

ONDERZOEK VAN WISKUNDE

Optimale strategieën in monominospellen

**Kirsten Prakken
s9218009
M-SEC
februari-juli 2018**

INHOUDSOPGAVE

SAMENVATTING	3
HOOFDSTUK 1 Monominospellen	4
1.1 Introductie	4
1.2 Speltheorie	4
1.3 Nash-evenwicht	5
1.4 Onderzoeksvraag	7
1.5 Opzet van het onderzoek	7
1.6 Leeswijzer	7
HOOFDSTUK 2	8
HOOFDSTUK 3	10
3.1 Lemma 1	10
Afleiding	10
Bewijs	12
3.2 Lemma 2	15
Afleiding	15
Bewijs	18
HOOFDSTUK 4	23
4.1 Lemma 3	23
Afleiding	23
HOOFDSTUK 5	32
5.1 Notatie	32
5.2 Lemma 3	33
5.3 Stelling	34
5.4 Bewijs	35
5.5 Nadere beschouwing van het bewijs	37
5.6 Conclusie	39
LITERATUUR	41
BIJLAGE Bewijs Stelling	42
Bewijs voor $\text{mod}(0,0,0)$	42
Bewijs voor $\text{mod}(0,1,2)$	44
Bewijs voor $\text{mod}(0,2,1)$	46
Bewijs voor $\text{mod}(1,0,2)$	48
Bewijs voor $\text{mod}(1,1,1)$	50

Bewijs voor mod(1,2,0)	52
Bewijs voor mod(2,0,1)	54
Bewijs voor mod(2,1,0)	56
Bewijs voor mod(2,2,2)	58
Bewijs voor mod(0,0,2)	60
Bewijs voor mod(0,1,1)	63
Bewijs voor mod(0,2,0)	67
Bewijs voor mod(1,0,1)	70
Bewijs voor mod(1,1,0)	73
Bewijs voor mod(1,2,2)	76
Bewijs voor mod(2,0,0)	79
Bewijs voor mod(2,1,2)	83
Bewijs voor mod(2,2,1)	86
Bewijs voor mod(0,0,1)	89
Bewijs voor mod(0,1,0)	92
Bewijs voor mod(0,2,2)	94
Bewijs voor mod(1,0,0)	98
Bewijs voor mod(1,1,2)	100
Bewijs voor mod(1,2,1)	103
Bewijs voor mod(2,0,2)	106
Bewijs voor mod(2,1,1)	109
Bewijs voor mod(2,2,0)	111
BIJLAGE Berekeningen	115

SAMENVATTING

In dit onderzoek wordt een monomino-spel voor drie spelers bestudeerd. Dit is een spel dat wordt gespeeld op een rechthoekig bord met R-rijen en C-kolommen. De spelstukken zijn monomino's, die precies één cel van het bord dekken. Eén voor één selecteert elke speler een kolom van het bord en plaatst een monomino in de onderste onbedekte cel. Dit genereert een uitbetaling voor de speler. Het spel eindigt als alle cellen bedekt zijn met monomino's. Het doel van elke speler is om zijn monomino's op zo'n manier te plaatsen dat zijn totale uitbetaling is gemaximaliseerd. In dit onderzoek wordt voor monomino-spellen met drie kolommen het evenwichtsspel en de bijbehorende uitbetalingen voor de spelers afgeleid. Het monomino-spel wordt bestudeerd onder de aanname dat elke speler winstmaximalisatie als doel heeft en rationeel handelt. Hierbij is sprake van een optimale strategische reactie van de ene speler op een optimale strategische actie van een andere speler. Een spel dat op deze wijze wordt gespeeld leidt naar een Nash-evenwicht. De resultaten van het onderzoek beschrijven het evenwichtsspel en de uitbetalingen voor de spelers.

HOOFDSTUK 1 Monominospellen

1.1 Introductie

Een monomino-spel is een gezelschapsspel zoals dobbelspellen en kaartspellen. In plaats van de speler te bepalen die de laatste zet doet (zoals bij schaken of dammen), zijn de spelers geïnteresseerd in optimalisatie van hun uitbetalingen.

Het monomino-spel dat in dit onderzoek wordt geanalyseerd, wordt gespeeld door drie spelers op een rechthoekig bord met R rijen en 3 kolommen. Een dergelijk monomino-spel wordt aangeduid met $M(R, 3)$. Elk van de cellen is vierkant. Het spel wordt gespeeld met stukken, monomino's genoemd, die 1 cel kunnen bedekken.

Ingeval het bord het formaat 3×3 heeft, heeft elke cel op de onderste (eerste) rij een waarde van één eenheid, in de middelste (tweede) rij zijn de waarden twee, en op de bovenste (derde) rij hebben de cellen een waarde van elk drie eenheden.

Het spel kent de volgende regels. Er zijn drie spelers: speler 1, speler 2 en speler 3. Speler 1 begint. De spelers selecteren één voor één een kolom van het speelbord en plaatsen een monomino in de onderste onbedekte cel. Ingeval een speler kan kiezen tussen cellen in dezelfde rij dan kiest de speler de cel in de kolom met het laagste nummer. Het spel eindigt als alle cellen bedekt zijn met monomino's, dit gebeurt na $R \times 3$ zetten. Een monomino in rij i van het speelbord genereert een uitbetaling van i eenheden aan de speler die aan zet is. Het spel eindigt als alle cellen worden gedekt door monomino's. In afwijking van spellen zoals schaken en dammen, is het doel van elke speler om de monomino's op zo'n manier te plaatsen dat het de totale individuele uitbetaling maximaliseert.

1.2 Speltheorie

Bestudering van het monomino-spel vindt plaats met behulp van de speltheorie. Een groot gebied binnen de speltheorie bestaat uit de strategische spellen. Strategische spellen zijn modellen van interactie van winst maximaliserende spelers. Ze worden ook wel niet-coöperatieve spellen genoemd. In dergelijke spellen heeft iedere speler een uitbetaalfunctie waarbij het doel is deze functie te maximaliseren. De waarde van de functie hangt af van de beslissingen van alle spelers die tegelijkertijd worden genomen. Spellen die uit een reeks beslissingen bestaan, waarbij de spelers steeds opnieuw keuzes maken op basis van de voorgaande beslissingen van de andere spelers worden spellen in uitgebreide vorm genoemd. In deze spellen zijn de spelers volledig geïnformeerd over de keuzes van de andere spelers, er is sprake van perfecte informatie. Voorbeelden hiervan zijn spellen als dammen, schaken en bridge (Groenewoud, 2011). Ook bij het bovenbeschreven monomino-spel is sprake van perfecte informatie. In strategische spellen in uitgebreide vorm hangt de beste strategie van een speler af van de strategieën van de andere spelers. Als het spel is afgelopen en geen van de spelers kan een hogere uitbetaling ontvangen door van strategie te wisselen, dan wordt de gezamenlijke strategie een Nash-evenwicht genoemd (Groenewoud, 2011). Het Nash-evenwicht is het meest gebruikte evenwicht in de speltheorie (Peters, 2015). Elk eindig uitgebreid spel met perfecte informatie heeft een deelspelperfect evenwicht (Groenewoud, 2011).

1.3 Nash-evenwicht

Elke gespeelde monomino genereert een waarde voor zijn speler. Als een speler een monomino plaatst in rij j verhoogt dit de uitbetaling van deze speler met j eenheden. Elke speler streeft een maximale uitbetaling na. Het spel is daarom een niet-coöperatief spel. Het Nash-evenwicht is een oplossingsconcept voor niet-coöperatieve spellen dat een optimaal spelverloop beschrijft. Zo is een paar strategieën (s_1, s_2, s_3) voor de respectievelijke spelers een Nash-evenwicht als s_1 de uitbetaling van speler 1 optimaliseert in het geval speler 2 strategie s_2 en speler 3 strategie s_3 speelt, en vice versa.

Bij het gegeven monominospel $M(R, 3)$ is de totale uitbetaling die de spelers ontvangen vast, namelijk $3(1 + 2 + \dots + R) = 3R(R + 1)/2$. Elke uitbetaling (π_1, π_2, π_3) voldoet aan $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 3R(R + 1)/2$ (Timmer et al, 2017). Het Monominospel is hierdoor een constante som spel. Dit impliceert in het bijzonder dat er een Nash-equilibrium bestaat in pure strategieën (Peters, 2015). Pure strategieën worden in de speltheorie onderscheiden van gemengde strategieën: bij de laatsten speelt kansverdeling een rol, bij de eerste maken de spelers een keuze uit de bestaande mogelijkheden zonder dat die keuze beïnvloed wordt door een bepaalde kansverdeling (Peters, 2015). Verder geldt dat als er meerdere Nash-evenwichten bestaan, dan is de uitbetaling aan een speler hetzelfde in elk evenwicht. Het monomino-spel is een spel met constante som en heeft daarom een Nash-evenwicht in pure strategieën.

Een eerste studie over monomino-spellen is gepresenteerd in het onderzoek *Optimale strategieën in dominospelen* (Van Dorenvanck, 2010) en in het artikel *Non-Cooperative Monomino Games* (Timmer et al, 2017).

In dit onderzoek wordt gekeken naar een verfijning van de Nash-equilibria, de zogenoemde deelspel perfecte evenwichten. Een deelspel perfect evenwicht is een verzameling strategieën die in elk subspel een Nash-evenwicht induceren. Deze begrippen worden geïllustreerd aan de hand van het onderstaande voorbeeld.

Voorbeeld 1.

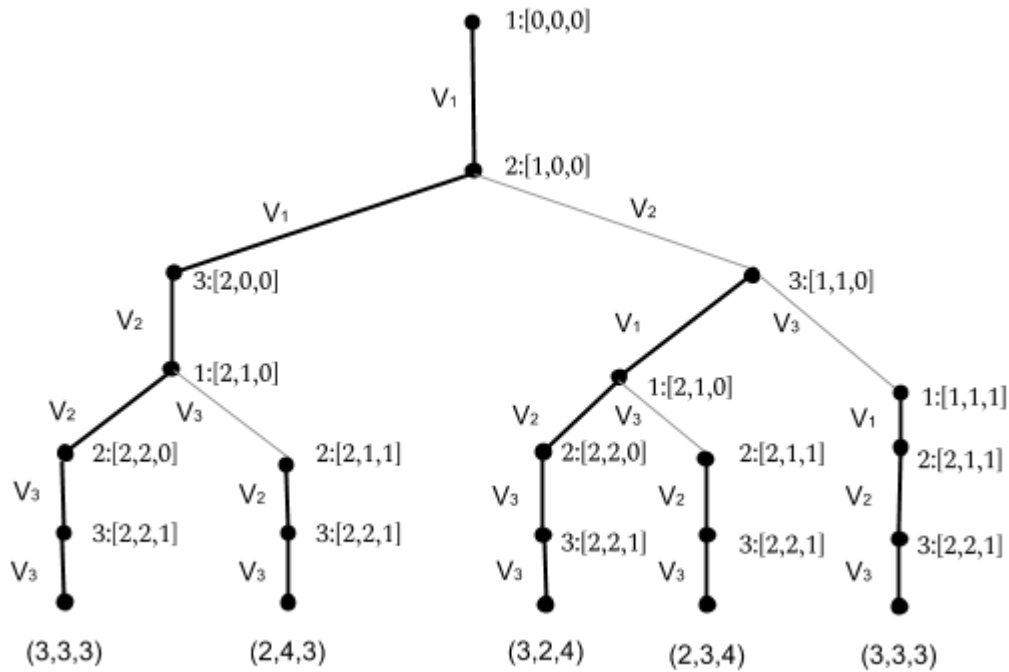
Beschouw het spel $M(2, 3)$ voor drie spelers. Dit spel wordt gespeeld op een bord met twee rijen en drie kolommen. Na 6 zetten zijn alle cellen op het bord bedekt en is het spel over. In dit spel zijn meerdere mogelijke combinaties van zetten mogelijk. Voor de grafische representatie hiervan in figuur 1 geldt dat ingeval een speler kan kiezen tussen cellen in dezelfde rij, de speler de meest linker cel kiest (de cel in de kolom met het laagste nummer).

Figuur 1 toont een boomdiagram van de mogelijke zetten. Bij elk knooppunt is de speler vermeld die aan zet is, evenals de spelsituatie $[x_1, x_2, x_3]$ waarbij x_i het aantal bedekte cellen in kolom i voorstelt. Ter illustratie: De spelsituatie $[2, 0, 0]$ betekent dat kolom 1 vol is, de cellen van kolom 2 en 3 zijn onbedekt. De zetten van de spelers zijn vermeld naast de lijnen, waarbij V_i betekent dat kolom i is geselecteerd. Onder de onderste knooppunten staan de uitbetalingen (π_1, π_2, π_3) , vermeld, waarbij π_j de uitbetaling aan speler j betekent.

Bij het eerste knooppunt in het boomdiagram is speler 1 aan zet. Er zijn nog geen cellen bedekt. In het diagram is dit genoteerd als $1:[0,0,0]$. Speler 1 kan voor de plaatsing van de monomino kiezen uit drie cellen in dezelfde rij en zal volgens de spelregels kiezen voor de linker kolom. In het figuur is deze keuze gerepresenteerd door de lijn met de aanduiding V_1 . In de nieuwe spelsituatie $2: [1, 0,0]$ kan speler 2 kiezen tussen kolom 1 (V_1) en kolom 2 (V_2). Kolom 3 is volgens afspraak geen mogelijkheid, aangezien bij keuze tussen cellen in dezelfde rij links gekozen wordt. Op deze wijze zijn er bij de laatste knooppunten 5 mogelijke uitbetalingen. De zetten die achtereenvolgens leiden naar één van de 5 uitbetalingen zijn deelspellen: het spel $M(2,3)$ bestaat derhalve uit 5 deelspellen. Zo leidt het deelspel $V_1V_2V_1V_3V_2V_3$ tot uitbetaling $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (2, 3, 4)$. Merk op dat het spel $M(2,3)$ zelf te zien is als een deelspel voor bijvoorbeeld het spel $M(3,3)$.

De optimale keuzes die de spelers per spelsituatie (gerepresenteerd door de knooppunten) kunnen maken wordt gevonden door middel van *achterwaartse inductie* (Peters, 2015). Toepassing van dit principe start bij de laatste knooppunten van het spel vanwaar terug wordt geredeneerd tot het eerste knooppunt. Ter illustratie: de laatste drie knooppunten van het boomdiagram zijn triviaal (de spelers die aan zet zijn hebben slechts 1 keus voor plaatsing van de monomino), bij het niet-triviale knooppunt met vermelding $1:[2,1,0]$ is speler 1 aan zet. Alle cellen in kolom 1 zijn bedekt, speler 1 heeft keuze de monomino te plaatsen in kolom 2 (V_2) of kolom 3 (V_3). Keuze voor kolom 2 levert uiteindelijk een hogere uitbetaling voor speler 1 (3 eenheden) dan keuze voor kolom 3 (2 eenheden). Speler 1 zal dus voor kolom 2 kiezen.

De optimale keuzes die de spelers in de gegeven spelsituaties kunnen maken zijn in het boomdiagram aangegeven door vetgedrukte lijnen. In de figuur is te zien dat er voor het spel $M(2,3)$ een uniek subspel is dat in evenwicht is met het principe van achterwaartse inductie. Dit subspel komt overeen met spelsituatie $V_1V_1V_2V_2V_3V_3$. Een dergelijk subspel wordt ook wel aangeduid als deelspel perfect-evenwicht of Nash-evenwicht (Peters, 2015). De evenwichtsuitbetaling die hierbij hoort is $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (3, 3, 3)$.



1.4 Onderzoeksvraag

In dit onderzoek wordt antwoord gegeven op de volgende onderzoeksvraag:

“Wat zijn de optimale keuzes van de spelers in monomino-spellen voor drie spelers van de vorm $M(R,3)$?”

In dit onderzoek wordt met optimale keuze of optimale strategie de keuze of strategie van een speler bedoeld die de hoogst mogelijke uitbetaling genereert.

1.5 Opzet van het onderzoek

In hoofdstuk 2 wordt beschreven hoe tot een vermoeden is gekomen van een optimale strategie van de spelers. In hoofdstuk 3 worden op basis van dit vermoeden uitbetalingsformules (lemma 1 en lemma 2) afgeleid en bewezen voor verschillende spelsituaties. In hoofdstuk 4 worden aan de hand hiervan de uitbetalingsformules (lemma 3) voor een monomino-spel van de vorm $M(R,3)$ afgeleid, met behulp waarvan vervolgens in hoofdstuk 5 een antwoord op de onderzoeksvraag wordt geformuleerd en bewezen.

1.6 Leeswijzer

De hoofdstukken 2, 3 en 4 dienen ter ondersteuning en verduidelijking van hoofdstuk 5: dit laatste hoofdstuk is op zichzelf staand en kan los van de andere hoofdstukken gelezen worden.

HOOFDSTUK 2

Het onderzoek start met het handmatig uitwerken van een aantal boomdiagrammen van monominospelen voor 3 spelers en 3 kolommen. Voor de eerste drie rijen is dergelijk handwerk te overzien, maar het spel met 4 rijen is al bijzonder tijdrovend. Dit laatste boomdiagram is alleen voor de linkertak van het boomdiagram gemaakt, de afsplitsing naar rechts is niet uitgewerkt.

In de boomdiagrammen worden middels achterwaartse inductie de volgende Nashevenwichten gevonden. Zoals aangegeven in hoofdstuk 1 duidt de notatie $M(1,3)$ een monominospel voor 3 spelers met 1 rij en 3 kolommen. V_1 betekent dat de speler die aan zet is de keuze voor kolom 1 heeft gemaakt, V_2 de keuze voor kolom 2 en V_3 is de keuze voor kolom 3. $M(4,3)$ is een vermoeden, omdat dit boomdiagram rechtszijdig niet is uitgevoerd.

$M(1,3)$ Nashevenwicht (1,1,1) via $V_1 V_2 V_3$

$M(2,3)$ Nashevenwicht (3,3,3) via $V_1 V_1 V_2 V_2 V_3 V_3$

$M(3,3)$ Nashevenwicht (3,6,9) via $V_1 V_1 V_1 V_2 V_2 V_2 V_3 V_3 V_3$

$M(4,3)$ Nashevenwicht (9,9,12) via $V_1 V_1 V_1 V_1 V_2 V_3 V_2 V_2 V_2 V_3 V_3 V_3$

In tabel 2.1 zijn de speluitkomsten van bovenstaande Nashevenwichten weergegeven, waarbij X = speler 1, O = speler 2 en * = speler 3.

Speler 1 begint altijd met V_1 . Boven de kolommen staat aangegeven uit hoeveel rijen het speelbord bestaat. Onder de kolommen staat het Nash-evenwicht weergegeven.

R			1				2				3				4		
															X	*	*
										*	*	*			*	O	O
							O	X	*		O	O	O		O	*	*
		X	O	*			X	*	O		X	X	X		X	O	*
X			1				3				3				9		
O			1				3				6				9		
*			1				3				9				12		

Tabel 2.1 Speluitkomsten van de Nashevenwichten

Op basis van bovenstaande ontstaat het vermoeden dat de optimale strategie voor een spel met 3 spelers en 3 kolommen links spelen is. In een spel waarvan aantal rijen min 1 (dus $R-1$) deelbaar is door 3, doorbreekt speler 3 het patroon door bij zet (aantal rijen plus 2) voor

V_3 in plaats van V_2 te kiezen. De rest van het spel wordt verder gespeeld door links te kiezen.

Dit vermoeden blijkt na verdere analyse niet te kloppen. Kennelijk ligt de optimale strategie in $M(4, 3)$ aan de rechterkant van de beslisboom. Het nieuwe vermoeden is dat de optimale strategie voor een spel met 3 spelers en 3 kolommen is om links te spelen: in een spel waarvan het aantal lege het aantal rijen deelbaar is door 3, doorbreken de spelers dit patroon door rechts te spelen waarna de rest van het spel dan verder gespeeld wordt door links te kiezen.

In bijlage 2 zijn berekeningen opgenomen aan de hand waarvan bekeken wordt of dit tweede vermoeden ondersteunt wordt. De berekeningen zijn gebaseerd op het idee van resterende uitbetalingen (Van Dorenvanck, 2010). Het uitgangspunt hiervoor is als volgt:

Voor $0 \leq p \leq q \leq r \leq R$ is (p, q, r) de toestand waarbij in kolom 1 nog p lege plaatsen zijn, in kolom 2 nog q en in kolom 3 nog r lege plaatsen.

De afbeeldingen $f(p, q, r)$ zijn de resterende uitbetalingen aan respectievelijk speler 1, 2 en 3 in het geval de spelers beginnen bij toestand (p, q, r) en allemaal vanaf dat moment een optimale strategie spelen.

De afbeelding $g(p, q, r)$ is de toestand waarin het spel overgaat vanuit toestand (p, q, r) indien de speler die op dat moment aan de beurt is een optimale strategie speelt. Dus $g(p, q, r) = (p - 1, q, r)$ en/of $g(p, q, r) = (p, q - 1, r)$ en/of $g(p, q, r) = (p, q, r - 1)$.

Als voor willekeurige p, q en r de waarden van $f(p, q, r)$ en $g(p, q, r)$ kunnen worden bepaald, dan is de optimale strategie voor toestand (p, q, r) gevonden. Bij de beginsituatie van het spel $M(R, 3)$ hebben de Nash-evenwichten dan de uitbetaling $f(R, R, R)$

Om te bepalen welke spelers aan zet zijn, geldt:

speler 1 als $p+q+r \bmod 3 \equiv 0$

speler 2 als $p+q+r \bmod 3 \equiv 2$

speler 3 als $p+q+r \bmod 3 \equiv 1$

De berekeningen uit de bijlage leveren de vermoedelijke resterende uitbetalingen in een Nash-evenwicht in een spel met 3 spelers en 3 kolommen. Uit de berekeningen rijst het vermoeden dat voor alle waarden van p, q en r ($0 \leq p \leq q \leq r \leq R$) de waarden van $f(p, q, r)$ en $g(p, q, r)$ op een recursieve manier te bepalen zijn.

Voor $p, q = 0$ en $r \geq 1$ zijn de vermoedelijke resterende uitbetalingen:

voor $r \bmod 3 = 0$ geldt $f(0, 0, r) = (R - (r - 1), 0, 0) + f(0, 0, r - 1) = (R - r + 1, 0, 0) + f(0, 0, r - 1)$

voor $r \bmod 3 = 2$ geldt $f(0, 0, r) = (0, R - (r - 1), 0) + f(0, 0, r - 1)$

voor $r \bmod 3 = 1$ geldt $f(0, 0, r) = (0, 0, R - (r - 1)) + f(0, 0, r - 1)$

Aan de hand van de berekeningen wordt het vermoeden als volgt aangepast: de optimale strategie is om te kiezen voor de meest linker kolom. Als $p = 0$ en $q \bmod 0$ dan kiezen spelers 2 en 3 voor kolom 3. Voor speler 1 maakt het niet uit of hij in die situatie kolom 2 of 3 speelt.

HOOFDSTUK 3

Ter bestudering van het monominospel $M(R, 3)$ worden hieronder verschillende spelsituaties geanalyseerd en met behulp van lemma's veralgemeniseerd. Voor de afgebeelde tabellen geldt: X = speler 1, O = speler 2, * = speler 3. Een expressie als $r \bmod 3 \equiv 0$ wordt verderop in het hoofdstuk verkort weergegeven als $r \bmod 0$.

3.1 Lemma 1

Afleiding

Spelsituatie $f(0,0,r)$ voor $r \bmod 3 \equiv 0$

Als $r \bmod 3 \equiv 0$ dan is speler 1 aan zet. Uitbetaling verloopt als volgt (de linker tabel laat de geplaatste monomino's tot $R = 9$ zien):

R-0	*	r	uitbetaling aan speler 1	uitbetaling aan speler 2	uitbetaling aan speler 3
R-1	O	0	0	0	0
R-2	X	3	R-2	R-1	R-0
R-3	*	6	R-2+R-5	R-1+R-4	R-0+R-3
R-4	O	9	R-2+R-5+R-8	R-1+R-4+R-7	R-0+R-3+R-6
R-5	X				
R-6	*				
R-7	O				
R-8	λ_1				

Uit bovenstaande tabel worden de volgende formules afgeleid voor de respectievelijke uitbetalingen aan spelers 1, 2 en 3.

$$f(0,0,r) = \begin{cases} \frac{r}{3}R - \frac{r^2+r}{6} \\ \frac{r}{3}R - \frac{r^2-r}{6} \\ \frac{r}{3}R - \frac{r^2-3r}{6} \end{cases}$$

Spelsituatie $f(0,0,r)$ voor $r \bmod 3 \equiv 2$

Als $r \bmod 3 \equiv 2$ dan is speler 2 aan zet. Uitbetaling verloopt als volgt:

R-0	*	r	uitbetaling aan speler 1	uitbetaling aan speler 2	uitbetaling aan speler 3
R-1	O				
R-2	X	2	0	R-1	R-0
R-3	*	5	R-2	R-1+R-4	R-0+R-3
R-4	O	8	R-2+R-5	R-1+R-4+R-7	R-0+R-3+R-6
R-5	X				
R-6	*				
R-7	O				

De uitbetalingen zijn hetzelfde als in de situatie voor $r \bmod 3 \equiv 0$ voor $r-2$. Ter illustratie: de uitbetalingen aan speler 1 zijn voor $r=6$ ($\bmod 3 \equiv 0$) gelijk aan $r=8$ ($\bmod 3 \equiv 2$). De formule die hierbij past is gelijk aan de vorige voor $r-2$. Uitgewerkt levert dit de volgende betalingsformule:

$$f(0,0,r) = \begin{cases} \frac{r-2}{3}R - \frac{r^2-3r+2}{6} \\ \frac{r+1}{3}R - \frac{r^2+r}{6} \\ \frac{r+1}{3}R - \frac{r^2-r-2}{6} \end{cases}$$

Spelsituatie $f(0,0,r)$ voor $r \bmod 3 \equiv 1$

Als $r \bmod 1$ dan is speler 3 aan zet. Uitbetaling verloopt als volgt:

R-0	*	r	uitbetaling aan speler 1	uitbetaling aan speler 2	uitbetaling aan speler 3
R-1	O	1	0	0	R-0
R-2	X	4	R-2	R-1	R-0+R-3
R-3	*	7	R-2+R-5	R-1+R-4	R-0+R-3+R-6
R-4	O				
R-5	X				
R-6	*				

De uitbetalingen zijn hetzelfde als in de situatie voor $r \bmod 3 \equiv 0$ voor $r-1$. De formules die hierbij passen zijn gelijk aan de vorige voor $r-1$.

$$f(0,0,r) = \begin{cases} \frac{r-1}{3}R - \frac{r^2-r}{6} \\ \frac{r-1}{3}R - \frac{r^2-3r+2}{6} \\ \frac{r+2}{3}R - \frac{r^2+r-2}{6} \end{cases}$$

Bewijs

De formules samengevoegd geven lemma 1. Het lemma wordt middels inductie naar r bewezen.

Lemma 1 voor $r \geq 1$

$$f(0,0,r) = \begin{cases} \left(\frac{r}{3}R - \frac{r^2+r}{6}, \frac{r}{3}R - \frac{r^2-r}{6}, \frac{r}{3}R - \frac{r^2-3r}{6} \right) & \text{voor } r \bmod 3 = 0 \\ \left(\frac{r-2}{3}R - \frac{r^2-3r+2}{6}, \frac{r+1}{3}R - \frac{r^2+r}{6}, \frac{r+1}{3}R - \frac{r^2-r-2}{6} \right) & \text{voor } r \bmod 3 = 2 \\ \left(\frac{r-1}{3}R - \frac{r^2-r}{6}, \frac{r-1}{3}R - \frac{r^2-3r+2}{6}, \frac{r+2}{3}R - \frac{r^2+r-2}{6} \right) & \text{voor } r \bmod 3 = 1 \end{cases}$$

Inductiebasis

$$f(0,0,1) = (0,0,R)$$

$$f(0,0,2) = (0,R-1,R)$$

$$f(0,0,3) = (R-2,R-1,R)$$

Deze uitkomsten corresponderen met de inductiehypothese.

Als $(r+1) \bmod 3 = 0$ dan moet gelden:

$$\begin{aligned} f(0,0,r+1) &= \\ &\left(\frac{r+1}{3}R - \frac{(r+1)^2+(r+1)}{6}, \frac{r+1}{3}R - \frac{(r+1)^2-(r+1)}{6}, \frac{r+1}{3}R - \frac{(r+1)^2-3(r+1)}{6} \right) = \\ &\left(\frac{r+1}{3}R - \frac{r^2+3r+2}{6}, \frac{r+1}{3}R - \frac{r^2+r}{6}, \frac{r+1}{3}R - \frac{r^2-r-2}{6} \right) \end{aligned}$$

Welnu, als $(r+1) \bmod 3 = 0$ dan is speler 1 aan zet.

$$f(0,0,r+1) = (R - (r+1-1), 0, 0) + f(0,0,r) =$$

↑

inductiehypothese voor $r \bmod 3 = 2$

$$\begin{aligned} (R-r, 0, 0) + &\left(\frac{r-2}{3}R - \frac{r^2-3r+2}{6}, \frac{r+1}{3}R - \frac{r^2+r}{6}, \frac{r+1}{3}R - \frac{r^2-r-2}{6} \right) = \\ &\left(\frac{r+1}{3}R - \frac{r^2+3r+2}{6}, \frac{r+1}{3}R - \frac{r^2+r}{6}, \frac{r+1}{3}R - \frac{r^2-r-2}{6} \right) \end{aligned}$$

Bovenstaande komt overeen met hetgeen aangetoond moest worden.

Als $(r+1) \bmod 3 = 1$ dan moet gelden:

$$f(0,0,r+1) =$$

$$f = (r+1)^2 - (r+1) = (r+1)^2 - 3(r+1) + 2 = r+3 = (r+1)^2 + (r+1) - 2$$

3.2 Lemma 2

Afleiding

Beschrijving afleiding lemma 2 onderdeel A voor $f(0,q,r)$ met $q \bmod 3 \equiv 0$ en $r \bmod 3 \equiv 0$

De startsituatie is $q \bmod 3 \equiv 0$ en $r \bmod 3 \equiv 0$.

De stelling veronderstelt dat de optimale strategie van de spelers is om de meest linkerkolom te kiezen, behalve als $p \bmod 3 \equiv 0$ en $q \bmod 3 \equiv 0$. In dat geval kiezen de spelers de rechterkolom. Voor speler 1 levert dit een bijzondere situatie op: voor deze speler maakt het namelijk niet uit welke kolom gekozen wordt. Volgens de spelregels wordt in deze situatie links gespeeld. Vervolgens ontstaat een spelsituatie met $q \bmod 3 \equiv 2$ en zal speler 2 (die aan de beurt is) volgens de stelling links kiezen, evenals speler 3 die hierna aan zet is. De tweede kolom wordt op deze wijze volgemaakt, waarna de derde kolom (met $r \bmod 3 \equiv 0$) gevuld wordt volgens lemma 1. Onderdeel A van lemma 2 is op onderstaande wijze afgeleid:

R-0	*	*
R-1	O	O
R-2	X	X
R-3	*	*
R-4	O	O
R-5	X	X
R-6		*
R-7		O
R-8		X

$$f(0,q,r) = \begin{cases} \frac{q}{3}R - \frac{q^2+q}{6} + \text{lemma 1 voor } r \bmod 0 \\ \frac{q}{3}R - \frac{q^2-q}{6} + \text{lemma 1 voor } r \bmod 0 \\ \frac{q}{3}R - \frac{q^2-3q}{6} + \text{lemma 1 voor } r \bmod 0 \end{cases}$$

Voor $q \bmod 0$ en $r \bmod 0$ geldt:

$$f(0,q,r) = \begin{cases} \frac{q}{3}R - \frac{q^2+q}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2+r}{6} \\ \frac{q}{3}R - \frac{q^2-q}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2-r}{6} \\ \frac{q}{3}R - \frac{q^2-3q}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2-3r}{6} \end{cases}$$

Beschrijving afleiding lemma 2 onderdeel C voor $f(0,q,r)$ met $q \bmod 0$ en $r \bmod 1$

Volgens de stelling kiest speler 3 rechts want $q \bmod 0$. Deze zet levert een betaling van $R-(r-1)$ op. Vervolgens ontstaat de situatie $f(0, q, r-1)$ met $q \bmod 0$ en $(r-1) \bmod 0$ met speler 1 aan zet. Uitbetaling vindt in die situatie plaats volgens onderdeel A voor $r-1$.

Voor $q \bmod 0$ en $r \bmod 1$ geldt:

$$f(0, q, r) = \begin{cases} \frac{q}{3}R - \frac{q^2 + q}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 + r - 1}{6} \\ \frac{q}{3}R - \frac{q^2 - q}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - (r-1)}{6} \\ \frac{q}{3}R - \frac{q^2 - 3q}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - 3(r-1)}{6} + R - (r-1) \end{cases}$$

Beschrijving afleiding lemma 2 onderdeel B voor $f(0, q, r)$ met $q \bmod 0$ en $r \bmod 2$

Speler 2 is aan zet. Volgens stelling wordt de rechter kolom gekozen want $q \bmod 0$. Dit levert een betaling van $R - (r-1)$ voor speler 2. Vervolgens ontstaat de situatie $f(0, q, r-1)$ met $q \bmod 0$ en $(r-1) \bmod 1$ met speler 3 aan zet. Uitbetaling vindt in die situatie plaats volgens onderdeel C voor $r-1$.

Voor $q \bmod 0$ en $r \bmod 2$ geldt:

$$f(0, q, r) = \begin{cases} \frac{q}{3}R - \frac{q^2 + q}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 + r - 2}{6} \\ \frac{q}{3}R - \frac{q^2 - q}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 - (r-2)}{6} + R - (r-1) \\ \frac{q}{3}R - \frac{q^2 - 3q}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 - 3(r-2)}{6} + R - (r-2) \end{cases}$$

Beschrijving afleiding lemma 2 onderdeel D voor $f(0, q, r)$ met $q \bmod 1$ en $r \bmod 0$

Speler 3 is aan zet. Volgens stelling wordt de linkerkolom gekozen want $q \bmod 1$. Dit levert een betaling van $R - (q-1)$ voor speler 3. Vervolgens ontstaat de situatie $f(0, q-1, r)$ met $q \bmod 0$ en $r \bmod 0$ met speler 1 aan zet. Uitbetaling vindt in die situatie plaats volgens onderdeel A voor $q-1$.

Voor $q \bmod 1$ en $r \bmod 0$ geldt:

$$f(0, q, r) = \begin{cases} \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 + q - 1}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2 + r}{6} \\ \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 - (q-1)}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2 - r}{6} \\ \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 - 3(q-1)}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2 - 3r}{6} + R - (q-1) \end{cases}$$

Beschrijving afleiding lemma 2 onderdeel F voor $f(0,q,r)$ met $q \bmod 1$ en $r \bmod 1$

Speler 2 kiest links en krijgt er $R-(q-1)$ bij. Daarna situatie $q \bmod 0$ en $r \bmod 1$, dus lemma 2 C voor $q-1$.

Voor $q \bmod 1$ en $r \bmod 1$ geldt:

$$f(0,q,r) = \begin{cases} \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 + q - 1}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 + r - 1}{6} \\ \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 - (q-1)}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - (r-1)}{6} + R - (q-1) \\ \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 - 3(q-1)}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - 3(r-1)}{6} + R - (r-1) \end{cases}$$

Beschrijving afleiding lemma 2 onderdeel E voor $f(0,q,r)$ met $q \bmod 1$ en $r \bmod 2$

Speler 1 kiest links en krijgt er $R-(q-1)$ bij. Daarna situatie $q \bmod 0$ en $r \bmod 2$, dus lemma 2 B voor $q-1$.

Voor $q \bmod 1$ en $r \bmod 2$ geldt:

$$f(0,q,r) = \begin{cases} \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 + q - 1}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 + r - 2}{6} + R - (q-1) \\ \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 - (q-1)}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 - (r-2)}{6} + R - (r-1) \\ \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 - 3(q-1)}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 - 3(r-2)}{6} + R - (r-2) \end{cases}$$

Beschrijving afleiding lemma 2 onderdeel G voor $f(0,q,r)$ met $q \bmod 2$ en $r \bmod 0$

Speler 2 kiest links en krijgt er $R-(q-1)$ bij. Daarna situatie $q \bmod 1$ en $r \bmod 0$, dus lemma 2 D voor $q-1$.

Voor $q \bmod 2$ en $r \bmod 0$ geldt:

$$f(0,q,r) = \begin{cases} \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2 + q - 2}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2 + r}{6} \\ \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2 - (q-2)}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2 - r}{6} + R - (q-1) \\ \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2 - 3(q-2)}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2 - 3r}{6} + R - (q-2) \end{cases}$$

Beschrijving afleiding lemma 2 onderdeel H voor $f(0,q,r)$ met $q \bmod 2$ en $r \bmod 2$

Speler 3 kiest links en krijgt er $R-(q-1)$ bij. Daarna situatie $q \bmod 1$ en $r \bmod 2$, dus lemma 2 E voor $q-1$.

Voor $q \bmod 2$ en $r \bmod 2$ geldt:

$$f(0, q, r) = \begin{cases} \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2 + q - 2}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 + r - 2}{6} + R - (q-2) \\ \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2 - (q-2)}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 - (r-2)}{6} + R - (r-1) \\ \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2 - 3(q-2)}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 - 3(r-2)}{6} + R - (r-2) + R - (q-1) \end{cases}$$

Beschrijving afleiding lemma 2 onderdeel I voor $f(0, q, r)$ met $q \bmod 2$ en $r \bmod 1$

Speler 1 kiest links en krijgt er $R-(q-1)$ bij. Daarna situatie $q \bmod 1$ en $r \bmod 1$, dus lemma 2 F voor $q-1$.

