

Het Ontwerpen van Patronen voor Polymetrische Metselwerken

Jasper de Jong

18 augustus 2011

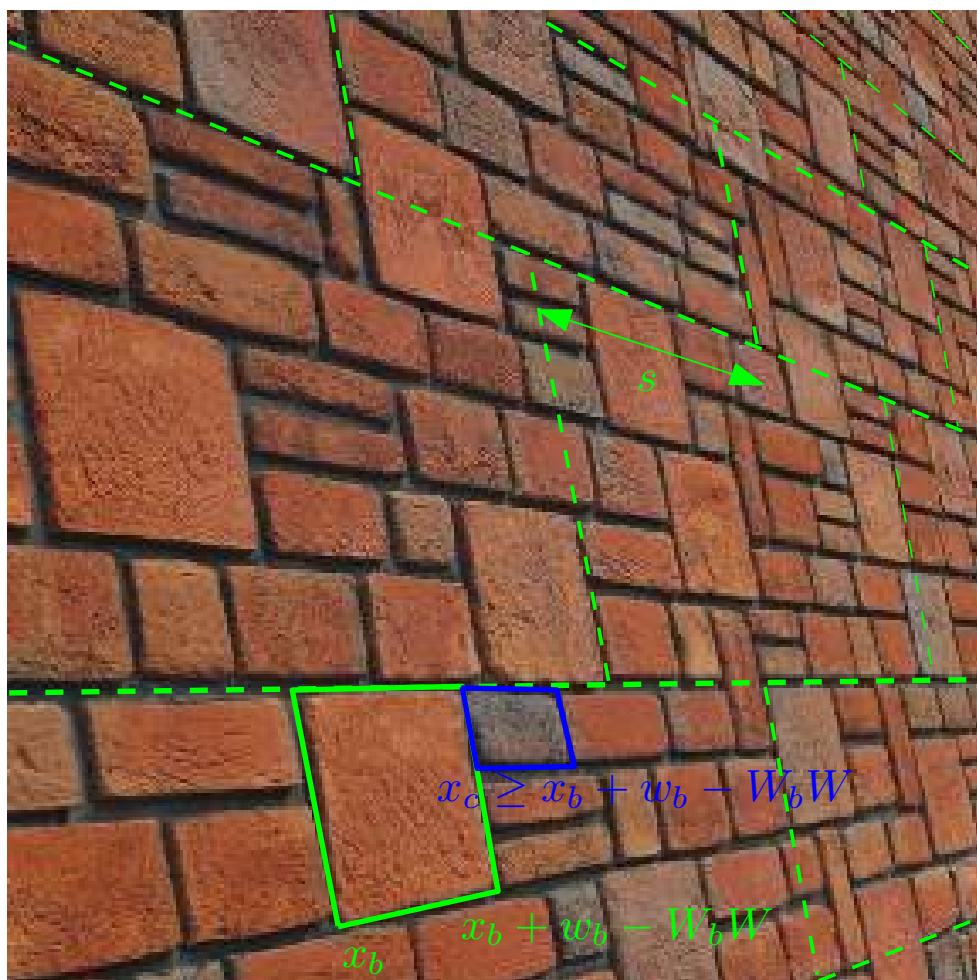
Begeleiders:

Prof.Dr. J.L. Hurink (Universiteit Twente)

Dr.ir. G.F. Post (Universiteit Twente)

Dr.ir. E.W. Hans (Universiteit Twente)

Ir. H. Hans-Vinduška (Jorissen Simonetti architecten)



UNIVERSITEIT TWENTE.

Voorwoord

Dit verslag is het resultaat van een afstudeeropdracht bij de leerstoel DMMP van de opleiding Applied Mathematics aan de Universiteit Twente in samenwerking met Jorissen Simonetti architecten.

Ik wil in het bijzonder mijn begeleiders bedanken. Gerhard Post heeft me veel geholpen met nuttige tips, stimulatie en zijn vele verbeteringen aan dit verslag. Met Hana Hans heb ik slechts drie keer overlegd, maar deze bijeenkomsten gecombineerd met een lunch, waren deze naast nuttig ook erg plezant. Ook wil ik Johann Hurink en Erwin Hans bedanken voor hun tijd en moeite.

Maar natuurlijk zijn er meer mensen die een positieve bijdrage hebben gehad aan het afronden van mijn afstudeeropdracht. Onder andere de mensen van de leerstoel DMMP die voor een gemoedelijke sfeer hebben gezorgd en mijn ouders en vrienden die alle jaren vertrouwen bleven houden dat ik mijn studie tot een goed einde ging brengen.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	5
2	Probleemomschrijving	6
3	Bestaande modellen	7
3.1	Het Basismodel	8
3.1.1	Parameters	8
3.1.2	Variabelen	8
3.1.3	Voorwaarden	8
3.1.4	Het Basismodel	9
3.2	De Twee Fasen Aanpak	10
3.2.1	Parameters	10
3.2.2	Het Roteren van Stenen	10
3.2.3	Fase één: Laag Kiezen	11
3.2.4	Fase twee: Horizontale Posities Kiezen	11
3.2.5	Het Twee Fasen Model	12
4	Cycliciteit	14
4.1	Het Cyclische Patroon	14
4.1.1	parameters, variabelen, voorwaarden	15
4.1.2	Het Cyclische Model	16
4.2	Het Verschoven Cyclische Patroon	18
4.2.1	Parameters, variabelen en voorwaarden	18
4.2.2	Het Verschoven Cyclische Model	19
5	Het Onderbreken van Voegen	22
5.1	Parameters,variabelen,voorwaarden	22
5.2	Het Verschoven Cyclische Model Met Onderbreken	24
6	De Schoonheid van het Patroon	28
6.1	Het Verticaal Verspreiden van Stenen	28
6.2	Clusters Beperken	29
6.3	Het Verschoven Cyclische Model Met Onderbreken, Kwadratisch lagen kiezen en Clusters beperken	31
7	Alternatieve Modellen	35

7.1	Een Alternatief voor Cycliciteit	35
7.2	Een Alternatief voor het Onderbreken van Verticale Voegen	35
7.3	Een Alternatief voor de Gehele Tweede Fase	36
7.4	Een discrete horizontale verplaatsing	38
7.5	Variabele laaghoogten	38
7.6	Gebroken stenen met negatieve breedte	39
8	Complexiteit van het probleem	40
8.1	Reductie en partitie	40
8.2	Reductie zonder het onderbreken van voegen	40
8.3	Reductie met het onderbreken van voegen	40
9	De Oplosbaarheid van de Tweede Stap	42
9.1	Een instantie zonder oplossing	42
9.2	Een constructie voor instanties met stenen met maximaal twee lagen	43
9.3	Tegenvoorbeelden voor instanties bestaande uit enkel stenen van $n \times 1$ en $1 \times n$	43
9.4	Een constructie voor cyclische instanties met stenen met maximaal drie lagen	44
9.5	Oplossingen als voegen onderbroken moeten worden	45
10	De Applicatie	47
10.1	Invoerschermen	47
10.2	Het Hoofdscherm	47
10.2.1	Oplosknoppen	47
10.2.2	Opties	48
10.2.3	Testtabellen	48
10.2.4	Oplossingen	49
11	Resultaten	50
12	Aanbevelingen voor Vervolgonderzoek	52

1 Inleiding

Een verband is het systeem waarmee stenen in een muur worden gelegd. Een verband dat iedereen kent is het halfsteensverband. Hierbij verspringt elke strekkenlaag een halve steen. De verticale voegen zijn dus altijd een steenhoogte lang, maar de horizontale voegen lopen helemaal door. Hoewel een halfsteensverband voor een solide muur zorgt, is er tegenwoordig behoefte aan een afwisselender verband. Een verband dat aan deze behoefte voldoet is het polymetrische verband. Dit verband wordt gekenmerkt door de verschillende formaten stenen die in het verband zijn verwerkt. Maar hoewel het polymetrische verband willekeurig oogt, is er een wel degelijk een structuur aanwezig. Het gehele verband is een opeenstapeling van zich herhalende patronen. Binnen deze patronen worden zowel alle horizontale als verticale voegen onderbroken. Uiteraard zullen de randen van deze patronen niet geheel recht zijn, aangezien dit geheel doorlopende voegen zou veroorzaken. Op dit moment tekenen architecten polymetrische verbanden met de hand, een handeling die enkele dagen in beslag kan nemen. Om gaten op te vullen is het regelmatig nodig om stenen te breken in kleinere stenen. Het breken van stenen kost de metselaar tijd en gebroken stenen zijn minder mooi.

Het is nuttig om het tekenen van polymetrische verbanden te automatiseren. Enerzijds om de architect kostbare tijd te besparen, anderzijds om het aantal te breken stenen te minimaliseren. In dit verslag beschrijven we een methode die, gegeven de afmetingen van het patroon en de beschikbare types stenen, de juiste stenen kiest en deze plaatst in een polymetrisch verband. Onze methode maakt gebruik van Mixed Integer Linear Programming (MILP), een wiskundige techniek waarbij een lineaire doelfunctie wordt gemaximaliseerd, gelet op een aantal lineaire voorwaarden. Deze doelfunctie en voorwaarden bevatten deels geheeltallige variabelen. Onze methode is gebaseerd op MILP-modellen van twee dimensionale cutting stock en bin packing problemen. Tot dusver zijn deze modellen voornamelijk toegepast op het laden van pallets en het verdelen van een plaat in delen. Voor zover wij weten is er nog niet eerder onderzoek gedaan naar een ILP-model dat metselpatronen creëert.

In sectie 2 geven we een formele omschrijving van ons probleem. In sectie 3 behandelen we de modellen waar ons model op gebaseerd is, beschrijven we twee veelgebruikte ILP modellen voor het twee dimensionale knapsack probleem en geven we enkele aanpassingen om aan de specifieke eigenschappen van metselpatronen te voldoen. In sectie 4 beschrijven we de cyclische eigenschap van ons probleem en hoe we deze modelleren. In sectie 5 beschrijven we hoe we het onderbreken van voegen modelleren. In sectie 6 beschrijven we hoe we wiskundig de schoonheid van een patroon kunnen uitdrukken en hoe we het model uitbreiden om de schoonheid te bevorderen. Hoewel ons uiteindelijke model aan het eind van deze sectie staat, adviseren we de lezer om alle secties door te lezen, aangezien het model zo begrijpelijker is. In sectie 7 beschouwen we enkele varianten op ons model. In sectie 8 laten we door middel van een reductie zien dat er waarschijnlijk geen efficiënte oplosmethode voor ons probleem bestaat. In sectie 9 leiden we voorwaarden af, waaronder er een oplossing bestaat in de tweede fase van ons model. In sectie 10 beschrijven we de applicatie die we hebben gemaakt, waarmee ons model wordt toegepast om patronen te genereren. In sectie 11 beschouwen we de resultaten van het testen van ons model op enkele instanties, en vergelijken we deze met andere methoden. In sectie 12 geven we onze aanbevelingen voor vervolgonderzoek.

2 Probleemomschrijving

Een *basispatroon* is een rechthoek in een tweedimensionaal coördinatenstelsel met de linkeronderhoek in $(0,0)$. Het basispatroon heeft een breedte W en een hoogte H . Ons doel is om het basispatroon te bedekken met een aantal *ongebroken* en *gebroken* rechthoekige stenen $b \in \mathfrak{B}$ door voor elke steen de linkerzijde x_b en de onderkant y_b te kiezen. Elke ongebroke steen heeft een *(steen)type* $i \in \mathfrak{T}$. Voor elk steentype i zijn de volgende parameters gegeven:

- De breedte w_i en de hoogte h_i ,
- Het minimale aantal l_i en het maximale aantal u_i stenen van type i dat mag worden geplaatst.
- T_i is het aantal stenen van een gelijk type dat een steen van type i mag raken.

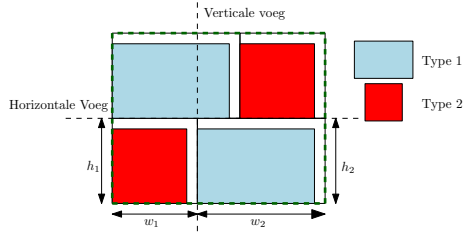
Als een deel van het basispatroon dat niet bedekt kan worden met ongebroke stenen, moeten er stenen worden gebroke om hiermee dit deel alsnog te bedekken. Gebroke stenen hebben een breedte en een hoogte, maar er zijn geen restricties op het aantal gebroke stenen of het aantal gebroke stenen dat andere gebroke stenen mag raken. Tussen de stenen lopen horizontale en verticale *voegen*. Om ons model simpel te houden, modelleren we een voeg als een lijn zonder dikte. Aangezien boven elke steen een uniek (deel van een) horizontale voeg loopt en rechts van elke steen een uniek (deel van een) verticale voeg, tellen we de dikte van een verticale voeg bij de breedte van de stenen op en tellen we de dikte van een horizontale voeg bij de hoogte van de stenen op, zoals te zien is in figuur 1. Als we het in dit verslag dus over de hoogte van een steen hebben, bedoelen we de hoogte plus de dikte van een horizontale voeg. Met de breedte van een steen bedoelen we de breedte plus de dikte van een verticale voeg. We zeggen dat een voeg *doorloopt* als het een ononderbroken lijn is van de ene naar de andere kant van het basispatroon. Voegen die niet doorlopen, zijn *onderbroken*. Zie figuren 1 en 2 voor een verduidelijking van de bovenstaande begrippen. In deze en andere figuren in dit verslag geven we, tenzij anders vermeld, het basispatroon aan met een donkergroene streeplijn, stenen met gekleurde rechthoeken, zijdes van stenen met zwarte lijnen en voegen met zwarte streeplijnen.

Er moet aan de volgende voorwaarden worden voldaan:

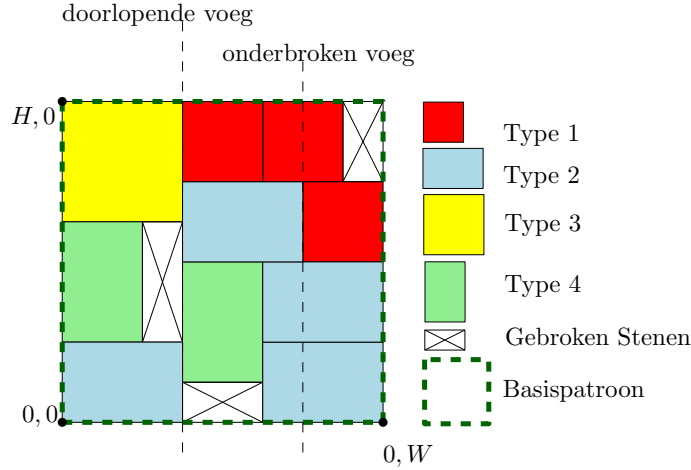
- Van elk steentype moeten de juiste hoeveelheden stenen worden gebruikt.
- Stenen moeten zich (gedeeltelijk) in het basispatroon bevinden.
- Stenen mogen niet overlappen.
- Alle voegen moeten worden onderbroken.

Daarnaast streven we de volgende doelen na, van belangrijk naar minder belangrijk:

- Het maximaliseren van de totale oppervlakte van het aantal niet gebroke stenen.
- Het zo goed mogelijk verspreiden van stenen van gelijke types over het patroon.
- Het minimaliseren van de som van het aantal stenen van een gelijk type dat steen b raakt over alle stenen b .



Figuur 1: De breedte van stenen en voegen



Figuur 2: Het basispatroon, steentypes en voegen

3 Bestaande modellen

In deze sectie beschrijven we de modellen waar ons model op is gebaseerd. Voor zover wij weten is er niet eerder onderzoek gedaan is naar ILP modellen voor metselverbanden. Wel bestaan er vele wiskundige theorieën over zogeheten cutting en packing problemen. Bij cutting stock problemen wordt een object (plaat) in verschillende delen verdeeld (geknipt). Bij twee-dimensionale packing problemen wordt een object (pallet) geladen met verschillende objecten (dozen). Omdat we voor ons probleem ook een rechthoekige ruimte moeten vullen met rechthoeken die niet mogen overlappen, heeft het zin om deze problemen te bestuderen. [6] geeft een uitgebreide bibliografie van artikelen over cutting en packing problemen, gesorteerd op dimensie en oplosmethode. De meeste methodes zijn slechts toepasbaar in situaties met specifieke eigenschappen. In vele modellen, zoals beschreven in onder andere [5] is één van deze eigenschappen de restrictie tot *guillotine cuts*. Een plaat wordt opgedeeld in verschillende delen, die ook weer opgedeeld worden in verschillende delen. Hierbij kunnen delen slechts verdeeld worden met een rechte lijn van de ene kant naar de andere kant van het deel. Hoewel deze restrictie erg praktisch is in situaties met machines die daadwerkelijk platen met een rechte lijn in tweeën delen, is deze bij onze toepassing minder praktisch. Bij metselpatronen willen we namelijk geen lange doorlopende voegen. [1] definieert *simple tiling*, wat inhoudt dat geen verzameling van twee of meer rechthoeken een nieuwe rechthoek vormt. Hoewel deze eigenschap beter is met betrekking tot het onderbreken van voegen, lijkt ons het eisen van simple tiling een te sterke voorwaarde die veel goede oplossingen uitsluit. In ILP modellen zijn makkelijker aanpassingen te maken om ze te gebruiken voor onze specifieke toepassing. [2] Beschrijft een ILP model voor cutting problemen zonder guillotine cuts te eisen. We beschrijven dit model in sectie 7.3. [3] beschrijft een ILP model om chips te positioneren op een printplaat. Ook hier worden rechthoekige objecten op een grotere rechthoek geplaatst en mogen deze niet overlappen. [4] beschrijft een ILP model waarin hij een packing probleem oplost in twee fasen. Onze methode is gebaseerd op de modellen van [3] en [4]. We beschrijven deze twee modellen in subsecties 3.1 en 3.2.

3.1 Het Basismodel

Zoals hierboven genoemd beschrijft [3] een ILP model om chips te positioneren op een printplaat. Het doel is om de chips dusdanig te plaatsen dat ze niet overlappen. Hieronder beschrijven we de parameters, variabelen en voorwaarden uit [3] om overlap te voorkomen, aangepast op onze toepassing. In plaats van een printplaat nemen we een basispatroon, en in plaats van chips nemen we stenen. Een verschil met onze toepassing is dat de te gebruiken chips gegeven zijn, in tegenstelling tot de te gebruiken hoeveelheden van elke steen. We beschrijven het model van [3] enkel om de methode ter voorkoming van overlap te illustreren. In sectie 3.2.3 beschrijven we hoe we een verzameling stenen kiezen bij een gegeven verzameling beschikbare steentypes.

3.1.1 Parameters

We hebben een verzameling $\mathfrak{B}$ van rechthoekige stenen. Elke steen heeft een breedte w_b en een hoogte h_b . Deze stenen moeten worden geplaatst in een rechthoeking basispatroon in een twee-dimensionaal assenstelsel met de linker onderhoek in de oorsprong. Het basispatroon loopt horizontaal tot $(W, 0)$ en verticaal tot $(0, H)$. Merk op dat we in dit model nog niet met steentypes werken.

3.1.2 Variabelen

Als beslissingsvariabelen nemen we de coördinaten, (x_b, y_b) van de linker onderkant van de stenen. We zeggen dat een steen c *zich rechts van* steen b *bevindt* als de linkerzijde van steen c zich rechts van de rechterzijde van steen b bevindt, dus als $x_c \geq x_b + w_b$. We introduceren de binaire variabele z_{bc}^x met

$$z_{bc}^x = \begin{cases} 0 & \text{als } c \text{ zich rechts van } b \text{ bevindt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (1)$$

We zeggen dat een steen b *zich onder* steen c *bevindt* als de onderkant van steen c zich boven de bovenkant van steen b bevindt, dus als $y_c \geq y_b + h_b$. We introduceren de binaire variabele z_{bc}^y met

$$z_{bc}^y = \begin{cases} 0 & \text{als } b \text{ zich onder } c \text{ bevindt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (2)$$

3.1.3 Voorwaarden

We hebben aan twee soorten voorwaarden voldoende om het basispatroon te vullen. Ten eerste mogen de stenen niet buiten het basispatroon vallen:

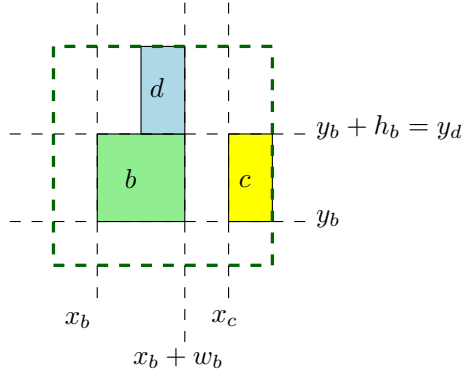
$$0 \leq x_b \leq W - w_b \quad \forall b \in \mathfrak{B} \quad (3)$$

$$0 \leq y_b \leq H - h_b \quad \forall b \in \mathfrak{B} \quad (4)$$

Daarnaast mogen de stenen niet overlappen. Hiervoor gebruiken we de binaire variabelen z_{bc}^x en z_{bc}^y . Als $z_{bc}^x = 0$, dan moet steen b links van steen c worden geplaatst. Echter, als $z_{bc}^x = 1$ dan mag dit geen beperkingen opleveren. Door in de volgende voorwaarden M groot genoeg te nemen zal de linkerhelft van de voorwaarden zo groot zijn dat er altijd aan de voorwaarde wordt voldaan als $z_{bc}^x = 1$. Zie ook figuur 3. Een M die groot genoeg is, is $M = \max\{W, H\}$.

$$Mz_{bc}^x + x_c \geq x_b + w_b \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} \quad (5)$$

$$(6)$$



Figuur 3: Er wordt aan de voorwaarden voldaan, dus de stenen overlappen niet

Met een analoge redenering voor verticale overlap gelden de volgende voorwaarden.

$$Mz_{bc}^y + y_c \geq y_b + h_b \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} \quad (7)$$

Als stenen b en c niet overlappen moet steen b zich rechts, links, onder of boven steen c bevinden. Dus minimaal 1 van de binaire variabelen $z_{bc}^x, z_{cb}^x, z_{bc}^y, z_{cb}^y$ moet 0 zijn.

$$z_{bc}^x + z_{cb}^x + z_{bc}^y + z_{cb}^y \leq 3 \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} \quad (8)$$

Ons doel is om een patroon te creëren waarin geen enkele steen overlapt. Als er dus waarden voor de variabelen bestaan waarvoor aan alle voorwaarden wordt voldaan, bestaat er een oplossing en anders niet. Op dit moment hebben we nog geen doelfunctie nodig.

