

Een onderzoek naar de verbetering van het
wiskundig begrip bij middelbare scholieren door
middel van aangepaste toetsing

Martijn Heutinck (S1738186)

05-08-2021

Dit onderzoek wordt begeleid door dr. ir. T.J.M. Coenen
De tweede beoordelaar is prof. dr. N.V. Litvak
Het onderzoek zal worden gestart op 1-9-2020 en heeft als verwachte eind-
datum 14-7-2021

Contents

1	Inleiding	5
2	Terminologie	7
3	Methode en onderbouwing	8
3.1	De methode	8
3.1.1	Uitvoering van de methode	8
3.1.2	Punten van aandacht bij de uitvoering	9
3.2	De onderbouwing van de methode	11
3.2.1	De voorbereidende stap	11
3.2.2	De berekening	12
3.2.3	De schriftelijke uitleg	12
3.2.4	Ontwikkeling van de opdrachten	13
4	Instrumenten	15
4.1	Instructies	15
4.1.1	Stap 1 voorbereiding	15
4.1.2	Stap 2 de berekening	16
4.1.3	Stap 3 de uitleg	17
4.1.4	Algemene tips	18
4.2	Voorbeeld	19
4.2.1	Stap 1	19
4.2.2	Stap 2	19
4.2.3	Stap 3	20
4.3	Opdracht 1	21
4.3.1	De voorbereidende stap	21
4.3.2	De Berekening	21
4.3.3	De schriftelijke uitleg	22
4.3.4	Theoretische onderbouwing	23
4.4	Opdracht 2	24
4.4.1	De voorbereidende stap	24
4.4.2	De berekening	24
4.4.3	De schriftelijke uitleg	25
4.4.4	Theoretische onderbouwing	26
4.5	Opdracht 3	27
4.5.1	Voorbereidende stap	27
4.5.2	Uitwerking	27
4.5.3	Schriftelijke uitleg	28
4.5.4	Theoretische onderbouwing	29
4.6	Opdracht 4	30
4.6.1	De voorbereidende stap	31
4.6.2	De berekening	31
4.6.3	De schriftelijke uitleg	33
4.6.4	Theoretische onderbouwing	34

5	Resultaat	36
6	Discussie	39
7	Conclusie	45
8	Bronnen	46
9	Appendix 1 Excel overzichten	48
10	Appendix 2 test op normaliteit op verschillen tussen de toetsen	51
11	Appendix 3 Testen op verschillen tussen de klassen	53
12	Appendix 4 test op normaliteit toets resultaten	55
13	Appendix 5 verschil binnen de klas met de methode	56

1 Inleiding

Binnen het wiskunde onderwijs is er een grote diversiteit aan methoden en manieren om wiskundige onderwerpen te onderwijzen. Dit blijft totdat we aankomen bij het einde van een hoofdstuk en er een toetsing plaats moet vinden. De toetsing van wiskunde wordt voornamelijk gedaan door een schriftelijke toets aan het eind van het hoofdstuk. Dit is iets wat ik uit eigen ervaring en ervaringen van medestudenten heb geconstateerd. Ook in het handboek wiskundendidactiek is de volgende passage te vinden over hoofdstuktoetsen namelijk "Deze heeft vaak de vorm van een schriftelijke toets voor een of twee lesuren" (Streun et al., 2012). Nu is het argument dat er weinig diversiteit in toetsing methode is, geen argument om diverser te gaan toetsen. Het probleem is dat elke vorm van toetsing voor- en nadelen heeft en schriftelijke toetsen dus ook. De grote vraag die we namelijk stellen bij de standaard schriftelijke toets is of de leerlingen uiteindelijk iets onthouden van wat ze hebben geleerd. Voor een toets moet er een voldoende worden behaald en de leerlingen zijn daarvan natuurlijk op de hoogte. Het vermoeden is dan ook dat leerlingen trucjes leren kort voor de toets om de cesuur te halen en dat de kennis vervolgens weer verloren gaat. Dit vermoeden komt voort uit persoonlijke ervaringen met leerlingen die in de bovenbouw nog steeds moeite hebben met bijvoorbeeld breuken, alswel de instap toetsen die nodig zijn op universiteiten om het wiskunde niveau op het juiste peil te krijgen. Dit is mogelijk, want een schriftelijke toetsing is een momentopname en zoals mevrouw Brinke zegt "Studenten passen hun leergedrag aan, aan de vorm van toetsen" (Brinke, 2011). Als het dus gewenst is dat leerlingen de stof voor langere tijd onthouden, dan moet de toets hierop zijn ingericht. Het blijkt dat dit vrij lastig is met schriftelijke toetsen door het volgende probleem. Het is algemeen erkend dat het lastig is om vragen te formuleren in een schriftelijke toets die het *weten waarom* en *weten over weten* toetsen (Streun et al., 2012). Dit zijn de vragen die het begrip testen en ervoor zorgen dat de leerlingen het voor een lange periode onthouden. Het is dus kwalijk dat schriftelijke toetsen bijna de enige manier van toetsen is binnen wiskunde, want dit betekent dat als we later doorgaan op de verwachte kennisbasis dat deze basis er misschien niet is. Als deze kennisbasis er niet is bij een nieuw onderwerp, terwijl dit wel verwacht wordt, dan wordt het zeer moeilijk om in het nieuwe onderwerp mee te komen (Neuman et al., 2014). Dit heeft als gevolg dat het nieuwe onderwerp ook niet goed wordt geleerd. Dit is dus zowel een probleem binnen de middelbare school als voor vervolgopleidingen die een bepaalde kennisbasis verwachten. Het is dus problematisch dat leerlingen weg kunnen komen met een voldoende zonder dat ze het wiskunde onderwerp daadwerkelijk onthouden en begrijpen. Een goed cijfer zou eigenlijk niet het doel moeten zijn, maar iets wat voortvloeit uit het begrip en kennis van het onderwerp. Er wordt dus tegenwoordig eigenlijk meer op competenties getoetst in plaats van op kennis (Brinke, 2011), terwijl het doel dus zou moeten zijn om kennis en begrip te ontwikkelen. Hiernaast is aangetoond dat als je een onderwerp begrijpt dan blijft het beter onthouden (Skemp, 1976). De hoofdvraag die hieruit volgt luidt dan als volgt: Kan er een alternatieve toets worden ontwikkeld die de ontwikkeling van kennis en begrip

stimuleert? Op dit moment wordt er op de universiteit Twente door professor Litvak gebruik gemaakt van een alternatieve toetsingswijze. Haar is om advies gevraagd en met onder andere haar advies ontwikkelen we een methode voor het middelbaar onderwijs die zich minder richt op het halen van een goed cijfer, maar meer op het begrijpen van het onderwerp. Geïnspireerd door haar en met ondersteuning van de literatuur wordt er een toetsingsmethode ontwikkeld die zich richt op begrip ontwikkeling. Deze methode zal gebaseerd zijn op de samenwerking tussen leerlingen, want er is aangetoond dat samenwerken tussen studenten leidt tot betere leerresultaten en hogere niveaus van begrip. Ook bij toetsen leidt samenwerken tot positieve leerresultaten voor alle leerlingen (Jang et al., 2017). Dit was getest op studenten van een basis calculus programma op Harvard. Het gaat hier om studenten die samen een probleem proberen aan te pakken en kunnen discussiëren over het probleem, wat voor betere resultaten zorgt. Binnen dit onderzoek zal worden geprobeerd om deze ideeën uit te breiden naar het middelbaar onderwijs.

2 Terminologie

Voor het onderzoek zijn er een aantal belangrijke begrippen die nog verdere verduidelijking nodig hebben. Er is al gesproken over het leren van trucjes en het daadwerkelijk begrijpen van zaken. Dit kan beter worden verwoord in de termen relationeel en instrumenteel begrip (Skemp, 1976). Ook termen zoals cesuur en begrippen uit de statistiek die later naar voren zullen komen worden besproken. Deze zullen nu nader worden gespecificeerd.

Relationeel begrip wordt als volgt beschreven. Een persoon die relationeel begrip heeft, begrijpt waarom en hoe de regels werken en procedures werken. Hierdoor is het dus makkelijker om te zien wanneer een bepaalde methode werkt of niet, om nieuwe kennis te koppelen aan dit onderwerp en om deze kennis te onthouden.

Instrumenteel begrip is zoals Skemp het zegt "rules without reasons" (Skemp, 1976). Je weet de regels en methode en kunt deze toepassen. Met instrumenteel begrip kun je dus berekeningen doen, maar je snapt eigenlijk niet precies waarom het zo werkt en variaties op de methode zijn moeilijk.

De laatste term is de cesuur. Op een proefwerk kun je punten krijgen door opgaven goed te doen. Hierin moet je een bepaald aantal punten halen voor een voldoende op het proefwerk. Het aantal punten dat je haalt op een proefwerk is dus de maat om te bepalen of je het haalt. Het cesuur van een toets is dan de minimale hoeveelheid benodigde punten zodat je de toets met een voldoende afsluit.

Om verder wat te kunnen zeggen over de uitslag van dit onderzoek zal er ook gebruik gemaakt gaan worden van statistiek. Hiervoor zal het programma SPSS worden gebruikt. Dit programma zal worden gebruikt om te testen op normaliteit en om t-toetsen te berekenen. Het testen op normaliteit betekent dat er gekeken wordt of de resultaten kunnen worden benaderd met een normaalverdeling. Dit is noodzakelijk voor de t-toets, want deze gaat uit van een onderliggende normaalverdeling. De t-toets zal vervolgens worden gebruikt om de resultaten te vergelijken en conclusie te koppelen aan de verkregen data.

3 Methode en onderbouwing

3.1 De methode

Binnen dit onderzoek gaat er een nieuwe vorm van toetsing worden ontworpen. Het doel is om een alternatieve manier van toetsen te ontwikkelen die meer test op de ontwikkeling van het *weten waarom* en *weten over weten*. Uit onderzoek is gebleken dat men een bepaald onderwerp het beste begrijpt als men het kan uitleggen aan anderen (Bales, 1996). Op basis van dit idee en ervaringen op de Universiteit Twente zelf wordt er een toets gemaakt die bestaat uit vier vragen. De leerlingen hebben een week de tijd om deze te maken. Hierbij mogen ze gebruik maken van alle bronnen die voor hen beschikbaar zijn zoals het internet of het wiskunde boek. Dit is waarschijnlijk ook nodig, want de vragen gaan net wat moeilijker zijn dan het niveau van het hoofdstuk dat ze moeten leren. De toets bestaat uit vier vragen, maar de leerlingen worden niet alleen beoordeeld op het maken van de vragen. Er moet namelijk bij elke vraag een voorbereidende stap en schriftelijke uitleg worden aangeleverd. In de voorbereidende stap moeten de leerlingen vertellen welke gegevens ze hebben bij de opdracht die ze maken en wat hun plan van aanpak is voor de som. Hierna beginnen ze aan het oplossen van de som om te eindigen met een schriftelijke uitleg waarbij ze uitleggen wat ze in de bereken stappen doen en waarom ze dat doen. Op deze drie onderdelen worden ze beoordeeld waarbij het totaal van deze onderdelen dan het cijfer is dat de leerling krijgt. Iedere leerling moet individueel het werk inleveren, wat direct ook voorkomt dat er niet één leerling kan zijn die al het werk doet wanneer ze samenwerken. Als dit namelijk wel gebeurt zal de schriftelijke uitleg van de ander of overgeschreven zijn en dat is met een plagiaat detector te vinden of ze zullen de som niet zo goed begrijpen als degene die het werk heeft gedaan. Dit zal er dan voor zorgen dat de persoon die er minder tot niets aan heeft gewerkt, een lagere score op de schriftelijke uitleg zal ontvangen. Wanneer meer dan 50% van de schriftelijke uitleg hetzelfde is met een andere persoon, zal het werk handmatig worden vergeleken. Hierbij wordt dan ook direct vergeleken hoeveel de uitwerkingen van de vragen overeenkomen. Op basis van de vergelijking zal worden bepaald of er punten worden afgetrokken of dat het toeval is dat de schriftelijke uitleg veel op elkaar lijkt.

3.1.1 Uitvoering van de methode

Er zijn een aantal problemen met de uitvoering en het beantwoorden van de hoofdvraag. Ten eerste, hoe wordt er bepaald of er meer begrip is bij leerlingen. Ten tweede, alhoewel het niet onmogelijk is, is niet makkelijk om zomaar een toets te vervangen. Dit komt doordat het gewenst is om de methode te testen op een bovenbouw klas, want daar zijn de onderwerpen wat toegankelijker voor het maken van deze methode. Dit zal later nog in meer detail worden besproken. Het probleem met in de bovenbouw een toets geven is dat het in het PTA (het programma van toetsing en afsluiting) van de school moet staan. Het is moeilijk om een experimentele toets hierin te krijgen. Deze twee problemen kunnen in één

keer ondervangen worden door deze methode niet direct als een toets te testen. Het idee is om de methode te gebruiken op een klas voordat ze het schriftelijke proefwerk hebben gehad. Hierbij is het belangrijk dat er een parallelklas is die deze methode niet voor het proefwerk doet. Er wordt hier de aanname gedaan dat de klassen van vergelijkbaar niveau zijn. Ze krijgen een cijfer voor het schriftelijke proefwerk, vervolgens komen we drie weken later terug met nog een keer een vergelijkbaar schriftelijk proefwerk. Hiervan weten de leerlingen niets af en ze hebben zich daar niet op voor kunnen bereiden. Hierdoor kunnen we testen hoeveel van de kennis is bijgebleven. Als je namelijk het onderwerp begrijpt dan kun je het beter onthouden. De verwachting is dan ook dat op het eerste schriftelijke proefwerk er niet een groot verschil tussen de klassen zit. Het wordt niet geheel uitgesloten dat er geen verschil is, want er zal altijd iets variantie tussen de klassen zitten. Toch wordt er geen groot verschil verwacht, want beide klassen kunnen zich op deze toets goed voorbereiden. Het grote verschil gaat komen bij de tweede toets. De leerlingen die de methode maken zouden door deze methode meer begrip moeten krijgen over de leerstof. Hierdoor wordt ervan uit gegaan dat de leerlingen met de methode deze stof beter zullen onthouden, met als gevolg dat deze leerlingen beter scoren op de tweede toets in vergelijking tot de leerlingen die niet de methode hebben gemaakt. Het idee is om te oordelen of deze methode tot meer begrip leidt op basis van de resultaten van de toetsen. Hierbij wordt de klas die niet deze methode krijgt gebruikt als ijkpunt om te vergelijken hoe de klas met de methode het doet.

3.1.2 Punten van aandacht bij de uitvoering

Voordat we dit onderzoek op deze wijze gaan uitvoeren, zijn er nog een aantal punten die eerst nog besproken moeten worden. De eerste is hoe zorgen we ervoor dat de leerlingen op de tweede verrassingstoets evenveel hun best doen als op hun eerste toets. De tweede toets is namelijk niet voor een cijfer en de eerste wel. Het idee is om er een soort competitie van te maken tussen de klassen waarbij er een traktatie te winnen valt. Verder willen we toch eerlijk zijn tegen de leerlingen waarom dit wordt gedaan. De combinatie van deze drie dingen: de traktatie, nieuwsgierigheid naar het onderzoek en het competitieve element zouden genoeg moeten motiveren om hun best te doen. Dit moet natuurlijk wel goed duidelijk worden gemaakt door de docent die de lessen geeft. Hiermee belanden we dan ook direct op het volgende punt. Wat moet de docent doen die deze lessen geeft?