Voor $q \bmod 2$ en $r \bmod 1$ geldt:

$$f(0, q, r) = \begin{cases} \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2 + q - 2}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 + r - 1}{6} + R - (q-1) \\ \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2 - (q-2)}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - (r-1)}{6} + R - (q-2) \\ \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2 - 3(q-2)}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - 3(r-1)}{6} + R - (r-1) \end{cases}$$

Bewijs

De 9 onderdelen van de lemma 2 worden bewezen met behulp van tweedimensionale inductie. Voor onderdeel A is het bewijs hieronder uitgewerkt. Merk op dat lemma 2 in uitgebreide vorm is genoteerd.

Bewijs lemma 2 onderdeel A

voor $q \bmod 3 = 0$

$r \bmod 3 = 0$

$$f(0, q, r) = \begin{cases} \left(\frac{q}{3} (R - (q - 1)) + \frac{q^2 - 3q}{6} + \frac{r}{3} R - \frac{r^2 + r}{6} \right) \\ \left(\frac{q}{3} (R - (q - 2)) + \frac{q^2 - 3q}{6} + \frac{r}{3} R - \frac{r^2 - r}{6} \right) \\ \left(\frac{q}{3} (R - (q - 3)) + \frac{q^2 - 3q}{6} + \frac{r}{3} R - \frac{r^2 - 3r}{6} \right) \end{cases}$$

Inductiebasis

$$f(0, 3, 3) = (2R - 4, 2R - 2, 2R)$$

Dit komt overeen met lemma 4.

Lemma 4 is als bijlage opgenomen: dit lemma betreft de uitbetalingsfuncties voor $f(0, 3, r)$.

Inductie over q

Voor $(q+1) \bmod 3 = 0$ en $r \bmod 3 = 0$ aantonen dat

$$f(0, q+1, r) = \begin{cases} \left(\frac{q+1}{3} (R - (q)) + \frac{(q+1)^2 - 3(q+1)}{6} + \frac{r}{3} R - \frac{r^2 + r}{6} \right) \\ \left(\frac{q+1}{3} (R - (q-2)) + \frac{(q+1)^2 - 3(q+1)}{6} + \frac{r}{3} R - \frac{r^2 - r}{6} \right) \\ \left(\frac{q+1}{3} (R - (q-2)) + \frac{(q+1)^2 - 3(q+1)}{6} + \frac{r}{3} R - \frac{r^2 - 3r}{6} \right) \end{cases}$$

Vereenvoudigd geeft dit:

$$f(0, q+1, r) = \begin{cases} \left(\frac{q+1}{3} R - \frac{q^2 + 3q + 2}{6} + \frac{r}{3} R - \frac{r^2 + r}{6} \right) \\ \left(\frac{q+1}{3} R - \frac{q^2 + q}{6} + \frac{r}{3} R - \frac{r^2 - r}{6} \right) \\ \left(\frac{q+1}{3} R - \frac{q^2 - q - 2}{6} + \frac{r}{3} R - \frac{r^2 - 3r}{6} \right) \end{cases}$$

Als $(q+1) \bmod 3 = 0$ en $r \bmod 3 = 0$ dan is speler 1 aan zet. Keuze uit 2 kolommen. Bepalen maximum.

$$\max\{R - q + f(0, q, r), R - (r - 1) + f(0, q + 1, r - 1)\}$$



inductiehypothese
voor $q \bmod 2$ en $r \bmod 0$



stelling onderdeel B
met $(r - 1) \bmod 2$

$$\max\left\{\begin{array}{l} R - q + \frac{q-2}{3}(R - (q-3)) + \frac{(q+2)^2 - 3(q-2)}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2 - r}{6}, \\ R - (r-1) + \frac{q+1}{3}(R - q) + \frac{(q+1)^2 - 3(q+1)}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-3)^2 + (r-3)}{6} \end{array}\right\} =$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} \frac{q+1}{3}R - \frac{q^2 + 3q + 2}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2 - r}{6}, \\ \frac{q+1}{3}R + \frac{q^2 + 3q + 2}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2 - r}{6} \end{array}\right\}$$

Er is geen maximum. Het maakt voor speler 1 niet uit of hij rechts of links speelt.

Volgens afspraak speelt hij links (kolom2). Uitbetaling aan de spelers vindt dan plaats via

$f(0, q, r)$ met $q \bmod 2$ en $r \bmod 0$.

$$f(0, q + 1, r) = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{q+1}{3}R - \frac{q^2 + 3q + 2}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2 + r}{6} \right) \\ \left(\frac{q-2}{3}(R - (q-4)) + \frac{q^2 - 7q + 10}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2 - r}{6} + R - (q-1) \right) \\ \left(\frac{q-2}{3}(R - (q-5)) + \frac{(q-2)^2 - 3(q-2)}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2 - r}{6} + R - (q-2) \right) \end{array} \right\}$$

Vereenvoudigd geeft dit:

$$f(0, q + 1, r) = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{q+1}{3}R - \frac{q^2 + 3q + 2}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2 + r}{6} \right) \\ \left(\frac{q+1}{3}R - \frac{q^2 + q}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2 - r}{6} \right) \\ \left(\frac{q+1}{3}R - \frac{q^2 - q - 2}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2 - 3r}{6} \right) \end{array} \right\}$$

Inductie over r

Voor $q \bmod 3 = 0$ en $(r+1) \bmod 3 = 0$ aantonen dat

$$f(0, q, r+1) = \begin{cases} \left(\frac{q}{3} (R - (q-1)) + \frac{q^2 - 3q}{6} + \frac{r+1}{3} R - \frac{(r+1)^2 + r+1}{6} \right) \\ \left(\frac{q}{3} (R - (q-2)) + \frac{q^2 - 3q}{6} + \frac{r+1}{3} R - \frac{(r+1)^2 - (r+1)}{6} \right) \\ \left(\frac{q}{3} (R - (q-3)) + \frac{q^2 - 3q}{6} + \frac{r+1}{3} R - \frac{(r+1)^2 - 3(r+1)}{6} \right) \end{cases}$$

Als $q \bmod 0$ en $(r+1) \bmod 0$ dan is speler 1 aan zet. Keuze uit 2 kolommen.

Bepalen maximum voor speler 1.

$$\max \{ R - (q-1) + f(0, q-1, r+1), R - r + f(0, q, r) \}$$

↑

<i>lemma onderdeel G</i> $(q-1) \bmod 2$ $(r+1) \bmod 0$
--

↑

<i>Inductiehypothese</i> <i>voor $q \bmod 0$</i> <i>en $r \bmod 2$</i>
--

$$\max \left\{ R - (q-1) + \frac{q-3}{3} (R - (q-4)) + \frac{(q-3)^2 - 3(q-3)}{6} + \frac{r+1}{3} R - \frac{(r+1)^2 + r+1}{6}, \right. \\ \left. R - r + \frac{q}{3} (R - (q-1)) + \frac{q^2 - 3q}{6} + \frac{r-2}{3} R - \frac{(r-2)^2 + (r-2)}{6} \right\} =$$

$$\max \left\{ \frac{q}{3} (R - (q-1)) + \frac{q^2 - 3q}{6} + \frac{r+1}{3} R - \frac{(r+1)^2 + r+1}{6}, \right. \\ \left. \frac{q}{3} (R - (q-1)) + \frac{q^2 - 3q}{6} + \frac{r+1}{3} R - \frac{(r+1)^2 + r+1}{6} \right\}$$

Er is geen maximum. Volgens afspraak speelt speler 1 links.

Uitbetaling via $f(0, q-1, r+1)$ met $(q-1) \bmod 2$ en $(r+1) \bmod 0$ (stelling onderdeel G).

$$f(0, q, r+1) = \begin{cases} \left(\frac{q}{3}R - \frac{q^2+q}{6} + \frac{r+1}{3}R - \frac{(r+1)^2+r+1}{6} \right) \\ \left(\frac{q-3}{3}(R-q+5) + \frac{(q-3)^2-3(q-3)}{6} + \frac{r+1}{3}R - \frac{(r+1)^2+r+1}{6} + R-q+2 \right) \\ \left(\frac{q-3}{3}(R-q+6) + \frac{(q-3)^2-3(q-3)}{6} + \frac{r+1}{3}R - \frac{(r+1)^2-3(r+1)}{6} + R-q+3 \right) \end{cases}$$

Vereenvoudigd geeft dit:

$$f(0, q, r+1) = \begin{cases} \left(\frac{q}{3}R - \frac{q^2+q}{6} + \frac{r+1}{3}R - \frac{(r+1)^2+r+1}{6} \right) \\ \left(\frac{q}{3}(R-(q-2)) + \frac{q^2-3q}{6} + \frac{r+1}{3}R - \frac{(r+1)^2-(r+1)}{6} \right) \\ \left(\frac{q}{3}(R-(q-3)) + \frac{q^2-3q}{6} + \frac{r+1}{3}R - \frac{(r+1)^2-3(r+1)}{6} \right) \end{cases}$$

De uitbetalingen komen overeen met hetgeen aangetoond moest worden.

HOOFDSTUK 4

4.1 Lemma 3

In het vorige hoofdstuk zijn lemma 1 en lemma 2 afgeleid en bewezen.

In dit hoofdstuk wordt beschreven hoe aan de hand van beide lemma's lemma 3 wordt afgeleid. Aan de hand van lemma 3 wordt vervolgens in hoofdstuk 4 de stelling bewezen.

Afleiding

Afleiding lemma 3 onderdeel a voor $f(p,q,r)$ met $p \bmod 0$ $q \bmod 0$ en $r \bmod 0$

De lemma 3 wordt op analoge wijze als lemma 2 afgeleid. Beginsituatie is $p \bmod 0$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 0$. De startsituatie is $p \bmod 0$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 0$. Speler 1 is aan zet.

De stelling veronderstelt dat de optimale strategie van de spelers is om de meest linkerkolom te kiezen, behalve als $p=0$ en $q \bmod 0$. Speler 1 zal volgens de stelling links spelen. Vervolgens ontstaat een spelsituatie met $p \bmod 2$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 0$, waarna speler 2 (die aan de beurt is) volgens de stelling links speelt, evenals speler 3 die hierna aan zet is. De eerste kolom wordt op deze wijze volgemaakt, waarna de tweede kolom (met $q \bmod 0$) en de derde kolom (met $r \bmod 0$) gevuld wordt volgens lemma 2.

R-0	*	*	*
R-1	O	O	O
R-2	X	X	X
R-3	*	*	*
R-4	O	O	O
R-5	X	X	X
R-6	*	*	*
R-7	O	O	O
R-8	X	X	X

Voor $p \bmod 0$ $q \bmod 0$ en $r \bmod 0$ geldt:

$$f(p,q,r) = \begin{cases} \frac{p}{3}R - \frac{p^2+p}{6} + \frac{q}{3}R - \frac{q^2+q}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2+r}{6} \\ \frac{p}{3}R - \frac{p^2-p}{6} + \frac{q}{3}R - \frac{q^2-q}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2-r}{6} \\ \frac{p}{3}R - \frac{p^2-3p}{6} + \frac{q}{3}R - \frac{q^2-3q}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2-3r}{6} \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel c voor $f(p,q,r)$ met $p \bmod 1$ $q \bmod 0$ en $r \bmod 0$

Speler 3 is aan zet. Uitbetaling $R-(p-1)$. Vervolgens uitbetaling volgens lemma 3 onderdeel a voor $p-1$.

Voor $p \bmod 1$ $q \bmod 0$ en $r \bmod 0$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2 + p - 1}{6} + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 + q}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2 + r}{6} \\ \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2 - (p-1)}{6} + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 - q}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2 - r}{6} \\ \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2 - 3(p-1)}{6} + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 - 3q}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2 - 3r}{6} + R - (p-1) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel b voor $f(p, q, r)$ met $p \bmod 2$ $q \bmod 0$ en $r \bmod 0$

Speler 2 is aan zet. Uitbetaling $R - (p-2)$. Vervolgens uitbetaling volgens lemma 3 onderdeel c voor $p-1$.

Voor $p \bmod 2$ $q \bmod 0$ en $r \bmod 0$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2 + p - 2}{6} + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 + q}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2 + r}{6} \\ \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2 - (p-2)}{6} + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 - q}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2 - r}{6} + R - (p-1) \\ \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2 - 3(p-2)}{6} + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 - 3q}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2 - 3r}{6} + R - (p-2) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel d voor $f(p, q, r)$ met $p \bmod 0$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 1$

Voor $p \bmod 0$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 1$ geldt dat speler 3 aan zet is. Volgens het vermoeden wordt rechts gespeeld, waarna de situatie ontstaat $p \bmod 0$, $q \bmod 0$, $r \bmod 0$ (lemma 3 onderdeel a).

Voor $p \bmod 0$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 1$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p}{3}R - \frac{p^2 + p}{6} + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 + q}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 + r - 1}{6} \\ \frac{p}{3}R - \frac{p^2 - p}{6} + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 - q}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - (r-1)}{6} \\ \frac{p}{3}R - \frac{p^2 - 3p}{6} + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 - 3q}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - 3(r-1)}{6} + R - (r-1) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel e voor $f(p, q, r)$ met $p \bmod 1$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 1$

Voor $p \bmod 1$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 1$ geldt dat speler 2 aan zet is. Volgens de stelling wordt links gespeeld. Speler 2 ontvangt $R - (p-1)$, waarna situatie $p \bmod 0$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 1$ ontstaat. Dit is lemma 3 onderdeel c voor $p-1$.

Voor $p \bmod 1$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 1$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2 + p - 1}{6} + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 + q}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 + r - 1}{6} \\ \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2 - (p-1)}{6} + R - (p-1) + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 - q}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - (r-1)}{6} \\ \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2 - 3(p-1)}{6} + R + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 - 3q}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - 3(r-1)}{6} + R - (r-1) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel f voor $f(p, q, r)$ met $p \bmod 2$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 1$

Voor $p \bmod 2$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 1$ geldt dat speler 1 aan zet is. Volgens de stelling wordt links gespeeld. Speler 1 ontvangt $R-(p-1)$, waarna situatie $p \bmod 1$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 1$ ontstaat. Dit is lemma 3 onderdeel e voor $p-1$.

Voor $p \bmod 2$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 1$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2 + p - 2}{6} + R - (p-1) + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 + q}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 + r - 1}{6} \\ \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2 - (p-2)}{6} + R - (p-2) + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 - q}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - (r-1)}{6} \\ \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2 - 3(p-2)}{6} + R + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 - 3q}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - 3(r-1)}{6} + R - (r-1) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel g voor $f(p, q, r)$ met $p \bmod 0$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 1$

Voor $p \bmod 0$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 1$ geldt dat speler 2 aan zet is. Volgens de stelling wordt links gespeeld. Dit komt er op neer dat eerst de eerste kolom gevuld wordt, waarna de situatie ontstaat dat $p=0$, $q \bmod 1$, $r \bmod 1$ (lemma 2 onderdeel F).

Voor $p \bmod 0$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 1$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p}{3}R - \frac{p^2 + p}{6} + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 + q - 1}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 + r - 1}{6} \\ \frac{p}{3}R - \frac{p^2 - p}{6} + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 - (q-1)}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - (r-1)}{6} + R - (q-1) \\ \frac{p}{3}R - \frac{p^2 - 3p}{6} + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 - 3(q-1)}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - 3(r-1)}{6} + R - (r-1) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel h voor $f(p, q, r)$ met $p \bmod 1$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 1$

Voor $p \bmod 1$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 1$ geldt dat speler 1 aan zet is. Volgens de stelling wordt links gespeeld. Speler 1 ontvangt $R-(p-1)$, waarna situatie $p \bmod 0$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 1$ ontstaat. Dit is lemma 3 mod(0,1,1) voor $p-1$.

Voor $p \bmod 1$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 1$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2 + p - 1}{6} + R - (p-1) + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 + q - 1}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 + r - 1}{6} \\ \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2 - (p-1)}{6} + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 - (q-1)}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - (r-1)}{6} + R - (q-1) \\ \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2 - 3(p-1)}{6} + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 - 3(q-1)}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - 3(r-1)}{6} + R - (r-1) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel i voor $f(p, q, r)$ met $p \bmod 2$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 1$

Voor $p \bmod 2$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 1$ geldt dat speler 3 aan zet is. Volgens de stelling wordt links gespeeld. Speler 3 ontvangt $R-(p-1)$, waarna situatie $p \bmod 1$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 1$ ontstaat. Dit is lemma 3 $\bmod(1, 1, 1)$ voor $p-1$.

Voor $p \bmod 2$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 1$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2 + p - 2}{6} + R - (p-2) + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 + q - 1}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 + r - 1}{6} \\ \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2 - (p-2)}{6} + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 - (q-1)}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - (r-1)}{6} + R - (q-1) \\ \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2 - 3(p-2)}{6} + R - (p-1) + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 - 3(q-1)}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - 3(r-1)}{6} + R - (r-1) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel j voor $f(p, q, r)$ met $p \bmod 0$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 1$

Voor $p \bmod 0$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 1$ geldt dat speler 1 aan zet is. Volgens de stelling wordt links gespeeld. Dit komt er op neer dat eerst de eerste kolom gevuld wordt, daarna ontstaat de situatie $p=0$, $q \bmod 2$, $r \bmod 1$ (lemma 2 onderdeel l).

Voor $p \bmod 0$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 1$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p}{3}R - \frac{p^2 + p}{6} + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2 + q - 2}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 + r - 1}{6} + R - (q-1) \\ \frac{p}{3}R - \frac{p^2 - p}{6} + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2 - (q-2)}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - (r-1)}{6} + R - (q-2) \\ \frac{p}{3}R - \frac{p^2 + 3p}{6} + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2 - 3(q-2)}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - 3(r-1)}{6} + R - (r-1) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel k voor $f(p, q, r)$ met $p \bmod 1$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 1$

Voor $p \bmod 1$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 1$ geldt dat speler 3 aan zet is. Volgens de stelling wordt links gespeeld. Speler 3 ontvangt $R-(p-1)$, waarna situatie $p \bmod 0$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 1$ ontstaat. Dit is lemma 3 $\bmod(0, 2, 1)$ voor $p-1$.

Voor $p \bmod 1$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 1$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2 + (p-1)}{6} + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2 + q - 2}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 + r - 1}{6} + R - (q-1) \\ \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2 - (p-1)}{6} + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2 - (q-2)}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - (r-1)}{6} + R - (q-2) \\ \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2 + 3(p-1)}{6} + R - (p-1) + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2 - 3(q-2)}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - 3(r-1)}{6} + R - (r-1) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel l voor $f(p,q,r)$ met $p \bmod 2$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 1$

Voor $p \bmod 2$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 1$ geldt dat speler 2 aan zet is. Volgens de stelling wordt links gespeeld. Speler 2 ontvangt $R-(p-1)$, waarna situatie $p \bmod 1$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 1$ ontstaat. Dit is lemma 3 mod(1,2,1) voor $p-1$.

Voor $p \bmod 2$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 1$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2 + (p-2)}{6} + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2 + q-2}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 + r-1}{6} + R - (q-1) \\ \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2 - (p-2)}{6} + R - (p-1) + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2 - (q-2)}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - (r-1)}{6} + R - (q-2) \\ \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2 + 3(p-2)}{6} + R - (p-2) + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2 - 3(q-2)}{6} + \frac{r-1}{3}R - \frac{(r-1)^2 - 3(r-1)}{6} + R - (r-1) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel m voor $f(p,q,r)$ met $p \bmod 0$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 2$

Voor $p \bmod 0$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 2$ geldt dat speler 2 aan zet is. Volgens de stelling wordt rechts gespeeld. Dit komt er op neer dat eerst de eerste kolom gevuld wordt, daarna ontstaat de situatie $p \bmod 0$, $q \bmod 0$, $r \bmod 1$ (lemma 2 onderdeel B).

Voor $p \bmod 0$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 2$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p}{3}R - \frac{p^2 + p}{6} + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 + q}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 + r-2}{6} \\ \frac{p}{3}R - \frac{p^2 - p}{6} + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 - q}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 - (r-2)}{6} + R - (r-1) \\ \frac{p}{3}R - \frac{p^2 - 3p}{6} + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 - 3q}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 - 3(r-2)}{6} + R - (r-2) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel n voor $f(p,q,r)$ met $p \bmod 1$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 2$

Voor $p \bmod 1$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 2$ geldt dat speler 1 aan zet is. Volgens de stelling wordt links gespeeld. Speler 1 ontvangt $R-(p-1)$, waarna situatie $p \bmod 0$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 2$ ontstaat. Dit is lemma 3 mod(0,0,2) voor $p-1$.

Voor $p \bmod 1$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 2$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2 + p-1}{6} + R - (p-1) + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 + q}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 + r-2}{6} \\ \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2 - (p-1)}{6} + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 - q}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 - (r-2)}{6} + R - (r-1) \\ \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2 - 3(p-1)}{6} + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 - 3q}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 - 3(r-2)}{6} + R - (r-2) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel o voor $f(p,q,r)$ met $p \bmod 2$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 2$

Voor $p \bmod 2$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 2$ geldt dat speler 3 aan zet is. Volgens de stelling wordt links gespeeld. Speler 3 ontvangt $R-(p-1)$, waarna situatie $p \bmod 1$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 2$ ontstaat. Dit is lemma 3 mod(1,0,2) voor $p-1$.

Voor $p \bmod 2$, $q \bmod 0$ en $r \bmod 2$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2 + p - 2}{6} + R - (p-2) + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 + q}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 + r - 2}{6} \\ \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2 - (p-2)}{6} + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 - q}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 - (r-2)}{6} + R - (r-1) \\ \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2 - 3(p-2)}{6} + R - (p-1) + \frac{q}{3}R - \frac{q^2 - 3q}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 - 3(r-2)}{6} + R - (r-2) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel p voor $f(p, q, r)$ met $p \bmod 0$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 2$

Speler 1 is aan zet. Vlgd stelling wordt links gespeeld. Spelers maken eerst de eerste kolom vol. Daarna lemma 2 voor $p=0$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 2$ (onderdeel E).

Voor $p \bmod 0$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 2$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p}{3}R - \frac{p^2 + p}{6} + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 + q - 1}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 + r - 2}{6} + R - (q-1) \\ \frac{p}{3}R - \frac{p^2 - p}{6} + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 - (q-1)}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 - (r-2)}{6} + R - (r-1) \\ \frac{p}{3}R - \frac{p^2 - 3p}{6} + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 - 3(q-1)}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 - 3(r-2)}{6} + R - (r-2) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel q voor $f(p, q, r)$ met $p \bmod 1$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 2$

Voor $p \bmod 1$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 2$ geldt dat speler 3 aan zet is. Volgens de stelling wordt links gespeeld. Speler 3 ontvangt $R-(p-1)$, waarna situatie $p \bmod 0$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 2$ ontstaat. Dit is lemma 3 $\bmod(0, 1, 2)$ voor $p-1$.

Voor $p \bmod 1$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 2$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2 + p - 1}{6} + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 + q - 1}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 + r - 2}{6} + R - (q-1) \\ \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2 - (p-1)}{6} + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 - (q-1)}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 - (r-2)}{6} + R - (r-1) \\ \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2 - 3(p-1)}{6} + R - (p-1) + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 - 3(q-1)}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 - 3(r-2)}{6} + R - (r-2) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel r voor $f(p, q, r)$ met $p \bmod 2$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 2$

Voor $p \bmod 2$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 2$ geldt dat speler 2 aan zet is. Volgens de stelling wordt links gespeeld. Speler 2 ontvangt $R-(p-1)$, waarna situatie $p \bmod 1$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 2$ ontstaat. Dit is lemma 3 $\bmod(1, 1, 2)$ voor $p-1$.

Voor $p \bmod 2$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 2$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2 + p - 2}{6} + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 + q - 1}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 + r - 2}{6} + R - (q-1) \\ \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2 - (p-2)}{6} + R - (p-1) + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 - (q-1)}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 - (r-2)}{6} + R - (r-1) \\ \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2 - 3(p-2)}{6} + R - (p-2) + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2 - 3(q-1)}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2 - 3(r-2)}{6} + R - (r-2) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel s voor $f(p,q,r)$ met $p \bmod 0$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 2$

Speler 3 is aan zet. Volgens de stelling wordt links gespeeld. Spelers maken eerst de eerste kolom vol. Daarna stelling voor $p=0$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 2$ (onderdeel H).

Voor $p \bmod 0$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 2$ geldt:

$$f(p,q,r) = \begin{cases} \frac{p}{3} - \frac{p^2+p}{6} + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2+q-2}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2+r-2}{6} + R - (q-2) \\ \frac{p}{3} - \frac{p^2-p}{6} + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2-(q-2)}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2-(r-2)}{6} + R - (r-1) \\ \frac{p}{3} - \frac{p^2+3p}{6} + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2-3(q-2)}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2-3(r-2)}{6} + R - (r-2) + R - (q-1) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel t voor $f(p,q,r)$ met $p \bmod 1$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 2$

Voor $p \bmod 1$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 2$ geldt dat speler 2 aan zet is. Volgens de stelling wordt links gespeeld. Speler 2 ontvangt $R-(p-1)$, waarna situatie $p \bmod 0$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 2$ ontstaat. Dit is lemma 3 mod(0,2,2) voor $p-1$.

Voor $p \bmod 1$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 2$ geldt:

$$f(p,q,r) = \begin{cases} \frac{p-1}{3} - \frac{(p-1)^2+p-1}{6} + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2+q-2}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2+r-2}{6} + R - (q-2) \\ \frac{p-1}{3} - \frac{(p-1)^2-(p-1)}{6} + R - (p-1) + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2-(q-2)}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2-(r-2)}{6} + R - (r-1) \\ \frac{p-1}{3} - \frac{(p-1)^2+3(p-1)}{6} + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2-3(q-2)}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2-3(r-2)}{6} + R - (r-2) + R - (q-1) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel u voor $f(p,q,r)$ met $p \bmod 2$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 2$

Voor $p \bmod 2$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 2$ geldt dat speler 1 aan zet is. Volgens de stelling wordt links gespeeld. Speler 1 ontvangt $R-(p-1)$, waarna situatie $p \bmod 1$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 2$ ontstaat. Dit is lemma 3 mod(1,2,2) voor $p-1$.

Voor $p \bmod 2$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 2$ geldt:

$$f(p,q,r) = \begin{cases} \frac{p-2}{3} - \frac{(p-2)^2+p-2}{6} + R - (p-1) + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2+q-2}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2+r-2}{6} + R - (q-2) \\ \frac{p-2}{3} - \frac{(p-2)^2-(p-2)}{6} + R - (p-2) + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2-(q-2)}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2-(r-2)}{6} + R - (r-1) \\ \frac{p-2}{3} - \frac{(p-2)^2+3(p-2)}{6} + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2-3(q-2)}{6} + \frac{r-2}{3}R - \frac{(r-2)^2-3(r-2)}{6} + R - (r-2) + R - (q-1) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel v voor $f(p,q,r)$ met $p \bmod 0$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 0$

Speler 3 is aan zet. Volgens de stelling wordt links gespeeld. Spelers maken eerst de eerste kolom vol. Daarna lemma 2 voor $q=0$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 0$ (onderdeel D).

Voor $p \bmod 0$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 0$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p}{3}R - \frac{p^2+p}{6} + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2+q-1}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2+r}{6} \\ \frac{p}{3}R - \frac{p^2-p}{6} + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2-(q-1)}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2-r}{6} \\ \frac{p}{3}R - \frac{p^2-3p}{6} + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2-3(q-1)}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2-3r}{6} + R - (q-1) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel w voor $f(p, q, r)$ met $p \bmod 1$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 0$

Voor $p \bmod 1$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 0$ geldt dat speler 2 aan zet is. Volgens de stelling wordt links gespeeld. Speler 2 ontvangt $R-(p-1)$, waarna situatie $p \bmod 0$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 0$ ontstaat. Dit is lemma 3 $\bmod(0,1,0)$ voor $p-1$.

Voor $p \bmod 1$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 0$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2+p-1}{6} + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2+q-1}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2+r}{6} \\ \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2-(p-1)}{6} + R - (p-1) + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2-(q-1)}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2-r}{6} \\ \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2-3(p-1)}{6} + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2-3(q-1)}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2-3r}{6} + R - (q-1) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel x voor $f(p, q, r)$ met $p \bmod 2$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 0$

Voor $p \bmod 2$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 0$ geldt dat speler 1 aan zet is. Volgens de stelling wordt links gespeeld. Speler 1 ontvangt $R-(p-1)$, waarna situatie $p \bmod 1$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 0$ ontstaat. Dit is lemma 3 $\bmod(1,1,0)$ voor $p-1$.

Voor $p \bmod 2$, $q \bmod 1$ en $r \bmod 0$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2+p-2}{6} + R - (p-1) + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2+q-1}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2+r}{6} \\ \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2-(p-2)}{6} + R - (p-2) + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2-(q-1)}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2-r}{6} \\ \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2-3(p-2)}{6} + \frac{q-1}{3}R - \frac{(q-1)^2-3(q-1)}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2-3r}{6} + R - (q-1) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel y voor $f(p, q, r)$ met $p \bmod 0$, $q \bmod 2$ en $r \bmod 0$

Speler 2 is aan zet. Volgens de stelling wordt links gespeeld. Spelers maken eerst de eerste kolom vol. Daarna lemma 2 voor $q \bmod 2$ en $r \bmod 0$ (onderdeel G).

Voor $p \bmod 0, q \bmod 2$ en $r \bmod 0$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p}{3}R - \frac{p^2+p}{6} + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2+q-2}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2+r}{6} \\ \frac{p}{3}R - \frac{p^2-p}{6} + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2-(q-2)}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2-r}{6} + R - (q-1) \\ \frac{p}{3}R - \frac{p^2-3p}{6} + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2-3(q-2)}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2-3r}{6} + R - (q-2) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel z voor $f(p, q, r)$ met $p \bmod 1, q \bmod 2$ en $r \bmod 0$

Voor $p \bmod 1, q \bmod 2$ en $r \bmod 0$ geldt dat speler 1 aan zet is. Volgens de stelling wordt links gespeeld. Speler 1 ontvangt $R-(p-1)$, waarna situatie $p \bmod 0, q \bmod 2$ en $r \bmod 0$ ontstaat. Dit is lemma 3 $\bmod(0,2,0)$ voor $p-1$.

Voor $p \bmod 1, q \bmod 2$ en $r \bmod 0$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2+p-1}{6} + R - (p-1) + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2+q-2}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2+r}{6} \\ \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2-(p-1)}{6} + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2-(q-2)}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2-r}{6} + R - (q-1) \\ \frac{p-1}{3}R - \frac{(p-1)^2-3(p-1)}{6} + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2-3(q-2)}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2-3r}{6} + R - (q-2) \end{cases}$$

Afleiding lemma 3 onderdeel ij voor $f(p, q, r)$ met $p \bmod 2, q \bmod 2$ en $r \bmod 0$

Voor $p \bmod 2, q \bmod 2$ en $r \bmod 0$ geldt dat speler 3 aan zet is. Volgens de stelling wordt links gespeeld. Speler 3 ontvangt $R-(p-1)$, waarna situatie $p \bmod 1, q \bmod 2$ en $r \bmod 0$ ontstaat. Dit is lemma 3 $\bmod(1,2,0)$ voor $p-1$.

Voor $p \bmod 2, q \bmod 2$ en $r \bmod 0$ geldt:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2+p-2}{6} + R - (p-2) + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2+q-2}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2+r}{6} \\ \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2-(p-2)}{6} + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2-(q-2)}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2-r}{6} + R - (q-1) \\ \frac{p-2}{3}R - \frac{(p-2)^2-3(p-2)}{6} + R - (p-1) + \frac{q-2}{3}R - \frac{(q-2)^2-3(q-2)}{6} + \frac{r}{3}R - \frac{r^2-3r}{6} + R - (q-2) \end{cases}$$

Er zijn nu in totaal 27 onderdelen van de lemma 3 afgeleid, welke bewezen moeten worden met driedimensionale inductie naar p, q en r .

HOOFDSTUK 5

5.1 Notatie

In het vervolg van het onderzoek worden ter nadere bestudering van het monominospel $M(R, 3)$ de volgende notaties gebruikt.

De cellen in het rooster worden aangegeven door paren (i, j) met $1 \leq i \leq R$ als het rijnummer en $1 \leq j \leq 3$ het kolomnummer. $\mathfrak{R} = \{0, 1, 2, \dots, R\}$ is de verzameling van het aantal mogelijk onbezette cellen per kolom, waarbij genoteerd wordt $P = \sum_{j=1}^3 p_j$.

De vector $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in \mathfrak{R}^3$ beschrijft voor een kolom j , met $1 \leq j \leq 3$, dat de cellen 1 tot $R - \rho_j$ bezet zijn door monomino's, waarbij de top ρ_j cellen onbezet zijn. De vector ρ representeert dus een positie op het speelbord waar $3R - P$ monomino's zijn gespeeld.

Voor $0 \leq \rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho_3 \leq R$ is $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ de toestand waarbij in kolom 1 nog ρ_1 lege plaatsen zijn, in kolom 2 nog ρ_2 en in kolom 3 nog ρ_3 lege plaatsen.

De afbeeldingen $f(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ zijn de resterende uitbetalingen aan respectievelijk speler 1, 2 en 3 in het geval de spelers beginnen bij toestand $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ en allemaal vanaf dat moment een optimale strategie spelen.

Om te bepalen welke spelers aan zet zijn, geldt:

speler 1 als $(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) \bmod 3 \equiv 0$

speler 2 als $(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) \bmod 3 \equiv 2$

speler 3 als $(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) \bmod 3 \equiv 1$

Vanwege keuzes die in het vooronderzoek zijn gemaakt geldt $\rho_1 = p$, $\rho_2 = q$, $\rho_3 = r$.

Verder geldt dat $p \bmod 3 \equiv a$, $q \bmod 3 \equiv b$, $r \bmod 3 \equiv c$ wordt genoteerd als $\text{mod}(a, b, c)$ met $a, b, c \in \{0, 1, 2\}$. Ter illustratie: $f(2, 4, 5) = \text{mod}(2, 1, 2)$.

Voor $0 \leq p \leq q \leq r \leq R$ is (p, q, r) de toestand waarbij in kolom 1 nog p lege plaatsen zijn, in kolom 2 nog q en in kolom 3 nog r lege plaatsen.

Aldus zijn de afbeeldingen $f(p, q, r)$ de resterende uitbetalingen aan respectievelijk speler 1, 2 en 3 in het geval de spelers beginnen bij toestand (p, q, r) en allemaal vanaf dat moment een optimale strategie spelen. De afbeelding $g(p, q, r)$ is de toestand waarin het spel overgaat vanuit toestand (p, q, r) indien de speler die op dat moment aan de beurt is een optimale strategie speelt. Dus $g(p, q, r) = (p - 1, q, r)$ en/of $g(p, q, r) = (p, q - 1, r)$ en/of $g(p, q, r) = (p, q, r - 1)$.

5.2 Lemma 3

Nadere analyse van lemma 3 uit hoofdstuk 4 leert dat de verschillende onderdelen van de uitbetalingsformule onderling samenhangen. Lemma 3 wordt op een nieuwe wijze als volgt gedefinieerd:

Lemma 3

Voor $p, q, r, a, b, c, (a-1), (b-1), (c-1) \geq 0$ geldt

$$f_i(p, q, r) = h_i(p-a) + g_i(q-b) + t_i(r-c) + k_i(p) + m_i(q) + n_i(r) \quad \text{met } i \in \{1, 2, 3\}$$

waarbij $h_i(p), g_i(q), t_i(r), k_i(p), m_i(q), n_i(r)$ worden gedefinieerd als volgt.

$$h_i(p) = \begin{cases} h_1(p) = \frac{p}{3}R - \frac{p^2+p}{6} \\ h_2(p) = \frac{p}{3}R - \frac{p^2-p}{6} \\ h_3(p) = \frac{p}{3}R - \frac{p^2-3p}{6} \end{cases} \quad g_i(q) = \begin{cases} g_1(q) = \frac{q}{3}R - \frac{q^2+q}{6} \\ g_2(q) = \frac{q}{3}R - \frac{q^2-q}{6} \\ g_3(q) = \frac{q}{3}R - \frac{q^2-3q}{6} \end{cases} \quad t_i(r) = \begin{cases} t_1(r) = \frac{r}{3}R - \frac{r^2+r}{6} \\ t_2(r) = \frac{r}{3}R - \frac{r^2-r}{6} \\ t_3(r) = \frac{r}{3}R - \frac{r^2-3r}{6} \end{cases}$$

Merk op dat $g_i(q) = h_i(q)$ en $t_i(r) = h_i(r)$. (*)

Merk tevens op dat de eerdere afbeelding $g(p, q, r)$ onderscheiden wordt van $g_i(q)$

Voor speler 1 geldt verder $h_1(p) = R - (p-1) + h_1(p-3)$

Net zo, voor speler 2 $h_2(p) = R - (p-2) + h_2(p-3)$

en voor speler 3 $h_3(p) = R - (p-3) + h_3(p-3)$.

Samenvattend: $h_i(p) = R - (p-i) + h_i(p-3), i = 1, 2, 3$ (**)

De expressies $k_i(p), m_i(q), n_i(r)$ zijn voor elke te bewijzen onderscheidende spelsituatie vermeld in onderstaande tabel.