3.1.4 Het Basismodel

Met de bovenstaande parameters, variabelen en voorwaarden ziet het model er als volgt uit.

Parameters

$w_b \in \mathbb{N}$	de breedte van steen b
$h_b \in \mathbb{N}$	de hoogte van steen b
$W \in \mathbb{N}$	de breedte van het basispatroon
$H \in \mathbb{N}$	de hoogte van het basispatroon
$M =$	$\max\{W, M\}$

Variabelen

$x_b \in \mathbb{R}$	de positie van de linkerzijde van steen b
$y_b \in \mathbb{R}$	de positie van de onderkant van steen b
$z_{bc}^x =$	$\begin{cases} 0 & \text{als } c \text{ zich rechts van } b \text{ bevindt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$z_{bc}^y =$	$\begin{cases} 0 & \text{als } b \text{ zich onder } c \text{ bevindt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$

Geen doelfunctie

Voorwaarden

$$\begin{aligned}
0 \leq x_b \leq W - w_b & \quad \forall b \in \mathfrak{B} \\
0 \leq y_b \leq H - h_b & \quad \forall b \in \mathfrak{B} \\
Mz_{bc}^x + x_c \geq x_b + w_b & \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} \\
Mz_{bc}^y + y_c \geq y_b + h_b & \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} \\
z_{bc}^x + z_{cb}^x + z_{bc}^y + z_{cb}^y \leq 3 & \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B}
\end{aligned}$$

3.2 De Twee Fasen Aanpak

Het model van sectie 3.1 is effectief voor printplaten waar meestal niet meer dan tien chips op geplaatst hoeven te worden. Echter gebruiken wij ons model voor tientallen stenen. We hebben voor elke mogelijke combinatie van stenen vier binaire variabelen. Dit aantal is te hoog is om binnen redelijke tijd een oplossing te vinden. Om het aantal variabelen te beperken gebruiken we een twee fasen aanpak, gebaseerd op [4]. In de eerste fase kiezen we voor elk steentype het aantal te plaatsen stenen voor elke verticale laag, om pas in de tweede fase de precieze posities van de stenen te bepalen met het model uit sectie 3.1. Bij deze aanpak wordt het aantal binaire variabelen op twee manieren gereduceerd. Ten eerste kunnen stenen die geen laag gemeenschappelijk hebben niet overlappen. Er is dus twee binaire variabelen nodig voor slechts elk tweetal stenen dat een laag gemeenschappelijk heeft. Ten tweede hebben we in de tweede fase geen variabelen meer nodig voor de horizontale posities van stenen, aangezien deze al vast liggen.

3.2.1 Parameters

Vergeleken met het model van sectie 3.1 zijn er twee belangrijke verschillen. Ten eerste gebruiken we in de eerste fase steentypes $i \in \mathfrak{T}$ in plaats van stenen. Zoals beschreven in sectie 2 is elke steen van een bepaald steentype. De twee fasen aanpak stelt ons in staat om in de eerste fase de input en het aantal variabelen te beperken door met steentypes in plaats van stenen te werken. Een tweede verschil is dat we de verticale positie discretiseren. De patroonhoogte H wordt opgedeeld in een verzameling $\mathfrak{L}$ van L gelijke lagen $[0..\ell]$ met hoogte $\frac{H}{L}$. Laag l loopt verticaal van $\frac{lH}{L}$ tot $\frac{(l+1)H}{L}$. We plaatsen voor elke steen b de onderkant op gelijke hoogte met de onderkant van een laag l . We noemen l de *basislaag* van b . We zeggen dat steen b zich in laag l bevindt als de onderkant van l niet lager is dan onderkant van b en de bovenkant van l niet hoger is dan de bovenkant van b . Een steen b met hoogte h_b bevindt zich nu in $h_b \frac{L}{H}$ lagen. Vanaf nu geven we het aantal lagen van een steen van type i aan met h_i . Merk op dat niet elke combinatie van patroon met steentypes is te modelleren met deze parameters. Als voor een steen b van type i geldt dat $h_b \frac{L}{H}$ niet een geheel getal is, dan past een steen van type i niet in een geheel aantal lagen en is dit steentype niet bruikbaar. De twee fasen aanpak is dus alleen mogelijk als elk steentype in een geheel aantal lagen past. Gelukkig voldoen in de praktijk de meeste verzamelingen steentypes die gebruikt worden voor polymetrisch metselen hieraan.

W is de patroonbreedte en w_i geeft de breedte van een steen van type i aan. Werken met types in plaats van stenen stelt ons in staat om in plaats van een vaste hoeveelheid stenen, het aantal te gebruiken stenen per type te laten kiezen. Elk steentype $i \in \mathfrak{T}$ heeft een maximaal aantal te plaatsen stenen u_i en een minimaal aantal te plaatsen stenen l_i . Elke laag $l \in \mathfrak{L}$ heeft een breedte W .

3.2.2 Het Roteren van Stenen

Het roteren van een steen (over een hoek van 90 graden) modelleren we als volgt: We voegen voor elk steentype i met w_i en h_i een nieuw steentype i' toe met $w_{i'} = \frac{h_i H}{L}$ en $h_{i'} = \frac{w_i L}{H}$, mits $\frac{w_i L}{H}$ een geheel getal is. Merk op dat de verzameling $\mathfrak{T}$ bestaat uit steentypes en oriëntaties. Voor het gemak zullen we deze verzameling aanduiden met 'type'.

3.2.3 Fase één: Laag Kiezen

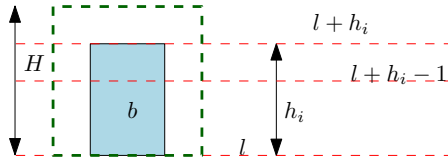
In de eerste fase kiezen we voor elke steen een laag, zonder ons druk te maken over de horizontale posities van de stenen. Hiervoor gebruiken we de geheeltallige variabele y_{li} , het aantal stenen van type i waarvoor we basislaag l kiezen. Het totale aantal stenen van type i moet tussen l_i en u_i liggen:

$$l_i \leq \sum_{l \in \mathcal{L}} y_{li} \leq u_i \quad \forall i \in \mathfrak{T} \quad (9)$$

Daarnaast moeten stenen geheel binnen het basispatroon worden geplaatst, dus ook de bovenkant van een steen moet binnen het basispatroon vallen:

$$y_{li} = 0 \quad \forall i \in \mathfrak{T}, \forall l \in \mathcal{L} \text{ s.t. } l + h_i > L \quad (10)$$

Als $l \leq m \leq l + h_i - 1$, dan zal een steen van type i met basislaag l zich ook in laag m bevinden.



Figuur 4: Steen b van type i bevindt zich in alle lagen van l tot en met $l + h_i - 1$

Daarom introduceren we een indicator variabele, D_{iml} die 1 is als een steen van type i met basislaag l zich ook in laag m bevindt en anders 0 is:

$$D_{iml} = \begin{cases} 1 & l \leq m \leq l + h_i - 1 \\ 0 & \text{in andere gevallen.} \end{cases}$$

De som van alle breedtes van stenen en verticale voegen die zich in laag m bevinden moet kleiner dan of gelijk zijn aan de laagbreedte W . Nu kunnen we de volgende voorwaarden definiëren die ervoor zorgen dat de stenen in hun laag passen:

$$\sum_{l \in \mathcal{L}, i \in \mathfrak{T}} D_{ilm} w_i y_{li} \leq W \quad \forall m \in \mathcal{L} \quad (11)$$

Tenslotte hebben we een doelfunctie. Ons doel is om een zo klein mogelijk oppervlakte op te vullen met gebroken stenen. Om dit te bereiken maximaliseren we het oppervlakte dat wordt gevuld met ongebroken stenen.

$$\max \sum_{i \in \mathfrak{T}} \sum_{l \in \mathcal{L}} y_{li} w_i h_i \quad (12)$$

3.2.4 Fase twee: Horizontale Posities Kiezen

Na de eerste fase weten we voor elk steentype hoeveel van deze stenen zich in welke lagen bevinden. In de tweede fase zullen we de stenen op de juiste horizontale posities plaatsen, waarbij rekening wordt gehouden met het voorkomen van overlap. Dit gaat op een vergelijkbare manier als in ons basismodel in sectie 3.1. Daarom is het noodzakelijk om met een verzameling stenen $\mathfrak{B}$ te werken in plaats van steentypes $\mathfrak{T}$. Deze verzameling creëren we door voor elk type i en elke laag l y_{li} stenen te creëren. Steen $b \in \mathfrak{B}$ heeft breedte $w_b = w_i$, heeft steentype $t_b = i$ en bevindt zich in lagen $l, \dots, l + h_i - 1$. Om dit aan te geven gebruiken we de binaire parameter y_{bl} .

$$y_{bl} = \begin{cases} 1 & \text{als steen } b \text{ zich (onder andere) in laag } l \text{ bevindt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (13)$$

Daarnaast creëren we voor iedere laag m die niet helemaal gevuld is ($\sum_{l \in \mathcal{L}, i \in \mathcal{I}} D_{ilm} w_i y_{li} < W$) een gebroken steen b die $h_b = 1$ laag hoog is met breedte $W - w_b = \sum_{l \in \mathcal{L}, i \in \mathcal{I}} D_{ilm} w_i y_{li}$. Deze steen bevindt zich alleen in laag m , dus $y_{bm} = 1$ en $y_{bl} = 0$ voor $l \neq m$. Steen b krijgt een nieuw type $t_b = i_b$. Door het toevoegen van deze gebroken stenen wordt in de tweede fase het hele patroon gevuld. We introduceren analoog aan ons basismodel in sectie 3.1 de volgende beslissingsvariabelen. Hier is $x_b \in \mathbb{R}$ de horizontale positie van steen b .

$$z_{bc} = \begin{cases} 0 & \text{als steen } c \text{ zich rechts van steen } b \text{ bevindt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (14)$$

In tegenstelling tot het basismodel staan de verticale posities van de stenen (de lagen) al vast, dus hier hebben we geen variabelen voor nodig. Nu kunnen we dezelfde voorwaarden als in sectie 3.1 gebruiken.

De linker- en rechterzijde moeten in het patroon liggen:

$$0 \leq x_b \leq W - w_b \quad \forall b \in \mathfrak{B} \quad (15)$$

Stenen mogen niet overlappen:

$$M z_{bc} + x_c \geq x_b + w_b \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathcal{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl} = 1 \quad (16)$$

$$z_{bc} + z_{cb} \leq 1 \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathcal{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl} = 1 \quad (17)$$

In tegenstelling tot het basismodel gelden deze voorwaarden alleen voor stenen die een laag gemeenschappelijk hebben.

3.2.5 Het Twee Fasen Model

Met de bovenstaande parameters, variabelen en voorwaarden ziet het model er als volgt uit.

Fase 1:

Parameters

$w_i \in \mathbb{N}$	de breedte van steen van type i
$h_i \in \mathbb{N}$	het aantal lagen van steen van type i
$W \in \mathbb{N}$	de breedte van het patroon
$L \in \mathbb{N}$	het aantal lagen in het patroon
$u_i \in \mathbb{N}$	het maximaal aantal te plaatsen stenen van type i
$l_i \in \mathbb{N}$	het minimaal aantal te plaatsen stenen van type i
$D_{ilm} \in [0, 1]$	$\begin{cases} 1 & l \leq m \leq l + h_i - 1 \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$

Variabelen

$y_{li} \in \mathbb{N}$	het aantal stenen van type i met basislaag l
-------------------------	--

Doelfunctie

$$\max \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{l \in \mathcal{L}} y_{li} w_i h_i$$

Voorwaarden

$$\begin{aligned} y_{li} &= 0 & \forall i \in \mathcal{I}, \forall l \in \mathcal{L} \text{ s.t. } l + h_i > L \\ \sum_{l \in \mathcal{L}, i \in \mathcal{I}} D_{ilm} w_i y_{li} &\leq W & \forall m \in \mathcal{L} \end{aligned}$$

Fase 2:
Parameters

$$\begin{aligned}
w_b \in \mathbb{N} & \quad \text{de breedte van steen } b \\
y_{bl} = & \quad \begin{cases} 1 & \text{als steen } b \text{ zich (onder andere) in laag } l \text{ bevindt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \\
M = & \quad 3W
\end{aligned}$$

Variabelen

$$\begin{aligned}
x_b \in \mathbb{R} & \quad \text{de horizontale positie van steen } b \\
z_{bc} = & \quad \begin{cases} 0 & \text{als steen } c \text{ zich rechts van steen } b \text{ bevindt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}
\end{aligned}$$

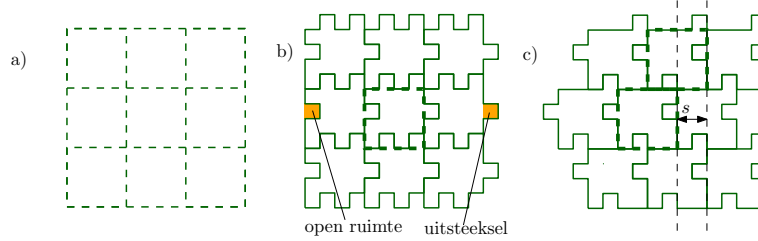
Geen doelfunctie

Voorwaarden

$$\begin{aligned}
0 \leq x_b \leq W - w_b & \quad \forall b \in \mathfrak{B} \\
Mz_{bc} + x_c \geq x_b + w_b & \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl} = 1 \\
z_{bc} + z_{cb} \leq 1 & \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl} = 1
\end{aligned}$$

4 Cyclischeiteit

In sectie 3.2 hebben we een rechthoekig basismodel gevuld met stenen van verschillende steentypes. In een muur zal dit patroon zich horizontaal en verticaal herhalen, zoals in figuur 5a. Zoals te zien is lopen zowel de horizontale als de verticale voegen aan de randen van de patronen helemaal door, hetgeen niet gewenst is.



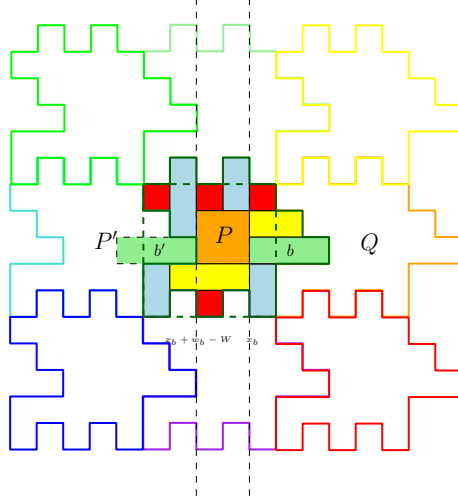
Figuur 5: Het basispatroon, het cyclische patroon en het verschoven cyclische patroon

Echter is het niet nodig ons te beperken tot rechthoekige patronen. Naast het onderbreken van voegen is een ander voordeel van meer vormen toestaan, het vergroten van het aantal mogelijke oplossingen. Een uitbreiding op ons model is te zien in figuur 5b. We werken nog steeds met een rechthoekig basispatroon, dat gestippeld wordt weergegeven. Echter staan we nu toe dat stenen voor een deel binnen en voor een deel boven of rechts van het basispatroon worden geplaatst. Hierdoor heeft een patroon één of meer rechthoekige uitsteeksels aan één kant. Als dit het geval is, moet aan de andere kant van het patroon op dezelfde hoogte of breedte ruimte voor identieke rechthoeken leeg blijven, zodat de patronen in elkaar passen. We noemen het nieuwe patroon dat is afgebeeld met een doorgetrokken lijn het *cyclische patroon*. We beschrijven dit model in sectie 4.1. Een volgende stap is om de patronen per hoogte een bepaalde lengte s horizontaal te verplaatsen als in figuur 5c. Net als in het cyclische patroon steken er rechthoeken uit het basispatroon en wordt er aan de andere kant een identieke rechthoek leeggehouden. Echter hoeven de verticale open ruimtes niet op dezelfde breedte te zijn als de uitsteeksels met een identieke vorm. In plaats daarvan worden ze een lengte s verplaatst. Dit patroon noemen we het *verschoven cyclische patroon*. Het verschoven cyclische patroon heeft drie voordelen boven een cyclisch patroon. Ten eerste zijn er meer mogelijkheden om de stenen te plaatsen. Voor $s = 0$ zijn namelijk alle oplossingen van het cyclische patroon ook mogelijk. Ten tweede worden er meer horizontale voegen te worden onderbroken, omdat het mogelijk is dat een voeg in een hoger patroon al wordt onderbroken (zie ook sectie 7.4). Een derde voordeel is dat het patroon moeilijker te herkennen is, waardoor het verband willekeuriger oogt. We beschrijven dit model in sectie 4.2

4.1 Het Cyclische Patroon

In deze sectie beschrijven we hoe we het twee fasen model uit sectie 3.2 zo aanpassen dat we cyclische patronen kunnen vullen. Het is nu mogelijk dat een steen b zich slechts voor een deel in basispatroon P bevindt, maar ook in een ander basispatroon Q . Omdat alle (cyclische) patronen identiek zijn, zal een steen b' , van hetzelfde type als steen b , maar dan uit een ander basispatroon P' zich dus ook voor een deel in basispatroon P bevinden en wel op dezelfde plaats als waar steen b zich in basispatroon Q bevindt. Zie ook figuur 6.

Kijken we alleen naar basispatroon P , dan maakt het niet uit of we steen b of steen b' op de plek van steen b' plaatsen. Als we kiezen voor steen b , dan is het patroon als het ware cyclisch. Steen b die aan één kant het basispatroon verlaat, komt het basispatroon aan de andere kant weer binnen. We zeggen dat steen b het patroon *doorbreekt*. We zeggen dat een steen het patroon *verticaal doorbreekt* als deze zich voor een deel in het basispatroon en voor een deel boven het basispatroon bevindt. We zeggen dat een steen het patroon *horizontaal doorbreekt* als deze zich voor een deel in het basispatroon en voor een deel rechts van het basispatroon bevindt. Het verticaal doorbreken van het patroon modelleren we in de eerste fase, bij het toewijzen van lagen aan steentypes. Het horizontaal doorbreken van het patroon modelleren we in de tweede fase bij het voorkomen van overlap.

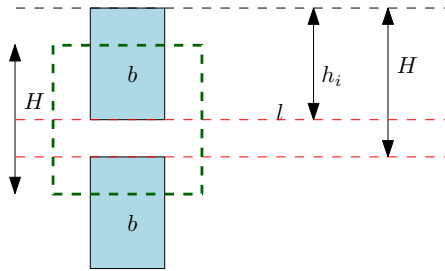


Figuur 6: Een patroon wordt omgeven door identieke patronen

4.1.1 parameters, variabelen, voorwaarden

Een eerste verschil met het model van sectie 3.2 is dat elke laag nu is toegestaan als basislaag. Daarom laten we voorwaarde (10) vallen. Ten tweede moeten we de indicator variabele, D_{iml} aanpassen. D_{iml} is 1 als een steen van type i met basislaag l zich ook in laag m bevindt en is anders 0. Voor $m \geq l$ is geldt nog steeds dat als $m - l \leq h_i - 1$, dan zal elke steen van type i met basislaag l zich ook in laag m bevinden. Maar het is nu ook mogelijk dat een steen van type i met basislaag l zich ook in laag m met $m < l$ bevindt zoals in figuur 7 te zien is. Dit is alleen het geval als $m - l + L \leq h_i - 1$. In beide gevallen geldt dat $m - l + nL \leq h_i - 1$, waarbij n een geheel getal is, zo dat $0 \leq m - l + nL \leq L$. In de rest van dit verslag zullen we $m - l + nL$ met n een geheel getal zo dat $0 \leq m - l + nL \leq L$, noteren als $m - l \bmod L$. D_{iml} wordt nu

$$D_{iml} = \begin{cases} 1 & m - l \bmod L \leq h_i - 1 \\ 0 & \text{in andere gevallen.} \end{cases} \quad (18)$$



Figuur 7: Steen b van type i bevindt zich in alle lagen van l tot en met $l + h_i - 1 - L$

In de tweede fase modelleren we het horizontale doorbreken van het patroon. De linkerzijde van een steen kan zich nu overal in het basispatroon bevinden. Om het horizontaal doorbreken van het patroon te modelleren zou het mooi zijn als we op een soortgelijke wijze als met vergelijking (18) konden modulorekenen. Dit zou de volgende vergelijkingen om overlap te voorkomen opleveren.

$$Mz_{bc} + x_c \geq x_b + w_b \quad \bmod W \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl} = 1 \quad (19)$$

$$z_{bc} + z_{cb} \leq 1 \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl} = 1 \quad (20)$$

Helaas zijn deze vergelijkingen vanwege de modulo operator niet lineair en daarom niet bruikbaar in ons MILP model. In plaats daarvan introduceren we de binaire variabele

$$W_b = \begin{cases} 1 & \text{als steen } b \text{ het patroon horizontaal doorbreekt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$$

Dit houdt in dat $x_b + w_b - W_b W$ zich binnen het basispatroon bevindt.

