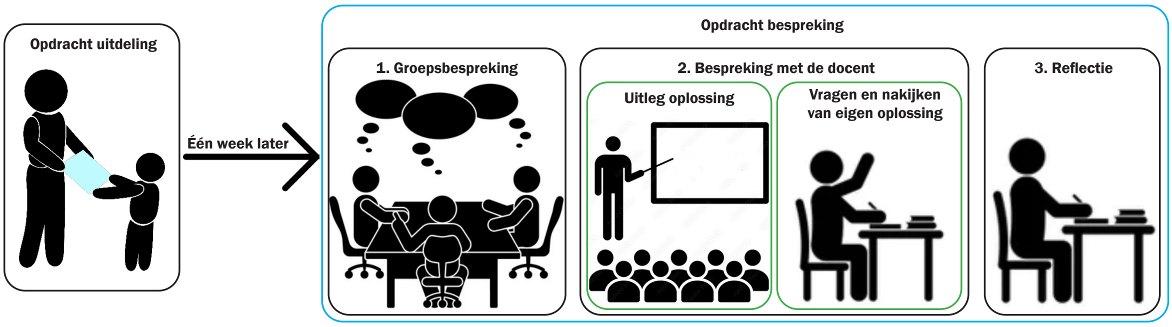
1. ***Voorbereiding***: hierin worden de leerlingen gevraagd om door de opdracht heen te lezen en om in eigen woorden te beschrijven wat de opdracht van hen vraagt en welke gegevens aanwezig zijn. Leerlingen maken bij deze stap een overzicht van de gegevens en schetsen eventueel de situatie. Bovendien worden leerlingen hierbij gevraagd om aan te geven hoe zij het antwoord denken te kunnen bereiken. Een aantal leidende vragen worden ook gegeven om de leerlingen onderweg te helpen;

2. ***Berekening***: hierin worden leerlingen gevraagd om stap 1 te vervolgen door de berekening op geordende wijze uit te voeren. Leerlingen moeten namelijk bij deze stap iedere berekening duidelijk uitschrijven door iedere stapje hiervan op een nieuwe regel te zetten en door aan te geven wat zij aan het doen zijn.

3. ***Uitleg en Reflectie***: hierin worden leerlingen gevraagd om in volledige zinnen iedere stap van hun berekening uit te leggen. Hiervoor worden ook leidende vragen gegeven om de leerlingen onderweg te helpen.
   Mochten leerlingen niet uit stap 2 zijn gekomen, worden zij bij deze stap gevraagd om uit te leggen wat zij wel hebben kunnen doen en bereiken (regel voor regel) en om antwoord te geven op een aantal vragen en, mochten de leerlingen toch nog achterkomen hoe het antwoord berekend had moeten worden, om nog uit te leggen hoe het antwoord gevonden had moeten worden.

Tijdens een introductieles, waarin de voorkennis van het hoofdstuk ook besproken is, is de onderzoeksgroep het instructieblad, een voorbeeldopdracht met voorbeelduitwerkingen en de eerste opdracht gegeven.
Telkens is iedere opdracht gegeven met een inleverdatum van exact een week later. Op ieder inleverdatum is samen met de onderzoeksgroep en sessie gehouden om over hun werk te reflecteren door middel van groepsbespreking, bespreking met de docent aan de hand van de door de onderzoeker uitgewerkte oplossing van de opdracht en het invullen van een reflectieformulier. Deze sessies zijn tijdens het onderzoek door de onderzoeker begeleid. Eerst zijn de leerlingen uit de onderzoeksgroep gevraagd om in groepjes hun antwoorden te bespreken, zonder toegang te hebben tot het antwoord op de opdracht, met de bedoeling om verschillende oplossingen en fouten te ontdekken en te bespreken. Daarna zijn de oplossing en reflectieformulier uitgedeeld aan iedere leerling en is de oplossing door de onderzoeker met de leerlingen besproken zodat de leerlingen hun eigen werken kunnen nakijken en verbeteren. Vervolgens vullen de leerlingen het reflectieformulier in en leveren zij die in met hun uitgewerkte en nagekeken opdracht. Deze formulieren zijn gebaseerd op formulieren gebruikt door prof.dr. N.V. Litvak (Nelly) (en origineel door Mazur (2016)), waarbij gereflecteerd wordt op het werk binnen de opdracht, maar ook op de voortgang van de leerlingen binnen het hoofdstuk: dit heeft als doel om zowel voor de docent als voor de leerlingen om het *weten waarom* en *weten over weten* vast te stellen en te verbeteren (Drijvers e.a., 2012). Op het formulier worden leerlingen bovendien gevraagd om een plan op te stellen om hun achterstanden in huiswerk en begrip goed

te kunnen maken: deze is gebruikt door de docent van de klas om zicht te houden op de voortgang van de klas en is ook gebruikt om te controleren of leerlingen ook daadwerkelijk iets deden met hun opgestelde plan.
Hieronder is de volledige methode schematisch weergegeven vanaf het uitdelen van de opdracht tot het invullen van het reflectieformulier.




**Figuur 1:** Schematische weergave van de methode

De drie opdrachten en reflectieformulieren bij elkaar vormen een portfolio voor iedere leerling waaruit hun voortgang aan de hand van de methode bestudeerd kon worden.

Vóór het begin van de toetsweek, waarin hoofdstuk 8 getoets zou woorden, zijn alle leerlingen uit de onderzoeksgroep gevraagd om anoniem een vragenlijst in te vullen over de methode en de opdrachten. Deze kan gevonden worden bij appendix D.1. Bovendien zijn individuele interviews gehouden met een aantal leerlingen uit de onderzoeksgroep. Hierbij zijn de leerlingen eerst gevraagd om een opdracht op te lossen (zonder volgens Polya's methode te hoeven werken) en de onderzoeker mee te nemen in hun denkstappen en twijfels en zijn vervolgens gevraagd om antwoord te geven op de vragen gevonden onder appendix D.2.

Na de toetsweek zijn de cijfers van beide klassen verzameld en is gekeken door de toetsen om te bepalen of er significante verschillen zouden ontstaan tussen de onderzoeks- en controlegroep.

**De controlegroep** Tijdens het onderzoek zijn de eerste een derde opdracht, later in detail besproken in paragraaf 4, gegeven aan de controlegroep om uit te werken zonder gebruik te maken van Polya's methode. De eerste opdracht is gegeven om een het startpunt tussen de twee groepen te kunnen vergelijken. De derde opdracht is gegeven om het eindpunt te kunnen vergelijken om te bepalen of Polya's methode een duidelijk effect heeft gehad op het doen en kunnen van de onderzoeksgroep.

Vóór het begin van de toetsweek, waarin hoofdstuk 8 getoets zou woorden, zijn individuele interviews gehouden met een aantal leerlingen uit de controlegroep. Hierbij zijn de leerlingen eerst gevraagd om een opdracht op te lossen en de onderzoeker mee te nemen in hun denkstappen en twijfels en zijn vervolgens gevraagd om antwoord te geven op de vragen gevonden onder appendix D.3.

### 3.2.2 Onderbouwing

Zoals eerder besproken, Polya's methode blijkt uit onderzoek vele positieve effecten te hebben op het ontwikkelen van zowel begrip als vaardigheden voor probleemoplossen binnen wiskunde en dit komt als geen verrassing. Door middel van stap 1 ('Voorbereiding') bouwen leerlingen betekenis op voor de inhoud van het voorgestelde probleem: dit is volgens het driefasenmodel dan ook de nodige basis voor het aanleren van nieuwe kennis (Marzano en Miedema, 2018).
De manier waarop Polya's methode (Polya, 2004) aangepast en ingezet wordt binnen dit onderzoek heeft te maken met de resultaten uit ander onderzoek waaruit blijkt dat begrip over een bepaald onderwerp hand in hand gaat met het uitleg kunnen geven aan andere (Bales, 1996). Specifiek het uitleg kunnen geven over eigen ondernomen actie bevordert zowel aan probleemoplossen gerelateerde vaardigheden als analytische denkvaardigheden (Pugalee, 2001) en bevordert bovendien het actief leren en actief bezig zijn met de stof (Urquhart, 2009). Met deze stap krijgen de leerlingen dus ook de kans om hun *weten waarom* en *weten over weten* te verbeteren en ontwikkelen (Drijvers e.a., 2012). Het is om deze reden dat leerlingen expliciet gevraagd worden om in volledige zinnen uitleg te geven voor hun berekeningen, hoewel er enige verwachting bij komt dat leerlingen niet snel dit exact zoals bij het in paragraaf 4.2 voorbeeld zullen doen doordat leerlingen, in ieder geval in Nederland, niet gewend zijn aan veel moeten schrijven voor wiskunde: de verwachting is dus gelijk ook waargemaakt tijdens het onderzoek dat de methode ongetwijfeld tegenwerking zou krijgen van een aantal leerlingen.

### 3.2.3 Respondenten

Zoals eerder benoemd, een antwoord vinden op de hoofdvraag van dit onderzoek (*in welke mate bevordert Polya's 4 stappen methode het analytisch denkvermogen van leerlingen?*) vraagt om een onderzoek van kwalitatief soort, waarbij de ontwikkeling van leerlingen geobserveerd wordt gedurende het invoeren van de methode. Om deze ontwikkeling duidelijker te kunnen zien, zijn tijdens dit onderzoek twee verschillende 2 HAVO/VWO Sport klassen gevraagd als respondenten. De ene klas is gevraagd als onderzoeksgroep en de andere als controlegroep. Deze klassen zijn gekozen om de volgende drie redens:

- deze leerlingen zijn jong (ongeveer 13 jaar oud) en leren daarom aan het leren gerelateerde vaardigheden zodanig dat deze een groter en positiever effect hebben op hun toekomstige schoolcarrière (waarbij vooral het lezen en wiskunde bevorderd worden) en hebben dus op lange termijn erg veel baat aan het aanleren van analytische vaardigheden (McClelland e.a., 2006; Myers en Conner, 1992). Bovendien zijn een groot deel van deze leerlingen erg gemotiveerd doordat zij deelnemen aan een sportklas: de leerlingen van deze klassen zijn erg actief en sportief en daarom onderling ook erg competitief;

- onderbouw klassen zijn niet gebonden aan SE's (School Examens) en hebben vier uur wiskunde in de week, waardoor het introduceren van verschillende opdrachten om uit te werken volgens Polya's 4 stappen methode met gemak gedaan kan worden zonder veel extra druk of werk te zetten op de leerlingen die meedoen. Het nemen van een halve tot een hele les per week voor het bespreken van de opdrachten van dit onderzoek is hierdoor ook mogelijk zonder door het tempo tijdens de gewone lessen voor het vak wiskunde omhoog te moeten laten gaan;

- deze klassen zijn parallel en lijken erg op elkaar doordat het om sportklassen gaat die dus kinderen verzamelen met vergelijkbare interesse en motivatie, waardoor de twee groepen vergelijken mogelijk wordt.

In totaal hebben van de twee klassen bij elkaar 38 respondenten meegedaan aan dit onderzoek (18 voor het onderzoeksgroep en 20 voor de controlegroep).
Tijdens dit onderzoek zijn een aantal leerlingen (drie per klas en dus per groep) gekozen om mee te doen aan individuele interviews. Deze leerlingen zijn zo gekozen om een zo breed mogelijk beeld te krijgen van het effect van de invoering van de methode beschreven in paragraaf 3.2.1 en van het verschil tussen de onderzoeks- en controlegroep. Deze leerlingen zijn, in overleg met hun docent wiskunde, gekozen zodat de volgende drie soorten leerlingen voor iedere groep mee zouden doen aan een interview:

- sterke leerling;
- zwakke leerling;
- onzekere leerling.

De keuze voor deze types leerlingen is gemaakt om een gevarieerd en in ingezoomd beeld te hebben van iedere groep, maar ook om deze types leerlingen onderling te kunnen vergelijken binnen de onderzoeksgroep: het was hierbij van interesse achter te komen of deze interviews, naast de opgebouwde portfolio's, significante verschillen zouden benadrukken tussen verschillende soorten leerlingen.

## 3.3 Instrumenten

De opdrachten ontwikkeld voor dit onderzoek, gevonden onder paragraaf 4, zijn bedacht om leerlingen te kunnen confronteren met een *'productive struggle'*, waarbij nadenken en redeneren noodzakelijk worden omdat het antwoord op de opdracht niet zomaar voor de hand ligt en ook niet zomaar bedacht kan worden aan de hand van losse of uit het hoofd geleerde begrippen en stukken stof. Deze *'productive struggle'* is namelijk een belangrijk onderdeel van het leren van wiskunde met begrip en dus op relationele manier (Hiebert en Grouws, 2007; Granberg, 2016) en zorgt op lange termijn voor het beter onthouden en toepassen op andere situaties van stof (Bjork, Bjork e.a., 2011). Bovendien kunnen leerlingen door middel van een *'productive struggle'* fouten in hun kennis ontdekken en uithalen (Granberg, 2016).
De opdrachten die ontwikkeld zijn voor dit onderzoek zijn verder bedacht om meerdere concepten uit hoofdstuk 8 te moeten gebruiken om tot de oplossing te komen, zodat deze als samenvattende opdrachten kunnen functioneren dat delen van het hoofdstuk afsluiten. Het is daarbij belangrijk dat leerlingen niet geconfronteerd worden met opdrachten van een nog nooit eerder gezien niveau, zodat zij met enige gemak de geïntroduceerde methode kunnen aanpakken en doorwerken: om deze

reden is het niveau van de opdrachten gebaseerd op de moeilijkere opdrachten aanwezig in hoofdstuk 8, ('Inhoud en Vergroten') van het *Getal & Ruimte* boek voor 2 HAVO/VWO, $12^e$ editie (voor andere edities kan de volgorde van de stof en het nummer van het hoofdstuk niet overheenkomen en de notatie en/of terminologie zou ook anders kunnen zijn).

# 4 Instrumenten

Tijdens het uitvoeren van dit onderzoek, zijn verschillende instrumenten ingezet, namelijk een instructieblad (deze kreeg de docent ook) en een reflectieformulier voor de leerlingen om in te vullen tijdens het bespreken van de opdrachten in groepen en om in te leveren individueel samen met hun uitwerkingen voor de opdrachten. Bij het instructieblad is een voorbeeld van een uitwerking volgens de methode gegeven. Onder de instrumenten vallen ook de opdrachten die leerlingen tijdens het onderzoek kregen om uit te werken. Deze zijn hieronder weergegeven samen met de uitwerking hiervan volgens de aangepaste methode van Polya.

## 4.1 Instructies

Tijdens de komende 4 weken zul je wekelijks 1 à 2 opdrachten ontvangen. Deze opdrachten dienen uitgewerkt en ingediend te worden volgens een aantal regels. Voor het uitvoeren van de opdrachten, zul je exact één week de tijd krijgen. De opdrachten, jouw uitwerkingen en de antwoorden zullen dan in groepen besproken worden. Jij zal ook zelf in eerste instantie jouw eigen werk verbeteren en zal gevraagd worden om kort erop terug te blikken en te reflecteren.
Voor het uitwerken van de opdracht(en) gelden de volgende regels:

- De opdrachten moeten worden uitgevoerd volgens een stappenplan. Dit stappenplan bestaat uit drie stappen, die hieronder uitgelegd zullen worden en waarbij een volledig uitgewerkt voorbeeld gegeven zal worden.
  **Let op**: iedere individuele opdracht dient uitgewerkt te worden volgens dit stappenplan, dus twee verschillende opdrachten vragen om twee volledige verschillende uitwerkingen die allebei ingeleverd moeten worden;

- De uitwerking van de opdracht(en) moet handgeschreven zijn met een blauwe/-zwarte pen op een blaadje dat ingeleverd kan worden (werk deze opdracht(en) dus NIET uit in je schrift);

- De opdrachten moeten individueel ingeleverd worden en je mag dus niet exact hetzelfde inleveren als een klasgenoot;

- Mocht je vastlopen bij het oplossen van de opdrachten, je mag zowel het boek als het internet gebruiken om jezelf verder te helpen.

### 4.1.1 Stap 1 - Voorbereiding

Lees de opdracht goed door en beschrijf in eigen woorden welke gegevens je hebt. Maak dus een duidelijk overzicht van alle gegevens en wat zij betekenen. Zo nodig, maak een tekening of een schets van de situatie. Schrijf ook in eigen woorden op wat van jou gevraagd wordt en hoe je dat gaat bereiken. Help jezelf eventueel door de volgende vragen te beantwoorden:

- Wat moet je berekenen/bewijzen?

- Hoe ga je dit berekenen/bewijzen?

- Welke informatie heb je nog nodig om tot je oplossing te kunnen komen?

Geef bij deze stap gelijk aan welke zaken je van plan bent aan te pakken om tot de oplossing te komen.

### 4.1.2 Stap 2 - Berekening

In de voorgaande stap heb je beschreven je beginpunt en waar je naartoe wilt werken. Gebruik die informatie in deze fase om de stappen te zetten die nodig zijn om een oplossing te vinden. Schrijf duidelijk op wat je aan het doen bent, want dat ga je nodig hebben in de volgende stap. Zorg dus ervoor dat iedere nieuwe stapje van je berekening op een nieuwe regel begint en leg goed uit welke regels je gebruikt en waarom je iets doet of waarom je aan iets begint.
Het kan gebeuren dat je niet in een keer uit het probleem komt of zelfs helemaal niet. Maak je daar geen zorgen om: kom zo ver als het lukt, schrijf duidelijk op dat je niet verder wist te komen en ga dan door naar stap 3. Onthoud hierbij dat het niet de bedoeling is dat je gelijk opgeeft, maar juist dat je echt probeert een oplossing te vinden en dat ook laat zien met je werk. Kom je dus niet uit een opgave? Neem een pauze en probeer het later opnieuw voordat je beslist door te gaan naar stap 3.