Allereerst, de lessen worden gegeven door hun eigen wiskunde docent. Dit zorgt ervoor dat er geen beïnvloeding van de leerlingen plaats vindt doordat er ineens een andere docent voor de klas staat. Dit betekent dat er ook een lesschema voor de uitvoerend docent moet worden verschaft. Voor de klas die niet mijn methode gaat gebruiken verandert er niets behalve dat er een tweede toets gaat plaatsvinden. De instructies voor deze tweede toets zijn in beide klassen gelijk. Er moet verteld worden dat het proefwerk niet voor een cijfer is, maar voor een onderzoek. Daarbij mag verteld worden dat het gaat om een vergelijkend onderzoek tussen klassen om te kijken naar het verschil in

informatie retentie en dat de beste klas een traktatie krijgt. Natuurlijk krijgt de andere klas ook een traktatie, maar dit wordt niet verteld, want anders heeft het geen zin om je best te doen voor de traktatie. De bedoeling is dat de docent de leerlingen enthousiasmeert om ook op dit proefwerk hun best te doen. Dit is zeer belangrijk, want anders zijn de scores van de klassen niet representatief voor wat de leerlingen daadwerkelijk kunnen.

Voor de klas die wel mijn methode gaat gebruiken, verandert er nog wat meer. Er is een les nodig om de opdracht uit te leggen en de leerlingen er alvast aan te laten werken. Dit zorgt ervoor dat er gevoel voor het niveau ontstaat bij de leerlingen. Deze les gaat plaatsvinden zodra de klas door het hoofdstuk heen is en vervangt een herhalingsles. Ook in deze les mag al worden aangegeven dat dit voor een onderzoek is. Verder is het belangrijk dat er duidelijk wordt uitgelegd wat precies de bedoeling is. Er wordt verwacht dat het gemaakte werk wordt ingeleverd volgende week in deze les. Er zal ook een voorbeeld som met uitleg aangeleverd worden, zodat er ook klassikaal gedemonstreerd kan worden wat precies de bedoeling is. Het verschil tussen de klassen in wat ze doen, zit voornamelijk in deze les. De ene klas gaat aan de slag met de methode en de andere zal een gewone herhalingsles krijgen. Dit kan er uiteindelijk wel voor zorgen dat er verschil in hoeveelheid tijd gaat zitten die de leerlingen aan deze paragraaf besteden. De sommen in de methode zijn moeilijker dan de standaard sommen uit het boek en zullen dus ook meer tijd vergen dan dat één les aan huiswerk gaat kosten. De leerlingen met de methode zullen dus waarschijnlijk iets meer tijd spenderen aan dit hoofdstuk. De docent die deze lessen geeft, zal niet veel meer werk hieraan ondervinden. Het eerste proefwerk zal door de docent zelf worden nagekeken. Vervolgens worden kopieën van de nagekeken toetsen, de toets en het nakijkmodel doorgestuurd voor het onderzoek. De tweede toets wordt gebaseerd op de eerste toets en zal aan de uitvoerend docent worden aangeleverd samen met het bijbehorende nakijkmodel. De uitvoerend docent kijkt niet de tweede toets na, maar zal deze wel klasikaal bespreken. Ook de nagekeken tweede toets zal aan de uitvoerende docent worden aangeleverd ter ondersteuning bij de bespreking. Doordat het nakijkmodel van de eerste toets bekend is en de tweede toets op de eerste is gebaseerd, wordt de variatie bij de beoordeling op de toetsen tot een minimum beperkt en is het geen probleem als twee verschillende personen het nakijken. Al het werk van de leerlingen wordt geanonimiseerd voor dit verslag en wordt door niemand anders gezien dan de uitvoerend docent en degene die het werk nakijkt. Bij het anonimiseren is het van belang dat alle resultaten van persoon A bij persoon A blijven staan. Dit wordt gedaan omdat, de inzet op de methode wordt vergeleken met het resultaat op het tweede proefwerk. Als een leerling namelijk niet zijn best heeft gedaan op de methode dan is dat belangrijke informatie voor het resultaat van de tweede toets en omgekeerd. Het is dus niet mogelijk om alleen de cijfers van een klas te ontvangen.

Een ander punt van aandacht is dat de methode niet antwoorden moet gaan weggeven van de proefwerken die komen. Het is dus belangrijk dat de methode wordt gemaakt in overleg met de docent die de lessen geeft. Dit kan heel simpel zijn doordat de onderzoeker op de hoogte wordt gebracht van de vragen op het

proefwerk. Ook is het mogelijk dat de docent zelf meer betrokken is bij het ontwerpen van de vragen, maar dit is niet noodzakkelijk. Beide werken om te voorkomen dat de methode antwoorden weg gaat geven van het proefwerk.

Het laatste punt waar rekening mee moet worden gehouden is dat het onderwerp van het hoofdstuk belangrijk is voor de methode. Sommige wiskunde hoofdstukken lenen zich meer dan andere hoofdstukken voor de methode die we nu voorstellen. De vragen in de methode moeten namelijk moeilijk zijn, maar ze moeten niet als onmogelijk worden ervaren. Hoofdstukken over differentiëren en vector meetkunde zijn hoofdstukken waar goede vragen niet al te moeilijk zijn om te verzinnen, terwijl als we naar een hoofdstuk kijken over algebraïsche vaardigheden zoals letterrekenen dan wordt dat wel lastig. Het verschil zit hem er in dat het moeilijk is om bij algebraïsche vaardigheden diepgang te creëren zonder dat je geheel andere onderwerpen er bij gaat halen. Dit is dan ook een reden om voor een bovenbouw klas te kiezen, zodat we van basisvaardigheden uit kunnen gaan en diepgang binnen het hoofdstuk kunnen creëren.

3.2 De onderbouwing van de methode

Door Sternberg en Ben-Zeev (2012) is aangetoond dat op middelbare scholen de leerlingen bijna foutloos rekenproblemen oplossen, maar als ze een geschreven opdracht krijgen dan gaan ze vaak fout. Ze laten zien dat leerlingen goed zijn in het uitvoeren van de rekenstappen, maar moeite hebben met probleem representaties. Wat ze hier verder uit concluderen is dat leerlingen problemen hebben met het begrijpen van de opdracht, maar niet met het oplossen van het rekengedeelte. De denkstappen die leerlingen maken om een wiskundig probleem aan te pakken moeten dus worden aangepast. Er moet eerst begrip voor het probleem worden ontwikkeld en van daaruit volgen de rekenstappen en kan het probleem worden opgelost.

Op basis van dit idee dat er vanuit begrip voor het probleem moet worden gewerkt, kijken we nu naar de methode. Zoals al eerder verteld is het idee om de leerlingen een huiswerkset mee te geven en ze dan te beoordelen op drie facetten van hun werk, namelijk:

- De voorbereidende stap
- De berekening
- De schriftelijke uitleg van de berekening

3.2.1 De voorbereidende stap

In de voorbereidende stap is het de bedoeling om de leerlingen alvast aan het denken te krijgen. Ze moeten hierin uitleggen welke basisgegevens al zijn gegeven in de opdracht en nadenken hoe ze met deze gegevens mogelijk tot het gewenste antwoord kunnen komen. Dit is dus de eerste stap in het oplossen van het probleem dat Sternberg en Ben-Zeev (2012) laten zien. Deze stap probeert ze te laten nadenken en begrip te laten ontwikkelen. Deze stap is zeer belangrijk

voor de ontwikkeling van nieuwe kennis. Als we kijken naar het driefasenmodel (Marzano & Miedema, 2018) dan zien we dat voor het aanleren van nieuwe kennis het belangrijk is om eerst te beginnen met betekenis opbouwen. Dit wordt gedaan door voorkennis te integreren met de nieuwe kennis of in dit geval de interpretatie van de probleemstelling. Verder kan het vooraf nadenken over het stappenplan voor de leerlingen leiden tot grote leerwinst (Marzano & Miedema, 2018).

3.2.2 De berekening

Nadat leerlingen de nodige voorbereidingen hebben getroffen zullen ze de berekening doen. Als het goed is hebben ze bij de voorbereiding nagedacht over hoe ze de som gaan aanpakken en zullen ze dit nu uitvoeren. Ze komen nu terecht in in de fase "uitproberen" (Marzano & Miedema, 2018) en hier kan een spectrum aan dingen gebeuren. Dit spectrum gaat van "ze hadden alles van te voren goed bedacht en de uitvoering was erg makkelijk tot ze hadden geen idee wat ze moesten doen en kwamen er niet uit". Beide kanten van het spectrum zijn niet wenselijk. We willen eigenlijk een zogenaamde "productive struggle". Dit zorgt ervoor dat ze met elkaar moeten overleggen, dat ze moeten nadenken en dat ze misschien informatie (opnieuw) moeten opzoeken. Er is aangetoond dat deze "productive struggle" noodzakelijk is voor het ontwikkelen van wiskundig begrip (Hiebert & Grouws, 2007) en dat deze "productive struggle" voor nieuw begrip zorgt (Granberg, 2016). Hiernaast zorgt deze "productive struggle" er ook voor dat de leerling fouten uit oude kennis halen en deze oude kennis op een goede wijze herstructureren (Granberg, 2016). Het is dus belangrijk dat er goede opdrachten worden gemaakt om deze "productive struggle" te krijgen. Hoe dit wordt verkregen wordt in meer detail verteld bij het hoofdstuk "3.2.4 Ontwikkeling van de opdrachten" en zal per opdracht worden behandeld in het hoofdstuk "Instrumenten". Bij de berekening is het de bedoeling dat de leerlingen stap voor stap de gegeven opdracht oplossen. Dit moeten de leerlingen doen hetzelfde als op een gewone schriftelijk toets dus met logische wiskundige stappen.

3.2.3 De schriftelijke uitleg

Het laatste onderdeel van de methode is de schriftelijke uitleg. De schriftelijke uitleg is om meerdere redenen belangrijk in dit geheel en dan wordt de reden dat het makkelijk is te controleren op plagiaat, buiten beschouwing gelaten. De schriftelijke uitleg is een belangrijk onderdeel in het leerproces voor de leerling. Allereerst is het belangrijk dat de leerlingen terug kijken op wat ze hebben gedaan en dat analyseren, ook al kwamen ze niet geheel uit de opdracht. Als dit namelijk niet gebeurt dan is al het zwoegen op de som niet productief (Granberg, 2016). Het is dus belangrijk dat ze op de som terug kijken en analyseren wat ze doen en als ze niet uit de opdracht kwamen kan dit het moment zijn dat ze tot nieuwe ideeën komen waarmee ze de opdracht misschien wel kunnen oplossen. Het is dus ook direct een moment om hun eigen werk te evalueren.

Ten tweede is de schriftelijke uitleg goed in het leerproces, omdat het de wiskunde omzet naar woorden. De leerlingen zullen onderling praten over de sommen en moeten dit uiteindelijk ook allemaal netjes en gestructureerd opschrijven. Marzano (2004) zegt hier het volgende over: *Hoe meer er over leerstof wordt gepraat, hoe beter. Dan wordt het leren zichtbaar. Kortom, des te meer taal, des te beter. Ook om de woordenschat van leerlingen te ontwikkelen. Dit is zo belangrijk omdat woordenschat een direct verband vertoont met schoolsucces.* Het is dus aangetoond dat het in het algemeen goed is voor de leerlingen om de leerstof te bespreken. Deze schriftelijke uitleg forceert de leerlingen om de wiskunde onder woorden te brengen en het is de bedoeling dat ze met elkaar overleggen wat dus goed is voor hun leerproces.

Ten derde willen we dat de leerlingen beter worden in *weten waarom* en *weten over weten* (Streun et al., 2012). Deze schriftelijke uitleg zorgt ervoor dat de leerlingen niet weg kunnen komen met een trucje uitvoeren zonder dat ze begrijpen waarom ze bepaalde stappen uitvoeren. Ze moeten uitleggen wat ze doen en dat is één van de beste manieren om begrip van een onderwerp op te bouwen (Bales, 1996). Doordat de leerlingen deze uitleg schriftelijk geven zorgt dat ervoor dat het *weten waarom* en *weten over weten* (Streun et al., 2012) beter wordt. In de schriftelijke uitleg zit impliciet de vraag: waarom mag de wiskunde stap die je maakt? Dit forceert de leerlingen om na te denken over wat ze doen wat tot een verbetering leidt in het *weten waarom* en *weten over weten*. Dit is een zeer goede stap in het leerproces van de leerlingen en daarom is de schriftelijke uitleg dus ook belangrijk.

Als laatste worden de leerlingen geforceerd met deze stap om betekenis op te bouwen zoals beschreven in het driefasenmodel van denken van Marzano en Miedema (2018). Ook zullen ze bezig zijn met het schematiseren van de informatie. Dit zijn belangrijke stappen in het leerproces van leerlingen die uiteindelijk leidt tot het behoud van kennis. Het is dus zeer belangrijk dat de leerlingen nadenken over wat ze bij een opdracht doen, waarom ze het doen en waar het toe leidt. Het zorgt ervoor dat de leerlingen meer betekenis krijgen bij het achterliggende wiskundige idee dat de gegeven opdracht test of probeert te ontwikkelen.

3.2.4 Ontwikkeling van de opdrachten

Om de "productive struggle" te krijgen zullen de opdrachten binnen de methode op een manier moeten worden ontworpen zodat ze dat stimuleren. De zogenaamde "ConcepTests" (Crouch et al., 2007) passen hier perfect bij. Een directe vertaling van hun omschrijving van een "ConcepTests" is als volgt: *Een "ConcepTests" is een opgave ontworpen om moeilijkheden van leerlingen met het materiaal bloot te leggen en studenten de kans te geven om belangrijke begrippen te ontdekken. De "ConcepTests" moet niet testen op slimmigheden of geheugen.* Deze "ConcepTests" passen dus zeer goed bij het idee van "productive struggles" en een bijkomend voordeel is dat het bij de evaluatie van de opdracht makkelijk is om te zien wat er mis gaat bij een bepaald concept. Voor deze "ConcepTests" hebben ze een aantal duidelijke criteria opgesteld waar een

opdracht aan moet voldoen, namelijk:

- De opdracht moet focussen op één concept.
- De opdracht moet denkwerk hebben en niet het invullen van getallen in een formule.
- Er moeten foute antwoorden zijn die correct kunnen lijken.
- De verwoording moet eenduidig zijn.
- De opdracht moet niet te moeilijk of te makkelijk zijn.

Aan de hand van deze criteria zullen de opdrachten worden ontworpen. Dit zal ook verder bij elke opdracht individueel worden besproken in het hoofdstuk "instrumenten".

4 Instrumenten

Voor het uitvoeren van dit onderzoek zijn een aantal instrumenten gemaakt. Deze set aan instrumenten bestaat uit een instructieblad voor de docent, een instructieblad voor de leerlingen en de methode die uit vier opdrachten bestaat. Op het instructieblad zit voor iedereen een voorbeeldsom met uitwerking. Verder heeft de uitvoerend docent ook de uitwerkingen van de opdrachten in de methode. Deze uitwerkingen zijn een voorbeeld van hoe de opdracht aangepakt kan worden. Deze opdrachten kunnen ook op andere manieren worden aangepakt, wat ook precies de bedoeling is als je kijkt naar de ConceptTest. Verder hoeft de uitwerking ook niet de snelste manier te zijn om tot het antwoord te komen. Wel zullen de opdrachten opgelost worden aan de hand van de structuur die de methode ook van de leerlingen vraagt. De opdrachten die in deze instrumenten zitten zullen ook daar worden onderbouwd. Ook zijn er twee versies namelijk een docentenversie en een leerlingenversie. Hieronder is de docentenversie gegeven. Het grootste onderscheid is dat in de docentenversie er bij opdrachten af en toe het kopje "Tips" staat. Deze kan de docent aan de leerlingen geven mochten ze vastlopen, maar de leerlingen hebben ze niet standaard beschikbaar.