In plaats van voorwaarden 15 nemen we de volgende voorwaarden, die ervoor zorgen dat de linker en rechterzijde van de stenen binnen het cyclische patroon vallen:

$$0 \leq x_b \leq W - \epsilon \quad \forall b \in \mathfrak{B} \quad (21)$$

$$0 \leq x_b + w_b - W_b W \leq W \quad \forall b \in \mathfrak{B} \quad (22)$$

de ϵ is om identieke oplossingen uit te sluiten door te voorkomen dat een steen met de linkerzijde op W (dezelfde positie is als 0). Het is van belang dat ϵ niet te groot is, om te voorkomen dat we relevante oplossingen uit sluiten. Een ϵ die klein genoeg is is $\text{GGD}(W, w_1, w_2, \dots)$. In plaats van voorwaarden (16) nemen we de volgende voorwaarden voor het voorkomen van overlap:

$$Mz_{bc} + x_c \geq x_b + w_b - W_b W \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} \mid \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl} = 1 \quad (23)$$

Als een steen c het patroon horizontaal doorbreekt, moeten we er rekening mee houden dat deze een andere steen b aan twee kanten kan overlappen, zoals te zien is in figuur 8b. Daarom is een definitie nodig waarin een steen zich zowel links van als rechts van een andere steen kan bevinden. We hanteren we vanaf nu de volgende definitie: Een steen v bevindt zich rechts van steen b als $x_c \geq x_b + w_b - W_b W$.

We kunnen voor elk tweetal stenen b en c met een gemeenschappelijke laag drie gevallen onderscheiden. In het eerste geval doorbreekt noch steen b noch steen c het patroon horizontaal, zoals in figuur 8a. In dit geval bevindt steen b zich rechts van steen c of bevindt steen c zich rechts van steen b , dus geldt $z_{bc} + z_{cb} \leq 1$, net als in het model uit sectie 3.2. In het tweede geval doorbreekt één van de stenen het patroon, zoals in figuur 8b. In dit geval moet zowel steen b zich links van steen c bevinden als steen c zich links van steen b . Dus zowel z_{bc} als z_{cb} moeten gelijk aan 0 zijn en geldt $z_{bc} + z_{cb} \leq 0$. In het derde geval doorbreken beide stenen het patroon. Aangezien de stenen een laag gemeenschappelijk hebben, zouden ze in dit geval overlappen, hetgeen we willen uitsluiten. De volgende voorwaarden die (17) vervangen, voldoen in alledrie de gevallen.

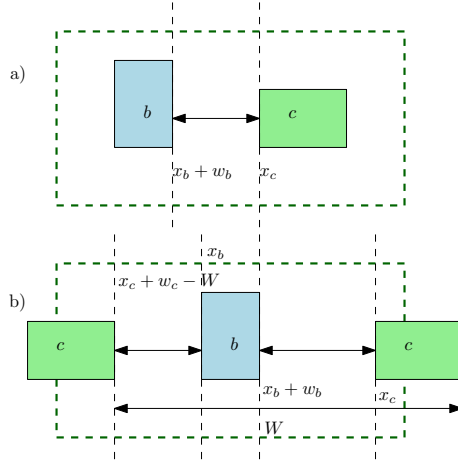
$$z_{bc} + z_{cb} \leq 1 - W_b - W_c \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} \mid \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl} = 1 \quad (24)$$

Als $W_b + W_c = 0$ doorbreken beide stenen het patroon niet, en geldt $z_{bc} + z_{cb} \leq 1$, als $W_b + W_c = 1$, doorbreekt 1 steen het patroon en geldt $z_{bc} + z_{cb} \leq 0$. Tenslotte is het onmogelijk dat beide stenen het patroon doorbreken, aangezien dan $W_b + W_c = 2$ zou zijn. Hierdoor geldt dat $z_{bc} + z_{cb} \leq -1$, wat niet kan omdat z_{bc} en z_{cb} positief zijn.

4.1.2 Het Cyclische Model

Met de bovenstaande parameters, variabelen en voorwaarden ziet het model er als volgt uit.

Fase 1:



Figuur 8: a) geen steen doorbreekt het patroon, dus hoeft alleen z_{bc} 0 te zijn. b) steen c doorbreekt het patroon, dus zowel z_{bc} als z_{cb} moet 0 zijn

Parameters

$w_i \in \mathbb{N}$	de breedte van steen van type i
$h_i \in \mathbb{N}$	het aantal lagen van steen van type i
$W \in \mathbb{N}$	de breedte van het patroon
$L \in \mathbb{N}$	het aantal lagen in het patroon
$u_i \in \mathbb{N}$	het maximaal aantal te plaatsen stenen van type i
$l_i \in \mathbb{N}$	het minimaal aantal te plaatsen stenen van type i
$D_{iml} =$	$\begin{cases} 1 & m - l \mod L \leq h_i - 1 \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$

Variabelen

$y_{li} \in \mathbb{N}$	het aantal stenen van type i met basislaag l
-------------------------	--

Doelfunctie

$$\max \sum_{i \in \mathfrak{I}} \sum_{l \in \mathfrak{L}} y_{li} w_i h_i$$

Voorwaarden

$$\sum_{l \in \mathfrak{L}, i \in \mathfrak{I}} D_{ilm} w_i y_{li} \leq W \quad \forall m \in \mathfrak{L}$$

Fase 2:

Parameters

$w_b \in \mathbb{N}$	de breedte van steen b
$y_{bl} =$	$\begin{cases} 1 & \text{als steen } b \text{ zich (onder andere) in laag } l \text{ bevindt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$\epsilon =$	$\text{GGD}(W, w_1, w_2, \dots)$
$M =$	$3W$

Variabelen

$$\begin{aligned}
x_b &\in \mathbb{R} && \text{de horizontale positie van steen } b \\
W_b &= && \begin{cases} 1 & \text{als steen } b \text{ het patroon horizontaal doorbreekt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \\
z_{bc} &= && \begin{cases} 0 & \text{als steen } c \text{ zich rechts van steen } b \text{ bevindt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}
\end{aligned}$$

Geen doelfunctie

Voorwaarden

$$\begin{aligned}
0 \leq x_b \leq W - \epsilon & && \forall b \in \mathfrak{B} \\
0 \leq x_b + w_b - W_b W \leq W & && \forall b \in \mathfrak{B} \\
M z_{bc} + x_c \geq x_b + w_b - W_b W & && \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl} = 1 \\
z_{bc} + z_{cb} \leq 1 - W_b - W_c & && \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl} = 1
\end{aligned}$$

4.2 Het Vershoven Cyclische Patroon

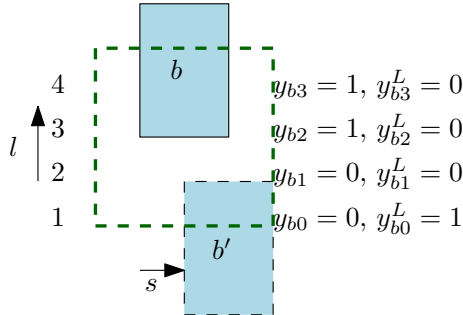
In deze sectie beschrijven we hoe we het cyclische model uit sectie 4.1 zo kunnen aanpassen dat we verschoven cyclische patronen kunnen vullen. Zoals vermeld in sectie 4 hoeven in een verschoven cyclisch patroon de verticale open ruimtes niet op dezelfde breedte te zijn als de uitsteeksels met een identieke vorm, maar worden ze een lengte s naar rechts verplaatst. Stenen die het patroon verticaal doorbreken bevinden zich bovenin het patroon op een andere horizontale positie dan onderin het patroon. We moeten voor elke steen $b \in B$ nu onderscheid maken tussen reguliere lagen l (die we gewoon 'lagen' blijven noemen) die tussen de basislaag van b en de bovenkant van het basispatroon liggen en *onderlagen* m die tussen de onderkant van het basispatroon en de basislaag van b liggen.

4.2.1 Parameters, variabelen en voorwaarden

We introduceren een nieuwe binaire parameter y_{bl}^L .

$$y_{bl}^L = \begin{cases} 1 & \text{als steen } b \text{ zich (onder andere) in onderlaag } l \text{ bevindt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (25)$$

Bijvoorbeeld, een steen b die zich in lagen 2, 3, 0 bevindt, heeft nu $y_{b2} = 1, y_{b3} = 1, y_{b0}^L = 1$. In tegenstelling tot het cyclische model is $y_{b0} = 0$. Zie ook figuur 9



Figuur 9: De lagen en onderlagen van steen b

Een steen b die het patroon verticaal doorbreekt, heeft zijn linkerkzijde in zijn onderlagen op $x_b + s$. Het is mogelijk dat $x_b + s$ niet binnen het basispatroon ligt. Daarom introduceren we een binaire variabele W_b^s .

$$W_b^s = \begin{cases} 1 & \text{als } x_b + s \text{ buiten het basispatroon ligt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (26)$$

Analoog aan (22) leidt dit tot de volgende voorwaarden:

$$0 \leq x_b + s - W_b^s W \leq W \quad \forall b \in \mathfrak{B} | y_{b0}^L = 1 \quad (27)$$

De linkerkzijde van steen b in een onderlaag m bevindt zich op $x_b + s - W_b^s W$. Dus als $x_b + s - W_b^s W + w_b > W$, dan doorbreekt steen b in een onderlaag het patroon horizontaal. Daarom introduceren we nog een binaire variabele, W_b^{s2} .

$$W_b^{s2} = \begin{cases} 1 & \text{als steen } b \text{ in een onderlaag (laag 0) het patroon horizontaal doorbreekt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (28)$$

$$0 \leq x_b + w_b + s - W_b^s W - W_b^{s2} W \leq W \quad \forall b \in \mathfrak{B} | y_{b0}^L = 1 \quad (29)$$

We zeggen dat steen c *zich in zijn onderlaag rechts van b bevindt* als $x_c - W_c^s W + s \geq x_b + w_b - W_b W$. We zeggen dat steen b *zich rechts van c in zijn onderlaag bevindt* als $x_b \geq x_c + w_c + s - W_c^s W - W_c^{s2} W$. Om de overlap tussen stenen b die het patroon niet verticaal doorbreken en stenen c die het patroon wel verticaal doorbreken te modelleren gebruiken we binaire variabelen $z_{bc}^{(2)}$ en $z_{cb}^{(2)}$, waarbij $z_{bc}^{(2)} = 0$ aangeeft dat c in zijn onderlaag rechts van b ligt en $z_{cb}^{(2)} = 0$ aangeeft dat c in zijn onderlaag links van b ligt:

$$z_{bc}^{(2)} = \begin{cases} 0 & \text{als } c \text{ zich in zijn onderlaag rechts van } b \text{ bevindt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (30)$$

$$z_{cb}^{(2)} = \begin{cases} 0 & \text{als } b \text{ zijn rechts bevindt van } c \text{ in zijn onderlaag} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (31)$$

$$(32)$$

Dit leidt tot de volgende voorwaarden (die met het oog op de layout iets anders zijn opgeschreven dan hierboven):

$$Mz_{bc}^{(2)} + x_c - W_c^s W + s \geq x_b + w_b - W_b W \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl}^L = 1 \quad (33)$$

$$Mz_{cb}^{(2)} + x_b - s + W_c^s W \geq x_c + w_c - W_c^{s2} W \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl}^L = 1 \quad (34)$$

$$z_{bc}^{(2)} + z_{cb}^{(2)} \leq 1 - W_b - W_c^{s2} \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl}^L = 1 \quad (35)$$

4.2.2 Het Verschoven Cyclische Model

Met de bovenstaande parameters, variabelen en voorwaarden ziet het model er als volgt uit.

Fase 1:**Parameters**

$w_i \in \mathbb{N}$	de breedte van steen van type i
$h_i \in \mathbb{N}$	het aantal lagen van steen van type i
$W \in \mathbb{N}$	de breedte van het patroon
$L \in \mathbb{N}$	het aantal lagen in het patroon
$u_i \in \mathbb{N}$	het maximaal aantal te plaatsen stenen van type i
$l_i \in \mathbb{N}$	het minimaal aantal te plaatsen stenen van type i
$D_{iml} =$	$\begin{cases} 1 & m - l \bmod L \leq h_i - 1 \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$

Variabelen

$y_{li} \in \mathbb{N}$	het aantal stenen van type i met basislaag l
-------------------------	--

Doelfunctie

$$\max \sum_{i \in \mathfrak{I}} \sum_{l \in \mathfrak{L}} y_{li} w_i h_i$$

Voorwaarden

$$\sum_{l \in \mathfrak{L}, i \in \mathfrak{I}} D_{ilm} w_i y_{li} \leq W \quad \forall m \in \mathfrak{L}$$

Fase 2:**Parameters**

$w_b \in \mathbb{N}$	de breedte van steen b
$y_{bl} =$	$\begin{cases} 1 & \text{als steen } b \text{ zich (onder andere) in laag } l \text{ bevindt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$y_{bl}^L =$	$\begin{cases} 1 & \text{als steen } b \text{ zich (onder andere) in onderlaag } l \text{ bevindt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$\epsilon =$	$\text{GGD}(W, w_1, w_2, \dots)$
$M =$	$3W$

Variabelen

$x_b \in \mathbb{R}$	de horizontale positie van steen b
$s \in \mathbb{R}$	de horizontale verplaatsing van het patroon
$W_b =$	$\begin{cases} 1 & \text{als steen } b \text{ het patroon horizontaal doorbreekt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$W_b^s =$	$\begin{cases} 1 & \text{als } x_b + s \text{ buiten het basispatroon ligt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$W_b^{s2} =$	$\begin{cases} 1 & \text{als } b \text{ het patroon horizontaal doorbreekt in een onderlaag} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$z_{bc} =$	$\begin{cases} 0 & \text{als steen } c \text{ zich rechts van steen } b \text{ bevindt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$z_{bc}^{(2)} =$	$\begin{cases} 0 & \text{als } c \text{ zich in zijn onderlaag rechts van } b \text{ bevindt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$z_{cb}^{(2)} =$	$\begin{cases} 0 & \text{als } b \text{ zijn rechts bevindt van } c \text{ in zijn onderlaag} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$

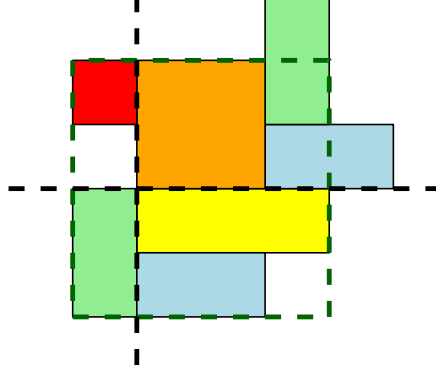
Geen doelfunctie

Voorwaarden

$0 \leq x_b \leq W - \epsilon$	$\forall b \in \mathfrak{B}$
$0 \leq x_b + w_b - W_b W \leq W$	$\forall b \in \mathfrak{B}$
$0 \leq x_b + s - W_b^s \leq W$	$\forall b \in \mathfrak{B} \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl}^L = 1$
$0 \leq x_b + w_b + s - W_b^s W - W_b^{s2} W \leq W$	$\forall b \in \mathfrak{B} \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl}^L = 1$
$Mz_{bc} + x_c \geq x_b + w_b - W_b W$	$\forall b \neq c \in \mathfrak{B} \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl} = 1$
$z_{bc} + z_{cb} \leq 1 - W_b - W_c$	$\forall b \neq c \in \mathfrak{B} \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl} = 1$
$Mz_{bc}^{(2)} + x_c + s - W_c^s W \geq x_b + w_b - W_b W$	$\forall b \neq c \in \mathfrak{B} \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl}^L = 1$
$Mz_{cb}^{(2)} + x_b - s + W_c^s W \geq x_c + w_c - W_c^{s2} W$	$\forall b \neq c \in \mathfrak{B} \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl}^L = 1$
$z_{bc}^{(2)} + z_{cb}^{(2)} \leq 1 - W_b - W_c^{s2}$	$\forall b \neq c \in \mathfrak{B} \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl}^L = 1$

5 Het Onderbreken van Voegen

In sectie 4 hebben we een model uitgewerkt dat naast basispatronen ook cyclische en en verschoven cyclische patroon kan vullen, waarbij overlap tussen stenen wordt voorkomen. Maar het voorkomen van overlap is niet de enige eis die we aan onze modellen stellen. Eén van de eigenschappen van een polymetrisch metselwerk is dat geen enkele voeg helemaal doorloopt. Zoals beschreven in sectie 2 zeggen we dat een voeg doorloopt als het een ononderbroken lijn is van de ene naar de andere kant van het basispatroon. Voegen die niet doorlopen zijn onderbroken. Zie ook figuur 10.



Figuur 10: De voegen gerepresenteerd door zwarte streeplijnen lopen helemaal door. Alle andere voegen, inclusief de randen van het patroon worden onderbroken.

5.1 Parameters, variabelen, voorwaarden

Een horizontale voeg op laag l wordt onderbroken, dan en slechts dan als er zich in laag l een niet-onderkant van een steen bevindt. Dit kunnen we eenvoudig bereiken door in de eerste fase een extra voorwaarde toe te voegen. Analooq aan (11) introduceren we een indicator variabele, D'_{iml} die aangeeft dat een steen van type i met basislaag l zich ook in laag $m \neq l$ bevindt als $D'_{iml} = 1$:

$$D'_{iml} = \begin{cases} 1 & m - l - 1 \bmod L \leq h_i - 2 \\ 0 & \text{in andere gevallen.} \end{cases}$$

Merk op dat D_{iml} en D'_{iml} een term -1 verschillen. Dit is zodat de onderkant van een steen van type i niet wordt meegerekend. Voor $m = l$ geldt: $m - l - 1 \bmod L = L - 1 > h_i - 2$ dus $D'_{iml} = 0$. Als $m \neq l$ is $D'_{iml} = D_{iml}$. Elke laag m moet door minimaal één steen worden onderbroken, wat leidt tot de volgende voorwaarden:

$$\sum_{i \in T, l \in L} D'_{iml} y_{li} \geq 1 \quad \forall m \in \mathcal{L} \quad (36)$$

Het onderbreken van verticale voegen kan alleen in de tweede fase en is minder eenvoudig. Ten eerste is het, vanwege de continue horizontale positie, minder duidelijk wanneer een voeg doorloopt en wanneer deze wordt onderbroken. We zeggen dat een verticale voeg op horizontale positie x *onderbroken wordt* als de linkerzijde x_b van een steen b binnen een marge μ van x ligt. Een verticale voeg op positie x loopt door als de linkerzijdes van alle stenen minimaal een marge μ van x afliggen. Voegen die helemaal doorlopen kunnen zich alleen aan de zijkanen van stenen bevinden. Omdat zich aan elke rechterzijde van een steen een linkerzijde van een andere steen bevindt, volstaat het om slechts naar alle linkerzijdes van stenen te kijken. Als voor alle stenen c die zich onder andere in laag l bevinden, de voeg aan de linkerzijde van die steen ergens onderbroken wordt, dan wordt elke voeg onderbroken. We kijken naar de bovenste laag, ℓ . Als alle linkerzijdes x_b van stenen b die zich niet in laag ℓ bevinden een marge μ van de linkerzijde w_c van steen c in laag ℓ afliggen, dan zal de voeg aan de linkerzijde van steen c worden onderbroken.