### 4.1.3 Stap 3 - Uitleg en Reflectie

Wiskunde kan je en ken je pas echt als je het ook aan iemand anders in eigen woorden kan uitleggen. Om deze reden, ga je in deze stap jouw berekening uitleggen.
Zorg ervoor dat je in eigen woorden en volledige zinnen iedere stap en regel van je berekening uitlegt. Help jezelf door voor iedere regel en stap antwoord te geven op de volgende vragen:

- Wat doe je in deze regel?
- Waarom neem je deze stap en wat heb je ermee bereikt?
- Klopt wat je hebt gedaan?
- Waarom mag je dit doen?

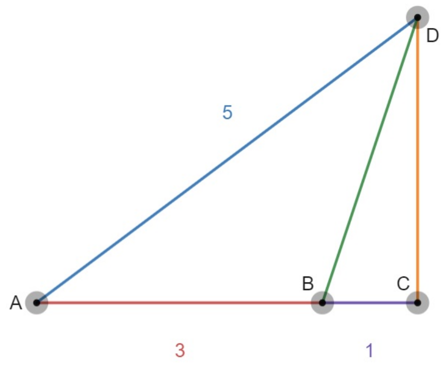
Ben je niet uit stap 2 gekomen? Zorg ervoor dat je nog wel een uitleg geeft voor de stappen die wel gelukt zijn en beantwoord vervolgens in volledige zinnen de volgende vragen:

- Wat heb je tot nog toe bereikt?
- Waar liep je vast en waarom?
- Welke gegevens miste je om verder te kunnen komen?
- Hoe zou je de ontbrekende gegevens toch nog kunnen bereiken of berekenen?
- Welk antwoord had je verwacht op de gestelde vraag? Geef een schatting en leg hierbij uit waarom jij dit denkt.

Kom je toch nog na het beantwoorden van deze vragen achter hoe je de opdracht verder had kunnen uitwerken, schrijft duidelijk en in volledige zinnen welke stappen je had moeten zetten om tot het volledige antwoord te komen.

## 4.2 Voorbeeld

In driehoek $ACD$ hoek $C$ is $90°$. Bereken de oppervlakte van driehoek $ABD$.




### 4.2.1 Stap 1

Gegeven zijn driehoek $ABD$ en rechthoekige driehoek $BCD$, die bij elkaar rechthoekige driehoek $ACD$ vormen. Gegeven is ook dat $AD = 5$, $AB = 3$ en $BC = 1$. De oppervlakte van een driehoek kan berekend worden met de formule $opp\triangle = \frac{1}{2} \times$ zijde $\times$ bijbehorende hoogte.

Aangezien driehoek $ABD$ een onderdeel is van rechthoekige driehoek $ACD$, kan de oppervlakte van driehoek $ABD$ als volgt berekend worden: $opp\triangle ABD = opp\triangle ACD - opp\triangle BCD$.
De oppervlakte van driehoek $ACD$ kan berekend worden als $opp\triangle ACD = \frac{1}{2} \times AC \times CD$. Hiervoor moeten we dus $AC$ en $CD$ weten. De lengte van $AC$ kan berekend worden als volgt: $AC = AB + BC$. De lengte van $CD$ kan berekend worden door de Stelling van Pythagoras te gebruiken.
Als $CD$ bekend is, kan de oppervlakte van $BCD$ berekend worden als $opp\triangle BCD = \frac{1}{2} \times BC \times CD$.

### 4.2.2 Stap 2

We beginnen door zijde $AC$ te berekenen.

$$AC = AB + BC \tag{1}$$
$$AC = 3 + 1 = 4 \tag{2}$$

dus $AC = 4$.
Aangezien driehoek $ACD$ een rechthoekige driehoek is, moet het volgens de Stelling van Pythagoras gelden dat
$$AD^2 = AC^2 + CD^2. \tag{3}$$

Hieruit volgt dat

$$5^2 = 4^2 + CD^2 \tag{4}$$
$$25 = 16 + CD^2 \tag{5}$$
$$25 - 16 = CD^2 \tag{6}$$
$$9 = CD^2 \tag{7}$$
$$\sqrt{9} = CD \lor -\sqrt{9} = CD \tag{8}$$
$$3 = CD \lor -3 = CD. \tag{9}$$

Aangezien $CD$ een lengte is, kan $CD$ nooit gelijk zijn aan $-3$. We rekenen dus verder met $CD = 3$.
We berekenen de oppervlakte van $ACD$ als

$$opp\triangle ACD = \frac{1}{2} \times AC \times CD \tag{10}$$

$$opp\triangle ACD = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6 \tag{11}$$

dus de oppervlakte van $ACD$ is gelijk aan 6. We berekenen nu de oppervlakte van $BCD$ als

$$opp\triangle BCD = \frac{1}{2} \times BC \times CD \tag{12}$$
$$opp\triangle BCD = \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{3}{2} \tag{13}$$

dus de oppervlakte van $BCD$ is gelijk aan $\frac{3}{2}$. Wij kunnen nu eindelijk de oppervlakte van driehoek $ABD$ berekenen als

$$opp\triangle ABD = opp\triangle ACD - opp\triangle BCD \tag{14}$$

$$opp\triangle ABD = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}. \tag{15}$$

De oppervlakte van driehoek $ABD$ is dus gelijk aan $\frac{9}{2}$.

### 4.2.3 Stap 3

Bij de uitleg hieronder correspondeert de nummering met die uit de stappen van de berekening.

1. Zijde $AC$ wordt verdeeld in twee, $AB$ en $BC$, door punt $B$. Door de twee stukken op te tellen kunnen we dus zijde $AC$ berekenen.

2. We vullen de gegevens die al bekend waren bij ons in. Uit de gegeven figuur visten we namelijk dat $AB = 3$ en dat $BC = 1$.

3. Dit is de Stelling van Pythagoras.

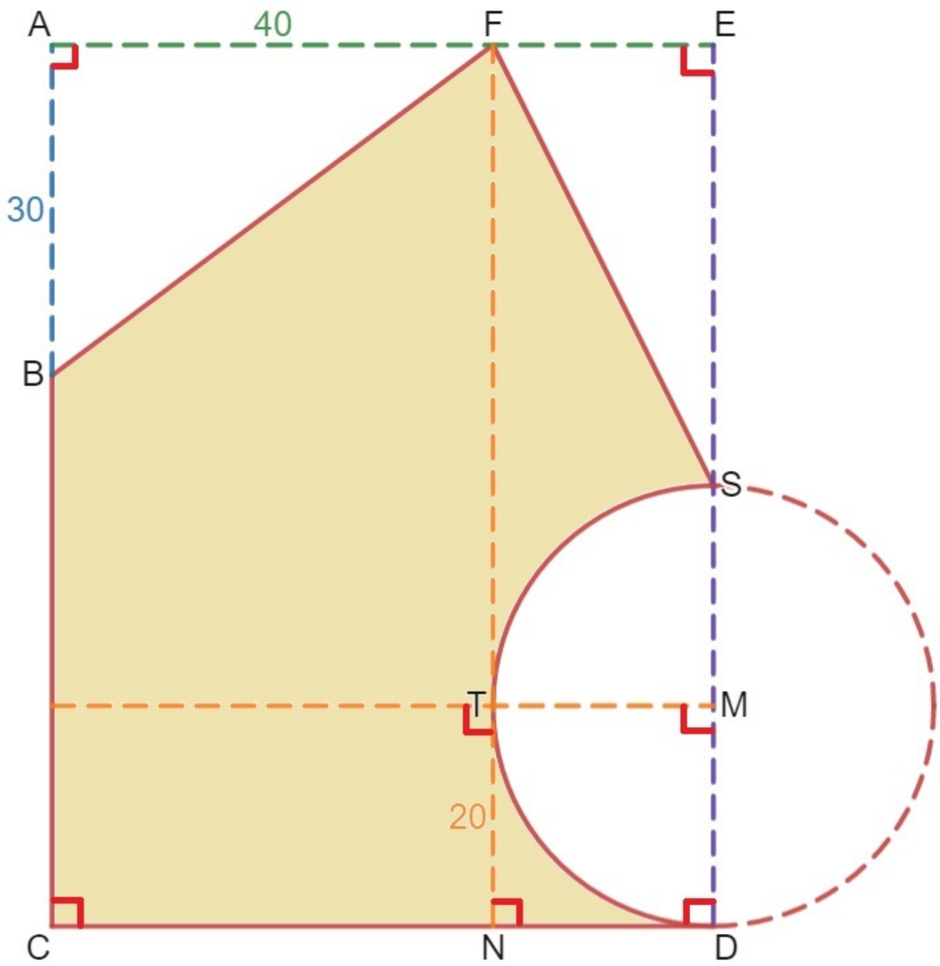
4. We vullen de gegevens die al bekend waren bij ons in. Uit de gegeven figuur visten we namelijk dat $AD = 5$. We vullen ook nog de berekend zijde $AC = 4$.

5. De kwadraten van 5 en 4 (25 en 16 respectievelijk) worden hier uitgewerkt.
6. We brengen 16 naar de andere kant. Dit mag volgens de balansmethode.
7. We voeren uit de berekening $25 - 16 = 9$.
8. We nemen de wortel aan beide kanten volgens de balans methode en krijgen hierdoor twee mogelijke oplossingen. Er geldt namelijk dat $(\sqrt{9})^2 = (-\sqrt{9})^2 = 9$.
9. De twee mogelijke oplossingen worden uitgerekend en we kiezen vervolgens de oplossing die zinvol is gezien de situatie. In dit geval zijn we op zoek naar een lengte en de waarde van een lengte mag nooit negatief zijn, dus het gevonden antwoord $-3$ hoeft niet meegenomen te worden. Er volgt dus dat $CD = 3$.
10. Deze is de formule om de oppervlakte van driehoek $ACD$ te bepalen. We kiezen hierbij $AC$ als zijde zodat $CD$ de bijbehorende hoogte is.
11. We vullen in de gegeven waarde van $AC$, namelijk 4, en de zojuist bepaalde waarde van $CD$, namelijk 3. We voeren dat ook gelijk de berekening uit en komen tot het antwoord 6.
12. Deze is de formule om de oppervlakte van driehoek $BCD$ te bepalen. We kiezen hierbij $BC$ als zijde zodat $CD$ de bijbehorende hoogte is.
13. We vullen in de gegeven waarde van $BC$, namelijk 1, en de zelf bepaalde waarde van $CD$, namelijk 3. We voeren dan ook gelijk de berekening uit en komen tot het antwoord $\frac{3}{2}$.
14. Deze is de formule om de oppervlakte van driehoek $ABD$ te bepalen. Driehoek $ACD$ bestaat uit twee delen: driehoek $ABD$ en driehoek $CBD$. Door van de totale oppervlakte (die van driehoek $ACD$) de oppervlakte weg te halen van het deel waarin wij geen interesse in hebben (die van driehoek $BCD$), kunnen we dus de oppervlakte van driehoek $ABD$ berekenen.
15. De berekende oppervlaktes van driehoeken $ACD$ en $BCD$ worden ingevuld en we voeren gelijk de berekening $6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ uit. De oppervlakte van driehoek $ABD$ is dus $\frac{9}{2}$.

## 4.3 Opdrachten

### 4.3.1 Opdracht 1

Bereken in $dm^2$ de oppervlakte van $BCDSF$ (de figuur in het geel), waarbij punt $S$ het midden is van het lijnstuk $DE$, $M$ het midden is van het lijnstuk $DS$ en het middelpunt van cirkel $c$ en waarbij lijnstuk $AB = 30\ cm$, lijnstuk $AF = 40\ cm$ en lijnstuk $TN = 20\ cm$.
Rond je antwoord af op 2 decimalen.




### 4.3.2 Uitwerking

De uitwerking volgens de methode van Polya van deze opdracht is gedeeld met de leerlingen tijdens de reflectiesessies van dit onderzoek, maar er wordt voor gekozen om deze niet hier mee te nemen.
De uitwerking van deze opdracht kan gevonden worden in bijlage A van dit document.

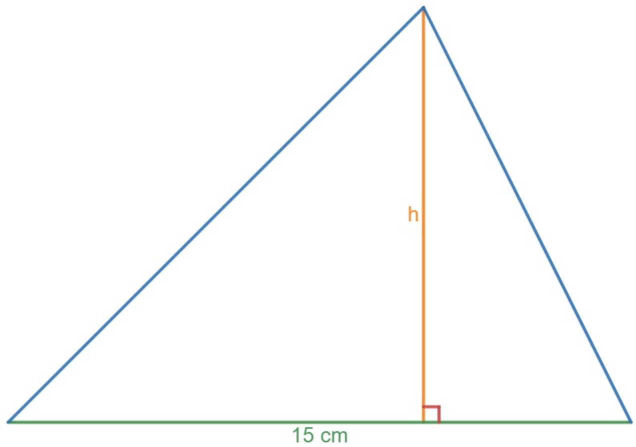
### 4.3.3 Onderbouwing

Deze opdracht dient als herhaling en instap bij de methode. De stof van de voorkennis van het hoofdstuk (oppervlakte van vlakke figuren) komt hier aan bod en

moet gebruikt worden om de oppervlakte van figuur $BCDSF$ te bereken. Leerlingen moeten hierbij de informatie in de figuur gebruiken, zoals welke hoeken 90° zijn. Bovendien zet deze opdracht de toon voor de rest van de opdrachten binnen de methode: het vinden van de oplossing vraagt dat leerlingen in meerdere stappen hun kennis toepassen op het probleem en dus de stof van een of meer onderdelen van het hoofdstuk combineren om tot een antwoord te kunnen komen. De stappen liggen niet voor de hand zodat leerlingen een *productive struggle* kunnen ervaren, maar meerdere methodes kunnen tot het antwoord leiden zodat de leerlingen ruimte hebben om te exploreren wat wel en niet werkt en zich ook kunnen focussen op hoe de methode uitgewerkt moet worden.
Deze opdracht dient om kerndoelen 19 en 27 te laten beoefenen: leerlingen leren (deels door middel van de methode) het eigen denken te ordenen en uit te leggen en de figuur, waarin notities gemaakt kunnen worden, biedt de mogelijkheid om te leren hoe gegevens gerepresenteerd kunnen worden.

### 4.3.4 Opdracht 2

Een bloemenwinkel wil nieuwe vazen aanschaffen om de oudere te vervangen. De oude vazen hadden de vorm van een cilinder met diameter 15 $cm$ en hoogte gelijk aan 20 $cm$. De nieuwe vazen hebben de vorm van een prisma met als grondvlak een driehoek met een zijde van lengte 15 $cm$, zoals gezien kan worden in figuur 2. De nieuwe vazen zijn net zo hoog als de oude vazen.




**Figuur 2:** De grondvlak van de nieuwe vazen met een zijde van lengte 15 $cm$ en lijnstuk $h$.

De bloemenwinkel wil ervoor zorgen dat deze nieuwe vazen meer water en grotere bossen bloemen kunnen vasthouden.
Onderzoek de minimale lengte in gehelen van het lijnstuk $h$ van het grondvlak van de nieuwe vazen.

### 4.3.5 Uitwerking

De uitwerking volgens de methode van Polya van deze opdracht is gedeeld met de leerlingen tijdens de reflectiesessies van dit onderzoek, maar er wordt voor gekozen om deze niet hier mee te nemen.
De uitwerking van deze opdracht kan gevonden worden in bijlage A van dit document.

### 4.3.6 Onderbouwing

In deze opdracht komt paragraaf 1 ('Inhoud prisma en cilinder') aan bod. Daarnaast is nu een deel van de gegevens expliciet in de tekst gezet, terwijl een andere deel aangegeven wordt aan de hand van bekende gegevens om leerlingen uit te nodigen om figuren te tekenen waarin de gegevens volledig weergegeven zijn. Bovendien moeten leerlingen voor deze opdracht bekende formules gebruiken met elkaar vergelijken en omschrijven om gegevens (de hoogte $h$) van de figuur te kunnen berekenen.
De drie kerndoelen 19, 23 en 27 komen hier ook aan bod. Kendoelen 19 en 27 komen aan bod door de gebruikte methode, hoewel kerndoel 27 ook aan bod komt doordat leerlingen nodig hebben om de tekst en de gegevens erin te ordenen en te

verduidelijken aan de hand van een schematische weergave of figuur om die makkelijk te kunnen inzetten voor het oplossen van de opdracht. Bovendien komt kerndoel 23 ook aan bod doordat leerlingen figuren met elkaar moeten vergelijken en zelfs het antwoord zouden kunnen inschatten (naast exact berekenen) aan de hand van hun inzicht in hoe de figuren zich tot elkaar houden; hun inzicht in hoe variabelen invloed hebben binnen een formule helpt ze onderweg naar het antwoord.

### 4.3.7 Opdracht 3

Om een spel te spelen, wil je een zandloper bestaand uit twee even grote kegels gebruiken. Het grondvlak van de kegels heeft een diameter gelijk aan 12 $cm$ en de totale hoogte van de zandloper is gelijk aan 30 $cm$. Het zand in de zandloper vult een hele kegel en weegt $1,5$ $kg$ per liter. Na het omdraaien van de zandloper, duurt het 6 minuten tot het zand in de andere kegel is gelopen.
**a)** Bereken hoeveel gram zand er per seconde door de opening van de zandloper stroomt. Rond af op twee decimalen.

**b)** Je wil een zandloper zelf bouwen die een vergroting is van de zandloper die je voor het spel hebt gebruikt. Bij deze nieuwe zandloper stroomt het zand met dezelfde snelheid als je antwoord uit deel a), maar je wil nu ervoor zorgen dat, na het omdraaien van de zandloper, het 12 minuten duurt tot het zand in de andere kegel is gelopen. Welke vergrotingsfactor moet je gebruiken om deze nieuwe zandloper te bouwen? Rond je antwoord af op 2 decimalen.