4.1 Instructies

Voor het oplossen van de volgende opdrachten gelden een aantal regels. Voor het maken van de opdrachten is er een stappenplan dat iedere opgave gevolgd moet worden. Dit stappenplan bestaat uit 3 stappen en zal hieronder worden toegelicht, samen met een voorbeeldsom. De opdrachten die gemaakt moeten worden zitten achter deze instructies. Om de opdrachten op te lossen mag alles gebruikt worden. Er mag dus met elkaar overlegd worden, ze mogen het opzoeken op het internet, ze mogen het boek erbij houden, alles mag. Voor deze opdrachteset staat één week de tijd waarna het individueel moet worden ingeleverd. Dit betekent dat er best samen mag worden gewerkt, dat wordt zelfs aangeraden, maar iedereen levert zijn eigen geschreven werk in. Hierbij wordt gecontroleerd op plagiaat dus meerdere keren dezelfde uitleg is ook niet goed. Zorg ervoor dat het digitaal ingeleverd wordt en hierbij mogen de antwoorden ook ingescand worden mits het duidelijk leesbaar is. Verder zijn deze instructies hetzelfde als voor de leerlingen, wel staan er bij de sommen tips die de leerlingen niet hebben. Deze tips zijn er om naar eigen inzicht te gebruiken als de leerlingen vastlopen. Het is niet de bedoeling dat de antwoorden worden verklapt, maar de leerlingen mogen wel ondersteund worden en in de juiste richting gestuurd worden. Mochten de tips niet toereikend zijn dan mag er naar eigen inzicht gestuurd worden zolang het antwoord maar niet verklapt wordt.

4.1.1 Stap 1 voorbereiding

Beschrijf de gegevens die aangeleverd zijn bij de opdracht. Dit betekent dat je een duidelijk overzicht maakt van welke gegevens je hebt en wat deze betekenen. In dezelfde stap moet je ook aangeven wat je wilt bereiken. Wat ga je bewijzen

en/of wat ga je berekenen? Soms kun je ook alvast bedenken welke informatie je minimaal nodig hebt om tot de eindoplossing te komen. Geef dit ook van tevoren aan. Geef aan welke stappen je van plan bent om te gaan zetten om tot je antwoord te komen.

4.1.2 Stap 2 de berekening

Je hebt stap 1 nu gedaan dus je hebt voor jezelf duidelijk op een rijtje wat je hebt en waar je naartoe moet gaan werken. Dit gaan we dan ook doen in deze stap. Hier geef je netjes en stapsgewijs de berekening en/of het bewijs. Deze berekening en/of bewijs moet dermate netjes zijn dat ik het aan een andere klas kan geven en dat zij uit jouw wiskundige stappen begrijpen wat er gebeurt. Zorg er dus voor dat je iedere stap netjes op een nieuwe regel begint. Ook is het slim om als jij regels gebruikt dan kort achter je stap te zetten welke regel je hebt gebruikt. Doe dit, want je hebt het nodig in de volgende stap. Verder is het handig om soms tussendoor informatie te geven over wat je doet of waar je aan begint. Het kan gebeuren dat je niet in één keer uit je berekening komt, dat is niet erg, maar schrijf dan de berekening en/of het bewijs nog steeds zo ver mogelijk op en ga dan door naar stap 3.

4.1.3 Stap 3 de uitleg

We gaan nu in woorden beschrijven wat er in de berekening en/of het bewijs precies gebeurt. Bij elke regel uit de berekening en/of het bewijs moet je denken aan de volgende vragen:

- Wat doe ik nu precies in deze regel?
- Waarom doe ik deze regel nu?
- Wat heb ik bereikt met deze regel?
- Waarom mag datgene wat ik nu doe? / Klopt het wat ik nu doe?

Je hoeft in de geschreven uitleg niet constant elke vraag uit te leggen. Niet elke vraag is namelijk even belangrijk bij elke stap die je maakt. Een kort voorbeeld ter verduidelijking: als jij in een formule x invult om y uit te rekenen, dan is de vraag waarom je dit doet belangrijker dan de vraag of dit mag. Je hoeft dan ook niet een antwoord te geven op de vraag waarom dit mag. Je moet dus zelf bedenken hoe je zo duidelijk mogelijk kunt uitleggen wat je doet.

De uitleg moet in volledige zinnen opgeschreven worden. De combinatie tussen de geschreven uitleg en je berekening of bewijs zou door iedereen gelezen en begrepen moeten kunnen worden. Dit is dus ook de reden dat je achter je berekening zet welke regels je hebt gebruikt, zodat de uitleg makkelijker is. Mocht het nu zo zijn dat je niet uit een berekening of bewijs bent gekomen dan heb je doorgewerkt totdat je niet meer verder kon. Op dat punt beantwoord je de volgende vragen:

- Wat heb ik tot nu toe berekend/bewezen?
- Waarom kom ik nu niet verder?
- Wat heb ik nodig om verder te kunnen met de berekening of het bewijs?
- Hoe zou ik het gegeven dat mist mogelijk toch nog kunnen bereiken?

Mocht het zo zijn dat na het beantwoorden van deze vragen je ineens toch een inzicht hebt waarmee je verder kunt, ga dan terug naar stap 2. Als je niet verder komt, schrijf dan duidelijk in volledige zinnen op wat de antwoorden zijn op de vragen. Aan het eind moet namelijk nog steeds duidelijk zijn in welke regels van je bewijs of berekening je wat doet totdat je niet meer verder komt en daar beschrijf je de antwoorden op de laatste set aan vragen.

4.1.4 Algemene tips

1. Wiskundige bewijzen en berekeningen worden niet in 5 minuten gevonden. Sommige bewijzen en berekeningen hebben jaren gekost. Neem dus de tijd en denk niet na het één keer te hebben geprobeerd dat je er toch niet uitkomt en dat het niet gaat lukken. De meeste goede ideeën worden namelijk terloops bedacht.
2. Er zijn altijd meerdere wegen die naar het juiste antwoord leiden. Als je dus vast komt te zitten, probeer dan eens te kijken of het misschien op een andere manier kan.

4.2 Voorbeeld

Gegeven is cirkel c met middelpunt $(1, 7)$ en straal 5.

Verder hebben we $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ een vectorvoorstelling van lijn k .

Lijn k snijdt cirkel c in twee punten¹.

Bereken exact de coördinaten van deze snijpunten.

4.2.1 Stap 1

Gegeven is het volgende:

- Een cirkel c met middelpunt $(1, 7)$ en deze cirkel heeft een straal van lengte 5.
- Een vectorvoorstelling van de lijn k : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- De cirkel en de lijn snijden op twee punten

We gaan de exacte coördinaten bereken van de snijpunten tussen lijn k en cirkel c . Om hierachter te komen zal ik waarschijnlijk een vergelijking moeten oplossen. Dit betekent dat ik waarschijnlijk de vergelijking nodig heb voor de cirkel.

4.2.2 Stap 2

We beginnen met de vergelijking voor een cirkel.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (1)$$

$$(x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 5^2 = 25 \quad (2)$$

Ik ga nu de vectorvoorstelling laten snijden met de vergelijking van de cirkel. Hiervoor doen we de volgende observaties bij de vectorvoorstelling:

$$x = t \quad (3)$$

$$y = 2t \quad (4)$$

Ik substitueer nu de vergelijking voor x en y in de vergelijking van cirkel c en deze gaan we vervolgens uitwerken.

$$(t - 1)^2 + (2t - 7)^2 = 25 \quad (5)$$

$$t^2 - 2t + 1 + 4t^2 - 28t + 49 = 25 \quad (6)$$

$$5t^2 - 30t + 25 = 0 \quad (7)$$

$$t^2 - 6t + 5 = 0 \quad (8)$$

¹Deze som komt uit het eerste VWO eindexamen uit 2019

Nu lossen we deze kwadratische vergelijking op.

$$(t - 5)(t - 1) = 0 \quad (9)$$

Hieruit volgt:

$$t = 1 \vee t = 5 \quad (10)$$

Nu we twee waarden weten voor t weten vullen we deze in in de vectorvoorstelling om de coördinaten te vinden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Dus de coördinaten van de snijpunten zijn $(1, 2)$ en $(5, 10)$.

4.2.3 Stap 3

De nummering hieronder correspondeert met de nummering van de stappen uit de berekening.

1. Dit is de algemene formule voor een cirkel. Aangezien het idee was om de formule op te stellen van cirkel c , hebben we deze nodig. In deze vergelijking is de a de x-coördinaat van het middelpunt van een cirkel en b de y-coördinaat. Verder is r de straal van de cirkel
2. We vullen de gegevens die we al hadden van cirkel c in. We hebben dus dat $a = 1$, $b = 7$ en $r = 5$ en met deze ingevuld hebben we de vergelijking van cirkel c . Deze hadden we nodig om de snijpunten te berekenen met de vectorvoorstelling.
3. De vectorvoorstelling geeft ons uitdrukkingen voor voor x en y uitgedrukt in t . Dit is de vergelijking voor x .
4. Dit is de uitdrukking voor y die volgt uit de vectorvoorstelling.
5. We substitueren nu de uitdrukkingen voor x en y in de vergelijking van de cirkel. Hieruit volgt vergelijking 5. We doen dit om waarden te vinden voor t zodat we uiteindelijk met de vectorvoorstelling de coördinaten van de snijpunten kunnen berekenen.
6. We werken de haakjes weg door gebruik te maken van de merkwaardige producten. We willen namelijk naar een uitdrukking toe waarbij we krijgen $t = \dots$ en dus moeten we de t zien te isoleren.
7. We konden bij 6 zien dat we een kwadratische vergelijking gingen krijgen en dus hebben we alles naar links gehaald en samengenomen wat samengenomen mocht worden. We hebben de vergelijking nu in een algemene vorm van een kwadratische vergelijking staan namelijk $ax^2 + bx + c = 0$. Nu kunnen we dus de vergelijking oplossen.

8. Ik heb de formule nog wat verder vereenvoudigd zodat we niet de abc-formule hoefde te gebruiken. We kunnen nu namelijk verder met een factorisatie van producten.
9. Dit is de factorisatie wat noodzakelijk is voor het oplossen van deze vergelijking. Zie dat we twee factoren hebben en dat we twee snijpunten moesten vinden. We zijn dus goed bezig.
10. Gebruik makend van het feit dat we het in de vorm $A \cdot B = 0$ hebben staan kunnen we zeggen dat $A = 0$ of $B = 0$. Hieruit leiden wij af wat de waarden voor t moeten zijn.
11. We hebben uit (10) nu gevonden wat de waarden voor t zijn. Deze vullen we nu in in de vectorvoorstelling om de coördinaten te vinden van het eerste snijpunt.
12. Hier vullen we de tweede waarde van t in in de vectorvoorstelling. We vinden hierbij het tweede snijpunt van de lijn met de cirkel.

4.3 Opdracht 1

Gegeven is de volgende formule:

$$f(x) = \sqrt{\frac{-9x^2 + 36}{27 - 3x^2}}$$

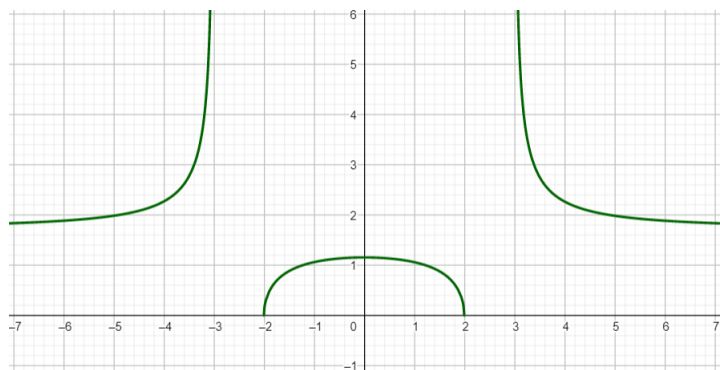
Wij willen weten wat de vergelijkingen zijn voor de asymptoten van deze formule. Bereken deze algebraïsch.

4.3.1 De voorbereidende stap

In deze vraag willen we de voorgenoemde functie analyseren op de asymptoten. Voor de asymptoot is het handig om een idee te hebben van de grafiek van deze formule. De eerste stap voor mij gaat dan ook zijn om de grafiek te plotten met behulp van de grafische rekenmachine. De functie zou ook geanalyseerd kunnen worden door eerst even te doen alsof het wortelteken er niet is en dat te compenseren bij het antwoord. Het is dan nog steeds handig om de grafiek te plotten. Als ik deze plot heb dan heb ik een ongeveer idee waar de asymptoten zitten.

4.3.2 De Berekening

Zoals gezegd beginnen we met het plotten van de grafiek:



Nu gaan we beginnen met het berekenen van de asymptoten. Het lijkt alsof we twee verticale asymptoten en één horizontale hebben. We beginnen met de verticale asymptoten door de onderkant van de breuk gelijk te stellen aan 0.

$$27 - 3x^2 = 0 \quad (1)$$

Als we deze vergelijking uitwerken dan krijgen we:

$$x = -3 \vee x = 3 \quad (2)$$

Wat ook direct de vergelijkingen zijn voor de verticale asymptoten. Nu gaan we kijken of er een horizontale asymptoot is door de limiet van de formule te nemen naar oneindig. (Zie dat we min oneindig niet hoeven te checken aangezien de formule symmetrisch is in de y-as. Dit is te checken door te zien dat x is gelijk aan de $-x$ als je het invult in de formule.)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{-9x^2 + 36}{27 - 3x^2}} \quad (3)$$

We gaan nu deze limiet uitrekenen.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{-9x^2 + 36}{27 - 3x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{-9 + \frac{36}{x^2}}{\frac{27}{x^2} - 3}} = \sqrt{\frac{-9}{-3}} = \sqrt{3} \quad (4)$$

Oftewel de grafiek heeft een horizontale asymptoot op:

$$y = \sqrt{3} \quad (5)$$

4.3.3 De schriftelijke uitleg

1. Doordat de grafiek is geplot kunnen we zien dat er twee verticale asymptoten zijn. Bij ongeveer $x = 2$ en $x = -2$ houdt de functie op, maar dat zijn geen asymptoten. Om de twee verticale asymptoten te vinden moeten we erachter komen waar de breuk onmogelijk is. We doen dus even alsof de wortel niet bestaat, want de wortel zorgt er alleen maar voor dat het stuk tussen de asymptoot en het midden gedeelte onmogelijk wordt. We stellen daarom de onderkant van de breuk gelijk aan 0.

2. We werken de vergelijking uit door de x^2 te isoleren en dan vinden we deze twee resultaten. Deze resultaten zijn ook direct de vergelijkingen van de asymptoten.
3. We rekenen nu de verticale asymptoot uit door de limiet naar oneindig te nemen. We hoeven min oneindig niet te controleren, want de formule is symmetrisch in de y-as. Het is wel belangrijk om dit op te merken, want als hij niet symmetrisch was, dan had hij twee verschillende horizontale asymptoten kunnen hebben.
4. Hier werken we het limiet uit waarbij we wat slim rekenen. We delen bijvoorbeeld door de x^2 waardoor alles mooi weg gaat uiteindelijk door het limiet. Let op dat we door x^2 mogen delen aangezien de noemer geen 0 is in dit geval.
5. Dit is dus de vergelijking voor de horizontale asymptoot.