	SPELER 1		SPELER 2			SPELER 3		
mod(a,b,c)	k(p)	m(q)	k(p)	m(q)	n(r)	k(p)	m(q)	n(r)
000	0	0	0	0	0	0	0	0
001	0	0	0	0	0	0	0	R-(r-1)
002	0	0	0	0	R-(r-1)	0	0	R-(r-2)
010	0	0	0	0	0	0	R-(q-1)	0
011	0	0	0	R-(q-1)	0	0	0	R-(r-1)
012	0	R-(q-1)	0	0	R-(r-1)	0	0	R-(r-2)
020	0	0	0	R-(q-1)	0	0	R-(q-2)	0
021	0	R-(q-1)	0	R-(q-2)	0	0	0	R-(r-1)
022	0	R-(q-2)	0	0	R-(r-1)	0	R-(q-1)	R-(r-2)
100	0	0	0	0	0	R-(p-1)	0	0
101	0	0	R-(p-1)	0	0	0	0	R-(r-1)
102	R-(p-1)	0	0	0	R-(r-1)	0	0	R-(r-2)
110	0	0	R-(p-1)	0	0	0	R-(q-1)	0
111	R-(p-1)	0	0	R-(q-1)	0	0	0	R-(r-1)
112	0	R-(q-1)	0	0	R-(r-1)	R-(p-1)	0	R-(r-2)
120	R-(p-1)	0	0	R-(q-1)	0	0	R-(q-2)	0
121	0	R-(q-1)	0	R-(q-2)	0	R-(p-1)	0	R-(r-1)
122	0	R-(q-2)	R-(p-1)	0	R-(r-1)	0	R-(q-1)	R-(r-2)
200	0	0	R-(p-1)	0	0	R-(p-2)	0	0
201	R-(p-1)	0	R-(p-2)	0	0	0	0	R-(r-1)
202	R-(p-2)	0	0	0	R-(r-1)	R-(p-1)	0	R-(r-2)
210	R-(p-1)	0	R-(p-2)	0	0	0	R-(q-1)	0
211	R-(p-2)	0	0	R-(q-1)	0	R-(p-1)	0	R-(r-1)
212	0	R-(q-1)	R-(p-1)	0	R-(r-1)	R-(p-2)	0	R-(r-2)
220	R-(p-2)	0	0	R-(q-1)	0	R-(p-1)	R-(q-2)	0
221	0	R-(q-1)	R-(p-1)	R-(q-2)	0	R-(p-2)	0	R-(r-1)
222	R-(p-1)	R-(q-2)	R-(p-2)	0	R-(r-1)	0	R-(q-1)	R-(r-2)

Merk op dat voor speler 1 geldt dat $n_1(r) = 0$.

5.3 Stelling

Op basis van het vermoeden zoals beschreven in hoofdstuk 2 wordt ter beantwoording van onderzoeksvraag de volgende stelling geformuleerd.

Stelling

In het monominospel $M(R, 3)$ wordt het evenwichtsspel ofwel worden de optimale acties van de spelers als volgt bereikt:

- (a) In een gegeven spelsituatie $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ spelen de spelers de linker kolom, tenzij
 (b) er een spelsituatie $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ ontstaat waarbij $\rho_1 \bmod 3 \equiv 0$, $\rho_2 \bmod 3 \equiv 0$. In dat geval spelen speler 2 en 3 de rechterkolom.

5.4 Bewijs

De stelling wordt bewezen door inductie naar het aantal resterende zetten indien gestart wordt vanuit een bepaalde positie p (onafhankelijk van wie de monomino's geplaatst heeft in de startpositie p). Dat wil zeggen dat gekeken wordt naar de uitbetalingen die de spelers ontvangen voor het bezetten van de resterende vrije cellen.

Bewezen moet worden dat het spel als beschreven in de stelling optimaal is met betrekking tot de resterende uitbetalingen voor elke startpositie $\rho \in 3R$. Dit betekent dat het spel ook optimaal is als er geen lege cellen zijn op het speelbord.

Gestart wordt met inductie naar s , met s het aantal resterende zetten tot alle cellen op het bord bedekt zijn. De inductiebasis voor $s=0$ is triviaal: in deze situatie zijn er geen lege cellen en is de resterende uitbetaling voor de spelers 0.

Omdat $0 \leq p \leq q \leq r \leq R$ ontstaat voor $s = 1$ de situatie $f(0, 0, 1)$ waarbij de bovenste cel in de rechterkolom onbedekt is. Deze situatie is triviaal: speler 3 is aan zet en er rest geen andere keuze dan de monomino op deze cel te plaatsen.

Voor $s=2$ bestaan twee mogelijkheden: hetzij de bovenste twee cellen van de rechterkolom hetzij de de bovenste (eerste) cellen van de middelste en de rechterkolom zijn onbedekt (respectievelijk $f(0, 0, 2)$ en $f(0, 1, 1)$). Ook hier geldt dat de keuze (voor in dit geval speler 2) triviaal is.

Voor $s=3$ zijn er drie mogelijke spelsituaties, te weten $f(0, 1, 2)$, $f(1, 1, 1)$ en $f(0, 0, 3)$. Hiervan is alleen de keuzemogelijkheid in de eerste niet triviaal. Speler 1 is aan zet. Gekozen kan worden de monomino in de tweede kolom te plaatsen of in de derde.

Plaatsing in de tweede kolom levert speler 1 een uitbetaling van $R - (q - 1) = R$, plaatsing in de derde kolom levert een uitbetaling van $R - (r - 1) = R - 1$. Speler 1 zal er voor kiezen de monomino in de tweede kolom te plaatsen, waarna het spel overgaat in $g(0, 1, 2) = (0, 0, 2)$.

Voor elke mogelijke spelsituatie vanaf $s \geq 3$ bestaat aldus minstens één situatie met een niet-triviale keuzemogelijkheid.

De eerste speelsituatie welke bekeken wordt is de situatie met startpositie $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3) = (p, q, r)$ met $p \bmod 3 \equiv 0$, $q \bmod 3 \equiv 0$ en $r \bmod 3 \equiv 0$.

Voor deze (en de andere mogelijke speelsituaties) geldt dat de inductiebasis

$f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ klopt. De inductiehypothese is de aanname dat de uitdrukkingen voor $f_i(p, q, r)$ kloppen voor alle (p, q, r) met $0 \leq p \leq q \leq r \leq R$ én $p + q + r \leq s$. Bewezen dient te worden dat de inductiehypothese ook klopt als $p + q + r = s + 1$.

Voor beschouwing van $p + q + r = s + 1$ bestaan 3 mogelijkheden: kolom 1, kolom 2 of kolom 3 wordt uitgebreid met één cel. Deze situaties worden hieronder voor $\bmod(0, 0, 0)$ nader bekeken.

Uitbreiding kolom 1: inductie naar p

Merk op $0 \leq p \leq q \leq r \leq R$. Bekijk vervolgens $(p+1, q, r)$. Omdat voor (p, q, r) geldt mod $(0,0,0)$, telt $(p+1 \leq q \text{ dus})$ $p \leq q-3$. Bij $(p+1, q, r)$ hoort mod $(1, 0, 0)$. In dat geval is speler 3 aan zet en zijn er twee mogelijke situaties: $q = r$ (situatie A_1) of $q < r$ (situatie A_2).

Situatie A_1 : Als $q = r$ dan $(p+1, q, q)$. Speler 3 heeft keuze uit kolommen 1 en 2 (merk op dat in dit geval kolom 3 gelet op de spelregels geen keuze is). Aangevoerd moet worden dat de keuze voor kolom 1 de maximale uitbetaling voor speler 3 oplevert, zodat $g(p+1, q, q) = (p, q, q)$ en aldus resulteert in een positie die equivalent is aan de startpositie p .

Welnu:

$$f_3(p+1, q, q) = \max\{R-p+f_3(p, q, q), R-q+1+f_3(p+1, q-1, q)\}$$

Merk op dat $f_3(p, q, q) = \text{mod}(0, 0, 0)$ en $f_3(p+1, q-1, q) = \text{mod}(1, 2, 0)$.

Uit inductie en (*) volgt ter bepaling van het maximum nu verder:

$$= \max\{R-p+h_3(p)+h_3(q)+h_3(q), R-q+1+h_3(p)+h_3(q-3)+h_3(q)+R-(q-3)\}$$

Dan volgt uit (**) voor $i = 3$:

$$\begin{aligned} &= \max\{R-p+h_3(p)+2h_3(q), R-q+1+h_3(p)+2h_3(q)\} \\ &= R-p+h_3(p)+2h_3(q) \text{ omdat } p \leq q-3 \end{aligned}$$

Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p+1, q, q) = (p, q, q)$

Conclusie: $f_3((p+1), q, q) = R-p+h_3(p)+2h_3(q)$.

Situatie A_2 : $q < r$ dan $(p+1, q, r)$. Speler 3 heeft keuze uit kolommen 1, 2 en 3.

Aangevoerd moet worden dat de keuze voor kolom 1 de maximale uitbetaling voor speler 3 oplevert, zodat $g(p+1, q, r) = (p, q, r)$.

Merk op dat $f_3(p, q, r) = \text{mod}(0, 0, 0)$, $f_3(p+1, q-1, r) = \text{mod}(1, 2, 0)$ en $f_3(p+1, q, r-1) = \text{mod}(1, 0, 2)$.

$$\begin{aligned} f_3(p+1, q, r) &= \max\{R-p+f_3(p, q, r), R-q+1+f_3(p+1, q-1, r), R-r+1+f_3(p+1, q, r-1)\} \\ &= \max\{R-p+h_3(p)+h_3(q)+h_3(r), \\ &\quad R-q+1+h_3(p)+h_3(q-3)+h_3(r)+R-(q-3), \\ &\quad R-r+1+h_3(p)+h_3(q)+h_3(r-3)+R-(r-3)\} \end{aligned}$$

Dan volgt uit (**) voor $i = 3$:

$$\begin{aligned} &= \max \{R-p+h_3(p)+h_3(q)+h_3(r), \\ &\quad R-q+1+h_3(p)+h_3(q)+h_3(r), \\ &\quad R-r+1+h_3(p)+h_3(q)+h_3(r)\} \\ &= R-p+h_3(p)+h_3(q)+h_3(r) \text{ omdat } p < q < r. \end{aligned}$$

Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p+1, q, r) = (p, q, r)$

Voor beide gevallen A_1 en A_2 geldt nu $g(p+1, q, r) = (p, q, r)$.

Aldus resulteert de keuze voor het maximum in een positie die equivalent is aan de startpositie p . Merk op dat p voldoet aan de voorwaarden van de hypothese, dus de spelers spelen nu het spel volgens de stelling ten einde hun uitbetaling te maximaliseren.

Geconcludeerd wordt verder voor zowel A_1 en A_2 dat $f_i((p+1), q, r) = f_i(p, q, r)$ voor $i = 1, 2$. Dit klopt. Hiermee is de inductie naar p bij mod $(0,0,0)$ compleet.

Inductie naar q en r verloopt op analoge wijze.

In de bijlage zijn bewijzen opgenomen voor de overige speelsituaties in modulovorm.

5.5 Nadere beschouwing van het bewijs

In tabel 5.1 zijn voor elke speelsituatie de speelsituaties voor inductie naar respectievelijk p, q , en r opgenomen, met de situaties waarin deze overgaan volgens het bewijs. In de kolom daarnaast staat de bijbehorende kolomkeuze.

Ter illustratie (eerste rij in de tabel):

Spelsituatie is mod $(0,0,0)$. Deze gaat volgens stelling over in $(2,0,0)$. Dus $g(0,0,0)=(2,0,0)$

Inductie naar p geeft speelsituatie $(1,0,0)$. Uit het bewijs volgt dat deze situatie overgaat in $(0,0,0)$. Dus $g(1,0,0)=(0,0,0)$. Dit betekent dat speler 1 die aan zet is kiest voor kolom 1.

Conclusie is dat dit conform de stelling is.

Inductie naar q geeft speelsituatie $(0,1,0)$. Uit het bewijs volgt dat deze situatie overgaat in $(0,0,0)$. Dus $g(0,1,0)=(0,0,0)$. Dit betekent dat speler 1 kiest voor kolom 2. Volgens de stelling moet dit de meest linkerkolom zijn, met andere woorden de speelsituatie $(0,1,0)$ wordt alleen dan bereikt als alle cellen in de eerste kolom bedekt zijn. Dit is conform de stelling dat spelers voor de linkerkolom kiezen.

Inductie naar r geeft speelsituatie $(0,0,1)$. Uit bewijs volgt $g(0,0,1)=(0,0,0)$. Speler 1 maakt keuze voor kolom 3. Dit is conform de stelling.

Dan de situatie die ontstaat bij inductie naar q bij mod (002) (de derde rij in de tabel).

Er zijn volgens het bewijs twee mogelijkheden: $g(0,1,2) = (2,1,2)$, dus keuze voor kolom 1 danwel $g(0,1,2)=(0,0,2)$ dus keuze voor kolom 2.

Conclusie: de speelsituatie mod $(0,1,2)$ kan ontstaan als kolom 1 nog niet geheel bedekt is. In dat geval kiest de speler voor de eerste kolom (conform stelling). De speelsituatie mod $(0,1,2)$ kan daarnaast ook ontstaan als kolom 1 geheel bedekt is, in welk geval kolom 2 de meest linkerkolom is.

Verder valt op dat een aantal speelsituaties niet gebruikt worden in de inducties naar p, q, r , met andere woorden geen enkele speelsituatie die als startpositie in de inductie gebruikt wordt leidt naar een dergelijke speelsituatie. Bijvoorbeeld: (6e rij tabel) inductie naar r van speelsituatie $(0,1,2)$ geeft $g(0,1,0)=(0,0,0)$. De speelsituatie $(0,0,0)$ is in deze een uitkomst van de inductie.

Nergens echter worden de speelsituaties $(2,0,1)$, $(2,0,2)$, $(2,1,0)$, $(2,1,1)$, $(2,2,0)$, $(2,2,2)$ gebruikt in de zin dat ze een uitkomst van een inductie naar p, q of r zijn. In tabel 5.1 zijn deze situaties omkaderd weergegeven.

Bovenstaande is hieronder nader uitgewerkt voor (2,0,1):

Het kleinste speelbord waarop deze spelsituatie kan ontstaan is een speelbord met 4 rijen (en 3 kolommen). Startpositie is (1,1,1). Ervan uitgaande dat de stelling klopt, volgen nu de volgende keuzes.

Speler 1 is aan zet. $g(1,1,1)=(0,1,1)$

Vervolgens is speler 2 aan zet. $g(0,1,1)=(2,1,1)$

Dan: $g(2,1,1)=(1,1,1)$

Conclusie: situatie (2,0,1) zal niet bereikt worden.

Hierop voortbouwend betekent dat voor spelsituatie (0,1,0) het volgende.

Volgens de stelling geldt $g(0,1,0)=(2,1,0)$. Deze situatie wordt echter niet bereikt.

Dat betekent dat de eerste kolom geen optie kan zijn. Dus $p=0$ (alle cellen in de kolom zijn bedekt). Dan is kolom 2 de meest linkerkeuze en volgt: $g(0,1,0)=(0,0,0)$. Deze laatste situatie bestaat. Inductie over p van spelsituatie (0,1,0) (6e rij van onderen) leidt naar (0,0,0), hetgeen overeenkomt met $g(0,1,0)=(0,0,0)$.

Volgens de stelling geldt $g(0,1,1)=(2,1,1)$. Deze situatie wordt niet bereikt, dus $p=0$ en kolom 2 is de meest linkerkeuze: $g(0,1,1)=(0,0,1)$. Deze laatste situatie bestaat. Inductie over p van spelsituatie (0,1,1) (5e rij van onderen) leidt idd naar (0,0,1).

Volgens de stelling geldt $g(0,2,0)=(2,2,0)$. Deze situatie wordt niet bereikt, dus $p=0$ en kolom 2 is de meest linkerkeuze: $g(0,2,0)=(0,1,0)$. Deze laatste situatie bestaat. Inductie over p van spelsituatie (0,2,0) (3e rij van onderen) leidt idd naar (0,1,0).

Volgens de stelling geldt $g(0,2,2)=(2,2,2)$. Deze situatie wordt niet bereikt, dus $p=0$ en kolom 2 is de meest linkerkeuze: $g(0,2,2)=(0,1,2)$. Deze laatste situatie bestaat. Inductie over p van spelsituatie (0,2,2) (onderste rij) leidt idd naar (0,1,2).

mod(a,b,c)	gaat over in	inductie p			inductie q			inductie r		
		$g(p+1,q,r)$	gaat over in	kolom keuze	$g(p,q+1,r)$	gaat over in	kolom keuze	$g(p,q,r+1)$	gaat over in	kolom keuze
000	200	100	000	1	010	000	2	001	000	3
001	000	101	001	1	011	001	2	002	001	3
002	001	102	002	1	012	212,002	1 of 2	000	200,020, 002	1 of 2 of 3
010	210 wordt 000	110	010	1	020	010	2	011	001	2
	211 wordt 001									
011		111	011	1	021	221,011	1 of 2	012	212,002	1 of 2
012	212	112	012	1	022	012	2	010	000	2
020	220 wordt 010	120	020, 122	1 of 3	000	200,020, 002	1 of 2 of 3	021	221,011	1 of 2
021	221	121	021	1	001	000	3	022	012	2

	222 wordt 012									
022		122	121, 022	1 of 3	002	001	3	020	010	2
100	000	200	100	1	110	010	1	101	001	1
101	001	201	101, 221	1 of 2	111	011	1	102	002	1
102	002	202	102	1	112	012	1	100	000	1
110	010	210	110	1	120	020	1	111	011	1
111	011	211	111	1	121	021	1	112	012	1
112	012	212	112	1	122	122	1	110	010	1
120	020	220	120	1	100	000	1	121	021	1
121	021	221	121	1	101	001	1	122	121,022	1 of 3
122	022	222	122	1	102	002	1	120	020, 122	1 of 3
200	100	000	200,020, 002	1 of 2 of 3	210	110	1	201	101	1
201	101	001	000	3	211	111	1	202	102	1
202	102	002	001	3	212	112	1	200	100	1
210	110	010	000	2	220	120	1	211	111	1
211	111	011	001	2	221	121	1	212	112	1
212	112	012	212,002	1 of 2	222	122	1	210	110	1
220	120	020	010	2	200	100	1	221	121	1
221	121	021	221,011	1 of 2	201	101	1	222	122	1
222	122	022	012	2	202	102	1	220	120	1

Tabel 5.1

5.6 Conclusie

In dit onderzoek zijn monomino-spellen van de vorm $M(R, 3)$ bestudeerd.

Dit zijn spellen die worden gespeeld op een rechthoekig bord met R-rijen en drie kolommen. De spelstukken zijn monomino's, die precies één cel van het bord dekken. Eén voor één selecteert elke speler een kolom van het bord en plaatst een monomino in de onderste onbedekte cel. Dit genereert een uitbetaling voor de speler. Het spel eindigt als alle cellen bedekt zijn met monomino's. Het doel van elke speler is om zijn monomino's op zo'n manier te plaatsen dat zijn totale uitbetaling is gemaximaliseerd.

Het monomino-spel wordt bestudeerd onder de aanname dat elke speler winstmaximalisatie als doel heeft en rationeel handelt. Hierbij is sprake van een optimale strategische reactie van de ene speler op een optimale strategische actie van een andere speler. Een spel dat op deze wijze wordt gespeeld leidt naar een Nash-evenwicht.

In dit onderzoek zijn voor monomino-spellen van de vorm $M(R, 3)$ voor drie spelers het evenwichtsspel en de bijbehorende uitbetalingen voor de spelers afgeleid. Het evenwichtsspel wordt (ofwel de optimale acties van de spelers worden) bereikt als de spelers in een spelsituatie waarbij het aantal onbezette cellen in de eerste twee kolommen deelbaar is door drie en de derde kolom niet deelbaar is door drie voor de rechterkolom kiezen. In overige spelsituaties dient gekozen te worden voor de linkerkolom.

De bijbehorende uitbetalingen zijn afhankelijk van het aantal onbedekte cellen in de respectievelijke kolommen en zijn voor elke mogelijke spelsituatie opgenomen in de bijlage. Hieruit volgt dat uitbetalingen aan speler 1 $\leq$ uitbetalingen aan speler 2 $\leq$ uitbetalingen aan speler 3.

Dit onderzoek wordt besloten met het advies aan de lezer om bij het spelen van een monominospel van de vorm $M(R, 3)$ de positie van de derde speler in te nemen.

LITERATUUR

Groenewoud, E (2011) *Evenwichten in de speltheorie* Bachelorscriptie, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam.

Peters, H. (2015) *Game theory: A multi-leveled approach*. Springer-Verlag, Berlin.

Van Dorenvanc, P. , Klomp, J. (2010) *Optimale strategieën in dominospelen*. Masterscriptie UniversiteitTwente, Enschede.

Timmer, J., Aarts, H. Van Dorenvanc, P., Klomp, J. (2017) *Non-cooperative monomino games*. In: D.-F. Li, X.-G. Yang, M. Uetz, G.-J. Xu (Eds.) *Game Theory and Applications 2016*, CCIS 758, Springer Nature, Singapore, pp. 31-39.

BIJLAGE Bewijs Stelling**Bewijs voor mod(0,0,0)****Inductie over p voor mod(1,0,0)****Maximum bepalen voor speler 3.****Keuze voor kolom 1**

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) = R - p + h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 0, 0) =$$

$$R - p + h(p) + g(q) + t(r)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - (q - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - 1 - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q - 1) + n(r)$$

$$R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (1, 2, 0) =$$

$$R - (q - 1) + h(p) + g(q - 3) + t(r) + R - (q - 3) =$$

$$R - (q - 1) + h(p) + g(q) + t(r)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - 1 - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r - 1)$$

$$R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (1, 0, 2) =$$

$$R - (r - 1) + h(p) + g(q) + t(r - 3) + R - (r - 3) =$$

$$R - (r - 1) + h(p) + g(q) + t(r)$$

q is minimaal 2 meer dan p. Keuze voor kolom 1 is maximum. Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p + 1, q, r) = (p, q, r)$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(0,1,0)**Maximum bepalen voor speler 3****Keuze voor kolom 1**

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r)$$

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (2, 1, 0) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 3) + g(q) + t(r) + R - q$$

Keuze voor kolom 2

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - q + h(p - a) + g(q - (b - 1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 0, 0) =$$

$$R - q + h(p) + g(q) + t(r)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - (c - 1)) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1)$$

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (0, 1, 2) =$$

$$R - (r - 1) + h(p) + g(q) + t(r - 3)$$

$R - (p - 1) + h(p - 3) < h(p)$ dus kolom 2 levert meer op dan kolom 1.

$R - (r - 1) + h(r - 3) < t(r)$ dus kolom 2 levert meer op dan kolom 3.

Als speler 3 kiest voor kolom 2, dan uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(0, 0, 0)$.

Dit geeft voor speler 3 $R - q + h(p) + g(q) + t(r)$.

$$\text{Speler 2: } f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p) + g(q) + t(r)$$

$$\text{Speler 1: } f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) = h(p) + g(q) + t(r)$$

Kolom 2 is de beste keus, dus $g(p, q + 1, r) = (p, q, r)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(0,0,1)**Maximum bepalen voor speler 3****Keuze voor kolom 1**

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (a - 1, b, c) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r + 1)$$

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (2, 0, 1) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 3) + g(q) + t(r) + R - r$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - a) + g(q - 1 - (b - 1)) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1)$$

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (0, 2, 1) =$$

$$R - (q - 1) + h(p) + g(q - 3) + t(r) + R - r$$

Keuze voor kolom 3

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - r + h(p - a) + g(q - b) + t(r - (c - 1)) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 0, 0) =$$

$$R - r + h(p) + g(q) + t(r)$$

$R - (p - 1) + h(p - 3)$ is kleiner dan $h(p)$, dus keuze voor kolom 3 leidt tot grotere uitbetaling van keuze voor kolom 1. $R - (q - 1) + g(q - 3)$ is kleiner dan $g(q)$, dus keuze voor kolom 3 leidt tot grotere uitbetaling van keuze voor kolom 2. Kolom 3 is maximum. Als speler 3 kiest voor kolom 3, dan uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(0, 0, 0)$.

Kolom 3 is de beste keus, dus $g(p, q, r + 1) = (p, q, r)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(0,1,2)**Inductie over p voor mod(1,1,2)****Maximum bepalen voor speler 3.****Keuze voor kolom 1**

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) = R - p + h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 1, 2) =$$

$$R - p + h(p) + g(q - 1) + t(r - 2) + R - (r - 2)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - (q - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - 1 - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q - 1) + n(r)$$

$$R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (1, 0, 2) =$$

$$R - (q - 1) + h(p) + g(q - 1) + t(r - 2) + R - (r - 2)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - 1 - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r - 1)$$

$$R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (1, 1, 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p) + g(q - 1) + t(r - 2) + R - (r - 2)$$

Als $p=q$ dan kiest speler 3 volgens afspraak linkerkolom. In andere gevallen is q minimaal 3 groter dan p en is kolom 1 maximum. Als speler 3 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(0, 1, 2)$.

Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p + 1, q, r) = (p, q, r)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(0,2,2)

Deze spelsituatie komt alleen voor als $p=0$ en $q=r=2$.

In deze situatie wordt is speler 3 aan zet en zal gedwongen de keuze maken voor kolom 2.

Als speler 3 kiest voor kolom 2, dan uitbetaling volgens $f(p + 1, q - 1, r)$ voor $(0, 1, 2)$.

Dit betekent $g(p, q + 1, r) = (p, q, r)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Maximum bepalen voor speler 3**Keuze voor kolom 1**

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r)$$

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (2, 2, 2) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 3) + g(q - 1) + t(r - 2) + R - q + R - (r - 2) =$$

Keuze voor kolom 2

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - q + h(p - a) + g(q - (b - 1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 1, 2) =$$

$$R - q + h(p) + g(q - 1) + t(r - 2) + R - (r - 2)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - (c - 1)) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1)$$

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (0, 2, 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p) + g(q - 1) + t(r - 2) + R - (r - 2) =$$

$R - (p - 1) + h(p - 3) < h(p)$ dus kolom 2 levert meer op dan kolom 1.

Als $q=r$ speelt speler 3 volgens afspraak links. In andere gevallen is r minimaal 3 groter dan q , dus kolom 2 levert meer op dan kolom 3.

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor $\text{mod}(0,1,0)$

Maximum bepalen voor speler 3

Keuze voor kolom 1

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (a - 1, b, c) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r + 1)$$

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (2, 1, 0) = R - (p - 1) + h(p - 3) + g(q - 1) + t(r + 1) + R - (q - 1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - a) + g(q - 1 - (b - 1)) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1)$$

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (0, 0, 0) =$$

$$R - (q - 1) + h(p) + g(q - 1) + t(r + 1)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - r + h(p - a) + g(q - b) + t(r - (c - 1)) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 1, 2) =$$

$$R - r + h(p) + g(q - 1) + t(r - 2) + R - (r - 2)$$

$R - (p - 1) + h(p - 3) < h(p)$ dus kolom 2 levert meer op dan kolom 1.

$R - r + t(r - 2) < t(r + 1)$ en omdat r minimaal 2 groter is dan q levert kolom 2 meer op dan kolom 3.

Als speler 3 kiest voor kolom 2, dan uitbetaling volgens $f(p, q - 1, r + 1)$ voor $(0, 0, 0)$.

Dit geeft voor speler 3 $R - (q - 1) + h(p) + g(q - 1) + t(r + 1)$.

$$\text{Speler 2: } f(p, q - 1, r + 1) = h(p - a) + g(q - 1 - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1) = h(p) + g(q - 1) + t(r + 1)$$

$$\text{Speler 1: } f(p - 1, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - 1 - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1) = h(p) + g(q - 1) + t(r + 1)$$

Kolom 2 is de beste keus, dus $g(p, q, r+1) = (p, q-1, r+1)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(0,2,1)

Inductie over p voor mod(1,2,1)

Maximum bepalen voor speler 3

Keuze voor kolom 1

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a-1, b, c) = R - p + h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 2, 1) =$$

$$R - p + h(p) + g(q-2) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (a, b-1, c) =$$

$$R - (q-1) + h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r)$$

$$R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (1, 1, 1) =$$

$$R - (q-1) + h(p) + g(q-2) + t(r-1) + R - (r-1) =$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) =$$

$$R - (r-1) + h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-1-c) + k(p+1) + m(q) + n(r-1)$$

$$R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (1, 2, 0)$$

Er zijn twee mogelijke uitbetalingen als mod(1,2,0).

De eerste mogelijkheid geeft voor speler 3:

$$f(p+1, q, r-1) = R - (r-1) + h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-1-c) + k(p+1) + m(q) + n(r-1) =$$

$R - (r-1) + h(p) + g(q-2) + t(r-1) + R - (q-2)$. Dit betekent dat als $q=p+1$ voor $p+1$ (dus $q=p+2$) de uitbetaling via deze mogelijkheid even groot is als de uitbetaling als speler 3 voor kolom 1 kiest. Immers, substitutie geeft:

$$R - (r-1) + h(p) + g(q-2) + t(r-1) + R - (q-2) =$$

$$R - (r-1) + h(p) + g(q-2) + t(r-1) + R - p$$

De tweede mogelijkheid geldt alleen als $q=p+1$ voor $p+1$, dus $q=p+2$.

Dit geeft voor speler 3

$$f(p+1, q, r-1) = R - (r-1) + h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-1-c) + k(p+1) + m(q) + n(r-1) =$$

$$R - (r-1) + h(p) + g(q-2) + t(r-1) + R - (q-1)$$

De tweede mogelijke uitkomst leidt dus tot een lagere betaling dan de eerste mogelijkheid.

Samenvattend: als speler 3 voor kolom 3 kiest is de uitbetaling ingeval $q=p+2$ mogelijk lager dan bij de keuze voor kolom 1. Ingeval $q \neq p+2$ dan is de uitbetaling in kolom 3 in ieder geval lager. Dit betekent dat ingeval speler 3 voor kolom 3 kiest, er een risico is op een lagere betaling. Speler 3 zal daarom niet voor kolom 3 kiezen.

De keuze voor kolom 1 is derhalve het maximum.

Als speler 3 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p, q, r) \text{ voor } (0, 2, 1)$.

Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p+1, q, r) = (p, q, r)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(0,0,1)

Maximum bepalen voor speler 3.

Keuze voor kolom 1

$$R - (p-1) + f(p-1, q+1, r) \text{ voor } (a-1, b, c) =$$

$$R - (p-1) + h(p-1 - (a-1)) + g(q+1 - b) + t(r - c) + k(p-1) + m(q+1) + n(r)$$

$$R - (p-1) + f(p-1, q+1, r) \text{ voor } (2, 0, 1) =$$

$$R - (p-1) + h(p-3) + g(q+1) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b-1, c) =$$

$$R - q + h(p-a) + g(q - (b-1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 2, 1) =$$

$$R - q + h(p) + g(q-2) + t(r-1) + R - (r-1) =$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r-1) + f(p, q+1, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) =$$

$$R - (r-1) + h(p-a) + g(q+1 - b) + t(r-1 - (c-1)) + k(p) + m(q+1) + n(r-1)$$

$$R - (r-1) + f(p, q+1, r-1) \text{ voor } (0, 0, 0) =$$

$$R - (r-1) + h(p) + g(q+1) + t(r-1)$$

$R-p+g(q-2)$ is kleiner dan $g(q+1)$, dus keuze 3 leidt tot grotere uitbetaling dan keuze 2.

$R-(p-1)+h(p-3)$ is kleiner dan $h(p)$, dus keuze 3 leidt tot grotere uitbetaling dan keuze 1.

Keuze voor kolom 3 is maximum. Als speler 3 kiest voor kolom 3, dan uitbetaling volgens $f(p, q+1, r-1)$ voor $(0, 0, 0)$.

Kolom 3 is de beste keus, dus $g(p, q+1, r) = (p, q+1, r-1)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(0,2,2)

Aantonen voor speler 1:

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) =$$

$$h(p) + g(q-2) + t(r-1) + R - (q-2)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) =$$

$$h(p) + g(q-2) + t(r-1) + R - r$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) =$$

$$h(p) + g(q-2) + t(r-1) + R - (q-1) + R - (r-1)$$

Maximum bepalen voor speler 3

Keuze voor kolom 1

$$R - (p-1) + f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (a-1, b, c) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r + 1)$$

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (2, 2, 2) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 3) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (q - 1) + R - (r - 1) =$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - a) + g(q - 1 - (b - 1)) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1)$$

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (0, 1, 2) =$$

$$R - (q - 1) + h(p) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (r - 1)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - r + h(p - a) + g(q - b) + t(r - (c - 1)) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 2, 1) = R - r + h(p) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (r - 1) =$$

$R - (p - 1) + h(p - 3) < h(p)$ dus kolom 2 levert meer op dan kolom 1.

Omdat q kleiner of gelijk aan r levert kolom 2 meer op dan kolom 3.

Als speler 3 kiest voor kolom 2, dan uitbetaling volgens $f(p, q - 1, r + 1)$ voor $(0, 1, 2)$.

Dit geeft voor speler 3 $R - (q - 1) + h(p) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (r - 1)$.

$$\text{Speler 2: } f(p, q - 1, r + 1) = h(p - a) + g(q - 1 - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1) = \\ h(p) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - r$$

$$\text{Speler 1: } f(p, q - 1, r + 1) = h(p - a) + g(q - 1 - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1) \\ h(p) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (q - 2)$$

Dit betekent $g(p, q, r + 1) = (p, q - 1, r + 1)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(1,0,2)**Inductie over p voor mod(2,0,2)**

Maximum bepalen voor speler 3 .

Keuze voor kolom 1

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) = R - p + h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 0, 2) =$$

$$R - p + h(p - 1) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 2) =$$

$$R - p + h(p - 1) + g(q) + t(r + 1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - (q - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - 1 - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q - 1) + n(r)$$

$$R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (2, 2, 2) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - 1) + g(q - 3) + t(r - 2) + R - (q - 2) + R - (r - 2) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - 1) + g(q - 3) + t(r + 1) + R - (q - 2)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - 1 - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r - 1)$$

$$\begin{aligned}
& R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (2, 0, 1) = \\
& R - (r - 1) + h(p - 1) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 2) = \\
& R - (r - 1) + h(p - 1) + g(q) + t(r + 1)
\end{aligned}$$

Vergelijken keuze 1 met keuze 2: $R - p + g(q) > R - (q - 1) + g(q - 3) + R - (q - 2)$, dus keuze voor kolom 1 is maximum.

Als speler 3 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(1, 0, 2)$.

Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p + 1, q, r) = (p, q, r)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(1,1,2)

Maximum bepalen voor speler 3

Keuze voor kolom 1

$$\begin{aligned}
& R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) = \\
& R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) \\
& R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (0, 1, 2) = \\
& R - (p - 1) + h(p - 1) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 2) = \\
& R - (p - 1) + h(p - 1) + g(q) + t(r + 1)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 2

$$\begin{aligned}
& R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) = \\
& R - q + h(p - a) + g(q - (b - 1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) \\
& R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 0, 2) = \\
& R - q + h(p - 1) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 2) = \\
& R - q + h(p - 1) + g(q) + t(r + 1)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned}
& R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) = \\
& R - (r - 1) + h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - (c - 1)) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1) \\
& R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (1, 1, 1) = \\
& R - (r - 1) + h(p - 1) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 2) = \\
& R - (r - 1) + h(p - 1) + g(q) + t(r + 1)
\end{aligned}$$

Kolom 1 is maximum. Als speler 3 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p - 1, q + 1, r)$ voor $(0, 1, 2)$.

Kolom 3 is de beste keus, dus $g(p, q + 1, r) = (p - 1, q + 1, r)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(1,0,0)

Maximum bepalen voor speler 3

Keuze voor kolom 1

$$\begin{aligned}
& R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (a - 1, b, c) = \\
& R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r + 1)
\end{aligned}$$

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (0, 0, 0) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1) + g(q) + t(r + 1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - a) + g(q - 1 - (b - 1)) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1)$$

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (1, 2, 0) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - 1) + g(q - 3) + t(r + 1) + R - (q - 3) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - 1) + g(q) + t(r + 1)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - r + h(p - a) + g(q - b) + t(r - (c - 1)) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 0, 2) =$$

$$R - r + h(p - 1) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 2) =$$

$$R - r + h(p - 1) + g(q) + t(r + 1)$$

Kolom 1 is maximum, aangezien q minimaal 2 groter is dan p . Als speler 3 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p - 1, q, r + 1)$ voor $(0, 0, 0)$.

Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p, q, r + 1) = (p - 1, q, r + 1)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(1,1,1)**Inductie over p voor mod(2,1,1)****Maximum bepalen voor speler 3****Keuze voor kolom 1**

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) = R - p + h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 1, 1) =$$

$$R - p + h(p - 1) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (r - 1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - (q - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - 1 - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q - 1) + n(r)$$

$$R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (2, 0, 1) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - 1) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (r - 1)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - 1 - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r - 1)$$

$$R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (2, 1, 0) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - 1) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (q - 1)$$

Keuze voor kolom 1 is maximum, omdat q minstens 2 groter is dan p . Als speler 3 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(1, 1, 1)$.

Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p+1, q, r) = (p, q, r)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(1,2,1)

Maximum bepalen voor speler 3.

Keuze voor kolom 1

$$R - (p-1) + f(p-1, q+1, r) \text{ voor } (a-1, b, c) =$$

$$R - (p-1) + h(p-1 - (a-1)) + g(q+1 - b) + t(r - c) + k(p-1) + m(q+1) + n(r)$$

$$R - (p-1) + f(p-1, q+1, r) \text{ voor } (0, 2, 1) =$$

$$R - (p-1) + h(p-1) + g(q-1) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b-1, c) =$$

$$R - q + h(p - a) + g(q - (b-1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 1, 1) =$$

$$R - q + h(p-1) + g(q-1) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r-1) + f(p, q+1, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) =$$

$$R - (r-1) + h(p - a) + g(q+1 - b) + t(r-1 - (c-1)) + k(p) + m(q+1) + n(r-1)$$

$$R - (r-1) + f(p, q+1, r-1) \text{ voor } (1, 2, 0) =$$

$$R - (r-1) + h(p-1) + g(q-1) + t(r-1) + R - (q-1)$$

Keuze voor kolom 1 is maximum. Als speler 3 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p-1, q+1, r)$ voor $(0, 2, 1)$.

Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p, q+1, r) = (p-1, q+1, r)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(1,1,2)

Maximum bepalen voor speler 3.