### 4.3.8 Uitwerking

De uitwerking volgens de methode van Polya van deze opdracht is gedeeld met de leerlingen tijdens de reflectiesessies van dit onderzoek, maar er wordt voor gekozen om deze niet hier mee te nemen.
De uitwerking van deze opdracht kan gevonden worden in bijlage A van dit document.

### 4.3.9 Onderbouwing

In deze opdracht komen paragraven 2 ('Inhoud piramide en kegel'), 3 ('Vergroten en verkleinen') 5 ('Inhoud bij vergroten') aan bod. Paragraaf 4 ('Oppervlakte bij vergroten') komt niet expliciet aan bod, maar legt de basis voor paragraaf 5 en is daardoor indirect nodig voor de opdracht. Nogmaals moeten leerlingen voor deze opdracht meerdere onderdelen van de stof combineren om tot het antwoord te komen en moeten zelfs eigen kennis inzetten die niet tot het hoofdstuk behoort. Hun wiskundige vaardigheden worden zo ingezet in de context van toepassing die de samenwerking tussen wiskunde en andere vakken laat zien.
De drie kerndoelen 19, 23 en 27 komen hier ook nogmaals aan bod. Kendoelen 19 en 27 komen weer aan bod door de gebruikte methode, hoewel kerndoel 27 dus ook aan bod komt doordat leerlingen nog eens nodig hebben om de tekst en de gegevens erin te ordenen en te verduidelijken aan de hand van een schematische weergave of figuur. Kerndoel 23 komt vooral aan bod bij onderdeel b) van de vraag. Door hun inzicht en de kennis uit paragraaf 5 te gebruiken, zouden leerlingen namelijk in staat moeten zijn om het eindantwoord te kunnen inschatten en dus te kunnen aangeven of hun eindantwoord fout lijkt te zijn.

### 4.3.10 Reflectieformulieren

Naast het voorleggen van de opdrachten, kregen leerlingen uit de onderzoeksgroep ook telkens een reflectieformulier om in te vullen aan de hand van de bespreking van elke opdracht met hun klasgenoten en hun docent. Dit formulier had als doel om de leerlingen bewust te maken van hun leerproces, begrip van de stof en van de sterktes en zwaktes daarin.
Deze reflectieformulieren per opdracht kunnen gevonden worden in de bijlage B van dit document.

## 4.4 Interviews

Om het verschil tussen het wel of niet gebruik hebben gemaakt van Polya's methode verder te onderzoeken, zijn een aantal leerlingen uit de onderzoeks- en controlegroep geïnterviewd aan de hand van een korte opdracht en vragenlijsten. Het was de bedoeling dat leerlingen deze opdracht individueel zouden uitwerken en dat zij duidelijk hun denkproces zouden delen met de docent door hardop te denken en door in eigen woorden de eigen stappen uit te leggen om achter te halen of het wel of niet gebruik te hebben gemaakt van de onderzoeksmethode hier verschillen in zou brengen.

### 4.4.1 Interview opdracht

Nadat een kaars, die de vorm van een kegel heeft, een tijdje heeft gebrand, is de hoogte met 32% afgenomen en is de diameter met 19% afgenomen.
Met hoeveel procent is de inhoud van de kaars afgenomen?

### 4.4.2 Uitwerking

De uitwerking volgens de methode van Polya van deze opdracht is nooit gedeeld met leerlingen tijdens dit onderzoek.
De uitwerking van deze opdracht kan gevonden worden in bijlage C van dit document.

### 4.4.3 Interview vragen

Naast het voorleggen van de opdracht, kregen de leerlingen (drie per groep) uit de onderzoeks- en controlegroep die meededen aan een interview een aantal vragen te beantwoorden over de methode en de gekregen opdrachten met de bedoeling om feedback te verzamelen over het voorgelegde werk en om te achterhalen of de meningen over de opdrachten zouden verschillen op basis van wel of niet de methode te hebben moeten gebruiken. Bovendien was hierbij ook het doel om te peilen hoeveel tijd de opdrachten inname met of zonder de methode om te kunnen bepalen of het standaard invoeren van dergelijke opdrachten met de methode in het programma wiskunde op de middelbare school mogelijk zou zijn zonder weg te moeten nemen van het gewoon oefenen aan de hand van de (kortere) opdrachten uit het boek of die bedacht zijn door de docent. Bovendien, in lijn met het willen evalueren van de met regelmaat inzetbaarheid op school van de methode, kregen alle leerlingen uit de onderzoeksgroep een verkorte vragenlijst anoniem in te vullen in de vorm van een formulier op papier, waarbij naar de kwaliteit van de opdrachten en naar de nodige tijd per opdracht werd gevraagd.
De gebruikte vragen kunnen gevonden worden in de bijlage D van dit document.

# 5 Resultaten

Bij dit onderzoek is erg veel data verzameld die zowel verwachte als onverwachte resultaten heeft oplevert voor de verschillende eerder besproken onderzoeksvragen. Om de resultaten te bespreken, zal eerst de verzamelde data kort beschreven worden om een overzicht te geven van de uitvindingen van dit onderzoek. Vervolgens zullen de resultaten gepresenteerd worden per onderzoeksvraag om daarop antwoord te kunnen geven.

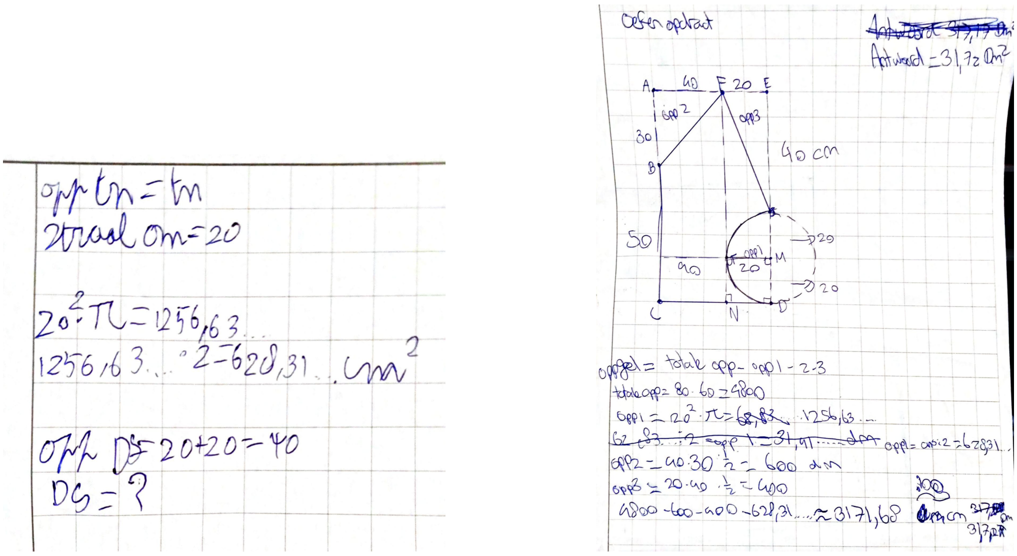
## 5.1 Verzamelde data

Onder de verzamelde data vallen zowel de portfolio's van de onderzoeksgroep als de antwoorden tijdens de interviews. De verzamelde cijfers en de bevindingen van de toets over hoofdstuk 8 behoren dan ook tot dit onderdeel.
De opdrachten, reflectiesessies, interviews en de toets zullen een voor een besproken worden.

### 5.1.1 Opdrachten

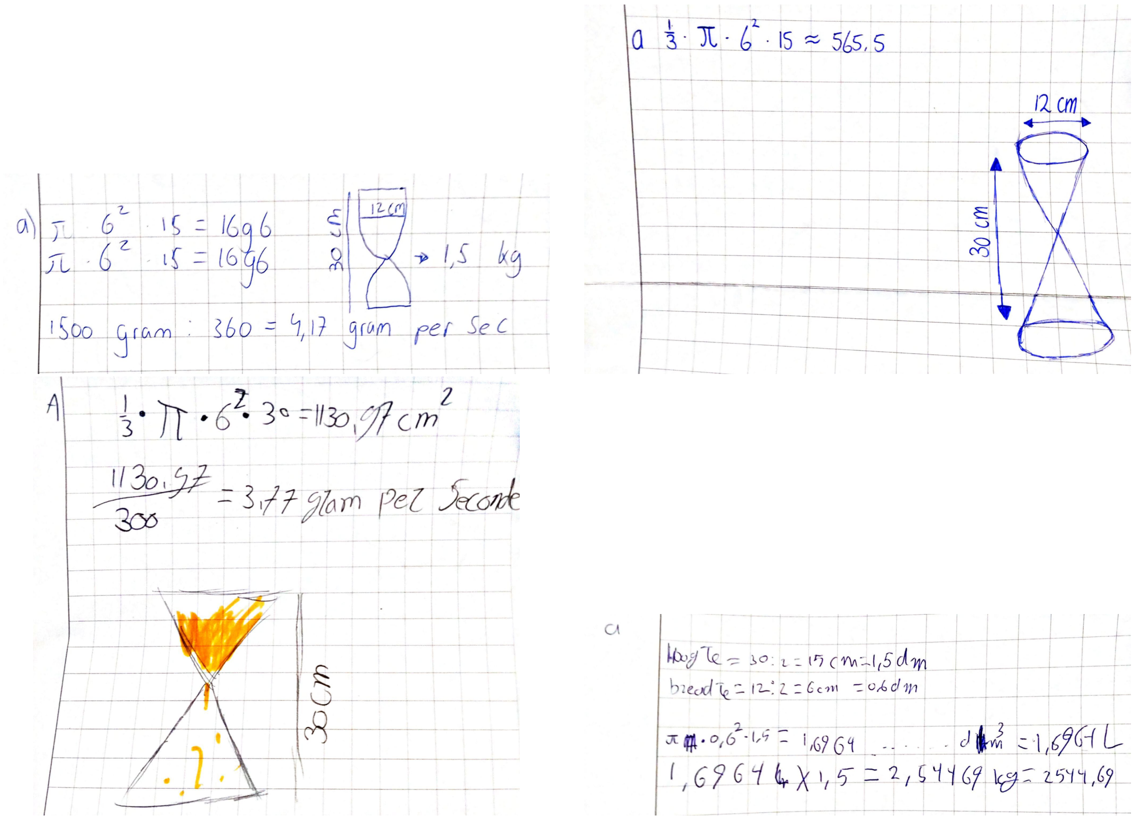
Zoals te verwachte was, leerlingen werden niet telkens even enthousiast van de hoeveelheid schrijfwerk dat deze methode inhoudt en niet iedere leerling deed even goed mee. Vooral bij opdracht 1 volgden niet alle leerlingen de instructies uit Polya's methode en niet alle respondenten leverde opdracht 3 in met als reden dat zij te druk waren met andere vakken. Een aantal leerlingen gaven zelfs aan dat zij beter hun best hadden gedaan voor de opdracht als er een cijfer aan verbonden was geweest, wat het duidelijk signaal geeft dat veel leerlingen slechts voor de toets leren en niet voor de verrijking van hun eigen kennis.

Het verschil tussen het wel of niet gebruik te maken van Polya's methode kwam wel duidelijk naar voren vanaf opdracht 1. Terwijl zeker niet iedereen uit de onderzoeksgroep gelijk goed meedeed met de methode, bijna alle leerlingen uit de onderzoeksgroep schreven in ieder geval goed op alle gegevens, maakten schetsen en gaven aan wat zij aan het doen waren en waar zij vastliepen. Anderzijds, erg weinig leerlingen uit de controlegroep maakten schetsen en alle stappen werden zonder enige uitleg geschreven. De leerlingen die wel een tekening maakten, hadden wel duidelijk een veel overzichtelijkere aanpak en konden veel beter bijhouden welke gegevens bekend waren en welke zij dus mochten gebruiken bij berekeningen.




**Figuur 3:** Uitwerkingen van opdracht 1 door controlegroep leerlingen

Het verschil in hoeveel leerlingen uit iedere groep uit de opdracht konden komen was vrij klein.
Opdracht 2 gaf enige verbetering aan in het aanpakken van opdrachten vanuit leerlingen uit de onderzoeksgroep. Meer leerlingen kwamen uit de opdracht en het beargumenteren van waarom zij bepaalde stappen namen en berekeningen maakten ging ook beter. Veel leerlingen waren in staat om zelf schetsen te maken van de situatie en konden veel duidelijker aangeven waardoor zij vastliepen (mochten zij zijn vastgelopen bij het uitwerken en oplossen van de opdracht).
Terwijl lang niet alle leerlingen uit de onderzoeksgroep opdracht 3 hebben gemaakt, iedereen die de opdracht inleverde kon uit de opdracht komen en, hoewel deze opdracht geen figuur biedt ter begeleiding, kon schetsen maken om de gegevens te weergeven op een geordende manier. Alle stappen waren duidelijk opgeschreven en uitgelegd en de denkstappen en logica achter de berekeningen van de leerlingen werden uit hun opdracht zichtbaar en duidelijk. Anderzijds, de opdrachten van de controlegroep waren niet diepgaand uitgewerkt, bevatten geen enkele schriftelijke vorm van uitleg, met slechts een paar leerlingen die een schets van de situatie hebben gemaakt. Erg weinig leerlingen uit de controlegroep kwamen uit deze opdracht, een indicatie dat Polya's methode een positief effect lijkt te hebben gehad op het analytisch denkvermogen en op de probleemoplossen vaardigheden van leerlingen uit de onderzoeksgroep.




**Figuur 4:** Uitwerkingen van opdracht 3 door controlegroep leerlingen

Bijzonder om te zien was dat leerlingen uit de controlegroep veel meer neigde bij deze opdracht om wel een schets van de situatie te maken, hoewel zij dat niet hoefden te doen. Op het moment dat zij vastliepen, probeerden zij dus ook uit zichzelf de gegevens van het probleem te ordenen om tot ideeën te komen voor een vervolgstap.

### 5.1.2 Reflectiesessies

Tijdens deze sessies deden de meeste leerlingen goed mee. Zij werden enthousiast van het samen mogen werken en hun competitiviteit hielp daaraan: leerlingen gingen tijdens deze sessies met gemak hun antwoorden vergelijken en bespreken, maar erop reflecteren ging niet altijd even soepel en leerlingen hadden tijdens de eerste sessie veel begeleiding nodig bij het invullen van het reflectieformulier. Deze sessies werden wel serieus genomen en leerlingen stelden goede vragen bij de bespreking van de opdrachten met de onderzoeker en stelden goede (hoewel niet erg gedetailleerd zoals gevraagd werd op het formulier) plannen op om hun valkuilen goed te kunnen maken tijdens het leren. De meeste leerlingen hielden zich ook netjes aan hun eigen plan.
De formulieren gaven veel inzicht in hoe de leerlingen nadenken over hun werk en vooral opmerkelijk was dat leerlingen het vrij moeilijk vonden om positieve aspecten te vinden aan hun werk: leerlingen zijn gewend om hun fouten te herkennen en konden dat met gemak doen, maar vonden het ingewikkeld om aan te geven wat zij wel goed hadden kunnen doen in de opdracht. Wel werden zij door het formulier bewuster en kritische van hoe goed zij bepaalde stof kenden.

### 5.1.3 Interviews

De interviews gaven ook interessant resultaten aan. Zo kwam tijdens de individuele interviews duidelijk naar voren dat Polya's methode een goede houvast is voor leerlingen als zij aan de slag gaan met een moeilijke opdracht. Hoewel leerlingen uit de onderzoeksgroep de vrijheid hadden om de opdracht op te lossen zoals zij wilden en zelfs specifiek vroegen of zij niet volgens de methode konden werken, gebruikten alle drie de leerlingen onbewust wel de methode: zij begonnen door de gegevens te verzamelen en door een schets te maken en legden iedere stap uitvoerig mondeling uit. Twee van de drie leerlingen liepen vast, maar wisten aan te geven waardoor zij vast liepen en stelden relevante vragen aan de onderzoeker om verder te kunnen komen. Aan de andere kant, de drie leerlingen uit de controlegroep vonden het moeilijk om uit te leggen wat zij aan het doen waren en begonnen gelijk om berekeningen te doen na het lezen van de opdracht, zonder eerst na te denken over wat de opdracht van hen vroeg en welke zij tot hun beschikking hadden. Alle leerlingen uit deze groep liepen vast bij de opdracht, maar slechts een van de drie wist aan te geven waardoor die vastliep en wat voor informatie die nodig had om verder te kunnen.
De vragen van het interview lieten ook zien dat leerlingen uit de onderzoeksgroep over het algemeen de opdrachten erg nuttig vonden: zij konden hiermee controleren de stof echt begrepen te hebben en, terwijl opdracht 3 moeilijker is dan opdracht 1, waardeerden zij de latere opdrachten meer en gaven aan bij de eerdere opdrachten dat zij iets te moeilijk waren. De wat zwakkere en onzekere leerlingen gaven ook aan de methode nuttig te vinden als houvast: als zij vastliepen bij hun gewone huiswerk konden zij nu terugvallen op de methode om te controleren of zij de vraag begrepen hadden en of zij alle gegevens goed benut hadden. Het inzetten van de methode voor de drie opdrachten nam ook niet veel tijd in beslag, meet een besteding van ongeveer 30 à 40 minuten per opdracht.
De leerlingen uit de controlegroep waren over het algemeen negatiever over de opdrachten, maar vonden de methode nuttig klinken voor leerlingen die moeite hebben met wiskunde en een vast plan van aanpak nodig hebben.