We introduceren de volgende binaire variabelen:

$$\begin{aligned}
W_c^{-\mu} &= \begin{cases} 1 & \text{als } x_c - \mu \text{ buiten het basispatroon ligt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \\
W_c^{\mu} &= \begin{cases} 1 & \text{als } x_c + \mu \text{ buiten het basispatroon ligt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \\
z_{bc}^{(3)} &= \begin{cases} 0 & \text{als } x_c \text{ minimaal een marge } \mu \text{ rechts van } x_b \text{ ligt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \\
z_{bc}^{(4)} &= \begin{cases} 0 & \text{als } x_b \text{ minimaal een marge } \mu \text{ rechts van } x_c \text{ ligt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}
\end{aligned}$$

Dit leidt tot de volgende voorwaarden:

$$0 \leq x_c - \mu + W_c^{-\mu}W \leq W \quad \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1 \quad (37)$$

$$0 \leq x_c + \mu - W_c^{\mu}W \leq W \quad \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1 \quad (38)$$

$$x_b \leq x_c - \mu + W_c^{-\mu}W + Mz_{bc}^{(3)} \quad \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1, \forall b \in \mathfrak{B} | y_{bl} = 0 \quad (39)$$

$$x_b + Mz_{bc}^{(4)} \geq x_c + \mu - W_c^{\mu}W \quad \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1, \forall b \in \mathfrak{B} | y_{bl} = 0 \quad (40)$$

We introduceren de binaire variabele $z_{cl}^{(5)}$ die aangeeft of een voeg in laag l wordt onderbroken:

$$z_{cl}^{(5)} = \begin{cases} 0 & \text{als de voeg op } x_c \text{ in laag } l \text{ wordt onderbroken} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (41)$$

Zie figuur 11. Als de voeg op x_c in laag l wordt onderbroken en $W_c^{-\mu} = 0$ en $W_c^{\mu} = 0$, dan moet x_b minimaal μ links of rechts van x_c afliggen, dus is $z_{bc}^{(3)} = 0$ of $z_{bc}^{(4)} = 0$. Echter, als $W_c^{-\mu} = 1$ of $W_c^{\mu} = 1$, dan moet aan beide voorwaarden worden voldaan, dus moet zowel $z_{bc}^{(3)} = 0$ als $z_{bc}^{(4)} = 0$.

$$z_{bc}^{(3)} + z_{bc}^{(4)} \leq 1 + 2z_{cl}^{(5)} - (W_b^{-\mu} + W_b^{\mu}) \quad \forall l \in \mathfrak{L}, \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1, \forall b \in \mathfrak{B} | y_{bl} = 0, y_{bl} = 1 \quad (42)$$

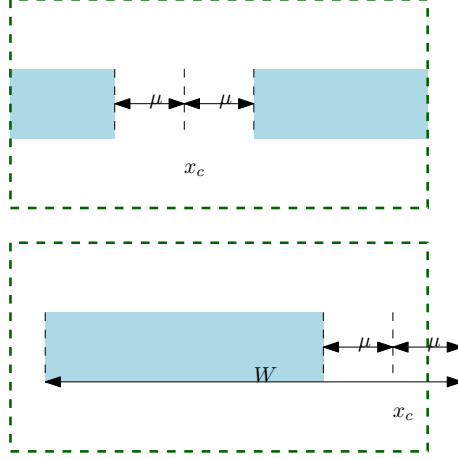
Maar dit is niet de enige manier waarop een verticale voeg onderbroken kan worden. Stenen $b \in B$ die de bovenkant van het patroon doorbreken kunnen ook verticale voegen onderbreken. Zoals beschreven in sectie 4.2 bevindt de linkerzijde van een steen b zich in zijn onderlagen op $x_b - W_b^sW + s$.

Analoog aan (39) en (40) geldt:

$$x_b + s - W_b^sW \leq x_c - \mu + W_c^{-\mu}W + Mz_{bc}^{(3)} \quad \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1, \forall b \in \mathfrak{B} | y_{b0}^L = 1 \quad (43)$$

$$x_b + s - W_b^sW + Mz_{bc}^{(4)} \geq x_c + \mu + W_c^{\mu}W \quad \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1, \forall b \in \mathfrak{B} | y_{b0}^L = 1 \quad (44)$$

$$z_{bc}^{(3)} + z_{bc}^{(4)} \leq 1 + 2z_{cl}^{(5)} - (W_b^{-\mu} + W_b^{\mu}) \quad \forall l \in \mathfrak{L}, \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1, \forall b \in \mathfrak{B} | y_{bl}^L = 1 \text{ of } y_{b0}^L = 1 \quad (45)$$



Figuur 11: In de bovenste situatie moet x_b in het blauwe gebied links van de linker grens of rechts van de rechter grens liggen. In de onderste situatie moet x_b links van de rechter grens en rechts van de linker grens liggen.

Merk op dat $z_{bc}^{(3)}$ en $z_{bc}^{(4)}$ nog niet gedefinieerd waren voor $b \in \mathfrak{B} | y_{b0}^L = 1$ in voorwaarden (39) en (40), omdat alle stenen met een onderlaag ook zich in de bovenste laag ℓ bevinden. De volgende voorwaarde zorgt ervoor dat elke verticale voeg minimaal in 1 laag $l \in \mathfrak{L}$ wordt onderbroken:

$$\sum_{l \in L} (1 - z_{cl}^{(5)}) \geq 1 \quad \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1 \quad (46)$$

5.2 Het Vershoven Cyclische Model Met Onderbreken

Met de bovenstaande parameters, variabelen en voorwaarden ziet het model er als volgt uit.

Fase 1:

Parameters

$w_i \in \mathbb{N}$	de breedte van steen van type i
$h_i \in \mathbb{N}$	het aantal lagen van steen van type i
$W \in \mathbb{N}$	de breedte van het patroon
$L \in \mathbb{N}$	het aantal lagen in het patroon
$u_i \in \mathbb{N}$	het maximaal aantal te plaatsen stenen van type i
$l_i \in \mathbb{N}$	het minimaal aantal te plaatsen stenen van type i
$D_{iml} =$	$\begin{cases} 1 & m - l \mod L \leq h_i - 1 \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$D'_{iml} =$	$\begin{cases} 1 & m - l - 1 \mod L \leq h_i - 2 \\ 0 & \text{in andere gevallen.} \end{cases}$

Variabelen

$y_{li} \in \mathbb{N}$	het aantal stenen van type i met basislaag l
-------------------------	--

Doelfunctie

$$\max \sum_{i \in \mathfrak{I}} \sum_{l \in \mathfrak{L}} y_{li} w_i h_i$$

Voorwaarden

$$\sum_{l \in \mathfrak{L}, i \in \mathfrak{T}} D_{ilm} w_i y_{li} \leq W \quad \forall m \in \mathfrak{L}$$

$$\sum_{i \in T, l \in L} D'_{iml} y_{li} \geq 1 \quad \forall m \in \mathfrak{L}$$

Fase 2:

Parameters

$w_b \in \mathbb{N}$	de breedte van steen b
$y_{bl} =$	$\begin{cases} 1 & \text{als steen } b \text{ zich (onder andere) in laag } l \text{ bevindt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$y_{bl}^L =$	$\begin{cases} 1 & \text{als steen } b \text{ zich (onder andere) in onderlaag } l \text{ bevindt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$\epsilon =$	$\text{GGD}(W, w_1, w_2, \dots)$
$\mu \in \mathbb{R}$	de marge waarbinnen een voeg als doorlopend wordt beschouwd
$\ell \in \mathbb{N}$	de bovenste laag
$M =$	$3W$

Variabelen

$x_b \in \mathbb{R}$	de horizontale positie van steen b
$s \in \mathbb{R}$	de horizontale verplaatsing van het patroon
$W_b =$	$\begin{cases} 1 & \text{als steen } b \text{ het patroon horizontaal doorbreekt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$W_b^s =$	$\begin{cases} 1 & \text{als } x_b + s \text{ buiten het basispatroon ligt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$W_b^{s2} =$	$\begin{cases} 1 & \text{als } b \text{ het patroon horizontaal doorbreekt in een onderlaag} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$W_c^{-\mu} =$	$\begin{cases} 1 & \text{als } x_c - \mu \text{ buiten het basispatroon ligt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$W_c^{\mu} =$	$\begin{cases} 1 & \text{als } x_c + \mu \text{ buiten het basispatroon ligt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$z_{bc} =$	$\begin{cases} 0 & \text{als steen } c \text{ zich rechts van steen } b \text{ bevindt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$z_{bc}^{(2)} =$	$\begin{cases} 0 & \text{als } c \text{ zich in zijn onderlaag rechts van } b \text{ die geen onderlaag heeft bevindt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$z_{cb}^{(2)} =$	$\begin{cases} 0 & \text{als } b \text{ zich in zijn onderlaag rechts van } c \text{ bevindt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$z_{bc}^{(3)} =$	$\begin{cases} 0 & \text{als } x_c \text{ minimaal een marge } \mu \text{ rechts van } x_b \text{ ligt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
	$\forall b y_{b\ell} = 0, \forall c y_{c\ell} = 1$
$z_{bc}^{(3)} =$	$\begin{cases} 0 & \text{als } x_c \text{ minimaal een marge } \mu \text{ rechts van } x_b + s - W_b^s W \text{ ligt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
	$\forall b y_{b0}^L = 1, \forall c y_{c\ell} = 1$
$z_{bc}^{(4)} =$	$\begin{cases} 0 & \text{als } x_b \text{ minimaal een marge } \mu \text{ rechts van } x_c \text{ ligt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
	$\forall b y_{b\ell} = 0, \forall c y_{c\ell} = 1$
$z_{bc}^{(4)} =$	$\begin{cases} 0 & \text{als } x_b + s - W_b^s W \text{ minimaal een marge } \mu \text{ rechts van } x_c \text{ ligt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
	$\forall b y_{b0}^L = 1, \forall c y_{c\ell} = 1$
$z_{cl}^{(5)} =$	$\begin{cases} 0 & \text{als de voeg op } x_c \text{ in laag } l \text{ wordt onderbroken} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
	$\forall c \in \mathfrak{B} y_{c\ell} = 1$

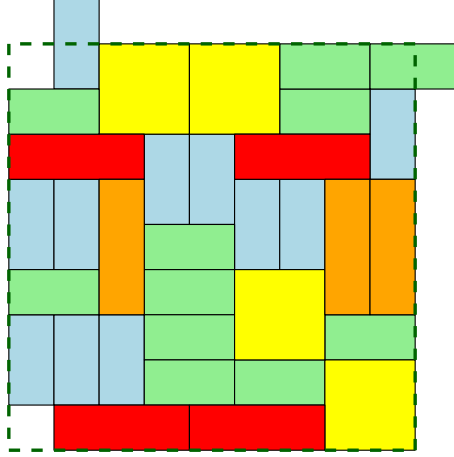
Geen doelfunctie

Voorwaarden

$$\begin{aligned}
& 0 \leq x_b \leq W - \epsilon & \forall b \in \mathfrak{B} \\
& 0 \leq x_b + w_b - W_b W \leq W & \forall b \in \mathfrak{B} \\
& 0 \leq x_b + s - W_b^s W \leq W & \forall b \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl}^L = 1 \\
& 0 \leq x_b + w_b + s - W_b^s W - W_b^{s2} W \leq W & \forall b \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl}^L = 1 \\
& 0 \leq x_c - \mu + W_c^{-\mu} W \leq W & \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1 \\
& 0 \leq x_c + \mu - W_c^\mu W \leq W & \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1 \\
\\
& Mz_{bc} + x_c \geq x_b + w_b - W_b W & \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl} = 1 \\
& z_{bc} + z_{cb} \leq 1 - W_b - W_c & \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl} = 1 \\
\\
& Mz_{bc}^{(2)} + x_c + s - W_c^s W \geq x_b + w_b - W_b W & \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl}^L = 1 \\
& Mz_{cb}^{(2)} + x_b - s + W_c^s W \geq x_c + w_c - W_c^{s2} W & \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl}^L = 1 \\
& z_{bc}^{(2)} + z_{cb}^{(2)} \leq 1 - W_b W - W_c^{s2} & \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl}^L = 1 \\
\\
& x_b \leq x_c - \mu + W_c^{-\mu} W + Mz_{bc}^{(3)} & \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1, \forall b \in \mathfrak{B} | y_{bl} = 0 \\
& x_b + Mz_{bc}^{(4)} \geq x_c + \mu - W_c^\mu W & \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1, \forall b \in \mathfrak{B} | y_{bl} = 0 \\
& z_{bc}^{(3)} + z_{bc}^{(4)} \leq 1 + 2z_{cl}^{(5)} - (W_b^{-\mu} + W_b^\mu) & \forall l \in \mathfrak{L}, \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1, \forall b \in \mathfrak{B} | y_{bl} = 0, y_{bl} = 1 \\
& x_b + s - W_b^s W \leq x_c - \mu + W_c^{-\mu} W + Mz_{bc}^{(3)} & \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1, \forall b \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl}^L = 1 \\
& x_b + s - W_b^s W + Mz_{bc}^{(4)} \geq x_c + \mu - W_c^\mu W & \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1, \forall b \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl}^L = 1 \\
& z_{bc}^{(3)} + z_{bc}^{(4)} \leq 1 + 2z_{cl}^{(5)} - (W_b^{-\mu} + W_b^\mu) & \forall l \in \mathfrak{L}, \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1, \forall b \in \mathfrak{B} | y_{bl}^L = 0 \text{ of } y_{bl}^L = 1 \\
& \sum_{l \in \mathfrak{L}} (1 - z_{cl}^{(5)}) \geq 1 & \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1
\end{aligned}$$

6 De Schoonheid van het Patroon

Een typisch door de twee fasen aanpak gegenereerd patroon ziet er als in figuur 12.



Figuur 12: Een patroon waarin stenen niet overlappen en elke voeg wordt onderbroken

Geen enkel paar stenen overlapt, en noch horizontale noch verticale voegen lopen door. Toch is het de vraag of het gegenereerde patroon mooi is. De schoonheid van een patroon is uiteraard erg subjectief en niet eenvoudig in wiskundige formules uit te drukken. Desalniettemin kunnen we in patronen bepaalde concrete eigenschappen vinden die een negatief aandeel hebben in de schoonheid van het patroon. In figuur 12 zijn 'clusters' van stenen van gelijke types te vinden. Bijvoorbeeld de vier groene stenen recht boven elkaar in het midden en de grote gele stenen bovenin naast elkaar. Over het algemeen vindt men een patroon mooier als stenen met gelijke types meer verspreid zijn. In deze subsectie geven we verschillende voorwaarden en doelfuncties om de spreiding van stenen met gelijke types te bevorderen.

6.1 Het Verticaal Verspreiden van Stenen

Zoals we in de probleemomschrijving van sectie 2 hebben beschreven, is één van onze doelen het verspreiden van de stenen. Omdat het bedekken van een maximaal oppervlakte onze prioriteit is, vervangen we de eerste fase door twee nieuwe fasen, 1.1 en 1.2. In fase 1.1 zoeken we de maximaal te bedekken oppervlakte O . In fase 1.2 kiezen we de lagen van de stenen zo, dat stenen met gelijke soorten zo goed mogelijk over de lagen verspreid worden, waarbij oppervlakte O gevuld wordt. Het model in fase 1.1 is dus eigenlijk precies gelijk aan het model dat we in sectie 3.2.3 hebben beschreven. Voor fase 1.2 gebruiken we wederom dezelfde beslissingsvariabelen, parameters en voorwaarden als in het model van sectie 3.2.3, alleen nu voegen we een extra voorwaarde toe, die ervoor zorgt dat het maximale oppervlakte O behaald wordt:

$$\sum_{i \in \mathfrak{T}} \sum_{l \in \mathcal{L}} y_{il} w_i h_i = O \quad (47)$$

Aangezien we nu hoe dan ook het maximale oppervlakte behalen, kunnen we met een nieuwe doelfunctie de stenen verspreiden. Hiervoor gebruiken we een doelfunctie die de som van de kwadraten van de variabelen y_{il} minimaliseert. Dit werk als volgt. Stel dat er een oplossing bestaat met $y_{il} = n + 1$ en $y_{ik} = n - 1$. In dit geval leveren deze variabelen een bijdrage van $(n + 1)^2 + (n - 1)^2 = 2n^2 + 2$ aan de doelfunctie, terwijl we door de stenen te verspreiden met $y_{il} = n$ en $y_{ik} = n$ deze een bijdrage van slechts $2n^2$ leveren aan de doelfunctie. Door de som van de kwadraten te minimaliseren, verspreiden we de stenen:

$$\min \sum_{i \in T} \sum_{l \in \mathcal{L}} y_{il}^2 \quad (48)$$

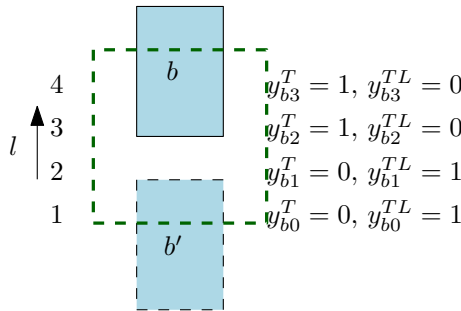
Het minimaliseren van de som van de kwadraten zorgt ervoor dat zo min mogelijk stenen met gelijke types in precies dezelfde lagen terecht komen. Daarentegen wordt er geen rekening gehouden met stenen die slechts 1 of 2 lagen van elkaar verwijderd zijn. Ook wordt er slechts op de basislaag van de stenen gelet. Bij de volgende doelfunctie wordt wel rekening gehouden met de afstand tussen de lagen waarin stenen van gelijke types worden geplaatst. Voor $k \geq l$ is het aantal lagen tussen k en l gelijk aan $\min(k - l, l - k + L)$. Omdat we willen dat de stenen zo ver mogelijk uit elkaar liggen, geven we elke combinatie $y_{il}y_{ik}$ een gewicht mee dat omgekeerd evenredig is aan de afstand tussen de stenen: $-\min(k - l, l - k + L)$

$$\min \sum_{i \in T} \sum_{l \in \mathcal{L}} \sum_{k \in \mathcal{L} | k \geq l} -\min(k - l, l - k + L) y_{il} y_{ik} \quad (49)$$

Merk op dat beide doelfuncties kwadratisch zijn, waardoor ons model niet meer met standaard MILP-technieken opgelost kan worden en de rekentijd groter is. Echter blijkt dat in de praktijk de rekentijd in de tweede fase dusdanig groter is, dat een kwadratische doelfunctie in de eerste fase geen beperkende factor is.

6.2 Clusters Beperken

In sectie 6.1 hebben we de stenen verticaal verspreid met een kwadratische doelfunctie. Het is een minder goed plan om de stenen horizontaal te verspreiden met een kwadratische doelfunctie, omdat het horizontaal plaatsen van stenen gebeurt in de tweede fase. Omdat we hierbij veel meer binaire variabelen gebruiken, zal een kwadratische doelfunctie de rekentijd dusdanig verhogen dat het met de hand sneller gaat. Gelukkig kunnen we de stenen ook verspreiden door het aantal stenen van een gelijk type dat elkaar raakt te beperken. Hiervoor moeten we eerst raken definiëren. Twee stenen b en c *raken elkaar* als ze horizontaal of verticaal een gemeenschappelijke zijde hebben, of als ze diagonaal een gemeenschappelijk punt hebben. Stenen b en c raken elkaar dus niet als er boven, onder en in de lagen van steen b een laag is waar c niet in zit. Om dit te omschrijven in lineaire voorwaarden, creëren we na de eerste fase voor elke steen en laag binaire raaklaag parameters y_{bl}^T en y_{bl}^{LT} . $y_{bl}^T = 1$ voor alle lagen l waarin b zich bevindt zonder het patroon te doorbreken en één laag boven deze lagen mits ook deze laag het patroon niet doorbreekt en 0 voor andere lagen. $y_{bl}^{LT} = 1$ voor alle lagen waarin b zich bevindt na het patroon te hebben doorbroken en één laag daarboven en 0 voor andere lagen. Een verduidelijking van deze variabelen is te zien in figuur 13



Figuur 13: De lagen, onderlagen, raaklagen en raakonderlagen van steen b

We introduceren de geheeltallige parameter $T_i \in \mathbb{N}$. We willen dat een steen van type i zo min mogelijk meer dan T_i stenen van hetzelfde type raakt. Hierbij introduceren we een positieve geheeltallige excess variabele $\sigma_b \in \mathbb{N}_+$ die aangeeft hoeveel stenen van hetzelfde type i een steen b meer raakt dan T_i .