Keuze voor kolom 1

$$R - (p-1) + f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (a-1, b, c) =$$

$$R - (p-1) + h(p-1 - (a-1)) + g(q - b) + t(r+1 - c) + k(p-1) + m(q) + n(r+1)$$

$$R - (p-1) + f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (0, 1, 2) = R - (p-1) + h(p-1) + g(q-1) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q-1) + f(p, q-1, r+1) \text{ voor } (a, b-1, c) =$$

$$R - (q-1) + h(p - a) + g(q-1 - (b-1)) + t(r+1 - c) + k(p) + m(q-1) + n(r+1)$$

$$R - (q-1) + f(p, q-1, r+1) \text{ voor } (1, 0, 2) =$$

$$R - (q-1) + h(p-1) + g(q-1) + t(r-1) + R - (r-1) =$$

Keuze voor kolom 3

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c-1) =$$

$$R - r + h(p - a) + g(q - b) + t(r - (c-1)) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 1, 1) =$$

$$R - r + h(p-1) + g(q-1) + t(r-1) + R - r =$$

Als $p=q$ is er geen uniek maximum en kiest speler 3 volgens afspraak kolom 1. In andere gevallen is keuze 1 het maximum. Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p-1, q, r+1)$ voor $(0, 1, 2)$

Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p, q, r+1) = (p-1, q, r+1)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(1,2,0)

Inductie over p voor mod(2,2,0)

Maximum bepalen voor speler 3

Keuze voor kolom 1

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a-1, b, c) = R - p + h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 2, 0) =$$

$$R - p + h(p-1) + g(q-2) + t(r) + R - (q-2)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (a, b-1, c) =$$

$$R - (q-1) + h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r)$$

$$R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (2, 1, 0) =$$

$$R - (q-1) + h(p-1) + g(q-2) + t(r) + R - (q-2)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) =$$

$$R - (r-1) + h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-1-c) + k(p+1) + m(q) + n(r-1)$$

$$R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (2, 2, 2) =$$

$$R - (r-1) + h(p-1) + g(q-2) + t(r-3) + R - (q-1)$$

Keuze voor kolom 1 levert maximale betaling. Als speler 3 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(1, 2, 0)$.

Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p+1, q, r) = (p, q, r)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(1,0,0)

Maximum bepalen voor speler 3

Keuze voor kolom 1

$$R - (p-1) + f(p-1, q+1, r) \text{ voor } (a-1, b, c) =$$

$$R - (p-1) + h(p-1-(a-1)) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p-1) + m(q+1) + n(r)$$

$$R - (p-1) + f(p-1, q+1, r) \text{ voor } (0, 0, 0) =$$

$$R - (p-1) + h(p-1) + g(q+1) + t(r)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b-1, c) =$$

$$R - q + h(p - a) + g(q - (b - 1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 2, 0) =$$

$$R - q + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 2) =$$

$$R - q + h(p - 1) + g(q + 1) + t(r)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - (c - 1)) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1)$$

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (1, 0, 2) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - 1) + g(q + 1) + t(r - 3) + R - (r - 3) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - 1) + g(q + 1) + t(r)$$

Kolom 1 is maximum, aangezien q minimaal 2 groter is dan p. Als speler 3 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (0, 0, 0)$.

Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p, q + 1, r) = (p - 1, q + 1, r)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(1,2,1)

Maximum bepalen voor speler 3.

Keuze voor kolom 1

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (a - 1, b, c) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r + 1)$$

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (0, 2, 1) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r) + R - r$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - a) + g(q - 1 - (b - 1)) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1)$$

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (1, 1, 1) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r) + R - r$$

Keuze voor kolom 3

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - r + h(p - a) + g(q - b) + t(r - (c - 1)) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 2, 0) =$$

$$R - r + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 2)$$

Er zijn twee mogelijke uitbetalingen als mod(1,2,0).

De eerste mogelijkheid geeft voor speler 3:

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 2, 0) =$$

$$R - r + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 2)$$

Dit betekent dat als $q = p + 1$ de uitbetaling via deze mogelijkheid even groot is als de uitbetaling als speler 3 voor kolom 1 kiest.

De tweede mogelijkheid geldt alleen als $q = p + 1$.

Dit geeft voor speler 3 $R - r + f(p, q, r)$ voor $(1, 2, 0) =$

$$R - r + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 1)$$

De tweede mogelijke uitkomst leidt dus tot een lagere betaling dan de eerste mogelijkheid.

Samenvattend: als speler 3 voor kolom 3 kiest is de uitbetaling ingeval $q=p+1$ mogelijk lager dan bij de keuze voor kolom 1. Ingeval $q \neq p+1$ dan is de uitbetaling in kolom 3 in ieder geval lager. Dit betekent dat ingeval speler 3 voor kolom 3 kiest, er een risico is op een lagere betaling. Speler 3 zal daarom niet voor kolom 3 kiezen.

Keuze voor kolom 1 is het maximum. Als speler 3 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p - 1, q, r + 1)$ voor $(0, 2, 1)$.

Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p, q, r + 1) = (p - 1, q, r + 1)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(2,0,1)

Inductie over p voor mod(0,0,1)

Maximum bepalen voor de speler 3.

Keuze voor kolom 1

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) = R - p + h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 0, 1) =$$

$$R - p + h(p - 2) + g(q) + t(r - 1) + R - (r - 1) =$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - (q - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - 1 - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q - 1) + n(r)$$

$$R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (0, 2, 1) =$$

$$R - (q - 1) + h(p + 1) + g(q - 3) + t(r - 1) + R - (r - 1) =$$

$$R - (q - 1) + h(p + 1) + g(q - 3) + t(r - 1) + R - (r - 1)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - 1 - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r - 1)$$

$$R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (0, 0, 0) =$$

$$R - (r - 1) + h(p + 1) + g(q) + t(r - 1)$$

$R - p + h(p - 2)$ is kleiner dan $h(p + 1)$, dus keuze 3 leidt tot grotere uitbetaling dan keuze 1.

$R - (q - 1) + g(q - 3)$ is kleiner dan $g(q)$, dus keuze 3 leidt tot grotere uitbetaling dan keuze 2.

Keuze voor kolom 3 is maximum. Als speler 3 kiest voor kolom 3, dan uitbetaling volgens $f(p + 1, q, r - 1)$ voor $(0, 0, 0)$.

Kolom 3 is de beste keus, dus $g(p + 1, q, r) = (p, q, r - 1)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(2,1,1)

Maximum bepalen voor speler 3**Keuze voor kolom 1**

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r)$$

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (1, 1, 1) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 2) + g(q) + t(r - 1) + R - (r - 1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - q + h(p - a) + g(q - (b - 1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 0, 1) =$$

$$R - q + h(p - 2) + g(q) + t(r - 1) + R - (r - 1)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - (c - 1)) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1)$$

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (2, 1, 0) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - 2) + g(q) + t(r - 1) + R - (q - 1)$$

Keuze voor kolom 1 is maximum, aangezien q minimaal 2 groter is dan p . Als speler 3 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p - 1, q + 1, r)$ voor $(1, 1, 1)$.

Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p, q + 1, r) = (p - 1, q + 1, r)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(2,0,2)**Maximum bepalen voor speler 3****Keuze voor kolom 1**

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (a - 1, b, c) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r + 1)$$

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (1, 0, 2) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 2) + g(q) + t(r - 1) + R - (r - 1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - a) + g(q - 1 - (b - 1)) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1)$$

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (2, 2, 2) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - 2) + g(q - 3) + t(r - 1) + R - (q - 2) + R - (r - 1)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - r + h(p - a) + g(q - b) + t(r - (c - 1)) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 0, 1) =$$

$$R - r + h(p - 2) + g(q) + t(r - 1) + R - (r - 1)$$

Keuze voor kolom 1 levert het meest op. Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p - 1, q, r + 1)$ voor $(1, 0, 2)$.

Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p, q, r + 1) = (p - 1, q, r + 1)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(2,1,0)

Inductie over p voor mod(0,1,0)

Aantonen voor speler 1:

$$f(p + 1, q, r) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) = h(p + 1) + g(q - 1) + t(r)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p + 1, q, r) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) = h(p + 1) + g(q - 1) + t(r)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p + 1, q, r) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) = h(p + 1) + g(q - 1) + t(r) + R - (q - 1)$$

Maximum bepalen voor speler 3.

Keuze voor kolom 1

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) = R - p + h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 1, 0) =$$

$$R - p + h(p - 2) + g(q - 1) + t(r) + R - (q - 1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - (q - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - 1 - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q - 1) + n(r)$$

$$R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (0, 0, 0) =$$

$$R - (q - 1) + h(p + 1) + g(q - 1) + t(r)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - 1 - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r - 1)$$

$$R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (0, 1, 2) =$$

$$R - (r - 1) + h(p + 1) + g(q - 1) + t(r - 3) + R - (r - 3) =$$

$$R - (r - 1) + h(p + 1) + g(q - 1) + t(r)$$

$R - p + h(p - 2) < h(p + 1)$ dus kolom2 levert meer op dan kolom 1.

Omdat r minimaal 2 groter is dan q levert kolom 2 meer op dan kolom 3.

Als speler 3 kiest voor kolom 2, dan uitbetaling volgens $f(p + 1, q - 1, r)$ voor $(0, 0, 0)$.

Dit geeft voor speler 3 $R - (q - 1) + h(p + 1) + g(q - 1) + t(r)$.

$$\text{Speler 2: } f(p + 1, q - 1, r) = h(p + 1 - a) + g(q - 1 - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q - 1) + n(r) = h(p + 1) + g(q - 1) + t(r)$$

$$\text{Speler 1: } f(p + 1, q - 1, r) = h(p + 1 - a) + g(q - 1 - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q - 1) + n(r) = h(p + 1) + g(q - 1) + t(r)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(2,2,0)**Maximum bepalen voor speler 3****Keuze voor kolom 1**

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r)$$

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (1, 2, 0) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 2) + g(q - 1) + t(r) + R - (q - 1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - q + h(p - a) + g(q - (b - 1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 1, 0) =$$

$$R - q + h(p - 2) + g(q - 1) + t(r) + R - (q - 1)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - (c - 1)) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1)$$

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (2, 2, 2) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - 2) + g(q - 1) + t(r - 3) + R - q + R - (r - 3) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - 2) + g(q - 1) + t(r) + R - q$$

Keuze voor kolom 1 levert maximale opbrengst.

Als speler 3 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p - 1, q + 1, r)$ voor $(1, 2, 0)$.

Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p, q + 1, r) = (p - 1, q + 1, r)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(2,1,1)**Maximum bepalen voor speler 3****Keuze voor kolom 1**

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (a - 1, b, c) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r + 1)$$

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (1, 1, 1) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 2) + g(q - 1) + t(r) + R - r$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - a) + g(q - 1 - (b - 1)) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1)$$

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (2, 0, 1) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - 2) + g(q - 1) + t(r) + R - r$$

Keuze voor kolom 3

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - r + h(p - a) + g(q - b) + t(r - (c - 1)) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 1, 0) =$$

$$R - r + h(p - 2) + g(q - 1) + t(r) + R - (q - 1)$$

Keuze voor kolom 1 is maximum, aangezien q minimaal 2 groter is dan p . Als speler 3 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p-1, q, r+1)$ voor $(1, 1, 1)$.

Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p, q, r+1) = (p-1, q, r+1)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(2,2,2)

Inductie over p voor mod(0,2,2)

Aantonen voor speler 1:

$$\begin{aligned} f(p+1, q, r) &= h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ &h(p+1) + g(q-2) + t(r-2) + R - (q-2) \end{aligned}$$

Aantonen voor speler 2:

$$\begin{aligned} f(p+1, q, r) &= h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ &h(p+1) + g(q-2) + t(r-2) + R - (r-1) \end{aligned}$$

Aantonen voor speler 3:

$$\begin{aligned} f(p+1, q, r) &= h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ &h(p+1) + g(q-2) + t(r-2) + R - (q-1) + R - (r-2) = \\ &h(p+1) + g(q-2) + t(r+1) + R - (q-1) \end{aligned}$$

Maximum bepalen voor speler 3 .

Keuze voor kolom 1

$$\begin{aligned} R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a-1, b, c) &= R - p + h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) \\ R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 2, 2) &= \\ R - p + h(p-2) + g(q-2) + t(r-2) + R - (q-1) + R - (r-2) &= \\ R - p + h(p-2) + g(q-2) + t(r+1) + R - (q-1) \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 2

$$\begin{aligned} R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (a, b-1, c) &= \\ R - (q-1) + h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r) &= \\ R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (0, 1, 2) &= \\ R - (q-1) + h(p+1) + g(q-2) + t(r-2) + R - (r-2) &= \\ R - (q-1) + h(p+1) + g(q-2) + t(r+1) \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned} R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) &= \\ R - (r-1) + h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-1-c) + k(p+1) + m(q) + n(r-1) &= \\ R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (0, 2, 1) &= \\ R - (r-1) + h(p+1) + g(q-2) + t(r-2) + R - (r-2) &= \\ R - (r-1) + h(p+1) + g(q-2) + t(r+1) \end{aligned}$$

Als $q=r$ speelt speler 3 volgens afspraak links. In andere gevallen is r minimaal 3 groter dan q , dus kolom 2 levert meer op dan kolom 3. $R - p + t(p-2) < t(p+1)$ dus levert kolom 2 meer op dan kolom 1. Als speler 3 kiest voor kolom 2, dan uitbetaling volgens $f(p+1, q-1, r)$ voor $(0, 1, 2)$. Dit geeft voor speler 3 $R - (q-1) + h(p+1) + g(q-2) + t(r+1)$.

$$\text{Speler 2: } f(p+1, q-1, r) = h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r) = \\ h(p+1) + g(q-2) + t(r-2) + R - (r-1)$$

$$\text{Speler 1: } f(p+1, q-1, r) = h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r) = \\ h(p+1) + g(q-2) + t(r-2) + R - (q-2)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(2,0,2)

Maximum bepalen voor speler 3

Keuze voor kolom 1

$$R - (p-1) + f(p-1, q+1, r) \text{ voor } (a-1, b, c) = \\ R - (p-1) + h(p-1-(a-1)) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p-1) + m(q+1) + n(r) \\ R - (p-1) + f(p-1, q+1, r) \text{ voor } (1, 0, 2) = \\ R - (p-1) + h(p-2) + g(q+1) + t(r-2) + R - (r-2) = \\ R - (p-1) + h(p-2) + g(q+1) + t(r+1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b-1, c) = \\ R - q + h(p-a) + g(q-(b-1)) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) \\ R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 2, 2) = \\ R - q + h(p-2) + g(q-2) + t(r-2) + R - (q-1) + R - (r-2) = \\ R - q + h(p-2) + g(q-2) + t(r+1) + R - (q-1)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r-1) + f(p, q+1, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) = \\ R - (r-1) + h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-1-(c-1)) + k(p) + m(q+1) + n(r-1) \\ R - (r-1) + f(p, q+1, r-1) \text{ voor } (2, 0, 1) = \\ R - (r-1) + h(p-2) + g(q+1) + t(r-2) + R - (r-2) = \\ R - (r-1) + h(p-2) + g(q+1) + t(r+1)$$

Keuze voor kolom 1 is maximum. Als speler 3 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p-1, q+1, r)$ voor $(1, 0, 2)$.

Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p, q+1, r) = (p-1, q+1, r)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(2,2,0)

Maximum bepalen voor speler 3

Keuze voor kolom 1

$$R - (p-1) + f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (a-1, b, c) = \\ R - (p-1) + h(p-1-(a-1)) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p-1) + m(q) + n(r+1) \\ R - (p-1) + f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (1, 2, 0) = R - (p-1) + h(p-2) + g(q-2) + t(r+1) + R - (q-2)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q-1) + f(p, q-1, r+1) \text{ voor } (a, b-1, c) = \\ R - (q-1) + h(p-a) + g(q-1-(b-1)) + t(r+1-c) + k(p) + m(q-1) + n(r+1)$$

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (2, 1, 0) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - 2) + g(q - 2) + t(r + 1) + R - (q - 2)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - r + h(p - a) + g(q - b) + t(r - (c - 1)) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 2, 2) =$$

$$R - r + h(p - 2) + g(q - 2) + t(r - 2) + R - (q - 1) + R - (r - 2) =$$

$$R - r + h(p - 2) + g(q - 2) + t(r + 1) + R - (q - 1)$$

Keuze voor kolom 1 is maximum. Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (1, 2, 0)$.

Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p, q, r + 1) = (p - 1, q, r + 1)$. Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(0,0,2)**Inductie over p voor mod(1,0,2)****Aantonen voor speler 1:**

$$f(p + 1, q, r) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p) + g(q) + t(r - 2) + R - p$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p + 1, q, r) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 1)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p + 1, q, r) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 2)$$

Maximum bepalen voor speler 1.**Keuze voor kolom 1**

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) = R - p + h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 0, 2) =$$

$$R - p + h(p) + g(q) + t(r - 2)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - (q - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - 1 - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q - 1) + n(r)$$

$$R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (1, 2, 2)$$

Ingeval van mod(1,2,2) zijn er twee mogelijke uitbetalingen.

De eerste mogelijkheid geeft voor speler 1 $R - (q - 1) + h(p) + g(q - 3) + t(r - 2) + R - (q - 3) =$
 $h(p) + g(q) + t(r - 2) + R - (q - 3)$

Ingeval $q = p + 2$ voor $p + 1$ dan levert substitutie $h(p) + g(q) + t(r - 2) + R - p$

Deze uitbetaling levert dus hetzelfde op als uitbetaling bij keuze voor kolom 1.

De tweede mogelijkheid geeft voor speler $R - (q - 1) + h(p) + g(q - 3) + t(r - 2) + R - (q - 2) = h(p) + g(q) + t(r - 2) + R - (p + 3 - 2) = h(p) + g(q) + t(r - 2) + R - (p + 1)$

Dit is een lagere uitbetaling dan de keuze voor kolom 1.

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned} R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) &= \\ R - (r - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - 1 - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r - 1) &= \\ R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (1, 0, 1) &= \\ R - (r - 1) + h(p) + g(q) + t(r - 2) & \end{aligned}$$

q is minimaal 2 groter dan $p + 1$. In het geval q precies 2 groter is dan $p + 1$, dan $q = p + 3$ en is er geen uniek maximum: keuze voor kolom 2 levert hetzelfde op als keuze voor kolom 1. Echter, bij keuze voor kolom 2 loopt speler 2 het risico op een lagere uitbetaling dan bij keuze voor kolom 1. Speler 2 zal daarom niet kiezen voor kolom 2.

In andere gevallen (dus als q niet precies 2 groter is dan $p + 1$) is de keuze voor kolom 1 het maximum.

Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(0, 0, 2)$.

Dit geeft voor speler 1 $R - p + h(p) + g(q) + t(r - 2)$.

$$\begin{aligned} \text{Speler 2: } f(p, q, r) &= h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) = \\ &h(p) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Speler 3: } f(p, q, r) &= h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) = \\ &h(p) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 2) \end{aligned}$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(0,1,2)

Aantonen voor speler 1:

$$\begin{aligned} f(p, q + 1, r) &= h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) = \\ &h(p) + g(q) + t(r - 2) + R - q \end{aligned}$$

Aantonen voor speler 2:

$$\begin{aligned} f(p, q + 1, r) &= h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) = \\ &h(p) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 1) \end{aligned}$$

Aantonen voor speler 3:

$$\begin{aligned} f(p, q + 1, r) &= h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) = \\ &h(p) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 2) \end{aligned}$$

Maximum bepalen voor speler 1

Keuze voor kolom 1

$$\begin{aligned} R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) &= \\ R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) &= \\ R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (2, 1, 2) &= \\ R - (p - 1) + h(p - 3) + g(q) + t(r - 2) + R - q &= \\ h(p) + g(q) + t(r - 2) + R - q & \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 2

$$\begin{aligned}
 R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) &= \\
 R - q + h(p - a) + g(q - (b - 1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) \\
 R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 0, 2) &= \\
 R - q + h(p) + g(q) + t(r - 2)
 \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned}
 R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) &= \\
 R - (r - 1) + h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - (c - 1)) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1) \\
 R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (0, 1, 1) &= \\
 R - (r - 1) + h(p) + g(q) + t(r - 2)
 \end{aligned}$$

Er is geen uniek maximum. Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p - 1, q + 1, r)$ voor $(2, 1, 2)$.

Dit geeft voor speler 1 $h(p) + g(q) + t(r - 2) + R - q$.

$$\begin{aligned}
 \text{Speler 2: } f(p - 1, q + 1, r) &= h(p - 1 - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) = \\
 h(p - 3) + g(q) + t(r - 2) + R - (p - 2) + R - (r - 1) &= \\
 h(p) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Speler 3: } f(p - 1, q + 1, r) &= h(p - 1 - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) = \\
 h(p) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 2)
 \end{aligned}$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Als speler 1 kiest voor kolom 2, dan uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(0, 0, 2) =$

Dit geeft voor speler 1 $R - q + h(p) + g(q) + t(r - 2)$

$$\begin{aligned}
 \text{Speler 2: } f(p, q, r) &= h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) = \\
 h(p) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Speler 3: } f(p - 1, q + 1, r) &= h(p - 1 - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) = \\
 h(p) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 2)
 \end{aligned}$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(a,b,c)=(0,0,0)

$$\text{Aantonen voor speler 1, 2 en 3: } f(p, q, r + 1) = h(p) + g(q) + t(r + 1)$$

Maximum bepalen voor speler 1**Keuze voor kolom 1**

$$\begin{aligned}
 R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (2, 0, 0) &= \\
 R - (p - 1) + h(p - 3) + g(q) + t(r + 1) &= \\
 h(p) + g(q) + t(r + 1)
 \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 2

$$\begin{aligned}
 R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (0, 2, 0) &= \\
 R - (q - 1) + h(p) + g(q - 3) + t(r + 1) &= \\
 h(p) + g(q) + t(r + 1)
 \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned}
 R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 0, 2) &= \\
 R - r + h(p) + g(q) + t(r - 2) &= \\
 h(p) + g(q) + t(r + 1) &
 \end{aligned}$$

Er is geen uniek maximum.

Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p - 1, q, r + 1)$ voor $(2, 0, 0)$.

Dit geeft voor speler 1 $h(p) + g(q) + t(r + 1)$.

Speler 2: $h(p - 3) + g(q) + t(r + 1) + R - (p - 2) = h(p) + g(q) + t(r + 1)$

Speler 3: $h(p - 3) + g(q) + t(r + 1) + R - (p - 3) = h(p) + g(q) + t(r + 1)$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Keuze voor kolom 2 levert uitbetaling volgens $f(p, q - 1, r + 1)$ voor $(0, 2, 0) =$

Dit geeft voor speler 1 $h(p) + g(q) + t(r + 1)$

Speler 2: $f(p, q - 1, r + 1) = h(p - a) + g(q - 1 - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + t(r + 1) =$
 $h(p) + g(q - 3) + t(r + 1) + R - (q - 2) =$
 $h(p) + g(q) + t(r + 1)$

Speler 3: $f(p, q - 1, r + 1) = h(p - a) + g(q - 1 - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + t(r + 1) =$
 $h(p) + g(q - 3) + t(r + 1) + R - (q - 3) =$
 $h(p) + g(q) + t(r + 1)$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Keuze voor kolom 3 levert uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(0, 0, 2)$

Voor speler 1 geeft dit $h(p) + g(q) + t(r + 1)$

Speler 2: $f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$
 $h(p) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 1) =$
 $h(p) + g(q) + t(r + 1)$

Speler 3: $f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$
 $h(p) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 2) =$
 $h(p) + g(q) + t(r + 1)$

Dit overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(0,1,1)

Inductie over p voor mod(1,1,1)

Aantonen voor speler 1:

$$\begin{aligned}
 f(p + 1, q, r) &= h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) = \\
 h(p) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - p &
 \end{aligned}$$

Aantonen voor speler 2:

$$\begin{aligned}
 f(p + 1, q, r) &= h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) = \\
 h(p) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (q - 1) &
 \end{aligned}$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ h(p) + g(q-1) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Maximum bepalen voor de speler 1.**Keuze voor kolom 1**

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a-1, b, c) = R - p + h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) \\ R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 1, 1) = \\ R - p + h(p) + g(q-1) + t(r-1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (a, b-1, c) = \\ R - (q-1) + h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r) \\ R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (1, 0, 1) = \\ R - (q-1) + h(p) + g(q-1) + t(r-1) = \\ R - (q-1) + h(p) + g(q-1) + t(r-1)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) = \\ R - (r-1) + h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-1-c) + k(p+1) + m(q) + n(r-1) \\ R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (1, 1, 0) = \\ R - (r-1) + h(p) + g(q-1) + t(r-1)$$

Als $p=q=r$ of als $p=q$ dan kiest speler 1 volgens afspraak kolom 1. In andere gevallen is q minimaal 3 groter dan p en is keuze voor kolom 1 maximum. In beide gevallen kiest speler 1 voor kolom 1.

Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(0, 1, 1)$.

Dit geeft voor speler 1 $R - p + h(p) + g(q-1) + t(r-1)$

$$\text{Speler 2: } f(p, q, r) = h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) = \\ h(p) + g(q-1) + t(r-1) + R - (q-1)$$

$$\text{Speler 3: } f(p, q, r) = h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) = \\ h(p) + g(q-1) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(0,2,1)**Aantonen voor speler 1:**

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) = \\ h(p) + g(q-1) + t(r-1) + R - q$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) = \\ h(p) + g(q-1) + t(r-1) + R - (q-1)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) = \\ h(p) + g(q-1) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Maximum bepalen voor speler 1**Keuze voor kolom 1**

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r)$$

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (2, 2, 1) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 3) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - q =$$

$$h(p) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - q$$

Keuze voor kolom 2

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - q + h(p - a) + g(q - (b - 1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 1, 1) =$$

$$R - q + h(p) + g(q - 1) + t(r - 1)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - (c - 1)) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1)$$

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (0, 2, 0) =$$

$$R - (r - 1) + h(p) + g(q - 1) + t(r - 1)$$

Er is geen uniek maximum. Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens

$$f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (2, 2, 1)$$

Dit geeft voor speler 1 $h(p) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - q$.

$$\text{Speler 2: } f(p - 1, q + 1, r) = h(p - 1 - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) =$$

$$h(p - 3) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (p - 2) + R - (q - 1) =$$

$$h(p) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (q - 1)$$

$$\text{Speler 3: } f(p - 1, q + 1, r) = h(p - 1 - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) =$$

$$h(p - 3) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (p - 3) + R - (r - 1) =$$

$$h(p) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (r - 1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Als speler 1 kiest voor kolom 2, dan uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(0, 1, 1)$.

Dit geeft voor speler 1 $R - q + h(p) + g(q - 1) + t(r - 1)$.

$$\text{Speler 2: } f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (q - 1)$$

$$\text{Speler 3: } f(p + 1, q - 1, r) = h(p + 1 - a) + g(q - 1 - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q - 1) + n(r) =$$

$$h(p) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (r - 1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(0,1,2)**Aantonen voor speler 1:**

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) =$$

$$h(p) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (q - 1)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) = \\ h(p) + g(q-1) + t(r-1) + R - r$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) = \\ h(p) + g(q-1) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Maximum bepalen voor speler 1**Keuze voor kolom 1**

$$R - (p-1) + f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (a-1, b, c) = \\ R - (p-1) + h(p-1-(a-1)) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p-1) + m(q) + n(r+1) \\ R - (p-1) + f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (2, 1, 2) = \\ R - (p-1) + h(p-3) + g(q-1) + t(r-1) + R - (q-1) = \\ h(p) + g(q-1) + t(r-1) + R - (q-1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q-1) + f(p, q-1, r+1) \text{ voor } (a, b-1, c) = \\ R - (q-1) + h(p-a) + g(q-1-(b-1)) + t(r+1-c) + k(p) + m(q-1) + n(r+1) \\ R - (q-1) + f(p, q-1, r+1) \text{ voor } (0, 0, 2) = \\ R - (q-1) + h(p) + g(q-1) + t(r-1)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c-1) = \\ R - r + h(p-a) + g(q-b) + t(r-(c-1)) + k(p) + m(q) + n(r) \\ R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 1, 1) = \\ R - r + h(p) + g(q-1) + t(r-1)$$

Er is geen uniek maximum. Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens

$$f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (2, 1, 2).$$

Dit geeft voor speler 1 $h(p) + g(q-1) + t(r-1) + R - (q-1)$.

$$\text{Speler 2: } f(p-1, q, r+1) = h(p-1-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p-1) + m(q) + n(r) = \\ h(p-3) + g(q-1) + t(r-1) + R - (p-2) + R - r = \\ h(p) + g(q-1) + t(r-1) + R - r$$

$$\text{Speler 3: } f(p-1, q, r+1) = h(p-1-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p-1) + m(q) + n(r) = \\ h(p-3) + g(q-1) + t(r-1) + R - (p-3) + R - (r-1) = \\ h(p) + g(q-1) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Als speler 1 kiest voor kolom 2, dan uitbetaling volgens $f(p, q-1, r+1)$ voor $(0, 0, 2)$.

Dit geeft voor speler 1 $h(p) + g(q-1) + t(r-1) + R - (q-1)$.

$$\text{Speler 2: } f(p, q-1, r+1) = h(p-a) + g(q-1-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q-1) + n(r+1) = \\ h(p) + g(q-1) + t(r-1) + R - r$$

$$\text{Speler 3: } f(p-1, q, r+1) = h(p-1-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p-1) + m(q) + n(r) = \\ h(p) + g(q-1) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(0,2,0)**Inductie over p voor mod(1,2,0)****Aantonen voor speler 1:**

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ h(p) + g(q-2) + t(r) + R - p$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ h(p) + g(q-2) + t(r) + R - (q-1)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ h(p) + g(q-2) + t(r) + R - (q-2)$$

Als $q=p+1$ dan aantonen:

Aantonen voor speler 1:

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ h(p) + g(q-2) + t(r) + R - p$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ h(p) + g(q-2) + t(r) + R - (q-2)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ h(p) + g(q-2) + t(r) + R - (q-1)$$

Maximum bepalen voor speler 1.**Keuze voor kolom 1**

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a-1, b, c) = R - p + h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) \\ R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 2, 0) = \\ R - p + h(p) + g(q-2) + t(r)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (a, b-1, c) = \\ R - (q-1) + h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r) \\ R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (1, 1, 0) = \\ R - (q-1) + h(p) + g(q-2) + t(r)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) = \\ R - (r-1) + h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-1-c) + k(p+1) + m(q) + n(r-1) \\ R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (1, 2, 2) = \\ R - (r-1) + h(p) + g(q-2) + t(r-3) + R - (q-2) = \\ R - (q-2) + h(p) + g(q-2) + t(r)$$

Er is geen uniek maximum als q precies 1 meer is dan $p+1$.

Dan $q=p+2$. In andere gevallen is q minimaal 4 meer dan $p+1$ en is keuze voor kolom 1 het maximum.

Uitbetaling bij keuze voor kolom 1 volgens $f(p, q, r)$ voor $(0, 2, 0)$.

Dit geeft voor speler 1 $R - p + h(p) + g(q - 2) + t(r)$.

Speler 2: $f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) =$
 $h(p) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 1)$

Speler 3: $f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) =$
 $h(p) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 2)$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Uitbetaling bij keuze voor kolom 3 volgens $f(p + 1, q, r - 1)$ voor $(1, 2, 2)$.

Omdat in dit geval $q = p + 1$ en omdat $f(p + 1, q, r - 1)$ geldt $q = (p + 1) + 1 = p + 2$.

Dit geeft voor speler 1 $h(p) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 2) =$

$h(p) + g(q - 2) + t(r) + R - (p + 2 - 2) =$

$h(p) + g(q - 2) + t(r) + R - p$

Speler 2: $f(p + 1, q, r - 1) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - 1 - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r - 1) =$

$h(p) + g(q - 2) + t(r - 3) + R - p + R - (r - 2) =$

$h(p) + g(q - 2) + t(r) + R - p =$

$h(p) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 2)$

Speler 3: $f(p + 1, q, r - 1) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - 1 - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r - 1) =$

$h(p) + g(q - 2) + t(r - 3) + R - (q - 1) + R - (r - 3) =$

$h(p) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 1)$

Inductie over q voor mod(a,b,c)=(0,0,0)

Aantonen: $f(p, q + 1, r) = h(p) + g(q + 1) + t(r) + k(p) + m(q + 1) + n(r)$

Voor speler 1, 2 en 3 is dit:

$f(p, q + 1, r) = h(p) + g(q + 1) + t(r)$

Maximum bepalen voor speler 1

Keuze voor kolom 1

$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r)$ voor $(a - 1, b, c) =$

$R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r)$

$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r)$ voor $(2, 0, 0) =$

$R - (p - 1) + h(p - 3) + g(q + 1) + t(r) =$

$h(p) + g(q + 1) + t(r)$

Keuze voor kolom 2

$R - q + f(p, q, r)$ voor $(a, b - 1, c) =$

$R - q + h(p - a) + g(q - (b - 1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$

$R - q + f(p, q, r)$ voor $(0, 2, 0) =$

$R - q + h(p) + g(q - 2) + t(r) =$

$h(p) + g(q + 1) + t(r)$

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned}
& R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) = \\
& R - (r - 1) + h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - (c - 1)) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1) \\
& R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (0, 0, 2) = \\
& R - (r - 1) + h(p) + g(q + 1) + t(r - 3) = \\
& h(p) + g(q + 1) + t(r)
\end{aligned}$$

Er is geen uniek maximum. Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p - 1, q + 1, r)$ voor $(2, 0, 0)$.

Dit geeft voor speler 1 $h(p) + g(q + 1) + t(r)$.

Speler 2: $h(p - 3) + g(q + 1) + t(r) + R - (p - 2) = h(p) + g(q + 1) + t(r)$

Speler 3: $h(p - 3) + g(q + 1) + t(r) + R - (p - 3) = h(p) + g(q + 1) + t(r)$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Keuze voor kolom 2 levert uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(0, 2, 0) =$

Dit geeft voor speler 1 $h(p) + g(q + 1) + t(r)$.

Speler 2: $f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + t(r) =$
 $h(p) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 1) =$
 $h(p) + g(q + 1) + t(r)$

Speler 3: $f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + t(r) =$
 $h(p) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 2) =$
 $h(p) + g(q + 1) + t(r)$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Keuze voor kolom 3 levert uitbetaling volgens $f(p, q + 1, r - 1)$ voor $(0, 0, 2)$

Voor speler 1 geeft dit $h(p) + g(q + 1) + t(r)$

Speler 2: $f(p, q + 1, r - 1) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1)$
 $h(p) + g(q + 1) + t(r - 3) + R - (r - 2) =$
 $h(p) + g(q + 1) + t(r)$

Speler 3: $f(p, q + 1, r - 1) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1)$
 $h(p) + g(q + 1) + t(r - 3) + R - (r - 3) =$
 $h(p) + g(q + 1) + t(r)$

Dit overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(0,2,1)

Aantonen voor speler 1:

$$\begin{aligned}
f(p, q, r + 1) &= h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = \\
& h(p) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 1)
\end{aligned}$$

Aantonen voor speler 2:

$$\begin{aligned}
f(p, q, r + 1) &= h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = \\
& h(p) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 2)
\end{aligned}$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) =$$

$$h(p) + g(q - 2) + t(r) + R - r$$

Maximum bepalen voor speler 1

Keuze voor kolom 1

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (a - 1, b, c) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r + 1)$$

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (2, 2, 1) = R - (p - 1) + h(p - 3) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 1) =$$

$$h(p) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - a) + g(q - 1 - (b - 1)) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1)$$

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (0, 1, 1) =$$

$$R - (q - 1) + h(p) + g(q - 2) + t(r)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - r + h(p - a) + g(q - b) + t(r - (c - 1)) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 2, 0) =$$

$$R - r + h(p) + g(q - 2) + t(r)$$

Er is geen uniek maximum. Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens

$$f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (2, 2, 1).$$

Dit geeft voor speler 1 $h(p) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 1)$.

$$\text{Speler 2: } f(p - 1, q, r + 1) = h(p - 1 - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p - 3) + g(q - 2) + t(r) + R - (p - 2) + R - (q - 2) = h(p) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 2)$$

$$\text{Speler 3: } f(p - 1, q, r + 1) = h(p - 1 - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p - 3) + g(q - 2) + t(r) + R - (p - 3) + R - r = h(p) + g(q - 2) + t(r) + R - r$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Als speler 1 kiest voor kolom 2, dan uitbetaling volgens $f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (0, 1, 1)$.

Dit geeft voor speler 1 $h(p) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 1)$.

$$\text{Speler 2: } f(p, q - 1, r + 1) = h(p - a) + g(q - 1 - b) + t(r) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1) =$$

$$h(p) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 2)$$

$$\text{Speler 3: } f(p - 1, q, r + 1) = h(p - 1 - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p) + g(q - 2) + t(r) + R - r$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(1,0,1)

Inductie over p voor mod(2,0,1)

Aantonen voor speler 1:

$$f(p + 1, q, r) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p - 1) + g(q) + t(r - 1) + R - p$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ h(p-1) + g(q) + t(r-1) + R - (p-1)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ h(p-1) + g(q) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Maximum bepalen voor speler 1**Keuze voor kolom 1**

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a-1, b, c) = R - p + h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 0, 1) =$$

$$R - p + h(p-1) + g(q) + t(r-1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (a, b-1, c) =$$

$$R - (q-1) + h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r)$$

$$R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (2, 2, 1) =$$

$$R - (q-1) + h(p-1) + g(q-3) + t(r-1) + R - (q-2) =$$

$$h(p-1) + g(q) + t(r-1) + R - (q-2)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) =$$

$$R - (r-1) + h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-1-c) + k(p+1) + m(q) + n(r-1)$$

$$R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (2, 0, 0) =$$

$$R - (r-1) + h(p-1) + g(q) + t(r-1)$$

q is minimaal 1 meer dan p+1.

Als q precies 1 meer is dan p+1 dan $q=(p+1)+1=p+2$. In dat geval is er geen uniek maximum: kolom 1 en kolom 2 leveren hetzelfde op. In andere gevallen is keuze voor kolom 1 het maximum.

In geval van keuze voor kolom 1 dan uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(1, 0, 1)$.

Dit geeft voor speler 1 $R - p + h(p-1) + g(q) + t(r-1)$.

$$\text{Speler 2: } f(p, q, r) = h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p-1) + g(q) + t(r-1) + R - (p-1)$$

$$\text{Speler 3: } f(p, q, r) = h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p-1) + g(q) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

In geval van keuze voor kolom 2 dan uitbetaling volgens $f(p+1, q-1, r)$ voor $(2, 2, 1)$.