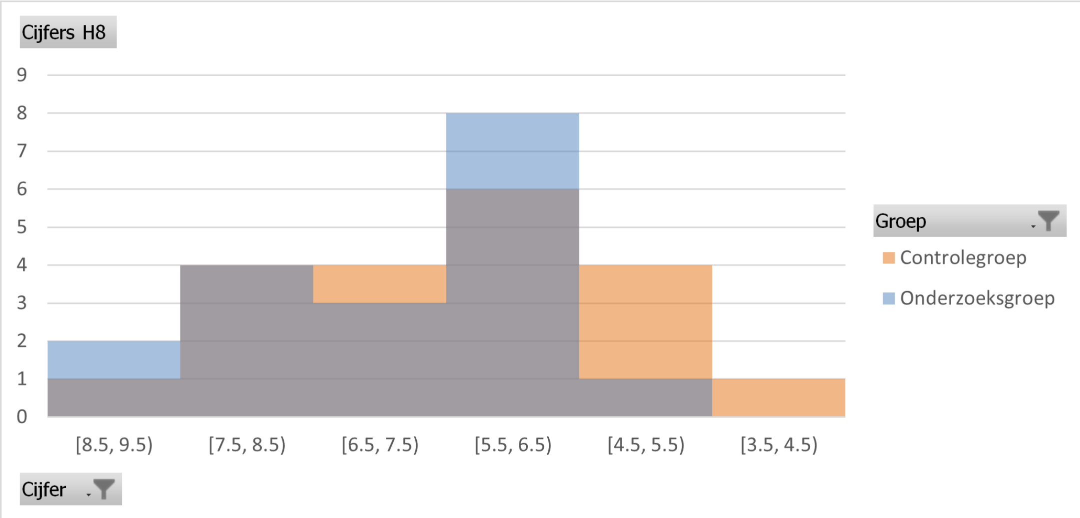
### 5.1.4 Toets hoofdstuk 8

Hoewel dit onderzoek van kwalitatieve soort is, het lijkt zinvol en relevant om nog het doen en kunnen van de respondenten op de toets over hoofdstuk 8 ('Inhouden en Vergroten') na het wel of niet gebruik te hebben gemaakt van Polya's methode mee te nemen.
Hieronder zijn de cijfers van de onderzoeks- en controlegroep te vinden met een visuele indicatie van hoe goed ieder cijfer is.

| | **Onderzoeksgroep** | **Controlegroep** |
|---|---|---|
| **Leerling A** | 9,0 | 8,6 |
| **Leerling B** | 8,6 | 8,4 |
| **Leerling C** | 8,3 | 8,3 |
| **Leerling D** | 8,1 | 8,1 |
| **Leerling E** | 8,1 | 7,6 |
| **Leerling F** | 7,8 | 7,2 |
| **Leerling G** | 7,3 | 7,2 |
| **Leerling H** | 7,0 | 7,1 |
| **Leerling I** | 6,5 | 6,5 |
| **Leerling J** | 6,2 | 6,2 |
| **Leerling K** | 6,2 | 6,0 |
| **Leerling L** | 6,2 | 5,8 |
| **Leerling M** | 6,2 | 5,5 |
| **Leerling N** | 5,9 | 5,5 |
| **Leerling O** | 5,8 | 5,5 |
| **Leerling P** | 5,6 | 5,3 |
| **Leerling Q** | 5,5 | 5,3 |
| **Leerling R** | 5,1 | 4,7 |
| **Leerling S** | - | 4,6 |
| **Leerling T** | - | 3,8 |
| **Gemiddelde** | 6,9 | 6,4 |

**Tabel 1:** Cijfers gekregen voor het hoofdstuk door de onderzoeksgroep en door de controlegroep op aflopende volgorde

Uit tabel 1 blijkt dat de onderzoeksgroep betere resultaten heeft behaald bij de toets dan de controlegroep. De twee gemiddelde liggen niet ver uit elkaar, maar vooral het aantal onvoldoendes is erg verschillend tussen de twee groepen. Terwijl slechts één van de respondenten uit de onderzoeksgroep een onvoldoende heeft gehaald, vijf verschillende respondenten uit de controlegroep hebben geen voldoende gehaald. Gezegd moet ook worden dat, over het algemeen, de cijfers behaald door de onderzoeksgroep iets hoger zijn dan de cijfers behaald door de controlegroep.




**Figuur 5:** Histogram van de cijfers voor hoofdstuk 8 van beide groepen

Te onthouden is dat niet iedere leerling heeft deel genomen aan dit onderzoek. De resultaten in tabel 1 en fig. 5 geven dus alleen de prestatie weer van leerlingen die wel hebben meegedaan aan het onderzoek en dus niet van de gehele klassen.
Erg interessant was ook de hoeveelheid tekst op de toetsen. Terwijl leerlingen uit de controlegroep hun berekeningen hebben opgeschreven zonder enige uitleg, veel leerlingen uit de onderzoeksgroep hebben indicatie gegeven in eigen woorden van wat zij aan het doen waren bij berekeningen waardoor, terwijl en volledige uitleg zeker niet aanwezig was, hun denkproces en logica bij de opdrachten veel duidelijker zichtbaar werd. Hierdoor was begrijpen waar en waardoor leerlingen de fout in gingen bij bepaalde opdrachten ook veel beter te doen, waardoor de docent meer inzicht had (achteraf) in de valkuilen van de leerlingen. Dit bleek uit het inzien van de toetsen door de onderzoeker en door gesprekken met de docenten van beide klassen. De toetsen zelf mochten niet in dit onderzoek worden opgenomen.

## 5.2 Antwoorden op de onderzoeksvragen

Hieronder worden de resultaten per onderzoeksvraag besproken en wordt per onderzoeksvraag antwoord gegeven om zo vervolgens in de conclusie een antwoord te kunnen geven op de hoofdvraag van dit onderzoek.

### 5.2.1 In welke mate bevordert Polya's 4 stappen methode kerndoel 19?

Zoals eerder benoemd, kerndoel 19 luidt: *"de leerling leert passende wiskundetaal te gebruiken voor het ordenen van het eigen denken en voor uitleg aan anderen en leert de wiskundetaal van anderen te begrijpen"*.
Tijdens dit onderzoek hebben de leerlingen uit de onderzoeksgroep het gebruik van correcte wiskundetaal kunnen beoefenen zowel door middel van de uitleg stap uit de methode als door de groepsdiscussies gehouden tijdens de reflectiesessies. Vooral in de loop van deze reflectiesessies kwam de voortgang en ontwikkeling van de leerlingen duidelijk naar voren: terwijl tijdens de eerste sessie leerlingen met moeilijkheid hun

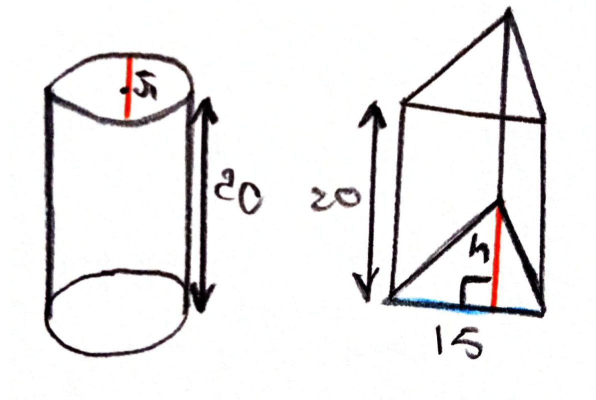
oplossingen konden uitleggen aan hun groepje, tegen de derde sessie konden leerlingen met gemak uitleggen welke stappen zij genomen hadden om tot de oplossing te komen en konden zij de oplossingen lezen en bespreken van medeleerlingen. De aangepaste methode van Polya heeft dus positief invloed op de wiskundige woordenschat van leerlingen en op het zelfvertrouwen waarmee zij eigen antwoorden voorleggen en antwoorden van anderen analyseren. Polya's methode bevordert dus kerdoel 19 in de mate dat leerlingen correcte wiskundetaal in staat zijn te gebruiken om eigen ideeën en oplossingen te delen en bespreken met medeleerlingen en hun docent. Bovendien heeft deze methode als resultaat gehad dat leerlingen meer onderling tijdens gewonen lessen gingen overleggen: het idee dat medeleerlingen ook uitleg konden geven heeft zich tijdens het onderzoek verspreid, met een daling in de drukte van de docent tijdens de les.

### 5.2.2 In welke mate bevordert Polya's 4 stappen methode kerndoel 23?

Zoals eerder benoemd, kerndoel 23 luidt: *"de leerling leert exact en schattend rekenen en redeneren op basis van inzicht in nauwkeurigheid, orde van grootte, en marges die in een gegeven situatie passend zijn"*.
De mate waarin leerlingen gevorderd zijn in het behalen van kerndoel 23 komt vooral uit de uitkomsten van opdrachten 2 en 3. Hierin konden leerlingen namelijk makkelijk de fout ingaan en tot een antwoord komen dat duidelijk buiten verwachting viel voor de opdracht. Een aantal leerlingen merkten dit op en gaven dat ook schriftelijk en mondeling aan bij het inleveren. Een leerling kwam bijvoorbeeld bij opdracht 2 op een te groot antwoord en werkte de vraag opnieuw uit op een tweede blaadje na te hebben aangegeven dat de goede oplossing op de opdracht op het andere blaadje zou komen te staan. Wat niet duidelijk behaald is rond kerndoel 23, is het 'schattend rekenen'. Leerlingen konden achteraf beredeneren dat hun antwoord fout was aan de hand van de gegevens van het probleem en door hun antwoord te controleren, maar konden dat niet al bepalen tijdens de berekeningen of vooraf. Het vooraf bedenken van een orde van grootte voor een antwoord werd niet zichtbaar in het proces van de leerlingen en, terwijl hun kritisch kijken naar hun antwoorden zeker verbeterd is, het inschatten en opstellen van verwachtingen van een antwoord blijft moeilijk.

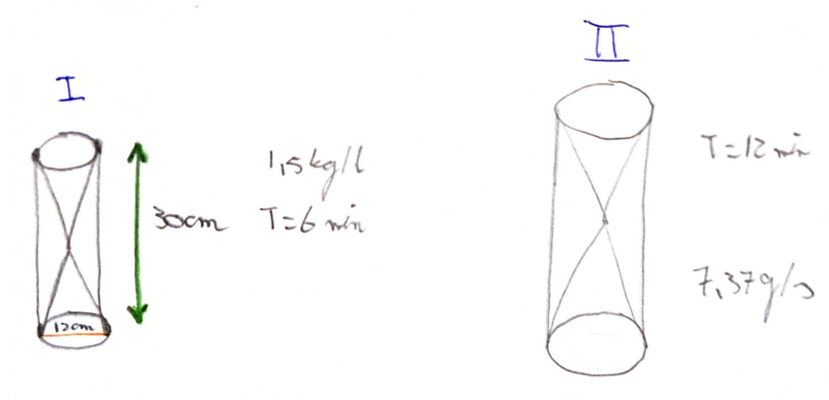
### 5.2.3 In welke mate bevordert Polya's 4 stappen methode kerndoel 27?

Zoals eerder benoemd, kerndoel 27 luidt: *"de leerling leert gegevens systematisch te beschrijven, ordenen en visualiseren en leert gegevens, representaties en conclusies kritisch te beoordelen"*.
Stappen 1 en de reflectiesessies speelden een grote rol bij het behalen van dit kerndoel. Vooral door middel van stap 1 lieten leerlingen duidelijk een verbetering zien in hoe zij gegevens ordenden en weergaven.




**Figuur 6:** Schets en visualisatie van de situatie en gegevens van opdracht 2

In de figuur hierboven is te zien hoe slechts de gegevens van lengtes worden weergegeven in de figuur, terwijl in de figuur hieronder ook gegevens omtrent tijd, dichtheid en snelheid worden verwerkt om een duidelijker overzicht te creëren van wat bekend is uit de opdracht.

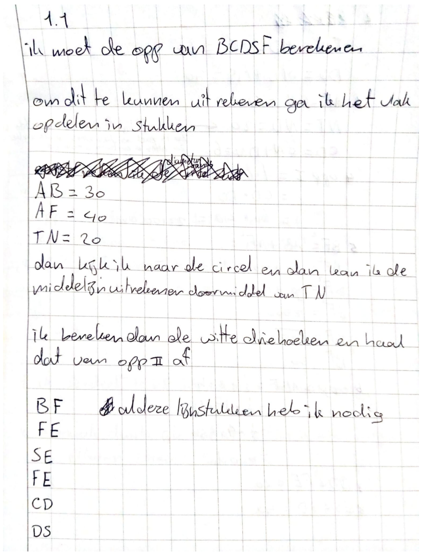



**Figuur 7:** Schets en visualisatie van de situatie en gegevens van opdracht 3

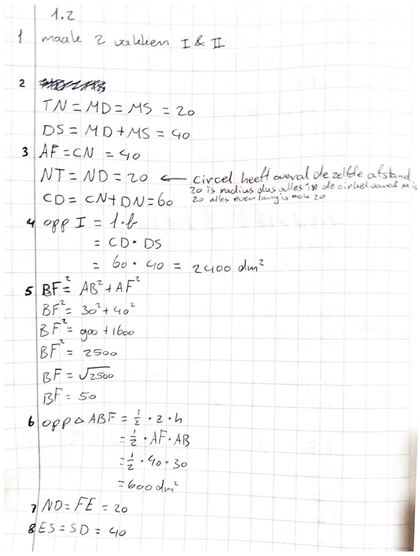
Polya's methode bevordert dus kerndoel 19 in de mate waarin leerlingen in staat zijn gegevens te ordenen en te verwerken in schetsen. Het kritisch beoordelen van gegevens, representaties en conclusies komt echter veel minder duidelijk naar voren. Slechts tijdens de reflectiesessies lieten leerlingen erg duidelijk zien dat zij antwoorden kritisch kunnen bekijken op het moment dat zij antwoorden gingen vergelijken en bespreken. Echter lieten een aantal leerlingen ook zien dat zij hun eigen foute antwoorden konden herkennen, maar dat bleef vrij beperkt.

### 5.2.4 Welke groep leerlingen (zwak, gemiddeld, sterk of gedreven) doen het beste mee bij het inzetten van Polya's 4 stappen methode?

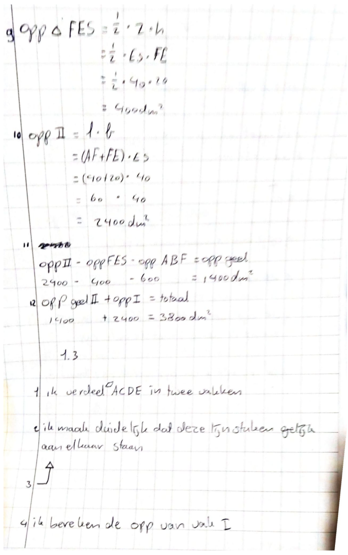
Uit de ingeleverde opdrachten en uit de interviews kwam duidelijk naar voren dat wat zwakkere en onzekere leerlingen het beste meededen met de methode: zij vonden in de methode een houvast om mee te kunnen werken door moeilijkere opdrachten, ook betekende dat niet per se dat zij vervolgens wel gegarandeerd uit de opdracht zouden komen. Gedreven leerlingen deden ook goed mee, maar sterke en zelfverzekerde leerlingen deden het minst van alle leerlingen: het vertrouwen in hun kunnen gaf hen het idee dat de methode overbodig was, even als een aantal gewone opdrachten uit het boek. De hoeveelheid werk sprak deze leerlingen, die met weinig werk normaal gesproken redelijke cijfers kunnen krijgen, weinig aan en, terwijl zij wel meededen, de mate waarin zij dat deden was veel beperkter dan bij andere leerlingen: hun uitleg was kort door de bocht of ontbrak.