4.3.4 Theoretische onderbouwing

Met deze vraag wordt de kennis van leerlingen rondom horizontale en verticale asymptoten uitgediept. De leerlingen hebben in dit hoofdstuk al meerdere malen geoefend met zowel horizontale als verticale asymptoten. Deze opdracht is alleen net een stapje moeilijker, doordat de quotientfunctie onder een wortel staat en dat hebben de leerlingen niet eerder gezien. De opdracht focust zich dus zeer duidelijk op één specifiek concept namelijk asymptoten. Hier zit geen verschil met het idee van de ConcepTest.

Verder moet de opdracht niet het invullen van getallen in formules zijn. Ook hier voldoet de opdracht aan. Er wordt gevraagd om de asymptoten algebraïsch te bepalen. Dit moet gedaan worden door een vergelijking op te lossen van de noemer en de limiet op oneindig te bepalen. De leerling vult dus op geen enkel moment echt waarden in en moet denkwerk verrichten op welke stappen noodzakkelijk zijn om tot het antwoord te komen.

Vervolgens moet de som ook foute antwoorden hebben die correct lijken. Doordat er een wortel functie lijkt het alsof er bij -2 of 2 ook een verticale asymptoot zit wat niet correct is. Verder zit er tussen -3 en -2 en ook tussen 2 en 3 een gat in het domein. Dit kan leiden tot leerlingen die denken dat de verticale asymptoot ergens in dat gebied ligt. Ten slotte kan er bij de horizontale asymptoot ook nog het één en ander mis gaan, bijvoorbeeld dat de wortel wordt vergeten. Als je natuurlijk de grafiek plot zie je direct dat er niets klopt van de waarde, maar leerlingen doen dat niet altijd dus dit kan een zeer realistisch fout antwoord lijken.

Alle asymptoten moeten algebraïsch bepaald worden. Dit is zeer eenduidig geformuleerd.

Als laatste moet de opdracht niet te moeilijk zijn. Deze opdracht is bedacht nadat de gemengde opgaven van de leerlingen zijn bekeken. Deze opgaven zijn net wat moeilijker dan de stof die de leerlingen in het hoofdstuk behandelen en de gemengde opgaven worden vaak overgeslagen. Er staat een vergelijkbare

som met wat meer tussen stapjes in het boek van de leerlingen. Het moeilijkste binnen deze som is dat de leerlingen rekening moeten houden met de wortel. Dit maakt de opdracht net iets lastiger dan normaal, maar zeker niet te moeilijk.

4.4 Opdracht 2

Gegeven is dezelfde formule als bij opdracht 1:

$$f(x) = \sqrt{\frac{-9x^2 + 36}{27 - 3x^2}}$$

Bepaal nu algebraïsch wat de afgeleide is.

4.4.1 De voorbereidende stap

Er zijn meerdere manieren om deze som aan te pakken. We zullen voor de afgeleide altijd een combinatie moeten gaan maken tussen de quotiëntregel en de kettingregel. Door goed na te denken over de stappen die we moeten gaan zetten om tot het antwoord te komen, kunnen we nu bedenken dat de snelste manier gaat zijn om te beginnen met de kettingregel.

4.4.2 De berekening

Zoals aangegeven in de voorbereidende stap is de snelste manier om te beginnen met de kettingregel. We gaan dus beginnen met de volgende substitutie:

$$u = \frac{-9x^2 + 36}{27 - 3x^2} \quad (1)$$

Hierdoor wordt de functie als volgt:

$$f(x) = \sqrt{u} \quad (2)$$

Nu kunnen we ze beide apart differentiëren. We beginnen met $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad (3)$$

Voor de afgeleide van u hebben we nu de quotiëntregel nodig, dit resulteert in de volgende afgeleide:

$$u' = \frac{-18x \cdot (27 - 3x^2) - (-9x^2 + 36) \cdot -6x}{(27 - 3x^2)^2} \quad (4)$$

Deze maken we natuurlijk eerst nog even wat netter wat leidt tot het volgende:

$$u' = \frac{-270x}{(27 - 3x^2)^2} \quad (5)$$

Nu volgt uit de kettingregel:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{-9x^2+36}{27-3x^2}}} \cdot \frac{-270x}{(27-3x^2)^2} \quad (6)$$

Ook dit gaan we nog even wat beter en korter opschrijven:

$$f'(x) = \frac{-135x \cdot \sqrt{27-3x^2}}{(27-3x^2)^2 \sqrt{-9x^2+36}} = \frac{-135x}{(27-3x^2)^{1.5} \sqrt{-9x^2+36}} \quad (7)$$

We kunnen nu nog één stap verder gaan in de herleiding en dan krijgen we:

$$f'(x) = \frac{-45x}{(27-3x^2)\sqrt{3x^4-39x^2+108}} \quad (8)$$

4.4.3 De schriftelijke uitleg

1. De kettingregel zegt het volgende. Als we een functie $f(x) = g(h(x))$ dan is de afgeleide hiervan $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$. Door een substitutie te kiezen krijgen we deze situatie waardoor we de kettingregel toe kunnen passen. Ik kies voor een substitutie van de gehele breuk, omdat dit de minste reken stappen op gaat leveren. Een andere manier is om eerst de functie te splitsen met boven en onder een wortel $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$, maar dan hadden we twee keer de kettingregel moeten toepassen namelijk voor teller en noemer. Deze substitutie is dus de snelste manier om tot het antwoord te komen.
2. We hebben de substitutie ingevuld en we krijgen dan voor f de volgende functie.
3. We differentiëren nu een standaard wortel functie. Deze gaat gewoon net zoals elk ander polynoom, $\sqrt{u}$ is namelijk hetzelfde als $u^{\frac{1}{2}}$. Hierop kunnen we de standaard regel voor afgeleide gebruiken, namelijk: als $f(x) = x^a$ dan is $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$. Deze regel wordt gebruikt en vervolgens schrijven we de functie weer in een wortel vorm op. Het resultaat daarvan is stap 3.
4. Om de kettingregel verder te gebruiken hebben we ook de afgeleide van onze substitutie nodig. Nu is onze substitutie een quotiëntfunctie dus moeten we de quotiënt regel gebruiken. Deze regel is als volgt: als $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ dan is de afgeleide $f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$. Deze regel hebben we in deze stap ingevuld. Het resultaat daarvan is stap 4.
5. We vereenvoudigen nu de gevonden vergelijking uit stap 4. De derde machten vallen heel mooi tegen elkaar weg en dit is het resultaat van de vereenvoudiging.

6. Nu hebben we alle componenten die nodig zijn om de kettingregel in te vullen. Zie hiervoor ook stap 1 van de schriftelijke uitleg. We hebben deze in onze uitwerking allemaal ingevuld en tegelijkertijd hebben we de substitutie voor u ook weer terug ingevuld. Dit resulteert in de totale afgeleide voor f en we hebben nu eigenlijk al het antwoord op onze vraag. Wel is het zo dat we het niet op deze wijze kunnen laten staan en dat we het nog even wat compacter en netter moeten maken.
7. Het compacter en netter maken doen we dan ook in deze stap. De factor 2 wordt weggedeeld en daarnaast wordt de wortel aan de onderkant gesplitst zoals ook in stap 1 wordt genoemd, maar niet is gedaan. Dit laat ons namelijk de regel "delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde" toepassen. Dit is ook de reden dat er in de teller nu ineens een factor $\sqrt{27 - 3x^2}$ staat en in de noemer $\sqrt{-9x^2 + 36}$. In dezelfde stap delen we ook direct boven en onder door de factor $\sqrt{27 - 3x^2}$ wat resulteert in de eindvorm van stap 7. In principe zijn we er nu en dit is een goed antwoord op de vraag.
8. Deze stap is een kleine stap verder met herleiden die de functie niet per se beter maakt, maar het resulterende polynoom onder de wortel geeft heel mooi aan waar de functie wel en niet bestaat, om dit te zien moet je de functie die onder de wortel staat maar eens plotten. Als je die vergelijkt met een plot van de originele functie dan zie je dat hij precies negatief wordt als de originele functie de grenzen van zijn domein bereikt. Dit komt natuurlijk overeen met het feit dat een negatieve wortel niet bestaat in de reële getallen. Hoe komen we op deze herleiding? We maken gebruik van de regel $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB}$. Door dit te gebruiken krijgen we een groot naar vierde machts polynoom onder de wortel, maar daar kunnen we een factor 9 uithalen. Deze halen we vervolgens buiten de wortel en we delen de -135 erdoor. Het resultaat hiervan is de uiteindelijke herleiding zoals te zien is in stap 8.

4.4.4 Theoretische onderbouwing

In deze opdrachten is het de bedoeling om de leerlingen uit te dagen met de regels van differentiëren. De leerlingen zijn bekend met de kettingregel, de productregel en de quotiëntregel. Er wordt weer gebruik gemaakt van dezelfde formule als bij opdracht 1. Deze formule is namelijk ook uiterst geschikt voor het testen van de kennis van differentiëren. De leerlingen moeten hier namelijk een combinatie maken tussen de hiervoor genoemde regels. Dit is iets lastiger dan dat de leerlingen gewend zijn. Dit zorgt ervoor dat de leerlingen goed moeten nadenken over welke regel ze wanneer willen gebruiken, aangezien er één manier is om snel tot het antwoord te komen, terwijl andere volgordes van regels tot veel meer stappen leiden. Uiteindelijk kunnen ze nog steeds op het goede antwoord uitkomen, maar door minder stappen te hoeven nemen, is er ook minder kans op rekenfouten. Deze som is ook zeker niet te moeilijk voor de leerlingen, want ze hebben al wel een paar sommen gehad waar ze de regels

moeten combineren. Toch is deze som wel iets moeilijker, simpel weg doordat ze er niet zo vaak mee hebben geoefend en ze tot nu toe ook nog niet een quotient in een wortel functie hebben moeten afleiden.

Wel is het zo dat deze opdracht zich zeer duidelijk focust op één concept, namelijk de regels van het differentiëren. Ook zijn er genoeg antwoorden die goed kunnen lijken, maar die dat niet zijn. Dit komt doordat deze functie zeer moeilijk te visualiseren is als er niet gebruik gemaakt wordt van een grafische rekenmachine om hem te plotten. Vervolgens is de afgeleide ook een functie die niet makkelijk te doorgronden is, waardoor een verandering van de coëfficiënten niet snel opgevat zou worden als fout. Het is vrij moeilijk om te zien wanneer de afgeleide stijgend is en wanneer dalend ten opzichte van de functie zonder dat je hem plot. Dit maakt het dat elke rekenfout binnen het proces tot antwoorden kan leiden die logisch lijken.

Als laatste moet de verwoording eenduidig zijn. Deze is niet anders te interpreteren, dus ook deze opdracht volgt de vijf punten waaraan een ConceptTest moet voldoen.

4.5 Opdracht 3

Stel we hebben de functie $k(x) = f(x) \cdot g(x)$. Als we nu de afgeleide willen nemen van $k(x)$ dan gebruiken we daarvoor de productregel en krijgen we $k'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$. Als we nu een functie hebben die uit een product van drie functies bestaat in plaats van twee oftewel $k(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$ dan bestaat hiervoor een vergelijkbare regel. Zoek en bewijs deze regel.

4.5.1 Voorbereidende stap

De regel die we waarschijnlijk zoeken is $k'(x) = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$. Dit is namelijk de meest logische uitbreiding van twee functies naar drie functies. Om de afgeleide van een product functie met drie functies te bepalen, kunnen we de gewone product regel voor twee functies gebruiken. We kunnen namelijk de functie die bestaat uit drie functies reduceren naar twee functies door een slimme substitutie te doen. Dit is niet de enige manier om de afgeleide te vinden, maar dit is wel de kortste. Dit gaat als volgt:

4.5.2 Uitwerking

We beginnen met het nemen van de afgeleide van $k(x)$.

$$k'(x) = (f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' \quad (1)$$

Voor overzichtelijkheid gebruik ik de substitutie $u(x) = g(x) \cdot h(x)$. Het is ook mogelijk om associativiteit te gebruiken en dan is deze substitutie niet nodig. We krijgen het volgende:

$$k'(x) = (f(x) \cdot u(x))' \quad (2)$$

Hierop kunnen we de productregel zoals we hem kennen toepassen om het volgende te krijgen:

$$k'(x) = f'(x) \cdot u(x) + f(x) \cdot u'(x) \quad (3)$$

Nu vullen we onze substitutie weer terug in en krijgen we:

$$k'(x) = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x))' \quad (4)$$

Nu moeten we voor een laatste maal de productregel gebruiken.

$$k'(x) = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot (g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)) \quad (5)$$

Nu de laatste haakjes wegwerken en dan hebben we het volgende resultaat:

$$k'(x) = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) \quad (6)$$

4.5.3 Schriftelijke uitleg

1. We beginnen met simpelweg de afgeleide van $k(x)$ te nemen. Dit is hetzelfde als zeggen we nemen de afgeleide van het product van functies in zijn totaliteit. Dit is de eerste stap die we nemen, omdat we hiervan de uitwerking willen vinden en daarmee uiteindelijk op de product regel willen komen voor drie functies.
2. We gaan nu de volgende substitutie gebruiken $u(x) = g(x) \cdot h(x)$. Door deze substitutie te doen reduceren we de product functie van drie functies naar twee functies. Hierdoor kunnen we de gewone productregel nu weer toepassen. De grote vraag is of deze substitutie eigenlijk wel zo mag. Het antwoord is dat dit mag als we namelijk even een kort voorbeeld pakken, stel $g(x) = e^x$ en $h(x) = \sin(x)$, dan is de vermenigvuldiging van deze twee functie als volgt $g(x) \cdot h(x) = e^x \sin(x)$. Nu is de functie $u(x) = e^x \sin(x)$ ook weer een goed gedefinieerde functie en dus zien we dat we in dit voorbeeld ook twee functies samen kunnen nemen tot één functie. Nu is een voorbeeld niet een bewijs of reden dat het altijd mag, maar als je twee goed gedefinieerde functies met elkaar vermenigvuldigt dan kun je dat samen nemen tot één functie. Hetzelfde geldt ook omgekeerd, als je een goed gedefinieerde functie hebt, kun je hem altijd uitsplitsen in een product van functies. Wat een goed gedefinieerde functie nu precies is laten we onbesproken. Hier zijn namelijk hele boeken over geschreven.
3. Na de substitutie hebben we dus een functie over die bestaat uit een product van twee functies. We kunnen nu dus de productregel voor twee functie toepassen die al bekend is. In deze stap hebben we daarvan de uitwerking.
4. We gaan de substitutie weer terug invullen. We willen namelijk de productregel vinden voor drie functies. Dit komt toevallig heel erg mooi uit zoals in stap 4 van de uitwerking te zien is. Zoals ook al in stap 2 van

de schriftelijke uitleg aangegeven, mogen we dus ook weer terug. We zien hier direct dat het eerste gedeelte $(f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x))$ al precies is zoals we hadden bedacht aan het begin. Alleen het tweede gedeelte moet nog verder worden uitgewerkt, maar als je goed kijkt herken je hier ook al iets.