Dit geeft voor speler 1 $h(p-1) + g(q) + t(r-1) + R - (q-2) =$

$$h(p-1) + g(q) + t(r-1) + R - (p+2-2) =$$

$$h(p-1) + g(q) + t(r-1) + R - p$$

$$\text{Speler 2: } f(p+1, q-1, r) = h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r) =$$

$$h(p-1) + g(q-3) + t(r-1) + R - p + R - (q-3) =$$

$$h(p-1) + g(p-3) + t(r-1) + R - (q-2) + R - (p+2-3) =$$

$$h(p-1) + g(q) + t(r-1) + R - (p-1)$$

$$\text{Speler 3: } f(p+1, q-1, r) = h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r) =$$

$$h(p-1) + g(q-3) + t(r-1) + R - (p-1) + R - (r-1) =$$

$$h(p-1) + g(q-3) + t(r-1) + R - (q-2-1) + R - (r-1) =$$

$$h(p-1) + g(q-3) + t(r-1) + R - (q-3) + R - (r-1)$$

$$h(p-1) + g(q) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(1,1,1)

Aantonen voor speler 1:

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) =$$

$$h(p-1) + g(q) + t(r-1) + R - (p-1)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) =$$

$$h(p-1) + g(q) + t(r-1) + R - (q-1)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) =$$

$$h(p-1) + g(q) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Maximum bepalen voor de speler 1.

Keuze voor kolom 1

$$R - (p-1) + f(p-1, q+1, r) \text{ voor } (a-1, b, c) =$$

$$R - (p-1) + h(p-1-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p-1) + m(q+1) + n(r)$$

$$R - (p-1) + f(p-1, q+1, r) \text{ voor } (0, 1, 1) =$$

$$R - (p-1) + h(p-1) + g(q) + t(r-1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b-1, c) =$$

$$R - q + h(p-a) + g(q-(b-1)) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 0, 1) =$$

$$R - q + h(p-1) + g(q) + t(r-1)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r-1) + f(p, q+1, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) =$$

$$R - (r-1) + h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-1-(c-1)) + k(p) + m(q+1) + n(r-1)$$

$$R - (r-1) + f(p, q+1, r-1) \text{ voor } (1, 1, 0) =$$

$$R - (r-1) + h(p-1) + g(q) + t(r-1)$$

Er is geen uniek maximum als $p=r$. In dat geval is $p=q=r$ en kiest speler 1 volgens afspraak kolom 1. In andere gevallen is r minimaal 3 groter dan p en is keuze voor kolom 1 maximum. In beide gevallen kiest speler 1 voor kolom 1. Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p-1, q+1, r) \text{ voor } (0, 1, 1)$.

Dit geeft voor speler 1 $R - (p-1) + h(p-1) + g(q) + t(r-1)$

$$\text{Speler 2: } f(p-1, q+1, r) = h(p-1-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p-1) + m(q+1) + n(r) =$$

$$h(p-1) + g(q) + t(r-1) + R - (q-1)$$

$$\text{Speler 3: } f(p-1, q+1, r) = h(p-1-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p-1) + m(q+1) + n(r) =$$

$$h(p-1) + g(q) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(1,0,2)

Aantonen voor speler 1:

$$\begin{aligned} f(p, q, r+1) &= h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) = \\ &h(p-1) + g(q) + t(r-1) + R - (p-1) \end{aligned}$$

Aantonen voor speler 2:

$$\begin{aligned} f(p, q, r+1) &= h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) = \\ &h(p-1) + g(q) + t(r-1) + R - r \end{aligned}$$

Aantonen voor speler 3:

$$\begin{aligned} f(p, q, r+1) &= h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) = \\ &h(p-1) + g(q) + t(r-1) + R - (r-1) \end{aligned}$$

Maximum bepalen voor speler 1.

Keuze voor kolom 1

$$\begin{aligned} R - (p-1) + f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (a-1, b, c) &= \\ R - (p-1) + h(p-1 - (a-1)) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p-1) + m(q) + n(r+1) &= \\ R - (p-1) + f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (0, 0, 2) &= \\ R - (p-1) + h(p-1) + g(q) + t(r-1) & \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 2

$$\begin{aligned} R - (q-1) + f(p, q-1, r+1) \text{ voor } (a, b-1, c) &= \\ R - (q-1) + h(p-a) + g(q-1 - (b-1)) + t(r+1-c) + k(p) + m(q-1) + n(r+1) &= \\ R - (q-1) + f(p, q-1, r+1) \text{ voor } (1, 2, 2) &= \end{aligned}$$

Ingeval van mod(1,2,2) zijn er twee mogelijke uitbetalingen.

De eerste mogelijkheid geeft voor speler 1

$$\begin{aligned} R - (q-1) + h(p-1) + g(q-3) + t(r-1) + R - (q-3) &= \\ R - (q-3) + h(p-1) + g(q) + t(r-1) & \end{aligned}$$

Ingeval $q=p+2$ dan levert substitutie $h(p-1) + g(q) + t(r-1) + R - (p-1)$

Deze uitbetaling levert dan dus hetzelfde op als uitbetaling bij keuze voor kolom 1.

De tweede mogelijkheid geeft voor speler

$$\begin{aligned} R - (q-1) + h(p-1) + g(q-3) + t(r-1) + R - (q-2) &= \\ h(p) + g(q) + t(r-2) + R - (p+2-2) &= \\ h(p) + g(q) + t(r-1) + R - p & \end{aligned}$$

Dit is een lagere uitbetaling dan de keuze voor kolom 1. Dus uitbetaling via (0,0,2).

Bewijs voor mod(1,1,0)

Inductie over p voor mod(2,1,0)

Aantonen voor speler 1:

$$\begin{aligned} f(p+1, q, r) &= h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ &h(p-1) + g(q-1) + t(r) + R - p \end{aligned}$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ h(p-1) + g(q-1) + t(r) + R - (p-1)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ h(p-1) + g(q-1) + t(r) + R - (q-1)$$

Maximum bepalen voor speler 1**Keuze voor kolom 1**

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a-1, b, c) = R - p + h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 1, 0) =$$

$$R - p + h(p-1) + g(q-1) + t(r)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (a, b-1, c) =$$

$$R - (q-1) + h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r)$$

$$R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (2, 0, 0) =$$

$$R - (q-1) + h(p-1) + g(q-1) + t(r)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) =$$

$$R - (r-1) + h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-1-c) + k(p+1) + m(q) + n(r-1)$$

$$R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (2, 1, 2) =$$

$$R - (r-1) + h(p-1) + g(q-1) + t(r-3) + R - (q-1) =$$

$$h(p-1) + g(q-1) + t(r) + R - (q-1) =$$

q is minimaal 2 meer dan p . Keuze voor kolom 1 is maximum. Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(1, 1, 0)$.

Dit geeft voor speler 1 $R - p + h(p-1) + g(q-1) + t(r)$.

$$\text{Speler 2: } f(p, q, r) = h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) = \\ h(p-1) + g(q-1) + t(r) + R - (p-1)$$

$$\text{Speler 3: } f(p, q, r) = h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) = \\ h(p-1) + g(q-1) + t(r) + R - (q-1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(1,2,0)**Aantonen voor speler 1:**

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) = \\ h(p-1) + g(q-1) + t(r) + R - (p-1)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) = \\ h(p-1) + g(q-1) + t(r) + R - q$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) = \\ h(p-1) + g(q-1) + t(r) + R - (q-1)$$

Maximum bepalen voor speler 1**Keuze voor kolom 1**

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r)$$

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (0, 2, 0) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1) + g(q - 1) + t(r)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - q + h(p - a) + g(q - (b - 1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 1, 0) =$$

$$R - q + h(p - 1) + g(q - 1) + t(r)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - (c - 1)) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1)$$

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (1, 2, 2) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - 1) + g(q - 1) + t(r - 3) + R - (q - 1) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - 1) + g(q - 1) + t(r)$$

Keuze voor kolom 1 is maximum. Uitbetaling volgens $f(p - 1, q + 1, r)$ voor $(0, 2, 0)$.

Dit geeft voor speler 1 $R - (p - 1) + h(p - 1) + g(q - 1) + t(r)$

Speler 2: $f(p - 1, q + 1, r) = h(p - 1 - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) =$
 $h(p - 1) + g(q - 1) + t(r) + R - q$

Speler 3: $f(p - 1, q + 1, r) = h(p - 1 - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) =$
 $h(p - 1) + g(q - 1) + t(r) + R - (q - 1)$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(1,1,1)**Aantonen voor speler 1:**

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) =$$

$$h(p - 1) + g(q - 1) + t(r) + R - (p - 1)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) =$$

$$h(p - 1) + g(q - 1) + t(r) + R - (q - 1)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) =$$

$$h(p - 1) + g(q - 1) + t(r) + R - (r - 1)$$

Maximum bepalen voor de speler 1.**Keuze voor kolom 1**

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (a - 1, b, c) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r + 1)$$

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (0, 1, 1) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1) + g(q - 1) + t(r)$$

Keuze voor kolom 2

$$\begin{aligned}
& R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (a, b - 1, c) = \\
& R - (q - 1) + h(p - a) + g(q - 1 - (b - 1)) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1) \\
& R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (1, 0, 1) = \\
& R - (q - 1) + h(p - 1) + g(q - 1) + t(r)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned}
& R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c - 1) = \\
& R - r + h(p - a) + g(q - b) + t(r - (c - 1)) + k(p) + m(q) + n(r) \\
& R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 1, 0) = \\
& R - r + h(p - 1) + g(q - 1) + t(r)
\end{aligned}$$

Er is geen uniek maximum als $p=q$, speler 1 kiest dan volgens afspraak kolom 1. In andere gevallen is q minimaal 3 groter dan p en is keuze voor kolom 1 maximum. In beide gevallen kiest speler 1 voor kolom 1. Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens

$$f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (0, 1, 1).$$

Dit geeft voor speler 1 $R - (p - 1) + h(p - 1) + g(q - 1) + t(r)$.

$$\begin{aligned}
\text{Speler 2: } f(p - 1, q, r + 1) &= h(p - 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r) = \\
& h(p - 1) + g(q - 1) + t(r) + R - (q - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Speler 3: } f(p - 1, q, r + 1) &= h(p - 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r) = \\
& h(p - 1) + g(q - 1) + t(r) + R - (r - 1)
\end{aligned}$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(1,2,2)**Inductie over p voor mod(2,2,2)****Aantonen voor speler 1:**

$$\begin{aligned}
f(p + 1, q, r) &= h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) = \\
& h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 2) + R - p + R - (q - 2)
\end{aligned}$$

Aantonen voor speler 2:

$$\begin{aligned}
f(p + 1, q, r) &= h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) = \\
& h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 2) + R - (p - 1) + R - (r - 1)
\end{aligned}$$

Aantonen voor speler 3:

$$\begin{aligned}
f(p + 1, q, r) &= h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) = \\
& h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 2) + R - (q - 1) + R - (r - 2)
\end{aligned}$$

Maximum bepalen voor de speler .**Keuze voor kolom 1**

$$\begin{aligned}
& R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) = R - p + h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) \\
& R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 2, 2) = \\
& R - p + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 2) + R - (q - 2)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 2

$$\begin{aligned}
& R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) = \\
& R - (q - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - 1 - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q - 1) + n(r) \\
& R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (2, 1, 2) =
\end{aligned}$$

$$R - (q - 1) + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 2) + R - (q - 2)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - 1 - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r - 1)$$

$$R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (2, 2, 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 2) + R - (q - 1)$$

Als $p=q$ kiest speler 1 volgens afspraak kolom 1. In andere gevallen is q minimaal 3 groter dan p en is keuze voor kolom 1 maximum. In beide gevallen kiest speler 1 voor kolom 1. Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(1, 2, 2)$.

Dit geeft voor speler 1 $R - p + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 2) + R - (q - 2)$.

$$\text{Speler 2: } f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) = h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 2) + R - (p - 1) + R - (r - 1).$$

$$\text{Speler 3: } f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) = h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 2) + R - (q - 1) + r - (r - 2).$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(1,0,2)**Aantonen voor speler 1:**

$$f(p, q + 1, r) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) = h(p - 1) + g(q + 1) + t(r - 2) + R - (p - 1)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q + 1, r) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) = h(p - 1) + g(q + 1) + t(r - 2) + R - (r - 1)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q + 1, r) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) = h(p - 1) + g(q + 1) + t(r - 2) + R - (r - 2)$$

Maximum bepalen voor speler 1**Keuze voor kolom 1**

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r)$$

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (0, 0, 2) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1) + g(q + 1) + t(r - 2)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - q + h(p - a) + g(q - (b - 1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 2, 2) =$$

$$R - q + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 2) + R - (q - 2) =$$

$$R - (q - 2) + h(p - 1) + g(q + 1) + t(r - 2)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - (c - 1)) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1)$$

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (1, 0, 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - 1) + g(q + 1) + t(r - 2)$$

Keuze voor kolom 1 is maximum. Uitbetaling volgens $f(p - 1, q + 1, r)$ voor $(0, 0, 2)$.

Dit geeft voor speler 1 $R - (p - 1) + h(p - 1) + g(q + 1) + t(r - 2)$.

$$\text{Speler 2: } f(p - 1, q + 1, r) = h(p - 1 - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) = h(p - 1) + g(q + 1) + t(r - 2) + R - (r - 1)$$

$$\text{Speler 3: } f(p - 1, q + 1, r) = h(p - 1 - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) = h(p - 1) + g(q + 1) + t(r - 2) + R - (r - 2)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Keuze voor kolom 3

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - r + h(p - a) + g(q - b) + t(r - (c - 1)) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 0, 1) =$$

$$R - r + h(p - 1) + g(q) + t(r - 1)$$

Er is geen uniek maximum als q precies 2 meer is dan p . In dat geval levert keuze voor kolom 1 hetzelfde op keuze voor kolom 2. Echter, keuze voor kolom 2 brengt het risico mee dat er uiteindelijk een lagere betaling zal volgen. Speler 1 zal daarom voor de zekerheid van kolom 1 kiezen. In andere gevallen (als q niet precies 2 meer is dan p) is kolom 1 het maximum.

Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p - 1, q, r + 1)$ voor $(0, 0, 2)$.

Dit geeft voor speler 1 $R - (p - 1) + h(p - 1) + g(q) + t(r - 1)$.

$$\text{Speler 2: } f(p - 1, q, r + 1) = h(p - 1 - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r + 1) = h(p - 1) + g(q) + t(r - 1) + R - r$$

$$\text{Speler 3: } f(p - 1, q, r + 1) = h(p - 1 - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r + 1) = h(p - 1) + g(q) + t(r - 1) + R - (r - 1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor $\text{mod}(1, 2, 0)$

Aantonen voor speler 1:

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = h(p - 1) + g(q - 2) + t(r + 1) + R - (p - 1)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = h(p - 1) + g(q - 2) + t(r + 1) + R - (q - 1)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = h(p - 1) + g(q - 2) + t(r + 1) + R - (q - 2)$$

Maximum bepalen voor speler 1

Keuze voor kolom 1

$$\begin{aligned}
& R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (a - 1, b, c) = \\
& R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r + 1) \\
& R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (0, 2, 0) = \\
& R - (p - 1) + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r + 1)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 2

$$\begin{aligned}
& R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (a, b - 1, c) = \\
& R - (q - 1) + h(p - a) + g(q - 1 - (b - 1)) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1) \\
& R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (1, 1, 0) = \\
& R - (q - 1) + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r + 1)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned}
& R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c - 1) = \\
& R - r + h(p - a) + g(q - b) + t(r - (c - 1)) + k(p) + m(q) + n(r) \\
& R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 2, 2) = \\
& R - r + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 2) + R - (q - 2) = \\
& R - (q - 2) + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r + 1)
\end{aligned}$$

Ingeval q precies 1 meer is dan p+1 dan is er geen uniek maximum: keuze voor kolom 3 levert hetzelfde op als keuze voor kolom 1. In andere gevallen is keuze voor kolom 1 het maximum.

Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p - 1, q, r + 1)$ voor $(0, 2, 0)$.

Dit geeft voor speler 1 $R - (p - 1) + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r + 1)$.

Speler 2: $f(p - 1, q, r + 1) = h(p - 1 - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r) = h(p - 1) + g(q - 2) + t(r + 1) + R - (q - 1)$

Speler 3: $f(p - 1, q, r + 1) = h(p - 1 - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r) = h(p - 1) + g(q - 2) + t(r + 1) + R - (q - 2)$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Als speler 1 kiest voor kolom 3, dan $q = p + 1$ en uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(1, 2, 2)$.

Dit geeft voor speler 1 $R - (q - 2) + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r + 1) =$

$$R - (p - 1) + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r + 1).$$

Speler 2: $f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) =$

$$h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 2) + R - (p - 1) + R - (r - 1) =$$

$$h(p - 1) + g(q - 2) + t(r + 1) + R - (q - 2)$$

Speler 3: $f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) =$

$$h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 2) + R - (q - 1) + R - (r - 2) =$$

$$h(p - 1) + g(q - 2) + t(r + 1) + R - (q - 1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(2,0,0)**Inductie over p voor mod(a,b,c)=(0,0,0)**

Als $a=0$ $b=0$ en $c=0$ dan voor elke speler aantonen:

$$f(p+1, q, r) = h(p+1) + g(q) + t(r) + k(p+1) + m(q) + n(r) =$$

Omdat voor $\text{mod}(a,b,c)=(0,0,0)$ voor elke speler geldt dat $k(p)=0$, $m(q)=0$, $n(r)=0$ (zie hiervoor bijgevoegde lijst waarop $k(p)$, $m(q)$ en $n(r)$ vermeld staan) is bovenstaande voor elke speler te noteren als $h(p+1) + g(q) + t(r)$

Als $a=0$ $b=0$ en $c=0$ dan is speler 1 aan zet. Ingeval $p \neq q \neq r$ heeft speler 1 keuze tussen kolom 1, kolom 2, en kolom 3.

Keuze voor kolom 1 voor speler 1 te schrijven als:

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a-1, b, c) = R - p + h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

Voor $(2,0,0)$ geldt voor speler 1 dat $k(p)=0$, $m(q)=0$, $n(r)=0$, dus bovenstaande te noteren als

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 0, 0) =$$

$$R - p + h(p-2) + g(q) + t(r)$$

Als $a=0$ $b=0$ en $c=0$ dan is keuze voor kolom 2 voor speler 1 te schrijven als:

$$R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (a, b-1, c) =$$

$$R - (q-1) + f(p, q, r) = R - (q-1) + h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q)$$

$$R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (0, 2, 0) =$$

$$R - (q-1) + h(p+1) + g(q-3) + t(r)$$

Als $a=0$ $b=0$ en $c=0$ dan is keuze voor kolom 3 voor speler 1 te schrijven als:

$$R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) =$$

$$R - (r-1) + h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-1-c) + k(p+1) + m(q) + n(r-1)$$

$$R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (0, 0, 2) =$$

$$R - (r-1) + h(p+1) + g(q) + t(r-3)$$

Bepalen maximum.

$$\max\{R - p + h(p-2) + g(q) + t(r),$$

$$R - (q-1) + h(p+1) + g(q-3) + t(r),$$

$$R - (r-1) + h(p+1) + g(q) + t(r-3)\} =$$

$$\max\{h(p+1) + g(q) + t(r),$$

$$h(p+1) + g(q) + t(r),$$

$$h(p+1) + g(q) + t(r)\}$$

Er is geen uniek maximum. Als $p=q=r$ kiest speler 1 gedwongen voor kolom 1. Uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(2, 0, 0)$.

Dit geeft voor speler 1 $h(p+1) + g(q) + t(r)$.

$$\text{Speler 2: } h(p-2) + g(q) + t(r) + R - (p-1) = h(p+1) + g(q) + t(r)$$

$$\text{Speler 3: } h(p-2) + g(q) + t(r) + R - (p-2) = h(p+1) + g(q) + t(r)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Keuze voor kolom 2 levert uitbetaling volgens $f(p+1, q-1, r)$ voor $(0, 2, 0)$

Voor speler 1 geeft dit $R - (q - 1) + h(p + 1) + g(q - 3) + t(r) =$
 $h(p + 1) + g(q) + t(r)$.

Speler 2: $f(p + 1, q - 1, r) = h(p + 1 - a) + g(q - 1 - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q - 1) + t(r) =$
 $h(p + 1) + g(q - 3) + t(r) + R - (q - 2) =$
 $h(p + 1) + g(q) + t(r)$

Speler 3: $f(p + 1, q - 1, r) = h(p + 1 - a) + g(q - 1 - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q - 1) + t(r) =$
 $h(p + 1) + g(q - 3) + t(r) + R - (q - 3) =$
 $h(p + 1) + g(q) + t(r)$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Keuze voor kolom 3 levert uitbetaling volgens $f(p + 1, q, r - 1)$ voor $(0, 0, 2)$

Voor speler 1 geeft dit $R - (r - 1) + h(p + 1) + g(q) + t(r - 3) =$
 $h(p + 1) + g(q) + t(r)$.

Speler 2: $f(p + 1, q, r - 1) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - 1 - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r - 1)$
 $h(p + 1) + g(q) + t(r - 3) + R - (r - 2) =$
 $h(p + 1) + g(q) + t(r)$

Speler 3: $f(p + 1, q - 1, r) = h(p + 1 - a) + g(q - 1 - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q - 1) + t(r) =$
 $h(p + 1) + g(q) + t(r - 3) + R - (r - 3) =$
 $h(p + 1) + g(q) + t(r)$

Dit overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(2,1,0)

Aantonen voor speler 1:

$f(p, q + 1, r) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) =$
 $h(p - 2) + g(q) + t(r) + R - (p - 1)$

Aantonen voor speler 2:

$f(p, q + 1, r) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) =$
 $h(p - 2) + g(q) + t(r) + R - (p - 2)$

Aantonen voor speler 3:

$f(p, q + 1, r) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) =$
 $h(p - 2) + g(q) + t(r) + R - q$

Maximum bepalen voor speler 1

Keuze voor kolom 1

$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r)$ voor $(a - 1, b, c) =$
 $R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r)$
 $R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r)$ voor $(1, 1, 0) =$
 $R - (p - 1) + h(p - 2) + g(q) + t(r)$

Keuze voor kolom 2

$R - q + f(p, q, r)$ voor $(a, b - 1, c) =$
 $R - q + h(p - a) + g(q - (b - 1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$
 $R - q + f(p, q, r)$ voor $(2, 0, 0) =$

$$R - q + h(p - 2) + g(q) + t(r)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - (c - 1)) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1)$$

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (2, 1, 2) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - 2) + g(q) + t(r - 3) + R - q =$$

$$h(p - 2) + g(q) + t(r) + R - q$$

q is minstens 2 meer dan p . Keuze voor kolom 1 is maximum. Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p - 1, q + 1, r)$ voor $(1, 1, 0) =$.

Dit geeft voor speler 1 $R - (p - 1) + h(p - 2) + g(q) + t(r)$

$$\text{Speler 2: } f(p - 1, q + 1, r) = h(p - 1 - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) = h(p - 2) + g(q) + t(r) + R - (p - 2)$$

$$\text{Speler 3: } f(p - 1, q + 1, r) = h(p - 1 - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) = h(p - 2) + g(q) + t(r) + R - q$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(2,0,1)**Aantonen voor speler 1:**

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = h(p - 2) + g(q) + t(r) + R - (p - 1)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = h(p - 2) + g(q) + t(r) + R - (p - 2)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = h(p - 2) + g(q) + t(r) + R - r$$

Maximum bepalen voor speler 1**Keuze voor kolom 1**

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (a - 1, b, c) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r + 1)$$

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (1, 0, 1) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 2) + g(q) + t(r)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - a) + g(q - 1 - (b - 1)) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1)$$

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (2, 2, 1) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - 2) + g(q - 3) + t(r) + R - (q - 2) =$$

$$h(p - 2) + g(q) + t(r) + R - (q - 2)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - r + h(p - a) + g(q - b) + t(r - (c - 1)) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 0, 0) =$$

$$R - r + h(p - 2) + g(q) + t(r)$$

Er is geen uniek maximum als q precies 1 meer is dan p : keuze voor kolom 1 leidt dan tot dezelfde betaling voor speler 1 als keuze voor kolom 2. In andere gevallen is de keuze voor kolom 1 het maximum.

Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p - 1, q, r + 1)$ voor $(1, 0, 1)$

Dit geeft voor speler 1 $R - (p - 1) + h(p - 2) + g(q) + t(r)$.

$$\text{Speler 2: } f(p - 1, q, r + 1) = h(p - 1 - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r + 1) =$$

$$h(p - 2) + g(q) + t(r) + R - (p - 2)$$

$$\text{Speler 3: } f(p - 1, q, r + 1) = h(p - 1 - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r + 1) =$$

$$h(p - 2) + g(q) + t(r) + R - r$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Als speler 1 kiest voor kolom 2 in het geval $q = p + 1$, dan uitbetaling volgens

$$f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (2, 2, 1)$$

Dit geeft voor speler 1 $h(p - 2) + g(q) + t(r) + R - (q - 2) =$

$$h(p - 2) + g(q) + t(r) + R - (p + 1 - 2) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 2) + g(q) + t(r)$$

$$\text{Speler 2: } f(p, q - 1, r + 1) = h(p - a) + g(q - 1 - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1) =$$

$$h(p - 2) + g(q - 3) + t(r) + R - (p - 1) + R - (q - 3) =$$

$$h(p - 2) + g(q - 3) + t(r) + R - (q - 1 - 1) + R - (p + 1 - 3) =$$

$$h(p - 2) + g(q - 3) + t(r) + R - (q - 2) + R - (p - 2)$$

$$h(p - 2) + g(q) + t(r) + R - (p - 2)$$

$$\text{Speler 3: } f(p, q - 1, r + 1) = h(p - a) + g(q - 1 - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1) =$$

$$h(p - 2) + g(q - 3) + t(r) + R - (p - 2) + R - r =$$

$$h(p - 2) + g(q - 3) + t(r) + R - (q - 1 - 2) + R - r =$$

$$h(p - 2) + g(q - 3) + t(r) + R - (q - 3) + R - r$$

$$h(p - 2) + g(q) + t(r) + R - r$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(2,1,2)

Inductie over p voor mod(0,1,2)

Aantonen voor speler 1:

$$f(p + 1, q, r) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p + 1) + g(q - 1) + t(r - 2) + R - (q - 1)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p + 1, q, r) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p + 1) + g(q - 1) + t(r - 2) + R - (r - 1)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p + 1, q, r) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p+1) + g(q-1) + t(r-2) + R - (r-2)$$

Maximum bepalen voor speler 1

Keuze voor kolom 1

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a-1, b, c) = R - p + h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 1, 2) =$$

$$R - p + h(p-2) + g(q-1) + t(r-2) + R - (q-1) =$$

$$h(p+1) + g(q-1) + t(r-2) + R - (q-1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (a, b-1, c) =$$

$$R - (q-1) + h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r)$$

$$R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (0, 0, 2) =$$

$$R - (q-1) + h(p+1) + g(q-1) + t(r-2)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) =$$

$$R - (r-1) + h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-1-c) + k(p+1) + m(q) + n(r-1)$$

$$R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (0, 1, 1) =$$

$$R - (r-1) + h(p) + g(q-1) + t(r-2)$$

Er is geen uniek maximum. Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens

$$f(p, q, r) \text{ voor } (2, 1, 2).$$

$$\text{Dit geeft voor speler 1 } h(p+1) + g(q-1) + t(r-2) + R - (q-1)$$

$$\text{Speler 2: } f(p, q, r) = h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p-2) + g(q-1) + t(r-2) + R - (p-1) + R - (r-1) =$$

$$h(p+1) + g(q-1) + t(r-2) + R - (r-1)$$

$$\text{Speler 3: } f(p, q, r) = h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p-2) + g(q-1) + t(r-2) + R - (p-2) + R - (r-2) =$$

$$h(p+1) + g(q-1) + t(r-2) + R - (r-2)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Als speler 1 kiest voor kolom 2, dan uitbetaling volgens $f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (0, 0, 2)$.

$$\text{Dit geeft voor speler 1 } R - (q-1) + h(p+1) + g(q-1) + t(r-2)$$

$$\text{Speler 2: } f(p+1, q-1, r) = h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r) =$$

$$h(p+1) + g(q-1) + t(r-2) + R - (r-1)$$

$$\text{Speler 3: } f(p+1, q-1, r) = h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r) =$$

$$h(p+1) + g(q-1) + t(r-2) + R - (r-2)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Als speler 1 kiest voor kolom 2, dan uitbetaling volgens $f(p, q, r) \text{ voor } (0, 0, 2) =$

$$\text{Dit geeft voor speler 1 } R - q + h(p) + g(q) + t(r-2)$$

$$\text{Speler 2: } f(p, q, r) = h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p) + g(q) + t(r-2) + R - (r-1)$$

$$\text{Speler 3: } f(p-1, q+1, r) = h(p-1-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p-1) + m(q+1) + n(r) = h(p) + g(q) + t(r-2) + R - (r-2)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(2,2,2)

Aantonen voor speler 1:

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) = h(p-2) + g(q-1) + t(r-2) + R - (p-1) + R - (q-1)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) = h(p-2) + g(q-1) + t(r-2) + R - (p-2) + R - (r-1)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) = h(p-2) + g(q-1) + t(r-2) + R - q + R - (r-2)$$

Maximum bepalen voor speler 1

Keuze voor kolom 1

$$\begin{aligned} R - (p-1) + f(p-1, q+1, r) \text{ voor } (a-1, b, c) &= \\ R - (p-1) + h(p-1-(a-1)) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p-1) + m(q+1) + n(r) &= \\ R - (p-1) + f(p-1, q+1, r) \text{ voor } (1, 2, 2) &= \\ R - (p-1) + h(p-2) + g(q-1) + t(r-2) + R - (q-1) & \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 2

$$\begin{aligned} R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b-1, c) &= \\ R - q + h(p-a) + g(q-(b-1)) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) &= \\ R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 1, 2) &= \\ R - q + h(p-2) + g(q-1) + t(r-2) + R - (q-1) & \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned} R - (r-1) + f(p, q+1, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) &= \\ R - (r-1) + h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-1-(c-1)) + k(p) + m(q+1) + n(r-1) &= \\ R - (r-1) + f(p, q+1, r-1) \text{ voor } (2, 2, 1) &= \\ R - (r-1) + h(p-2) + g(q-1) + t(r-2) + R - q & \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 1 is maximum. Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p-1, q+1, r)$ voor $(1, 2, 2)$.

Dit geeft voor speler 1 $R - (p-1) + h(p-2) + g(q-1) + t(r-2) + R - (q-1)$

$$\text{Speler 2: } f(p-1, q+1, r) = h(p-1-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p-1) + m(q+1) + n(r) = h(p-2) + g(q-1) + t(r-2) + R - (p-2) + R - (r-1)$$

$$\text{Speler 3: } f(p-1, q+1, r) = h(p-1-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p-1) + m(q+1) + n(r) = h(p-2) + g(q-1) + t(r-2) + R - q + R - (r-2)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(2,1,0)

Aantonen voor speler 1:

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) = \\ h(p-2) + g(q-1) + t(r+1) + R - (p-1)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) = \\ h(p-2) + g(q-1) + t(r+1) + R - (p-2)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) = \\ h(p-2) + g(q-1) + t(r+1) + R - (q-1)$$

Maximum bepalen voor speler 1**Keuze voor kolom 1**

$$R - (p-1) + f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (a-1, b, c) = \\ R - (p-1) + h(p-1-(a-1)) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p-1) + m(q) + n(r+1) \\ R - (p-1) + f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (1, 1, 0) = \\ R - (p-1) + h(p-2) + g(q-1) + t(r+1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q-1) + f(p, q-1, r+1) \text{ voor } (a, b-1, c) = \\ R - (q-1) + h(p-a) + g(q-1-(b-1)) + t(r+1-c) + k(p) + m(q-1) + n(r+1) \\ R - (q-1) + f(p, q-1, r+1) \text{ voor } (2, 0, 0) = \\ R - (q-1) + h(p-2) + g(q-1) + t(r+1)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c-1) = \\ R - r + h(p-a) + g(q-b) + t(r-(c-1)) + k(p) + m(q) + n(r) \\ R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 1, 2) = \\ R - r + h(p-2) + g(q-1) + t(r-2) + R - (q-1)$$

q is minstens 2 meer dan p. Keuze voor kolom 1 is maximum. Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p-1, q, r+1)$ voor $(1, 1, 0)$.

Dit geeft voor speler 1 $R - (p-1) + h(p-2) + g(q-1) + t(r+1)$

$$\text{Speler 2: } f(p-1, q, r+1) = h(p-1-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p-1) + m(q) + n(r) = \\ h(p-2) + g(q-1) + t(r+1) + R - (p-2)$$

$$\text{Speler 3: } f(p-1, q, r+1) = h(p-1-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p-1) + m(q) + n(r) = \\ h(p-2) + g(q-1) + t(r+1) + R - (q-1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(2,2,1)**Inductie over p voor mod(0,2,1)****Aantonen voor speler 1:**

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ h(p+1) + g(q-2) + t(r-1) + R - (q-1)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ h(p+1) + g(q-2) + t(r-1) + R - (q-2)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ h(p+1) + g(q-2) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Maximum bepalen voor de speler 1.**Keuze voor kolom 1**

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a-1, b, c) = R - p + h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 2, 1) =$$

$$R - p + h(p-2) + g(q-2) + t(r-1) + R - (q-1) =$$

$$h(p+1) + g(q-2) + t(r-1) + R - (q-1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (a, b-1, c) =$$

$$R - (q-1) + h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r)$$

$$R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (0, 1, 1) =$$

$$R - (q-1) + h(p+1) + g(q-2) + t(r-1)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) =$$

$$R - (r-1) + h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-1-c) + k(p+1) + m(q) + n(r-1)$$

$$R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (0, 2, 0) =$$

$$R - (r-1) + h(p+1) + g(q-2) + t(r-1)$$

Er is geen uniek maximum. Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens

$$f(p, q, r) \text{ voor } (2, 2, 1).$$

$$\text{Dit geeft voor speler 1 } h(p+1) + g(q-2) + t(r-1) + R - (q-1).$$

$$\text{Speler 2: } f(p, q, r) = h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p-2) + g(q-2) + t(r-1) + R - (p-1) + R - (q-2) =$$

$$h(p+1) + g(q-2) + t(r-1) + R - (q-2)$$

$$\text{Speler 3: } f(p, q, r) = h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p+1) + g(q-2) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Als speler 1 kiest voor kolom 2, dan uitbetaling volgens $f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (0, 1, 1)$.

$$\text{Dit geeft voor speler 1 } h(p+1) + g(q-2) + t(r-1) + R - (q-1).$$

$$\text{Speler 2: } f(p+1, q-1, r) = h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r) =$$

$$h(p+1) + g(q-2) + t(r-1) + R - (q-2)$$

$$\text{Speler 3: } f(p+1, q-1, r) = h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r) =$$

$$h(p+1) + g(q-2) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(2,0,1)

Aantonen voor speler 1:

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) = \\ h(p-2) + g(q+1) + t(r-1) + R - (p-1)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) = \\ h(p-2) + g(q+1) + t(r-1) + R - (p-2)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) = \\ h(p-2) + g(q+1) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Maximum bepalen voor speler 1**Keuze voor kolom 1**

$$R - (p-1) + f(p-1, q+1, r) \text{ voor } (a-1, b, c) = \\ R - (p-1) + h(p-1-(a-1)) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p-1) + m(q+1) + n(r) \\ R - (p-1) + f(p-1, q+1, r) \text{ voor } (1, 0, 1) = \\ R - (p-1) + h(p-2) + g(q+1) + t(r-1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b-1, c) = \\ R - q + h(p-a) + g(q-(b-1)) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) \\ R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 2, 1) = \\ R - q + h(p-2) + g(q-2) + t(r-1) + R - (q-1) = \\ h(p-2) + g(q+1) + t(r-1) + R - (q-1)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r-1) + f(p, q+1, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) = \\ R - (r-1) + h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-1-(c-1)) + k(p) + m(q+1) + n(r-1) \\ R - (r-1) + f(p, q+1, r-1) \text{ voor } (2, 0, 0) = \\ R - (r-1) + h(p-2) + g(q+1) + t(r-1)$$

Omdat q minstens 1 meer is dan p is de keuze voor kolom 1 het maximum. Uitbetaling volgens $f(p-1, q+1, r)$ voor $(1, 0, 1)$

Dit geeft voor speler 1 $R - (p-1) + h(p-2) + g(q+1) + t(r-1)$

$$\text{Speler 2: } f(p-1, q+1, r) = h(p-1-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p-1) + m(q+1) + n(r) = \\ h(p-2) + g(q+1) + t(r-1) + R - (p-2)$$

$$\text{Speler 3: } f(p-1, q+1, r) = h(p-1-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p-1) + m(q+1) + n(r) = \\ h(p-2) + g(q+1) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(2,2,2)**Aantonen voor speler 1:**

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) = \\ h(p-2) + g(q-2) + t(r-1) + R - (p-1) + R - (q-2)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) = \\ h(p-2) + g(q-2) + t(r-1) + R - (p-2) + R - r$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) = \\ h(p-2) + g(q-2) + t(r-1) + R - (q-1) + R - (r-1)$$

Maximum bepalen voor speler 1**Keuze voor kolom 1**

$$R - (p-1) + f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (a-1, b, c) = \\ R - (p-1) + h(p-1-(a-1)) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p-1) + m(q) + n(r+1) \\ R - (p-1) + f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (1, 2, 2) = R - (p-1) + h(p-2) + g(q-2) + t(r-1) + R - (q-2)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q-1) + f(p, q-1, r+1) \text{ voor } (a, b-1, c) = \\ R - (q-1) + h(p-a) + g(q-1-(b-1)) + t(r+1-c) + k(p) + m(q-1) + n(r+1) \\ R - (q-1) + f(p, q-1, r+1) \text{ voor } (2, 1, 2) = \\ R - (q-1) + h(p-2) + g(q-2) + t(r-1) + R - (q-2)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c-1) = \\ R - r + h(p-a) + g(q-b) + t(r-(c-1)) + k(p) + m(q) + n(r) \\ R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 2, 1) = \\ R - r + h(p-2) + g(q-2) + t(r-1) + R - (q-1)$$