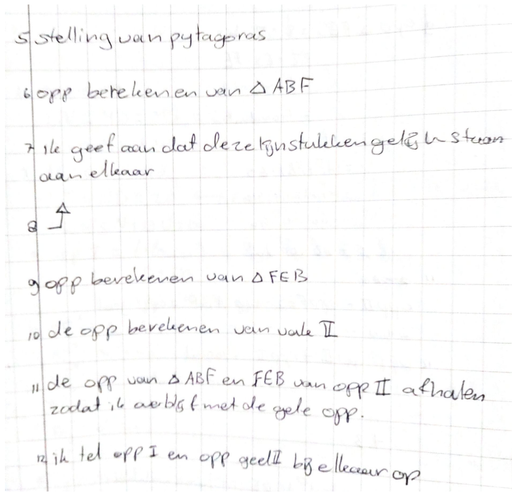

(a) Stap 1




(b) Stap 2 deel 1

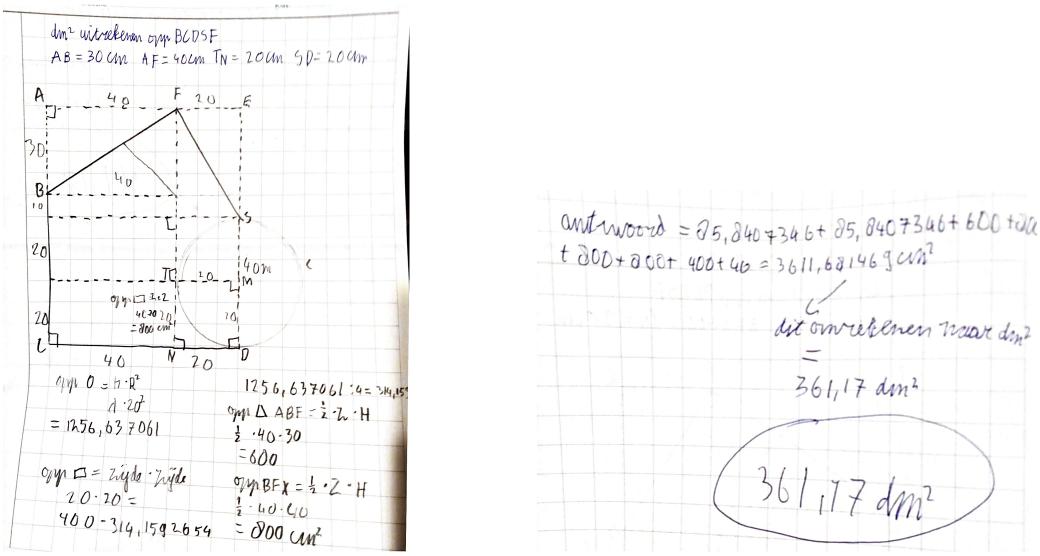



(c) Stap 2 deel 2 en stap 3 deel 1



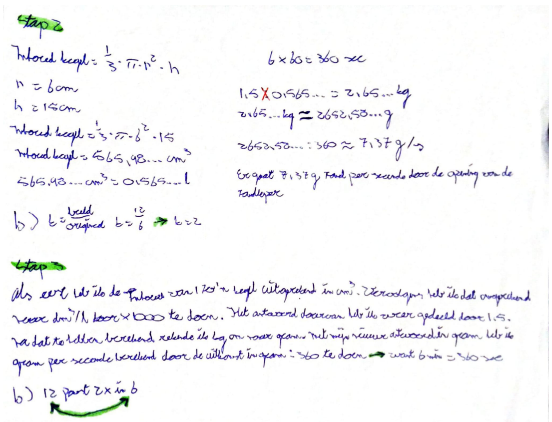

(d) Stap 3 deel 2

**Figuur 8:** Uitwerking van opdracht 1 door een onzekere leerling

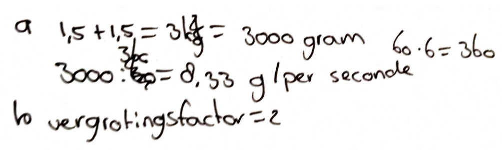



**Figuur 9:** Uitwerking van opdracht 1 door een zelfverzekerde leerling

Zoals te zien is in figuren 8 en 9, het verschil tussen onzekere en zelfverzekerde leerlingen kwam tijdens het onderzoek vrij duidelijk naar voren al sinds opdracht 1. Bij opdracht 3 bleef het verschil en de kwaliteit van de tekst in de uitwerking ook duidelijk naar voren komen, zelfs bij gevallen waarin de onzekere leerling tijdig aangaf weinig tijd te hebben om alles even netjes uit te werken.



**(a)** Uitwerking van opdracht 3 door een onzekere leerling




**(b)** Uitwerking van opdracht 3 door een zelfverzekerde leerling

**Figuur 10:** Uitwerking van opdracht 3 door twee verschillende leerlingen

### 5.2.5 Bevordert Polya's 4 stappen methode het analytisch vermogen van zwakke leerlingen significant meer dan het analytisch vermogen van sterke leerlingen?

Het antwoord op deze vraag is nauw verbonden met het antwoord op de vorige onderzoeksvraag. Daaruit is namelijk gebleken dat sterkere leerlingen minder goed meededen met de methode dan zwakkere leerlingen. In het bijzonder oefenden sterke leerlingen significant minder doordat zij zekerder waren over hun kunnen dan zwakkere leerlingen. Hierdoor en door het minder goed meedoen aan de methode had Polya's methode en veel minder zichtbaar effect op sterke leerlingen, terwijl het zichtbaarder voordelen bracht aan zwakke leerlingen.

# 6 Discussie

Hoewel dit onderzoek goede resultaten heeft opgeleverd die invloed zouden kunnen hebben op de manier waarop docenten probleemoplossen binnen het klaslokaal aanpakken samen met leerlingen en waarop Nederland en scholen het vak wiskunde inrichten, had dit onderzoek ook vele beperkingen in de vorm van tijd en keuze van de respondenten.
Zoals eerder genoemd, een voordeel van het inrichten van een dergelijk onderzoek in de onderbouw van een middelbare school in Nederland is dat er meer uren wiskunde per week gegeven worden en dus uren beschikbaar zijn die voor de methode gebruikt kunnen worden. Echter neemt de methode alsnog te veel tijd in beslag: vooral de reflectiesessies vragen tijd en zorg die niet altijd gegeven hieraan besteed kunnen worden. In aanloop van dit onderzoek werd namelijk ervoor gezorgd dat het voorgaand hoofdstuk eerder afgesloten zou worden dan oorspronkelijk gepland om ervan zeker te mogen zijn dat er genoeg tijd zou zijn voor leerlingen om goed mee te doen aan het onderzoek en om toch nog fatsoenlijk door hoofdstuk 8 zoals gewoonlijk te kunnen werken. Dit zou echter niet kunnen gebeuren als Polya's methode standaard ingevoerd moet worden in het curriculum rekenen-wiskunde en zou nog problematischer worden voor de standaard invoering van de methode in het curriculum wiskunde voor de bovenbouw, dat slechts drie uur wiskunde per week kent en die al druk genoeg is als het gaat om inhoudelijke vlak en materiaal (hoewel het wegnemen van de nu telkens nodige herhaling hieraan zeker zou helpen). Dit lijkt de invoering van Polya's methode te moeten beperken bij een aantal hoofdstukken, terwijl de methode het best werkt over lange periodes en als deze consistent en consequent gebruikt wordt naast genoeg oefening (Yuan, 2013). Het eenmalig gebruik van Polya's methode is dus niet genoeg om leerlingen de vaardigheden te laten ontwikkelen die nodig zijn om het nodige niveau basisvaardigheden te behalen. Het toepassen van de methode voor slechts bepaalde hoofdstukken zou ook leerlingen het idee kunnen geven dat er soort wiskunde bestaat waarbij de methode niet toegepast kan worden, terwijl dit niet waar is. Afhankelijk van de keuze voor de hoofdstukken zou zelfs de polarisatie tussen wiskunde A en wiskunde B vergroot kunnen worden door een beeld te wekken bij leerlingen dat de methode wel bij de ene soort wiskunde hoort en niet de andere. Om hier tegenin te gaan zou eigenlijk nodig zijn om de methode toe te passen op veel groter schaal over een heel jaar. Per hoofdstuk zou de methode dan in eerste instantie in de eerste klas vaker per hoofdstuk toegepast kunnen worden om leerlingen de methode aan te leren en om er een vast onderdeel van te maken waarin opdrachten ook naar voren komen waarin basisvaardigheden beoefend en vastgesteld worden. In latere jaren zou de methode dan 1 à 2 keer toegepast kunnen worden per hoofdstuk met een daling tot 1 keer per hoofdstuk in de bovenbouw. Toekomstige onderzoek zou op veel grotere schaal ingericht kunnen worden om te onderzoeken hoe de methode het niveau basisvaardigheden van leerlingen beïnvloedt als die consequent gebruikt wordt vanaf het begin van hun schoolcarrière. De vorm waarin de methode hiervoor gebruikt wordt, zou misschien wel moeten verschillen van de variant besproken in dit onderzoek aangezien niet alle hoofdstuk zich lenen tot schriftelijke uitleg vanuit de leerlingen.
Een verdere beperking van dit onderzoek waren de gekozen respondenten. Hoewel

deze uiteindelijk redelijk goed meewerkten, was het in eerste instantie moeilijk om hen te overtuigen van het nut van de methode, die met vrij veel tegenwerking werd ontvangen door de hoeveelheid schrijfwerk dat het vraagt. De methode werd ingevoerd tijdens het bespreken van het laatste hoofdstuk van een tweede klas, met als gevolg dat deze leerlingen twee jaar de tijd hadden gehad om te wennen aan een zekere manier van werken met hun docent en dus al een beeld hadden van wiskunde als vak waarbij veel schrijven niet nodig is en zelfs misschien niet gedaan zou moeten worden. Bij de uitleg van de methode keken leerlingen verbaasd en ontevreden over het idee dat uitleg in volledige zinnen nodig zou zijn bij een vak dat voor hun alleen bestond uit berekeningen. Een nog jongere klas had het voordeel gehad dat het beeld over het vak wiskunde nog vrij beperkt is, waardoor de leerlingen overtuigen van het nut van de methode iets simpeler had kunnen zijn. De tegenwerking van een aantal respondenten zorgde namelijk voor af en toe niet complete data te verzamelen en voor een beperkt beeld van de voordelen van de methode over de volledige klas: het zou namelijk nog wel kunnen zijn dat de methode zeer nuttig is ook voor sterke leerlingen, maar het weinig oefenen met gewone opdrachten en de minimale hoeveelheid inspanning met en voor de methode zorgden voor geen zichtbaar voordelen en ontwikkelingen bij deze groep respondenten, in lijn met de resultaten uit het onderzoek van Yuan (2013). De intrinsieke motivatie van deze leerlingen richting de methode ontbrak bovendien en de extrinsieke motivatie was ook niet aanwezig door het feit dat geen cijfer verbonden was aan de opdrachten, die dus als extra werk zonder beloning werden gezien door een paar leerlingen. Dit is natuurlijk jammer omdat het nut van de methode zou los moeten staan van gelijk zichtbare numerieke voordelen voor de leerlingen. Helaas is het vrij gewoon geworden voor leerlingen om voor cijfers te leren en toekomstig onderzoek zou kunnen bestuderen of het verbinden van een cijfer aan de methode positieve of juist negatieve effecten heeft op de voordelen die Polya's vier stappen methode met zich meebrengt, hoewel het zeer waarschijnlijk is dat het meenemen van cijfers in dit proces vooral negatief invloed zal hebben op de effectiviteit van de methode.
Het toepassen van de methode op hoofdstuk 8 beperkte ook op enige manier de mogelijkheid om antwoord te geven op alle onderzoeksvragen: het schattend rekenen kwam namelijk weinig naar voren bij de opdrachten van dit hoofdstuk, waardoor deze zich dus niet bepaald kunnen ontwikkelen door de methode specifiek. Bovendien is er ook weinig aan de hand van de methode getest of het schattend rekenen hierdoor bevordert werd, De enige indicatie hiervan komt uit de discussie in groepjes over opdracht 1: een leerling aangaf bij een andere leerling dat zijn antwoord fout moest zijn doordat het antwoord groter was dan de oppervlakte van rechthoek $ABDE$. Terwijl deze opmerking zeker te maken heeft met een mate van inschatting, het zou ook kunnen duiden op het vermogen om kritisch naar het werk van anderen te kijken en geeft dus geen definitief antwoord deze onderzoeksvraag.
Beperkend was ook de moeilijkheid dat leerlingen in eerste instantie ervoeren bij het werken met een methode dat hen tot een 'productive struggle' probeert te brengen en dat relationeel begrip laat ontwikkelen. Deze klas kreeg namelijk van de docent wiskunde erg instrumentele uitleg over de stof en werd door de docent ook bijna gelijk antwoord gegeven op opdrachten die de leerlingen moeilijk vonden. Opdracht 1, waarbij de leerlingen dus ineens moesten nadenken over hun doen en die vrij veel

tussenstappen vraagt en die niet weggegeven werden door de docent en de onderzoeker werd als te moeilijk ervaren. Hierin speelde de tijdsbeperking ook een rol. Het reflecteren over eigen doen, bijvoorbeeld, is namelijk aan zich een vaardigheid die aangeleerd moet worden en waaraan tijd besteed moet worden. Dit was helaas niet mogelijk tijdens dit onderzoek, waardoor stap 3 beperkter ontwikkeld bleef ten opzichte van de andere stappen binnen de methode (Marzano en Miedema, 2018). In vervolg onderzoek zou dus de methode pas toegepast moeten worden nadat reflectievaardigheden (waarin valt ook het positieve kunnen opmerken van het eigen werk) aangeleerd en beoefend zijn.
Verder moet benoemd worden dat het aantal interviews met de onderzoeksgroep klein is om representatief te kunnen zijn voor de volledige klas. Hierdoor mogen twijfels ontstaan over hoe effectief de methode daadwerkelijk is. De geboekte vooruitgang van leerlingen zou namelijk ook een effect kunnen zijn van de aanwezigheid van de onderzoeker in de klas, die tijdens gewone lessen wel geholpen heeft met het beantwoorden van vragen over het huiswerk. Echter heeft de onderzoeker lang niet uitvoerig contact gehad met de volledige klas, waardoor het effect van diens aanwezigheid beperkt zou moeten zijn gebleven.

Verrassend uit dit onderzoek kwam wel dat de methode vooral gewaardeerd werd door leerlingen die onzeker zijn over hun kennen en kunnen binnen het vak wiskunde. Deze leerlingen, zoals eerder besproken, vonden in Polya's methode een stappenplan dat toegepast kon worden en waarop zij terug op konden vallen bij het aanpakken van moeilijkere opdrachten, met als gevolg dat deze leerlingen een positievere houding richting de stof hadden binnen het klaslokaal, in lijn met de resultaten uit Yapatang en Polyiem (2022). Deze leerlingen konden gerichtere vragen stellen bij het vastlopen omdat zij konden bepalen waardoor zij vastliepen en gaven minder snel op. Toekomstigere onderzoek zou dan ook kunnen kijken of Polya's methode specifiek een positieve invloed heeft op leerlingen die wiskundeangst ervaren en die dus misschien door deze methode een verminderd niveau angst zouden kunnen gaan ervaren en misschien zelfs over hun angst heen zou kunnen komen. Dit zou namelijk implicaties van extreem belang kunnen hebben in het voor leerlingen plezierig maken van een vak dat als moeilijk, alleen voor hele slimme mensen en stoffig ervaren en gezien wordt. Bovendien zou toekomstige onderzoek ook de methode op verschillende manier kunnen implementeren voor sterke en zwakke/onzekere leerlingen. Dit onderzoek zou naast de methode ook nog differentiatie binnen het klaslokaal moeten implementeren en inzetten om zowel zwakke/onzekere leerlingen als sterke leerlingen mee te nemen. Vooral sterke leerlingen hebben tijdens dit onderzoek de methode vaak als overbodig ervaren, waardoor een extensie specifiek voor hun nodig zou zijn. Een oplossing hiervoor zou het ontwikkelen van 'low floor, high ceiling' opdrachten waarbij het startpunt dus toepasselijk is voor iedere leerling, terwijl het eindpunt ruimte laat om de nieuwsgierigheid van alle leerlingen te ondersteunen (Maiorana, 2019). Op deze manier zouden alle leerlingen uitdagingen en dus een 'productive struggle' kunnen ervaren dat het inzetten van de methode motiveert.

# 7 Conclusie

Tijdens dit onderzoek gaven de opgebouwde portfolio's van de leerlingen uit de onderzoeksgroep duidelijk zicht op hun ontwikkeling binnen het vak wiskunde en binnen hoofdstuk 8 dankzij de methode. Leerlingen uit deze groep werden namelijk beter in het omschrijven van eigen gedachten en logica en waren in staat aspecten van de methode in te zetten voor het maken van het gewone huiswerk: zo hadden zwakke en angstige leerlingen een vast stappenplan om te gebruiken om moeilijke opdrachten te bekijken, te bestuderen en aan te pakken en konden leerlingen gemakkelijker over wiskunde praten en discussiëren onderling met als resultaat een prettiger sfeer binnen de klas dankzij een positievere houding richting de stof. De docent is tijdens dit onderzoek iets minder essentieel geworden voor het leerproces van leerlingen, die nu op elkaar konden rekenen en samen gingen overleggen en werken voordat zij vragen gingen stellen. Hierdoor had de docent meer tijd om accenten te kunnen leggen op bepaalde stukken stof en om aandacht te kunnen besteden aan leerlingen die grote moeilijkheden ervoeren.

Uit de resultaten kan gehaald worden dat Polya's methode zeker positieve effecten heeft voor de wiskundige en kritische ontwikkeling van leerlingen: zo verbeterden significant het begrip en de toetsresultaten van zwakkere leerlingen, die als tussen de beste meededen met de methode en er nuttige acties uithaalden voor het eigen doen binnen het vak. Ook kerndoelen 19, 23 en 27 werden duidelijk bevorderd, met een verbetering in de groepswerking en communicatie binnen de klas en een beter beheersing van wiskundetaal om eigen ideeën en logica te communiceren met zowel medeleerlingen als de docent. Het reflectievermogen en het kritisch zijn op eigen antwoorden en werk kwamen in zicht in de vorm van bewustheid over eigen kennis, waardoor een aantal leerlingen in staat waren om achteraf te bepalen de correctheid van het eigen antwoord. Bovendien kwam het visualiseren van gegevens en het schetsen van de situatie steeds natuurlijker naar voren voor leerlingen.

Polya's methode bevordert dus het analytisch denkvermogen van leerlingen in de mate dat leerlingen ontbrekende vaardigheden ontwikkelen en die weten afzonderlijk in te zetten buiten de methode. Aan de hand van de methode lazen leerlingen opdrachten uit hun huiswerk veel aandachtiger en checkten zij telkens goed de vraag te hebben begrepen voordat zij begonnen met oplossen: een bevordering dus van het kritisch lezen. Op vergelijkbare manier zijn de leerlingen beter geworden in het oplossen van problemen door een ontwikkelde diepgaandere begrip van de stof waardoor zij in latere opdrachten binnen de methode met gemak verbanden konden leggen tussen onderdelen van het hoofdstuk om onderdelen van het probleem samen te brengen en op te lossen. Dus, terwijl het bestudeerde effect beperkt blijft door de restricties in tijd en initiële tegenwerking van de leerlingen, zichtbare verschillen kwamen naar voren tussen de onderzoeks- en controlegroep en zelfs een zichtbare ontwikkeling kwam naar voren bij de leerlingen uit de onderzoeksgroep dankzij hun portfolio's, die een groei lieten zien in geproduceerde uitleg in wiskundetaal, begrip en aanpak van de vraag en visualisatie van gegevens, allemaal analytische denkvaardigheden (Amer, 2005). Slechts het schattend rekenen blijft onduidelijk ontwikkeld en zou om verder onderzoek vragen waarbij hoofdstukken en stof beter hiervoor bestemd gekozen worden.