5. Het gedeelte $((g(x) \cdot h(x))')$ is de afgeleide van een product van twee functies en dus kunnen we ook hier weer de gewone product regel op toepassen. Dit resulteert in de uitwerking van stap 5, let wel op de haakjes.
6. Als laatste stap werken we de laatste haakjes weg en dan zien we precies de in de voorbereidende stap genoemde formule terug. Het vermoeden dat we dus hadden met hoe de regel eruit zou gaan zien was correct.

4.5.4 Theoretische onderbouwing

Deze opdracht is bedoeld om leerlingen aan het denken te zetten. Er is expres niet de juiste uitdrukking gegeven, omdat leerlingen nu moeten gaan nadenken over hoe zo'n vergelijkbare uitdrukking er nu uit kan zien. Als de regel namelijk direct wordt gegeven, dan moeten ze alleen nog maar over het bewijs van de regel gaan nadenken. Ik wil juist dat ze zelf onderzoeken hoe zo'n vergelijkbare regel er mogelijk uitziet en dat ze dan over een bewijs ervan gaan nadenken. Ze kunnen dit ook opzoeken, wat geen probleem is. Er wordt namelijk nog steeds door de leerlingen onderzocht hoe de regel werkt en in de schriftelijke uitleg moet er nog steeds netjes worden verteld hoe het bewijs werkt. Ook het bewijs is niet geheel triviaal. Zodra de leerlingen de uitdrukkingen hebben gevonden/bedacht (of niet), moet er meerdere inzichten zijn en een goed begrip van de regels en functies. Ze moeten het inzicht tonen dat ze de nieuwe formule op een slimme manier kunnen weergeven zodat ze de productregel kunnen toepassen. Dit kan door een substitutie toe te passen of gebruik makend van associativiteit $fgh = f(gh) = (fg)h$. Er wordt vanuit gegaan dat ze het bewijs volgen wat gegeven is, wat naar mijn mening het makkelijkste bewijs is. Het begrip dat ook voor functie de associativiteits regels werken of überhaupt dat associativiteit bestaat is een goede stap in de richting van meer wiskundig begrip. Ook het gebruiken van een substitutie getuigt van inzicht. Het feit dat je doorhebt dat twee functies met elkaar vermenigvuldigd een nieuwe functie wordt terwijl je bezig bent met het bewijs laat zien dat je snapt hoe functies werken. Deze substitutie is het belangrijkste inzicht dat nodig is voor het bewijzen van de regel. Een andere moeilijkheidsgraad van deze opdracht is dat hij vrij abstract is. Het leren omgaan met deze abstracte situatie is belangrijk binnen de wiskunde en zorgt er in het algemeen voor dat leerlingen een bepaalde denkwijze aanleren die constructief is voor het oplossen van verdere problemen. Deze opdracht voldoet ook aan de gestelde eisen van de ConcepTest.

De opdracht focust zich op één concept, namelijk het bewijzen van de productregel met drie functies. Zoals hiervoor gezegd is deze opdracht compleet bedoeld om de leerlingen aan het denken te zetten. Wat betreft de foute antwoorden zijn er genoeg regels te verzinnen die correct lijken, maar dat niet zijn.

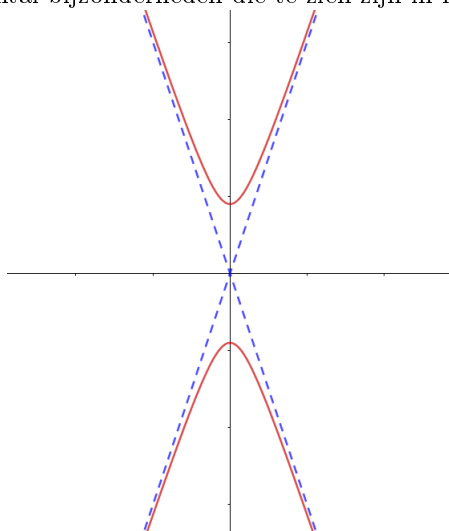
Een fout voorbeeld is de volgende regel:

$$k'(x) = f'(x)g'(x) + f'(x)h(x) + g'(x)f(x) + g'(x)h(x) + h'(x)f(x) + h'(x)g(x)$$

Deze zullen wel gevonden worden in het bewijs proces, gegeven dat de leerlingen uit het bewijs komen. Vervolgens is deze opdracht eenduidig, dus is er alleen nog de kwestie van de moeilijkheids graad. Deze opdracht is wel een opdracht die lastig kan zijn voor de leerlingen. Hij zal zeker niet te makkelijk zijn, maar waarschijnlijk ook niet te moeilijk. Deze opdracht is bedacht zonder in het boek te kijken, maar de laatste som van het hoofdstuk over de productregel heeft deze som er ook in staan als een moeilijke nadenk opdracht. Deze som is dus wel redelijk moeilijk, maar niet te moeilijk en als de leerlingen hebben opgelet kunnen ze het antwoord gewoon vinden in de uitwerkingen die ze tot hun beschikking hebben. Daarnaast biedt het internet ook genoeg mogelijkheden om tot het juiste antwoord te komen. Omdat de som in het boek en de uitwerkingen te vinden is en het internet ook het antwoord heeft, zou deze som niet te moeilijk moeten zijn.

4.6 Opdracht 4

Gegeven is de volgende vergelijking: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{81} = -1$. Deze vergelijking heeft een aantal bijzonderheden die te zien zijn in het volgende grafiek ervan.



In het rood zien we de grafiek die hoort bij de vergelijking. De blauwe stippellijnen zijn de twee lineaire asymptoten die horen bij deze formule en in het zwart hebben we de twee symmetrie assen die horen bij deze vergelijking. Bereken de twee formules die horen bij de asymptoten.

Hint

- Leg uit waarom de asymptoten hetzelfde snijpunt moeten hebben als de symmetrie assen.
- Herschrijf de vergelijking zodat er uitdrukkingen zijn in de vorm van $y = \dots$
- Gebruik de afgeleide om de richtingscoëfficiënten van de asymptoten te bepalen.

Tips

- Dit is een vergelijking van een hyperbool, deze naam maakt het zoeken op het internet een heel stuk makkelijker. Deze tip loopt wel het gevaar dat ze de algemene formule overnemen en niet goed uitleggen wat ze doen of waarom dit zo werkt. Wees dus voorzichtig met deze tip.

4.6.1 De voorbereidende stap

De volgende gegevens zijn voor ons beschikbaar:

- De vergelijking van de rode grafiek is $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{81} = -1$
- De asymptoten zijn de blauwe stippellijnen en deze zijn lineair dus uit te drukken in $y = ax + b$
- De grafiek heeft zowel een horizontale als een verticale symmetrie as.

We moeten dus twee lineaire formules gaan berekenen voor de blauwe stippellijnen. Dit betekent dat we twee keer een a moeten vinden en twee keer een b . De b is het snijpunt met de y -as en daar snijden de twee stippellijnen elkaar, want dat moet vanuit de symmetrie oftewel we hoeven alleen maar één b te vinden, wat ook kan met behulp van de symmetrie eigenschap. De a is iets lastiger. De a is de richtingscoëfficiënt van een lineaire lijn en de lijnen die we zoeken zijn twee asymptoten oftewel twee raaklijnen die raken op het oneindige. Dit betekent dat we met de afgeleide van de vergelijking de a kunnen berekenen als we hem naar oneindig en min oneindig laten lopen.

4.6.2 De berekening

We schrijven eerst de vergelijking iets anders op namelijk:

$$9x^2 - y^2 = -81 \quad (1)$$

We berekenen nu eerst b door een willekeurige x in te vullen. Ik kies $x = 0$ en dan volgt:

$$-y^2 = -81 \quad (2)$$

$$y = 9 \vee y = -9 \quad (3)$$

Hieruit volgen de twee Coördinaten:

$$(0, 9) \wedge (0, -9) \quad (4)$$

Nu vullen we nog even $y = 9$ in in (1):

$$9x^2 - 81 = -81 \quad (5)$$

Hieruit volgt:

$$x = 0 \quad (6)$$

Hieruit maken we op dat de symmetrie assen de volgende formules hebben:

$$x = 0 \wedge y = 0 \quad (7)$$

En volgt dat:

$$b = 0 \quad (8)$$

Nu gaan we door met het berekenen van de a , uit (1) volgt:

$$y^2 = 9x^2 + 81 \quad (9)$$

$$y = \sqrt{9x^2 + 81} \vee y = -\sqrt{9x^2 + 81} \quad (10)$$

(Zie dat dit correspondeert met de bovenste en onderste helft van de grafiek).

Nu kunnen we de afgeleide bepalen van onze functie en voor het gemak noem ik de bovenste helft even y_1 en de onderste helft y_2 :

$$y'_1 = \frac{9x}{\sqrt{9x^2 + 81}} \quad (11)$$

$$y'_2 = \frac{-9x}{\sqrt{9x^2 + 81}} \quad (12)$$

(We hebben in principe maar één van de twee nodig om a_1 en a_2 te vinden)

$$a_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x}{\sqrt{9x^2 + 81}} \quad (13)$$

$$a_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x}{\sqrt{9x^2 + 81}} \quad (14)$$

We beginnen met het uitrekenen van a_1 :

$$a_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x}{\sqrt{9x^2 - 81}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{\sqrt{9 - \frac{81}{x^2}}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3 \quad (15)$$

Nu rekenen we a_2 uit:

$$a_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-9x}{\sqrt{9x^2 - 81}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-9}{\sqrt{9 - \frac{81}{x^2}}} = \frac{-9}{\sqrt{9}} = -3 \quad (16)$$

Dit geeft als eind antwoord de volgende twee vergelijkingen voor de asymptoten:

$$y_1 = 3x \wedge y_2 = -3x \quad (17)$$

4.6.3 De schriftelijke uitleg

1. Ik heb de formule iets makkelijker gemaakt door alle breuken weg te werken. Dit heb ik gedaan door links en rechts met 81 te vermenigvuldigen. Dit heeft op zichzelfstaand nog niet echt nut, maar ik vind het zo makkelijker.
2. We vullen een willekeurige x in en krijgen twee waarden voor y .
3. Dit is een uitwerking van stap (2) waarbij we de voorgenoemde twee y waarden vinden.
4. We hebben nu twee coördinaten die zijn gespiegeld in de horizontale symmetrie as. Door het te middelen vinden we waar deze as moet liggen.
5. Nu vullen we nog een keer één van de twee y waarden in de we hadden uitgerekend. Ik kies voor deze y waarde omdat ik zeker weet dat deze y waarde bestaat. Als we namelijk naar de grafiek kijken zullen er y waarden zijn waarvoor er geen oplossing is voor x . Andere y waarden hadden ook gekund.
6. We vinden nu maar één waarde voor x wat betekent dat we al op de verticale symmetrie as zitten. We hadden hier ook twee waarden voor x kunnen krijgen afhankelijk van de y de we hadden ingevuld. Als we twee x waarden hadden gevonden konden we ook bepalen waar de verticale symmetrie as zit.
7. Uit (4) en (6) volgt dus dat de symmetrie assen hetzelfde zijn als de x-as en de y-as.
8. Doordat de grafiek zowel horizontaal als verticaal symmetrisch op de hier voor gevonden assen is, moet er ook gelden dat de asymptoten dat zijn. Als je één asymptoot spiegelt dan krijg je de andere asymptoot ongeacht van de symmetrie as die je pakt. Dit betekent dus dat het snijpunt van de symmetrie assen ook het snijpunt van de asymptoten moet zijn, want anders gaat het mis in één van de spiegelingen. Dit betekent dus dat de snijpunt van de asymptoten (0,0) is en dus dat $b = 0$ moet gelden.
9. We gaan nu verder met het plan om a te vinden. Hiervoor gaan we eerst de formule omschrijven zodat we hem kunnen afleiden.
10. We hebben de vergelijking opgedeeld in twee gedeeltes zodat we hem kunnen afleiden. De gedeeltes corresponderen met de boven en onderkant van de grafiek.

11. De bovenkant noemen we y_1 en met behulp van de kettingregel komen we op de volgende afgeleide uit voor y_1 .
12. We doen hetzelfde als in stap (11) alleen dan nu voor y_2 . Deze stap is eigenlijk niet nodig, maar we kunnen het gebruiken om te controleren dat we het goed doen. Als het goed is is het namelijk precies hetzelfde alleen nu met een min ervoor.
13. Aangezien we twee verschillende richtingscoëfficiënten nodig hebben, want we hebben twee asymptoten, noemen we de eerste a_1 en de tweede a_2 . De reden dat we de afgeleide nodig hebben wordt in deze stap duidelijk. We willen namelijk de richtingscoëfficiënten vinden voor de asymptoten. Bij een raaklijn is dit makkelijk aangezien we dan de bijbehorende x waarde kunnen invullen om de richtingscoëfficiënt te vinden. Als we nu bedenken dat een asymptoot eigenlijk ook een soort raaklijn is alleen dat hij pas in het oneindige raakt, dan wordt het logisch wat we nu doen. We hebben namelijk de afgeleide en nemen het limiet van $x \rightarrow \infty$ om het raakpunt op oneindig te vinden.
14. We doen hier hetzelfde als in stap (13) alleen nu met $x \rightarrow -\infty$. We zien nu ook waarom we de andere afgeleide eigenlijk niet nodig hebben, want beide richtingscoëfficiënten zijn te bepalen met zowel de bovenste helft van de grafiek als de onderste helft.
15. We werken het limiet van a_1 uit en vinden de waarde.
16. We werken het limiet van a_2 uit en vinden de waarde.
17. Met de eerdere gevonden b komen we nu uit op deze twee vergelijkingen voor de asymptoten. Technisch gezien hadden we ook a_2 niet uit hoeven te rekenen met het limiet, want die hadden we ook kunnen bepalen met behulp van de symmetrie assen.

4.6.4 Theoretische onderbouwing

Het doel van deze opdracht is om meer begrip te krijgen rondom asymptoten en wat dat nu eigenlijk zijn. De leerlingen hebben tot nu toe alleen nog maar horizontale en verticale asymptoten gehad, maar dat zijn niet alle soorten die er zijn en de vraag is of ze nu wel echt begrijpen wat zo'n asymptoot betekent. Dit probeer ik te testen en te verbeteren door ze een opdracht te geven met twee asymptoten die niet horizontaal of verticaal zijn. Het moeilijkste gedeelte is om te bedenken hoe je de richtingscoëfficiënt bepaalt van zo'n asymptoot. Om hierachter te komen moet je het idee begrijpen dat een asymptoot eigenlijk een soort raaklijn is die in het oneindige geraakt wordt door de grafiek. Ze kunnen dus met alle voorkennis die ze hebben en kennis van limieten dit vrij gemakkelijk bepalen. Het idee en het begrip hierachter zijn de moeilijkste stappen. Als we nu kijken naar de ConcepTest en de voorwaarde die daarbij horen, dan is één daarvan dat er denkwerk in de opdracht moet zitten en dat zit er dus in.

Verder moet de opdracht op één concept focussen. Er worden limieten gebruikt in de uitwerking van het probleem, maar dit is niets meer dan het uitvoeren van het rekensommetje en vraagt geen inzicht over de limiet die ze uitrekenen. Het grote moeilijke denkwerk zit rondom de asymptoot en als je dat hebt doorgrond dan volgt daar een sommetje uit met een limiet. Verder wordt er ook best wel gebruik van symmetrie gemaakt, maar ook hier ligt niet de focus. Dit stuk is namelijk op veel manieren goed te doen en gaat uit van kennis die ze als het goed is hebben gehad in de onderbouw.