Er is geen uniek maximum als $p=q$, speler 1 kiest dan volgens afspraak kolom 1. In andere gevallen is q minimaal 3 groter dan p en is keuze voor kolom 1 maximum. In beide gevallen kiest speler 1 voor kolom 1. Als speler 1 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens

$$f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (1, 2, 2).$$

$$\text{Dit geeft voor speler 1 } R - (p-1) + h(p-2) + g(q-2) + t(r-1) + R - (q-2).$$

$$\text{Speler 2: } f(p-1, q, r+1) = h(p-1-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p-1) + m(q) + n(r) = \\ h(p-2) + g(q-2) + t(r-1) + R - (p-2) + R - r$$

$$\text{Speler 3: } f(p-1, q, r+1) = h(p-1-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p-1) + m(q) + n(r) = \\ h(p-2) + g(q-2) + t(r-1) + R - (q-1) + R - (r-1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(0,0,1)**Inductie over p voor mod(1,0,1)****Aantonen voor speler 1:**

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ h(p) + g(q) + t(r-1)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ h(p) + g(q) + t(r-1) + R - p$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ h(p) + g(q) + t(r-1) + R - (r-1)$$

Maximum bepalen voor de speler .**Keuze voor kolom 1**

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) = R - p + h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 0, 1) =$$

$$R - p + h(p) + g(q) + t(r - 1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - (q - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - 1 - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q - 1) + n(r)$$

$$R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (1, 2, 1) =$$

$$R - (q - 1) + h(p) + g(q - 3) + t(r - 1) + R - (q - 3) =$$

$$R - (q - 1) + h(p) + g(q - 3) + t(r - 1) + R - (q - 3)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - 1 - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r - 1)$$

$$R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (1, 0, 0) =$$

$$R - (r - 1) + h(p) + g(q) + t(r - 1)$$

Keuze voor kolom 1 is maximum. Uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(0, 0, 1)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - p + h(p) + g(q) + t(r - 1)$

$$\text{Speler 1: } f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) = \\ h(p) + g(q) + t(r - 1)$$

$$\text{Speler 3: } f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) = \\ h(p) + g(q) + t(r - 1) + R - (r - 1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(0,1,1)**Aantonen voor speler 1:**

$$f(p, q + 1, r) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) = \\ h(p) + g(q) + t(r - 1)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q + 1, r) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) = \\ h(p) + g(q) + t(r - 1) + R - q$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q + 1, r) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) = \\ h(p) + g(q) + t(r - 1) + R - (r - 1)$$

Maximum bepalen voor speler 2**Keuze voor kolom 1**

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r)$$

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (2, 1, 1) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 3) + g(q) + t(r - 1) + R - q$$

Keuze voor kolom 2

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - q + h(p - a) + g(q - (b - 1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 0, 1) =$$

$$R - q + h(p) + g(q) + t(r - 1)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - (c - 1)) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1)$$

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (0, 1, 0) =$$

$$R - (r - 1) + h(p) + g(q) + t(r - 1)$$

Als $q=r$ dan speelt speler 2 volgens afspraak links (in dat geval is keuze voor kolom 3 het maximum). In ander geval is keuze voor kolom 2 het maximum. In beide gevallen kiest speler 2 voor kolom 2. Uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(0, 0, 1)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - q + h(p) + g(q) + t(r - 1)$

$$\text{Speler 1: } f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) = h(p) + g(q) + t(r - 1)$$

$$\text{Speler 3: } f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) = h(p) + g(q) + t(r - 1) + R - (r - 1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor $\text{mod}(0,0,2)$

Aantonen voor speler 1:

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = h(p) + g(q) + t(r - 1)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = h(p) + g(q) + t(r - 1) + R - r$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = h(p) + g(q) + t(r - 1) + R - (r - 1)$$

Maximum bepalen voor speler 2

Keuze voor kolom 1

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (a - 1, b, c) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r + 1)$$

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (2, 0, 2) = R - (p - 1) + h(p - 3) + g(q) + t(r - 1) + R - r$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - a) + g(q - 1 - (b - 1)) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1)$$

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (0, 2, 2) =$$

$$R - (q - 1) + h(p) + g(q - 3) + t(r - 1) + R - r =$$

Keuze voor kolom 3

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - r + h(p - a) + g(q - b) + t(r - (c - 1)) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 0, 1) = R - r + h(p) + g(q) + t(r - 1)$$

Keuze voor kolom 3 is maximum. Uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(0, 0, 1)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - r + h(p) + g(q) + t(r - 1)$

$$\text{Speler 1: } f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) = h(p) + g(q) + t(r - 1)$$

$$\text{Speler 3: } f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) = h(p) + g(q) + t(r - 1) + R - (r - 1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(0,1,0)

Inductie over p voor mod(1,1,0)

Aantonen voor speler 1:

$$f(p + 1, q, r) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) = h(p) + g(q - 1) + t(r)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p + 1, q, r) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) = h(p) + g(q - 1) + t(r) + R - p$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p + 1, q, r) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) = h(p) + g(q - 1) + t(r) + R - (q - 1)$$

Maximum bepalen voor speler 2

Keuze voor kolom 1

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) = R - p + h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 1, 0) =$$

$$R - p + h(p) + g(q - 1) + t(r)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - (q - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - 1 - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q - 1) + n(r)$$

$$R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (1, 0, 0) =$$

$$R - (q - 1) + h(p) + g(q - 1) + t(r)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - 1 - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r - 1)$$

$$R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (1, 1, 2) =$$

$$R - (r - 1) + h(p) + g(q - 1) + t(r - 3) + R - (r - 2) =$$

$$R - (r - 1) + h(p) + g(q - 1) + t(r)$$

Als $p=q$ dan speelt speler 2 volgens afspraak kolom 1. In het andere geval is keuze voor kolom 1 het maximum. Uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(0, 1, 0)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - p + h(p) + g(q - 1) + t(r)$

$$\text{Speler 1: } f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) = h(p) + g(q - 1) + t(r)$$

$$\text{Speler 3: } f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) = h(p) + g(q - 1) + t(r) + R - (q - 1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(0,2,0)

Aantonen voor speler 1:

$$f(p, q + 1, r) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) = h(p) + g(q - 1) + t(r)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q + 1, r) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) = h(p) + g(q - 1) + t(r) + R - q$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q + 1, r) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) = h(p) + g(q - 1) + t(r) + R - (q - 1)$$

Maximum bepalen voor speler 2

Keuze voor kolom 1

$$\begin{aligned} R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) &= \\ R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) &= \\ R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (2, 2, 0) &= \\ R - (p - 1) + h(p - 3) + g(q - 1) + t(r) + R - q &= \\ R - (p - 1) + h(p - 3) + g(q - 1) + t(r) + R - q &= \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 2

$$\begin{aligned} R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) &= \\ R - q + h(p - a) + g(q - (b - 1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) &= \\ R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 1, 0) &= \\ R - q + h(p) + g(q - 1) + t(r) &= \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned} R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) &= \\ R - (r - 1) + h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - (c - 1)) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1) &= \\ R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (0, 2, 2) &= \\ R - (r - 1) + h(p) + g(q - 1) + t(r - 3) + R - (r - 2) &= \\ R - (r - 1) + h(p) + g(q - 1) + t(r) &= \end{aligned}$$

r is minimaal 1 hoger dan q. Als r precies 1 hoger is, dan geen uniek maximum: kolom 2 levert hetzelfde op als kolom 3. In andere geval is keuze voor kolom 2 maximum. Uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(0, 1, 0)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - q + h(p) + g(q - 1) + t(r)$

$$\text{Speler 1: } f(p, q, r) = h(p) + g(q - 1) + t(r)$$

$$\text{Speler 3: } f(p, q, r) = h(p) + g(q - 1) + t(r) + R - (q - 1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(0,1,1)**Aantonen voor speler 1:**

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) = h(p) + g(q-1) + t(r)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) = h(p) + g(q-1) + t(r) + R - (q-1)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) = h(p) + g(q-1) + t(r) + R - r$$

Maximum bepalen voor speler 2**Keuze voor kolom 1**

$$R - (p-1) + f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (a-1, b, c) = R - (p-1) + h(p-1-(a-1)) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p-1) + m(q) + n(r+1)$$

$$R - (p-1) + f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (2, 1, 1) = R - (p-1) + h(p-3) + g(q-1) + t(r) + R - (q-1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q-1) + f(p, q-1, r+1) \text{ voor } (a, b-1, c) = R - (q-1) + h(p-a) + g(q-1-(b-1)) + t(r+1-c) + k(p) + m(q-1) + n(r+1)$$

$$R - (q-1) + f(p, q-1, r+1) \text{ voor } (0, 0, 1) = R - (q-1) + h(p) + g(q-1) + t(r)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c-1) = R - r + h(p-a) + g(q-b) + t(r-(c-1)) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 1, 0) = R - r + h(p) + g(q-1) + t(r)$$

Keuze voor kolom 2 is maximum. Uitbetaling volgens $f(p, q-1, r+1)$ voor $(0, 0, 1)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - (q-1) + h(p) + g(q-1) + t(r)$

$$\text{Speler 1: } f(p, q-1, r+1) = h(p-a) + g(q-1-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q-1) + n(r+1) = h(p) + g(q-1) + t(r)$$

$$\text{Speler 3: } f(p, q-1, r+1) = h(p-a) + g(q-1-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q-1) + n(r+1) = h(p) + g(q-1) + t(r) + R - r$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(0,2,2)**Inductie over p voor mod(1,2,2)****Aantonen voor speler 1:**

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = h(p) + g(q-2) + t(r-2) + R - (q-2)$$

Aantonen voor speler 2:

$$\begin{aligned}
 f(p+1, q, r) &= h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\
 &h(p) + g(q-2) + t(r-2) + R - p + R - (r-1) = \\
 &h(p) + g(q-2) + t(r+1) + R - p
 \end{aligned}$$

Aantonen voor speler 3:

$$\begin{aligned}
 f(p+1, q, r) &= h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\
 &h(p) + g(q-2) + t(r-2) + R - (q-1) + R - (r-2) = \\
 &h(p) + g(q-2) + t(r+1) + R - (q-1)
 \end{aligned}$$

Als $q=p+2$ dan tevens aantonen:

Aantonen voor speler 1:

$$\begin{aligned}
 f(p+1, q, r) &= h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\
 &h(p) + g(q-2) + t(r-2) + R - (q-1)
 \end{aligned}$$

Aantonen voor speler 2:

$$\begin{aligned}
 f(p+1, q, r) &= h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\
 &h(p) + g(q-2) + t(r-2) + R - (r-1) + R - (q-2)
 \end{aligned}$$

Aantonen voor speler 3:

$$\begin{aligned}
 f(p+1, q, r) &= h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\
 &h(p) + g(q-2) + t(r-2) + R - p + R - (r-2)
 \end{aligned}$$

Maximum bepalen voor speler 2**Keuze voor kolom 1**

$$\begin{aligned}
 R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a-1, b, c) &= R - p + h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) \\
 R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 2, 2) &= \\
 R - p + h(p) + g(q-2) + t(r-2) + R - (r-1) &= \\
 R - p + h(p) + g(q-2) + t(r+1) &
 \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 2

$$\begin{aligned}
 R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (a, b-1, c) &= \\
 R - (q-1) + h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r) &= \\
 R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (1, 1, 2) &= \\
 R - (q-1) + h(p) + g(q-2) + t(r-2) + R - (r-1) &= \\
 R - (q-1) + h(p) + g(q-2) + t(r+1) &
 \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned}
 R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) &= \\
 R - (r-1) + h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-1-c) + k(p+1) + m(q) + n(r-1) &= \\
 R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (1, 2, 1) &= \\
 R - (r-1) + h(p) + g(q-2) + t(r-2) + R - (q-2) &= \\
 R - (q-2) + h(p) + g(q-2) + t(r+1) &
 \end{aligned}$$

Als $q=r$ dan heeft speler 2 geen keuze voor kolom 3 en kiest gedwongen kolom 2.

In dat geval is keuze voor kolom 1 maximum.

In het geval q precies 2 meer is dan p en $q \neq r$, dan geen uniek maximum: kolom 1 en kolom 3 leveren hetzelfde op. In andere gevallen is keuze voor kolom 1 het maximum.

Als speler 2 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(0, 2, 2)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - p + h(p) + g(q - 2) + t(r + 1)$

Speler 1: $f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) =$
 $h(p) + g(q - 2) + t(r - 2) + R - (q - 2)$

Speler 3: $f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) =$
 $h(p) + g(q - 2) + t(r - 2) + R - (q - 1) + R - (r - 2) =$
 $h(p) + g(q - 2) + t(r + 1) + R - (q - 1)$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bij keuze voor kolom 3 uitbetaling volgens $f(p + 1, q, r - 1)$ voor $(1, 2, 1)$. Er geldt $q = p + 2$.

Dit geeft voor speler 2 $R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1)$ voor $(1, 2, 1) =$
 $R - (r - 1) + h(p) + g(q - 2) + t(r - 2) + R - (q - 2)$

Speler 1: $f(p + 1, q, r - 1) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - 1 - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r - 1) =$
 $h(p) + g(q - 2) + t(r - 2) + R - (q - 1)$

Speler 3: $f(p + 1, q, r - 1) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - 1 - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r - 1) =$
 $h(p) + g(q - 2) + t(r - 2) + R - p + R - (r - 2)$

Inductie over q voor mod(0,0,2)

Aantonen voor speler 1:

$f(p, q + 1, r) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) =$
 $h(p) + g(q + 1) + t(r - 2)$

Aantonen voor speler 2:

$f(p, q + 1, r) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) =$
 $h(p) + g(q + 1) + t(r - 2) + R - (r - 1)$

Aantonen voor speler 3:

$f(p, q + 1, r) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) =$
 $h(p) + g(q + 1) + t(r - 2) + R - (r - 2)$

Maximum bepalen voor speler 2

Keuze voor kolom 1

$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r)$ voor $(a - 1, b, c) =$
 $R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r)$
 $R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r)$ voor $(2, 0, 2) =$
 $R - (p - 1) + h(p - 3) + g(q + 1) + t(r - 2) + R - (r - 1) =$
 $R - (p - 1) + h(p - 3) + g(q + 1) + t(r + 1)$

Keuze voor kolom 2

$R - q + f(p, q, r)$ voor $(a, b - 1, c) =$
 $R - q + h(p - a) + g(q - (b - 1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$
 $R - q + f(p, q, r)$ voor $(0, 2, 2) =$
 $R - q + h(p) + g(q - 2) + t(r - 2) + R - (r - 1) =$
 $R - q + h(p) + g(q - 2) + t(r + 1)$

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned}
R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) &= \\
R - (r - 1) + h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - (c - 1)) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1) \\
R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (0, 0, 1) &= \\
R - (r - 1) + h(p) + g(q + 1) + t(r - 2) &= \\
h(p) + g(q + 1) + t(r + 1)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 3 is maximum. Uitbetaling volgens $f(p, q + 1, r - 1)$ voor $(0, 0, 1)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - (r - 1) + h(p) + g(q + 1) + t(r - 2)$

$$\text{Speler 1: } f(p, q + 1, r - 1) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1) = h(p) + g(q + 1) + t(r - 2)$$

$$\text{Speler 3: } f(p, q + 1, r - 1) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1) = h(p) + g(q + 1) + t(r - 2) + R - (r - 2)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(0,2,0)**Aantonen voor speler 1:**

$$\begin{aligned}
f(p, q, r + 1) &= h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = \\
&h(p) + g(q - 2) + t(r + 1)
\end{aligned}$$

Aantonen voor speler 2:

$$\begin{aligned}
f(p, q, r + 1) &= h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = \\
&h(p) + g(q - 2) + t(r + 1) + R - (q - 1)
\end{aligned}$$

Aantonen voor speler 3:

$$\begin{aligned}
f(p, q, r + 1) &= h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = \\
&h(p) + g(q - 2) + t(r + 1) + R - (q - 2)
\end{aligned}$$

Maximum bepalen voor speler 2**Keuze voor kolom 1**

$$\begin{aligned}
R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (a - 1, b, c) &= \\
R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r + 1) \\
R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (2, 2, 0) &= \\
R - (p - 1) + h(p - 3) + g(q - 2) + t(r + 1) + R - (q - 1) &=
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 2

$$\begin{aligned}
R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (a, b - 1, c) &= \\
R - (q - 1) + h(p - a) + g(q - 1 - (b - 1)) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1) \\
R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (0, 1, 0) &= \\
R - (q - 1) + h(p) + g(q - 2) + t(r + 1)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned}
R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c - 1) &= \\
R - r + h(p - a) + g(q - b) + t(r - (c - 1)) + k(p) + m(q) + n(r) \\
R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (0, 2, 2) &= \\
R - r + h(p) + g(q - 2) + t(r - 2) + R - (r - 1) &= \\
R - r + h(p) + g(q - 2) + t(r + 1)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 2 is maximum. Uitbetaling volgens $f(p, q-1, r+1)$ voor $(0, 1, 0)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - (q-1) + h(p) + g(q-2) + t(r+1)$.

Speler 1: $f(p, q-1, r+1) = h(p-a) + g(q-1-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q-1) + n(r+1) = h(p) + g(q-2) + t(r+1)$

Speler 3: $f(p, q-1, r+1) = h(p-a) + g(q-1-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q-1) + n(r+1) = h(p) + g(q-2) + t(r+1) + R - (q-2)$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(1,0,0)

Inductie over p voor mod(2,0,0)

Aantonen voor speler 1:

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = h(p-1) + g(q) + t(r)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = h(p-1) + g(q) + t(r) + R - p$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = h(p-1) + g(q) + t(r) + R - (p-1)$$

Maximum bepalen voor speler 2

Keuze voor kolom 1

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a-1, b, c) = R - p + h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 0, 0) =$$

$$R - p + h(p-1) + g(q) + t(r)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (a, b-1, c) =$$

$$R - (q-1) + h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r)$$

$$R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (2, 2, 0) =$$

$$R - (q-1) + h(p-1) + g(q-3) + t(r) + R - (q-2) =$$

$$R - (q-1) + h(p-1) + g(q) + t(r)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) =$$

$$R - (r-1) + h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-1-c) + k(p+1) + m(q) + n(r-1)$$

$$R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (2, 0, 2) =$$

$$R - (r-1) + h(p-1) + g(q) + t(r-3) + R - (r-2) =$$

$$R - (r-1) + h(p-1) + g(q) + t(r)$$

Als q en/of r precies 1 meer is dan p, dan geen uniek maximum: keuze voor kolom 1, 2 of 3 levert hetzelfde op. In andere gevallen keuze voor kolom 1 maximum. Uitbetaling volgens

$f(p, q, r)$ voor $(1, 0, 0)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - p + h(p-1) + g(q) + t(r)$

$$\text{Speler 1: } f(p, q, r) = h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) = h(p-1) + g(q) + t(r)$$

$$\text{Speler 3: } f(p, q, r) = h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) = h(p-1) + g(q) + t(r) + R - (p-1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(1,1,0)

Aantonen voor speler 1:

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) = h(p-1) + g(q) + t(r)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) = h(p-1) + g(q) + t(r) + R - (p-1)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) = h(p-1) + g(q) + t(r) + R - q$$

Maximum bepalen voor speler 2

Keuze voor kolom 1

$$R - (p-1) + f(p-1, q+1, r) \text{ voor } (a-1, b, c) =$$

$$R - (p-1) + h(p-1-(a-1)) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p-1) + m(q+1) + n(r)$$

$$R - (p-1) + f(p-1, q+1, r) \text{ voor } (0, 1, 0) =$$

$$R - (p-1) + h(p-1) + g(q) + t(r)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b-1, c) =$$

$$R - q + h(p-a) + g(q-(b-1)) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 0, 0) =$$

$$R - q + h(p-1) + g(q) + t(r)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r-1) + f(p, q+1, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) =$$

$$R - (r-1) + h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-1-(c-1)) + k(p) + m(q+1) + n(r-1)$$

$$R - (r-1) + f(p, q+1, r-1) \text{ voor } (1, 1, 2) =$$

$$R - (r-1) + h(p-1) + g(q) + t(r-3) + R - (r-2) =$$

$$R - (r-1) + h(p-1) + g(q) + t(r)$$

Keuze voor kolom 1 is maximum. Uitbetaling volgens $f(p-1, q+1, r)$ voor $(0, 1, 0)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - (p-1) + h(p-1) + g(q) + t(r)$

$$\text{Speler 1: } f(p-1, q+1, r) = h(p-1-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p-1) + m(q+1) + n(r) = h(p-1) + g(q) + t(r)$$

$$\text{Speler 3: } f(p-1, q+1, r) = h(p-1-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p-1) + m(q+1) + n(r) = h(p-1) + g(q) + t(r) + R - q$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(1,0,1)**Aantonen voor speler 1:**

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) = \\ h(p-1) + g(q) + t(r)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) = \\ h(p-1) + g(q) + t(r) + R - (p-1)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) = \\ h(p-1) + g(q) + t(r) + R - r$$

Maximum bepalen voor speler 2**Keuze voor kolom 1**

$$R - (p-1) + f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (a-1, b, c) = \\ R - (p-1) + h(p-1 - (a-1)) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p-1) + m(q) + n(r+1) \\ R - (p-1) + f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (0, 0, 1) = \\ R - (p-1) + h(p-1) + g(q) + t(r)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q-1) + f(p, q-1, r+1) \text{ voor } (a, b-1, c) = \\ R - (q-1) + h(p-a) + g(q-1 - (b-1)) + t(r+1-c) + k(p) + m(q-1) + n(r+1) \\ R - (q-1) + f(p, q-1, r+1) \text{ voor } (1, 2, 1) = \\ R - (q-1) + h(p-1) + g(q-3) + t(r) + R - (q-3)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c-1) = \\ R - r + h(p-a) + g(q-b) + t(r - (c-1)) + k(p) + m(q) + n(r) \\ R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 0, 0) = \\ R - r + h(p-1) + g(q) + t(r)$$

Keuze voor kolom 1 is maximum. Uitbetaling volgens $f(p-1, q, r+1)$ voor $(0, 0, 1)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - (p-1) + h(p-1) + g(q) + t(r)$

$$\text{Speler 1: } f(p-1, q, r+1) = h(p-1-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p-1) + m(q) + n(r) = \\ h(p-1) + g(q) + t(r)$$

$$\text{Speler 3: } f(p-1, q, r+1) = h(p-1-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p-1) + m(q) + n(r) = \\ h(p-1) + g(q) + t(r) + R - r$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(1,1,2)**Inductie over p voor mod(2,1,2)****Aantonen voor speler 1:**

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ h(p-1) + g(q-1) + t(r-2) + R - (q-1)$$

Aantonen voor speler 2:

$$\begin{aligned}
 f(p+1, q, r) &= h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\
 &h(p-1) + g(q-1) + t(r-2) + R - p + R - (r-1) = \\
 &h(p-1) + g(q-1) + t(r+1) + R - p
 \end{aligned}$$

Aantonen voor speler 3:

$$\begin{aligned}
 f(p+1, q, r) &= h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\
 &h(p-1) + g(q-1) + t(r-2) + R - (p-1) + R - (r-2)
 \end{aligned}$$

Maximum bepalen voor speler 2**Keuze voor kolom 1**

$$\begin{aligned}
 R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a-1, b, c) &= R - p + h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) \\
 R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 1, 2) &= \\
 R - p + h(p-1) + g(q-1) + t(r-2) + R - (r-1) &= \\
 R - p + h(p-1) + g(q-1) + t(r+1)
 \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 2

$$\begin{aligned}
 R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (a, b-1, c) &= \\
 R - (q-1) + h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r) &= \\
 R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (2, 0, 2) &= \\
 R - (q-1) + h(p-1) + g(q-1) + t(r-2) + R - (r-1) &= \\
 R - (q-1) + h(p-1) + g(q-1) + t(r+1)
 \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned}
 R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) &= \\
 R - (r-1) + h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-1-c) + k(p+1) + m(q) + n(r-1) &= \\
 R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (2, 1, 1) &= \\
 R - (r-1) + h(p-1) + g(q-1) + t(r-2) + R - (q-1) &= \\
 R - (r-1) + h(p-1) + g(q-1) + t(r+1)
 \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 1 is maximum. Uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(1, 1, 2)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - p + h(p-1) + g(q-1) + t(r+1)$

$$\begin{aligned}
 \text{Speler 1: } f(p, q, r) &= h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) = \\
 &h(p-1) + g(q-1) + t(r-2) + R - (q-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Speler 3: } f(p, q, r) &= h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r) = \\
 &h(p-1) + g(q-1) + t(r-2) + R - (p-1) + R - (r-2)
 \end{aligned}$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(1,2,2)**Aantonen voor speler 1:**

$$\begin{aligned}
 f(p, q+1, r) &= h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) = \\
 &h(p-1) + g(q-1) + t(r-2) + R - (q-1)
 \end{aligned}$$

Aantonen voor speler 2:

$$\begin{aligned}
 f(p, q+1, r) &= h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) = \\
 &h(p-1) + g(q-1) + t(r-2) + R - (p-1) + R - (r-1) =
 \end{aligned}$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) =$$

$$h(p-1) + g(q-1) + t(r-2) + R - q + R - (r-2)$$

Maximum bepalen voor speler 2

Keuze voor kolom 1

$$R - (p-1) + f(p-1, q+1, r) \text{ voor } (a-1, b, c) =$$

$$R - (p-1) + h(p-1 - (a-1)) + g(q+1 - b) + t(r - c) + k(p-1) + m(q+1) + n(r)$$

$$R - (p-1) + f(p-1, q+1, r) \text{ voor } (0, 2, 2) =$$

$$R - (p-1) + h(p-1) + g(q-1) + t(r-2) + R - (r-1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b-1, c) =$$

$$R - q + h(p-a) + g(q - (b-1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 1, 2) =$$

$$R - q + h(p-1) + g(q-1) + t(r-2) + R - (r-1)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r-1) + f(p, q+1, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) =$$

$$R - (r-1) + h(p-a) + g(q+1 - b) + t(r-1 - (c-1)) + k(p) + m(q+1) + n(r-1)$$

$$R - (r-1) + f(p, q+1, r-1) \text{ voor } (1, 2, 1) =$$

$$R - (q-1) + h(p-1) + g(q-1) + t(r-2) + R - (r-1)$$

Keuze voor kolom 1 is maximum. Uitbetaling volgens $f(p-1, q+1, r)$ voor $(0, 2, 2) =$.

Dit geeft voor speler 2 $R - (p-1) + h(p-1) + g(q-1) + t(r-2) + R - (r-1)$

Speler 1: $f(p-1, q+1, r) = h(p-1-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p-1) + m(q+1) + n(r) =$
 $h(p-1) + g(q+1-2) + t(r-2) + R - (q-1)$

Speler 3: $f(p-1, q+1, r) = h(p-1-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p-1) + m(q+1) + n(r) =$
 $h(p-1) + g(q-1) + t(r-2) + R - q + R - (r-2)$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(1,1,0)

Aantonen voor speler 1:

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) =$$

$$h(p-1) + g(q-1) + t(r+1)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) =$$

$$h(p-1) + g(q-1) + t(r+1) + R - (p-1)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) =$$

$$h(p-1) + g(q-1) + t(r+1) + R - (q-1)$$

Maximum bepalen voor speler 2

Keuze voor kolom 1

$$R - (p-1) + f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (a-1, b, c) =$$

$$R - (p-1) + h(p-1 - (a-1)) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p-1) + m(q) + n(r+1)$$

$$R - (p-1) + f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (0, 1, 0) = R - (p-1) + h(p-1) + g(q-1) + t(r+1)$$

Keuze voor kolom 2

$$\begin{aligned}
& R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (a, b - 1, c) = \\
& R - (q - 1) + h(p - a) + g(q - 1 - (b - 1)) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1) \\
& R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (1, 0, 0) = \\
& R - (q - 1) + h(p - 1) + g(q - 1) + t(r + 1)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned}
& R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c - 1) = \\
& R - r + h(p - a) + g(q - b) + t(r - (c - 1)) + k(p) + m(q) + n(r) \\
& R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 1, 2) = R - r + h(p - 1) + g(q - 1) + t(r - 2) + R - (r - 1) = \\
& R - r + h(p - 1) + g(q - 1) + t(r + 1)
\end{aligned}$$

Als $p=q$ speelt speler 2 volgens afspraak kolom 1. In andere gevallen is keuze voor kolom 1 maximum. Uitbetaling volgens $f(p - 1, q, r + 1)$ voor $(0, 1, 0)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - (p - 1) + h(p - 1) + g(q - 1) + t(r + 1)$

$$\begin{aligned}
\text{Speler 1: } f(p - 1, q, r + 1) &= h(p - 1 - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r) = \\
& h(p - 1) + g(q - 1) + t(r + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Speler 3: } f(p - 1, q, r + 1) &= h(p - 1 - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r) = \\
& h(p - 1) + g(q - 1) + t(r + 1) + R - (q - 1)
\end{aligned}$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(1,2,1)**Inductie over p voor mod(2,2,1)****Aantonen voor speler 1:**

$$\begin{aligned}
f(p + 1, q, r) &= h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) = \\
& h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (q - 1)
\end{aligned}$$

Aantonen voor speler 2:

$$\begin{aligned}
f(p + 1, q, r) &= h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) = \\
& h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - p + R - (q - 2)
\end{aligned}$$

Aantonen voor speler 3:

$$\begin{aligned}
f(p + 1, q, r) &= h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) = \\
& h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (p - 1) + R - (r - 1)
\end{aligned}$$

Maximum bepalen voor speler 2**Keuze voor kolom 1**

$$\begin{aligned}
& R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) = R - p + h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) \\
& R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 2, 1) = \\
& R - p + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (q - 2)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 2

$$\begin{aligned}
& R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) = \\
& R - (q - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - 1 - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q - 1) + n(r) \\
& R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (2, 1, 1) = \\
& R - (q - 1) + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (q - 2)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned}
& R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) = \\
& R - (r - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - 1 - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r - 1) \\
& R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (2, 2, 0) = \\
& R - (r - 1) + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (q - 1)
\end{aligned}$$

Als $p=q$ dan kiest speler 2 volgens afspraak kolom 1. In andere gevallen is q minimaal 3 meer dan p en leidt de keuze voor kolom 1 tot het maximum. Uitbetaling volgens

$f(p, q, r)$ voor $(1, 2, 1)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - p + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (q - 2)$

Speler 1: $f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) =$
 $h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (q - 1)$

Speler 3: $f(p, q, r) = h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) =$
 $h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (p - 1) + R - (r - 1)$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor $\text{mod}(1, 0, 1)$

Aantonen voor speler 1:

$$\begin{aligned}
f(p, q + 1, r) &= h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) = \\
& h(p - 1) + g(q + 1) + t(r - 1)
\end{aligned}$$

Aantonen voor speler 2:

$$\begin{aligned}
f(p, q + 1, r) &= h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) = \\
& h(p - 1) + g(q + 1) + t(r - 1) + R - (p - 1)
\end{aligned}$$

Aantonen voor speler 3:

$$\begin{aligned}
f(p, q + 1, r) &= h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) = \\
& h(p - 1) + g(q + 1) + t(r - 1) + R - (r - 1)
\end{aligned}$$

Maximum bepalen voor speler 2

Keuze voor kolom 1

$$\begin{aligned}
& R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) = \\
& R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) \\
& R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (0, 0, 1) = \\
& R - (p - 1) + h(p - 1) + g(q + 1) + t(r - 1)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 2

$$\begin{aligned}
& R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) = \\
& R - q + h(p - a) + g(q - (b - 1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) \\
& R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 2, 1) = \\
& R - q + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (q - 2)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned}
& R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) = \\
& R - (r - 1) + h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - (c - 1)) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1) \\
& R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (1, 0, 0) = \\
& R - (r - 1) + h(p - 1) + g(q) + t(r - 1)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 1 is maximum. Uitbetaling volgens $f(p - 1, q + 1, r)$ voor $(0, 0, 1)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - (p - 1) + h(p - 1) + g(q + 1) + t(r - 1)$.

Speler 1: $f(p - 1, q + 1, r) = h(p - 1 - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) = h(p - 1) + g(q + 1) + t(r - 1)$

Speler 3: $f(p - 1, q + 1, r) = h(p - 1 - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) = h(p - 1) + g(q + 1) + t(r - 1) + R - (r - 1)$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(1,2,2)

Aantonen voor speler 1:

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (q - 2)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (p - 1) + R - r$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (q - 1) + R - (r - 1)$$

Als $q=p+1$ tevens aantonen:

Aantonen voor speler 1:

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (q - 1)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - r + R - (q - 2)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (p - 1) + R - (r - 1)$$

Maximum bepalen voor speler 2

Keuze voor kolom 1

$$\begin{aligned} R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (a - 1, b, c) &= \\ R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r + 1) &= \\ R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (0, 2, 2) &= \\ R - (p - 1) + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - r & \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 2

$$\begin{aligned} R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (a, b - 1, c) &= \\ R - (q - 1) + h(p - a) + g(q - 1 - (b - 1)) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1) &= \\ R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (1, 1, 2) &= \\ R - (q - 1) + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - r & \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned} R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c - 1) &= \\ R - r + h(p - a) + g(q - b) + t(r - (c - 1)) + k(p) + m(q) + n(r) & \end{aligned}$$

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (1, 2, 1) =$$

$$R - (q - 2) + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - r$$

Als q precies 1 meer is dan p dan is er geen uniek maximum. Keuze voor kolom 3 levert dan voor speler 2 dezelfde uitbetaling als keuze voor kolom 1. In andere geval is keuze voor kolom 1 het maximum. Als $q=p+1$ en $q=r$ dan gedwongen keuze voor kolom 2 en is keuze voor kolom 1 het maximum.

Als speler 2 kiest voor kolom 1, dan uitbetaling volgens $f(p - 1, q, r + 1)$ voor $(0, 2, 2)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - (p - 1) + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - r$

$$\text{Speler 1: } f(p - 1, q, r + 1) = h(p - 1 - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (q - 2)$$

$$\text{Speler 3: } f(p - 1, q, r + 1) = h(p - 1 - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (q - 1) + R - (r - 1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Als speler 2 kiest voor kolom 3 dan uitbetaling volgens $f(p, q, r)$ voor $(1, 2, 1)$.

Dit levert voor speler 2 $R - r + h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (q - 2)$.

$$\text{Speler 1: } f(p, q, r) = h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (q - 1)$$

$$\text{Speler 3: } f(p, q, r) = h(p - 1) + g(q - 2) + t(r - 1) + R - (p - 1) + R - (r - 1)$$

Bewijs voor mod(2,0,2)

Inductie over p voor mod(0,0,2)

Aantonen voor speler 1:

$$f(p + 1, q, r) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p + 1) + g(q) + t(r - 2)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p + 1, q, r) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p + 1) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 1) =$$

$$h(p + 1) + g(q) + t(r + 1)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p + 1, q, r) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p + 1) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 2)$$

Maximum bepalen voor de speler 2.

Keuze voor kolom 1

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) = R - p + h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 0, 2) =$$

$$R - p + h(p - 2) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 1) =$$

$$R - p + h(p - 2) + g(q) + t(r + 1)$$

Keuze voor kolom 2

$$\begin{aligned}
& R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) = \\
& R - (q - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - 1 - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q - 1) + n(r) \\
& R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (0, 2, 2) = \\
& R - (q - 1) + h(p + 1) + g(q - 3) + t(r - 2) + R - (r - 1) = \\
& R - (q - 1) + h(p + 1) + g(q - 3) + t(r + 1)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned}
& R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) = \\
& R - (r - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - 1 - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r - 1) \\
& R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (0, 0, 1) = \\
& R - (r - 1) + h(p + 1) + g(q) + t(r - 2) = \\
& h(p + 1) + g(q) + t(r + 1)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 3 is maximum. Als speler 2 kiest voor kolom 3, dan uitbetaling volgens $f(p + 1, q, r - 1)$ voor $(0, 0, 1)$.

Dit geeft voor speler 2 $h(p + 1) + g(q) + t(r + 1)$

$$\text{Speler 1: } f(p + 1, q, r - 1) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - 1 - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r - 1) = h(p + 1) + g(q) + t(r - 2)$$

$$\text{Speler 3: } f(p + 1, q, r - 1) = h(p + 1) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 2)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(2,1,2)**Aantonen voor speler 1:**

$$\begin{aligned}
f(p, q + 1, r) &= h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) = \\
& h(p - 2) + g(q) + t(r - 2) + R - q
\end{aligned}$$

Aantonen voor speler 2:

$$\begin{aligned}
f(p, q + 1, r) &= h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) = \\
& h(p - 2) + g(q) + t(r - 2) + R - (p - 1) + R - (r - 1)
\end{aligned}$$

Aantonen voor speler 3:

$$\begin{aligned}
f(p, q + 1, r) &= h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) = \\
& h(p - 2) + g(q) + t(r - 2) + R - (p - 2) + R - (r - 2)
\end{aligned}$$

Maximum bepalen voor speler 2**Keuze voor kolom 1**

$$\begin{aligned}
& R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) = \\
& R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) \\
& R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (1, 1, 2) = \\
& R - (p - 1) + h(p - 2) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 1)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 2

$$\begin{aligned}
& R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) = \\
& R - q + h(p - a) + g(q - (b - 1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) \\
& R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 0, 2) = \\
& R - q + h(p - 2) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 1)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned}
& R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) = \\
& R - (r - 1) + h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - (c - 1)) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1) \\
& R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (2, 1, 1) = \\
& R - (r - 1) + h(p - 2) + g(q) + t(r - 2) + R - q
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 1 is maximum. Uitbetaling volgens $f(p - 1, q + 1, r)$ voor $(1, 1, 2)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - (p - 1) + h(p - 2) + g(q) + t(r - 2) + R - (r - 1)$

Speler 1: $f(p - 1, q + 1, r) = h(p - 1 - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) =$
 $h(p - 2) + g(q) + t(r - 2) + R - q$

Speler 3: $f(p - 1, q + 1, r) = h(p - 1 - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) =$
 $h(p - 2) + g(q) + t(r - 2) + R - (p - 2) + R - (r - 2)$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(2,0,0)

Aantonen voor speler 1:

$$\begin{aligned}
f(p, q, r + 1) &= h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = \\
&h(p - 2) + g(q) + t(r + 1)
\end{aligned}$$

Aantonen voor speler 2:

$$\begin{aligned}
f(p, q, r + 1) &= h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = \\
&h(p - 2) + g(q) + t(r + 1) + R - (p - 1)
\end{aligned}$$

Aantonen voor speler 3:

$$\begin{aligned}
f(p, q, r + 1) &= h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = \\
&h(p - 2) + g(q) + t(r + 1) + R - (p - 2)
\end{aligned}$$

Maximum bepalen voor speler 2

Keuze voor kolom 1

$$\begin{aligned}
& R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (a - 1, b, c) = \\
& R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r + 1) \\
& R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (1, 0, 0) = \\
& R - (p - 1) + h(p - 2) + g(q) + t(r + 1)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 2

$$\begin{aligned}
& R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (a, b - 1, c) = \\
& R - (q - 1) + h(p - a) + g(q - 1 - (b - 1)) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1) \\
& R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (2, 2, 0) = \\
& R - (q - 1) + h(p - 2) + g(q - 3) + t(r + 1) + R - (q - 2) = \\
& R - (q - 1) + h(p - 2) + g(q) + t(r + 1)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned}
& R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c - 1) = \\
& R - r + h(p - a) + g(q - b) + t(r - (c - 1)) + k(p) + m(q) + n(r) \\
& R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 0, 2) = \\
& R - r + h(p - 2) + g(q) + t(r + 1)
\end{aligned}$$

Keuze voor kolom 1 is maximum aangezien q en r minimaal 1 meer zijn dan p. Uitbetaling volgens $f(p - 1, q, r + 1)$ voor $(1, 0, 0)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - (p - 1) + h(p - 2) + g(q) + t(r + 1)$.