# Referenties


Amer, A. (2005). *Analytical thinking*. Pathways to Higher Education.

Bales, E. (1996). Corporate Universities versus traditional Universities. Keynote at the Conference on innovative practices in business education.

Berk, L. E. (1994). Why children talk to themselves. Scientific American. *Scientific American*, *271*(5), 78–83. https://doi.org/https://doi.org/10.1038/scientificamerican1194-78

Bilgin, I. (2006). The Effects of Pair Problem Solving Technique Incorporating Polya's Problem Solving Strategy on Undergraduate Students' Performance in Chemistry. *Online Submission*, *7*(2), 101–106.

Bjork, E. L., Bjork, R. A., e.a. (2011). Making things hard on yourself, but in a good way: Creating desirable difficulties to enhance learning. *Psychology and the real world: Essays illustrating fundamental contributions to society*, *2*(59-68).

Drijvers, P. H. M., Streun, A., & Zwaneveld, G. (2012). *Handboek wiskundedidactiek*. Epsilon Uitgaven.

Granberg, C. (2016). Discovering and addressing errors during mathematics problem-solving—A productive struggle? *The Journal of Mathematical Behavior*, *42*, 33–48.

Heutinck, M. (2022). *Een onderzoek naar de verbetering van het wiskundig begrip bij middelbare scholieren door middel van aangepaste toetsing* (masterscriptie). University of Twente.

Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *1*(1), 371–404.

Karenina, A., Widoretno, S., & Prayitno, B. A. (2020). Effectiveness of problem solving-based module to improve analytical thinking. *Journal of Physics: Conference Series*, *1511*(1), 012093.

Litvak, N., & Weedage, L. (2023). Do we teach what we preach?

Maiorana, F. (2019). Interdisciplinary Computing for STE(A)M: a low floor high ceiling curriculum. *Innovations, Technologies and Research in Education*, *37*.

Marzano, R. J., & Miedema, W. (2018). *Leren in vijf dimensies: moderne didactiek voor het voortgezet onderwijs*. Koninklijke Van Gorcum.

Mazur, E. (2016). Private communication with prof.dr. N.V. Litvak (Nelly).

McClelland, M. M., Acock, A. C., & Morrison, F. J. (2006). The impact of kindergarten learning-related skills on academic trajectories at the end of elementary school. *Early childhood research quarterly*, *21*(4), 471–490.

Muniri, M., & Choirudin, C. (2022). The Flow of Analytical Thinking High Cognitive Level Students In Mathematics Problem Solving. *AL-ISHLAH: Jurnal Pendidikan*, *14*(4), 6147–6158.

Murphy, P. K., Rowe, M. L., Ramani, G., & Silverman, R. (2014). Promoting critical-analytic thinking in children and adolescents at home and in school. *Educational Psychology Review*, *26*, 561–578.

Myers, C., & Conner, M. (1992). Age differences in skill acquisition and transfer in an implicit learning paradigm. *Applied Cognitive Psychology*, *6*(5), 429–442.

Polya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton university press.

Prenger, J. (2005). Taal telt. *Een onderzoek naar de rol van taalvaardigheid en tekstbegrip in het realistisch wiskundeonderwijs*.

Pugalee, D. K. (2001). Writing, mathematics, and metacognition: Looking for connections through students' work in mathematical problem solving. *School science and mathematics*, *101*(5), 236–245.

Qolfathiriyus, A., Sujadi, I., & Indriati, D. (2019). Characteristic profile of analytical thinking in mathematics problem solving. *Journal of Physics: Conference Series*, *1157*(3), 032123.

Robbins, J. K. (2011). Problem solving, reasoning, and analytical thinking in a classroom environment. *The Behavior Analyst Today*, *12*(1), 41.

Skemp, R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *12*(2), 88–95. https://doi.org/https://www.jstor.org/stable/41182357

SLO. (2022). *Rekenen-wiskunde: doelen*. https://www.slo.nl/thema/meer/basisvaardigheden/rekenen-wiskunde/doelen/ (accessed: 15.02.2023)

Stice, J. E. (2007). Teaching problem solving. *Teachers and Students Sourcebook: Alternative Teaching Methods*.

Urquhart, V. (2009). Using Writing in Mathematics to Deepen Student Learning. *Mid-Continent Research for Education and Learning (McREL)*.

van het Onderwijs, I. (2022). Rapport De Staat van het Onderwijs 2022. https://www.onderwijsinspectie.nl/documenten/rapporten/2022/04/13/de-staat-van-het-onderwijs-2022

van het Onderwijs, I. (2023). Rapport De Staat van het Onderwijs 2023. https://www.onderwijsinspectie.nl/documenten/rapporten/2023/05/10/rapport-de-staat-van-het-onderwijs-2023

Yapatang, L., & Polyiem, T. (2022). Development of the Mathematical Problem-Solving Ability Using Applied Cooperative Learning and Polya's Problem-Solving Process for Grade 9 Students. *Journal of Education and Learning*, *11*(3), 40–46.

Yuan, S. (2013). Incorporating Polya's problem solving method in remedial math. *Journal of Humanistic Mathematics*, *3*(1), 96–107.

Yustiana, Y., Kusmayadi, T., & Fitriana, L. (2021). The Effect Mathematics Disposition of Vocational High School Students on Mathematical Problem-Solving Ability. *Journal of Physics: Conference Series*, *1808*(1), 012049.

# A Uitwerkingen

## A.1 Uitwerking opdracht 1

### A.1.1 Stap 1

Gegeven is de figuur $BCDSF$ in het geel, die onderdeel is van rechthoek $ACDE$. Dat $ACDE$ een rechthoek is, valt te zien aan het feit dat $\angle A$, $\angle C$, $\angle D$ en $\angle E$ allemaal recht zijn. Gegeven is verder dat $AF = 40$ $cm$, $AB = 30$ $cm$ en $TN = 20$ $cm$. Bovendien wordt aangegeven dat $S$ het midden is van lijnstuk $ED$, zodat $ES = SD$, en dat $M$ het midden is van lijnstuk $SD$, zodat $SM = MD$, en dat $M$ ook het middelpunt is van cirkel $c$, zodat $SM$, $MD$ en $TM$ stralen zijn van cirkel $c$ (dus $SM = MD = TM$) en zodat $SD$ de diameter is van cirkel $c$. Aan de figuur kunnen we ook zien dat vierhoek $TNDM$ een rechthoek is, zodat zijden $TN$ en $MD$ evenwijdig en van gelijke lengte zijn, dus $MD = 20$ $cm$.

De opdracht vraagt om de oppervlakte van figuur $BCDSF$ te berekenen in $dm^2$. Om dit te kunnen doen, aangezien figuur $BCDSF$ onderdeel is van rechthoek $ACDE$, kan eerst de oppervlakte van rechthoek $ACDE$ berekend worden en dan kunnen de oppervlaktes van driehoek $ABF$, driehoek $FSE$ en de helft van de oppervlakte van cirkel $c$ daarvan afgehaald worden. Dit zal het eindantwoord geven in $cm^2$. Dan kan de eenheid veranderd worden naar $dm^2$.
Om de oppervlakte van rechthoek $ACDE$ te bepalen kan gebruik worden gemaakt van de formule $opp.ACDE = basis \times hoogte$. Hiervoor is het nodig om de lengte van zijde $AE$ of $CD$ en de lengte van zijde $AC$ of $ED$ te bepalen. Hiervoor kan de kennis gebruikt worden dat $TNDM$ een rechthoek is. Als de lengte van deze zijden bepaald is, is het nodig om de lengtes van lijnstukken $FE$, $ES$ en $SD$ te bepalen zodat de oppervlaktes van driehoek $ABF$, driehoek $FSE$ en cirkel $c$ bepaald kunnen worden. De oppervlaktes van de twee driehoek kunnen berekend worden als volgt: $opp.\triangle = \frac{1}{2} zijde \times bijbehorende\ hoogte$. De oppervlakte van cirkel $c$ kan berekend worden als volgt: $opp.\odot = \pi r^2$. Als deze bepaald zijn, kan de oppervlakte van figuur $BCDSF$ bepaald worden als volgt:
$opp.BCDSF = opp.ACDE - opp.\triangle ABF - opp.\triangle FSE - \frac{1}{2} opp.\odot$.

### A.1.2 Stap 2

We beginnen door de lengte van zijde $ED$ te bepalen. Uit het feit dat $TNDM$ een rechthoek is, volgt dat

$$TN = MD = 20\ cm. \tag{16}$$

Aangezien $M$ het midden is van lijnstuk $SD$, volgt dat

$$SD = 2MD = 2 \cdot 20 = 40\ cm. \tag{17}$$

Aangezien $S$ het midden is van lijnstuk $ED$, volgt dat

$$ED = 2SD = 2 \cdot 40 = 80\ cm. \tag{18}$$

Aangezien $M$ het middelpunt is van cirkel $c$, zowel $MD$ als $MT$ zijn stralen van cirkel $c$, dus

$$MT = MD = 20\ cm. \tag{19}$$

Aangezien $TNDM$ een rechthoek is, volgt hieruit dat

$$ND = MT = 20\ cm. \tag{20}$$

We merken op dat $ACNF$ ook een rechthoek is, zodat

$$CN = AF = 40\ cm. \tag{21}$$

Hieruit volgt dat

$$CD = CN + ND = 40 + 20 = 60\ cm. \tag{22}$$

We kunnen de oppervlakte van $ACDE$ nu berekenen als volgt:

$$opp.ACDE = basis \times hoogte \tag{23}$$
$$opp.ACDE = CD \times ED \tag{24}$$
$$opp.ACDE = 60 \cdot 80 = 4800\ cm^2. \tag{25}$$

We gaan nu de oppervlaktes van driehoeken $ABD$ en $FSE$. We beginnen met de oppervlakte van driehoek $ABF$. Deze kunnen we berekenen als volgt:

$$opp.\triangle ABD = \frac{1}{2} zijde \times bijbehorende\ hoogte \tag{26}$$
$$opp.\triangle ABD = \frac{1}{2} AF \times AB \tag{27}$$
$$opp.\triangle ABD = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 30 = 600\ cm^2. \tag{28}$$

Doordat $FNDE$ een rechthoek is, volgt er dat

$$FE = ND = MT = 20\ cm \tag{29}$$

en doordat $S$ het midden is van lijnstuk $ED$, volgt er dat

$$ES = SD = 40\ cm \tag{30}$$

zodat we de oppervlakte van driehoek $FSE$ kunnen berekenen als volgt:

$$opp.\triangle FSE = \frac{1}{2} zijde \times bijbehorende\ hoogte \tag{31}$$
$$opp.\triangle FSE = \frac{1}{2} FE \times ES \tag{32}$$
$$opp.\triangle FSE = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 40 = 400\ cm^2. \tag{33}$$

De straal van cirkel is $MT = 20\ cm$ zodat de oppervlakte van cirkel $c$ berekend kan worden als volgt:

$$opp.\odot = \pi r^2 \tag{34}$$
$$opp.\odot = \pi 20^2 \tag{35}$$
$$opp.\odot = \pi 400 = 1256,637...\ cm^2. \tag{36}$$

De figuur $BCDSF$ is onderdeel van rechthoek $ACDE$ zodanig dat we de oppervlakte ervan als volgt kunnen berekenen:

$$opp.BCDSF = opp.ACDE - opp.\triangle ABF - opp.\triangle FSE - \frac{1}{2}opp.\odot \tag{37}$$

$$opp.BCDSF = 4800 - 600 - 400 - \frac{1}{2} \cdot 1256,637... \tag{38}$$

$$opp.BCDSF = 3800 - 628,318... = 3171,681...\ cm^2. \tag{39}$$

Aangezien 1 $dm^2 = 100\ cm^2$, volgt er dat

$$opp.BCDSF = 31,71681...\ dm^2 \approx 31,72.\ dm^2. \tag{40}$$

### A.1.3 Stap 3

Bij de uitleg hieronder correspondeert de nummering met die uit de stappen van de berekening.

16. In vierhoek $TNDM$ zijn alle hoeken recht zodat deze figuur een rechthoek is. Binnen een rechthoek zijn overstaande zijden evenwijdig en van gelijke lengte zodat $TN = MD$.

17. Het punt $M$ verdeeld lijnstuk $SD$ in twee gelijke stukken zodat $SM = MD$ en zodat $SD = 2MD$.

18. Het punt $S$ verdeeld lijnstuk $ED$ in twee gelijke stukken zodat $ES = SD$ en zodat $ED = 2SD$.

19. Het punt $M$ is het middelpunt van cirkel $c$, zodat ieder lijnstuk dat middelpunt $M$ verbindt aan de omtrek van cirkel $c$ ook gelijk de straal is van cirkel $c$. Hieruit volgt dat zowel $MT$ als $MD$ stralen zijn van cirkel $c$ zodat $MT = MD$.

20. In vierhoek $TNDM$ zijn alle hoeken recht zodat deze figuur een rechthoek is. Binnen een rechthoek zijn overstaande zijden evenwijdig en van gelijke lengte zodat $ND = MT$.

21. In vierhoek $ACNF$ zijn alle hoeken recht zodat deze figuur een rechthoek is. Binnen een rechthoek zijn overstaande zijden evenwijdig en van gelijke lengte zodat $CN = AF$.

22. Zijde $CD$ bestaat uit twee stukken: $CN$ en $ND$. Door de waarden van de lengtes van lijnstukken $CN$ en $ND$ in te vullen en door deze twee bij elkaar op te tellen, kunnen we de lengte van zijde $CD$ berekenen.

23. Deze is de formule voor de oppervlakte van een rechthoek.

24. We vullen in de zijden die de basis en hoogte zijn van rechthoek $ACDE$.

25. We vullen in de lengtes van zijden $CD$ en $ED$ die we berekend hadden en berekenen zo de oppervlakte van vierhoek $ACDE$ in $cm^2$.

26. Deze is de formule voor de oppervlakte van een driehoek.

27. We vullen in de zijde en bijbehorende hoogte die bij driehoek $ABD$ horen.

28. We vullen in de lengtes van zijden $AF$ en $AB$ en berekenen zo de oppervlakte van driehoek $ABD$ in $cm^2$.

29. In vierhoek $FNDE$ zijn alle hoeken recht zodat deze figuur een rechthoek is. Binnen een rechthoek zijn overstaande zijden evenwijdig en van gelijke lengte zodat $FE = ND$. Uit een eerdere berekening wisten we ook dat $ND = MT$ zodat nu $FE = MT$.

30. Het punt $S$ verdeeld lijnstuk $ED$ in twee gelijke stukken zodat $ES = SD$.

31. Deze is de formule voor de oppervlakte van een driehoek.

32. We vullen in de zijde en bijbehorende hoogte die bij driehoek $FSE$ horen.

33. We vullen in de lengtes van zijden $FE$ en $ES$ en berekenen zo de oppervlakte van driehoek $FSE$ in $cm^2$.

34. Deze is de formule voor de oppervlakte van een cirkel.

35. Uit een eerdere berekening en beredenering wisten we dat $MT = 20\ cm$ en dat $MT$ de straal is van cirkel $c$. We vullen dus de lengte van de straal van cirkel $c$ in de formule.

36. Het kwadraat van 20 wordt hier uitgerekend en de oppervlakte van cirkel $c$ wordt berekend in $cm^2$ en NIET afgerond, aangezien dit een tussenstap is.

37. Deze is de formule om de oppervlakte van figuur $BCDSF$ uit te rekenen. De oppervlakte van figuur $BCDSF$ is namelijk een onderdeel van de oppervlakte van rechthoek $ACDE$ zodanig dat het gelijk is aan de oppervlakte van rechthoek $ACDE$ waarvan de oppervlaktes van driehoeken $ABF$ en $FSE$ en de helft van de oppervlakte van cirkel $c$ zijn afgehaald.

38. We vullen de berekende oppervlaktes van driehoeken $ABF$ en $FSE$ en van cirkel $c$.

39. We halen 600 en 400 af van 4800 en delen de ingevulde oppervlakte van cirkel $c$ door 2. We halen dan de helft van de oppervlakte van cirkel $c$ ook nog af en berekenen op deze manier de oppervlakte van figuur $BCDSF$ in $cm^2$. Het antwoord wordt NIET afgerond, aangezien dit een tussenstap is.

40. Aangezien $1\ dm^2 = 100\ cm^2$, bepalen we de oppervlakte van figuur $BCDSF$ in $dm^2$, zoals gevraagd werd. We ronde dan ons antwoord af op 2 decimalen, zoals de vraag wilde. De oppervlakte van figuur $BCDSF$ is dus gelijk aan $31,72\ dm^2$.

## A.2 Uitwerking opdracht 2

### A.2.1 Stap 1

Gegeven zijn twee verschillende soorten vazen: een soort heeft vorm van een cilinder met diameter gelijk aan 15 $cm$ en hoogte gelijk aan 20 $cm$ en de andere soort heeft vorm van een prisma met hoogte ook gelijk aan 20 $cm$ en met als grondvlak een driehoek waarvan een zijde lengte gelijk aan 15 $cm$ heeft.