Ook is deze opdracht op meerdere manieren op te lossen. Binnen de uitwerking die ik heb gemaakt zitten al ontzettend veel nuances en ideeën die je op een andere manier had kunnen aanpakken. Je had namelijk bij het symmetrie gedeelte ook kunnen laten zien dat het invullen van x dezelfde vergelijking geeft als wanneer $-x$ erin wordt gesubstitueerd. Het kwadraat zorgt er voor dat het minteken weg gaat. Hieruit kan geconcludeerd worden dat de x -as de symmetrie as moet zijn en hetzelfde geldt voor de y -as. Ook ben ik me bewust van een compleet andere uitwerking waarbij je de gegeven formule omschrijft en dan gaat redeneren met het raken in de oneindigheid waardoor je de algemene formule voor de asymptoten van een hyperbool kunt vinden. Er wordt niet verwacht dat de leerlingen deze methode zullen gebruiken om de symmetrie aan te tonen. Het zou online te vinden kunnen zijn, maar dit is lastig gemaakt doordat de leerlingen niet weten dat dit een hyperbool is. Toch zou het kunnen gebeuren dat een enkele leerling dit zou verzinnen. Er zijn dus verschillende manieren om het probleem aan te pakken.

Hiernaast moeten er ook antwoorden zijn die fout zijn maar goed zouden kunnen lijken. Bij deze opdracht is dat een beetje lastig, want met een grafische rekenmachine en de juiste instellingen voor het beeldscherm, is het altijd mogelijk om fouten op te sporen. Dat gezegd hebbend als er niet duidelijk is wat een asymptoot is kan het feit dat er geen snijpunten zijn volgens de grafische rekenmachine leiden tot meerdere antwoorden die goed lijken, maar fout zijn. Alles wat in het gebied $-3 < a < 3$ zit kan dan goed lijken en met een klein rekenfoutje is het niet gek om in dit gebied uit te komen. Een simpel voorbeeld is als je bijvoorbeeld in stap (15) vergeet de wortel te nemen en dan kom je uit op $a = 1$. Met deze a raak je niet de grafiek gegeven dat je geen rekenfout in de b hebt gemaakt. Hoe dichter de berekende a is bij het correcte a des te logischer gaat het lijken, terwijl het toch fout is.

Als laatste moet de opdracht eenduidig geformuleerd zijn en moet de som niet te moeilijk of te makkelijk zijn. De eenduidigheid zit ook goed. De opdracht vraagt letterlijk om de vergelijking van de asymptoten te vinden bij een gegeven formule. Dit zou niet op een andere manier te interpreteren moeten zijn. Wat betreft de moeilijkheid, deze som zou de moeilijkste van de vier opdrachten moeten zijn. Het vraagt naar kennis van schuine asymptoten, wat de leerlingen nog niet eerder hebben gehad. Dat gezegd te hebben, deze som is nog wel te doen. Het internet biedt genoeg hulp en met de juiste inzichten over hoe asymptoten werken is ook deze som op te lossen. Het is een uitdagende som die inzicht van de leerlingen vraagt doordat ze kennis die ze al hebben op een nieuwe manier moeten toepassen.

5 Resultaat

Voor het verwerken van de resultaten is het programma SPSS gebruikt. De resultaten van deze verwerking staan in appendix 2. Verder zijn alle gegevens verzameld in Excel en bewerkt zodat het makkelijk te gebruiken is in SPSS. Deze resultaten zijn te vinden in appendix 1. In alle documenten zijn de leerlingen geanonimiseerd en zijn ze te vinden als een letter-nummer-combinatie. De letter geeft aan uit welke klas een leerling komt en het nummer zodat de resultaten van deze leerlingen binnen het overzicht makkelijk te vinden zijn. In de Excel overzichten waarin de resultaten van de leerlingen staan is te zien dat dit de totaal resultaten zijn. Er zijn dus resultaten die niet bruikbaar zijn voor het onderzoek. Sommige leerlingen hebben niet de eerste toets en/of de tweede toets gemaakt. Hierdoor kunnen deze resultaten niet vergeleken worden en daarom zijn deze leerlingen verwijderd uit het onderzoek. Verder heeft in de eerste klas waar de methode werd uitgevoerd, niet iedereen deze gemaakt. Deze leerlingen zijn toegevoegd aan de groep die zonder de methode de toetsen hebben uitgevoerd. Het resultaat van deze bewerkingen is in het laatste excel overzicht te vinden waarbij de groep is opgedeeld in degene die de methode hebben gemaakt en degene die dat niet hebben gedaan. Dit overzicht is gebruikt in SPSS om de statistiek uit te voeren.

De eerste stap in de statistiek is om te kijken of beide groepen normaal zijn verdeeld. We kiezen hiervoor van te voren een $\alpha = 0.05$ oftewel een grens van 5%. Als blijkt dat de groepen normaal zijn verdeeld kan er gebruik worden gemaakt van een standaard T-toets om te bepalen of het gemiddelde verschil tussen de toetsen significant afwijkt. Voor het testen op normaliteit wordt er binnen SPSS gebruik gemaakt van de Shapiro-Wilk test. Deze is over het algemeen net iets betrouwbaarder dan de Kolmogorov-Smirnov test. Hierbij worden de volgende hypothesen gesteld:

$$H_0 : D_1 \sim N(\theta, \sigma)$$

$$H_1 : D_1 \neq N(\theta, \sigma)$$

Hierin is D_1 de dataset van leerlingen die de methode hebben uitgevoerd. Deze dataset D_1 bevat het numerieke verschil tussen de eerste en de tweede toets per leerling. De nulhypothese is dat de cijfers die de leerlingen hebben gehaald ongeveer normaal verdeeld zijn. De alternatieve hypothese is dat deze niet normaal verdeeld zijn. Dezelfde toets met dezelfde hypothese stelling wordt ook uitgevoerd voor dataset D_2 die bestaat uit de leerlingen die de methode niet hebben gedaan.

Als er nu gekeken wordt naar de resultaten (appendix 2) dan valt er te zien dat voor de methode gebruikers een significantie van 0.398 wordt gevonden. Dit is groter dan de gestelde $\alpha = 0.05$ en dus wordt de nulhypothese niet verworpen. Dit betekent dat de toetscijfers normaal verdeeld zijn. Nu gebeurt er hetzelfde voor voor de set van de leerlingen die niet de methode hebben gebruikt. Binnen deze set vinden we een significantie van 0.369 en dus is deze ook groter dan $\alpha = 0.05$, dus ook deze dataset lijkt normaal verdeeld te zijn. In beide datasets

wordt de nulhypothese niet verworpen en wordt er dus aangenomen dat D_1 en D_2 normaal verdeeld zijn.

Nu beide sets normaal verdeeld zijn kan er gebruik worden gemaakt van een standaard t-toets om te kijken of de gemiddelde verandering tussen de cijfers significant anders is. Ook bij deze test wordt er weer een $\alpha = 0.05$ gekozen. Het SPSS resultaat staat in de appendix. SPSS heeft ook direct Levene's toets voor de vergelijking van de variantie gedaan, ook wel bekend als een F-toets. Hierbij wordt de volgende hypothese gesteld:

$$\begin{aligned} H_0 : \sigma_1 &= \sigma_2 \\ H_1 : \sigma_1 &\neq \sigma_2 \end{aligned}$$

De nulhypothese zegt dat de varianties tussen de datasets gelijk zijn, terwijl de alternatieve hypothese zegt dat ze niet gelijk zijn. Uit deze test komt een waarde van 0.415 wat groter is dan onze gekozen alpha. Dit betekent dat de varianties van de beide sets gelijk is en dus dat de nul hypothese behouden wordt. Het is belangrijk dat dit wordt getest omdat het van invloed is op de t-test en het aantal vrijheidsgraden. Bij deze toets hoort nu de volgende hypothese:

$$\begin{aligned} H_0 : \theta_1 &= \theta_2 \\ H_1 : \theta_1 &\neq \theta_2 \end{aligned}$$

Er wordt hier getoetst op het feit dat de verschillen tussen de toetsen gelijk zijn tegen dat deze niet gelijk zijn aan elkaar. Nu kan er dus gekeken worden naar de resultaten van de t-toets met gelijke variantie. Bij deze t-toets wordt er een significante waarde vinden van 0.056 geconstateerd. Deze waarde is groter dan $\alpha = 0.05$ dus wordt de nul hypothese niet verworpen. Met andere woorden er is geen statistisch bewijs dat de methode tot betere resultaten leidt.

Desondanks is het nog wel interessant om kort te kijken naar het gemiddelde verschil tussen de toetsen. Voor de leerlingen die de methode hebben gebruikt is tussen de eerste toets en de tweede toets het cijfer gemiddeld genomen met 0,1 omhoog gegaan. Tegelijkertijd zijn de leerlingen die niet de methode hebben gedaan gemiddeld genomen met 1,1 omlaag gegaan van hun eerste toets naar de tweede toets. Dit lijkt dus positief, maar kan binnen dit onderzoek nog niet statistisch worden onderbouwd.

Vervolgens wordt er dezelfde reeks aan testen gebruikt binnen de klas met de methode. Er wordt gemeten of binnen de klas wel een significant verschil kan worden aangetoond tussen de leerlingen die de methode hebben gemaakt en degene die dat niet hebben gedaan. Hiervan staan de SPSS resultaten in appendix 5. Eerst wordt er de hypothese getoets dat de variantie hetzelfde is tussen de twee groepen leerlingen. Met een score van 0,307 wordt de nulhypothese niet verworpen en hebben de twee groepen leerlingen dezelfde variantie. Nu wordt the hypothese getest dat de leerlingen die de methode hebben gedaan uit dezelfde verdeling komen als de leerlingen die de methode niet hebben gedaan. Op deze t-toets wordt er een waarde berekent van 0,011. Dit is kleiner dan de

gestelde $\alpha = 0.05$, dus wordt de nulhypothese verworpen. Dit betekent dat er nu statistisch is aangetoond dat er een verschil in de scores van de leerlingen zit binnen dezelfde klas tussen degene die wel de methode hebben gemaakt en degene die dat niet hebben gedaan.

6 Discussie

Binnen dit onderzoek zijn er een aantal punten waarop verbetering valt te behalen alswel meegenomen kunnen worden naar een volgend onderzoek. Deze punten zullen nu allemaal één voor één worden besproken.

Het allereerste punt was dat leerlingen moeilijk gemotiveerd konden worden voor de methode. Dit had te maken met een samenloop van omstandigheden en verplichtingen waar aan gehouden moest worden. De leerlingen waren niet gemotiveerd voor de methode omdat hij kort voor een toetsweek gegeven werd, maar er nog een aantal vakken waren die achterliepen door de online lessen. Wat er dus gebeurde was dat leerlingen voor meerdere vakken nog twee of drie toetsen te gaan hadden voor het begin van de toetsweek, waardoor ze het ontzettend druk hadden. Het is dan ook zeer begrijpelijk dat leerlingen geen tijd of zin hebben om aan een huiswerk set voor wiskunde te gaan werken die ook nog eens extra tijd kost en niet verplicht is. Eigenlijk was het wel verplicht, het was namelijk huiswerk, maar er werd niet op gecontroleerd. Dit betekent feitelijk voor de leerlingen dat het niet verplicht is. Dit werd zo gedaan, omdat op dat moment er hogere prioriteiten waren voor de uitvoerend docent door de drukte die Covid hem bezorgde. Het feit dat het maken van de methode niet verplicht was is op zichzelf al een reden voor leerlingen om het niet te doen, laat staan met de extra druk van alle toetsen die ze moesten doen. Verder hadden de leerlingen ook moeite met het begrijpen van het nut van de methode. Ze zagen niet waarom het belangrijk was dat je je op een opdracht goed voorbereidt of waarom je je uitwerking woordelijk kunt uitleggen. Het gevoel ontstaat hier dat leerlingen wiskunde alleen maar zien als de uitwerking van de sommen en niet de ideeën die erachter zitten. Het resultaat hiervan was uiteindelijk dat veertien leerlingen de methode hebben gemaakt en ingeleverd. Van deze veertien leerlingen hebben een paar ook nog het tweede toetsmoment gemist, waardoor er uiteindelijk maar twaalf resultaten waren die te gebruiken zijn. Ook binnen de groep leerlingen die niet de methode hebben gedaan, zijn er een aantal resultaten die niet te gebruiken zijn. Dit kwam doordat sommige de tweede toets hebben gemist of de eerste toets nog moesten inhalen.

Verder zijn er in het ontwerp proces ook meerdere iteraties geweest van de methode. De eerste versies waren te ambitieus en hierop zijn aanpassingen gemaakt in overleg met de begeleiders en de uitvoerend docent. Het resultaat hiervan was de huidige methode zoals beschreven in het hoofdstuk instrumenten. Uit deze methode komen nog een aantal interessante observaties uit de ingeleverde werken van de leerlingen op de methode. De behaalde toetscijfers voor de eerste toets lagen bij de leerlingen in de richting van hun gemiddelde cijfer voor het vak wiskunde, maar dit blijkt geen indicatie te zijn voor hoe goed de leerling scoorde op de methode. Gegeven dat het maar twaalf resultaten zijn valt het op dat leerlingen die de toets toch iets minder goed deden vaak wel redelijk of goed scoren op de methode, terwijl de leerlingen die goed presteerde op de toets niet direct goed scoorde op de methode. Hieruit kunnen we niet direct iets afleiden aangezien meerdere factoren hierop van invloed zijn. Het is namelijk zo dat er in verschillende gradaties moeite is gedaan voor de methode,

sommige hebben geweigerd om een schriftelijke uitleg bij te voegen terwijl ze het waarschijnlijk prima begrijpen als je de uitwerkingen zag. Verder was er de eerder besproken tijdsdruk en aangezien dit een bovenbouw klas is, zullen sommige leerlingen meer te doen hebben dan anderen door hun vakkenpakket. Toch kun je deze scores op de methode wel zien als een punt in het voordeel van de methode. Een mogelijke uitleg is namelijk dat de leerlingen die gemiddeld scoren het eigenlijk allemaal best wel goed snappen alleen dat ze de tijd ervoor nodig hebben om het tot uiting te kunnen brengen. Ze scoren misschien niet zo goed op de gewone toets omdat ze onder tijdsdruk zitten en gespannen zijn. Deze mogelijke redenatie is niet te onderbouwen binnen dit onderzoek en er zou meer vervolg onderzoek moeten komen om dit uit te zoeken.

Als er dus goed gekeken wordt naar de motivatie van de leerlingen dan is het grootste punt dat hieruit meegenomen kan worden dat een stabiele schoolsituatie en de methode als toetsvorm ontzettend veel zouden helpen. Op dit moment zorgt het afwisselend online en fysiek les geven voor een rare situatie. Dit heeft bij deze school erin geresulteerd dat alle toetsen zijn verschoven wat veel drukte oplevert aan het einde van het jaar. Als dit niet het geval was dan zouden de leerlingen vermoedelijk makkelijker te motiveren zijn, doordat ze minder tijdsdruk hebben van alle toetsen die op het laatste moment nog gegeven moeten worden.