Speler 1: $f(p - 1, q, r + 1) = h(p - 1 - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r) = h(p - 2) + g(q) + t(r + 1)$

Speler 3: $f(p - 1, q, r + 1) = h(p - 1 - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r) = h(p - 2) + g(q) + t(r + 1) + R - (p - 2)$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(2,1,1)

Inductie over p voor mod(0,1,1)

Aantonen voor speler 1:

$$f(p + 1, q, r) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) = h(p + 1) + g(q - 1) + t(r - 1)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p + 1, q, r) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) = h(p + 1) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (q - 1)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p + 1, q, r) = h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r) = h(p + 1) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (r - 1)$$

Maximum bepalen voor speler 2

Keuze voor kolom 1

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) = R - p + h(p - a) + g(q - b) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 1, 1) =$$

$$R - p + h(p - 2) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (q - 1) =$$

$$R - p + h(p - 2) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (q - 1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - (q - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - 1 - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q - 1) + n(r)$$

$$R - (q - 1) + f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (0, 0, 1) =$$

$$R - (q - 1) + h(p + 1) + g(q - 1) + t(r - 1) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - 2) + R - (p - 1) + g(q - 1) + t(r - 1) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 2) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (q - 1)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p + 1 - a) + g(q - b) + t(r - 1 - c) + k(p + 1) + m(q) + n(r - 1)$$

$$R - (r - 1) + f(p + 1, q, r - 1) \text{ voor } (0, 1, 0) =$$

$$R - (r - 1) + h(p + 1) + g(q - 1) + t(r - 1) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 2) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (r - 1)$$

Er is geen uniek maximum als $q=r$. In dat geval speelt speler volgens afspraak kolom 2. In ander geval is keuze voor kolom 2 maximum. In beide gevallen kiest speler 2 voor kolom 2. Als speler 2 kiest voor kolom 2, dan uitbetaling volgens $f(p + 1, q - 1, r) \text{ voor } (0, 0, 1)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - (q - 1) + h(p + 1) + g(q - 1) + t(r - 1)$.

Speler 1: $f(p + 1, q - 1, r) = h(p + 1 - a) + g(q - 1 - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q - 1) + n(r) = h(p + 1) + g(q - 1) + t(r - 1)$

Speler 3: $f(p + 1, q - 1, r) = h(p + 1 - a) + g(q - 1 - b) + t(r - c) + k(p + 1) + m(q - 1) + n(r) = h(p + 1) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (r - 1)$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(2,2,1)

Aantonen voor speler 1:

$$f(p, q + 1, r) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) = h(p - 2) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - q$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q + 1, r) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) = h(p - 2) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (p - 1) + R - (q - 1)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q + 1, r) = h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p) + m(q + 1) + n(r) = h(p - 2) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (p - 2) + R - (r - 1)$$

Maximum bepalen voor speler 2

Keuze voor kolom 1

$$\begin{aligned} R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) &= \\ R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) &= \\ R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (1, 2, 1) &= \\ R - (p - 1) + h(p - 2) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (q - 1) & \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 2

$$\begin{aligned} R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) &= \\ R - q + h(p - a) + g(q - (b - 1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r) &= \\ R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 1, 1) &= \\ R - q + h(p - 2) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (q - 1) & \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 3

$$\begin{aligned} R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) &= \\ R - (r - 1) + h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - (c - 1)) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1) &= \\ R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (2, 2, 0) &= \\ R - (r - 1) + h(p - 2) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - q & \end{aligned}$$

Keuze voor kolom 1 is maximum. Uitbetaling volgens $f(p - 1, q + 1, r)$ voor $(1, 2, 1)$

Dit geeft voor speler 2 $R - (p - 1) + h(p - 2) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (q - 1)$

Speler 1: $f(p - 1, q + 1, r) = h(p - 1 - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) = h(p - 2) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - q$

Speler 3: $f(p - 1, q + 1, r) = h(p - 1 - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) = h(p - 2) + g(q - 1) + t(r - 1) + R - (p - 2) + R - (r - 1)$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(2,1,2)**Aantonen voor speler 1:**

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) = \\ h(p-2) + g(q-1) + t(r-1) + R - (q-1)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) = \\ h(p-2) + g(q-1) + t(r-1) + R - (p-1) + R - r$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q, r+1) = h(p-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p) + m(q) + n(r+1) = \\ h(p-2) + g(q-1) + t(r-1) + R - (p-2) + R - (r-1)$$

Maximum bepalen voor speler 2**Keuze voor kolom 1**

$$R - (p-1) + f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (a-1, b, c) = \\ R - (p-1) + h(p-1-(a-1)) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p-1) + m(q) + n(r+1) \\ R - (p-1) + f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (1, 1, 2) = \\ R - (p-1) + h(p-2) + g(q-1) + t(r-1) + R - r$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q-1) + f(p, q-1, r+1) \text{ voor } (a, b-1, c) = \\ R - (q-1) + h(p-a) + g(q-1-(b-1)) + t(r+1-c) + k(p) + m(q-1) + n(r+1) \\ R - (q-1) + f(p, q-1, r+1) \text{ voor } (2, 0, 2) = \\ R - (q-1) + h(p-2) + g(q-1) + t(r-1) + R - r$$

Keuze voor kolom 3

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c-1) = \\ R - r + h(p-a) + g(q-b) + t(r-(c-1)) + k(p) + m(q) + n(r) \\ R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 1, 1) = \\ R - r + h(p-2) + g(q-2) + t(r-1) + R - (q-1)$$

Keuze voor kolom 1 is maximum, aangezien q en r groter zijn dan p. Uitbetaling volgens

$$f(p-1, q, r+1) \text{ voor } (1, 1, 2).$$

$$\text{Dit geeft voor speler 2 } R - (p-1) + h(p-2) + g(q-1) + t(r-1) + R - r$$

$$\text{Speler 1: } f(p-1, q, r+1) = h(p-1-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p-1) + m(q) + n(r) = \\ h(p-2) + g(q-1) + t(r-1) + R - (q-1)$$

$$\text{Speler 3: } f(p-1, q, r+1) = h(p-1-a) + g(q-b) + t(r+1-c) + k(p-1) + m(q) + n(r) = \\ h(p-2) + g(q-1) + t(r-1) + R - (p-2) + R - (r-1)$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Bewijs voor mod(2,2,0)**Inductie over p voor mod(0,2,0)****Aantonen voor speler 1:**

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ h(p+1) + g(q-2) + t(r)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ h(p+1) + g(q-2) + t(r) + R - (q-1)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p+1, q, r) = h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q) + n(r) = \\ h(p+1) + g(q-2) + t(r) + R - (q-2)$$

Maximum bepalen voor de speler 2.**Keuze voor kolom 1**

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (a-1, b, c) = R - p + h(p-a) + g(q-b) + t(r-c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - p + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 2, 0) =$$

$$R - p + h(p-2) + g(q-2) + t(r) + R - (q-1)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (a, b-1, c) =$$

$$R - (q-1) + h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r)$$

$$R - (q-1) + f(p+1, q-1, r) \text{ voor } (0, 1, 0) =$$

$$R - (q-1) + h(p+1) + g(q-2) + t(r)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (a, b, c-1) =$$

$$R - (r-1) + h(p+1-a) + g(q-b) + t(r-1-c) + k(p+1) + m(q) + n(r-1)$$

$$R - (r-1) + f(p+1, q, r-1) \text{ voor } (0, 2, 2) =$$

$$R - (r-1) + h(p+1) + g(q-2) + t(r-3) + R - (r-2) =$$

$$R - (r-1) + h(p+1) + g(q-2) + t(r)$$

Keuze voor kolom 2 is maximum. Uitbetaling volgens $f(p+1, q-1, r)$ voor $(0, 1, 0)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - (q-1) + h(p+1) + g(q-2) + t(r)$

$$\text{Speler 1: } f(p+1, q-1, r) = h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r) = \\ h(p+1) + g(q-2) + t(r)$$

$$\text{Speler 3: } f(p+1, q-1, r) = h(p+1-a) + g(q-1-b) + t(r-c) + k(p+1) + m(q-1) + n(r) = \\ h(p+1) + g(q-2) + t(r) + R - (q-2)$$

Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p+1, q, r) = (p, q, r)$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over q voor mod(2,0,0)**Aantonen voor speler 1:**

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) = \\ h(p-2) + g(q+1) + t(r)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) = \\ h(p-2) + g(q+1) + t(r) + R - (p-1)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q+1, r) = h(p-a) + g(q+1-b) + t(r-c) + k(p) + m(q+1) + n(r) = \\ h(p-2) + g(q+1) + t(r) + R - (p-2)$$

Maximum bepalen voor speler 2**Keuze voor kolom 1**

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (a - 1, b, c) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r)$$

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (1, 0, 0) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 2) + g(q + 1) + t(r)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - q + h(p - a) + g(q - (b - 1)) + t(r - c) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - q + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 2, 0) =$$

$$R - q + h(p - 2) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 1) =$$

$$R - q + h(p - 2) + g(q + 1)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - a) + g(q + 1 - b) + t(r - 1 - (c - 1)) + k(p) + m(q + 1) + n(r - 1)$$

$$R - (r - 1) + f(p, q + 1, r - 1) \text{ voor } (2, 0, 2) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - 2) + g(q + 1) + t(r - 3) + R - (r - 2) =$$

$$R - (r - 1) + h(p - 2) + g(q + 1) + t(r)$$

Keuze voor kolom 1 is maximum aangezien p en q minimaal 1 meer zijn dan p.

Uitbetaling volgens $f(p - 1, q + 1, r) \text{ voor } (1, 0, 0)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - (p - 1) + h(p - 2) + g(q + 1) + t(r)$.

$$\text{Speler 1: } f(p - 1, q + 1, r) = h(p - 1 - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) = h(p - 2) + g(q + 1) + t(r)$$

$$\text{Speler 3: } f(p - 1, q + 1, r) = h(p - 1 - a) + g(q + 1 - b) + t(r - c) + k(p - 1) + m(q + 1) + n(r) = h(p - 2) + g(q + 1) + t(r) + R - (p - 2)$$

Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p, q + 1, r) = (p - 1, q + 1, r)$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Inductie over r voor mod(2,2,1)**Aantonen voor speler 1:**

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = h(p - 2) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 1)$$

Aantonen voor speler 2:

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = h(p - 2) + g(q - 2) + t(r) + R - (p - 1) + R - (q - 2)$$

Aantonen voor speler 3:

$$f(p, q, r + 1) = h(p - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q) + n(r + 1) = h(p - 2) + g(q - 2) + t(r) + R - (p - 2) + R - r$$

Maximum bepalen voor speler 2**Keuze voor kolom 1**

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (a - 1, b, c) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 1 - (a - 1)) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r + 1)$$

$$R - (p - 1) + f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (1, 2, 1) =$$

$$R - (p - 1) + h(p - 2) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 2)$$

Keuze voor kolom 2

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (a, b - 1, c) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - a) + g(q - 1 - (b - 1)) + t(r + 1 - c) + k(p) + m(q - 1) + n(r + 1)$$

$$R - (q - 1) + f(p, q - 1, r + 1) \text{ voor } (2, 1, 1) =$$

$$R - (q - 1) + h(p - 2) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 2)$$

Keuze voor kolom 3

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (a, b, c - 1) =$$

$$R - r + h(p - a) + g(q - b) + t(r - (c - 1)) + k(p) + m(q) + n(r)$$

$$R - r + f(p, q, r) \text{ voor } (2, 2, 0) =$$

$$R - r + h(p - 2) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 1)$$

Als $p=q$ kiest speler 2 volgens afspraak kolom 1. In andere gevallen is kolom 1 het maximum. Uitbetaling volgens $f(p - 1, q, r + 1) \text{ voor } (1, 2, 1)$.

Dit geeft voor speler 2 $R - (p - 1) + h(p - 2) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 2)$

$$\text{Speler 1: } f(p - 1, q, r + 1) = h(p - 1 - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p - 2) + g(q - 2) + t(r) + R - (q - 1)$$

$$\text{Speler 3: } f(p - 1, q, r + 1) = h(p - 1 - a) + g(q - b) + t(r + 1 - c) + k(p - 1) + m(q) + n(r) =$$

$$h(p - 2) + g(q - 2) + t(r) + R - (p - 2) + R - r$$

Dit is overeenkomstig hetgeen aangetoond moest worden.

Kolom 1 is de beste keus, dus $g(p, q, r + 1) = f(p - 1, q, r + 1)$

BIJLAGE Berekningen

Doorrekening van een aantal voorbeelden van optimale strategieën van een monomino-spel met 3 spelers en 3 kolommen $M(R,3)$.

Voor $0 \leq p \leq q \leq r \leq R$ is (p, q, r) de toestand waarbij in kolom 1 nog p lege plaatsen zijn, in kolom 2 nog q en in kolom 3 nog r lege plaatsen.

De afbeeldingen $f(p, q, r)$ zijn de resterende uitbetalingen aan respectievelijk speler 1, 2 en 3 in het geval de spelers beginnen bij toestand (p, q, r) en allemaal vanaf dat moment een optimale strategie spelen.

De afbeelding $g(p, q, r)$ is de toestand waarin het spel overgaat vanuit toestand (p, q, r) indien de speler die op dat moment aan de beurt is een optimale strategie speelt. Dus

$g(p, q, r) = (p-1, q, r)$ en/of $g(p, q, r) = (p, q-1, r)$ en/of $g(p, q, r) = (p, q, r-1)$.

Als we voor willekeurige p, q en r de waarden van $f(p, q, r)$ en $g(p, q, r)$ kunnen bepalen, dan hebben we de optimale strategie voor toestand (p, q, r) gevonden. Bij de beginsituatie van het spel $M(3, R)$ hebben de evenwichten dan de uitbetaling $f(R, R, R)$

Om te bepalen welke spelers aan zet zijn, geldt:

speler 1 als $p+q+r \bmod 3 = 0$

speler 2 als $p+q+r \bmod 3 = 2$

speler 3 als $p+q+r \bmod 3 = 1$

1.

$f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ $g(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$

In toestand $(0, 0, 0)$ is het spel afgelopen. Er zijn geen lege plaatsen meer. De spelers krijgen geen verdere uitbetalingen meer.

2.

$f(0, 0, 1) = (0, 0, R)$ $g(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$

Er is nog 1 lege plaats, speler 3 is aan de beurt. Hij heeft geen andere keuze dan de monomino in de laatste vrije plaats van de derde kolom te plaatsen. Dit levert uitbetaling $(0, 0, R)$ op. Hierna is het spel afgelopen.

3.

$f(0, 0, 2) = (0, R-1, R)$ $g(0, 0, 2) = (0, 0, 1)$

Speler 2 is aan zet, hierna is speler 3. Er zijn 2 plaatsen vrij in de derde kolom. Er is geen keuze. Totale resterende uitbetaling in toestand $(0, 0, 2)$ is

$f(0, 0, 2) = (0, R-1, 0) + f(0, 0, 1) = (0, R-1, 0) + f(g(0, 0, 2)) = (0, R-1, 0) + (0, 0, R) = (0, R-1, R)$

4.

$f(0, 0, 3) = (R-2, R-1, R)$ $g(0, 0, 3) = (0, 0, 2)$

Speler 1 is aan zet, hierna is speler 2 en 3. Er zijn 3 plaatsen vrij in de derde kolom. Er is geen keuze. Totale resterende uitbetaling in toestand $(0, 0, 3)$ is

$f(0, 0, 3) = (R-2, 0, 0) + f(0, 0, 2) = (R-2, 0, 0) + f(g(0, 0, 3)) = (R-2, 0, 0) + (0, R-1, R) = (R-2, R-1, R)$

5.

$$f(0, 0, 4) = (R - 2, R - 1, 2R - 3) \quad g(0, 0, 4) = (0, 0, 3)$$

Speler 3 is aan zet, hierna is speler 1, 2 en vervolgens weer 3. Er zijn 4 plaatsen vrij in de derde kolom. Er is geen keuze. Totale resterende uitbetaling in toestand $(0, 0, 4)$ is

$$f(0, 0, 4) = (0, 0, R - 3) + f(0, 0, 3) = (0, 0, R - 3) + f(g(0, 0, 4)) = (0, 0, R - 3) + (R - 2, R - 1, R) = (R - 2, R - 1, 2R - 3)$$

6.

$$f(0, 0, 5) = (R - 2, 2R - 5, 2R - 3) \quad g(0, 0, 5) = (0, 0, 4)$$

Speler 2 is aan zet, hierna is speler 3, 1, 2 en tot slot 3. Er zijn 5 plaatsen vrij in de derde kolom. Er is geen keuze. Totale resterende uitbetaling in toestand $(0, 0, 5)$ is

$$f(0, 0, 5) = (0, R - 4, 0) + f(0, 0, 4) = (0, R - 4, 0) + f(g(0, 0, 5)) = (0, R - 4, 0) + (R - 2, R - 1, 2R - 3) = (R - 2, 2R - 5, 2R - 3)$$

7.

$$f(0, 0, 6) = (2R - 7, 2R - 5, 2R - 3) \quad g(0, 0, 6) = (0, 0, 5)$$

Speler 1 is aan zet. Totale resterende uitbetaling in toestand $(0, 0, 6)$ is

$$f(0, 0, 6) = (R - 5, 0, 0) + f(0, 0, 5) = (R - 5, 0, 0) + (R - 2, 2R - 5, 2R - 3) = (2R - 7, 2R - 5, 2R - 3)$$

8.

$$f(0, 0, 7) = (2R - 7, 2R - 5, 3R - 9) \quad g(0, 0, 7) = (0, 0, 6)$$

Speler 3 is aan zet. Totale resterende uitbetaling in toestand $(0, 0, 7)$ is

$$f(0, 0, 7) = (0, 0, R - 6) + f(0, 0, 6) = (0, 0, R - 6) + (2R - 7, 2R - 5, 2R - 3) = (2R - 7, 2R - 5, 3R - 9)$$

9.

$$f(0, 0, 8) = (2R - 7, 3R - 12, 3R - 9) \quad g(0, 0, 8) = (0, 0, 7)$$

Speler 2 is aan zet. Totale resterende uitbetaling in toestand $(0, 0, 8)$ is

$$f(0, 0, 8) = (0, R - 7, 0) + f(0, 0, 7) = (0, R - 7, 0) + (2R - 7, 2R - 5, 3R - 9) = (2R - 7, 3R - 12, 3R - 9)$$

10.

$$f(0, 0, 9) = (3R - 15, 3R - 12, 3R - 9) \quad g(0, 0, 9) = (0, 0, 8)$$

Speler 1 is aan zet. Totale resterende uitbetaling in toestand $(0, 0, 9)$ is

$$f(0, 0, 9) = (R - 8, 0, 0) + f(0, 0, 8) = (R - 8, 0, 0) + (2R - 7, 3R - 12, 3R - 9) = (3R - 15, 3R - 12, 3R - 9)$$

11.

$$f(0, 0, 10) = (3R - 15, 3R - 12, 4R - 18) \quad g(0, 0, 10) = (0, 0, 9)$$

Speler 3 is aan zet. Totale resterende uitbetaling in toestand $(0, 0, 10)$ is

$$f(0, 0, 10) = (0, 0, R - 9) + f(0, 0, 9) = (0, 0, R - 9) + (3R - 15, 3R - 12, 3R - 9) = (3R - 15, 3R - 12, 4R - 18)$$

12.

$$f(0, 0, 11) = (3R - 15, 4R - 22, 4R - 18) \quad g(0, 0, 11) = (0, 0, 10)$$

Speler 2 is aan zet. Totale resterende uitbetaling in toestand $(0, 0, 11)$ is

$$f(0, 0, 11) = (0, R - 10, 0) + f(0, 0, 10) = (0, R - 10, 0) + (3R - 15, 3R - 12, 4R - 18) = (3R - 15, 4R - 22, 4R - 18)$$

13.

$$f(0, 0, 12) = (4R - 26, 4R - 22, 4R - 18) \quad g(0, 0, 12) = (0, 0, 11)$$

Speler 1 is aan zet. Totale resterende uitbetaling in toestand $(0, 0, 12)$ is

$$f(0, 0,) = (R - 11, 0, 0) + f(0, 0, 11) = (R - 11, 0, 0) + (3R - 15, 4R - 22, 4R - 18) = (4R - 26, 4R - 22, 4R - 18)$$

14.

$$f(0, 0, 13) = (4R - 26, 4R - 22, 5R - 30) \quad g(0, 0, 13) = (0, 0, 12)$$

Speler 3 is aan zet. Totale resterende uitbetaling in toestand $(0, 0, 13)$ is

$$f(0, 0,) = (0, 0, R - 12) + f(0, 0, 12) = (0, 0, R - 12) + (4R - 26, 4R - 22, 4R - 18) = (4R - 26, 4R - 22, 5R - 30)$$

15.

$$f(0, 0, 14) = (4R - 26, 5R - 35, 5R - 30) \quad g(0, 0, 14) = (0, 0, 13)$$

Speler 2 is aan zet. Totale resterende uitbetaling in toestand $(0, 0, 14)$ is

$$f(0, 0,) = (0, R - 13, 0) + f(0, 0, 13) = (0, R - 13, 0) + (4R - 26, 4R - 22, 5R - 30) = (4R - 26, 5R - 35, 5R - 30)$$

16.

$$f(0, 0, 15) = (5R - 40, 5R - 35, 5R - 30) \quad g(0, 0, 15) = (0, 0, 14)$$

Speler 1 is aan zet. Totale resterende uitbetaling in toestand is

$$f(0, 0, 15) = (R - 14, 0, 0) + f(0, 0, 14) = (R - 14, 0, 0) + (4R - 26, 5R - 35, 5R - 30) = (5R - 40, 5R - 35, 5R - 30)$$

17.

$$f(0, 0, 16) = (5R - 40, 5R - 35, 6R - 45) \quad g(0, 0, 16) = (0, 0, 15)$$

Speler 3 is aan zet. Totale resterende uitbetaling in toestand is

$$f(0, 0, 16) = (0, 0, R - 15) + f(0, 0, 15) = (0, 0, R - 15) + (5R - 40, 5R - 35, 5R - 30) = (5R - 40, 5R - 35, 6R - 45)$$

18.

$$f(0, 0, 17) = (5R - 40, 6R - 51, 6R - 45) \quad g(0, 0, 17) = (0, 0, 16)$$

Speler 2 is aan zet. Totale resterende uitbetaling in toestand is

$$f(0, 0, 17) = (0, R - 16, 0) + f(0, 0, 16) = (0, R - 16, 0) + (5R - 40, 5R - 35, 6R - 45) = (5R - 40, 6R - 51, 6R - 45)$$

19.

$$f(0, 1, 1) = (0, R, R) \quad g(0, 1, 1) = (0, 0, 1)$$

Speler 2 is aan zet, hierna speler 3. Er is 1 plaats vrij in de tweede kolom en 1 plaats vrij in de derde kolom. Er is geen keuze.

$$f(0, 1, 1) = (0, R, 0) + f(0, 0, 1) = (0, R, 0) + f(g(0, 0, 2)) = (0, R, 0) + (0, 0, R) = (0, R, R)$$

20.

$$f(0, 1, 2) = (R, R - 1, R) \quad g(0, 1, 2) = (0, 0, 2)$$

Speler 1 is aan zet. Er is 1 plaats vrij in kolom 2 en er zijn 2 plaatsen vrij in kolom 3. Kiezen voor kolom 2 levert een uitbetaling op van $(R, 0, 0)$. Keuze voor kolom 3 levert een uitbetaling van $(R - 1, 0, 0)$. Spelers spelen een optimale strategie, dus bepaald moet worden welke keuze met achterwaartse inductie het meest oplevert. Deze keuze wordt genoteerd met behulp van de notatie $f_1(0, 1, 2)$: dit is de maximale uitbetaling die speler 1 ontvangt in situatie $(0, 1, 2)$ als alle spelers een optimale strategie spelen.

$$\max \{R + f_1(0, 0, 2), R - 1 + f_1(0, 1, 1)\} =$$

$$\max \{R + 0, R - 1 + 0\} =$$

$$\max \{R, R - 1\} = R$$

Speler 1 zal er aldus voor kiezen de monomino in kolom 2 te plaatsen.

$$f(0, 1, 2) = (R, 0, 0) + f(0, 0, 2) = (R, 0, 0) + f(g(0, 1, 2)) = (R, 0, 0) + (0, R - 1, R) = (R, R - 1, R)$$

21.

$$f(0, 1, 3) = (R - 2, R - 1, 2R) \quad g(0, 1, 3) = (0, 0, 3)$$

Speler 3 is aan zet. Er is 1 plaats vrij in kolom 2 en er zijn 3 plaatsen vrij in kolom 3. Kiezen voor kolom 2 levert een uitbetaling op van $(0, 0, R)$. Keuze voor kolom 3 levert een uitbetaling van $(0, 0, R - 2)$.

$$\max \{R + f_3(0, 0, 3), R - 2 + f_3(0, 1, 2)\} =$$

$$\max \{R + R, R - 2 + R\} =$$

$$\max \{2R, 2R - 2\} = 2R$$

Speler 3 zal er dus voor kiezen de monomino in kolom 2 te plaatsen.

$$f(0, 1, 3) = (0, 0, R) + f(0, 0, 3) = (0, 0, R) + f(g(0, 1, 3)) = (0, 0, R) + (R - 2, R - 1, R) = (R - 2, R - 1, 2R)$$

Controle in beslisboom van $M(3,3)$: bij zet 5 is speler 3 aan de beurt. In de bijbehorende regel van de beslisboom zijn 5 spelsituaties te zien die voldoen aan $f(0, 1, 3)$. De resterende uitbetaling voor $R = 3$ geeft de afbeelding $f(0, 1, 3) = (1, 2, 6)$. Rekening houdend met de 5 mogelijke spelsituaties leidt dit in $M(3,3)$ tot de volgende 5 evenwichten:

$(3, 6, 9)$, $(5, 6, 7)$, $(4, 7, 7)$, $(5, 5, 8)$ en $(4, 6, 8)$. Deze evenwichten corresponderen met de evenwichten die in de beslisboom zijn gevonden.

22.

$$f(1, 1, 1) = (R, R, R) \quad g(1, 1, 1) = (0, 1, 1)$$

Speler 1 is aan zet. Er is in elke kolom een plaats vrij. Er is geen keuze, speler 1 plaatst de monomino gedwongen in kolom 1, evenals spelers 2 en 3. Dit levert een resterende uitbetaling van (R, R, R) .

$$f(1, 1, 1) = (R, 0, 0) + f(0, 1, 1) = (R, 0, 0) + f(g(1, 1, 1)) = (R, 0, 0) + (0, R, R) = (R, R, R)$$

Dit komt overeen met de bevinding dat het evenwicht $(1, 1, 1)$ is in $M(1,3)$

23.

$$f(0, 2, 2) = (R, R - 1, 2R - 1) \quad g(0, 2, 2) = (0, 1, 2)$$

Er is geen keuze, speler 3 plaatst de monomino gedwongen in kolom 2.

$$f(0, 2, 2) = (0, 0, R - 1) + f(0, 1, 2) = (0, 0, R - 1) + f(g(0, 2, 2)) = (0, 0, R - 1) + (R, R - 1, R) = (R, R - 1, 2R - 1)$$

24.

$$f(1, 1, 2) = (R, R - 1, 2R) \quad g(1, 1, 2) = (0, 1, 2)$$

Speler 3 is aan zet. Er is 1 plaats vrij in kolom 1 en 2 en er zijn 2 plaatsen vrij in kolom 3.

Speler 3 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R of voor kolom 3 met uitbetaling R-1.

$$\max \{R + f_3(0, 1, 2), R - 1 + f_3(1, 1, 1)\} =$$

$$\max \{R + R, R - 1 + R\} =$$

$$\max \{2R, 2R - 1\} = 2R$$

Speler 3 zal er dus voor kiezen de monomino in kolom 1 te plaatsen.

$$f(1, 1, 2) = (0, 0, R) + f(0, 1, 2) = (0, 0, R) + f(g(1, 1, 2)) = (0, 0, R) + (R, R - 1, R) = (R, R - 1, 2R)$$

25.

$$f(1, 2, 2) = (R, 2R - 1, 2R - 1) \quad g(1, 2, 2) = (0, 2, 2)$$

$p + q + r \bmod 3 = 2$, dus speler 2 is aan zet. Speler 2 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R of kolom 2 met uitbetaling R-1.

$$\max \{R + f_2(0, 2, 2), R - 1 + f_2(1, 1, 2)\} =$$

$$\max \{R + R - 1, R - 1 + R - 1\} =$$

$$\max \{2R - 1, 2R - 2\} = 2R - 1$$

Speler 2 zal er dus voor kiezen de monomino in kolom 1 te plaatsen.

$$f(1, 2, 2) = (0, R, 0) + f(0, 2, 2) = (0, R, 0) + f(g(1, 2, 2)) = (0, R, 0) + (R, R - 1, 2R - 1) = (R, 2R - 1, 2R - 1)$$

26.

$$f(2, 2, 2) = (2R - 1, 2R - 1, 2R - 1) \quad g(2, 2, 2) = (1, 2, 2)$$

$p + q + r \bmod 3 = 0$ dus speler 1 is aan zet en speelt gedwongen kolom 1 met uitbetaling R-1.

$$f(2, 2, 2) = (R - 1, 0, 0) + f(1, 2, 2) = (0, 0, R) + f(g(2, 2, 2)) = (R - 1, 0, 0) + (R, 2R - 1, 2R - 1) = (2R - 1, 2R - 1, 2R - 1)$$

Bij M(2,3) levert dit een evenwicht op van (3,3,3), conform de eerdere bevinding.

27.

$$f(0, 2, 3) = (R - 2, 2R - 2, 2R) \quad g(0, 2, 3) = (0, 1, 3)$$

$p + q + r \bmod 3 = 2$, dus speler 2 is aan zet. Speler 2 kan kiezen voor kolom 2 met uitbetaling R-1 of kolom 3 met uitbetaling R-2.

$$\max \{R - 1 + f_2(0, 1, 3), R - 2 + f_2(0, 2, 2)\} =$$

$$\max \{R - 1 + R - 1, R - 2 + R - 1\} =$$

$$\max \{2R - 2, 2R - 3\} = 2R - 2$$

Speler 2 zal er dus voor kiezen de monomino in kolom 2 te plaatsen.

$$f(0, 2, 3) = (0, R - 1, 0) + f(0, 1, 3) = (0, R - 1, 0) + f(g(0, 2, 3)) = (0, R - 1, 0) + (R - 2, R - 1, 2R) = (R - 2, 2R - 2, 2R)$$

Controle in beslisboom van $M(3,3)$: $f(0, 2, 3)$ correspondeert met 3 situaties bij zet 4. Bij zet 4 is speler 2 aan de beurt. De resterende uitbetaling voor $R = 3$ geeft de afbeelding $f(0, 2, 3) = (1, 4, 6)$. Rekening houdend met de 3 mogelijke spelsituaties leidt dit in $M(3,3)$ tot de volgende 3 evenwichten: $(3, 6, 9)$, $(5, 6, 7)$, $(5, 5, 8)$. Deze evenwichten corresponderen met de evenwichten die in de beslisboom zijn gevonden.

28.

$$f(0, 3, 3) = (2R - 4, 2R - 2, 2R) \quad g(0, 3, 3) = (0, 2, 3)$$

$p + q + r \bmod 3 = 0$, dus speler 1 is aan zet. Speler 1 kan alleen kiezen voor kolom 2 met uitbetaling R-2.

$$f(0, 3, 3) = (R - 2, 0, 0) + f(0, 2, 3) = (R - 2, 0, 0) + f(g(0, 3, 3)) = (R - 2, 0, 0) + (R - 2, 2R - 2, 2R) = (2R - 4, 2R - 2, 2R)$$

29.

$$f(0, 2, 3) = (R - 2, 2R - 2, 2R) \quad g(0, 2, 3) = (0, 1, 3)$$

$p + q + r \bmod 3 = 2$, dus speler 2 is aan zet. Speler 2 kan kiezen voor kolom 2 met uitbetaling R-1 of kolom 3 met uitbetaling R-2.

$$\max \{R - 1 + f_2(0, 1, 3), R - 2 + f_2(0, 2, 2)\} =$$

$$\max \{R - 1 + R - 1, R - 2 + R - 1\} =$$

$$\max \{2R - 2, 2R - 3\} = 2R - 2$$

Speler 2 zal er dus voor kiezen de monomino in kolom 1 te plaatsen.

$$f(0, 2, 3) = (0, R - 1, 0) + f(0, 1, 3) = (0, R - 1, 0) + f(g(0, 2, 3)) = (0, R - 1, 0) + (R - 2, R - 1, 2R) = (R - 2, 2R - 2, 2R)$$

30.

$$f(1, 1, 3) = (R - 2, 2R - 1, 2R) \quad g(1, 1, 3) = (0, 1, 3)$$

$p + q + r \bmod 3 = 2$, dus speler 2 is aan zet. Speler 2 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R of kolom 3 met uitbetaling R-2.

$$\max \{R + f_2(0, 1, 3), R - 2 + f_2(1, 1, 2)\} =$$

$$\max \{R + R - 1, R - 2 + R - 1\} =$$

$$\max \{2R - 1, 2R - 3\} = 2R - 1$$

Speler 2 zal er dus voor kiezen de monomino in kolom 1 te plaatsen.

$$f(1, 1, 3) = (0, R, 0) + f(0, 1, 3) = (0, R, 0) + f(g(0, 1, 3)) = (0, R, 0) + (R - 2, R - 1, 2R) = (R - 2, 2R - 1, 2R)$$

31.

$$f(1, 2, 3) = (2R - 2, 2R - 2, 2R) \quad g(1, 2, 3) = (0, 2, 3) \text{ (kolom 1)}$$

of

$$f(1, 2, 3) = (2R - 2, 2R - 1, 2R - 1) \quad g(1, 2, 3) = (1, 1, 3) \text{ (kolom 3)}$$

Gebroken wordt met de strategie van links kiezen: het maakt voor speler 1 niet uit of hij de linker of de rechterkolom kiest.

$p + q + r \bmod 3 = 0$, dus speler 1 is aan zet. Speler 1 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R, kolom 2 met uitbetaling R-1 of kolom 3 met uitbetaling R-2.

$$\max \{R + f_1(0, 2, 3), R - 1 + f_1(1, 1, 3), R - 2 + f_1(1, 2, 2)\} =$$

$$\max \{R + R - 2, R - 1 + R - 2, R - 2 + R\} =$$

$$\max \{2R - 2, 2R - 3, 2R - 2\} = 2R - 2$$

Er is geen uniek maximum. Speler 1 zal er dus voor kiezen de monomino in kolom 1 of kolom 3 te plaatsen.

Plaatsing in kolom 1 leidt tot de volgende resterende uitbetaling:

$$f(1, 2, 3) = (R, 0, 0) + f(0, 2, 3) = (R, 0, 0) + f(g(1, 2, 3)) = (R, 0, 0) + (R - 2, 2R - 2, 2R) = (2R - 2, 2R - 2, 2R)$$

Plaatsing in kolom 3 leidt tot de volgende resterende uitbetaling:

$$f(1, 2, 3) = (R - 2, 0, 0) + f(1, 2, 2) = (R - 2, 0, 0) + f(g(1, 2, 3)) = (R - 2, 0, 0) + (R, 2R - 1, 2R - 1) = (2R - 2, 2R - 1, 2R - 1)$$

Hier is dus sprake van twee evenwichten. Dit is ook te zien in het boomdiagram van $M(3,3)$.

Controle in beslisboom van $M(3,3)$: bij zet 3 is speler 1 aan de beurt. In de corresponderende regel zijn 2 spelsituaties te zien die voldoen aan $f(1, 2, 3)$. De resterende uitbetaling voor $R = 3$ geeft de afbeeldingen $f(1, 2, 3) = (4, 4, 6)$ en $f(1, 2, 3) = (4, 5, 5)$.

Rekening houdend met de 2 mogelijke spelsituaties leidt dit in $M(3,3)$ tot de volgende 4 evenwichten: $(5, 6, 7)$ en $(5, 7, 6)$, $(5, 5, 8)$ en $(5, 6, 7)$. Deze evenwichten corresponderen met de 4 evenwichten die in de subgames van de beslisboom zijn gevonden.

32.

$$f(1, 3, 3) = (2R - 4, 2R - 2, 3R) \quad g(1, 3, 3) = (0, 3, 3)$$

$p + q + r \bmod 3 = 1$, dus speler 3 is aan zet. Speler 3 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R of kolom 2 met uitbetaling $R - 2$.

$$\max \{R + f_3(0, 3, 3), R - 2 + f_3(1, 2, 3)\}$$

Voor $f_3(1, 2, 3)$ zijn er twee mogelijkheden, namelijk $2R$ en $2R - 1$.