We gebruiken voorwaarden op een soortgelijke manier als voor het voorkomen van overlap als in de tweede fase van sectie 4. Er zijn alleen drie verschillen. Het eerste verschil is dat we nu kijken naar stenen van gelijke types die een raaklaag gemeenschappelijk hebben. Een tweede verschil is dat er nog een extra ruimte ϵ tussen de stenen moet, zodat ze elkaar daadwerkelijk niet raken. Hiervoor gebruiken we $\epsilon = \text{GGD}(W, w_1, w_2, \dots)$

Het is mogelijk dat $x_b + w_b + \epsilon$ buiten het basispatroon ligt. Daarom introduceren we de volgende binaire

variabele.

$$W_b^T = \begin{cases} 1 & \text{als } x_b + w_b + \epsilon \text{ buiten het basispatroon ligt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (50)$$

$$(51)$$

Dit leidt tot de volgende voorwaarde.

$$0 \leq x_b + w_b + \epsilon - W_b^T W \leq W \quad \forall b \in \mathfrak{B} \quad (52)$$

$$(53)$$

Een derde verschil is dat we raken in tegenstelling tot overlap niet geheel verbieden. In plaats daarvan is ons doel dat een steen van type i zo min mogelijk meer dan T_i stenen van hetzelfde type raakt. Hiervoor introduceren we de binaire variabele $z_{cb}^{(6)}$ die aangeeft of steen b steen c van rechts raakt.

$$z_{cb}^{(6)} = \begin{cases} 0 & \text{als } b \text{ } c \text{ niet van rechts raakt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (54)$$

We introduceren tevens de binaire variabele $z_{cb}^{(7)}$ die aangeeft of stenen b en c elkaar raken.

$$z_{cb}^{(7)} = \begin{cases} 0 & \text{als } b \text{ en } c \text{ elkaar niet raken} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}. \quad (55)$$

Dit leidt analoog aan (23) en (24) tot de volgende voorwaarden:

$$Mz_{bc}^{(6)} + x_c - W_c W \geq x_b + w_b + \epsilon - W_b^T \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in L \text{ s.t. } y_{bl}^T = y_{cl}^T = 1, t_b = t_c \quad (56)$$

$$z_{bc}^{(6)} + z_{cb}^{(6)} \leq 1 + z_{bc}^{(7)} - W_c^T - W_c^T \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in L \text{ s.t. } y_{bl}^T = y_{cl}^T = 1, t_b = t_c \quad (57)$$

Voor stenen c met een onderlaag introduceren de binaire parameter W_c^{Ts}

$$W_c^{Ts} = \begin{cases} 1 & \text{als } x_c + w_c + s - W_c^s W + \epsilon \text{ buiten het basispatroon ligt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (58)$$

$$(59)$$

$$0 \leq x_c + w_c + s + \epsilon - W_c^s W - W_c^{Ts} W \leq W \quad \forall c \in \mathfrak{B} | \exists l \in L y_{cl}^{TL} = 1 \quad (60)$$

We introduceren de binaire variabele $z_{cb}^{(8)}$ die aangeeft of steen b in zijn onderlaag steen c van rechts raakt.

$$z_{cb}^{(8)} = \begin{cases} 0 & \text{als } b \text{ } c \text{ niet van rechts raakt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (61)$$

Dit leidt tot de volgende voorwaarden:

$$x_c + s - W_c^s \geq x_b + w_b + \epsilon - W_b^T W - Mz_{bc}^{(8)} \quad \forall b \neq c \in B | \exists l \in L \text{ s.t. } y_{bl}^T = y_{cl}^{TL} = 1, t_b = t_c \quad (62)$$

$$Mz_{cb}^{(8)} + x_b \geq x_c + w_c + s + \epsilon - W_c^s W - W_c^{Ts} W \quad \forall b \neq c \in B | \exists l \in L \text{ s.t. } y_{bl}^T = y_{cl}^{TL} = 1, t_b = t_c \quad (63)$$

$$z_{bc}^{(8)} + z_{cb}^{(8)} \leq 1 - W_c^{Ts} - W_b + z_{bc}^{(7)} + z_{cb}^{(7)} \quad \forall b \neq c \in B | \exists l \in L \text{ s.t. } y_{bl}^T = y_{cl}^{TL} = 1, t_b = t_c \quad (64)$$

Nu kunnen we eenvoudig tellen hoeveel stenen van hetzelfde type elke steen raakt.

$$\sum_{c \in B | t_c = i} z_{bc}^{(7)} \leq T_i + \sigma_b \forall i \in \mathfrak{T}, \forall b \in \mathfrak{B} | t_b = i \quad (65)$$

Tenslotte willen we zoals gezegd het aantal stenen σ_b dat meer wordt geraakt dan $\leq T_i$ minimaliseren. Hiervoor gebruiken we de volgende doelfunctie:

$$\min \sum_{b \in \mathfrak{B}} \sigma_b$$

6.3 Het Vershoven Cyclische Model Met Onderbreken, Kwadratisch lagen kiezen en Clusters beperken

Met de bovenstaande parameters, variabelen en voorwaarden ziet het model er als volgt uit.

Fase 1.1:

Parameters

$w_i \in \mathbb{N}$	de breedte van steen van type i
$h_i \in \mathbb{N}$	het aantal lagen van steen van type i
$W \in \mathbb{N}$	de breedte van het patroon
$L \in \mathbb{N}$	het aantal lagen in het patroon
$u_i \in \mathbb{N}$	het maximaal aantal te plaatsen stenen van type i
$l_i \in \mathbb{N}$	het minimaal aantal te plaatsen stenen van type i
$D_{iml} =$	$\begin{cases} 1 & m - l \mod L \leq h_i - 1 \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$D'_{iml} =$	$\begin{cases} 1 & m - l - 1 \mod L \leq h_i - 2 \\ 0 & \text{in andere gevallen.} \end{cases}$

Variabelen

$y_{li} \in \mathbb{N}$	het aantal stenen van type i met basislaag l
-------------------------	--

Doelfunctie

$$\max \sum_{i \in \mathfrak{T}} \sum_{l \in \mathfrak{L}} y_{li} w_i h_i$$

Fase 1.2:

Parameters

$w_i \in \mathbb{N}$	de breedte van steen van type i
$h_i \in \mathbb{N}$	het aantal lagen van steen van type i
$W \in \mathbb{N}$	de breedte van het patroon
$L \in \mathbb{N}$	het aantal lagen in het patroon
$u_i \in \mathbb{N}$	het maximaal aantal te plaatsen stenen van type i
$l_i \in \mathbb{N}$	het minimaal aantal te plaatsen stenen van type i
$D_{iml} =$	$\begin{cases} 1 & m - l \bmod L \leq h_i - 1 \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$D'_{iml} =$	$\begin{cases} 1 & m - l - 1 \bmod L \leq h_i - 2 \\ 0 & \text{in andere gevallen.} \end{cases}$
$O \in \mathbb{R}$	de maximaal te bedekken oppervlakte berekend in fase 1.1

Variabelen

$y_{li} \in \mathbb{N}$	het aantal stenen van type i met basislaag l
-------------------------	--

Doelfunctie

$$\min \sum_{i \in T} \sum_{l \in \mathcal{L}} y_{il}^2$$

Voorwaarden

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathcal{L}, i \in \mathcal{T}} D_{ilm} w_i y_{li} &\leq W & \forall m \in \mathcal{L} \\ \sum_{i \in T, l \in L} D'_{iml} y_{li} &\geq 1 & \forall m \in \mathcal{L} \\ \sum_{i \in \mathcal{T}} \sum_{l \in \mathcal{L}} y_{li} w_i h_i &= O \end{aligned}$$

Fase 2:

Parameters

$w_b \in \mathbb{N}$	de breedte van steen b
$y_{bl} =$	$\begin{cases} 1 & \text{als steen } b \text{ zich (onder andere) in laag } l \text{ bevindt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$y_{bl}^L =$	$\begin{cases} 1 & \text{als steen } b \text{ zich (onder andere) in onderlaag } l \text{ bevindt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$y_{bl}^T =$	$\begin{cases} 1 & \text{als steen } b \text{ zich (onder andere) in raaklaag } l \text{ bevindt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$y_{bl}^{TL} =$	$\begin{cases} 1 & \text{als steen } b \text{ zich (onder andere) in onderraaklaag } l \text{ bevindt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$\epsilon =$	$\text{GGD}(W, w_1, w_2, \dots)$
$\mu \in \mathbb{R}$	de marge waarbinnen een voeg als doorlopend wordt beschouwd
$\ell \in \mathbb{N}$	de bovenste laag
$M =$	$3W$
$T_i \in \mathbb{N}$	het aantal stenen van gelijk type dat een steen van type i mag raken

Variabelen

$x_b \in \mathbb{R}$	de horizontale positie van steen b
$s \in \mathbb{R}$	de horizontale verplaatsing van het patroon
$\sigma_b \in \mathbb{N}_+$	het aantal stenen van hetzelfde type i dat een steen b meer raakt dan T_i
$W_b =$	$\begin{cases} 1 & \text{als steen } b \text{ het patroon horizontaal doorbreekt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$W_b^s =$	$\begin{cases} 1 & \text{als } x_b + s \text{ buiten het basispatroon ligt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$W_b^{s2} =$	$\begin{cases} 1 & \text{als } b \text{ het patroon horizontaal doorbreekt in een onderlaag} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$W_c^{-\mu} =$	$\begin{cases} 1 & \text{als } x_c - \mu \text{ buiten het basispatroon ligt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$W_c^{\mu} =$	$\begin{cases} 1 & \text{als } x_c + \mu \text{ buiten het basispatroon ligt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$W_b^T =$	$\begin{cases} 1 & \text{als } x_b + w_b + \epsilon \text{ buiten het basispatroon ligt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$W_b^{Ts} =$	$\begin{cases} 1 & \text{als } x_b + w_b + s - W_b^s W + \epsilon \text{ buiten het basispatroon ligt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$z_{bc} =$	$\begin{cases} 0 & \text{als steen } c \text{ zich rechts van steen } b \text{ bevindt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$z_{bc}^{(2)} =$	$\begin{cases} 0 & \text{als } c \text{ zich in zijn onderlaag rechts van } b \text{ die geen onderlaag heeft bevindt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$z_{cb}^{(2)} =$	$\begin{cases} 0 & \text{als } b \text{ zich in zijn onderlaag rechts van } c \text{ bevindt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$z_{bc}^{(3)} =$	$\begin{cases} 0 & \text{als } x_c \text{ minimaal een marge } \mu \text{ rechts van } x_b + s - W_b^s W \text{ ligt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
	$\forall b y_{b0}^L = 1, \forall c y_{c\ell} = 1$
$z_{bc}^{(4)} =$	$\begin{cases} 0 & \text{als } x_b \text{ minimaal een marge } \mu \text{ rechts van } x_c \text{ ligt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
	$\forall b y_{b\ell} = 0, \forall c y_{c\ell} = 1$
$z_{bc}^{(4)} =$	$\begin{cases} 0 & \text{als } x_b + s - W_b^s W \text{ minimaal een marge } \mu \text{ rechts van } x_c \text{ ligt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
	$\forall b y_{b0}^L = 1, \forall c y_{c\ell} = 1$
$z_{cl}^{(5)} =$	$\begin{cases} 0 & \text{als de voeg op } x_c \text{ in laag } l \text{ wordt onderbroken} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$z_{bc}^{(6)} =$	$\begin{cases} 0 & \text{als } c \text{ } b \text{ van rechts raakt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$z_{bc}^{(8)} =$	$\begin{cases} 0 & \text{als } c \text{ } b \text{ in een onderlaag van rechts raakt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$
$z_{cb}^{(7)} =$	$\begin{cases} 0 & \text{als } b \text{ en } c \text{ elkaar raken} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases}$

$$\min \sum_{b \in \mathfrak{B}} \sigma_b$$

Voorwaarden

$$\begin{aligned}
0 \leq x_b \leq W - \epsilon & \quad \forall b \in \mathfrak{B} \\
0 \leq x_b + w_b - W_b W \leq W & \quad \forall b \in \mathfrak{B} \\
0 \leq x_b + s - W_b^s W \leq W & \quad \forall b \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl}^L = 1 \\
0 \leq x_b + w_b + s - W_b^s W - W_b^{s2} W \leq W & \quad \forall b \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl}^L = 1 \\
0 \leq x_c - \mu + W_c^{-\mu} W \leq W & \quad \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1 \\
0 \leq x_c + \mu - W_c^\mu W \leq W & \quad \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1 \\
0 \leq x_b + w_b + \epsilon - W_b^T W \leq W & \quad \forall b \in \mathfrak{B} \\
0 \leq x_c + w_c + s + \epsilon - W_c^s W - W_c^{Ts} W \leq W & \quad \forall c \in \mathfrak{B} | \exists l \in L y_{cl}^{TL} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Mz_{bc} + x_c \geq x_b + w_b - W_b W & \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl} = 1 \\
z_{bc} + z_{cb} \leq 1 - W_b - W_c & \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Mz_{bc}^{(2)} + x_c + s - W_c^s W \geq x_b + w_b - W_b W & \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl}^L = 1 \\
Mz_{cb}^{(2)} + x_b - s + W_c^s W \geq x_c + w_c - W_c^{s2} W & \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl}^L = 1 \\
z_{bc}^{(2)} + z_{cb}^{(2)} \leq 1 - W_b W - W_c^{s2} & \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl} = y_{cl}^L = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_b \leq x_c - \mu + W_c^{-\mu} W + Mz_{bc}^{(3)} & \quad \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1, \forall b \in \mathfrak{B} | y_{bl} = 0 \\
x_b + Mz_{bc}^{(4)} \geq x_c + \mu - W_c^\mu W & \quad \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1, \forall b \in \mathfrak{B} | y_{bl} = 0 \\
z_{bc}^{(3)} + z_{bc}^{(4)} \leq 1 + 2z_{cl}^{(5)} - (W_b^{-\mu} + W_b^\mu) & \quad \forall l \in \mathfrak{L}, \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1, \forall b \in \mathfrak{B} | y_{bl} = 0, y_{bl} = 1 \\
x_b + s - W_b^s W \leq x_c - \mu + W_c^{-\mu} W + Mz_{bc}^{(3)} & \quad \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1, \forall b \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl}^L = 1 \\
x_b + s - W_b^s W + Mz_{bc}^{(4)} \geq x_c + \mu + W_c^\mu W & \quad \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1, \forall b \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} \text{ s.t. } y_{bl}^L = 1 \\
z_{bc}^{(3)} + z_{bc}^{(4)} \leq 1 + 2z_{cl}^{(5)} - (W_b^{-\mu} + W_b^\mu) & \quad \forall l \in \mathfrak{L}, \forall c \in \mathfrak{B} | y_{cl} = 1, \forall b \in \mathfrak{B} | y_{bl}^L = 0 \text{ of } y_{bl}^L = 1 \\
\sum_{l \in L} (1 - z_{cl}^{(5)}) \geq 1 & \quad \forall c \in \mathfrak{B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Mz_{bc}^{(6)} + x_c \geq x_b + w_b + \epsilon - W_b^T & \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in L \text{ s.t. } y_{bl}^T = y_{cl}^T = 1, t_b = t_c \\
z_{bc}^{(6)} + z_{cb}^{(6)} \leq 1 + z_{bc}^{(7)} - W_b^T - W_c^T & \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in L \text{ s.t. } y_{bl}^T = y_{cl}^T = 1, t_b = t_c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Mz_{bc}^{(8)} + x_c + s - W_c^s \geq x_b + w_b + \epsilon - W_b^T W & \quad \forall b \neq c \in B | \exists l \in L \text{ s.t. } y_{bl}^T = y_{cl}^{TL} = 1, t_b = t_c \\
Mz_{cb}^{(8)} + x_b \geq x_c + w_c + s + \epsilon - W_c^s W - W_c^{Ts} W & \quad \forall b \neq c \in B | \exists l \in L \text{ s.t. } y_{bl}^T = y_{cl}^{TL} = 1, t_b = t_c \\
z_{bc}^{(8)} + z_{cb}^{(8)} \leq 1 - W_c^{Ts} - W_b + z_{bc}^{(7)} + z_{cb}^{(7)} & \quad \forall b \neq c \in B | \exists l \in L \text{ s.t. } y_{bl}^T = y_{cl}^{TL} = 1, t_b = t_c
\end{aligned}$$

$$\sum_{c \in B | t_c = i} z_{bc}^{(7)} \leq T_i + \sigma_b \quad \forall i \in \mathfrak{T}, \forall b \in \mathfrak{B} | t_b = i$$

7 Alternatieve Modellen

Er zijn andere mogelijkheden om ons probleem te modelleren. We hebben de volgende varianten onderzocht.

7.1 Een Alternatief voor Cyclischeit

In sectie 4 hebben we het model cyclisch gemaakt door W_b toe te voegen. In plaats van deze variabele, kunnen we het model ook cyclisch maken door te eisen dat als $x_b > x_c + w_c$, moet gelden dat $x_c > x_b + w_b - W$. In dit geval mag de rechterzijde van een steen dus buiten het model vallen:

$$0 \leq x_b \leq W \quad \forall b \in \mathfrak{B} \quad (66)$$

$$Mz_{bc}^x + x_c \geq x_b + w_b \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} s.t. y_{bl} = y_{cl} = 1 \quad (67)$$

$$Mz_{bc}^x + x_b \geq x_c + w_c - W \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} s.t. y_{bl} = y_{cl} = 1 \quad (68)$$

$$z_{bc} + z_{cb} \leq 1 \quad \forall b \neq c \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathfrak{L} s.t. y_{bl} = y_{cl} = 1 \quad (69)$$

$$(70)$$

We hadden dit model aanvankelijk geïmplementeerd, maar bij de horizontale verplaatsing aan het model zagen we geen andere optie dan alsnog binaire variabelen W_b^s toe te voegen. Vandaar dat we in het gehele model met binaire variabelen hebben gewerkt.

7.2 Een Alternatief voor het Onderbreken van Verticale Voegen

Voor het onderbreken van verticale voegen, kijken we naar de linkerzijden van alle stenen in de bovenste laag, zoals beschreven in sectie 5. Aanvankelijk hadden we het onderbreken van verticale voegen op een eenvoudigere manier gemodelleerd, door een verzameling $\mathfrak{H} = [0, \dots, W - 1]$ van horizontale posities te definiëren en te eisen dat op elk van deze horizontale posities $h \in \mathfrak{H}$ een voeg wordt onderbroken. We introduceren we de volgende binaire parameters:

$$W_h^{-\mu} = \begin{cases} 1 & \text{als } h - \mu \text{ buiten het basispatroon ligt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (71)$$

$$W_h^{\mu} = \begin{cases} 1 & \text{als } h + \mu \text{ buiten het basispatroon ligt} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (72)$$

$$(73)$$

En we introduceren de volgende binaire variabelen:

$$z_{bh}^{(9)} = \begin{cases} 0 & \text{als } x_b \text{ minimaal een bepaalde marge } \mu \text{ links van } h \text{ ligt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (74)$$

$$z_{bh}^{(10)} = \begin{cases} 0 & \text{als } x_b \text{ minimaal een bepaalde marge } \mu \text{ rechts van } h \text{ ligt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (75)$$

$$z_{bh}^{(11)} = \begin{cases} 0 & \text{als de linkerzijde van } b \text{ in zijn onderlagen minimaal } \mu \text{ links van } h \text{ ligt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (76)$$

$$z_{bh}^{(12)} = \begin{cases} 0 & \text{als de linkerzijde van } b \text{ in zijn onderlagen minimaal } \mu \text{ rechts van } h \text{ ligt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (77)$$

$$z_{hl}^{(13)} = \begin{cases} 0 & \text{als de linkerzijde van geen enkele steen } b \text{ in laag } l \in \mathcal{L} \text{ minder dan } \mu \text{ van } h \text{ afligt} \\ 1 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (78)$$

In plaats van voorwaarden (37) tot en met (46) gebruiken we nu de volgende voorwaarden:

$$x_b \leq h - \mu + W_h^{-\mu} W + M z_{bh}^{(9)} \quad \forall h \in \mathfrak{H} \forall b \in \mathfrak{B} \quad (79)$$

$$x_b + M z_{bh}^{(10)} \geq h + \mu - W_h^{\mu} W \quad \forall h \in \mathfrak{H}, \forall b \in \mathfrak{B} \quad (80)$$

$$z_{bh}^{(9)} + z_{bh}^{(10)} \leq 1 + 2z_{hl}^{(13)} - (W_h^{-\mu} + W_h^{\mu}) \quad \forall l \in \mathcal{L}, \forall h \in \mathfrak{H}, \forall b \in \mathfrak{B} | y_{bl} = 1 \quad (81)$$

$$x_b + s - W_b^s W \leq x_c - \mu + W_h^{-\mu} W + M z_{bh}^{(11)} \quad \forall h \in \mathfrak{H}, \forall b \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathcal{L} \text{ s.t. } y_{bl}^L = 1 \quad (82)$$

$$x_b + s - W_b^s W \geq h + \mu + W_h^{\mu} W - M z_{bh}^{(12)} \quad \forall h \in \mathfrak{H}, \forall b \in \mathfrak{B} | \exists l \in \mathcal{L} \text{ s.t. } y_{bl}^L = 1 \quad (83)$$

$$z_{bh}^{(11)} + z_{bh}^{(12)} \leq 1 + 2z_{hl}^{(13)} - (W_h^{-\mu} + W_h^{\mu}) \quad \forall l \in \mathcal{L}, \forall h \in \mathfrak{H}, \forall b \in \mathfrak{B} | y_{bl}^L = 0 \quad (84)$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} (1 - z_{hl}^{(13)}) \geq 1 \quad \forall h \in \mathfrak{H} \quad (85)$$

Hoewel dit model een stuk simpeler oogt, zijn er veel meer binaire variabelen, met name als de stenen grote breedtes hebben. Het aantal horizontale posities is namelijk veel groter dan het aantal stenen in de bovenste laag.

7.3 Een Alternatief voor de Gehele Tweede Fase

Voor een variatie op ons model, gebaseerd op [2] introduceren we een verzameling $\mathfrak{H}$ van horizontale posities. In de tweede fase definiëren we in plaats van een continue variabele x_b , een binaire variabele x_{bh} voor elke horizontale positie $h \in \mathfrak{H}$, die aangeeft dat de linker onderhoek van steen $b \in \mathfrak{B}$ zich op horizontale positie h bevindt als $x_{bh} = 1$. Dit resulteert in een simpeler model. We definiëren de parameters $o_{bhh'}$ en $o_{bhh'}^L$ voor $b \in \mathfrak{B}, h \in \mathfrak{H}, h' \in \mathfrak{H}$ die respectievelijk aangeven dat een steen b zich (onder andere) op positie h' zou bevinden als zijn linker onderhoek zich op positie h bevindt als $o_{bhh'} = 1$ en dat een steen b die het de bovenkant van het patroon doorbreekt zich in een de onderste lagen (onder andere) op positie h' zou bevinden als zijn linker onderhoek zich op positie h bevindt als $o_{bhh'}^L = 1$. Dus $o_{bhh'} = 1$ voor

$$h \leq h' \leq h + w_b - 1 \cup h - W \leq h' \leq h + w_b - 1 - W \quad (86)$$

en $o_{bhh'} = 0$ in andere gevallen.