Een andere interessante observatie over de methode is als er gekeken wordt naar de individuele opdrachten. Opdracht 3 werd als de moeilijkste opdracht ervaren, gezien de resultaten op deze opdracht. Het idee was dat opdracht 4 de moeilijkste opdracht was, maar daar kwamen een aantal leerlingen nog best wel redelijk uit met een aantal slimme redeneraties. Opdracht 3 daarentegen is eigenlijk door niemand goed gedaan. Opdracht 3 is anders dan de rest van de opdrachten doordat deze puur een bewijs opdracht is. De kettingregel voor een productfunctie van drie functies moet worden gevonden en bewezen. De leerlingen kunnen prima bedenken hoe de regel eruit zou moeten zien, maar iedereen probeert te bewijzen dat deze regel klopt aan de hand van voorbeelden. Hieruit blijkt dat er toch een graad van abstract denken nog mist en dat er niet zo los met de functies geredeneerd kan worden zonder dat er een invulling voor deze functie plaatsvindt. Deze som is ook te vinden als een van de uitdagende sommen in het boek van de leerlingen. Dit in combinatie met het internet zou betekenen dat het bewijs goed op te zoeken zou moeten zijn. Hiernaast zou opdracht 4 moeilijker moeten zijn, omdat het over hyperbolische functies gaat die ze nog nooit hebben gehad en ze daar schuine asymptoten moeten vinden wat ze nog nooit hebben gedaan. De praktijk lijkt alleen de andere kant op te wijzen en het lijkt alsof bewijzen toch veel moeilijker wordt bevonden.

Een ander punt van discussie zijn de verschillen tussen de klassen. De klassen krijgen door verschillende docenten les en ze zijn inherent verschillend. Binnen dit onderzoek wordt er gedaan alsof de klassen gelijk zijn, maar eigenlijk kan dit nooit voor elkaar worden gekregen. Zelfs al was alles door dezelfde docent gedaan, dan nog zouden de klassen verschillend zijn. Beide docenten zijn zeer goed en dus wordt er niet aan getwijfeld dat ze de klassen positief beïnvloeden. Het verschil in de klassen is als er cijfermatig naar gekeken wordt ook niet heel

groot. In appendix 3 staat per toets duidelijk de gemiddelde score per klas met variantie. Verder is er zowel op de eerste toets als de tweede toets een t-toets gedaan om te kijken of de toetsresultaten significant afwijken. Hieruit volgt dat ze dat niet doen. Er zijn dus wel wat verschillen tussen de klassen, maar deze zijn niet significant aantoonbaar. Om verder aan te tonen dat we een t-toets mogen gebruiken om deze toetsen te vergelijken, zijn alle toetsresultaten getest op normaliteit net zoals in de resultaten. De resultaten hiervan zijn te vinden in appendix 4. Ook bij deze zijn ze allemaal normaal verdeeld behalve de eerste toets van docent 2. Deze is op dit moment niet normaal verdeeld door het hoge gemiddelde van een 7,5 en de inherente begrenzing die een toets heeft. Je kunt namelijk maximaal een 10 halen op deze toets. Tegelijkertijd zijn er wel uitschieters naar beneden in de richting van een 2. Er is één datapunt toegevoegd die even ver naar boven ligt als de laagste uitschieter naar beneden en dan is de cijferlijst wel normaal verdeeld. Dit is ook te zien in appendix 4. We nemen hierom dus nog steeds aan dat ook deze dataset normaal verdeeld is. Hiernaast zegt de Kolmogorov-Smirnov test al zonder de aanpassingen dat deze inderdaad normaal is verdeeld. De klassen zijn dus niet significant verschillend van elkaar.

Ook de toetsen die zijn gebruikt om te testen hoe de leerlingen het doen moeten goed bekeken worden. De eerste opmerking kan namelijk zijn dat het niveau tussen de eerste en de tweede toets verschilde. Om dit te voorkomen is de tweede toets een aanpassing geweest van de eerste toets. De enige aanpassingen die zijn gemaakt zijn numeriek en verder zijn de sommen hetzelfde gebleven. Het verschil tussen de toetsen zou dus minimaal moeten zijn. Wat verder aan deze toetsen op te merken valt is dat de eerste toets een geheel uur duurde terwijl er voor de tweede toets alleen maar 30 minuten stond. Dit heeft te maken met het feit dat in de eerste toets ook nog vaardigheden zaten verwerkt. Deze toets is daarvoor gecorrigeerd zoals te zien is in de Excel bestanden. De tweede toets bevatte dus alleen de stof die in het hoofdstuk was behandeld waar de methode over ging. Door die correctie met de vaardigheden zou ook de tijd die de leerlingen op beide toetsen hebben gespendeerd aan de sommen uit het hoofdstuk ongeveer gelijk moeten zijn. Een andere opmerking kan ook nog zijn dat het bij de tweede toets beter zou gaan dan de eerste. Dit zou dan komen doordat de leerlingen met de eerste toets al weten hoe de sommen moeten en de tweede toets bijna hetzelfde is alleen met andere getallen. Deze opmerking is niet gegrond, want de groep met leerlingen die niet de methode maakt, is gemiddeld met 1,1 omlaag gegaan bij de tweede toets. Als deze opmerking waar zou zijn dan zou er verwacht worden dat de cijfers van de leerlingen minstens gelijk blijven. Deze opmerking zou waarschijnlijk meer correct zijn, wanneer de tweede toets direct werd gegeven nadat de eerste toets was besproken.

Vervolgens zou er ook bezwaar kunnen zijn tegen het feit dat de leerlingen uit de ene klas die niet de methode hebben gedaan zijn toegevoegd bij de groep die niet de methode hebben gekregen. Dit is niet met voorbedachte rade gedaan om een beter resultaat te verkrijgen en was al van te voren bedacht om de beide datasets zo groot mogelijk te houden. Als we nu naderhand kijken naar hoe de resultaten zijn van deze groep dan zien valt er te zien dat deze groep die

is overgezet naar de groep zonder methode vrij gemiddeld is voor de klas. Het zijn niet alleen de laag scorende leerlingen of hoog scorende leerlingen die zijn overgezet. Deze omzetting om de datasets zo groot mogelijk te houden zou dus niet moeten af doen aan het resultaat.

Wat verder zeer opvallend is dat het verschil binnen de klas waar de methode is uitgevoerd tussen de leerlingen die het hebben gedaan en de leerlingen die het niet hebben gedaan zeer groot is. In appendix 5 staat de test waaruit af te leiden is dat er binnen de klas zelf wel een significant verschil zit tussen de leerlingen die de methode hebben gedaan en degene die dat niet hebben gedaan. We tonen daar met statistische significantie aan dat er een verschil is. Een mogelijke uitleg hiervan is dat de methode heeft gewerkt, maar het kan ook heel simpel zijn dat de leerlingen die de methode niet gemaakt hebben ook niet het normale huiswerk hebben gedaan. Het zou dus kunnen zijn dat de leerlingen doordat ze de methode hebben gemaakt, meer hebben geoefend dan degene die dat niet hebben gedaan binnen de klas, maar het kan ook zijn dat ze het beter hebben onthouden door de methode. Hier kan geen zekere uitspraak over worden gedaan, maar dit is wel een potentieel positief punt voor de methode. In een vervolgonderzoek wordt aangeraden om te meten hoeveel tijd de leerlingen in hun voorbereiding stoppen en wat ze aan voorbereiding doen voor de toets. Een vervolgonderzoek is hier zeker nodig om met zekerheid uitspraken te kunnen doen.

Hetzelfde argument richting de andere klas dat deze minder heeft geoefend dan de leerlingen met de methode is minder aannemelijk. Deze klas heeft namelijk in de tijd dat de leerlingen met de methode bezig waren, de gemengde opgaven uit het boek behandeld en gedaan. De hoeveelheid tijd die leerlingen aan hun werk spenderen zal altijd iets variëren, maar de klas zonder de methode heeft niet in de tussentijd niks gedaan en zal dus ongeveer dezelfde hoeveelheid tijd in de klas aan het hoofdstuk hebben gespendeerd. Buiten de klas is het lastig om er uitspraken over te doen. Als ervan uit wordt gegaan dat de leerlingen allemaal netjes al het huiswerk maken. Dit betekent dat de ene groep vier moeilijke opdrachten heeft waar ze redelijk wat tijd aan kwijt zijn, terwijl de andere klas de hele gemengde opgaven doet. Dit zijn iets makkelijkere sommen in vergelijking tot de methode, maar het zijn er meer. De inschatting is gemaakt dat wanneer de leerlingen alles netjes zouden maken de methode net wat meer tijd zou kosten, maar dat er niet een groot verschil in tijd tussen zal zitten. De aanname dat alle leerlingen alle sommen netjes maken daarentegen is waarschijnlijk al niet goed. Om daarom meer te kunnen zeggen, wordt er aangeraden om in vervolgonderzoeken ook te kijken naar de hoeveelheid voorbereiding die de leerlingen doen.

Als er nu gekeken wordt naar het uiteindelijke resultaat dan kan er net niet aangetoond worden dat er een onderscheid is tussen de groepen. De gevonden waarde ligt zeer dicht bij onze gekozen α , maar het ligt er nog wel boven. Dit betekent niet dat de methode helemaal niet werkt, sterker nog met een aantal waargenomen punten van hierboven, lijkt het erop dat er meerdere potentiële positieve effecten zijn van deze manier van werken. Het feit dat we het niet kunnen aantonen dat het leidt tot een betere leerprestatie heeft meerdere

oorzaken. De eerste hiervan is dat de testgroep aan beide kanten eigenlijk klein is. Met maar twaalf bruikbare resultaten van leerlingen met de methode is dat gewoon te weinig. Ook de controle groep was niet zeer groot met 26 bruikbare resultaten. Het beste zou zijn als er 30 of meer resultaten in beide groepen zitten. Vanaf 25 in beide groepen is het ook nog best wel goed, maar onder de 25 worden de groepen wel erg klein. Zelfs als het wel met statistiek aangetoond kon worden dan waren de testgroepen klein en zou dit nog verder onderzocht moeten worden aangezien het resultaat dan ook een extreme waarde had kunnen zijn. Het gevolg van de kleine testgroepen is dat de variantie relatief groot is en deze kan alleen verkleind worden door het groter maken van de testgroepen. Doordat de waarde op dit moment zo dicht bij de gekozen α ligt, lijkt het hoopgevend dat met grotere groepen er wel een significant verband aan te tonen is. Dit zou alleen verder onderzocht moeten worden.

Op de uitvoering van de methode zijn er ook een aantal punten die besproken moeten worden. Het eerste punt is dat de eerste toets door de docent van de klas zelf is nagekeken en de rest door de onderzoeker. De eerste toets is wel nog gecorrigeerd voor de vaardigheden door de onderzoeker. Om het toch zo consistent mogelijk te houden, is het nakijkformulier voor de eerste toets ook gedeeld. Deze was zeer duidelijk in hoe de puntenverdeling moest gebeuren. De tweede toets is met hetzelfde nakijkformulier alleen met de numerieke aanpassingen erbij nagekeken door de onderzoeker waardoor er nog steeds zoveel mogelijk hetzelfde werd beoordeeld. Ook bij het nakijken is er niet gekeken hoe welke leerlingen scoorden om te voorkomen dat er onbewuste resultaat gedreven vooroordelen ontstonden. Pas op het eind toen alles was nagekeken is er gekeken naar de combinaties van de resultaten van individuele leerlingen. Dit alles is zo gedaan om te voorkomen dat er naderhand gezegd kan worden dat de resultaten beïnvloed zijn. Het verschil tussen de personen die nakeken is geminimaliseerd op deze manier en hetzelfde geldt voor de mogelijkheid dat er onbewust resultaat gedreven is nagekeken.

Verder werd er in de methode al aangegeven dat het de bedoeling was om de leerlingen te motiveren om hun best te doen. Zeker ook voor de tweede toets die eigenlijk niet meetelt. Dit is grotendeels gelukt doordat het door de uitvoerende docenten werd gepresenteerd als een herhalingsstoetsje voor de aankomende toets. De eerstvolgende toets voor wiskunde werd een combinatie tussen het hoofdstuk waar de methode over ging en een later hoofdstuk in het boek met nog wat vaardigheden erbij. Het was dus vrij makkelijk voor de docenten om de leerlingen te motiveren voor de tweede toets alsdien gepresenteerd als een herhalingsstoetsje. Ook de resultaten op het tweede toetsje leken niet heel gek. Er was hooguit een enkeling waar er getwijfeld kan worden of die zijn best heeft gedaan op het tweede toetsje of dat de leerling daadwerkelijk alles was vergeten. Al met al zijn de resultaten die door de leerlingen zijn gehaald op de tweede toets representatief voor wat ze kunnen. Er is geen reden om te twifelen aan de inzet van de leerlingen op deze tweede toets.

Een algemeen punt dat hier bij aansluit is dat dit onderzoek goed gebruik zou kunnen maken van meer ruimte en tijd. Vanuit de originele inspiratiebron zou nadat de methode was ingeleverd er een les komen waarbij de leerlingen

in groepjes hun resultaten zouden evalueren. Deze evaluatie moesten de leerlingen dan ook weer inleveren en werd meegerekend in het uiteindelijke cijfer van de leerlingen. Dit om nog extra het samenwerken en het na evalueren te benadrukken bij de leerlingen voor extra leerwinst. Dit kon niet gedaan worden door een simpel tijdsgebrek die ook al eerder is aangestipt. Dit punt in combinatie met voorgenoemde punten over dat er te weinig tijd voor de leerlingen was en dat de methode niet als toets kon worden getest, leidt tot de conclusie dat er veel vervolgonderzoek nodig is. Dit vervolgonderzoek zou dan goed gebruik kunnen maken van meer ruimte en tijd, zodat deze methode in zijn compleetheid onderzocht kan worden.

Als laatste moet er nog heel even kort gekeken worden naar een bron die is gebruikt voor dit onderzoek. Het gaat om de bron van Bales uit 1996. Er is wat discussie rondom deze bron en de piramide die hieruit voort komt. Deze piramide koppelt verscheidene vormen van leren aan een effectief percentage. Het is zeker waar dat deze percentages voor iedere leerling verschillend zijn en dat voor de één een voorbeeld zien beter werkt dan de uitleg ervan horen. Toch kan er nog steeds wel gebruik worden gemaakt van deze piramide, er moet alleen niet zo strak naar de percentages worden gekeken. De verschillende gradaties waarin leerlingen de stof namelijk zullen begrijpen blijft namelijk van kracht, waarbij als leerlingen het zelf kunnen uitleggen, dat één van de beste manieren is voor de leerlingen om nieuwe stof te leren begrijpen. Desondanks de discussie die dus bestaat rondom deze bron, kan er nog steeds gebruik van worden gemaakt en ideeën aan worden ontleend.