De opdracht vraagt dat de minimale lengte in gehele van lijnstuk $h$ uit figuur 2 onderzocht wordt zodat de nieuwe vazen (de vazen die vorm hebben van een prisma) een grotere inhoud hebben. Om dit probleem op te lossen, zullen we dus de formule voor de inhoud van een cilinder ($inhoud = \pi r^2 \times hoogte$) en die voor de inhoud van een prisma met als grondvlak een driehoek ($inhoud = zijde \times bijbehorende$ $hoogte \times hoogte$) nodig hebben. Aangezien lijnstuk $h$ de bijbehorende hoogte is van het grondvlak van de vazen die de vorm hebben van een prisma, kunnen we eerst de twee formules gelijk aan elkaar stellen om de lengte van $h$ te bepalen zodat beide soort vazen dezelfde inhoud hebben. Daarna kan de lengte van $h$ omhoog afgerond worden om het antwoord te vinden op de vraag.

### A.2.2 Stap 2

We beginnen door de inhoud te bepalen van de vazen die vorm hebben van een cilinder door de formule

$$inhoud = \pi r^2 \times hoogte \tag{41}$$

te gebruiken. Aangezien deze vazen een diameter hebben gelijk aan 15 $cm$, we berekenen de radius van deze vazen als volgt:

$$r = \frac{diameter}{2} \tag{42}$$

$$r = \frac{15}{2} = 7,5\ cm. \tag{43}$$

Aangezien deze vazen een hoogte hebben gelijk aan 20 $cm$, we berekenen de inhoud als volgt:

$$inhoud = \pi(7,5)^2 \times 20 \tag{44}$$

$$inhoud = \pi 56,25 \times 20 \tag{45}$$

$$inhoud = \pi 1125 = 3534,29...cm^3. \tag{46}$$

We bepalen nu, in hoever mogelijk, de inhoud van de nieuwe vazen die vorm hebben van een prisma als volgt, gegeven dat lijnstuk $h$ de bijbehorende hoogte is van het grondvlak, de zijde van het grondvlak heeft lengte gelijk aan 15 $cm$ en deze vazen hoogte hebben gelijk aan 20 $cm$:

$$inhoud = \frac{1}{2} \times zijde \times bijbehorende\ hoogte \times hoogte \tag{47}$$

$$inhoud = \frac{1}{2} \times 15 \times h \times 20 = 150h\ cm^3. \tag{48}$$

We stellen nu de inhoud van de twee verschillende vazen gelijk aan elkaar om de lengte van $h$ te kunnen bepalen zodat de twee inhouden exact gelijk aan elkaar zijn. Hieruit volgt dat

$$150h = 3534,29... \tag{49}$$

$$h = \frac{3534,29...}{150} = 23,56...\ cm. \tag{50}$$

Dit antwoord ronden we omhoog af op gehele om te voldoen aan de voorwaarden van de vraag. Het antwoord is dus:

$$h = 23,56...\ cm \approx 24\ cm. \tag{51}$$

We kunnen controleren dat deze lengte de minimale lengte in gehele is voor $h$ door de inhoud van de nieuwe vazen voor $h = 23\ cm$ en voor $h = 24\ cm$ te berekenen en door deze resultaten te vergelijken met de inhoud van de oude vazen.
Voor $h = 23\ cm$ hebben de nieuwe vazen inhoud gelijk aan

$$inhoud = \frac{1}{2} \times zijde \times bijbehorende\ hoogte \times hoogte \tag{52}$$

$$inhoud = \frac{1}{2} \times 15 \times 23 \times 20 = 3450\ cm^3. \tag{53}$$

Voor $h = 24\ cm$ hebben de nieuwe vazen inhoud gelijk aan

$$inhoud = \frac{1}{2} \times zijde \times bijbehorende\ hoogte \times hoogte \tag{54}$$

$$inhoud = \frac{1}{2} \times 15 \times 24 \times 20 = 3600\ cm^3. \tag{55}$$

We zien dus dat

$$3450\ cm^3 < 3534,29...cm^3 < 3600\ cm^3 \tag{56}$$

zodat $h = 24\ cm$ de minimale lengte in gehele is voor $h$ zodat de nieuwe vazen een grotere inhoud hebben dan de oude.

### A.2.3 Stap 3

Bij de uitleg hieronder correspondeert de nummering met die uit de stappen van de berekening.

41. Deze is de formule voor de inhoud van een cilinder.

42. Deze is de formule om de lengte van de radius van een cirkel te berekenen gegeven de lengte van de diameter van de cirkel.

43. We vullen in de lengte van de diameter van de cilinder en berekenen de radius, die gelijk is aan $7,5\ cm$.

44. We vullen de berekende radius en gegeven hoogte van de cilinder in de formule voor de inhoud.

45. We werken het kwadraat van de radius uit.

46. We berekenen de inhoud van de cilinder. Het antwoord wordt NIET afgerond, aangezien dit een tussenstap is.

47. Deze is de formule voor de inhoud van een prisma met een driehoek als grondvlak.

48. We vullen in de gegevens van het probleem, namelijk de lengte 15 $cm$ van een zijde van het grondvlak van het prisma, de lengte 20 $cm$ van de hoogte van het prisma en $h$ om de woorden *bijbehorende hoogte* te vervangen volgens figuur 2. We vereenvoudigen vervolgens het antwoord zo ver mogelijk.

49. We stellen de twee berekende inhouden gelijk aan elkaar.

50. We berekenen de lengte van $h$ zodat de twee inhouden exact gelijk aan elkaar zijn.

51. We ronde $h$ omhoog af zodat het antwoord in gehele is en zodat de inhoud voor deze lengte van $h$ zeker weten groter is dan de inhoud van de oude vazen (de cilinder).

52. Deze is de formule voor de inhoud van een prisma met een driehoek als grondvlak.

53. We vullen in de gegevens van het probleem, namelijk de lengte 15 $cm$ van een zijde van het grondvlak van het prisma, de lengte 20 $cm$ van de hoogte van het prisma en vullen vervolgens $h = 23$ $cm$ en berekenen dus de inhoud van het prisma voor $h = 23$ $cm$.

54. Deze is de formule voor de inhoud van een prisma met een driehoek als grondvlak.

55. We vullen in de gegevens van het probleem, namelijk de lengte 15 $cm$ van een zijde van het grondvlak van het prisma, de lengte 20 $cm$ van de hoogte van het prisma en vullen vervolgens $h = 24$ $cm$ en berekenen dus de inhoud van het prisma voor $h = 24$ $cm$.

56. We vergelijken de inhoud van het prisma voor $h = 23$ $cm$ en voor $h = 24$ $cm$ en de inhoud van de cilinder om te controleren dat $h = 24$ $cm$ inderdaad de minimale lengte voor $h$ is in gehele zodat de inhoud van het prisma (de nieuwe vazen) groter is dan die van de cilinder (de oude vazen).

## A.3 Uitwerking opdracht 3

### A.3.1 Stap 1

Gegeven is een zandloper bestaand uit twee even grote kegels waarbij de diameter van het grondvlak gelijk is aan 12 $cm$ en waarbij de totale hoogte van de zandloper gelijk is aan 30 $cm$. Gegeven is ook dat het zand in de zandloper een hele kegel vult, dat het zand $1,5$ $kg$ per liter weegt en dat het zand er 6 minuten doet over het lopen binnen de andere kegel na het omdraaien van de zandloper.

Voor deel a) vraagt het probleem om de snelheid in gram per seconde waarmee het zand stroomt tussen de twee kegels.
Om antwoord te geven op deze vraag is het nodig om eerst het volume van het zand te bepalen. Dit kan gedaan worden door het volume van een van de kegels te bepalen, aangezien het zand er eentje volledig vult. Als het volume bepaalt is, kan daarmee het totale gewicht berekend worden van het zand in de zandloper en daarmee, wetend dat het zand er 6 minuten doet over het stromen van de ene kegel tot de andere, kan berekend worden hoeveel gram zand er per seconde door de opening van de zandloper stroomt.

Voor deel b) wordt aangegeven dat er een nieuwe zandloper gemaakt moet worden waarbij het zand even snel doorstroomt, maar waarbij het zand er 12 minuten doet over het stromen van de ene kegel tot de andere. Er wordt gevraagd naar de vergrotingsfactor die nodig is om deze zandloper te bouwen.
Om antwoord te geven op deze vraag is het nodig om eerst te bepalen wat de verhouding is tussen het nieuwe volume zand die nodig is en het volume zand dat in de zandloper uit vraag a). Door de snelheid te vermenigvuldigen met 12 minuten kan het totale gewicht van het zand in de zandloper bepaald worden. Het volume kan dan berekend worden door het gewicht te delen door het gewicht per $dm^3$. Als het volume bepaald is, kan deze gedeeld worden door het oude volume om een factor $p$ te berekenen. De vergrotingsfactor is dan gelijk aan $\sqrt[3]{p}$.

### A.3.2 Stap 2

**a)** We beginnen door de inhoud te bepalen van een van de twee kegels van de zandloper, en dus het volume van het zand die deze kegel vult, door de formule

$$inhoud = \frac{1}{3}\pi r^2 \times hoogte \tag{57}$$

te gebruiken. Aangezien de kegel een diameter heeft gelijk aan 12 $cm$, we berekenen de radius van deze vazen als volgt:

$$r = \frac{diameter}{2} \tag{58}$$

$$r = \frac{12}{2} = 6\ cm. \tag{59}$$

Aangezien de zandloper een hoogte heeft gelijk aan 30 $cm$, en aangezien de zandloper bestaat uit twee even grote kegels, de hoogte van de kegel is gelijk aan

$$hoogte = \frac{hoogte\ zandloper}{2} \tag{60}$$
$$hoogte = \frac{30}{2} = 15\ cm. \tag{61}$$

We berekenen nu de inhoud van de kegel als volgt:

$$inhoud = \frac{1}{3}\pi 6^2 \times 15 \tag{62}$$
$$inhoud = \frac{1}{3}\pi 36 \times 15 \tag{63}$$
$$inhoud = \pi 180 = 565,48...\ cm^3. \tag{64}$$

Het gewicht van het zand is $1,5\ kg$ per liter. Aangezien er geldt dat $l = dm^3$, is het nodig om het gevonden antwoord in $dm^3$ uit te drukken en aangezien $1dm^3 = 1000cm^3$ volgt er dat

$$565,48...cm^3 = 0,56548...dm^3 = 0,56548...l. \tag{65}$$

Hieruit volgt dat het totale gewicht van het zand dat in de zandloper zit gelijk is aan

$$gewicht\ zand = 1,5 \times 0,56548... = 0,84823...kg. \tag{66}$$

Het probleem vraagt om de snelheid waarmee het zand stroomt in gram per seconde. Aangezien er geldt dat $1kg = 1000g$, volgt er dat

$$0,84823...kg = 848,23...g. \tag{67}$$

Er wordt aangegeven dat het zand er 6 minuten doet om van de ene kegel tot de andere te stromen. Aangezien er geldt dat $1\ min = 60s$, volgt er dat

$$6\ minuten = 360s. \tag{68}$$

Hieruit volgt dat

$$stroomsnelheid = \frac{gewicht}{tijd} \tag{69}$$
$$stroomsnelheid = \frac{848,23...}{360} \tag{70}$$
$$stroomsnelheid = 2,35... \approx 2,36g/s. \tag{71}$$

De snelheid waarmee het zand door de opening van de zandloper stroomt is dus 2,36 gram per seconde.

**b)** We beginnen door het gewicht uit te rekenen die nodig is zodat het zand er 12 minuten doet om van de ene kegel tot de andere te stromen. Om dit te kunnen doen, rekenen we eerst de 12 minuten om naar seconden. Aangezien 1 $min = 60s$, volgt er dat

$$12\ minuten = 720s. \tag{72}$$

Aangezien het zand nog steeds met snelheid 2, 36 gram per seconde stroomt en aangezien $1kg = 1000g$, kan dit als volgt:

$$2,36 \times 720 = 1699,2g = 1,6992kg. \tag{73}$$

Om de vergrotingsfactor te berekenen, moeten we weten hoeveel groter de inhoud van een kegel van de nieuwe zandloper is ten opzichte van een kegel van de oude zandloper. Wetend dat het zand 1, 5 $kg$ per liter weegt en dat $l = dm^3$, we bepalen dus de inhoud van de nieuwe kegel als volgt:

$$inhoud = \frac{1,6992}{1,5} = 1,1328l = 1,1328dm^3. \tag{74}$$

We bepalen hoeveel groter deze nieuwe inhoud is als volgt:

$$p = \frac{nieuwe\ inhoud}{oude\ inhoud} \tag{75}$$

$$p = \frac{1,1328}{0,56548...} = 2,003... \tag{76}$$

De vergrotingsfactor is dan gelijk aan

$$vergrotingsfactor = \sqrt[3]{p} \tag{77}$$

$$vergrotingsfactor = \sqrt[3]{2,003} \tag{78}$$

$$vergrotingsfactor = 1,26... \approx 1,26. \tag{79}$$

### A.3.3 Stap 3

**a)** Bij de uitleg hieronder correspondeert de nummering met die uit de stappen van de berekening.

57. Deze is de formule voor de inhoud van een kegel.

58. Deze is de formule om de radius te berekenen gegeven de diameter.

59. De bekende lengte van de diameter van het grondvlak van de kegel, die 12 $cm$ lang is, wordt ingevuld en de radius wordt berekend.

60. Via deze formule kan de hoogte van de twee kegels die de zandloper opmaken berekend worden. De twee kegels zijn namelijk even groot, dus de twee kegels zijn ook even hoog.

61. De bekende lengte van de hoogte van de zandloper, die 30 $cm$ lang is, wordt ingevuld en de hoogte van de kegel wordt berekend.

62. De formule voor de inhoud van een kegel wordt ingevuld met de berekend radius en hoogte.

63. Het kwadraat van 6 wordt uitgerekend.

64. De inhoud van de kegel wordt berekend. Het antwoord wordt NIET afgerond, aangezien dit een tussenstap is.

65. Aangezien $1dm^3 = 1000cm^3$ en $dm^3 = l$, kan in deze regel het berekende inhoud omgezet worden van $cm^3$ tot liters.

66. Het totale gewicht van het zand binnen de zandloper wordt berekend. Deze stap mag zo plaatsvinden omdat de maat $1,5$ $kg$ per liter gewicht per liter aangeeft. Door deze te vermenigvuldigen met het aantal liters zand aanwezig in de zandloper, kan dus het totale gewicht berekend worden. Bovendien kan er gezien worden dat $\frac{kg}{l} \times l = kg$. Het antwoord wordt NIET afgerond, aangezien dit een tussenstap is.

67. Aangezien $1kg = 1000g$, kan het berekende gewicht omgezet worden van $kg$ tot $g$ zoals in deze stap gedaan wordt.

68. Aangezien $1/minuut = 60$, kan de tijd dat het duurt voor het zand om volledig te stromen van de ene kegel tot de andere omgezet worden van minuten tot seconden zoals in deze stap gedaan wordt.

69. Deze is de formule om de stroomsnelheid van het zand te berekenen. Deze formule volgt uit de gewenste eenheid voor de opdracht (gram per seconde).

70. Het berekende totale gewicht van het zand en de seconde dat het duurt voor het zand om volledig te stromen van de ene kegel tot de andere worden in de formule ingevuld.

71. Het antwoord wordt berekend en afgerond op twee decimalen zoals gevraagd door de opgave.

**b)** Bij de uitleg hieronder correspondeert de nummering met die uit de stappen van de berekening.

72. Aangezien $1/minuut = 60$, kan de tijd dat het duurt voor het zand in de nieuwe zandloper om volledig te stromen van de ene kegel tot de andere omgezet worden van minuten tot seconden zoals in deze stap gedaan wordt.

73. Het totale gewicht van het zand binnen de nieuwe zandloper wordt berekend. Deze stap mag zo plaatsvinden omdat de maat $2,6$ gram per seconde de stroomsnelheid aangeeft. Door deze te vermenigvuldigen met het aantal secondes dat het zand neemt om van de ene kegel tot de andere te stromen, kan dus het totale gewicht in grammen berekend worden. Bovendien kan er gezien worden dat $\frac{g}{s} \times s = g$ en aangezien $1kg = 1000g$, kan het berekende gewicht omgezet worden van $g$ tot $kg$ zoals in deze stap gedaan wordt.

74. De totale volume van het zand (en dus de totale inhoud van de kegels) binnen de nieuwe zandloper wordt berekend. Deze stap mag zo plaatsvinden omdat de maat $1,5\ kg$ per liter gewicht per liter aangeeft. Door het berekende totale gewicht door deze te delen, kan dus de inhoud berekend worden. Bovendien kan er gezien worden dat $\frac{kg}{\frac{kg}{l}} = kg \times \frac{l}{kg} = l$ en aangezien $l = cm^3$, kan de berekende inhoud omgezet worden van $l$ tot $cm^3$ zoals in deze stap gedaan wordt.

75. Deze is de formule om de factor te bepalen van hoeveel keer de inhoud van de nieuwe zandloper groter is dan die van de oude zandloper.

76. De berekende inhoud van de nieuwe en vergrote zandloper en de inhoud van de oude zandloper worden ingevuld en de factor $p$ wordt berekend.

77. Deze is formule om de vergrotingsfactor te berekenen gegeven de factor $p$.

78. De factor $p$ wordt ingevuld.

79. De vergrotingsfactor wordt berekend en afgerond op twee decimalen zoals gevraagd door de opgave.

# B Reflectieformulieren

## B.1 Reflectieformulier 1

**Naam**:

1. **Welke hulpmiddelen heb je gebruikt?**
   Schrijf op alle hulpmiddelen die je gebruikt hebt om de opdracht op te lossen, zoals het internet, het boek of je aantekeningen. Als je docenten, klasgenoten of andere mensen hebt gevraagd om hulp, noteer specifiek iedereen die jou geholpen heeft.

2. **Wat ging goed?**
   Kijk over jouw werk heen nadat je het verbeterd hebt. Welke stappen zijn gelukt?
   Kijk nu specifiek naar stap 2. Welke berekeningen en stappen zijn gelukt?