En $o_{bhh'}^L = 1$ voor

$$h + s \leq h' \leq h + s + w_b - 1 \cup \quad (87)$$

$$h - W \leq h' \leq h + w_b - 1 - W \cup \quad (88)$$

$$h - W \leq h' \leq h + w_b - 1 - W \quad (89)$$

en $o_{bhh'}^L = 0$ in andere gevallen.

Het is belangrijk dat we in deze vergelijkingen de horizontale positie waar steen b eindigt niet meerekenen. Nu kunnen we namelijk voorkomen dat stenen overlappen door te eisen dat elke horizontale positie in elke laag slechts door één steen wordt bedekt :

$$\sum_{h \in H} \left(\sum_{b \in B | z_{bl}=1} o_{bhh'} x_{bh} + \sum_{c \in B | z_{cl}^L=1} o_{bhh'}^L x_{bh} \right) \leq 1 \quad \forall h' \in \mathfrak{H}, \forall l \in \mathfrak{L} \quad (90)$$

Daarnaast moet elke steen precies éénmaal worden geplaatst:

$$\sum_{h \in H} x_{bh} = 1 \quad \forall b \in \mathfrak{B} \quad (91)$$

De voorwaarde dat elke voeg moet worden onderbroken is ook een stuk eenvoudiger te modelleren. Een voeg op een horizontale positie wordt onderbroken als op elke horizontale positie in tenminste één laag geen linker rand van een steen wordt geplaatst, dus als de som van de lengtes van alle stenen kleiner is dan de patroonhoogte H .

$$\sum_{b \in B} x_{bh} \left(\sum_{l \in L} z_{bl} + x_{b, h-s \bmod W} \sum_{l \in L} z_{bl}^L \right) \leq H - 1 \quad \forall h \in \mathfrak{H} \quad (92)$$

Voorkomen dat stenen van dezelfde types elkaar aanraken gaat op een soortgelijke manier als in model uit sectie 6. Analooog aan de lagen en raaklagen introduceren we nu de binaire parameter $o_{bhh'}^T$, die aangeeft dat een steen b op positie h positie h' raakt als $o_{bhh'}^T = 1$. Ook introduceren we de binaire parameter $o_{bhh'}^{TL}$, die aangeeft dat een steen b op positie h die de bovenkant van het patroon doorbreekt positie h' in de onderste lagen raakt als $o_{bhh'}^{TL} = 1$.

$$o_{bhh'}^T = \begin{cases} 1 & \text{als } h \leq h' \leq h + w_b \cup h - W \leq h' \leq h + w_b - W \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (93)$$

$$o_{bhh'}^{TL} = \begin{cases} 1 & \text{als } \begin{aligned} &h + s \leq h' \leq h + s + w_b \cup \\ &h - W \leq h' \leq h + w_b - W \cup \\ &h - W \leq h' \leq h + w_b - W \end{aligned} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (94)$$

We voorkomen clustering door te eisen dat in geen enkele laag twee stenen van gelijke types i elkaar raken als $T_i = 0$

$$\sum_{h \in \mathfrak{H}} \left(\sum_{b \in \mathfrak{B} | z_{bl}^T=1, t_b=i} o_{bhh'}^T x_{bh} + \sum_{c \in \mathfrak{B} | z_{cl}^{TL}=1} o_{bhh'}^{TL} x_{bh} \right) \leq 1 + T_i \quad \forall i \in \mathfrak{T}, \forall h' \in \mathfrak{H}, \forall l \in \mathfrak{L} \quad (95)$$

Helaas is het in dit model slechts mogelijk om aan te geven dat 0 of 1 stenen elkaar mogen raken met $T_i = 0$ respectievelijk $T_i = 1$. Om clusters van maximaal twee stenen toe te staan, moeten we vergelijkbare voorwaarden gebruiken aan die in 6. Een andere manier om stenen van gelijke types meer te spreiden die in plaats van, of in combinatie met de vorige voorwaarden gebruikt kan worden is door met een kwadratische doelfunctie de verdeling van stenen met gelijke types over horizontale posities te spreiden:

$$\min \sum_{t \in \mathfrak{T}} \sum_{h \in \mathfrak{H}} \sum_{b \in \mathfrak{B} | t_b=i} x_{bh}^2 \quad (96)$$

Voordelen van deze methode zijn dat de voorwaarden veel eenvoudiger zijn en dat de schoonheid bevorderd kan worden met een kwadratische doelfunctie. Een nadeel is dat er met name bij grote stenen en patronen erg veel horizontale posities zijn wat veel variabelen en voorwaarden tot gevolg heeft.

7.4 Een discrete horizontale verplaatsing

We hebben in sectie 4.2 kort genoemd dat het mogelijk is dat een horizontale verplaatsing van s tot gevolg heeft dat er minder voegen onderbroken hoeven te worden. Om dit duidelijk te maken introduceren we een verzameling $\mathfrak{H}$ van horizontale posities $[0, \dots, W-1]$. Stel, in een patroon met patroonbreedte $W = 8$ wordt de verticale voeg op horizontale positie 1 onderbroken. Bij een horizontale verplaatsing van bijvoorbeeld $s = 3$ worden in hogere patronen achtereenvolgens voegen op horizontale posities 1, 4, 7, 2, 5, 0, 3, 6, 1, 4, $\dots$ onderbroken. Echter, bij $s = 4$ worden slechts voegen op horizontale posities 4, 1, 4, 1, $\dots$ onderbroken. In dit geval moeten naast voegen op horizontale positie 1 ook voegen op horizontale posities (2 of 6), (3 of 7) en (4 of 0) worden onderbroken. De horizontale posities waar voegen onderbroken worden hangen dus af van de grootste gemeenschappelijke deler van de patroonbreedte W en de verplaatsing s . Omdat deze operatie niet lineair is in s is het onmogelijk deze eigenschap te modelleren met een continue s . Een mogelijke oplossing is om in plaats van een continue s de binaire variabelen $s_0, s_1, \dots, s_{W-1}$ toe te voegen, waarbij $s_x = 1$ een horizontale verplaatsing van x betekent. Omdat we slechts 1 horizontale verplaatsing hebben, geldt:

$$\sum_{x \in \mathfrak{H}} s_x = 1 \quad (97)$$

Nu kunnen we overal s vervangen door $\sum_{x \in \mathfrak{H}} s_x s$. Als de horizontale verplaatsing copriem is met de patroonbreedte W , dan hoeft er slechts 1 voeg onderbroken te worden. Anders creëren we $GGD(W, s)$ verzamelingen $V_n \subset \mathfrak{H}$ van $\frac{W}{GGD(W, s)}$ voegen op afstand $GGD(W, s)$ van elkaar. Zodra één voeg uit een verzamelingen wordt onderbroken, zullen in hogere patronen alle voegen uit deze verzameling worden onderbroken. Daarom hoeft er in elke verzameling slechts 1 voeg onderbroken te worden. We hebben besloten de horizontale verplaatsing continu te houden, omdat met name voor grote stenen, het aantal horizontale posities erg groot is, wat resulteert in een groot aantal binaire variabelen. Daarnaast zijn de voordelen van een discrete horizontale verplaatsing klein, omdat het in de praktijk niet moeilijk blijkt om alle voegen te onderbreken.

7.5 Variabele laaghoogten

In de praktijk is het mogelijk dat de verschillende lagen $l \in \mathfrak{L}$ verschillende hoogtes h_l hebben. Als dit het geval is, kunnen we niet meer zeggen dat een steentype i uit h_i lagen bestaat, aangezien dit aantal nu afhangt van de verschillende lagen. We zullen daarom in deze subsectie met h_i de hoogte van een steen van type i aangeven. Het gebruik van variabele laaghoogten heeft tot gevolg dat we in de eerste fase per steentype afzonderlijk moeten kijken in welke lagen m een steentype i met basislaag l zich bevindt. Een steen van steentype t met basislaag l bevindt zich ook in laag m voor $m > l$ als $h_i > \sum_{k=l}^{m-1} h_k$. Een steen van steentype t met basislaag l bevindt zich ook in onderlaag m voor $m < l$ (wat alleen kan als deze steen het patroon verticaal doorbreekt) als $h_i > \sum_{k=l}^{\ell} h_k + \sum_{k=0}^{m-1} h_k$. Daarom passen we D_{iml} als volgt aan:

$$D_{iml} = \begin{cases} 1 & m > l, h_i > \sum_{k=l}^{m-1} h_k \\ 1 & m = l \\ 1 & m < l, h_i > \sum_{k=l}^{\ell} h_k + \sum_{k=0}^{m-1} h_k \\ 0 & \text{in andere gevallen.} \end{cases}$$

Daarnaast kunnen we niet elk steentype in elke basislaag plaatsen. Als een steentype bijvoorbeeld hoogte 2 heeft, laag 1 heeft hoogte 1, en laag 2 hoogte 2, dan kan dit steentype niet laag 1 als basislaag hebben, omdat de bovenkant van een steen van dit type in het midden van laag 2 zou uitkomen. Een steentype i mag dus niet in basislaag l worden geplaatst als de bovenkant van een steen van type i in dit geval niet samenvalt met de onderkant van een andere laag m . Daarom voegen we de volgende voorwaarden toe:

$$y_{li} = 0 \forall l \in \mathcal{L}, i \in \mathcal{T}, \nexists k \in \mathcal{L} s.t. \sum_{k=l}^{m-1} h_k = h_i \text{ of } \sum_{k=l}^{\ell} h_k + \sum_{k=0}^{m-1} h_k = h_i \quad (98)$$

7.6 Gebroken stenen met negatieve breedte

In sectie 2 hebben we ons probleem eenvoudig omschreven door de lengten en breedte van voegen bij die van de stenen op te tellen. Verder hebben we de voegbreedte nergens meer genoemd. In de meeste gevallen is deze ook niet nodig, maar in de praktijk kan dit toch een probleem opleveren: Als we na de eerste fase de verzameling $\mathfrak{B}$ van stenen creëren, kan het zijn dat we een gebroken steen b creëren met een breedte w_b die kleiner is dan de voegbreedte w_v , wat in de praktijk inhoudt dat deze steen een negatieve breedte heeft. Om dit uit te sluiten, eisen we in fase 1 dat de ruimte die over is in een laag of groter dan of gelijk is aan de voegbreedte, of precies 0 is. Hiervoor gebruiken we een binaire variabele z_l .

$$z_l = \begin{cases} 1 & \text{als er in laag } l \text{ geen ruimte over is} \\ 0 & \text{in andere gevallen} \end{cases} \quad (99)$$

In plaats van voorwaarden 11 gebruiken we nu de volgende voorwaarden:

$$\sum_{l \in \mathcal{L}, i \in \mathcal{T}} D_{ilm} w_i y_{li} \leq W - w_v + w_v z_l \quad \forall m \in \mathcal{L} \quad (100)$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}, i \in \mathcal{T}} D_{ilm} w_i y_{li} \geq z_l W \quad \forall m \in \mathcal{L} \quad (101)$$

8 Complexiteit van het probleem

Hoewel onze methode prima werkt voor instanties met kleine hoeveelheden stenen, bestaan er instanties met grote hoeveelheden stenen, waarvoor onze methode niet binnen redelijke tijd een oplossing vindt. Echter ligt dit meer aan het probleem dan aan onze methode. In deze sectie laten we zien dat het probleem dusdanig complex is, dat er geen efficiënte oplosmethode bestaat. We doen dit door het probleem 'partitie', waarvan we weten dat dit probleem np-hard is, te reduceren tot ons probleem.

8.1 Reductie en partitie

Het partitie-probleem is als volgt: Gegeven is een verzameling S van gehele getallen $i_1, i_2, \dots, i_n$. Is S op te delen in twee disjuncte subverzamelingen S_1 en S_2 die S overdekken, zo dat $\sum_{i \in S_1} i_j = \sum_{i \in S_2} i_j$? We

weten van partitie dat er waarschijnlijk geen oplosmethode bestaat die dit probleem in polynomiale tijd oplost. Reductie werkt als volgt: Als we elke instantie van partitie kunnen oplossen door deze instantie te omschrijven als een instantie van ons probleem, dan kunnen we elke instantie van partitie oplossen met een oplosmethode van ons probleem. Omdat we weten dat partitie waarschijnlijk niet efficiënt op te lossen is, is ons probleem waarschijnlijk ook niet efficiënt op te lossen. Als we niet eisen dat alle voegen onderbroken moeten worden, is de reductie eenvoudig, en deze geven we in subsectie 8.2. Hoewel het eisen dat alle voegen onderbroken moeten worden het probleem waarschijnlijk niet eenvoudiger maakt, is dit niet triviaal, en misschien niet eens waar. Daarom geven we in subsectie 8.3 een reductie waarbij we wel eisen dat voegen onderbroken moeten worden.

8.2 Reductie zonder het onderbreken van voegen

Als we niet eisen dat alle voegen onderbroken hoeven te worden kunnen we partitie als volgt reduceren tot ons probleem. Voor elke instantie van partitie I_1 kunnen we een instantie van ons probleem I_2 creëren. Hiervoor nemen we een patroon bestaande uit 2 lagen met $W = \frac{1}{2} \sum_{i_j \in S} i_j$. Voor elk element

$i_j \in S$ creëren we een steentype t die 1 laag hoog is met breedte i_j en die precies 1 keer geplaatst moet worden $l_t = u_t = 1$. Nu is de som van de oppervlakten van de stenen precies gelijk aan de oppervlakte van het patroon.

Als er een oplossing bestaat voor I_2 , dan zijn alle stenen over de twee lagen zijn verdeeld. Er zijn geen gebroken stenen omdat de som van de oppervlaktes van de stenen gelijk is aan de oppervlakte van het patroon en alle stenen geplaatst moeten worden. Als we bij I_1 nu de breedtes van de stenen in de ene laag in S_1 stoppen en de breedtes van de stenen in de andere laag in S_2 , dan geeft dit een oplossing voor I_1 .

Als I_1 een oplossing heeft, dan kunnen we de stenen corresponderend met elementen uit S_1 in de ene laag plaatsen en stenen corresponderend met elementen uit S_2 in de andere laag. Omdat elke steen zich slechts in één laag bevindt, kunnen we alle stenen per laag achter elkaar plaatsen zonder dat er overlap plaatsvindt, en hebben we ook een oplossing voor I_2 probleem. Dus als I_2 geen oplossing heeft, zal I_1 ook geen oplossing hebben.

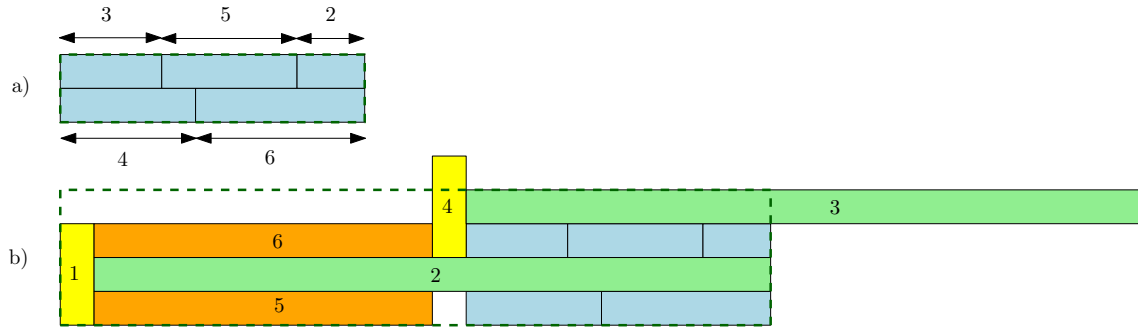
Een voorbeeld van een oplossing van I_2 waarbij S bestaat uit $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ is gegeven in figuur 14a

8.3 Reductie met het onderbreken van voegen

Als we wel eisen dat voegen onderbroken moeten worden, zijn voor een reductie extra stenen nodig die de voegen onderbreken. Daarnaast is mogen deze extra stenen niet leiden tot extra oplossingen die niet corresponderen met een partitie. We creëren onze nieuwe instantie I_3 als volgt:

We nemen een patroon bestaande uit 4 lagen met $W = \sum_{i_j \in S} i_j + 3$ zoals in figuur 14b. Voor elk element

$i_j \in S$ creëren we een steentype t die 1 laag hoog is met breedte i_j en die precies 1 keer geplaatst moet worden $l_t = u_t = 1$. Daarnaast creëren we een steentype bestaande uit 3 lagen met breedte 1



Figuur 14: Een oplossing van een instantie met stenen met breedtes 2,3,4,5 en 6

dat precies 2 keer geplaatst moet worden (in figuur 14b stenen 1 en 4), een steentype bestaande uit 1 laag met breedte $\sum_{i_j \in S} i_j + 2$ dat precies 2 keer geplaatst moet worden (stenen 2 en 3), en een steentype bestaande uit 1 laag met breedte $\frac{1}{2} \sum_{i_j \in S} i_j + 1$ dat precies 2 keer geplaatst moet worden (stenen 5 en 6).

Wegens symmetrie en de cycliciteit van het patroon, kunnen we steen 1 in lagen 0,1 en 2 plaatsen met de linkerrand op de linkerrand van het patroon. Nu kunnen stenen 2 en 3 niet in lagen 0 of 2, omdat dit tot doorlopende voegen leidt. Stenen 2 en 3 passen niet samen in één laag. Daarom plaatsen we de ene steen (steen 2) in laag 1 en de andere (steen 3) in laag 3. Omdat er in laag 1 geen plek meer is voor steen 4, plaatsen we deze in lagen 2,3 en onderlaag 0. Stenen 5 en 6 passen niet in lagen 1 en 3 en passen ook niet samen in één laag. Daarom moet één steen (steen 5) in laag 0 en één steen (steen 6) in laag 2. Door stenen 5 en 6 aan dezelfde kant tussen stenen 1 en 4 plaatsen, ontstaat aan de andere kant in zowel laag 0 als laag 2 een aaneengesloten ruimte die precies $\frac{1}{2} \sum_{i_j \in S} i_j$ breed is. Alle voegen worden onderbroken en

de voegen van alle stenen die we in deze open ruimtes plaatsen, worden onderbroken door stenen 2 en 3. Analooq aan het bewijs bij de reductie zonder het onderbreken van voegen kunnen we nu aantonen dat met een oplossing van I_3 ook een oplossing van I_1 te vinden is, en dat het ontbreken van een oplossing voor I_3 ook inhoudt dat I_1 geen oplossing heeft.

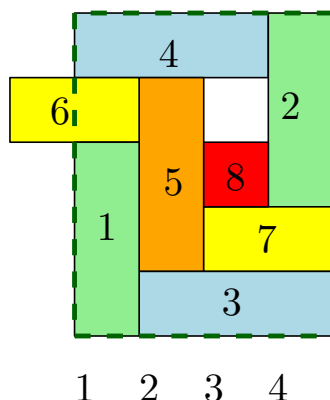
9 De Oplosbaarheid van de Tweede Stap

Een nadeel van de tweefasen aanpak is dat het mogelijk is dat de stenen in de eerste fase zo over de lagen worden verdeeld, dat er in de tweede fase geen oplossing mogelijk is, terwijl er door de stenen anders over de lagen te verdelen wel een oplossing mogelijk is. In dit hoofdstuk geven we voorbeelden van instanties waar er in de tweede fase geen oplossing mogelijk is en voorwaarden die voldoende zijn (maar niet noodzakelijk) om het bestaan van een oplossing in de tweede fase te garanderen.

Zelfs zonder de voorwaarde dat voegen helemaal moeten doorlopen zijn er voorbeelden van problemen die geen oplossing hebben.

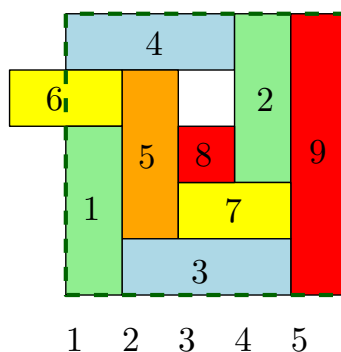
9.1 Een instantie zonder oplossing

Voor de eerste paar voorbeelden zullen we geen rekening houden met het onderbreken van voegen. In het eerste voorbeeld gaan we voor het gemak uit van een niet-cyclisch probleem: Een steen moet geheel binnen het basispatroon geplaatst worden. Zie figuur 15.



Figuur 15: Een noncyclisch voorbeeld waarin er in de tweede fase geen oplossing mogelijk is

Merk op dat qua oppervlakte elke laag groot genoeg is om de stenen er in te passen. Dit zou dus een mogelijke oplossing kunnen zijn van de eerste fase. We mogen dus de lagen van de stenen niet meer veranderen en moeten nu horizontale posities kiezen, zo dat alles past. Stenen 1,2,3 en 4 kunnen alleen op de manier zoals uitgebeeld in het figuur worden geplaatst (of gespiegeld). Vervolgens zijn er twee mogelijke horizontale posities voor steen 5, posities 2 en 3. Als we steen 5 op horizontale positie 2 plaatsen zoals in de figuur, dan is er geen plek voor steen 6. En als we steen 5 op horizontale positie 3 plaatsen, dan is er geen plek meer voor steen 7. Er is dus geen oplossing mogelijk. Met behulp van dit voorbeeld is het eenvoudig aan te tonen dat ook in het cyclische geval een voorbeeld is te verzinnen waarin geen oplossing mogelijk is, zie figuur 16

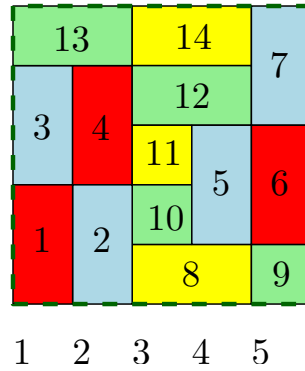


Figuur 16: Een cyclisch voorbeeld waarin er in de tweede fase geen oplossing mogelijk is

Door één steen toe te voegen die precies alle lagen vult (in dit voorbeeld steen 9) kunnen we voor elk niet-cyclisch probleem een equivalent cyclisch probleem creëren.