7 Conclusie

Er is nu een methode getest die als doel had om als toetsvorm te worden gebruikt om de kennis en begrip van de leerlingen te ontwikkelen. Deze methode is niet als toetsvorm gegeven zoals is besproken in de uitvoering van de methode. Daarnaast zijn er ook redelijk weinig resultaten terug gekomen van de methode door tijdsdruk en weinig motivatie vanuit de leerlingen. Toch zijn er wel wat positieve punten voortgekomen uit de resultaten. Leerlingen die normaal gesproken gemiddeld presteren scoorden ontzettend goed op deze methode. Dit leidt tot de vraag of de standaard manier van toetsen wel bij deze leerlingen past en of ze zich niet beter wiskundig kunnen ontplooien door toetsvormen die hen meer tijd geven om erover na te denken. Verder was er binnen de klas waar de methode werd getest een aantoonbaar verschil tussen degene die de methode hadden gedaan en degene die dat niet hadden gedaan. Degenen die de methode hadden gedaan scoorden veel beter op de tweede toets dan het andere gedeelte van de klas. Dit doet vermoeden dat ze de stof inderdaad beter hebben onthouden, omdat ze de stof beter begrepen. Toch kon er niet aangetoond worden dat er een verschil zat tussen de groep met de methode en alle leerlingen die niet de methode hebben gedaan. De significantie en de gekozen alpha verschilden zeer weinig. Het is dus zeker mogelijk dat het aantoonbaar gemaakt kan worden door grotere groepen te nemen waardoor de variantie afneemt. De hoofdconclusie die dus getrokken kan worden uit dit onderzoek is dat er meer onderzoek hiernaar gedaan moet worden. Toch kan de hoofdvraag nog wel enigszins worden beantwoord. Het lijkt er namelijk op dat deze methode gebruiken als een toets potentie heeft. Hiernaast lijkt het ook alsof het invloed heeft op de kennis en het begrip van de leerlingen. Dit is nog niet aangetoond, maar vervolg onderzoek met grotere groepen en deze methode als toets zou tot betere resultaten kunnen leiden.

8 Bronnen

- Bales, E. (1996). Corporate Universities Versus Traditional Universities. Keynote at the Conference on innovative Practices in Business Education. Orlando, Florida. December 4-7
- Brinke, D. (2011). Eigentijds toetsen en beoordelen. *Journal of Vocational Education & Training*. https://www.researchgate.net/publication/254773804_Eigentijds_toetsen_en_beoordelen
- Crouch, Catherine & Watkins, J. & Fagen, Adam & Mazur, Eric. (2007). Peer Instruction: Engaging students one-on-one, all at once. this volume. 1.
- Drijvers, P. (2015). Denken over wiskunde, onderwijs en ICT. Utrecht: Print All.
- Granberg, C. (2016). Discovering and addressing errors during mathematics problem-solving—A productive struggle? *The Journal of Mathematical Behavior*, 42, 33–48. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.02.002>
- Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. pp. 371–404. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1).
- IJsebaart, J. L. L. (2018). Wiskundige denkactiviteiten in het nieuwe curriculum van vwo wiskunde B. https://pure.tue.nl/ws/portalfiles/portal/135470180/20180822_OvO_Eindverslag_IJsenbaart.pdf
- Jang, H., Lasry, N., Miller, K., & Mazur, E. (2017). Collaborative exams: Cheating? Or learning? *American Journal of Physics*, 85(3), 223–227. <https://doi.org/10.1119/1.4974744>
- Keijzer, R., & Terwel, J. (2003). Learning for mathematical insight: a longitudinal comparative study on modelling. *Learning and Instruction*, 13(3), 285–304. [https://doi.org/10.1016/s0959-4752\(02\)00003-8](https://doi.org/10.1016/s0959-4752(02)00003-8)
- Maciejewski, W. (2020). Let Your Students Cheat on Exams. *PRIMUS*, 1–13. <https://doi.org/10.1080/10511970.2019.1705450>
- Marino, R., Clarkson, S., Mills, P. A., Sweeney, W. V., & DeMeo, S. (2000). Using Poster Sessions as an Alternative to Written Examination—The Poster Exam. *Journal of Chemical Education*, 77(9), 1158. <https://doi.org/10.1021/ed077p1158>
- Marzano, R. J. (2004). Building background knowledge for academic achievement: Research on what works in schools. Alexandria, VA:ASCD
- Marzano, R. J., & Miedema, W. (2018). *Leren in vijf dimensies* (7de editie). Koninklijke Van Gorcum.
- Neuman, S. B., Kaefer, T., & Pinkham, A. (2014). Building Background Knowledge. *The Reading Teacher*, 68(2), 145–148. <https://doi.org/10.1002/trtr.1314>

- Ozden, M., & Gultekin, M. (2008). The Effects of Brain-Based Learning on Academic Achievement and Retention of Knowledge in Science Course. *Electronic Journal for Research in Science & Mathematics Education*, 12(1), 1. <https://ejrsme.icrsme.com/article/view/7763>
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20–26
- Sternberg, R. J., & Ben-Zeev, T. (2012). *The Nature of Mathematical Thinking*. Taylor & Francis.
- Streun, A., Zwaneveld, G., & Drijvers, P. H. M. (2012). *Handboek wiskunde-didactiek*. Epsilon Uitgaven.
- Vygotsky, L. (1978) Interaction Between Learning and Development. In Gauvain & Cole (Eds.) *Readings on the Development of Children*. New York: Scientific American Books, p. 34-40.

9 Appendix 1 Excel overzichten

Resultaten van de klas met de methode

eerste toets zonder vaardigheden	1a			2a			2c			2d			3a			3b			3c totaal			Cijfer	cijfers methode			Cijfers eerste toets met vaardigheden	cijfers twe			1a			2a			2c			3a			Totaal			Cijfer	Verschil eerste en tweede toets
	3	3	3	2	2	2	2	2	4	2	2	2	3	1	22	10					3		3	3	2		2	2	2	2	3	17	10													
A1	3	3	3	1	1,5	2	2	0	2	0	14,5	6,9														6,0			2	3	0	2	1	0	1	9	5,8	-1,2								
A2	1	0	2	1	2	2	0	0	0	0	8	4,3														4,0			0	3	1	0	0	2	0	6	4,2	-0,1								
A3											0	1,0														5,2			-	-	-	-	-	-	0											
A4											0	1,0																	3	3	1	2	1	0	3	13	7,9									
A5	0	0	2	0	2	1	0	1	0	6	3,5															2,5			0	0	1	0	0	2	1	4	3,1	-0,3								
A6	2	2	2	1	1	0	0	1	0	9	4,7	5,6														4,2			0	3	2	1	1	2	3	12	7,4	2,7								
A7	3	3	2	1,5	0	1	10,5	5,3																		4,8			0	2	0	1	0	0	0	3	2,6	-6,6								
A8	3	3	2	2	2	4	1	3	0	20	9,2	3,2														7,0			3	3	2	0	2	1	3	14	8,4	0,9								
A9	2	3	2	0	2	2	1	3	1	16	7,5	6,1														6,1			2	1	0	1	0	1	2	7	4,7	-3,0								
A10	2	3	1,5	1	2	4	0	2	1	16,5	7,8	6,1														6,6			2	1	0	1	0	1	2											
A11	2	3	2	1,5	2	4	1	0	15,5	7,3	9,1															7,5			0	3	1	0	1	2	3	10	6,3	0,0								
A12	3	2	1	1,5	1	1	1	1,5	1	13	6,3	6,3														4,6			2	3	0	1,5	0	1	2	9,5	6,0	1,3								
A13	1	2	1	2	2	1	0	9	4,7	6,3	6,3															4,3			2	3	0	1,5	0	1	2	12	7,4	-2,0								
A14	2	3	2	1,5	2	4	2	3	1	20,5	9,4	4,4														9,3			1	0	2	2	2	2	3	12	7,4	0,4								
A15	3	3	1	1,5	2	3	1	2	0	16,5	7,8	7,3														6,3			2	3	1	1,5	1	2	3	13,5	8,1	0,0								
A16	2	3	2	1,5	1	4	0	1	1	15,5	7,3	6,1														6,6			3	2	0	2	0	2	3	12	7,4									
A17	2	3	0	1,5	2	4	0	0	0	12,5	6,1	3,8														5,4			3	3	0	2	2	2	3	15	8,9	0,8								
A18	2	1	2	2	2	4	2	1,5	1	17,5	8,2	3,1														9,0			2	3	0	2	2	2	3	15	8,9	0,8								
A19	3	3	1	2	2	2	0	1	0	14	6,7															6,0			2	3	0	1,5	1	1	2	10,5	6,6	-0,2								
A20										0	1,0																		0	0	0	0	0	2	0	2	2,1	-4,1								
A21	1	3	2	2	2	4	0	0	14	6,7	4,5															5,5			0	0	1	0	0	2	0	3	2,6	0,7								
A22	3	3	2	2	1	4	2	2	0	19	8,8															8,5			3	3	2	2	2	2	2	16	9,5									
A23	2	3	2	1	2	4	0	1	15	7,1	4,1															6,1			2	0	2	1,5	2	2	3	12,5	7,6	-0,7								
A24	2	3	2	2	2	4	0	2	1	18	8,4	3,5														7,0			0	0	1	2	2	0	0	5	3,6	-2,7								
A25	1	3	1	2	2	4	0	0	0	13	6,3															5,5			0	0	1	2	2	0	0	4	3,1	-2,2								
A26	3	2	1	1,5	1	1	0	1	0	10,5	5,3	5,7														4,5			2	3	1	0	0	2	2	13	7,9	0,5								
A27	2	3	2	1,5	2	2	1	0	15,5	7,3																5,4			2	3	1	2	1	2	2	12	7,4	-1,6								
A28	3	3	1	1,5	2	4	2	2	1	19,5	9,0															9,3			3	2	1	1	0	2	3	12	7,4									
A29										0	1,0																									0	1,0									
Gemiddeld																	6,9													Gemiddeld	6,0	-0,83														

Resultaten van de klas zonder de methode

eerste toe	1a	1b	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	totaal	Cijfer	Cijfers eerste toets met vaardigheden	cijfers twe 1a	1b	2a	2b	2c	3a	3b	Totaal	Cijfer	verschil eerste en tweede toets
	3	3	2	2	2	4	2	3	1	22	10			3	3	2	2	2	3	17	10	
B1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	4	2,6	2,2		1	0	0	0	0	0	1	1,5	-0,7
B2	2	3	2	1,5	2	2	2	1	0	15,5	7,3	6,9		0	2	2	1,5	2	0	10,5	6,6	-0,3
B3	2	2	2	2	2	4	0	0	0	14	6,7	5,8		0	0	2	2	2	0	6	4,2	-1,6
B4	3	2	2	2	2	4	0	3	1	19	8,8	8,5		2	3	2	1,5	2	2	15,5	9,2	0,7
B5	3	3	2	2	2	3	0	2	1	18	8,4	7,9								0	1,0	
B6	1	3	0	0,5	2	2	1	2	1	12,5	6,1	5,4								0	1,0	
B7	3	3	2	2	2	3,5	2	2	1	20,5	9,4	7,9								0	1,0	
B8	3	2	2	1,5	1	4	1	1	0	15,5	7,3	6,6		3	2	2	1,5	2	1	12,5	7,6	1,0
B9	2	2	2	2	1	2	1	1,5	0	13,5	6,5	4,8								0	1,0	
B10	3	3	2	2	2	4	2	3	0	21	9,6	9,7		1	3	2	2	2	3	15	8,9	-0,8
B11	3	2	2	1,5	2	4	1	0	0	15,5	7,3	7,2		3	2	2	1	2	1	11	6,8	-0,4
B12	3	3	2	1,5	2	4	2	1,5	1	20	9,2	8,5								0	1,0	
B13	2,5	2,5	2	1,5	2	4	0	3	0	17,5	8,2	6,6		2	0	2	2	2	1	12	7,4	0,8
B14	2	3	2	1,5	2	3,5	1	1,5	0	16,5	7,8	7								0	1,0	
B15	3	2,5	2	2	2	4	2	3	1	21,5	9,8	9,6		0	2	2	2	2	3	13	7,9	-1,7
B16	2,5	3	2	1	2	4	0	0	0	14,5	6,9	5,7		0	3	2	2	2	0	9	5,8	0,1
B17	3	3	2	0,5	2	2	1	1	0	14,5	6,9	6		2	2	2	0	0	0	6	4,2	-1,8
B18	2	3	2	1,5	1	2	1	0,5	0	13	6,3	4,9								0	1,0	
B19	2	2	2	2	2	1	1	2	1	15	7,1	7		3	3	2	1,5	2	2	15,5	9,2	2,2
B20	1	3	2	1,5	2	2,5	1	0	0	13	6,3	6,1		2	2	0	1,5	0	0	5,5	3,9	-2,2
B21	3	3	2	2	2	2	2	1	1	18	8,4	7,3		3	3	2	2	2	1	15	8,9	1,6
B22	1,5	3	2	2	2	4	1	3	1	19,5	9,0	8,4		3	3	2	2	2	3	17	10,0	1,6
B23	2	3	2	1	2	3	0	0	0	13	6,3	7,3		3	2	0	0	0	0	5	3,6	-1,3
B24	3	3	2	1,5	2	1	0	1,5	0	14	6,7	4,9		3	3	2	2	2	1	16	9,5	2,2
B25	3	3	1	1,5	2	4	2	3	1	20,5	9,4	9,6		3	2	2	1,5	2	2	15,5	9,2	-0,4

Bewerkte resultaten

[illegible]

10 Appendix 2 test op normaliteit op verschillen tussen de toetsen

Group Statistics

VAR00007		N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
VAR00006	R	12	,1333	1,49565	,43176
	N	27	-1,0926	1,89695	,36507

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
methodegebruikers	,214	12	,133	,932	12	,398

a. Lilliefors Significance Correction

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
nietmethodegebruikers	,110	27	,200 [*]	,960	27	,369

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

Independent Samples Test

Levene's Test for Equality of Variances					t-test for Equality of Means				
	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
VAR00006									
Equal variances assumed	.681	.415	1.977	37	.056	1.22593	.62002	-.03035	2.48220
Equal variances not assumed			2.168	26.599	.039	1.22593	.56541	.06498	2.38687

11 Appendix 3 Testen op verschillen tussen de klassen

Group Statistics					
	Docent	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Cijferstoets1	R	25	6,8760	1,58831	,31766
	M	25	7,5320	1,57446	,31489

Independent Samples Test									
Levene's Test for Equality of Variances					t-test for Equality of Means				
	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
Cijferstoets1									
Equal variances assumed	,030	,862	-1,467	48	,149	-.65600	,44729	-1,55533	,24333
Equal variances not assumed			-1,467	47,996	,149	-.65600	,44729	-1,55533	,24333

Group Statistics

	Docenten	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Cijferstoets2	R	23	6,0261	2,28398	,47624
	M	18	6,9111	2,50784	,59110

Independent Samples Test

Levene's Test for Equality of Variances				t-test for Equality of Means					
	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
Cijferstoets2								Lower	Upper
Equal variances assumed	.107	.746	-1,180	39	.245	-.88502	.75028	-2,40261	.63257
Equal variances not assumed			-1,166	34,877	.252	-.88502	.75909	-2,42624	.65620

12 Appendix 4 test op normaliteit toets resultaten

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Docent1toets1	,096	25	,200 [*]	,970	25	,638

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

Case Processing Summary

	Valid		Cases Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
Docent2toets1	25	50,0%	25	50,0%	50	100,0%

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Docent1toets2	,205	23	,014	,914	23	,050

a. Lilliefors Significance Correction

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Docent2toets2	,175	18	,150	,908	18	,079

a. Lilliefors Significance Correction

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Docent2toets1aanpassing	,148	26	,150	,931	26	,082

a. Lilliefors Significance Correction

13 Appendix 5 verschil binnen de klas met de methode

Group Statistics					
	VAR00002	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Verschilbinnendeklasmet methode	W	12	,1333	1,49565	,43176
	N	9	-2,1111	2,13685	,71228

Independent Samples Test

Levene's Test for Equality of Variances						t-test for Equality of Means				
Verschilbminderklassenmethode	Equal variances assumed	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
	Equal variances assumed	1,100	,307	2,838	19	,011	2,24444	,79098	,58890	3,89999
	Equal variances not assumed			2,695	13,621	,018	2,24444	,83292	,45334	4,03555