De eerste mogelijkheid geeft:

$$\max \{R + 2R, R - 2 + 2R\} =$$

$$\max \{3R, 3R - 2\} = 3R$$

Speler 3 zal er bij deze mogelijkheid voor kiezen de monomino in kolom 1 te plaatsen.

Dit is eveneens terug te zien in het boomdiagram van $M(3,3)$.

De tweede mogelijkheid geeft:

$$\max \{R + 2R, R - 2 + 2R - 1\} =$$

$$\max \{3R, 3R - 3\} = 3R$$

Speler 3 zal er ook bij deze mogelijkheid voor kiezen de monomino in kolom 1 te plaatsen.

NB deze mogelijkheid zie ik niet staan in het boomdiagram van $M(3,3)$

$$f(1, 3, 3) = (0, 0, R) + f(0, 3, 3) = (0, 0, R) + f(g(1, 3, 3)) = (0, 0, R) + (2R - 4, 2R - 2, 2R) = (2R - 4, 2R - 2, 3R)$$

Controle in beslisboom van $M(3,3)$: bij zet 3 is speler 3 aan de beurt. In zijn regel is 1 spelsituatie te zien die voldoet aan $f(1, 3, 3)$. De resterende uitbetaling voor $R = 3$ geeft de afbeelding $f(1, 3, 3) = (2, 4, 9)$. Rekening houdend met de mogelijke spelsituatie leidt dit in $M(3,3)$ tot het evenwicht $(3, 6, 9)$. Dit evenwicht correspondeert met het evenwicht dat in de beslisboom is gevonden.

33.

$$f(2, 2, 3) = (2R - 2, 2R - 2, 3R - 1) \quad g(2, 2, 3) = (1, 2, 3)$$

en

$$f(2, 2, 3) = (2R - 2, 2R - 1, 3R - 2) \quad g(2, 2, 3) = (1, 2, 3)$$

$p + q + r \bmod 3 = 1$, dus speler 3 is aan zet. Speler 3 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R-1 of kolom 3 met uitbetaling R-2.

$$\max \{R - 1 + f_3(1, 2, 3), R - 2 + f_3(2, 2, 2)\} =$$

Voor $f_3(1, 2, 3)$ zijn er twee mogelijkheden, namelijk $2R$ en $2R - 1$.

De eerste mogelijkheid geeft:

$$\max \{R - 1 + 2R, R - 2 + 2R - 1\} =$$

$$\max \{3R - 1, 3R - 3\} = 3R - 1$$

Speler 3 zal er bij deze mogelijkheid voor kiezen de monomino in kolom 1 te plaatsen.

$$f(2, 2, 3) = (0, 0, R - 1) + f(1, 2, 3) = (0, 0, R - 1) + f(g(2, 2, 3)) = (0, 0, R - 1) + (2R - 2, 2R - 2, 2R) = (2R - 2, 2R - 2, 3R - 1)$$

De tweede mogelijkheid geeft:

$$\max \{R - 1 + 2R - 1, R - 2 + 2R - 1\} =$$

$$\max \{3R - 2, 3R - 3\} = 3R - 2$$

Speler 3 zal er ook bij deze mogelijkheid voor kiezen de monomino in kolom 1 te plaatsen.

$$f(2, 2, 3) = (0, 0, R - 1) + f(1, 2, 3) = (0, 0, R - 1) + f(g(2, 2, 3)) = (0, 0, R - 1) + (2R - 2, 2R - 1, 2R - 1) = (2R - 2, 2R - 1, 3R - 2)$$

Er zijn nu twee mogelijke routes oftewel evenwichten, zoals ook uit het boomdiagram van $M(3,3)$ blijkt.

Controle in beslisboom van $M(3,3)$: bij zet 3 is speler 3 aan de beurt. In de corresponderende regel in de beslisboom is er 1 spelsituatie te zien die voldoet aan $f(2, 2, 3)$. De resterende uitbetaling voor $R = 3$ geeft de afbeeldingen $f(2, 2, 3) = (4, 4, 8)$ en $f(2, 2, 3) = (4, 5, 7)$. Rekening houdend met de mogelijke spelsituatie leidt dit in $M(3,3)$ tot de volgende evenwichten $(5, 5, 8)$ en $(5, 6, 7)$. Deze evenwichten corresponderen met de evenwichten die in de beslisboom zijn gevonden.

34.

$$f(2, 3, 3) = (2R - 4, 3R - 3, 3R) \quad g(2, 3, 3) = (1, 3, 3)$$

$p + q + r \bmod 3 = 2$, dus speler 2 is aan zet. Speler 2 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R -1 of kolom 2 met uitbetaling R-2.

$$\max \{R - 1 + f_2(1, 3, 3), R - 2 + f_2(2, 2, 3)\} =$$

Voor $f_2(2, 2, 3)$ zijn er twee mogelijkheden, namelijk $2R$ en $2R - 1$.

De eerste mogelijkheid geeft:

$$\max \{R - 1 + 2R - 2, R - 2 + 2R\} =$$

$$\max \{3R - 3, 3R - 2\} = 3R - 2$$

Speler 2 zal er in deze situatie dus voor kiezen de monomino in kolom 2 te plaatsen. Hiermee wordt gebroken met de hypothesestrategie van links kiezen: uiteindelijk echter kiest speler 2 links.

$$f(2, 3, 3) = (0, R - 1, 0) + f(1, 3, 3) = (0, R - 1, 0) + f(g(2, 3, 3)) = (0, R - 1, 0) + (2R - 4, 2R - 2, 3R) = (2R - 4, 3R - 3, 3R)$$

Voor de tweede mogelijkheid van $f_2(2, 2, 3)$ geldt:

$$\max \{R - 1 + 2R - 2, R - 2 + 2R - 1\} = \max \{3R - 3, 3R - 3\} = 3R - 3$$

Voor speler 2 maakt het in dit geval dus niet of de monomino in kolom 1 of 2 wordt geplaatst.

Plaatsing in kolom 1 levert de volgende resterende uitbetaling:

$$f(2, 3, 3) = (0, R - 1, 0) + f(1, 3, 3) = (0, R - 1, 0) + f(g(2, 3, 3)) = (0, R - 1, 0) + (2R - 4, 2R - 2, 3R) = (2R - 4, 3R - 3, 3R)$$

Plaatsing in kolom 2 geeft:

$$f(2, 3, 3) = (0, R - 2, 0) + f(2, 2, 3) = (0, R - 2, 0) + f(g(2, 3, 3))$$

$f(2, 2, 3)$ geeft twee mogelijke resterende uitbetalingen namelijk $(2R - 2, 2R - 2, 3R - 1)$ en $(2R - 2, 2R - 1, 3R - 2)$.

De eerste mogelijkheid geeft:

$$f(2, 3, 3) = (0, R - 2, 0) + f(2, 2, 3) = (0, R - 2, 0) + f(g(2, 3, 3)) = (0, R - 2, 0) + (2R - 2, 2R - 2, 3R - 1) = (2R - 2, 3R - 4, 3R - 1)$$

De tweede mogelijkheid geeft:

$$f(2, 3, 3) = (0, R - 2, 0) + f(2, 2, 3) = (0, R - 2, 0) + f(g(2, 3, 3)) = (0, R - 2, 0) + (2R - 2, 2R - 1, 3R - 2) = (2R - 2, 3R - 3, 3R - 2)$$

Samenvattend:

In de spelsituatie $f(2, 3, 3)$ zijn in bovenstaande de volgende resterende uitbetalingen afgeleid.

$(2R - 4, 3R - 3, 3R)$ bij plaatsing van de monomino in kolom 1

$(2R - 2, 3R - 4, 3R - 1)$ bij plaatsing van de monomino in kolom 2

$(2R - 2, 3R - 3, 3R - 2)$ bij plaatsing van de monomino in kolom 2

Als speler 2 de monomino in kolom 1 plaatst is een resterende uitbetaling van $3R - 3$ verzekerd.

Bij plaatsing van de monomino in kolom 2 zijn er 2 mogelijke resterende uitbetalingen, namelijk $3R - 4$ en $3R - 3$. De optimale strategie voor speler 2 is derhalve te kiezen voor kolom 1. Deze keuze leidt in het boomdiagram van $M(3, 3)$ tot het gevonden evenwicht $(3, 6, 9)$.

35.

$$f(3, 3, 3) = (3R - 6, 3R - 3, 3R) \quad g(3, 3, 3) = (2, 3, 3)$$

$p + q + r \bmod 3 = 0$ dus speler 1 is aan zet en speelt gedwongen kolom 1 met uitbetaling $R - 2$.

$$f(3, 3, 3) = (R - 2, 0, 0) + f(2, 3, 3) = (R - 2, 0, 0) + f(g(3, 3, 3)) = (R - 2, 0, 0) + (2R - 4, 3R - 3, 3R) = (3R - 6, 3R - 3, 3R)$$

Controle in beslisboom van $M(3, 3)$: bij de eerste is speler 1 aan de beurt. In de corresponderende regel in de beslisboom is er 1 spelsituatie te zien die voldoet aan

$f(3, 3, 3)$. De resterende uitbetaling voor $R = 3$ geeft de afbeeldingen $f(3, 3, 3) = (3, 6, 9)$. Dit leidt in $M(3, 3)$ tot het gevonden evenwicht.

Op dit punt is de beslisboom van $M(3, 3)$ beschreven aan de hand van bovenstaande subgames. De hypothese van links kiezen houdt stand, behalve bij subgame 18.

Samenvattend: uit bovenstaande (1 t/m 22) blijkt dat steeds links wordt gekozen, conform de hypothese.

36.

$$f(0, 0, 4) = (R - 2, R - 1, 2R - 3) \quad g(0, 0, 4) = (0, 0, 3)$$

$p + q + r \bmod 3 = 1$ dus speler 3 is aan zet en speelt gedwongen kolom 3 met uitbetaling $R-3$.

$$f(0, 0, 4) = (0, 0, R - 3) + f(0, 0, 3) = (0, 0, R - 3) + f(g(0, 0, 4)) = (0, 0, R - 3) + (R - 2, R - 1, R) = (R - 2, R - 1, 2R - 3)$$

Controle in beslisboom van $M(4, 3)$: bij zet 9 is speler 3 aan de beurt. In de corresponderende regel in de beslisboom voldoet spel 1 aan $f(0, 0, 4)$. De resterende uitbetaling voor $R = 4$ geeft de afbeelding $f(0, 0, 4) = (2, 3, 5)$. Rekening houdend met de mogelijke spelsituatie leidt dit in $M(4, 3)$ tot het evenwicht $(10, 10, 10)$. Dit evenwicht correspondeert met het evenwicht dat in spel 1 in de beslisboom is gevonden.

37.

$$f(0, 1, 4) = (R - 2, 2R - 1, 2R - 3) \quad g(0, 1, 4) = (0, 0, 4)$$

$p + q + r \bmod 3 = 2$ dus speler 2 is aan zet en speelt kolom 2 met uitbetaling R of kolom 3 met uitbetaling $R-3$.

$$\max \{R + f_2(0, 0, 4), R - 3 + f_2(0, 1, 3)\} =$$

$$\max \{R + R - 1, R - 3 + R - 1\} =$$

$$\max \{2R - 1, 2R - 4\} = 2R - 1$$

Speler 2 zal er dus voor kiezen de monomino in kolom 2 te plaatsen.

$$f(0, 1, 4) = (0, R, 0) + f(0, 0, 4) = (0, R, 0) + f(g(0, 1, 4)) = (0, R, 0) + (R - 2, R - 1, 2R - 3) = (R - 2, 2R - 1, 2R - 3)$$

Controle in beslisboom van $M(4, 3)$: bij zet 8 is speler 2 aan de beurt. In de corresponderende regel in de beslisboom voldoet spel 1 aan $f(0, 1, 4)$. De resterende uitbetaling voor $R = 4$ geeft de afbeelding $f(0, 1, 4) = (2, 7, 5)$. Rekening houdend met de mogelijke spelsituatie leidt dit in $M(4, 3)$ tot het evenwicht $(10, 10, 10)$. Dit evenwicht correspondeert met het evenwicht dat in spel 1 in de beslisboom is gevonden.

38.

$$f(0, 2, 4) = (2R - 3, 2R - 1, 2R - 3) \quad g(0, 2, 4) = (0, 1, 4)$$

$p + q + r \bmod 3 = 0$, dus speler 1 is aan zet. Speler 1 kan kiezen voor kolom 2 met uitbetaling $R-1$ of kolom 3 met uitbetaling $R-3$.

$$\begin{aligned} \max \{R-1+f_1(0,1,4), R-3+f_1(0,2,3)\} = \\ \max \{R-1+R-2, R-3+R-2\} = \\ \max \{2R-3, 2R-5\} = 2R-3 \end{aligned}$$

Speler 1 zal er dus voor kiezen de monomino in kolom 2 te plaatsen.

$$f(0,2,4) = (R-1, 0, 0) + f(0,1,4) = (R-1, 0, 0) + f(g(0,2,4)) = (R-1, 0, 0) + (R-2, 2R-1, 2R-3) = (2R-3, 2R-1, 2R-3)$$

Controle in beslisboom van M(4,3): bij zet 7 is speler 1 aan de beurt. In de corresponderende regel in de beslisboom voldoet spel 28 aan $f(0,2,4)$. De resterende uitbetaling voor $R=4$ geeft de afbeelding $f(0,2,4) = (5, 7, 5)$. Rekening houdend met de mogelijke spelsituatie leidt dit in M(4,3) tot het evenwicht (7,11,12). Dit evenwicht correspondeert met het evenwicht dat in spel 28 in de beslisboom is gevonden.

39. Trendbreuk met links kiezen

$$f(0,3,4) = (2R-4, 2R-2, 3R-3) \quad g(0,3,4) = (0, 3, 3)$$

$p+q+r \bmod 3 = 1$ dus speler 3 is aan zet en speelt kolom 2 met uitbetaling R-2 of kolom 3 met uitbetaling R-3.

$$\begin{aligned} \max \{R-2+f_3(0,2,4), R-3+f_3(0,3,3)\} = \\ \max \{R-2+2R-3, R-3+2R\} = \\ \max \{3R-5, 3R-3\} = 3R-3 \end{aligned}$$

Speler 3 zal er voor kiezen de monomino in kolom 3 te plaatsen, waarmee de strategie van links kiezen conform de hypothese doorbroken wordt.

$$f(0,3,4) = (0, 0, R-3) + f(0,3,3) = (0, 0, R-3) + f(g(0,3,4)) = (0, 0, R-3) + (2R-4, 2R-2, 2R) = (2R-4, 2R-2, 3R-3)$$

Controle in beslisboom van M(4,3): bij zet 6 is speler 3 aan de beurt. In de corresponderende regel in de beslisboom voldoet spel 10 aan $f(0,3,4)$. De resterende uitbetaling voor $R=4$ geeft de afbeelding $f(0,3,4) = (4, 6, 9)$. Rekening houdend met de mogelijke spelsituatie leidt dit in M(4,3) tot het evenwicht (9,9,12). Dit evenwicht correspondeert met het evenwicht dat in spel 10 in de beslisboom is gevonden.

40.

$$\begin{aligned} f(0,3,5) = (2R-4, 3R-6, 3R-3) \quad g(0,3,5) = (0, 2, 5) \\ f(0,3,5) = (0, R-2, 0) + f(0,2,5) = (0, R-2, 0) + (2R-2, 2R-5, 3R-4) = \\ (2R-4, 3R-6, 3R-3) \end{aligned}$$

speler kiest rechts.

41.

$$\begin{aligned} f(0,2,5) = (2R-2, 2R-5, 3R-4) \quad g(0,2,5) = (0, 1, 5) \\ p+q+r \bmod 3 = 1, \text{ dus speler 3 is aan zet. Speler 3 kan kiezen voor kolom 2 met uitbetaling } R-1 \text{ of kolom 3 met uitbetaling } R-3. \\ \max \{R-1+f_3(0,1,5), R-3+f_3(0,2,4)\} = \\ \max \{R-1+2R-3, R-3+2R-3\} = \\ \max \{3R-4, 3R-6\} = 3R-4 \end{aligned}$$

Speler 3 zal er dus voor kiezen de monomino in kolom 2 te plaatsen.

$$f(0,2,5) = (0, 0, R-1) + f(0,1,5) = (0, 0, R-1) + (2R-2, 2R-5, 2R-3) =$$

$$(2R - 2, 2R - 5, 3R - 4)$$

$$f(0, 1, 5) = (2R - 2, 2R - 5, 2R - 3)$$

$p + q + r \bmod 3 = 0$, dus speler 1 is aan zet. Speler 1 kan kiezen voor kolom 2 met uitbetaling R of kolom 3 met uitbetaling R-4.

$$\max \{R + f_1(0, 0, 5), R - 4 + f_1(0, 1, 4)\} =$$

$$\max \{R + R - 2, R - 4 + R - 2\} =$$

$$\max \{2R - 2, 2R - 6\} = 2R - 2$$

Speler 1 zal er dus voor kiezen de monomino in kolom 2 te plaatsen.

$$f(0, 1, 5) = (R, 0, 0) + f(0, 0, 5) = (R, 0, 0) + (R - 2, 2R - 5, 2R - 3) =$$

$$(2R - 2, 2R - 5, 2R - 3)$$

42.

$$f(1, 3, 4) = (2R - 4, 3R - 2, 3R - 3)$$

$p + q + r \bmod 3 = 2$, dus speler 2 is aan zet. Speler 2 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R of kolom 2 met uitbetaling R-2 of kolom 3 met uitbetaling R-3

Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R + f(0, 3, 4) = R + 2R - 2 = 3R - 2$$

$$\text{Optie 2: } R - 2 + f(1, 2, 4) = R - 2 + 2R - 1 = 3R - 3$$

$$\text{Optie 3: } R - 3 + f(1, 3, 3) = R - 3 + 2R - 2 = 3R - 5$$

$$\text{Optie 1 is maximum. Uitbetaling via } f(0, 3, 4) = (2R - 4, 2R - 2, 3R - 3)$$

43. Twee keuzes: optie 1 en optie 3

$$f(1, 2, 4) = (2R - 3, 2R - 1, 3R - 3)$$

$p + q + r \bmod 3 = 1$, dus speler 3 is aan zet. Speler 3 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R of kolom 2 met uitbetaling R-1 of kolom 3 met uitbetaling R-3

Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R + f(0, 2, 4) = R + f(0, 2, 4) = (2R - 3, 2R - 1, 2R - 3) = 3R - 3$$

$$\text{Optie 2: } R - 1 + f(1, 1, 4) = R - 1 + f(1, 1, 4) = (2R - 2, 2R - 1, 2R - 3) = 3R - 4$$

$$\text{Optie 3: } R - 3 + f(1, 2, 3) \text{ bij keuze voor kolom 1} = R - 3 + 2R = 3R - 3$$

of

$$\text{Optie 3: } R - 3 + f(1, 2, 3) \text{ bij keuze voor kolom 3} = R - 3 + 2R - 1 = 3R - 4$$

Kiezen voor optie 3 geeft risico op een lagere betaling. Speler 3 kiest voor optie 1.

$$\text{Uitbetaling via } f(0, 2, 4) = (2R - 3, 2R - 1, 2R - 3)$$

44.

$$f(1, 1, 4) = (2R - 2, 2R - 1, 2R - 3)$$

$p + q + r \bmod 3 = 0$, dus speler 1 is aan zet. Speler 1 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R of kolom 3 met uitbetaling R-3

Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R + f(0, 1, 4) = R + R - 2 = 2R - 2$$

$$\text{Optie 2: } R - 3 + f(1, 1, 3) = R - 3 + R - 2 = 2R - 5$$

Speler 1 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(0, 1, 4) = (R - 2, 2R - 1, 2R - 3)$.

$$f(0, 1, 4) = (R - 2, 2R - 1, 2R - 3)$$

45. Geen uniek maximum

$$f(1, 3, 5) = (3R - 4, 3R - 6, 3R - 3)$$

$p + q + r \bmod 3 = 0$, dus speler 1 is aan zet. Speler 1 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R of kolom 2 met uitbetaling R-2 of kolom 3 met uitbetaling R-4.

Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R + f(0, 3, 5) = R + f(0, 3, 5) = (2R - 4, 3R - 6, 3R - 3) = 3R - 4$$

$$\text{Optie 2: } R - 2 + f(1, 2, 5) = R - 2 + f(1, 2, 5) = (2R - 2, 3R - 5, 3R - 4) = 3R - 4$$

$$\text{of } R - 2 + f(1, 2, 5) = (2R - 2, 3R - 5, 3R - 3) = 2R - 2$$

$$\text{Optie 3: } R - 4 + f(1, 3, 4) = R - 4 + f(1, 3, 4) = (2R - 4, 3R - 2, 3R - 3) = 3R - 8$$

Als speler 1 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(0, 3, 5) = (2R - 4, 3R - 6, 3R - 3)$

Als speler 1 kiest voor optie 2 dan is er kans op een lagere uitbetaling dan $3R - 4$. Speler 1 zal daarom voor optie 1 kiezen.

46. Geen uniek maximum

$$f(1, 2, 5) = (2R - 2, 3R - 5, 3R - 4)$$

of

$$f(1, 2, 5) = (2R - 2, 3R - 5, 3R - 3)$$

$p + q + r \bmod 3 = 2$, dus speler 2 is aan zet. Speler 2 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R of kolom 2 met uitbetaling R-1 of kolom 3 met uitbetaling R-4.

Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R + f(0, 2, 5) = R + f(0, 2, 5) = (2R - 2, 2R - 5, 3R - 4) = 3R - 5$$

$$\text{Optie 2: } R - 1 + f(1, 1, 5) = R - 1 + f(1, 1, 5) = (2R - 2, 2R - 5, 3R - 3) = 3R - 6$$

$$\text{Optie 3: } R - 4 + f(1, 2, 4) = R - 4 + f(1, 2, 4) = (2R - 2, 2R - 1, 3R - 3) = 3R - 5$$

Geen uniek maximum.

Als speler 2 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(0, 2, 5) = (2R - 2, 2R - 5, 3R - 4)$

Als speler 2 kiest voor optie 3, uitbetaling volgens $f(1, 2, 4) = (2R - 2, 2R - 1, 3R - 3)$

47.

$$f(1, 1, 5) = (2R - 2, 2R - 5, 3R - 3)$$

$p + q + r \bmod 3 = 1$, dus speler 3 is aan zet. Speler 3 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R of kolom 3 met uitbetaling R-4.

Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R + f(0, 1, 5) = R + f(0, 1, 5) = (2R - 2, 2R - 5, 2R - 3) = 3R - 3$$

$$\text{Optie 2: } R - 4 + f(1, 1, 4) = R - 4 + f(1, 1, 4) = (2R - 2, 2R - 1, 2R - 3) = 3R - 7$$

Speler 1 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(0, 1, 5) = (2R - 2, 2R - 5, 2R - 3)$.

48. Geen uniek maximum

$$f(2, 3, 4) = (3R - 5, 3R - 2, 3R - 3)$$

$p + q + r \bmod 3 = 0$, dus speler 1 is aan zet. Speler 1 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R-1 of kolom 2 met uitbetaling R-2 of kolom 3 met uitbetaling R-3.

Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R-1 + f(1,3,4) = R-1 + f(1,3,4) = (2R-4, 3R-2, 3R-3) = 3R-5$$

$$\text{Optie 2: } R-2 + f(2,2,4) = R-2 + f(2,2,4) = (2R-3, 3R-2, 3R-3) = 3R-5$$

$$\text{Optie 3: } R-3 + f(2,3,3) = R-3 + f(2,3,3) = (2R-4, 3R-3, 3R) = 3R-7$$

Als speler 1 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(1,3,4) = (2R-4, 3R-2, 3R-3)$

Als speler 1 kiest voor optie 2, uitbetaling volgens $f(2,2,4) = (2R-3, 3R-2, 3R-3)$

De opties leveren voor elke speler dezelfde uitbetaling op.

49.

$$f(2,2,4) = (2R-3, 3R-2, 3R-3)$$

$p+q+r \bmod 3 = 2$, dus speler 2 is aan zet. Speler 2 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling $R-1$ of kolom 3 met uitbetaling $R-3$.

Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R-1 + f(1,2,4) = R-1 + f(1,2,4) = (2R-3, 2R-1, 3R-3) = 3R-2$$

$$\text{Optie 2: } R-3 + f(2,2,3) = R-3 + f(2,2,3) = (2R-2, 2R-2, 3R-1) = 3R-5$$

$$\text{en } R-3 + f(2,2,3) = (2R-2, 2R-1, 3R-2) = 3R-4 \text{ (twee evenwichten voor } f(2,2,3))$$

Speler 1 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(1,2,4) = (2R-3, 2R-1, 3R-3)$

50.

$$f(2,3,5) = (3R-4, 3R-6, 4R-4)$$

$p+q+r \bmod 3 = 1$, dus speler 3 is aan zet. Speler 3 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling $R-1$ of kolom 2 met uitbetaling $R-2$ of kolom 3 met uitbetaling $R-4$.

Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R-1 + f(1,3,5) = R-1 + 3R-3 = 4R-4$$

$$\text{Optie 2: } R-2 + f(2,2,5) = R-2 + f(2,2,5) = (3R-3, 3R-5, 3R-4) = 3R-6$$

$$\text{Optie 3: } R-4 + f(2,3,4) = R-4 + 3R-3 = 4R-7$$

Speler 1 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(1,3,5)$

51.

$$f(2,2,5) = (3R-3, 3R-5, 3R-4)$$

$p+q+r \bmod 3 = 0$, dus speler 1 is aan zet. Speler 1 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling $R-1$ of kolom 3 met uitbetaling $R-4$.

Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R-1 + f(1,2,5) = R-1 + f(1,2,5) = (2R-2, 3R-5, 3R-4) = 3R-3$$

$$\text{Optie 3: } R-4 + f(2,2,4) = R-4 + f(2,2,4) = (2R-3, 3R-2, 3R-3) = 3R-7$$

Speler 1 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(1,2,5) = (2R-2, 3R-5, 3R-4)$

52.

$$f(2,4,6) = (4R-10, 4R-6, 4R-6)$$

$p+q+r \bmod 3 = 0$, dus speler 1 is aan zet. Speler 1 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling $R-1$ of kolom 2 met uitbetaling $R-3$ of kolom 3 met uitbetaling $R-5$.

Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R-1 + f(1,4,6) = R-1 + f(1,4,6) = (3R-9, 4R-6, 4R-6) = 4R-10$$

$$\text{Optie 2: } R-3 + f(2,3,6) = R-3 + f(2,3,6) = (3R-9, 4R-7, 4R-4) = 4R-12$$

$$\text{Optie 3: } R-5 + f(2,4,5) = R-5 + f(2,4,5) = (3R-7, 4R-7, 4R-3) = 4R-12$$

Speler 1 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(1,4,6) = (3R-9, 4R-6, 4R-6)$.

53.

$$f(1,4,6) = (3R-9, 4R-6, 4R-6)$$

$p+q+r \bmod 3 = 2$, dus speler 2 is aan zet. Speler 2 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R of kolom 2 met uitbetaling R-3 of kolom 3 met uitbetaling R-5.

Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R + f(0,4,6) = R + f(0,4,6) = (3R-9, 3R-6, 4R-6) = 4R-6$$

$$\text{Optie 2: } R-3 + f(1,3,6) = R-3 + f(1,3,6) = (3R-9, 3R-6, 4R-4) = 4R-9$$

$$\text{Optie 3: } R-5 + f(1,4,5) = R-5 + f(1,4,5) = (3R-7, 3R-6, 4R-3) = 4R-11$$

Speler 1 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(0,4,6) = (3R-9, 3R-6, 4R-6)$.

54.

$$f(0,4,6) = (3R-9, 3R-6, 4R-6)$$

$p+q+r \bmod 3 = 1$, dus speler 3 is aan zet. Speler 3 kan kiezen voor kolom 2 met uitbetaling R-3 of kolom 3 met uitbetaling R-5.

Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R-3 + f(0,3,6) = R-3 + f(0,3,6) = (3R-9, 3R-6, 3R-3) = 4R-6$$

$$\text{Optie 2: } R-5 + f(0,4,5) = R-5 + f(0,4,5) = (3R-7, 3R-6, 3R-3) = 4R-8$$

Speler 1 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(0,3,6) = (3R-9, 3R-6, 3R-3)$

55. Geen uniek maximum

$$f(0,3,6) = (3R-9, 3R-6, 3R-3)$$

$p+q+r \bmod 3 = 0$, dus speler 1 is aan zet. Speler 1 kan kiezen voor kolom 2 met uitbetaling R-2 of kolom 3 met uitbetaling R-5.

Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R-2 + f(0,2,6) = R-2 + f(0,2,6) = (2R-7, 3R-6, 3R-3) = 3R-9$$

$$\text{Optie 2: } R-5 + f(0,3,5) = R-5 + f(0,3,5) = (2R-4, 3R-6, 3R-3) = 3R-9$$

Als speler 1 kiest voor optie 1, dan uitbetaling volgens $f(0,2,6) = (2R-7, 3R-6, 3R-3)$

Als speler 1 kiest voor optie 2, dan uitbetaling volgens $f(0,3,5) = (2R-4, 3R-6, 3R-3)$

Beide opties leveren voor elke speler dezelfde uitbetalingen op.

56.

$$f(0,2,6) = (2R-7, 3R-6, 3R-3)$$

$p+q+r \bmod 3 = 2$, dus speler 2 is aan zet. Speler 2 kan kiezen voor kolom 2 met uitbetaling R-1 of kolom 3 met uitbetaling R-5.

Bepalen maximum.

Optie 1: $R-1 + f(0,1,6) = R-1+f(0,1,6) = (2R-7, 2R-5, 3R-3) = 3R-6$

Optie 2: $R-5 + f(0,2,5) = R-5+f(0,2,5) = (2R-2, 2R-5, 3R-4) = 3R-10$

Speler 2 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(0,1,6) = (2R-7, 2R-5, 3R-3)$

57.

$$f(0,1,6) = (2R-7, 2R-5, 3R-3)$$

$p+q+r \bmod 3 = 12$, dus speler 3 is aan zet. Speler 3 kan kiezen voor kolom 2 met uitbetaling R of kolom 3 met uitbetaling R-5.

Bepalen maximum.

Optie 1: $R + f(0,0,6) = R+f(0,0,6) = (2R-7, 2R-5, 2R-3) = 3R-3$

Optie 2: $R-5 + f(0,1,5) = R-5+f(0,1,5) = (2R-2, 2R-5, 2R-3) = 3R-8$

Speler 3 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(0,0,6) = (2R-7, 2R-5, 2R-3)$

58.

$$f(0,4,5) = (3R-7, 3R-6, 3R-3)$$

$p+q+r \bmod 3 = 0$, dus speler 1 is aan zet. Speler 1 kan kiezen voor kolom 2 met uitbetaling R-3 of kolom 3 met uitbetaling R-4.

Bepalen maximum.

Optie 1: $R-3 + f(0,3,5) = R-3+f(0,3,5) = (2R-4, 3R-6, 3R-3) = 3R-7$

Optie 2: $R-5 + f(0,4,4) = R-5+2R-4 = 3R-9$

Speler 3 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(0,3,5) = (2R-4, 3R-6, 3R-3)$

59.

$$f(0,4,4) = (2R-4, 3R-5, 3R-3)$$

$p+q+r \bmod 3 = 2$, dus speler 2 is aan zet. Speler 2 kiest volgens afspraak voor kolom 2 met uitbetaling R-3, verdere uitbetaling volgens $f(0,3,4) = (2R-4, 2R-2, 3R-3)$

60.

$$f(1,4,5) = (3R-7, 3R-6, 4R-3)$$

$p+q+r \bmod 3 = 1$, dus speler 3 is aan zet. Speler 3 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R of kolom 4 met uitbetaling R-3 of kolom 3 met uitbetaling R-4.

Bepalen maximum.

Optie 1: $R+f(0,4,5) = R+f(0,4,5) = (3R-7, 3R-6, 3R-3) = 4R-3$

Optie 2: $R-3+f(1,3,5) = R-3+f(1,3,5) = (3R-4, 3R-6, 3R-3) = 4R-6$

Optie 3: $R-4+f(1,4,4) = R-4+f(1,4,4) = (3R-4, 3R-5, 3R-3) = 4R-7$

Speler 3 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(0,4,5) = (3R-7, 3R-6, 3R-3)$.

61.

$$f(1,4,4) = (3R-4, 3R-5, 3R-3)$$

$p+q+r \bmod 3 = 0$, dus speler 1 is aan zet. Speler 1 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R of kolom 2 met uitbetaling R-3.

Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R+f(0,4,4)=R+f(0,4,4) = (2R-4, 3R-5, 3R-3) = 3R-4$$

$$\text{Optie 2: } R-3+f(1,3,4)=R-3+f(1,3,4) = (2R-4, 3R-2, 3R-3) = 3R-7$$

Speler 3 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(0,4,4) = (2R-4, 3R-5, 3R-3)$

62.

$$f(1,3,6) = (3R-9, 3R-6, 4R-4)$$

$p+q+r \bmod 3 = 1$, dus speler 3 is aan zet. Speler 3 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R of kolom 2 met uitbetaling R-2 of kolom 3 met uitbetaling R-5.

Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R+f(0,3,6)= R+ f(0,3,6) = (3R-9, 3R-6, 3R-3) = 4R-4$$

$$\text{Optie 2: } R-2+f(1,2,6)= R-2+3R-3=4R-5$$

$$\text{Optie 3: } R-5+f(1,3,5)= R-5+f(1,3,5) = (3R-4, 3R-6, 3R-3) = 4R-8$$

Speler 3 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(0,3,6) = (3R-9, 3R-6, 3R-3)$.

63. Geen uniek maximum

$$f(1,2,6) = (3R-7, 3R-6, 3R-3)$$

$p+q+r \bmod 3 = 0$, dus speler 1 is aan zet. Speler 1 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R of kolom 2 met uitbetaling R-1 of kolom 3 met uitbetaling R-5.

Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R+f(0,2,6)= R+ f(0,2,6) = (2R-7, 3R-6, 3R-3) = 3R-7$$

$$\text{Optie 2: } R-1+f(1,1,6)= R-1+2R-7=3R-8$$

$$\text{Optie 3: } R-5+f(1,2,5)= R-5+f(1,2,5) = (2R-2, 3R-5, 3R-4) = 3R-7$$

Speler 3 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(0,2,6) = (2R-7, 3R-6, 3R-3)$.

64.

$$f(1,1,6) = (2R-7, 3R-5, 3R-3)$$

$p+q+r \bmod 3 = 2$, dus speler 2 is aan zet. Speler 2 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R of kolom 3 met uitbetaling R-5.

Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R+f(0,1,6)= R+f(0,1,6) = (2R-7, 2R-5, 3R-3) = 3R-5$$

$$\text{Optie 2: } R-5+f(1,1,5)= R-5+f(1,1,5) = (2R-2, 2R-5, 3R-3) = 3R-10$$

Speler 2 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(0,1,6) = (2R-7, 2R-5, 3R-3)$.

65.

$$f(2,3,6) = (3R-9, 4R-7, 4R-4)$$

$p+q+r \bmod 3 = 2$, dus speler 2 is aan zet. Speler 2 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R-1, kolom 2 met uitbetaling R-2 of kolom 3 met uitbetaling R-5.

Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R-1+f(1,3,6)=R-1+f(1,3,6) = (3R-9, 3R-6, 4R-4) = 4R-7$$

$$\text{Optie 2: } R-2+f(2,2,6)=R-2+3R-6=4R-8$$

Optie 3: $R-5+f(2,3,5)=R-5+f(2,3,5) = (3R-4, 3R-6, 4R-4) = 4R-11$

Speler 2 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(1,3,6) = (3R-9, 3R-6, 4R-4)$.

66.

$$f(2,2,6) = (3R-7, 3R-6, 4R-4)$$

$p+q+r \bmod 3 = 1$, dus speler 3 is aan zet. Speler 3 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R-1 of kolom 3 met uitbetaling R-5.

Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R-1+f(1,2,6)=R-1+f(1,2,6) = (3R-7, 3R-6, 3R-3)=4R-4$$

$$\text{Optie 2: } R-5+f(2,2,5)=R-5+f(2,2,5) = (3R-3, 3R-5, 3R-4)=4R-9$$

Speler 3 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(1,2,6) = (3R-7, 3R-6, 3R-3)$

67.

$$f(2,4,5) = (3R-7, 4R-7, 4R-3)$$

$p+q+r \bmod 3 = 2$, dus speler 2 is aan zet. Speler 2 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R-1 of kolom 2 met uitbetaling R-3 of kolom 3 met uitbetaling R-4.

Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R-1+f(1,4,5)=R-1+f(1,4,5) = (3R-7, 3R-6, 4R-3)=4R-7$$

$$\text{Optie 2: } R-3+f(2,3,5)=R-3+f(2,3,5) = (3R-4, 3R-6, 4R-4) = 4R-9$$

$$\text{Optie 3: } R-4+f(2,4,4)=R-4+f(2,4,4) = (3R-4, 3R-5, 4R-4)=4R-9$$

Speler 2 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(1,4,5) = (3R-7, 3R-6, 4R-3)$.

68.

$$f(2,4,4) = (3R-4, 3R-5, 4R-4)$$

$p+q+r \bmod 3 = 1$, dus speler 3 is aan zet. Speler 3 kan kiezen voor kolom 1 met uitbetaling R-1 of kolom 2 met uitbetaling R-3. Bepalen maximum.

$$\text{Optie 1: } R-1+f(1,4,4)=R-1+f(1,4,4) = (3R-4, 3R-5, 3R-3)=4R-4$$

$$\text{Optie 2: } R-3+f(2,3,4)=R-3+f(2,3,4) = (3R-5, 3R-2, 3R-3) = 4R-6$$

Speler 3 kiest voor optie 1, uitbetaling volgens $f(1,4,4) = (3R-4, 3R-5, 3R-3)$.