9.2 Een constructie voor instanties met stenen met maximaal twee lagen

Als in het noncyclische geval elke steen maximaal maximaal twee lagen hoog is, is er altijd een oplossing in de tweede fase. Deze oplossing is als volgt te construeren: plaats eerst alle stenen $b \in \mathfrak{B}$ met $\sum_{l \in L} y_{bl} = 2$, dus die in twee lagen geplaatst moeten worden. Plaats deze stenen met even basislaag zover mogelijk naar links (dus tegen de rand of tegen een al geplaatste steen) en plaats de stenen met een oneven basislaag zo ver mogelijk naar rechts. In elke laag is het nog niet gevulde deel nu helemaal aaneengesloten. Nu zijn alleen de stenen die 1 laag hoog zijn nog over, en door deze zo ver mogelijk naar links (of rechts) te plaatsen, past alles in deze aangeengesloten lege laag, zie ook figuur 17. Hier zijn eerst stenen 1,2,3 en 4 links geplaatst en stenen 5,6 en 7 rechts geplaatst, waarna de rest van de stenen er tussen in passen.



Figuur 17: Een oplossing voor stenen met maximale hoogte en breedte 2

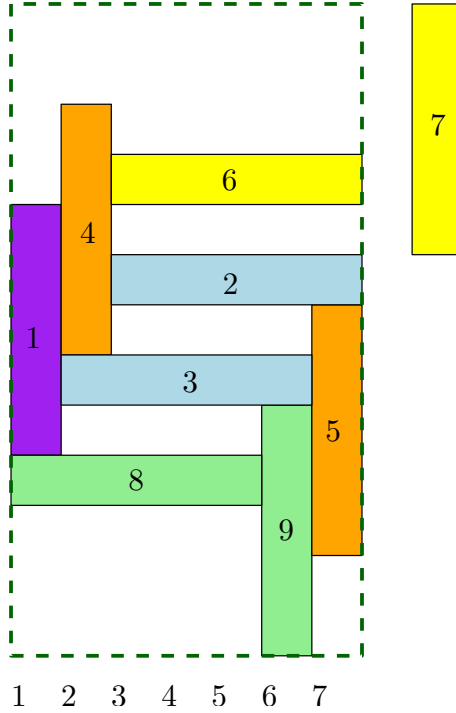
9.3 Tegenvoorbeelden voor instanties bestaande uit enkel stenen van $n \times 1$ en $1 \times n$

In het noncyclische geval waar elke steen $1 \times n$ of $n \times 1, n \geq 3$ is, is niet altijd een oplossing mogelijk. Voor bijvoorbeeld stenen van 1 bij 5 kunnen we het volgende tegenvoorbeeld construeren. Zie figuur 18. Steen 1 kan niet in kolom 3,4, of 5, Anders zou er geen ruimte zijn voor stenen 2 en 3. Als we steen 1 in kolom 2 of 6 zouden plaatsen, moeten stenen 2 en 3 dezelfde kolommen en is er nog maar 1 kolom over voor stenen 4 en 5 die dus zouden overlappen. Steen 1 moet dus aan de rand. Wegens symmetrie maakt het niet uit of hij in kolom 1 of 7 staat. We kiezen kolom 1.

Nu zijn er twee mogelijkheden voor stenen 4 en 5. (kolom 2 en 7 of andersom) Wederom wegens symmetrie maakt het geen verschil. We kiezen voor steen 4 kolom 2.

Nu is er slechts 1 plek voor steen 6. Na het plaatsen van deze steen is er geen plek meer voor steen 7. Er is dus geen oplossing mogelijk. Merk op dat als we voor steen 4 kolom 7 hadden gekozen, stenen 6 en 7 wel zouden passen, maar 8 en 9 niet.

Vergelijkbare tegenvoorbeelden zijn makkelijk te construeren voor grotere n . Voor 1×4 en 1×3 is het echter een stuk moeilijker. We geven ook tegenvoorbeeld voor 1×3 . Zie figuur 19. Er zijn slechts drie manieren waarop stenen 6,7 en 8 kunnen staan. In elk van deze manieren staan stenen 2.1, 2.2 en 2.3 naast elkaar. Er zijn slechts drie manieren waarop stenen 9,10 en 11 kunnen staan. In elk van deze manieren staan stenen 3.1, 3.2 en 3.3 naast elkaar. Omdat de stenen 2.1,2.2 en 2.3 en stenen 3.1,3.2 en 3.3 naast elkaar moeten staan, is de situatie met stenen 1,2.1,2.2,2.3,3.1,3.2,3.3,4 en 5 vergelijkbaar met die in het 1×5 voorbeeld. Steen 1 moet dus aan de rand en steen 5 of steen 4 moet aan de rand. Wegens symmetrie maakt het niet uit welke steen. We kiezen steen 5. Nu moeten stenen 9 en 10 in kolommen 1 en 5, en kan noch steen 12 noch steen 13 in kolommen 1 of 5. Hierdoor is er geen plek meer voor steen 14.



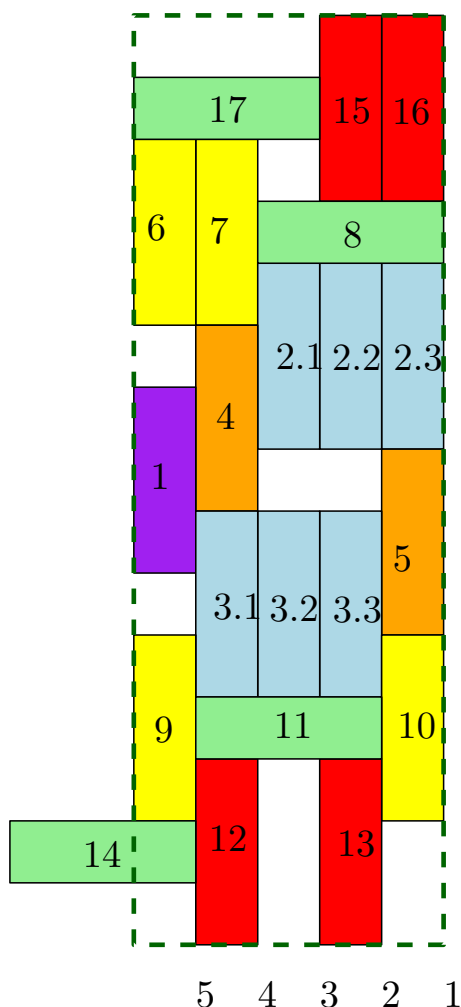
Figuur 18: Geen mogelijke oplossing in het noncyclische geval met stenen van 1x5

9.4 Een constructie voor cyclische instanties met stenen met maximaal drie lagen

In het cyclische geval hebben we, als alle stenen maximaal 3 lagen hoog zijn, een constructie. Sorteer alle stenen met twee of drie lagen eerst van kleinste basislaag naar grootste basislaag, dan van kleinste bovenste laag naar grootste bovenste laag. Plaats nu de eerste steen (het maakt niet uit op welke horizontale positie, aangezien het patroon toch cyclisch is). Plaats vervolgens de linkerzijde van elke steen $c \in \mathfrak{B}$ op de positie van de rechterzijde van de daarvoor geplaatste steen $b \in \mathfrak{B}$, $x_c = x_b + w_b$. Dit is altijd mogelijk. Stel namelijk dat een te plaatsen steen $c \in \mathfrak{B}$ zou overlappen met een andere steen $b \in \mathfrak{B}$, dan hebben deze stenen een laag $l \in \mathfrak{L}$ gemeenschappelijk. Wegens het sorteren zal elke steen $d_i \in \mathfrak{B}$ die tussen b en c geplaatst is een basislaag die lager is dan de basislaag van c hebben en een bovenste laag die hoger is dan de bovenste laag van b . Alle deze stenen zullen dus ook laag l gemeenschappelijk hebben. Omdat b en c overlappen en c later is geplaatst, moet de rechterkant van c minimaal en hele patroonlengte rechts van de linkerzijde van b zijn geplaatst. Dus $w_b + w_c + \sum_i w_{d_i} > W$

en dit kan niet, omdat in de eerste fase de stenen zo zijn verdeeld dat de som van de breedtes van alle stenen in laag l niet groter is dan W .

Omdat de stenen gesorteerd waren van kleinste onderste laag naar grootste onderste laag, zal elke steen b die later is geplaatst dan een steen c zich niet in een laag onder een laag van c bevinden. Omdat de stenen daarna van kleinste bovenste laag naar grootste bovenste laag zijn gesorteerd, en stenen alleen uit 2 of 3 lagen bestaan, zal elke zal elke steen c die eerder is geplaatst dan een steen b zich niet in een laag hoger dan een laag van b bevinden. Daarom is er, zodra alle stenen die twee of drie lagen hoog zijn geplaatst zijn, in elke laag een aaneengesloten open ruimte waar we de rest van de stenen (die uit 1 laag bestaan) plaatsen. Voor stenen die het patroon doorbreken geldt hetzelfde argument, maar dan met onderlagen. We moeten nu de horizontale verplaatsing wel zodanig kiezen dat de laatst geplaatste steen die het patroon doorbreekt in zijn onderlaag direct links van de eerst geplaatste steen zit. Deze constructie is dus alleen mogelijk als we werken met een horizontale verplaatsing, of als het patroon niet verticaal wordt doorbroken. Deze constructie is uitgebeeld in figuur 20. Eerst worden stenen 1 tot en met 7 gesorteert en geplaatst. Steen 7 doorbreekt het patroon horizontaal en een horizontale verplaatsing $s = 3$ zorgt dat steen 7 in zijn onderlaag direct links van steen 1 zit. Vervolgens zijn er in elke laag aaneengesloten open ruimtes en kunnen we stenen 8,9,10 en 11 plaatsen.

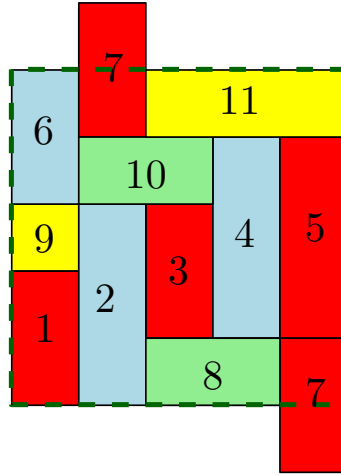


Figuur 19: Geen mogelijke oplossing in het noncyclische geval met stenen van 1×3

9.5 Oplossingen als voegen onderbroken moeten worden

Als we wel in acht nemen dat elke voeg onderbroken moet worden, vallen er oplossingen af. Zonder horizontale verplaatsing is er in een cyclisch 3×3 of kleiner patroon is helemaal geen oplossing mogelijk. We geven hier het bewijs voor het 3×3 geval. Er kunnen geen stenen van lengte of breedte drie worden gebruikt. Als we dit namelijk wel doen, is de zijde van 3 een doorlopende voeg. Er zijn 3 horizontale en 3 verticale voegen die ergens moeten worden onderbroken. Een steen van 1×2 of 2×1 onderbreekt 1 voeg en een steen van 2×2 onderbreekt 2 voegen. Elke voeg die wordt onderbroken kost dus een oppervlakte van 2. Met een oppervlakte van 9 kunnen we dus geen 6 voegen onderbreken. Voor de patronen kleiner dan 3×3 is het bewijs eenvoudiger.

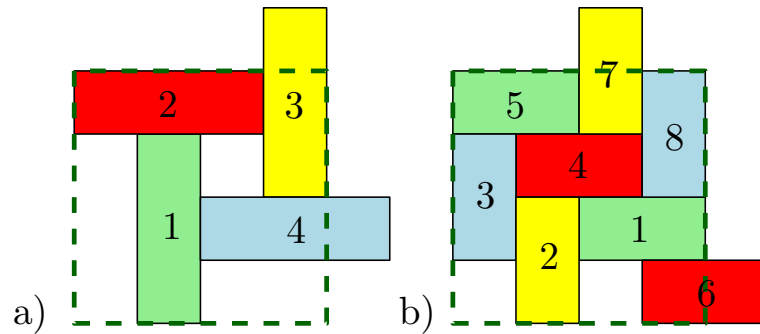
In een cyclisch 4×4 patroon zijn er precies 2 oplossingen mogelijk, spiegelingen en verplaatsingen uitgezonderd. Deze oplossingen zijn te zien in figuur 21. We tonen als volgt aan dat er niet meer oplossingen mogelijk zijn. We kunnen geen stenen van 1×4 gebruiken, omdat er aan de lange zijde van deze stenen zich een doorlopende voeg bevindt. Stenen van 1×1 onderbreken geen voeg, dus voor elke oplossing met een steen van 1×1 kunnen we ook een oplossing vinden waarin we deze stenen weglaten. We hoeven dus slechts te kijken naar stenen van 1×2 en 1×3 . Zie figuur 21a. Stel dat we steen 1 van 1×3 plaatsen. In dit geval moeten de voegen boven en onder de lange zijde van deze steen nog worden onderbroken. Dit kan alleen door nog een steen (steen 2) van 1×3 te plaatsen. Voor deze steen geldt hetzelfde, dus is nog een steen (steen 3) van 1×3 nodig. Tenslotte moeten we de voegen onder en boven steen 3 onderbreken met steen 4. Zoals in figuur 21a te zien is worden de voegen aan de lange zijdes van steen 4 onderbroken door steen 1. Na het plaatsen van steen 1 werd elke steen op 1 positie gedwongen.



Figuur 20: Een cyclische oplossing voor stenen met maximale hoogte en breedte 3

Merk op dat er geen ruimte meer is voor een steen van 1×2 . Er is dus slechts 1 mogelijke oplossing waarin stenen van 1×3 voorkomen, en hierin komen geen stenen van 1×2 voor. Dit houdt in dat, als er een oplossing is met stenen van 1×2 , hier dus ook geen stenen van 1×3 in voorkomen.

Zie figuur 21b. Stel dat we steen 1 van 1×2 plaatsen. In dit geval moeten de voegen boven en onder de lange zijde van deze steen nog worden onderbroken. Omdat we geen stenen van 1×3 kunnen gebruiken, kan dit alleen door nog twee stenen (2 en 3) van 1×2 te plaatsen. Voor deze steen geldt hetzelfde, dus plaatsen we stenen 4 en 5 om de voegen aan de lange zijde van steen 2 te onderbreken en plaatsen we steen 6, die samen met steen 5 de voegen aan de lange zijde van steen 3 onderbreekt. Tenslotte volstaan stenen 7 en 8 om samen met stenen 2 en 3 de voegen aan de lange zijdes van stenen 4, 5 en 6 te onderbreken. Na het plaatsen van steen 1 werd elke steen op 1 positie gedwongen, spiegelingen en verplaatsingen van alle stenen uitgezonderd. Merk op dat het hele patroon gevuld is. Er is dus slechts 1 mogelijke oplossing waarin stenen van 1×2 voorkomen. Er zijn dus precies twee oplossingen.



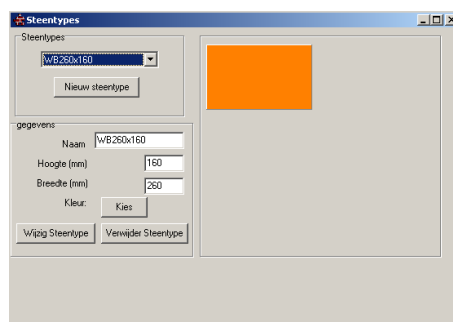
Figuur 21: Twee oplossingen voor een cyclisch 4×4 patroon waarbij alle voegen worden onderbroken

10 De Applicatie

Om de in dit verslag beschreven modellen toe te passen hebben we in delphi een applicatie, 'Patternbuilder' geschreven. Patternbuilder kan instanties invoeren, laden en opslaan in een Microsoft Access database. Daarnaast kan Patternbuilder voor elke instantie het juiste MILP opstellen en deze laten oplossen door de solver CPLEX 12.1. In dit hoofdstuk beschrijven we de mogelijkheden van Patternbuilder.

10.1 Invoerschermen

Patternbuilder heeft twee invoerschermen. In het steentypesinvoerscherm (zie figuur22) worden de breedte, hoogte, naam en kleur van steentypes ingevoerd. Merk op dat andere parameters, zoals het minimaal aantal te gebruiken stenen per type kunnen verschillen per patroon, dus deze worden niet ingevoerd met het steentypesinvoerscherm. Op deze manier kunnen steentypes worden gebruikt voor verschillende patronen.



Figuur 22: Het steentypesinvoerscherm

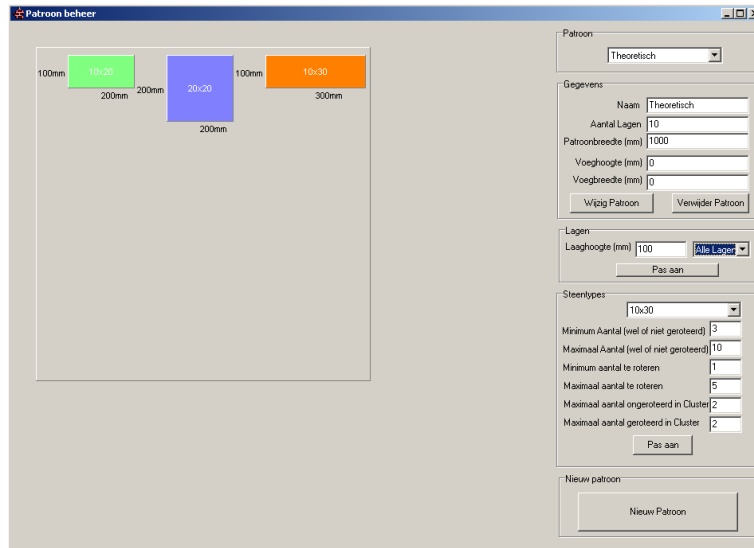
In het patroneninvoerscherm (zie figuur23) kunnen worden de breedte, aantal lagen, hoogte per laag en de hoogte en breedte van voegen van patronen ingevoerd. Het is mogelijk om afzonderlijke lagen verschillende hoogtes te geven, zoals beschreven in sectie 7.5. Daarnaast kan nu per steentype i worden ingevoerd hoeveel stenen van type i er minimaal en maximaal in het patroon mogen worden geplaatst, hoeveel stenen er van type i minimaal en maximaal mogen worden geroteerd (waarbij voor de applicatie een geroteerd steentype i als nieuw steentype j wordt beschouwd en het aantal stenen van gelijk type dat een steen van type i of j mag raken. Het patroon en alle steentypes waarvan er tenminste maximaal 1 steen moet worden geplaatst, worden in de juiste verhouding weergegeven.

10.2 Het Hoofdscherm

In het hoofdscherm (zie figuur24) kunnen opgeslagen patronen worden geladen. Geladen patronen waar nog geen oplossing voor is gevonden worden op dezelfde manier weergegeven als in het patroneninvoerscherm.

10.2.1 Oplosknoppen

Om patternbuilder een oplossing te laten zoeken zijn er drie knoppen, die corresponderen met de drie fases. Door op de 'Plaats stenen'-knop te drukken creëert Patternbuilder voor elk steentype dat minimaal één keer geroteerd kan worden een nieuw steentype, zoals beschreven in sectie 3.2.2 beschreven. Vervolgens controleert Patternbuilder eerst welke stenen niet in een geheel aantal lagen passen en geeft aan



Figuur 23: Het patroneninvoerscherm

voor welke stenen dit geldt. Als alle stenen in een geheel aantal lagen passen wordt een MILP voor fase 1 opgesteld en opgelost. Tenslotte worden de stenen in de juiste lagen weergegeven in de patroondisplay. Merk op dat het hierbij mogelijk is dat de stenen overlappen.

Als vervolgens op de 'Verspreid stenen'-knop wordt gedrukt, wordt met het model van fase 1.2 uit sectie 6.1 een oplossing gezocht waarbij dezelfde oppervlakte wordt gevuld met ongebroken stenen, maar de stenen beter over het patroon verspreid zijn. Hierbij gebruiken we doelfunctie 48. Daarna wordt een verzameling stenen gecreëerd, zoals beschreven in sectie 3.2.4.

Met de 'Plaats stenen'-knop wordt een MILP voor fase 2 opgesteld en opgelost. Daarna worden de stenen op de juiste positie in de patroondisplay weergegeven, zoals te zien is in figuur 24. Stenen die het patroon horizontaal doorbreken worden zowel links als rechts weergegeven en stenen die het patroon verticaal doorbreken worden zowel onder als boven weergegeven. Voor elke knop geldt, dat Patternbuilder een bericht geeft of binnen de beschikbare tijd een oplossing is gevonden en of deze oplossing al dan niet gegarandeerd optimaal is.