3. **Wat voor soort fouten heb je gemaakt?**
   Schrijf op of de fouten die jij gemaakt hebt voornamelijk begripsfouten (jij hebt bijvoorbeeld iets anders berekend dan gevraagd of hebt een verkeerde formule gebruikt) of rekenfouten (iets dat een min moest zijn als plus gerekend bijvoorbeeld) zijn. **Let op**: niet weten hoe te beginnen of niet tot de oplossing komen zijn geen fouten en hoeven hier niet opgeschreven te worden.

4. **Wat heb jij geleerd in deze sessie?**
   Zou je vergelijkbare opdrachten nu (goed) kunnen maken? Geef aan waarom. Komt dat door de uitwerking te hebben gezien of juist door de uitleg van een klasgenoot te hebben gehoord?

5. Geef aan per onderwerp aan de hand van de discussie met jouw groep, jouw werk en het huiswerk of het **goed gaat**, **herhaling vraagt** of **helemaal opnieuw** bekeken moet worden. Geef ook kort aan waarom die goed gaat of juist niet.

   - Oppervlakten van vlakke figuren

   - Samengestelde figuren

   - Inhoudseenheden

6. Schrijf op een plan waarmee jij de onderwerpen die nu nog niet helemaal lukken gaat aanpakken. Wees specifiek, dus niet 'ik ga de theorie opnieuw lezen', maar

bijvoorbeeld 'onderwerpen ... lukken niet omdat ... en om dat te verbeteren ga ik opdrachten ... uit pagina's ... opnieuw maken en nakijken'.

## B.2 Reflectieformulier 2

**Naam**:

1. **Welke hulpmiddelen heb je gebruikt?**
   Schrijf op alle hulpmiddelen die je gebruikt hebt om de opdracht op te lossen, zoals het internet, het boek of je aantekeningen. Als je docenten, klasgenoten of andere mensen hebt gevraagd om hulp, noteer specifiek iedereen die jou geholpen heeft.

2. **Wat ging goed?**
   Kijk over jouw werk heen nadat je het verbeterd hebt. Welke stappen zijn gelukt?
   Kijk nu specifiek naar stap 2. Welke berekeningen en stappen zijn gelukt?

3. **Wat voor soort fouten heb je gemaakt?**
   Schrijf op of de fouten die jij gemaakt hebt voornamelijk begripsfouten (jij hebt bijvoorbeeld iets anders berekend dan gevraagd of hebt een verkeerde formule gebruikt) of rekenfouten (iets dat een min moest zijn als plus gerekend bijvoorbeeld) zijn. **Let op**: niet weten hoe te beginnen of niet tot de oplossing komen zijn geen fouten en hoeven hier niet opgeschreven te worden.

4. **Wat heb jij geleerd in deze sessie?**
   Zou je vergelijkbare opdrachten nu (goed) kunnen maken? Geef aan waarom. Komt dat door de uitwerking te hebben gezien of juist door de uitleg van een klasgenoot te hebben gehoord?

5. Geef aan per onderwerp aan de hand van de discussie met jouw groep, jouw werk en het huiswerk of het **goed gaat**, **herhaling vraagt** of **helemaal opnieuw** bekeken moet worden. Geef ook kort aan waarom die goed gaat of juist niet.

   - Inhoud van een prisma

   - Inhoud van een cilinder

6. Schrijf op een plan waarmee jij de onderwerpen die nu nog niet helemaal lukken gaat aanpakken. Wees specifiek, dus niet 'ik ga de theorie opnieuw lezen', maar bijvoorbeeld 'onderwerpen ... lukken niet omdat ... en om dat te verbeteren ga ik opdrachten ... uit pagina's ... opnieuw maken en nakijken'.

## B.3 Reflectieformulier 3

**Naam**:

1. **Welke hulpmiddelen heb je gebruikt?**
   Schrijf op alle hulpmiddelen die je gebruikt hebt om de opdracht op te lossen, zoals het internet, het boek of je aantekeningen. Als je docenten, klasgenoten of andere mensen hebt gevraagd om hulp, noteer specifiek iedereen die jou geholpen heeft.

2. **Wat ging goed?**
   Kijk over jouw werk heen nadat je het verbeterd hebt. Welke stappen zijn gelukt?
   Kijk nu specifiek naar stap 2. Welke berekeningen en stappen zijn gelukt?

3. **Wat voor soort fouten heb je gemaakt?**
   Schrijf op of de fouten die jij gemaakt hebt voornamelijk begripsfouten (jij hebt bijvoorbeeld iets anders berekend dan gevraagd of hebt een verkeerde formule gebruikt) of rekenfouten (iets dat een min moest zijn als plus gerekend bijvoorbeeld) zijn. **Let op**: niet weten hoe te beginnen of niet tot de oplossing komen zijn geen fouten en hoeven hier niet opgeschreven te worden.

4. **Wat heb jij geleerd in deze sessie?**
   Zou je vergelijkbare opdrachten nu (goed) kunnen maken? Geef aan waarom. Komt dat door de uitwerking te hebben gezien of juist door de uitleg van een klasgenoot te hebben gehoord?

5. Geef aan per onderwerp aan de hand van de discussie met jouw groep, jouw werk en het huiswerk of het **goed gaat**, **herhaling vraagt** of **helemaal opnieuw** bekeken moet worden. Geef ook kort aan waarom die goed gaat of juist niet.

   - Inhoud van een piramide
   - Inhoud van een kegel
   - Vergrotingsfactor berekenen
   - Van vergrotingsfactor naar oppervlakte
   - Van oppervlakte naar vergrotingsfactor
   - Van vergrotingsfactor naar inhoud
   - Van inhoud naar vergrotingsfactor

6. Schrijf op een plan waarmee jij de onderwerpen die nu nog niet helemaal lukken gaat aanpakken. Wees specifiek, dus niet 'ik ga de theorie opnieuw lezen', maar bijvoorbeeld 'onderwerpen ... lukken niet omdat ... en om dat te verbeteren ga ik opdrachten ... uit pagina's ... opnieuw maken en nakijken'.

# C Uitwerking interview opdracht

**Stap 1** Gegeven is een kaars, die de vorm heeft van een kegel, waarvan de diameter van de basis en de hoogte onbekend zijn. Bekend is wel dat de kaars aan is geweest en dat de diameter van de basis van de kaars afgenomen is met 19%, terwijl de hoogte van de kaars afgenomen is met 32%.

De opdracht vraagt dat er bepaald wordt met hoeveel procent de inhoud van de kaars afgenomen is.
Om antwoord te geven op deze vraag is het noodzakelijk om eerst zich te beseffen dat de ontbrekende stukken informatie (de lengtes van de diameter van de basis en van de hoogte) niet nodig zijn om de oplossing te vinden. Het antwoord moet namelijk een percentage (een verhouding dus) zijn, en deze verandert niet, ongeacht wat deze ontbrekende lengtes mogen zijn. Om het antwoord te vinden is het dan genoeg om de oorspronkelijke lengtes, evenals de oorspronkelijke inhoud van de kaars, als 100% te beschouwen en de nieuwe als een percentage hiervan. Daarmee kan de nieuwe inhoud berekend worden als een percentage van de oude zodat er bepaald kan worden met hoeveel procent de inhoud van de kaars verminderd is.

**Stap 2** We beginnen door te bepalen hoeveel procent van de diameter van de basis nog over is nadat de kaars gebrand is:

$$100\% - 19\% = 81\%. \tag{80}$$

We bepalen vervolgens hoeveel procent van de hoogte van de kaars nog over is nadat de kaars gebrand is:

$$100\% - 32\% = 68\%. \tag{81}$$

Met deze informatie bepalen wij nu eerst het totale percentage van de inhoud van de kaars als volgt:

$$
\begin{aligned}
percentage\ oorspronkelijke\ inhoud &= \frac{1}{3} \cdot straal^2 \cdot \pi \cdot hoogte && (82)\\
&= \frac{1}{3} \cdot (\frac{diameter}{2})^2 \cdot \pi \cdot hoogte && (83)\\
&= \frac{1}{3} \cdot (\frac{100\%}{2})^2 \cdot \pi \cdot 100\% && (84)\\
&= \frac{1}{3} \cdot (50\%)^2 \cdot \pi \cdot 100\% && (85)\\
&= \frac{1}{3} \cdot 2500\% \cdot \pi \cdot 100\% && (86)\\
&= \frac{1}{3} 250000\% \cdot \pi && (87)\\
&= 83333,33...\% \cdot \pi = 261799,387...\%. && (88)
\end{aligned}
$$

We bepalen nu het percentage van de inhoud van de kaars dat nog over is als volgt:

$$\begin{aligned}
percentage\ nieuw\ inhoud &= \frac{1}{3} \cdot straal^2 \cdot \pi \cdot hoogte && (89)\\
&= \frac{1}{3} \cdot (\frac{diameter}{2})^2 \cdot \pi \cdot hoogte && (90)\\
&= \frac{1}{3} \cdot (\frac{81\%}{2})^2 \cdot \pi \cdot 68\% && (91)\\
&= \frac{1}{3} \cdot (40,5\%)^2 \cdot \pi \cdot 68\% && (92)\\
&= 546,75\% \cdot \pi \cdot 68\% && (93)\\
&= 37179\% \cdot \pi = 116801,273...\%. && (94)
\end{aligned}$$

We bepalen nu met hoeveel procent de inhoud van de kegel afgenomen is als volgt:

$$\begin{aligned}
percentage\ afname &= \frac{oud - nieuw}{oud} \cdot 100 && (95)\\
&= \frac{261799,387...\% - 116801,273...\%}{261799,387...\%} \cdot 100 && (96)\\
&= \frac{144998,114...\%}{261799,387...\%} \cdot 100 && (97)\\
&= 0.553... \cdot 100 && (98)\\
&= 55,385... \approx 55,39\%. && (99)
\end{aligned}$$

De inhoud van de kaars is dus afgenomen met 55, 39%.

**Stap 3** Bij de uitleg hieronder correspondeert de nummering met die uit de stappen van de berekening.

80. De lengte van de diameter van de basis van de kaars wordt aangenomen 100% te zijn en de afname wordt ervan afgehaald om het overgebleven percentage te berekenen.

81. De lengte van de hoogte van de kaars wordt aangenomen 100% te zijn en de afname wordt ervan afgehaald om het overgebleven percentage te berekenen.

82. Deze is de formule om de inhoud van een kegel te berekenen.

83. Deze is de formule om de inhoud van een kegel te berekenen waarbij de diameter gebruikt wordt in plaats van de straal.

84. De gekozen lengtes worden ingevuld in de formule.

85. De straal wordt berekend door de diameter door 2 te delen.

86. De straal wordt vermenigvuldigd met de hoogte van de kegel.

87. De oorspronkelijke inhoud van de kegel wordt berekend. Het antwoord wordt NIET afgerond, aangezien dit een tussenstap is.

88. Deze is de formule om de inhoud van een kegel te berekenen.
89. Deze is de formule om de inhoud van een kegel te berekenen waarbij de diameter gebruikt wordt in plaats van de straal.
90. De berekende nieuwe lengtes na het branden van de kaars worden ingevuld in de formule.
91. De straal wordt berekend door de diameter door 2 te delen.
92. De straal wordt gedeelde door 3
93. De inhoud van de kaars na het branden wordt berekend. Het antwoord wordt NIET afgerond, aangezien dit een tussenstap is.
94. Deze is de formule om de afname in percentage te berekenen.
95. De berekenden inhouden van kegels worden ingevuld in de formule.
96. De nieuwe inhoud wordt afgetrokken van de oorspronkelijke inhoud.
97. Het resultaat van het aftrekken van de nieuwe inhoud van de oorspronkelijke inhoud wordt gedeelde door de oorspronkelijke inhoud.
98. Het percentage waarmee de inhoud van de kaars afgenomen is na het braden wordt afgerond.

# D Interview vragen

## D.1 Onderzoeksgroep algemeen

- Welke van de drie opdrachten heb je gemaakt?

  - ❑ Opdracht 1
  - ❑ Opdracht 2
  - ❑ Opdracht 3

- Vond je opdracht 1 nuttig?

  - ❍ Ja
  - ❍ Nee
  - ❍ Niet gemaakt

- Leg uit waarom je opdracht 1 wel of niet nuttig vond. Als je de opdracht niet hebt gemaakt, zet hieronder 'n.v.t.'

- Hoeveel tijd heb je besteed aan het maken van opdracht 1?

- Vond je opdracht 2 nuttig?

  - ❍ Ja
  - ❍ Nee
  - ❍ Niet gemaakt

- Leg uit waarom je opdracht 2 wel of niet nuttig vond. Als je de opdracht niet hebt gemaakt, zet hieronder 'n.v.t.'

- Hoeveel tijd heb je besteed aan het maken van opdracht 2?

- Vond je opdracht 3 nuttig?

  - ❍ Ja
  - ❍ Nee
  - ❍ Niet gemaakt

- Leg uit waarom je opdracht 3 wel of niet nuttig vond. Als je de opdracht niet hebt gemaakt, zet hieronder 'n.v.t.'

- Hoeveel tijd heb je besteed aan het maken van opdracht 3?

- Wat heb je geleerd door het maken van deze opdrachten?

## D.2 Onderzoeksgroep

1. Was het voor jou duidelijk wat de bedoeling was van dit onderzoek waar jij aan mee hebt gedaan? Geef een redenering voor jouw antwoord.
2. Heb je opdracht 1 gemaakt? Zo ja, geef opdracht 1 een cijfer tussen 1 en 10.
3. Waarom heb je dit cijfer gegeven? Wat vond je wel of niet nuttig aan deze opdracht?
4. Hoeveel tijd heb je besteed aan het maken van deze opdracht?
5. Heb je opdracht 2 gemaakt? Zo ja, geef opdracht 2 een cijfer tussen 1 en 10.
6. Waarom heb je dit cijfer gegeven? Wat vond je wel of niet nuttig aan deze opdracht?
7. Hoeveel tijd heb je besteed aan het maken van deze opdracht?
8. Heb je opdracht 3 gemaakt? Zo ja, geef opdracht 3 een cijfer tussen 1 en 10.
9. Waarom heb je dit cijfer gegeven? Wat vond je wel of niet nuttig aan deze opdracht?
10. Hoeveel tijd heb je besteed aan het maken van deze opdracht?
11. Heeft het maken van deze opdrachten jouw begrip van de stof verdiept?
12. Leg uit waarom het maken van deze opdrachten wel of niet jouw begrip heeft verdiept.
13. Wat vond je van de gebruikte methode waarbij je de opdrachten in stappen moest uitwerken?
14. Welke stappen uit de methode vond je nuttig
15. Welke stappen uit de methode vond je niet of minder nuttig?
16. Heeft het maken van deze opdrachten volgens de methode jouw begrip van de stof verdiept?
17. Leg uit waarom het maken van deze opdrachten volgens de methode wel of niet jouw begrip heeft verdiept.
18. Had je de opdrachten nuttiger gevonden zonder de methode erbij te gebruiken?
19. Leg uit waarom je deze opdrachten nuttiger had gevonden door wel of niet de methode erbij te gebruiken.
20. Zou je deze methode inzetten op de toets?
21. Leg uit waarom je deze methode wel of niet zou inzetten op een toets.
22. Wat neem je mee uit dit onderzoek?

23. Heeft de methode jou geholpen om betere uitleg te geven aan medeleerlingen in correcte wiskundetaal?
24. Leg uit waarom de methode jou wel of niet geholpen heeft betere uitleg te geven aan medeleerlingen in correcte wiskundetaal.
25. Heeft de methode jou geholpen om betere schattingen te maken van de situatie en om beter in te schatten wat het verwachten antwoord in een gegeven situatie moet zijn?
26. Leg uit waarom de methode wel of niet jou geholpen heeft om betere schattingen te maken van de situatie en om beter in te schatten wat het verwachten antwoord in een gegeven situatie moet zijn.
27. Heeft de methode jou geholpen in leren hoe je gegevens geordend weer kan geven en om je eigen conclusies kritisch te beoordelen?
28. Leg uit waarom de methode wel of niet jou geholpen heeft om te leren hoe je gegevens geordend weer kan geven en om je eigen conclusies kritisch te beoordelen.
29. Heb je nog tips voor het verbeteren van het inzetten van de methode binnen de klas?
30. Zou je deze methode willen zien ingezet worden voor het vak wiskunde?
31. Leg uit waarom je wel of niet deze methode ingezet zou willen zien worden binnen het vak wiskunde.

## D.3 Controle groep

1. Was het voor jou duidelijk wat de bedoeling was van dit onderzoek waar jij aan mee hebt gedaan?
2. Legt uit waarom het voor jou wel of niet.
3. Geef opdracht 1 een cijfer tussen 1 en 10.
4. Waarom heb je dit cijfer gegeven?
5. Wat vond je wel of niet nuttig aan deze opdracht?
6. Hoeveel tijd heb je besteed aan het maken van deze opdracht?
7. Geef opdracht 3 een cijfer tussen 1 en 10.
8. Waarom heb je dit cijfer gegeven?
9. Wat vond je wel of niet nuttig aan deze opdracht?
10. Hoeveel tijd heb je besteed aan het maken van deze opdracht?
11. Heeft het maken van deze opdrachten jouw begrip van de stof verdiept?
12. Leg uit waarom het maken van deze opdrachten volgens de methode wel of niet jouw begrip heeft verdiept.
13. Wat vind je van de methode gebruikt binnen de andere klas? Had je er baat aan gehad om deze opdrachten stap voor stap uit te werken volgens deze methode?
14. Leg uit waarom je baat denkt te hebben aan de methode gebruikt in de andere klas.
15. Wat heb jij geleerd uit dit onderzoek?
16. Geef een redenering voor wat je geleerd hebt.