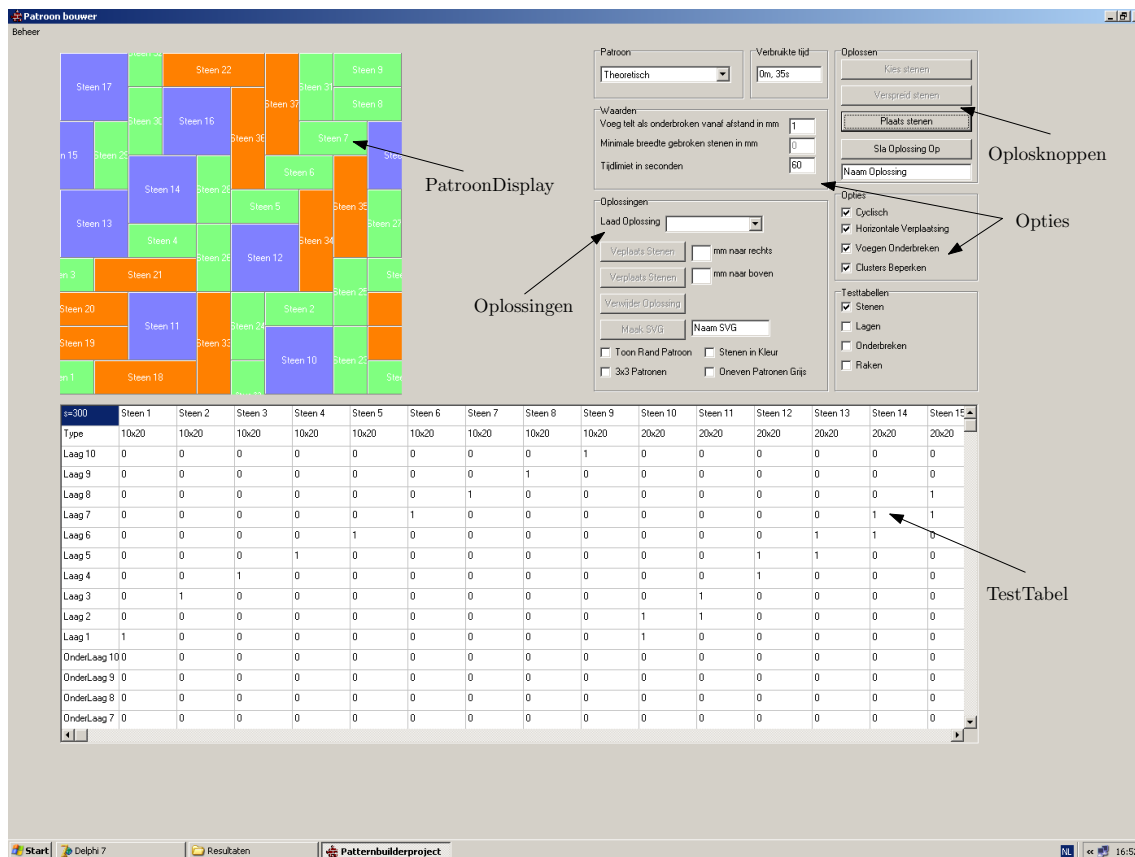
10.2.2 Opties

Bij het oplossen kan de gebruiker kiezen uit verschillende opties. 'Cyclisch' geeft aan dat we het cyclische model uit sectie 4.1.2 gebruiken. 'Horizontale verplaatsing' geeft aan dat we het verschoven cyclische model uit sectie 4.2.2 gebruiken. 'Voegen onderbreken' geeft aan dat we werken met het verschoven cyclische model met voegen onderbreken uit sectie 5.2, en 'Clusters beperken' geeft aan dat we werken met het verschoven cyclische model met voegen onderbreken en clusters beperken uit sectie 6.3.

Daarnaast zijn er drie waarden vrij te kiezen. Bij 'Voeg telt als onderbroken vanaf afstand in mm' is de marge μ uit sectie 5 te kiezen. Bij 'Minimale breedte gebroken stenen in mm' is de minimale breedte van een gebroken steen te kiezen door deze bij de voorwaarden uit sectie 4.2.2 bij de voegbreedte op te tellen. Bij 'Tijdslimiet in seconden' kan de gebruiker bepalen hoe lang CPLEX er over mag doen om een optimale oplossing te vinden. Als CPLEX nog geen optimale oplossing heeft gevonden als de tijdslimiet is overschreden, dan geeft Patternbuilder een bericht dat de gevonden oplossing niet gegarandeerd optimaal is, of dat er geen oplossing is gevonden.

10.2.3 Testtabellen

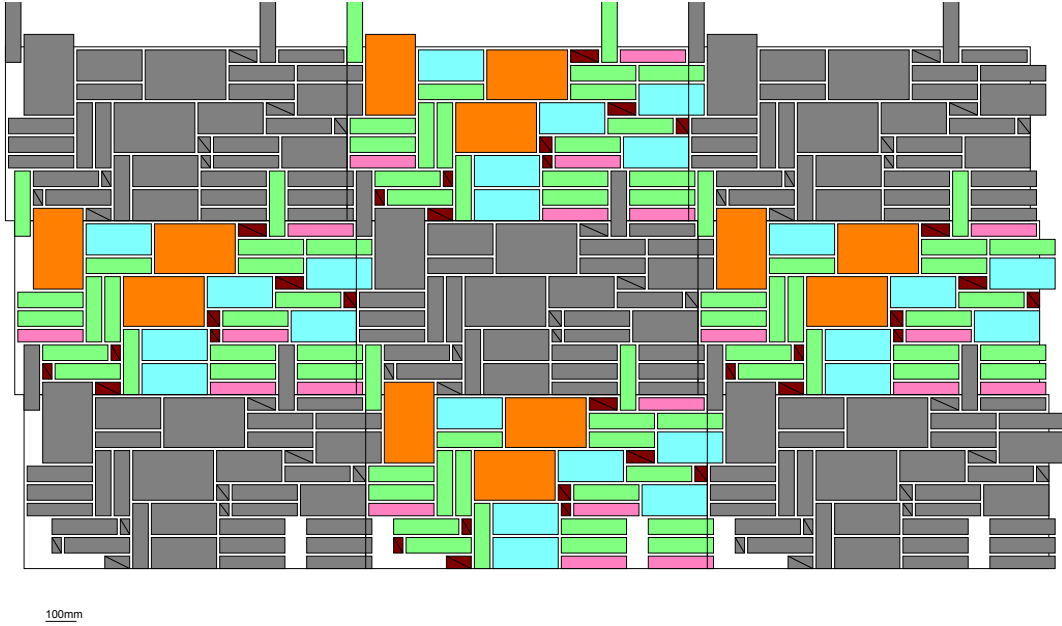
Een verkregen oplossing wordt niet alleen visueel in de patroondisplay weergegeven, maar de waarden van verschillende variabelen zijn te lezen in de testtabellen. Een gebruiker zal aan het display genoeg hebben, maar met name bij het vinden van bugs zijn de testtabellen van pas gekomen.



Figuur 24: Het hoofdscherm

10.2.4 Oplossingen

Gevonden oplossingen kunnen worden opgeslagen in een Access database. Deze oplossingen bevatten enkel de afmetingen van het patroon en de afmetingen, positie en kleur van de stenen. Het verwijderen van patronen of steentypes heeft niet tot gevolg dat deze oplossingen niet meer geladen kunnen worden. Opgeslagen oplossingen kunnen bij 'Oplossingen' geladen worden. Met 'Verplaats stenen .. mm naar rechts/boven' kunnen alle stenen in een oplossing verplaatst worden als de gebruiker vindt dat dit een mooier resultaat oplevert. Met de 'Maak SVG'-knop kunnen oplossingen worden opgeslagen met het Scalable Vector Graphics (SVG) formaat. Hierbij heeft de gebruiker de keuze om al dan niet de rand van het patroon weer te geven, om de stenen al dan niet in kleur weer te geven, om één patroon of een een blok van drie bij drie patronen weer te geven, en om in het drie bij drie blok de patronen in het midden en de hoeken grijs weer te geven. Een voorbeeld van een oplossing in SVG formaat is te zien in figuur 25



Figuur 25: De output van Patternbuilder in SVG formaat

11 Resultaten

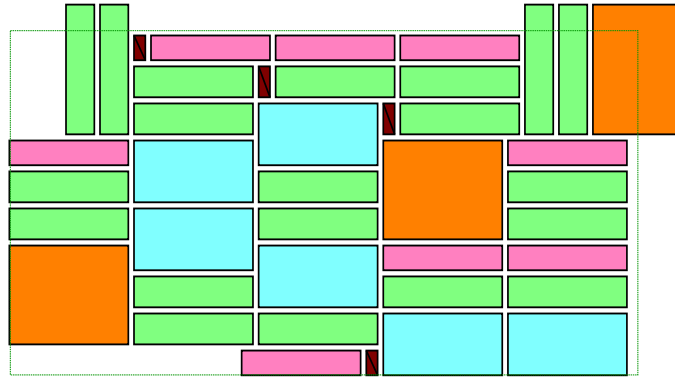
We hebben onze verschillende modellen getest op een Intel(R) Core(TM)2 CPU 6600 @ 2.40GHz processor met 2,00GB RAM geheugen. Hierbij hebben we niet alleen gelet op de snelheid van onze methode, maar hebben we ook subjectief naar de schoonheid van het patroon gekeken. Ten eerste hebben we gekeken naar drie instanties die zijn getest in [4] om onze resultaten te kunnen vergelijken met de resultaten uit dit artikel. Instantie W1 bestaat uit een patroon van 22 lagen met hoogte 1 en breedte 16. Er is 1 steentype van 3 bij 5. Instantie W2 bestaat uit een patroon van 1000 lagen met hoogte 1 en breedte 1000. Er is 1 steentype van 205 bij 159. Instantie W3 bestaat uit een patroon van 40 lagen met hoogte 1 en breedte 33. Er is 1 steentype van 4 bij 7. Daarnaast is instantie W4 een geroteerde versie van W3, dus met 33 lagen met hoogte 1 en breedte 40. Er is 1 steentype van 4 bij 7. Bij deze 4 instanties zijn de voeglengthte en voegbreedte 0. Alle stenen zijn onbeperkt te plaatsen en draaien. Daarnaast hebben we gekeken naar twee theoretische instanties met vier steentypes van respectievelijk 1 bij 1, 1 bij 2, 1 bij 3 en 2 bij 2. In de eerste instantie (T1) bestaat het patroon uit 10 lagen met hoogte 1 en breedte 10. In de tweede instantie (T2) bestaat het patroon uit 12 lagen met hoogte 1 en breedte 12. Bij beide patronen zijn zowel de voeghoogte als de voegbreedte 0. Tenslotte hebben we gekeken naar twee instanties met een realistische verzameling steentypes die ook in de praktijk wordt gebruikt. We hebben steentypes van respectievelijk 40 bij 210, 50 bij 210, 100 bij 210 en 160 bij 260. De eerste instantie (R1) bestaat uit een patroon met 8 lagen met breedte 700. Lagen 1, 4 en 7 hebben hoogte 50, en de andere lagen hebben hoogte 60. De tweede instantie (R2) bestaat uit een patroon met 10 lagen met breedte 1100. Lagen 1, 4, 7 en 10 hebben hoogte 50, en de andere lagen hebben hoogte 60. Bij beide instanties zijn zowel de voeghoogte als de voegbreedte gelijk aan 10. Daarnaast hebben we gekozen voor een minimale breedte van gebroken stenen van 30 en een μ van 10. We hebben T1, T2, R1 en R2 op deze instanties getest. Bij het kiezen en verspreiden van stenen hebben we onderscheid gemaakt tussen niet-cyclisch (NCK, NCV), cyclisch (CK, CV) en cyclisch met onderbreken (CKO, CVO). We hebben de oplossing van CVO gebruikt om de stenen te plaatsen met de volgende modellen: niet-cyclisch (NCP), cyclisch (CP), verschoven cyclisch (VCP), verschoven cyclisch met voegen onderbreken (VCPO) en verschoven cyclisch met voegen onderbreken en clusters beperken (VCPOC). Bij VCPOC hebben we voor alle steentpes $T_i = 2$ genomen. Bij W1, W2, W3 en W4 hebben we alleen gekeken naar het niet-cylische model, omdat dit vergelijkbaar is met het model van Wu, waarbij dozen op pallets moeten worden geplaatst. Wel hebben we kleine tijden afgerond op milliseconden, om deze beter te kunnen vergelijken met de resultaten in het artikel van Wu. Bij de andere instanties hebben we afgerond op hele seconden. De resulaten staan in tabel 11.

	W1 (23)	W2 (30)	W3 (46)	W4 (46)	T1 (37)	T2 (47)	R1 (23)	R2 (41)
NCK	78ms	4s	416ms	500ms	0s	0s	0s	4s
NCV					7s	19s	0s	37s
CK					0s	0s	1s	6s
CV					10s	23s	2s	152s
CKO					0s	0s	0s	67s
CVO					9s	21s	11s	46s
NCP	78ms	-	-	2s	0s	157 ms	0s	0s
CP					1s	2s	0s	119s
VCP					0s	-	0s	26s
VCPO					7s	-	0s	21s
VCPOC					8s	-	0s	192s

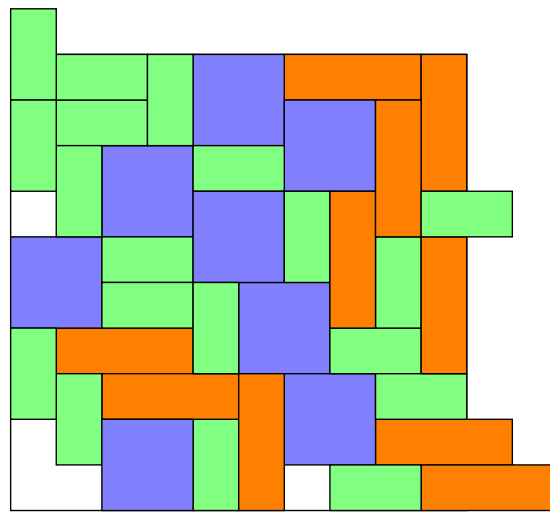
Ons model wist de kleine instantie W1, net als het model van Wu, in minder dan een seconde op te lossen. Echter had ons model meer moeite met W2: Ons model had voor de eerste fase 4 seconden nodig tegen 0.09 seconden voor het model van Wu en kon de tweede fase zelfs geen oplossing vinden binnen een minuut. We vermoeden dat de extra duur in de eerste stap ligt aan de 1000 lagen, waarvan er in een groot aantal toch geen stenen geplaatst kunnen worden. In de tweede stap moet ons model rekening houden met 1000 gebroken stenen wat de rekentijd niet ten goede komt. In het model van Wu wordt een methode gebruikt om de lagen waar toch geen stenen geplaatst kunnen worden uit te sluiten en zo het aantal variabelen en voorwaarden te reduceren. Echter is deze methode voor onze toepassing niet nodig: In de praktijk worden in alle lagen wel stenen geplaatst. W3 was één van de lastigste instanties voor het model van Wu dat 2.61 seconden over de eerste fase deed en 0.11 seconden over de tweede fase. Hoewel ons model weer te veel lagen had om tot een oplossing te komen in de tweede fase, kwamen we door het patroon te draaien in W4 tot een veel snellere oplossing.

Uit de theoretische en realistische instanties blijkt dat ons model voor een instantie met 40 stenen aan een paar minuten genoeg heeft om een oplossing te vinden. Er is wel een groot verschil tussen de tijd die nodig is voor het verspreiden van stenen vergeleken met het plaatsen van stenen en het model met het beperken van clusters vergeleken met de andere modellen waarin de stenen worden geplaatst. In de praktijk zal er qua kwaliteit niet veel verschil tussen een goede en de optimale oplossing zitten. Daarom is het belangrijk om een tijdlimiet te gebruiken, zodat er binnen redelijke tijd een oplossing kan worden gevonden bij het verspreiden van stenen en het beperken van clusters.

Op de schoonheid van de resultaten is nog wel wat aan te merken. Bij de theoretische instanties werden alle stenen mooi verdeeld, maar bij de realistische instanties worden de steentypes niet altijd goed verdeeld in fase 1.2. Figuur 26 is een oplossing van R1, waarbij de stenen optimaal verspreid zijn. Echter bevinden alle geroteerde groene stenen zich in de bovenste laag. We vermoeden dat de oorzaak hiervan is dat het in fase 1.1 behaalde oppervlakte vaak alleen met bepaalde combinaties van stenen in de juiste lagen te behalen is. Hierdoor zijn er te weinig oplossingen mogelijk in fase 1.2 om de stenen goed genoeg te kunnen verspreiden. Bij de theoretische instanties wordt in fase 1.1 de hele oppervlakte gevuld met ongebroken stenen, en is er in fase 1.2 geen moeite met het goed verspreiden van de steentypes. Figuur ??s een oplossing van T1 waar alle stenen mooi verspreid zijn. Wat verder opvalt is dat er in een groot deel van de oplossingen lange voegen zijn die slechts in één laag worden onderbroken. Dit is niet te voorkomen, maar wat helpt is een zo klein mogelijk aantal lagen te nemen, zodat de voegen minder lang zijn. De conclusie is dat het belangrijk is om met patronen met een klein aantal lagen te werken. Enerzijds voor de snelheid, anderzijds om lange verticale voegen tegen te gaan.



Figuur 26: Een oplossing van R1



Figuur 27: Een oplossing van T1

12 Aanbevelingen voor Vervolgonderzoek

In dit verslag hebben we een methode beschreven om patronen voor polymetrische metselwerken te genereren. Toch zijn er nog vele punten in de methode waar verbetering mogelijk is. Een aantal verbeteringen hebben te maken met het eindresultaat. Een mooi patroon is natuurlijk slechts een deel van het totale metselwerk. Het is nuttig om de applicatie zo uit te breiden dat het patroon in sommige delen van de muur iets kan worden aangepast om bijvoorbeeld deuren en ramen te bevatten. Daarnaast is het nuttig om rekening te houden met het in elkaar overlopen van de patronen van twee muren die samenkomen in de hoek van een gebouw. We vermoeden dat deze verbeterpunten wiskundig niet ingewikkeld zijn, maar dat het veel tijd kost om deze goed in een applicatie te implementeren.

Maar ook qua wiskunde zijn er punten die verbeterd kunnen worden. We hebben verschillende varianten onderzocht voordat we op onze methode uitkwamen, maar uiteraard zijn er meer methodes mogelijk. Zo hebben we in al onze methoden gebruik gemaakt van de voorwaarde dat in elke laag elke steen b niet met steen c mag overlappen. In plaats daarvan zou de voorwaarde dat in elke laag direct rechts van elke steen b zich precies één steen c mag bevinden, misschien tot snellere resultaten kunnen leiden. In sectie 11 hebben we beschreven waarom we denken dat de stenen niet optimaal worden verspreid. Wellicht dat het mogelijk is fase 1.1 en 1.2 samen op te lossen met een gecombineerde doelfunctie. Ook is er meer mogelijk met de gebroken stenen. In dit verslag hebben we slechts gekeken naar het beperken van de totale oppervlakte van gebroken stenen. In de praktijk is het wellicht nuttiger om te kijken naar een

combinatie van het aantal gebroken stenen en de oppervlakte hiervan. Ook is het een goede toevoeging om gebroken stenen te creëren die uit meerdere lagen bestaan.

Daarnaast is het natuurlijk niet noodzakelijk om mixed integer linear programming te gebruiken, maar zijn er ook heuristieken mogelijk. We vermoeden wel dat in de twee fasen aanpak de eerste fase niet veel sneller kan, maar voor de tweede fase verwachten we dat er snellere heuristieken mogelijk zijn.

In sectie 9 hebben we een aantal voorbeelden gegeven waarin er al dan niet een oplossing mogelijk is in de tweede fase. Hoewel meer onderzoek naar voorwaarden wanneer een oplossing mogelijk is niet erg nuttig is voor onze toepassing, waarbij in de praktijk vrijwel elke instantie een oplossing heeft, is het wiskundig gezien zeker interessant om dit verder te onderzoeken. In [4] wordt ook gebruik gemaakt van de twee fasen aanpak, en we vermoeden dat de twee fasen aanpak kan worden gebruikt om het vinden van oplossingen in vele twee dimensionale packing problemen te versnellen.

Referenties

- [1] F. R. K. Chung, E. N. Gilbert, R. L. Graham, J. B. Shearer, and J. H. van Lint. Tiling rectangles with rectangles. *Mathematics Magazine*, 55(5):pp. 286–291, 1982.
- [2] J.E.Beasley. An exact two-dimensional non-guillotine cutting tree search procedure. *Operations Research*, 33(1):49–64, 1985.
- [3] Asma Kahoul, George Constantinides, Alastair Smith, and Peter Cheung. Heterogeneous architecture exploration: Analysis vs. parameter sweep. *Lecture Notes in Computer Science*, 5453:133–144, 2009.
- [4] C.J.Ting K.C.Wu. A two-phase algorithm for the manufacturer’s pallet loading problem. *Industrial Engineering and Engineering Management*, pages 1574 –1578, 2-4 2007.
- [5] R.E. P.C. Gilmore, Gomory. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations Research*, 13(1):94–120, 1965.
- [6] E.R. Paternoster P.E. Sweeney. Cutting and packing problems: A categorized, application-orientated research bibliography. *The Journal of the Operational Research Society*, 43(7):691–706, 1992.